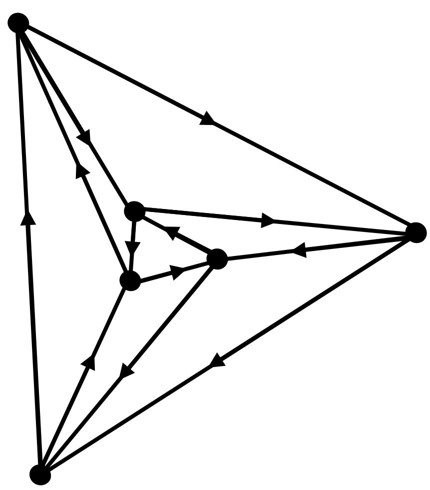
Agnis ANDŽĀNS, Dace BONKA,
Zane KAIBE, Laila ZINBERGA

Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm uzdevumi un atrisinājumi 2009./2010. mācību gadā



Rīga 2011

A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. ***Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2009./2010. mācību gadā.***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2011. – 117 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2009./2010. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi un atrisinājumi 4. – 9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

© **Agnis Andžāns, Dace Bonka,**
Zane Kaibe, Laila Zinberga,
2011

ISBN 978-9984-45-358-3

Saturs

Ievads 4

Uzdevumi 6

1. Konkurss 4.klasēm „Tik vai... Cik?” 6
2. Jauno matemātiķu konkurss 14
3. Profesora Cipariņa klubs 18
4. Latvijas 22. sagatavošanās olimpiāde matemātikā 26
5. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. (Rajona) kārta 29
6. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta 32
7. Latvijas 37. atklātā matemātikas olimpiāde 33

Ieteikumi 38

Atrisinājumi 46

1. Konkurss 4.klasēm „Tik vai... Cik?” 46
2. Jauno matemātiķu konkurss 53
3. Profesora Cipariņa klubs 61
4. Latvijas 22. sagatavošanās olimpiāde matemātikā 84
5. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. (Rajona) kārta 91
6. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta 100
7. Latvijas 37. atklātā matemātikas olimpiāde 103

Uzdevumu sadalījums pa tēmām 113

Sērija „LAIMA” matemātikā 115

Sērijas „LAIMA” grāmatas 116

Ievads

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tas ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes. Mācoties matemātiku, izveidojas priekšstats par pierādījumu un attīstās iekšējā vajadzība pēc tā. Matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē.

Neapšaubāma ir matemātisko uzdevumu loma bērna intelekta attīstībā. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Loģiskajai domāšanai ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā. Matemātikas specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Nepārvērtējama ir dažāda līmeņa matemātikas olimpiāžu nozīme uzdevumu risināšanas popularizēšanā. Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātiskās kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusskolas pasākumi matemātikā: Valsts matemātikas olimpiāde 3 kārtās (sagatavošanās, rajona un Valsts olimpiādes), Atklātā matemātikas olimpiāde, 4. klašu konkurss „Tik vai... Cik?", Jauno matemātiķu konkurss 4. – 7. klašu skolēniem, Profesora Cipariņa klubs visiem pamatskolēniem, Neklātienes Nodarbības vidusskolēniem, Mazā Matemātikas un Informātikas universitāte, matemātikas kursi skolēniem un skolotājiem vairākos Latvijas reģionos, kā arī citas aktivitātes.

Matemātikas olimpiādes un konkursi izvirza skolēniem konkrētus mērķus un faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Tie rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes un konkursi ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību. Kā piemēru varam minēt Atklāto matemātikas olimpiādi, kurā 2009./2010. m. g. piedalījās 2500 skolēnu.

Piedaloties matemātikas olimpiādēs un konkursos, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Vienlaikus ar matemātisko zināšanu apgūšanu un padziļināšanu šajā procesā rūdās skolēnu raksturi, viņi veidojas kā personības.

Risinot nestandarta uzdevumus, skolēns gūst matemātiskās domāšanas pieredzi un mācās izmantot pasaules matemātiskās izpratnes principus. Nestandarta uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Tā kā lielā daļā skolu ar matemātikas mācīšanu nodarbojas tikai pamatskolas matemātikas līmenī, skolēniem ir ierobežotas iespējas apgūt paaugstinātas grūtības uzdevumu risināšanu. Tāpēc liela nozīme ir šai un citām LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas izdotajām grāmatām ar izstrādātiem olimpiāžu un konkursu uzdevumu atrisinājumiem. Ikviens no LU A. Liepas NMS izdotajiem materiāliem tiek sagatavots tā, lai ar to varētu strādāt ne tikai skolotāji vai paši apdāvinātākie skolēni, bet gan katrs interesents, kurš ir gatavs ieguldīt savā attīstībā laiku un pūles. Tieši interese un pašatdeve ir noteicošie faktori skolēnu izaugsmei un iespējai gūt panākumus.

Strādājot ar grāmatu, iesakām ar katru uzdevumu vispirms darboties patstāvīgi un, neielūkojoties mūsu piedāvātajos atrisinājumos, pēc iespējas pilnīgi un detalizēti pašam to atrisināt, kā arī rūpīgi pierakstīt atrisinājumu. Tādējādi Jūs attīstīsiet iemaņas un praktizēsieties patstāvīgi atrast un pielietot metodes uzdevumu risināšanā.

Ja Jūs nezināt, kā var atrisināt attiecīgo uzdevumu, varat meklēt palīdzību otrajā grāmatas sadaļā „Ieteikumi", kurā sniegtas norādes, kā nonākt pie mums zināmā atrisinājuma.

Pēc uzdevuma patstāvīgas atrisināšanas iesakām tomēr ieskatīties arī grāmatā piedāvātos risinājumos un tos rūpīgi izpētīt, jo, pat ja Jūs uzdevumu esat atrisinājis pareizi, bet atšķiras pielietotā metode, mūsu metodes var noderēt tālākai attīstībai un citu uzdevumu risināšanai.

Matemātikas sacensības, kuru uzdevumi ir apkopoti šajā grāmatā, tiek rīkotas ar LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas iniciatīvu vai līdzdalību. Visu matemātikas sacensību visi uzdevumi, īsi atrisinājumi, rezultāti un arhīvi ir atrodami arī LU A. Liepas NMS mājas lapā http://nms.lu.lv.

Autori

UZDEVUMI

1. Konkurss 4.klasēm „Tik vai... Cik?”

1.1. Pirmā kārta

1.1.1. Aprēķini izteiksmes $\mathbf{9+9\cdot 9-9:9}$ vērtību!

a) 17

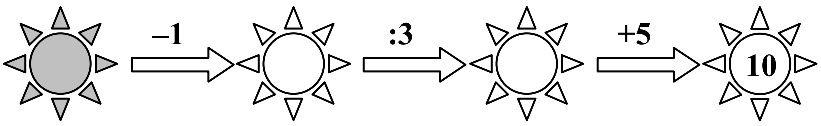
b) 89

c) 161

d) 9

e) 10

1.1.2. Runcis Bazilio iekrāsotajā *saulītē* ierakstīja savu mīļāko skaitli un izpildīja darbību virkni, kas attēlota U1.1. zīmējumā. Kādu skaitli bija uzrakstījis Bazilio iekrāsotajā *saulītē*?



U1.1.zīm.

a) 16

b) 10

c) 8

d) 4

e) 1

1.1.3. Automašīnas odometra (veikto kilometru skaitītāja) rādījums ir **1991** – skaitlis, kas vienādi izlasāms no abiem galiem. Cik vismaz kilometru automašīnai vēl jānobrauc, lai odometra rādījumus atkal būtu skaitlis, kas vienādi izlasāms no abiem galiem?

a) 11

b) 99

c) 990

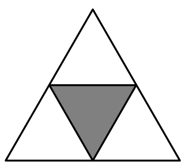
d) 1001

e) 1111

1.1.4. Kāda daļa no trijstūra ir iekrāsota U1.2. zīmējum (gan dotajam trijstūrim visas trīs malas ir vienādas, gan arī mazajiem trijstūrīšiem visas malas ir savā starpā vienādas)?

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$



U1.2.zīm.

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

1.1.5. Zīmējumā attēlotie trijstūri *ABC*, *CDE*, *EFG* un *GHI* ir vienādmalu trijstūri (t.i., katram no tiem visas malas ir vienāda garuma). Kāds ir lauztās līnijas *ABCDEFGHI* garums, ja nogriežņa *AI* garums ir 15 *cm* (skat. U1.3. zīm.)?

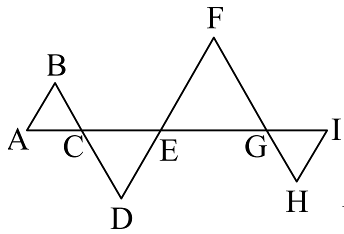
a) 15 *cm*

b) 30 *cm*

c) 45 *cm*

d) 11 *cm*

e) nevar noteikt



U1.3.zīm.

1.1.6. Naturālie skaitļi *a* un *b* ir tādi, ka ir patiesa vienādība $2a+3b=15$. Kurš no dotajiem apgalvojumiem ir patiess?

a) $a=5$ un $b=2$

b) $a=1$ un $b=4$

c) $b>5$

d) $a<7$

e) $a+b<5$

1.1.7. Elektroniskais pulkstenis šobrīd rāda **20:07**. Ātrākais pēc cik ilga laika pulksteņa rādījumā būs redzami tie paši četri cipari, tikai varbūt citā secībā? (Piezīme: pusnaktī pulkstenis rāda 00:00, plkst. vienos naktī – 01:00 utt.)

a) 2 h 20 min.

b) 4 h 20 min.

c) 6 h 00 min.

d) 10 h 55 min.

e) 24 h 00 min.

1.1.8. Baiba ir par 1 gadu un 1 mēnesi jaunāka nekā Elizabete. Baiba ir dzimusi 2000.gada 9.janvārī. Kad ir dzimusi Elizabete?

a) 2001.gada 9.februārī

b) 2000.gada 9.decembrī

c) 1999.gada 9.februārī

d) 1999.gada 9.decembrī

e) 1998.gada 9.decembrī

1.1.9. Gliemezis rāpjas augšup pa 1 metru augstu stabu. 1 stundas laikā viņš uzrāpjas 10 cm uz augšu, tad viņam 20 min. jāatpūšas, kuru laikā gliemezis noslīd 5 cm uz leju, tad atkal 1 stundu rāpjas uz augšu, pakāpjoties 10 cm, un pēc tam atkal 20 min. atpūtas laikā noslīd pa

5 cm, utt. līdz sasniedz staba galu. Cik ilgā laikā šis gliemezis no zemes uzrāpsies staba galā?

a) 10 stundās

b) 23 stundās 20 min.

c) 1 diennaktī

d) 25 stundās

e) 26 stundās 40 min.

1.1.10. Gvido ir sācis aizpildīt *mini-sudoku* kvadrātiņu (skat. U1.4. zīm.), katrā rūtiņā ierakstot vienu ciparu 1, 2 vai 3 tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā visi trīs ierakstītie cipari būtu dažādi.

Kādu ciparu var ierakstīt „**?**” vietā?

a) tikai 1

b) tikai 2

c) tikai 3

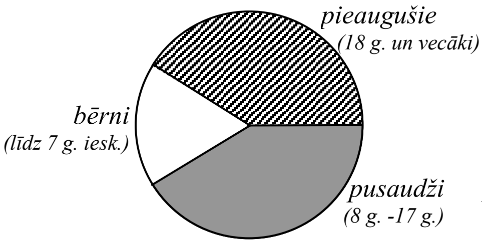
d) 2 vai 3

e) jebkuru ciparu 1, 2 vai 3

1	**?**	
2	**1**	

U1.4.zīm.

1.1.11. Diagrammā attēlots (skat. U1.5. zīm.) kāda pasākuma apmeklētāju sadalījums pa vecuma grupām. No diagrammas nosaki, vai vairāk apmeklētāju bija pieaugušie (vismaz 18 gadus veci) vai nepilngadīgie (līdz 18 gadu vecumam)?



U1.5.zīm.

a) pieaugušie vairāk

b) nepilngadīgie vairāk

c) pieaugušie un nepilngadīgie bija vienādā skaitā

d) nevar noteikt

1.2. Otrā kārta

1.2.1. Aprēķini izteiksmes $(((2+2)\cdot 2+2)\cdot 2+2):2$ vērtību

a) 9

b) 10

c) 11

d) 21

e) 32

1.2.2. Mārim pavisam ir 5 mīļi dzīvnieciņi – kaķi un kanārijputniņi. Cik tieši no tiem ir kaķi, ja zināms, ka visiem pieciem dzīvnieciņiem kopā ir 16 kājas?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) nevar noteikt

1.2.3. Plauktā ir *z* grāmatas zilos vākos, *b* grāmatas baltos vākos un *s* grāmatas sarkanos vākos. Zināms, ka sarkano grāmatu ir divreiz vairāk nekā balto, savukārt balto grāmatu ir par 2 vairāk nekā zilo. Kura no dotajām izteiksmēm izsaka zilo, sarkano un balto grāmatu kopskaitu?

a) $z + b - s$

b) $2 \cdot b + z + 2$

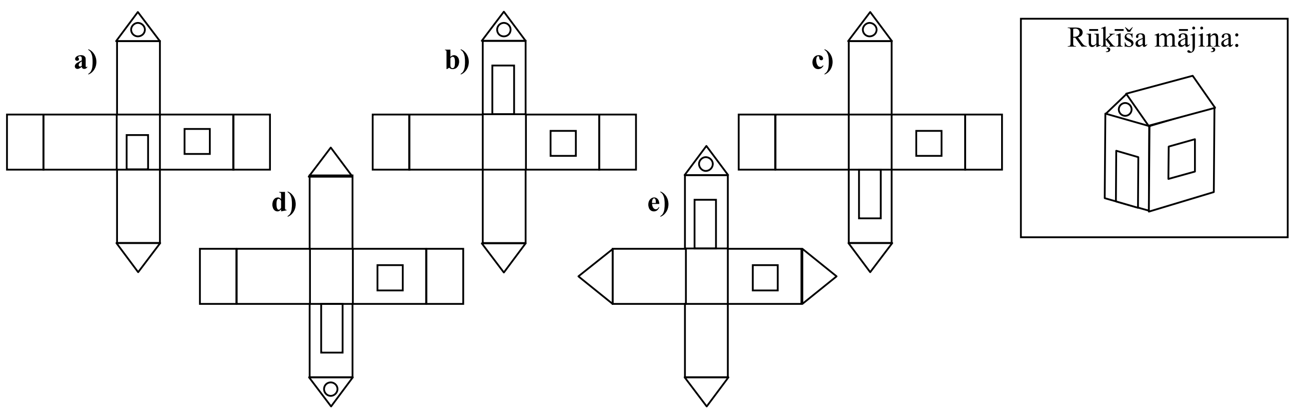
c) $4 \cdot z + 6$

d) $7 \cdot z$

e) $3 \cdot z + 6$

1.2.4. Bērni no kartona gatavo rūķīšu mājiņas. Uz sagatavēm jau ir uzkrāsotas durvis un logi.

No kuras sagataves viņi var izveidot tieši tādu mājiņu, kāda parādīta ierāmētajā zīmējumā (skat. U1.6.zīm.)?



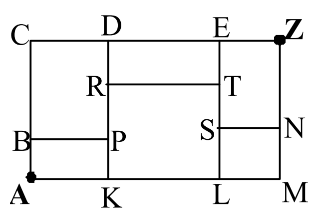
U1.6.zīm.

1.2.5. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

1) 2009 *santīmi* ◯ (2 *lati* 9 *santīmi*)·10

2) 412 *s* : 2 ◯ 2 *min.* 2 *s*

1.2.6. Cik veidos pa U1.7. zīmējumā attēlotajiem ceļiem var aiziet no punkta *A* uz punktu *Z*? Drīkst iet tikai virzienā pa labi vai uz augšu. Uzraksti visus iespējamos dažādos maršrutus!



U1.7.zīm.

1.2.7. Bariņš bērnu iegāja kafejnīcā. Viņi ievēroja, ka brīvo vietu ir par 1 mazāk nekā bērnu. Savukārt, ja apsēstos tikai visas meitenes, tad paliktu vēl 2 brīvas vietas, bet ja apsēstos tikai visi zēni, tad paliktu brīvas vēl 3 vietas.

Cik meitenes un cik zēni iegāja kafejnīcā?

1.2.8. Aplī stāv 6 rūķīši. Daži no viņiem vienmēr runā taisnību, bet citi – vienmēr melo. Katrs rūķītis apgalvo: "Abi mani kaimiņi ir meļi."

Cik no šiem rūķīšiem ir tādi, kas vienmēr runā taisnību?

Apskati visas iespējas un parādi piemērus!

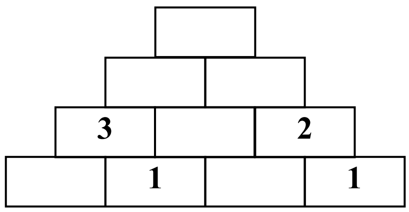
1.3. Trešā kārta

1.3.1. Aprēķini un atbildi izsaki decimetros!

2 *km* 400 *m* : 300 – 60 *dm* =

1.3.2. Dotajā piramīdā (skat. U1.8. zīm.) jāieraksta skaitļi pēc šāda likuma: katrā „ķieģelītī" jāieraksta skaitlis, ko iegūst sareizinot tos divus skaitļus, kas ierakstīti „ķieģelīšos", uz kuriem balstās šis „ķieģelītis".

Aizpildi visu piramīdu!



U1.8.zīm.

1.3.3. Tabulā attēloti kādas klases kontroldarba rezultāti (skat. U1.9. zīm.). Pārējiem skolēniem kontroldarba vērtējums bija nesekmīgs.

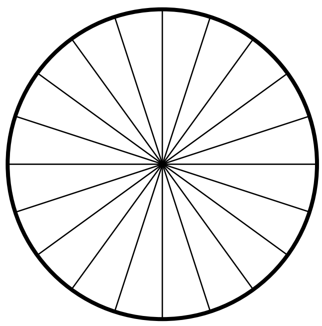
Cik skolēniem bija nesekmīgs vērtējums, ja klasē mācās 20 skolēni?

Kura daļa no klases skolēniem kontroldarbā ieguva vismaz 7 balles?

Attēlo šos rezultātus riņķa diagrammā (skat. U1.10. zīm.)!

Vērtējums (ballēs)	Skolēnu skaits
10	1
9	1
8	3
7	5
6	4
5	1
4	2
nesekmīgs	
Kopā	**20**

U1.9.zīm.



U1.10.zīm

1.3.4. Dotajā vienādībā viens cipars aizstāts ar zvaigznīti „*" (aiz visām zvaigznītēm „paslēpies" viens un tas pats cipars).

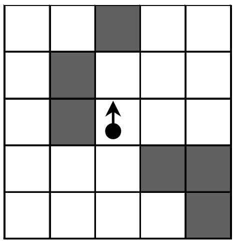
2* · * = 12*

Noskaidro, kāds cipars „paslēpies” aiz „*” un uzraksti pareizo vienādību! Pārbaudi, vai uzdevumam nevar būt vairākas atbildes!

1.3.5. Robots Bobs pārvietojas pa U1.11. zīmējumā attēloto labirintu (tumšās rūtiņas ir šķēršļi). Viņš sāk kustību vidējā rūtiņā bultiņas norādītajā virzienā. Bobs iet taisni, līdz atduras pret šķērsli vai labirinta malu, tad pagriežas pa labi un atkal iet taisni utt. Ja, pagriežoties pa labi, kustību taisni turpināt nav iespējams, Bobs apstājas.

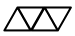
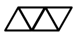
Uzzīmē Boba kustības maršrutu!

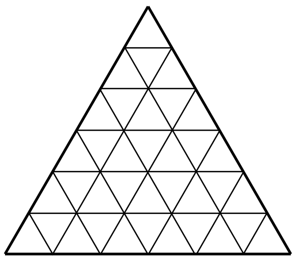
Vai Bobs kaut kad apstāsies, vai arī turpinās kustību bezgalīgi ilgi?



U1.11.zīm.

1.3.6. Dots vienādmalu trijstūris (t.i., trijstūris, kuram visas malas ir vienāda garuma), kas U1.12.zīm. attēlotajā veidā ir sadalīts 36 vienādos vienādmalu trijstūros.

Sadali visu doto trijstūri divu veidu figūriņās:  un  tā, lai figūriņu  būtu divas reizes vairāk nekā figūriņu . Cik katra veida figūriņu ieguvi? (Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.)



U1.12.zīm.

1.4. Ceturtā kārta

1.4.1. Katrā kvadrātiņā ieraksti “+” vai “–” zīmi tā, lai iegūtu pareizu vienādību!

$$9 \square 8 \square 7 \square 6 \square 5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 5$$

1.4.2. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti zīmi >, < vai = .)

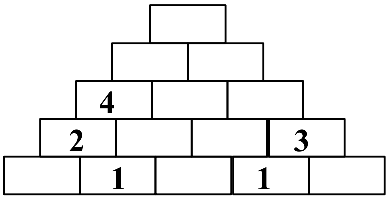
a) 3 *dm* + 17 *mm* ◯ 31 *cm*

b) 1 *h* 30 *min.* ◯ 23 *min.* · 5

1.4.3. Uzraksti četrus skaitļus, kas var būt x vietā, lai iegūtā nevienādība būtu patiesa:

$$x + 7 > 3x - 4$$

1.4.4. Skaitļu piramīdā katrā ķieģelītī (sākot ar otro rindu) jāieraksta skaitlis, kas vienāds ar abu zem tā esošo skaitļu reizinājumu (skat. U1.13. zīm.). Aizpildi tukšos ķieģelīšus!

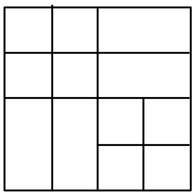


U1.13.zīm.

1.4.5. Uzzīmē 4 taisnes tā, lai tām būtu tieši 5 krustpunkti!

1.4.6. Zināms, ka 5 vienādas burkas, pilnas ar zemeņu ievārījumu, kopā sver 3 *kg* 500 *g*. Viena tāda tukša burka sver 200 *g*. Cik *kg* zemeņu ievārījuma nepieciešams, lai piepildītu pilnas 10 šādas burkas?

1.4.7. Dots U1.14. zīmējumā redzamais kvadrāts, kas ar taisnām līnijām sadalīts 8 vienādos kvadrātos un 4 vienādos taisnstūros.


U1.14.zīm.

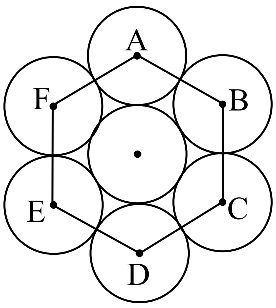
a) Iekrāso $\frac{11}{16}$ no dotā kvadrāta!

b) Cik mazie kvadrāti palika neiekrāsoti?

1.4.8. Par „labu" sauksim tādu skaitli, kura pierakstā visi cipari ir dažādi, pie tam ir izmantoti tikai cipari 1, 3, 5, 7, 9. Uzraksti vislielāko „labo" skaitli!

1.4.9. Visi septiņi zīmējumā attēlotie riņķi ir vienādi (skat. U1.15. zīm.).

Kāds ir sešstūra *ABCDEF* perimetrs, ja viena riņķa rādiuss ir 3 cm?

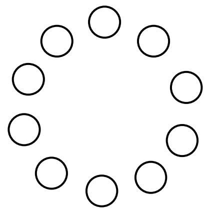


U1.15.zīm.

1.4.10. Aplī stāv 10 rūķīši (skat. U1.16. zīm.). Daži no tiem vienmēr melo (tos apzīmēsim ar *m*), bet pārējie – vienmēr saka patiesību (tos apzīmēsim ar *p*).

Katram rūķītim uzdeva vienu un to pašu jautājumu: "Cik no abiem taviem kaimiņiem ir meļi?"

Visi rūķīši atbildēja: "Divi."



U1.16.zīm.

Parādi vienu piemēru (aplīšos ieraksti *p* vai *m*), kā šie rūķīši var būt izvietojušies pa apli!

2. Jauno matemātiķu konkurss

2.1. Pirmā kārta

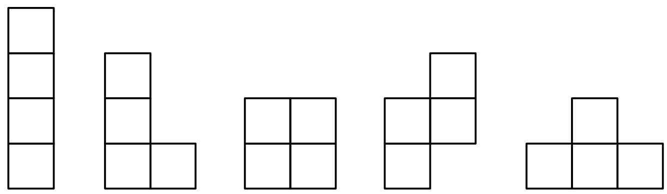
2.1.1. Atrodi kaut vienu naturālu trīsciparu skaitli, kura ciparu summa ir 19 un kuru sareizinot pašu ar sevi, iegūtā reizinājuma ciparu summa arī ir 19!

2.1.2. Uzzīmē tādu 12-stūri, kas, novelkot vienu taisni, var tikt sadalīts četros trijstūros! (Sadalījumā bez minētajiem 4 trijstūriem nekādas citas daļas nerodas; 12-stūris var būt arī ieliekts.)

2.1.3. Rindā bez atstarpēm pēc kārtas uzrakstīti visi naturālie pāra skaitļi, tādējādi iegūstot bezgalīgu ciparu virkni 24681012... .

Kāds cipars šajā virknē atrodas 2009.vietā?

2.1.4. Vai no visām piecām tetramino figūriņām (skat. U2.1. zīm.), izmantojot katru no tām tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri? (Figūriņas drīkst pagriezt un apgriezt otrādi, taču taisnstūrī tās nedrīkst pārklāties un nedrīkst palikt „tukšumi”.)



U2.1.zīm.

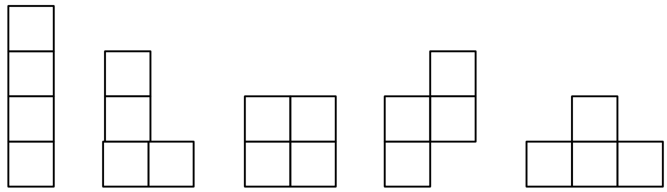
2.1.5. Vasaras brīvlaikā kādas klases skolēniem bija jālasa trīs grāmatas: „Vinnijs Pūks un viņa draugi”, „Alise Brīnumzemē” un „Karlsons, kas dzīvo uz jumta”. Vasaras beigās atklājās, ka grāmatu par Alisi ir izlasījuši 6 skolēni, grāmatu par Karlsonu – 7 skolēni, bet grāmatu par Vinniju Pūku – 8 skolēni. Cik skolēni var būt šajā klasē? (Katrs skolēns ir izlasījis vismaz vienu grāmatu, bet var būt (un var nebūt) arī tādi skolēni, kas izlasījuši divas vai trīs grāmatas.)

2.2. Otrā kārta

2.2.1. Atrisini skaitļu rēbusu! Dotajā saskaitīšanas piemērā katrs burts apzīmē vienu ciparu, dažādi burti apzīmē dažādus ciparus. Atrodi, kāds cipars atbilst katram burtam!

$$
\begin{array}{rr}
 & PASAKA \\
 & ASAKA \\
 & SAKA \\
 & AKA \\
+ & KA \\
 & A \\
\hline
 & 808080
\end{array}
$$

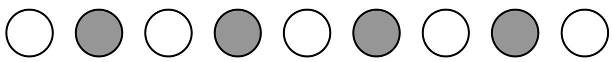
2.2.2. Izmantojot katru no U2.2. zīmējumā redzamajām *tetramino* figūriņām tieši divas reizes, saliec taisnstūri 5×8 rūtiņas!



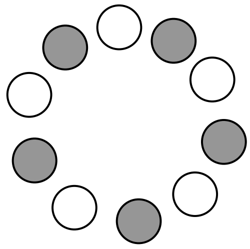
U2.2.zīm.

2.2.3. **a)** Vai U2.3. zīm. attēlotajos aplīšos var ierakstīt visus skaitļus no 1 līdz 9, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai katrā pelēkajā aplītī ierakstītais skaitlis būtu vienāds ar blakus esošajos baltajos aplīšos ierakstīto skaitļu vidējo aritmētisko! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

b) Vai U2.4. zīm. attēlotajos aplīšos var ierakstīt visus skaitļus no 1 līdz 10, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai izpildītos tas pats nosacījums, kas **a)** gadījumā?

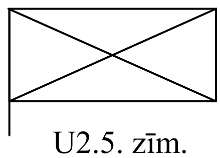


U2.3. zīm.



U2.4. zīm.

2.2.4. Cik dažādus U2.5. zīm. attēlotā veida karogus var iegūt, ja katru trijstūri jānokrāso vienā no četrām krāsām: baltu, sarkanu, zilu vai zaļu, turklāt trijstūri, kam ir kopīga mala, jānokrāso dažādās krāsās?



U2.5. zīm.

2.2.5. Andris, Jānis un Milda skolas kafejnīcā nopirka 5 vienādas bulciņas un 3 tases tējas, par pirkumu kopā samaksājot vairāk nekā 1 latu. Savukārt Zane un Pēteris nopirka 3 tādas pašas bulciņas un 2 tases tējas, par pirkumu kopā samaksājot mazāk nekā 62 santīmus.

Noskaidro, cik maksāja 1 bulciņa un cik – 1 tase tējas!

2.3. Trešā kārta

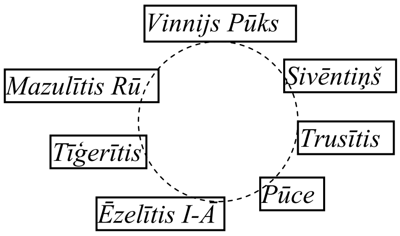
2.3.1. Sagriez taisnstūri ar izmēriem 4×4 rūtiņas četrās vienādās daļās, kas nav taisnstūri! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

2.3.2. Cik trijstūrus vienlaicīgi var izveidot no 6 stienīšiem, kuru garumi ir 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm un 60 cm? (Katrs stienītis ir vesela trijstūra mala; trijstūra virsotnes ir tikai punktos, kur satiekas divu stienīšu – malu – galapunkti.)

2.3.3. Atrodi tādu piecciparu skaitli, kuram vienu cipars norāda, cik šajā skaitlī ir ciparu „4”, desmitu cipars norāda, cik tajā ir ciparu „3”, simtu cipars – cik ciparu „2”, tūkstošu cipars – cik ciparu „1” un desmittūkstošu cipars – cik šajā skaitlī ir ciparu „0”! Pietiek parādīt vienu piemēru! (Piemēram, skaitlī 10023 ir divi cipari „0”, un pa vienam ciparam „1”, „2”, „3”; tātad skaitlis 10023 neapmierina uzdevuma nosacījumus.)

2.3.4. Veikalā pārdod trīsriteņus, divriteņus un kvadriciklus. Pavisam pārdošanā ir 20 braucamrīki un tiem visiem kopā ir 60 riteņi. Cik katra veida braucamrīki tiek pārdoti, ja zināms, ka trīsriteņu ir vismazāk? (Vai uzdevumam ir tikai viena atbilde? Apskati visas iespējas!)

2.3.5. Pa apli ir ievietotas septiņu draugu – Vinnija Pūka, Sivēntiņa, Trusīša, Pūces, Ēzelīša I-Ā, Tīģerīša un Mazulīša Rū – mājiņas (skat. 1. zīm.).



U2.6. zīm.

Kādu rītu, kamēr visi vēl bija savās mājiņās, Vinnijs Pūks nolēma doties šādā pastaigā. Vispirms viņš aizgāja ciemos pie Sivēntiņa. Tad viņi abi devās 2 mājiņas tālāk (tātad nonāca pie Pūces), un kopā ar Pūci devās trīs mājiņas tālāk u.t.t. – ja šobrīd pastaigājas n draugi, tad viņi dodas n mājiņas tālāk no pēdējās apstāšanās vietas, un, apstājoties pie kādas mājiņas, tās iemītnieks pievienojas pastaigai, ja viņš ir mājiņā, vai arī atgriežas mājiņā, ja viņš tikko staigāja. (Var gadīties, ka vienam un tam pašam zvēriņam nākas vairākas reizes iet pastaigāties un sēdēt mājās.) Ja visi ir nonākuši savās mājiņās, pastaiga beidzas. Vai šī pastaiga kādreiz beigsies?

Bet kā būtu gadījumā, ja pēc katras apstāšanās viņi mainītu iešanas virzienu?

2.4. Ceturtā kārta

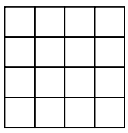
2.4.1. Reizināšanas piemērā (skat. U2.7. zīm.) vairāki cipari aizstāti ar zvaigznītēm (ar vienu zvaigznīti – viens cipars). Atjauno šo piemēru!

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{8} & * & * \\
 & & * & \mathbf{1} & * \\
\hline
 & & * & * & * \\
 & * & * & * & \\
* & * & * & & \\
\hline
\mathbf{9} & * & \mathbf{7} & * & \mathbf{9}
\end{array}$$

U2.7.zīm.

2.4.2. Kad Zita paskatījās pulkstenī, viņa secināja, ka kopš diennakts sākuma pagājis piecreiz ilgāks laiks nekā vēl atlicis līdz pusnaktij. Cik tobrīd rādīja pulkstenis?

2.4.3. Kvadrāts sadalīts 4×4 rūtiņās (skat. U2.8. zīm.). Izkrāso to vairākās krāsās, katru rūtiņu vienā krāsā, tā, lai nekādas divas rūtiņas, kam ir kopīga mala vai stūris, nebūtu nokrāsotas vienā krāsā! Cik dažādas krāsas vismaz ir jāizmanto?



U2.8.zīm.

2.4.4. Uz planētas Zvaigzne cilvēka laimi nodrošina tam piederoša burvju stīga. Katrs cilvēks, kuram pieder burvju stīga, var to sadalīt vai nu 7 vai 10 tik pat lielās burvju stīgās (šīs stīgas tad var sadalīt atkal 7 vai 10 citās stīgās). Planētas iedzīvotājiem ir zināms burvju likums, ka katra jaunizveidota burvju stīga ir uzreiz jānodod kādam planētas iedzīvotājam. Vairāku stīgu paturēšana sev, vai kādas aizlaišana postā nozīmētu visu burvju stīgu zudumu uz mūžīgiem laikiem. Kādā brīdī uz planētas ir 2010 iedzīvotāji. Vai iespējams, ka katram pieder burvju stīga, ja zināms, ka sākumā bija tieši viena burvju stīga?

2.4.5. Šaha galdiņam ar izmēriem 8×8 rūtiņas ir apmalīte, lai figūriņas nevarētu noripot no tā. Uz šāda galdiņa izvietojiet visus 28 domino komplekta kauliņus tā, lai nevienu kauliņu nevarētu pārbīdīt pa šaha galdiņu, to nepaceļot. Katrs domino kauliņš aizņem tieši divas šaha galdiņa rūtiņas.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. Noskaidro, pēc kāda likuma tiek veidota sekojošā skaitļu virkne:

9, 18, 36, 63, 99, *, 198, ...

Kāds skaitlis ir aizstāts ar „*”?

Uzraksti vēl divus nākamos šīs virknes locekļus un pamēģini aprakstīt vārdiem (vai ar formulām), kā šī virkne tiek veidota!

2.5.2. Uzzīmē plaknē

a) piecas taisnes tā, lai tām būtu tieši pieci krustpunkti;

b) sešas taisnes tā, lai tām būtu tieši seši krustpunkti!

2.5.3. Mārim eksāmenā uzdoti 16 jautājumi, uz kuriem var atbildēt ar „jā” vai „nē”. Par katru pareizu atbildi Māris saņem 7 punktus; par katru nepareizu atbildi no viņa iegūtās punktu summas atņem 4 punktus. Ja Māris uz kādu jautājumu atsakās atbildēt, viņa punktu summu tas neietekmē. Sākumā Mārim bija 0 punktu, bet, beidzot eksāmenu, viņam bija 1 punkts. Uz cik jautājumiem Māris atbildēja pareizi?

2.5.4. Vai ir iespējams izveidot tādu četru atsvaru komplektu, ka izmantojot tikai šos četrus atsvarus uz ar sviras svariem var nosvērt jebkuru veselu gramu skaitu no 1 g līdz 15 g? Bet no 1 g līdz 16 g? (Atsvarus drīkst likt tikai uz viena svaru kausa.)

2.5.5. Futbola komandā ir 11 spēlētāju. Trijiem no tiem ir uzvārds Bērziņš, četriem – Kalniņš, diviem – Krūmiņš, diviem – Ezeriņš. Četriem vārds ir Andris, trim – Kārlis, trim – Roberts un vienam – Jānis. Vārtsargu sauc Roberts Ezeriņš. Kā sauc pārējos spēlētājus, ja zināms, ka nav divu spēlētāju ar vienādu vārdu un uzvārdu?

3. Profesora Cipariņa klubs

3.1. Pirmā kārta

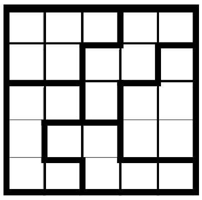
3.1.1. Vai izteiksmē $1:2:3:4:5:6$ var ievietot iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu

a) 5;

b) 2?

3.1.2. Kādā veikalā visiem bērniem dod vienu un to pašu atlaidi, kas nav atkarīga no pirkuma kopējās summas. Andris nopirka somu un samaksāja 8 latus. Maija nopirka grāmatu un samaksāja 5 latus. Katrīna nopirka tādu pašu grāmatu tādā pašā somā un samaksāja 14 latus. Cik lielu atlaidi dod šajā veikalā?

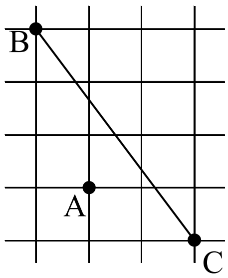
3.1.3. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt pa vienam ciparam no 1 līdz 5 tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā ar biezajām līnijām norobežotajā apgabalā (skat. U3.1. zīm.) visi cipari būtu dažādi?



U3.1.zīm.

3.1.4. Iedomāsimies, ka sareizināti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2009 ieskaitot; katrs skaitlis ņemts kā reizinātājs vienu reizi. Rezultātam aprēķināta ciparu summa. Šai summai savukārt aprēķināta ciparu summa. Šai summai savukārt aprēķināta ciparu summa utt., kamēr iegūts viencipara skaitlis. Kāds tas ir?

3.1.5. No vienādiem kvadrātiem izveidots rūtiņu režģis (skat. U3.2. zīm.); kvadrāta malas garums ir 2. Aprēķināt attālumu no punkta A līdz nogrieznim BC.



U3.2.zīm.

3.1.6. Katrs no 4 rūķīšiem A, B, C, D vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Kādu rītu A paziņoja, ka B ir teicis, ka C apgalvo, ka D ir stāstījis, ka A ir melis. Cik meļu var būt starp šiem 4 rūķīšiem?

3.1.7. Kvadrāts sastāv no **a)** 6×6, **b)** 7×7 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu lielāko skaitu rūtiņu var nokrāsot, lai nekādām divām nokrāsotām rūtiņām nebūtu ne kopēja mala, ne kopējs stūris?

3.1.8. Vai skaitļu rindā

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

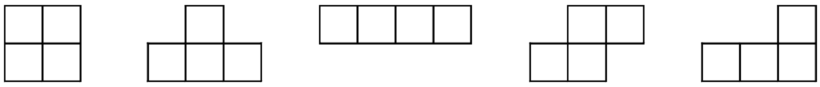
starp katriem diviem blakus esošiem skaitļiem var ierakstīt „+” zīmi vai „–” zīmi tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu

a) 2009,

b) 1,

c) 2 ?

3.1.9. Taisnstūris sastāv no 4×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to var sagriezt 5 tādos gabalos, kādi redzami U3.3.zīm.? (Visiem griežot iegūtajiem gabaliem jābūt dažādiem.)



U3.3.zīm.

3.1.10. Sastādīt matemātikas uzdevumu, kas atspoguļo kādu pagājušās vasaras notikumu, un atrisināt to.

Sniedzam dažus veiksmīgākos uzdevumus (atrisinājumus skatiet grāmatas „Atbilžu un atrisinājumu” daļā):

1) *Autori: 9.klases skolēnu komanda „LIA”, Daugavpils 17.vidusskola.*

Pieciem skolēniem – A, B, C, D, E – katram rokā ir pa vienam čiekuram – vai nu priedes, vai egles. Kāds čiekurs ir rokā katram skolēnam, ja zināms, ka divi no čiekuriem ir egles; tieši vienam no skolēniem A, B, C rokās ir egles čiekurs; no skolēniem B, C, D diviem ir priedes čiekuri; skolēniem A un C ir vienāda veida čiekuri.

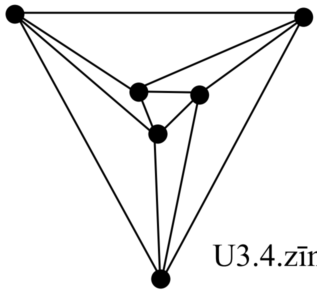
2) *Autors: Andris Locāns, 9.klase, Gulbenes novada Valsts ģimnāzija.*

Andrim un Elīnai bija uzdots sakrāmēt malku. Zināms, ka Andris 1 minūtē sakrauj grēdā par tik pagalēm vairāk nekā Elīna, cik minūtēs Elīna sakrauj 24 pagales. Gan Andris, gan Elīna minūtē sakrauj veselu skaitu pagaļu. Andris katru piekto minūti atpūšas. Elīna patvaļīgi var izvēlēties, kad ieturēt pauzi, kas ilgst vienu minūti, turklāt pēc katras pauzes nākamajā minūtē viņa sakrauj par 4 pagalēm vairāk nekā parasti 1 minūtē.

Kurš būs sakrāvis vairāk pagaļu pēc 30 minūtēm kopš darba sākšanas?

3.2. Otrā kārta

3.2.1. Labo Rūķīšu karaļvalstī ir 6 pilsētas. Tās savieno ceļi, kā parādīts U3.4. zīm.



U3.4.zīm.

Vai var uz katra ceļa ieviest vienvirziena satiksmi tā, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu, braucot pa vienu vai, augstākais, diviem ceļiem?

3.2.2. Dots, ka *a, b, c, d* – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{a+b}{b+c+d}+\frac{b+c}{c+d+a}+\frac{c+d}{d+a+b}+\frac{d+a}{a+b+c}>2.$$

3.2.3. Dots 100-ciparu naturāls skaitlis, kurā neviens cipars nav 0. Katri divi blakus esoši šī skaitļa cipari virzienā no skaitļa sākuma uz beigām veido divciparu skaitli, kas dalās ar vismaz 3 dažādiem pirmskaitļiem. Atrast šī skaitļa 50-to ciparu.

3.2.4. Doti 9 dažādi pozitīvi skaitļi. Neviens no tiem nav mazāks par 1 un nav lielāks par 60. Vai taisnība, ka katru divu skaitļu attiecība **var būt** lielāka par $\frac{3}{2}$, ja zināms, ka visi skaitļi ir

a) naturāli,

b) racionāli?

3.2.5. Uz riņķa līnijas atzīmēti 7 punkti, kas to sadala 7 vienādos lokos. Izmantojot tikai lineālu un zīmuli, konstruēt riņķa centru.

3.2.6. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām; katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Vai var būt, ka vienā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir 2009, vienā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir 2010, bet pārējās rindās un kolonnās visas ierakstīto skaitļu summas dalās ar 3?

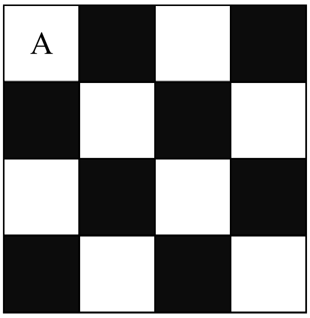
3.2.7. Trijstūrī ABC visas malas ir vienādas; punkts M atrodas tā iekšpusē. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura malu garumi ir MA, MB un MC!

Vai līdzīgs apgalvojums ir pareizs arī, ja M atrodas ārpus ΔABC?

3.2.8. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā (skat. U3.5. zīm.)

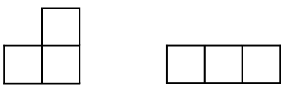
Rūtiņā A atrodas skudra. Ar vienu gājienu viņa var aizrāpot no rūtiņas, kurā atrodas pirms gājiena, uz citu rūtiņu, kurai ar iepriekšējo ir kopēja mala.

Skudrai jāveic 15 gājieni un gala rezultātā jābūt apmeklējušai visas rūtiņas (rūtiņa A skaitās jau apmeklēta sākumā). Kurās rūtiņās skudra var beigt savu kustību?



U3.5.zīm.

3.2.9. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kāds mazākais rūtiņu daudzums no tā jāizgriež, lai no atlikušās daļas nevarētu izgriezt nevienu no U3.6. zīm. attēlotajām figūrām?



U3.6.zīm.

3.2.10. Dots, ka n – naturāls skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0, 1 un 2. Skaitļa $5n$ ciparu summa ir 2009. Kāda ir skaitļa n ciparu summa?

3.3. Trešā kārta

3.3.1. Atrodiet divus naturālus skaitļus, no kuriem viens ir divas reizes lielāks par otru un kas abi kopā satur visus 10 ciparus, katru tieši vienu reizi. Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

3.3.2. Kas lielāks: 15^{15} vai 9^{20}?

3.3.3. Plaknē uzzīmēta viena riņķa līnija un 3 taisnes. Kādā lielākajā skaitā daļu tās var sadalīt plakni?

3.3.4. Taisnstūris sadalīts 9 mazākos taisnstūros (skat. U3.7. zīm.). Četru taisnstūru perimetri zināmi; tie uzrādīti zīmējumā. Kādās robežās var mainīties vidējā taisnstūra perimetrs?

	2	
1	?	3
	4	

U3.7.zīm.

3.3.5. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 14 ieskaitot, katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstīto skaitļu starpība būtu vai nu 3, vai 4?

3.3.6. Vai naturālos skaitļus no 2002 līdz 2009 ieskaitot var sadalīt divās grupās tā, lai būtu vienādas gan grupās ietilpstošo skaitļu summas, gan to kvadrātu summas?

3.3.7. Kāda ir minimālā ciparu summa naturālam desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?

3.3.8. Vai jūs varat izdomāt trīs trijstūrus tā, lai no tiem varētu salikt gan trijstūri, gan izliektu četrstūri, gan izliektu piecstūri? Saliekot daļas nedrīkst pārklāties, bet vajadzības gadījumā atļauts tās apgriezt „ar apakšu uz augšu".

3.3.9. Rindā novietotas 10 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka dažas (vismaz viena) no kreisā gala pēc kārtas novietotas monētas sver katra 7 gramus, bet pārējās monētas (vismaz viena) sver katra 8 gramus. Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar divām svēršanām noskaidrot, cik sver katra monēta?

3.3.10. Sastādiet paši jaunu, āķīgu matemātikas uzdevumu, kas satur skaitli 2010; atrisiniet to!

Sniedzam dažus veiksmīgākos uzdevumus (atrisinājumus skatiet grāmatas „Atbilžu un atrisinājumu daļā):

1) *Autors: Ieva Šķestere, 8.klase, Draudzīgā Aicinājuma Cēsu Valsts ģimnāzija.*

Starp cipariem 6 9 8 5 4 7 1 3 2 ievietojiet aritmētisko darbību zīmes un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 2010!

2) *Autors: Luka Ivanovskis, 8.klase, Rīgas Zolitūdes ģimnāzija.*

Profesoram Cipariņam bija apnikuši viņa daudzie ciemiņi. Lai varētu atpūsties, viņš pie durvīm pielika kodu atslēgu, kuru varēja atslēgt, ja, izmantojot visus ciparus no 1 līdz 9 (tieši tādā secībā), aritmētiskās darbību zīmes (ne obligāti visas) un iekavas, tika sastādīta izteiksme, kuras vērtība ir 2010. Turklāt katru dienu durvju atslēgšanai bija nepieciešams sastādīt citu izteiksmi. Vai profesora Cipariņa ciemiņi tomēr varēs viņu apciemot katru dienu veselu nedēļu?

3.4. Ceturtā kārta

3.4.1. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Pierādiet, ka $n^2 - n$ dalās ar 2 un $n^3 - n$ dalās ar 3.

3.4.2. Naturālu skaitļu A un B pierakstā kopā ir 9 cipari. Tie visi ir dažādi, un neviens no tiem nav 0. Vai var gadīties, ka reizinājums $A \cdot B$ beidzas ar 4 nullēm?

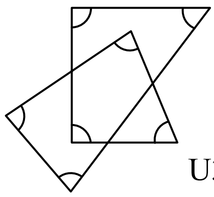
3.4.3. Jānītis raksta rindā augošā secībā visus naturālos skaitļus sākot ar 1, nevienu neizlaižot un katru skaitli rakstot tieši vienu reizi. Vai var gadīties, ka pēc kāda skaitļa uzrakstīšanas ciparu „2” rindā būs vairāk nekā ciparu „1”?

3.4.4. Dots, ka $a > b > c > 0$ un $x > y > z > 0$. Pierādīt, ka $ax + by + cz > ay + bz + cx$.

3.4.5. Rūtiņu lapā uzzīmēts kvadrāts, kas sastāv no 64 rūtiņām. Parādiet, ka šo kvadrātu var sagriezt 4 daļās tā, lai no tām varētu izveidot vienu 16 rūtiņu kvadrātu un vienu 49 rūtiņu kvadrātu, kuram centrā ir vienu rūtiņu liels „caurums”. Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.

Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

3.4.6. Aprēķināt U3.8. zīm. parādītās slēgtās lauztās līnijas veidoto atzīmēto leņķu lielumu summu. (Šie leņķi **ne noteikti** ir vienādi savā starpā.)

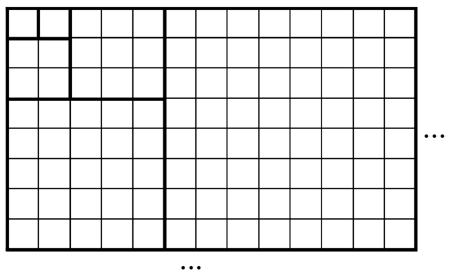


U3.8.zīm.

3.4.7. Kādā klasē ir 32 skolēni. Bioloģijas skolotājs vēlas noorganizēt pulciņu ar 12 dalībniekiem. Matemātikas skolotājs vēlas noorganizēt pulciņu ar 20 dalībniekiem. Kuram pulciņam iespējamo dalībnieku sastāvu ir vairāk? (Skolēni, kas to vēlas, var piedalīties arī abos pulciņos.)

3.4.8. Skaitļu virkni 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... (katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo summu) sauc par Fibonači skaitļiem.

Kāda ar Fibonači skaitļiem saistīto fakta pamatojuma Jūs spējat saskatīt U3.9. zīm.?



U3.9.zīm.

3.4.9. Skaitļa 12 visi naturālie dalītāji ir 1; 2; 3; 4; 6; 12. Nav grūti pārbaudīt, ka

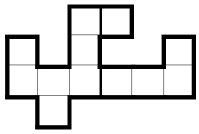
$$1+2+3+4+6+12 = \frac{12}{1} + \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} + \frac{12}{6} + \frac{12}{12} .$$

Formulējiet un pamatojiet līdzīgu īpašību patvaļīgam naturālam skaitlim.

3.4.10. Uz rūtiņu papīra (rūtiņas malas garums ir 1) uzzīmēts daudzstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām; daudzstūra **iekšpusē** nav nevienas rūtiņu virsotnes. Piemēru skat. U3.10. zīm.

a) vai šī daudzstūra perimetrs var būt 101?

b) kāds var būt šī daudzstūra laukums, ja tā perimetrs ir 50?



U3.10.zīm.

3.5. Piektā kārta

3.5.1. Ar kādu lielāko naturālu skaitli dalās gan 1517, gan 1147 ?

3.5.2. Rūtiņu papīra lapā 57 rūtiņas nokrāsotas melnas. Pierādiet: var atrast 15 melnas rūtiņas tā, lai nekādām divām no tām nebūtu ne kopīgas malas, ne kopīga stūra.

3.5.3. Turnīrā piedalās 8 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi. Neviena komanda vienā dienā nevar piedalīties vairāk kā vienā spēlē. Ar kādu mazāko dienu skaitu pietiek, lai nospēlētu visas spēles?

3.5.4. Šaurleņķu trijstūrī malu garumi ir 10, 11 un 12. Riņķa līnija atrodas trijstūra iekšpusē. Pierādiet, ka tās rādiuss ir īsāks par 5.

3.5.5. Burtu virkni sauc par stabilu, ja kāds tās sākuma fragments sakrīt ar kādu beigu fragmentu. Piemēram, stabilas ir virknes $\underline{a}\ b\ c\ \underline{a}$, $\underline{a\ d}\ \underline{a\ d}$ u.tml.

Uzrakstiet burtu virkni, kas **kļūst stabila**, ja tai galā pieraksta

1) jebkuru no burtiem a; b; c,

2) jebkuru no burtiem a; b; c; d; e.

3.5.6. Izliekta četrstūra diagonāles sadala to četros trijstūros. Katra trijstūra laukums kvadrātcentimetros izsakās ar pirmskaitli. Vai visi šie pirmskaitļi var būt dažādi?

3.5.7. Šaurleņķu trijstūrī atzīmēts vienas malas viduspunkts. Kā, izmantojot lineālu un cirkuli, konstruēt visus šī trijstūra augstumus, ja cirkuli atļauts izmantot tikai vienreiz?

3.5.8. Atverot iekavas, nav grūti pārbaudīt vienādību

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

Izdomājiet līdzīgu vienādību, kuras kreisajā pusē ir $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$, bet labajā pusē – četru iekavu kvadrātu summa.

3.5.9. Aprēķinot tabulas

$$\begin{array}{cccccc}
1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & \ldots & 1\cdot(n-1) & 1\cdot n \\
2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & \ldots & 2\cdot(n-1) & 2\cdot n \\
3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & \ldots & 3\cdot(n-1) & 3\cdot n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
n\cdot 1 & n\cdot 2 & n\cdot 3 & \ldots & n\cdot(n-1) & n\cdot n
\end{array}$$

skaitļu summu divos dažādos veidos, pierādiet vienādību

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=(1+2+\ldots+n)^2,$$

ja n – patvaļīgs naturāls skaitlis.

3.5.10. Maija iedomājusies vienu no burtiem *a*; *c*; *e*. Andris drīkst uzdot jautājumus, uz kuriem iespējamas atbildes „jā"; „nē"; „nezinu un nevaru zināt" (varbūt tikai divas vai pat viena no tām).

Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Andris var noskaidrot Maijas iedomāto burtu? Uzskatām, ka Maija vienmēr atbild pareizi.

3.6. Sestā kārta

3.6.1. Atrodi kaut vienu tādu septiņciparu skaitli, kam visi cipari ir dažādi un kas dalās ar katru savu ciparu!

Vai eksistē arī kāds astoņciparu skaitlis ar tādu pašu īpašību?

3.6.2. Pircējs veikalā nopirka torti par 5 latiem, konfektes par Ls 2,80, kā arī sešas vienādas šokolādes un 3 vienādas cepumu kārbas, kuru cenu viņš nezināja. Kasieris pieprasīja no viņa 9 latus un 82 santīmus. Pircējs aizrādīja, ka kasieris kļūdījies. Kāpēc pircējs par to ir pārliecināts?

3.6.3. Šokolādes tāfelīte sastāv no 10×20 maziem kvadrātiņiem. Kāds ir mazākais lauzumu skaits, ar kuriem tāfelīti var sadalīt 200 gabaliņos?

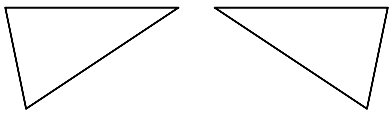
3.6.4. Uz šaha galdiņa 8×8 novietotas 44 dāmas. Pierādi, ka katra no tām apdraud vismaz vienu citu dāmu!

Piezīme. Uz viena lauciņa ir novietota ne vairāk kā viena dāma. Dāma apdraud visus tos lauciņus, kas atrodas vienā rindā, vienā kolonnā vai uz vienas diagonāles ar to.

3.6.5. Doti 3 trauki, kuru tilpumi ir 8, 5 un 3 litri. Trauks, kura tilpums ir 8 *l*, piepildīts ar ūdeni, abi pārējie ir tukši. Kā jārīkojas, lai 5 *l* traukā būtu ielieti tieši 4 *l* ūdens?

Uz traukiem nav nekādu iedaļu; izmantot citus traukus bez dotajiem aizliegts.

3.6.6. Zane izcepa torti trijstūra veidā, turklāt visas trijstūra malas ir dažāda garuma. Brālis pagatavoja kasti, bet tortes spoguļattēla formā (U3.11. zīm.). Kā torti ievietot kastē, ja to drīkst sagriezt gabalos, taču nedrīkst likt ar krēmu uz leju?



U3.11.zīm.

3.6.7. Viens četrstūris atrodas otra četrstūra iekšpusē. Vai var gadīties, ka iekšējā četrstūra diagonāļu summa ir lielāka nekā ārējā četrstūra diagonāļu summa? Ja ir iespējams, uzrādi piemēru, ja nē, pamato, kāpēc nav iespējams!

3.6.8. Klasē ir 30 skolēni. Viņi nolēma cits citu apciemot. Viens skolēns vienā dienā var izdarīt vairākus apciemojumus. Katrs skolēns katru dienu var vai nu apciemot citus skolēnus (tad šajā dienā pie viņa neviens nenāk), vai arī sēdēt mājās (tad citi var apciemot viņu).

a) Pierādi, ka 10 dienās visi skolēni var apciemot cits citu!

b) Pierādi, ka ar 4 dienām nepietiek, lai katrs skolēns apciemotu ikvienu citu!

3.6.9. Plaknē ir uzzīmēts 7° leņķis. Izmantojot cirkuli un lineālu, konstruē 1° lielu leņķi!

3.6.10. Kāda valsts izvietota uz vairākām salām. Starp dažām salām izveidota kuģīšu satiksme, katrs reiss ilgst vienu dienu. Turklāt no katras salas var nokļūt uz jebkuru citu (iespējams, ka jābrauc ar dažādiem kuģīšiem vairākas dienas).

Valstī dzīvo laupītājs un detektīvs. Detektīvs brauc katru dienu, bet laupītājs ir māņticīgs un piektdienās nebrauc. Gan laupītājs, gan detektīvs vienmēr zina, kur atrodas otrs.

Kā detektīvs var noķert laupītāju, ja

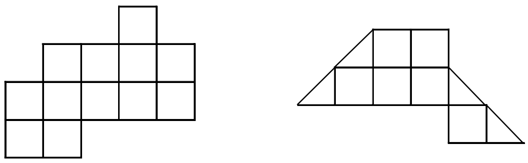
a) pavisam ir 3 salas,

b) pavisam ir 2010 salas?

4. LATVIJAS 22. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. Piektā klase

4.5.1. Sagriezt katru no U4.1.zīmējumā attēlotajām figūrām divās daļās, kas ir vienādas gan pēc formas, gan pēc izmēriem. Griezumiem nav noteikti jāiet pa rūtiņu līnijām. Pietiek parādīt vienu veidu katrai figūrai.



U4.1.zīm.

4.5.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli no 1 līdz 9 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz 3?

4.5.3. Pa apli izrakstīti naturāli skaitļi no 11 līdz 20, katrs tieši vienu reizi. Katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem aprēķināja to reizinājumu. Cik no šiem reizinājumiem var dalīties ar 3?

4.5.4. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. No tām 11 rūtiņas nokrāsotas. Pierādīt: kvadrātā var atrast tādu taisnstūri, kas sastāv no 3×4 rūtiņām un kurā nokrāsotas ne vairāk kā 2 rūtiņas. Vai uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja kvadrātā nokrāsotas 12 rūtiņas?

4.5.5. Tabulā ierakstīti skaitļi, kā parādīts U4.2.zīmējumā ar vienu gājienu var mainīt vietām vai nu divas rindiņas vai divas kolonnas. Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, var iegūt tādu tabulu, kāda redzama U4.3.zīmējumā?

3	4	1	2
7	8	5	6
9	10	11	12

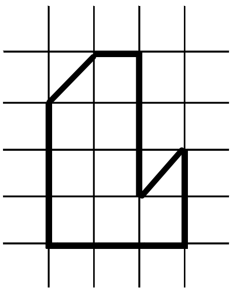
U4.2.zīm.

6	7	10	5
12	9	8	11
4	1	2	3

U4.3.zīm.

4.6. Sestā klase

4.6.1. Vai U4.4.zīmējumā parādīto figūru var sagriezt divās daļās, no kurām var salikt kvadrātu? Griezumiem nav noteikti jāiet pa rūtiņu līnijām. Daļas saliekot nedrīkst pārklāties.



U4.6.zīm.

4.6.2. Cik ir tādu desmitciparu naturālu skaitļu, kas dalās ar 9 un kuru pierakstā nav citu ciparu kā vien varbūt 0 un 7?

4.6.3. Vai kvadrātā, kas sastāv no 3×3 rūtiņām, katrā rūtiņā var ierakstīt veselu skaitli no 1 līdz 9 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz 4?

4.6.4. Vai kāds naturāls skaitlis, kuram katrs nākošais cipars (izņemot pirmo) ir mazāks par iepriekšējo, dalās ar 111?

4.6.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Sprīdītis sāk ceļu vienā no tām. Viņam atļauti divu veidu gājieni: „taisni" (no rūtiņas uz citu rūtiņu, kurai ar pašreizējo ir kopīga mala) un „slīpi" (no rūtiņas uz citu rūtiņu, kurai ar pašreizējo ir kopīgs stūris, bet ne kopīga mala). „Taisnos" un „slīpos" gājienus jāizdara pamīšus; ar 64-to gājienu Sprīdītim jāatgriežas sākotnējā rūtiņā un jābūt apmeklējušam visas rūtiņas. Vai Sprīdītis to var izdarīt?

4.7. Septītā klase

4.7.1. Kāds lielākais daudzums pirmskaitļu var būt starp 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem?

4.7.2. Doti 4 punkti *A*, *B*, *C*, *D*. No taisnēm *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* vismaz piecas ir dažādas. Pierādīt, ka visas sešas taisnes ir dažādas.

4.7.3. Pa riņķa līniju izrakstīti 5 dažādi veseli skaitļi. Katri divi blakus uzrakstīti skaitļi sareizināti; apzīmēsim iegūtos reizinājumus ar *a*; *b*; *c*; *d*; *e*.

Vai reizinājums $abcde$ var būt **a)** 4, **b)** 144, **c)** -2009 ?

4.7.4. Pierādīt: starp jebkuriem 6 naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10, var atrast divus tādus, kuru summa vai starpība dalās ar 10.

4.7.5. Uz tāfeles uzrakstīti divi naturāli skaitļi *a* un *b*. Ar vienu gājienu var aprēķināt skaitļus $2a-b$ un $2b-a$ un, ja tie abi ir naturāli, nodzēst abus sākotnējos skaitļus un to vietā uzrakstīt iegūtos. Ja kāds no iegūtajiem skaitļiem ir 0 vai negatīvs, process beidzas.

Kādām *a* un *b* vērtībām process var turpināties bezgalīgi?

4.8. Astotā klase

4.8.1. Ar $\max(s;t)$ saprotam lielāko no skaitļiem *s* un *t*. Piemēram, $\max(3;5)=5$; $\max(4;4)=4$.

Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – konstantes un funkcija $y=\max(ax+b;cx+d)$ ir lineāra funkcija (ar argumentu *x*). Pierādīt, ka $a=c$.

4.8.2. Ir zināms, ka no apgalvojumiem „x^3 dalās ar 2"; „x^3 dalās ar 4", „x^3 dalās ar 8", „x^3 dalās ar 16" vismaz viens ir patiess un vismaz viens ir aplams (*x* ir naturāls skaitlis). Kuri apgalvojumi ir patiesi, kuri – aplami?

4.8.3. Trijstūra ABC iekšpusē atrodas tāds punkts *O*, ka $AO=BO=CO$. Pierādīt, ka $\angle AOB=2\cdot\angle ACB$.

4.8.4. Dotas 2010 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir atšķirīgas. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Uz katra kausa uzliekot pa vienai monētai, smagākā no tām nosveras uz leju.

a) Pierādīt, ka gan smagāko monētu vienu pašu, gan vieglāko monētu vienu pašu var atrast, izdarot 2009 svēršanas.

b) Vai abas šīs monētas – gan smagāko, gan vieglāko – var atrast, izdarot mazāk nekā 4000 svēršanas?

4.8.5. Dots, ka $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$, $0<t<1$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $x(1-y)$, $y(1-z)$, $z(1-t)$, $t(1-x)$ nepārsniedz $\frac{1}{4}$.

4.9. Devītā klase

4.9.1. Dots, ka x un y – reāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$x^2+y^2+1\geq 2(xy-x+y).$$

4.9.2. Dots, ka $x<y<z<t<v$. Andris aprēķināja šo piecu skaitļu summas pa diviem. Trīs mazākās summas iznāca 32; 36; 37, bet divas lielākās iznāca 48 un 51.

Kādas ir iespējamās x; y; z; t; v vērtības?

4.9.3. Kvadrāta $ABCD$ centrs ir O. Ārpus kvadrāta konstruēti divi vienādi vienādsānu trijstūri BCJ un CDK ($BJ=CJ$ un $CK=DK$). Ar M apzīmējam CJ viduspunktu.

Pierādīt, ka $OM\perp BK$.

4.9.4. Uz galda atrodas 7 kartītes; uz tām uzrakstīti cipari 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 (uz katras kartītes cits cipars). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienai kartītei. Tas, kurš pirmais var no savām kartītēm izveidot veselu pozitīvu skaitli, kas dalās ar 17, uzvar. Kurš uzvar pareizi spēlējot – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu, vai arī spēle beidzas neizšķirti?

4.9.5. Kuri naturālie skaitļi x apmierina vienlaicīgi visas sekojošās prasības:

- $x\leq 2009$,
- x dalās ar 5,
- $x+1$ dalās ar 7,
- $x+2$ dalās ar 9,
- $x+3$ dalās ar 11?

5. Latvijas 60. matemātikas olimpiāde 2. (Rajona) kārta

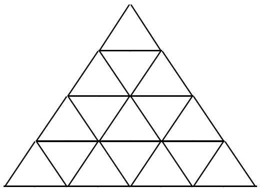
5.5. Piektā klase

5.5.1. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 12 katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu vai nu 1, vai 2?

5.5.2. Andris pieraksta datumu kā naturālu skaitli, bez atstarpes rakstot vienu aiz otra dienas numuru mēnesī un mēneša numuru gadā. Piemēram, 2.jūliju viņš pieraksta kā 27, bet 18.septembri – kā 189.

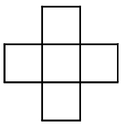
Cik ir tādu naturālu skaitļu, kas ir vairāk nekā viena datuma pieraksti Andra sistēmā?

5.5.3. Kādu lielāko daudzumu trijstūrīšu var iekrāsot U5.1.zīm. redzamajā figūrā, lai nekādiem diviem iekrāsotiem trijstūrīšiem nebūtu ne kopīga mala, ne kopīgs stūris?



U5.1.zīm.

5.5.4. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vai to var sagriezt 5 gabalos, lai viens būtu tāds, kāds redzams U5.2.zīmējumā, bet pārējie četri būtu savā starpā vienādi?



U5.2.zīm.

5.5.5. Astoņi rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus.

Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

5.6. Sestā klase

5.6.1. Pieci rūķīši sanesa savā namiņā kastes ar dārgakmeņiem. Katru kasti nesa tieši divi rūķīši. Vai var gadīties, ka katrs rūķītis piedalījās tieši triju kastu nešanā?

Vai tas varētu notikt, ja kastu nešanā piedalītos tieši četri rūķīši?

5.6.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, ka

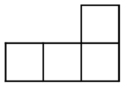
1) $a\cdot17-b\cdot13=1$,

2) $a\cdot39-b\cdot91=2$?

5.6.3. Tabula sastāv no 5×5 kvadrātiskām rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai vienlaicīgi

1) visu ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis,

2) katrā tādā figūrā (L-figūra), kāda attēlota U5.3.zīmējumā (tā var būt novietota arī citādi), ierakstīto skaitļu summa arī būtu nepāra skaitlis?



U5.3.zīm.

5.6.4. Klases šaha turnīrā piedalās 10 dalībnieki; katrs spēlē ar katru vienu reizi. Par uzvaru piešķir 1 punktu, par neizšķirtu $1/2$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Nolemts, ka klases lielmeistara nosaukumu piešķirs tiem, kas izcīnīs vismaz 7 punktus. Kāds lielākais skolēnu skaits šajā turnīrā var iegūt lielmeistara nosaukumu?

5.6.5. Deviņi rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus.

Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

5.7. Septītā klase

5.7.1. Rindā no sākuma bija uzrakstīti 2009 vieninieki. Ar vienu gājienu nodzēš divus pirmos rindā esošos skaitļus un tās otrā galā pieraksta abu nodzēsto skaitļu summu. Šādus gājienus atkārto, līdz rindā paliek tikai viens skaitlis.

- cik gājienu tiks izdarīti?
- atrast vienīgo palikušo skaitli.

5.7.2. Dots, ka $x^3 = y^4$ un $x^{11} = y^{15}$. Atrast x un y, ja tie ir pozitīvi skaitļi.

5.7.3. Cik ir tādu naturālu skaitļu x robežās no 1 līdz 2010 ieskaitot, ka $(x+1)(x+2)(x+3)$ dalās ar 343?

5.7.4. Kvadrātisks režģis sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu lielāko daudzumu nogriežņu, kas kalpo par rūtiņu malām, var nokrāsot tā, lai nevienai no 16 rūtiņām nebūtu nokrāsotas visas malas?

5.7.5. Seši rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus.

Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

5.8. Astotā klase

5.8.1. Kuru no skaitļiem $102^2 \cdot 103^2 \cdot \ldots \cdot 199^2$ un $(102^2-1)(103^2-1)\ldots(199^2-1)$ sadalot pirmskaitļu reizinājumā, iegūst vairāk dažādu pirmskaitļu? Par cik vairāk?

(Paskaidrojums: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ satur divus dažādus pirmskaitļus – 2 un 3.)

5.8.2. Trijstūrī ABC divas malas ir vienādas savā starpā, un $\angle ABC = 20°$. Pierādiet, ka $3 \cdot AC > AB$.

5.8.3. Četrciparu skaitlim pārlika ciparus citā kārtībā. Pierādīt: sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9.

5.8.4. Vai eksistē tādi skaitļi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ka vienādība $(x^2 + y^2 + 1) = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)$ ir identitāte?

5.8.5. Katras divas no 6 lampām savienotas ar baltu vai sarkanu vītni. Pierādīt: var atrast tādas 3 lampas, kuras visas savā starpā savienotas ar vienas krāsas vītnēm.

5.9. Devītā klase

5.9.1. Atrodiet kaut vienu kvadrātvienādojumu ar veseliem koeficientiem, kam viena no saknēm ir

a) $\sqrt{2} + 1$,

b) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

Piezīme. Katrā uzdevuma daļā runā par citu kvadrātvienādojumu.

5.9.2. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

5.9.3. Šaurleņķu trijstūra ABC iekšpusē dots punkts P. Pierādīt: attālumu summa no P līdz ABC malām nav garāka par ABC garāko augstumu.

5.9.4. Ap apaļu galdu sēž zēni un meitenes, zēnu ir trīs reizes vairāk nekā meiteņu. Tādu vietu, kur blakus sēž zēns un meitene, ir divreiz mazāk nekā pārējo vietu (t.i., tādu, kur blakus sēž vai nu zēns un zēns, vai meitene un meitene). Kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits?

5.9.5. Atrisiniet naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 + y = z^2 \\ y^2 + x = t^2 \end{cases}$.

6. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta

6.9. Devītā klase

6.9.1. Vai iespējams, ka kvadrātvienādojuma $x^2 - a^2x + b^2 = 0$, a un b – naturāli skaitļi, saknes ir divu dažādu naturālu skaitļu kvadrāti?

6.9.2. Trijstūrī ABC nogriežņi AM un CN ir bisektrises, un punkts O ir CN viduspunkts. Zināms, ka $\angle ABC = 90°$ un caur punktiem B, M, O un N var novilkt riņķa līniju. Atrast $\angle BAC$ vērtību.

6.9.3. Par *skaistu* sauksim tādu naturālu skaitli, kas nedalās ne ar vienu no cipariem savā decimālajā pierakstā (neviens skaitlis nedalās ar 0).

Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu visi var būt *skaisti*?

6.9.4. Rūtiņu lapā novietoti divi taisnstūri (var būt sakrītoši) tā, ka to malas iet pa rūtiņu malām. Teiksim, ka punkts pieder taisnstūrim, ja tas atrodas taisnstūra iekšpusē vai uz tā kontūra.

Cik no visām astoņām šo divu taisnstūru virsotnēm var vienlaicīgi piederēt arī otram taisnstūrim?

6.9.5. Taisnstūris ar izmēriem $5 \times n$ rūtiņas izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Vienā gājienā drīkst mainīt trīs blakus rūtiņu, kas atrodas vienā rindā vai kolonnā, krāsojumu uz pretējo. Vai, veicot šādus gājienus vairākkārt, var panākt, ka visas rūtiņas ir vienā krāsā, ja

- $n = 5$,
- $n = 3$?

7. Latvijas 37. atklātā matemātikas olimpiāde

7.5. Piektā klase

7.5.1. Rindā pēc kārtas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 20, neievērojot atstarpes starp tiem. Pēc tam šajā rindā izsvītroja 26 ciparus un apskatīja atlikušo ciparu veidoto naturālo skaitli (ciparu secību mainīt nedrīkst!).

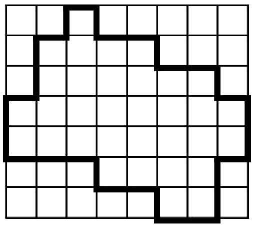
Kāds varēja būt

a) mazākais iegūtais skaitlis;

b) lielākais iegūtais skaitlis?

(Piezīme: naturāla skaitļa pieraksts nedrīkst sākties ar 0.)

7.5.2. Sagriez U7.1.zīmējumā attēloto figūru trīs vienādās daļās! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



U7.1.zīm.

7.5.3. Dotās 3×3 rūtiņu tabulas katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto trīs skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi trīs rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. U7.2.zīmējumu). Aizpildi pārējās tabulas rūtiņas!

	19	
17		25

U7.2.zīm.

7.5.4. Vairāki domino kauliņi ir salikti rindā viens aiz otra tā, ka katri divi viens otram sekojoši kauliņi saskaras ar pusēm, uz kurām attēlots vienāds punktu skaits.

U7.3.zīmējumā parādītā rūtiņu virkne attēlo iegūtās domino kauliņu rindas fragmentu: katra rūtiņa atbilst domino kauliņa vienai pusei, bet nav iezīmētas kauliņu robežas.

...			A				B	C			...

U7.3.zīm.

Nosaki, vai punktu skaits rūtiņā „A” var būt vienāds ar punktu skaitu

a) rūtiņā „B”,

b) rūtiņā „C”!

(Domino kauliņu komplekts sastāv no 28 kauliņiem. Katrs kauliņš sastāv no divām kvadrātveida pusēm, uz kurām attēloti punkti – uz katras puses attēloto punktu skaits ir no 0 līdz 6. Katram iespējamam punktu daudzumu pārim komplektā ir tieši viens kauliņš.)

7.5.5. Taisnstūris sastāv no 3×5 rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par kaimiņiem, ja tām ir kopēja mala vai kopējs stūris. Tieši 6 rūtiņas nokrāsotas melnas; pārējās ir baltas.

Vai var gadīties, ka vienai melnai rūtiņai ir tieši 1 balts kaimiņš, vienai melnai rūtiņai – tieši 2 balti kaimiņi, ... , vienai melnai rūtiņai – tieši 6 balti kaimiņi?

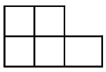
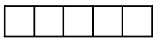
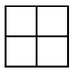
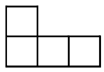
7.6. Sestā klase

7.6.1. Doti vairāki pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Zināms, ka pāra skaitļu starp tiem ir par 25% vairāk nekā nepāra skaitļu, un lielākais skaitlis ir 2 reizes lielāks par mazāko. Atrodi šos skaitļus!

7.6.2. Atrodi tādu naturālu sešciparu skaitli, kas sastāv no trīs dažādiem pāra cipariem un trīs dažādiem nepāra cipariem un kas dalās ar katru no saviem cipariem!

7.6.3. **a)** Dots, ka taisnstūri ar izmēriem $m \times n$ rūtiņas var sagriezt tādās figūrās, kāda redzama U7.4.zīmējumā. Pierādīt: šo taisnstūri var sagriezt arī tādās figūrās, kāda redzama U7.5.zīmējumā.

b) Vai taisnība, ka jebkuru taisnstūri, kam gan garums, gan platums ir vismaz 4 rūtiņas un kuru var sagriezt U7.6.zīmējumā redzamās figūrās, var sagriezt arī U7.7.zīmējumā redzamās figūrās?

U7.4.zīm. U7.5.zīm. U7.6.zīm. U7.7.zīm.

Figūras var būt arī pagrieztas vai apgrieztas „uz mutes”.

7.6.4. Dota U7.8.zīmējumā redzamā 3×3 rūtiņu tabula, kurā ierakstīti veseli skaitļi. Vienā gājienā atļauts izvēlēties divas dažādas tabulas rūtiņas – apzīmēsim tajās ierakstītos skaitļus attiecīgi ar x un y, nodzēst šos divus skaitļus un to vietā ierakstīt: x vietā – skaitli $3 \cdot x - 2 \cdot y$, bet y vietā – skaitli $3 \cdot y - 2 \cdot x$.

Vai, vairākkārt veicot šādus gājienus, var iegūt tabulu, kāda attēlota U7.9.zīmējumā?

1	3	11
-1	5	-7
4	-4	0

U7.8.zīm.

2	-4	0
3	-9	5
4	11	-2

U7.9.zīm.

7.6.5. Puķu dobe sadalīta n rindās pa n stādiem katrā rindā. Šajā dobē ir jāiestāda trīs veidu puķes: narcises, hiacintes un tulpes tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādi nosacījumi:

1) katrā rindā ir iestādīts nepāra skaits katra veida stādu;

2) nav iespējams atrast divas tādas rindas, kurās gan narcišu, gan hiacinšu, gan tulpju daudzumi sakristu.

Nosaki, kāda ir mazākā iespējamā n vērtība, pie kuras iespējams to izdarīt!

7.7. Septītā klase

7.7.1. Uz tāfeles uzrakstīti pieci dažādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz 100. Par tiem zināms, ka

1) pirmais ir 7;
2) trešais ir par 4 lielāks nekā piektais;
3) skaitlim, kuru iegūst, ceturto sareizinot ar piekto, visi cipari ir vienādi;
4) pirmais un ceturtais summā dod pieckāršotu otro.

Atrodi visus šos skaitļus!

7.7.2. Caur trijstūra ABC virsotni A novilktā taisne t sadala trijstūri divos vienādos trijstūros.

Vai var gadīties, ka $AB > AC$?

7.7.3. Ieraksti tabulas ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrā rūtiņā vienu naturālu skaitli tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas divas īpašības:

1) visi ierakstītie skaitļi ir dažādi;
2) jebkuru četru skaitļu, nekādi divi no kuriem neatrodas nevienā rindā, nedz vienā kolonnā, summa ir 2010.

Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

7.7.4. Vairākiem bērniem visiem ir vienāds skaits konfekšu. Brīdi pa brīdim kāds no bērniem paņem daļu savu konfekšu un sadala to pārējiem vienādās daļās. Pēc kāda laika izrādījās, ka vienam no bērniem ir 4 konfektes, bet citam – 23 konfektes. Cik pavisam ir bērnu? (Konfektes netiek dalītas daļās, apēstas vai izmestas.)

7.7.5. Rindā stāv 2010 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr saka patiesību (ir *patiesis*), vai arī vienmēr melo (ir *melis*). Uz jautājumu:

"*Vai pa labi no jums esošo patiešu skaits ir lielāks nekā pa kreisi no jums esošo patiešu skaits?*"

ar "jā" atbildēja tieši 100 rūķīši.

Kāds lielākais un kāds – mazākais skaits *patiešu* var būt starp visiem rūķīšiem?

7.8. Astotā klase

7.8.1. Starp skaitļiem

6 1 3 4,

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („+", „–", „·", „:") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu

a) 25,

b) 24.

Vai to var izdarīt?

7.8.2. Andris un Juris katrs izvēlas trīs secīgus naturālus skaitļus tā, ka visi seši skaitļi ir atšķirīgi. Katru Andra skaitli sareizināja ar katru Jura skaitli, ieguva deviņus reizinājumus. Pierādi, ka starp iegūtajiem deviņiem skaitļiem vismaz astoņi būs savā starpā atšķirīgi!

7.8.3. Astoņstūrī *ABCDEFGH* visi iekšējie leņķi ir vienādi. Zināms arī, ka *ACEG* ir kvadrāts. Pierādi, ka *BDFH* arī ir kvadrāts!

7.8.4. Namdarim Mārim ir nepieciešami 3 *m*, 4 *m* un 5 *m* gari baļķīši. Vai Māris var iegūt pa 13 katra veida baļķīšiem, ja viņam ir pieejami tikai:

a) 16 baļķi, kur katra baļķa garums ir 10 *m*;

b) 12 baļķi, kur katra baļķa garums ir 13 *m*?

7.8.5. Dambretes turnīrā piedalās 7 spēlētāji; katrs ar katru citu spēlē tieši 1 reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Turnīru beidzot, izrādījās, ka nekādiem diviem spēlētājiem nav vienāds punktu daudzums. Kāds ir mazākais iespējamais uzvarētāja iegūtais punktu daudzums? (Par uzvarētāju uzskata to spēlētāju, kam turnīra noslēgumā ir visvairāk punktu.)

7.9. Devītā klase

7.9.1. Naturālus skaitļus no 1 līdz 2*N* jāsadala *N* pāros tā, lai katra pāra skaitļu summa būtu pirmskaitlis, pie tam šīm N summām jābūt dažādām. Vai to iespējams izdarīt, ja

a) $N = 5$;

b) $N = 10$?

7.9.2. Četri atšķirīgi punkti *A*, *B*, *C* un *D* atrodas uz parabolas $y = x^2$. Nogriežņi *AB* un *CD* krustojas punktā *E*. Pierādi, ka *E* nevar būt vienlaicīgi gan *AB*, gan *CD* viduspunkts!

7.9.3. Naturāla skaitļa *n* pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar d(*n*). Piemēram, d(1)=1; d(6)=4 utt. Sauksim skaitli *n* par *apaļīgu*, ja tas dalās ar d(*n*).

a) atrodi piecus *apaļīgus* pāra skaitļus,

b) pierādi, ka *apaļīgu* pāra skaitļu ir bezgalīgi daudz.

7.9.4. 2010×2010 rūtiņas lielā kvadrātā, sākot ar apakšējo kreiso rūtiņu, pēc kārtas tiek ierakstīti naturālie skaitļi kā parādīts U7.10.zīmējumā (katrā rūtiņā ierakstīts viens skaitlis).

Piemēram, skaitlis 19 ierakstīts ceturtajā rindā, trešajā kolonnā.

a) Kurš skaitlis ierakstīts 20. rindā, 10. kolonnā?

b) Kurā rindā un kurā kolonnā atrodas rūtiņa, kurā ierakstīts skaitlis 2010?

...	…						
7.	22	…					
6.	21	…					
5.	11	20	…				
4.	10	12	19	…			
3.	4	9	13	18	…		
2.	3	5	8	14	17	…	
1.	1	2	6	7	15	16	…
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**...**

U7.10.zīm.

7.9.5. Dota tabula ar izmēriem 7×8 rūtiņas (7 rindiņas, 8 kolonnas), tabulas apakšējā labajā stūra rūtiņā atrodas figūriņa *sienāzis*. U7.11.zīmējumā attēloti *sienāža* iespējamie gājieni. No jebkuras rūtiņas, kurā sienāzis kādā brīdī atrodas, viņš var pārvietoties tādā pašā virzienā par tādu pašu attālumu kā no A uz jebkuru rūtiņu X pie nosacījuma, ka viņš paliek tabulas iekšpusē.

Kurās no pārējām trijām tabulas stūra rūtiņām *sienāzis* var nonākt un kurās – nevar, izpildot tikai atļautos gājienus?

X			
		X	
	A		
X			X

U7.11.zīm.

Ieteikumi

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. Pirmā kārta

2.1.1. Centies atrast prasīto piemēru patstāvīgi.

2.1.2. Uzzīmē, piemēram, tādu 12-stūri, kuram četras malas atrodas uz vienas taisnes.

2.1.3. Apskati vispirms, cik cipari tiks uzrakstīti, izrakstot visus pāra skaitļus no 2 līdz 998. Pēc tam jau viegli aprēķināt prasīto.

2.1.4. Nē; izkrāso figūriņas šaha galdiņa kārtībā. Apskati, cik melno rūtiņu var būt katrā figūrā un salīdzini to ar melno rūtiņu skaitu taisnstūrī.

2.1.5. Lielākais skolēnu skaits var būt 21 skolēns, bet mazākais – 8 skolēni. Pamato šo rezultātu un parādi ar piemēriem!

2.2. Otrā kārta

2.2.1. Apskati, kāds var būt A, ja skaitlim $6 \cdot A$ jābeidzas ar ciparu 0.

2.2.2. Centies prasīto izpildīt patstāvīgi.

2.2.3. **a)** jā, var; **b)** nē, nevar.

2.2.4. Var iegūt 84 dažādus karogus.

2.2.5. Uzdevuma situāciju raksturo šādas divas nevienādības (b – bulciņas cena, t – tējas cena): $5b + 3t \geq 101$ un $3b + 2t \geq 61$.

2.3. Trešā kārta

2.3.1. Centies taisnstūri patstāvīgi sagriezt prasītajā veidā.

2.3.2. Stienīti 10 cm nevar izmantot neviena trijstūra veidošanā; no pārējiem stienīšiem vienlaicīgi var izveidot ne vairāk kā 2 trijstūrus.

2.3.3. Centies atrast prasīto skaitli.

2.3.4. Trīsriteņu skaitam jābūt pāra skaitlim, turklāt kvadriciklu un divriteņu skaitam jābūt vienādam (abi šie apgalvojumi ir jāpamato).

2.3.5. Abos gadījumos pastaiga beigsies. Centies patstāvīgi izsekot pastaigas norisei!

2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. Reizināšanas piemēra otrais reizinātājs ir skaitlis 111.

2.4.2. No dotā varam secināt, ka līdz pusnaktij vēl atlikusi sestdaļa diennakts.

2.4.3. Nepieciešamas vismaz četras krāsas; ir nepieciešams gan šī apgalvojuma pamatojums, gan arī jāuzrāda atbilstošs piemērs.

2.4.4. Apskati, par cik palielinās stīgu kopējais skaits, tās sadalot 7 vai 10 daļās (uzdevuma risināšanā jāizmanto invariantu metode).

2.4.5. Centies patstāvīgi izvietot figūriņas prasītajā veidā.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. Ar zvaigznīti aizstāts skaitlis 144. Katru no skaitļu virknes zināmajiem locekļiem var izteikt kā vesela skaitļa reizinājumu ar skaitli 9.

2.5.2. Centies patstāvīgi paveikt prasīto.

2.5.3. Māris pareizi atbildēja uz 3 uzdotajiem jautājumiem.

2.5.4. **a)** jā, var; **b)** nē, nevar. Apskati, cik daudz dažādas masas var nosvērt ar doto atsvaru komplektu.

2.5.5. Katram no uzvārdiem atbilst spēlētājs ar vārdu Andris, bet katram no vārdiem atbilst viens spēlētājs ar uzvārdu Kalniņš.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. Pirmā nodarbība

3.1.1. **a)** jā var; centies to izdarīt patstāvīgi;

b) nē, nevar; noskaidro, cik reizes dotajos skaitļos kopā ietilpst skaitlis 2 kā pirmreizinātājs.

3.1.2. Andris un Maija kopā saņēma par vienu atlaidi vairāk nekā Katrīna.

3.1.3. Jā, var; centies to parādīt patstāvīgi, konstruējot piemēru.

3.1.4. Reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot ... \cdot 2009$ dalās ar 9.

3.1.5. Papildini zīmējumu, lai izveidotu taisnleņķa trijstūri ar hipotenūzu BC. Apskati un salīdzini iegūto trijstūru laukumus!

3.1.6. Var būt 1, 2, 3 vai 4 meļi. Pamato, ka jābūt vismaz vienam melim.

3.1.7. **a)** 9 rūtiņas; **b)** 16 rūtiņas. Lai pierādītu, ka vairāk rūtiņu prasītajā veidā nevar nokrāsot, sadali dotos kvadrātus 2×2 rūtiņu lielos kvadrātos; katrā no tiem var būt ne vairāk kā 1 nokrāsota rūtiņa.

3.1.8. **a)** nē, nevar; **b)** jā, var; **c)** nē, nevar.

3.1.9. Nē, nevar. Izkrāso gan taisnstūri, gan figūriņas šaha galdiņa kārtībā. Ko vari ievērot?

3.2. Otrā nodarbība

3.2.1. Jā, var; centies to paveikt patstāvīgi.

3.2.2. Izmanto īpašību: ja daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, tad, palielinot saucēju, daļas vērtība samazinās

3.2.3. Apskati visus divciparu naturālus skaitļus, kas dalās ar vismaz 3 dažādiem pirmskaitļiem!

3.2.4. **a)** nē, nevar, **b)** jā, var.

3.2.5. Minēto 7 punktu sistēma ir simetriska attiecībā pret diametru, kas vilkts caur kādu no punktiem.

3.2.6. Apskati un salīdzini tabulā ierakstīto skaitļu summas, kas aprēķinātas vienā gadījumā – pa rindiņām, bet otrā – pa kolonnām. Ko par tām vari teikt?

3.2.7. **a)** Novelc no punkta M taisnes paralēli ΔABC malām un apskati izveidojušos četrstūrus – pierādi, ka tās ir vienādsānu trapeces.

b) Var izvēlēties tādu punktu M, ka trijstūris neeksistē.

3.2.8. Kādas krāsas rūtiņā atradīsies skudra pēc visiem 15 gājieniem?

3.2.9. Pietiek ar 11 rūtiņu izgriešanu. Parādi atbilstošu piemēru un pierādi, ka izgriežot mazāk rūtiņu, uzdevuma nosacījumi neizpildās.

3.2.10. Aplūko skaitļa 5 reizināšanu ar katru no cipariem 0, 1 un 2, un apskati ciparu summu divos dažādos veidos.

3.3. Trešā nodarbība

3.3.1. Centies prasīto izdarīt patstāvīgi *mēģinājumu ceļā*.

3.3.2. Izmanto pakāpju īpašību – ja kāpinātāji ir vienādi, tad lielāka ir tā pakāpe, kurai lielāka bāze.

3.3.3. Ne vairāk kā 13 apgabalos. Lai to pierādītu, atceries, ka divām taisnēm var būt vai nu viens, vai neviens kopīgs punkts.

3.3.4. Vidējā taisnstūra perimetrs ir mazāks nekā 3. Uzdevumam ir divas daļas – pierādīt, ka prasītais perimetrs ir mazāks nekā 3; parādīt, ka jebkurš pozitīvs skaitlis, kas mazāks nekā 3, var būt vidējā taisnstūra perimetrs.

3.3.5. Jā, to var izdarīt.

3.3.6. Jā; prasītajā veidā var sadalīt jebkurus 8 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus.

3.3.7. Minimālā ciparu summa šādam skaitlim ir 6; lai to pierādītu, izmanto dalāmības pazīmes skaitļiem 3 un 11. Atceries pierādīt, ka mazāka ciparu summa nav iespējama.

3.3.8. Centies prasīto izdarīt patstāvīgi.

3.3.9. Pirmā monēta no kreisās puses sver 7 gramus, bet pēdējā – 8 gramus; uz viena svaru kausa novieto šīs divas monētas, bet uz otrā – kādas divas citas (centies izspriest, kuras tieši) un šķiro gadījumus atkarībā no tā, uz kuru pusi nosveras svaru kausi.

3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. Sadali dotās izteiksmes reizinātājos.

3.4.2. Jā, var. Centies atrast atbilstošu piemēru.

3.4.3. Nē, nevar. Lai to pierādītu, apskati kādu naturālu skaitli, kura pierakstā kāds no cipariem ir 2, un salīdzini to ar tādu skaitli, kurā šis divnieks aizstāts ar 1.

3.4.4. Apskati nevienādību $(a-c)(x-y)+(b-c)(y-z)>0$; ko vari teikt par šīs nevienādības saistītu ar pierādāmo nevienādību?

3.4.5. Centies paveikt prasīto.

3.4.6. Atzīmēto leņķu lielumu summa ir 540°.

3.4.7. Abiem pulciņiem vienādi.

3.4.8. Izmantojot zīmējumu, centies pamatot, ka $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}$.

3.4.9. Ievies apzīmējumus vispārīgā veidā un aplūko dalītāju skaitu patvaļīgam skaitlim.

3.4.10. a) Nē, perimetrs nevar būt 101. Pierādiet, ka perimetram jābūt pāra skaitlim.

b) Daudzstūra laukums ir 26.

3.5. Piektā nodarbība

3.5.1. Izmanto šādu naturālu skaitļu īpašību: ja kādi divi naturāli skaitļi dalās abi ar vienu un to pašu skaitli n, tad arī šo skaitļu starpība dalās ar n.

3.5.2. Sadali visas lapas rūtiņas četrās grupās A, B, C, D, kā parādīts 1. zīmējumā.

...

...					...
	A	B	A	B	
	D	C	D	C	
...	A	B	A	B	...
	D	C	D	C	
	...				

1.zīm.

3.5.3. Lai nospēlētu visas spēles, pietiek ar 7 dienām. Nepieciešams gan parādīt atbilstošu piemēru, gan arī pamatot, ka ar mazāku dienu skaitu nepietiek.

3.5.4. Riņķa līnijas projekcijas garums uz kādu no šī šaurleņķu trijstūra malām ir vienāds ar diametru.

3.5.5. Centieties atrast atbilstošus piemērus patstāvīgi.

3.5.6. Nē, nevar. Novelciet izveidoto trijstūru augstumus, apskatiet to laukumu izteiksmes.

3.5.7. Augstumi atrodas uz riņķa līnijas ar centru dotajā malas viduspunktā un rādiusu, kura garums vienāds ar pusi no šīs malas.

3.5.8. Atveriet iekavas un centieties sagrupēt izteiksmes locekļus tā, lai izveidotos polinomu kvadrātu summa.

3.5.9. Aprēķini tabulas elementu summas pa rindiņām, pēc tam aprēķini elementu summas pa „stūrīšiem”. Ko vari par tām pateikt?

3.5.10. Pietiek ar vienu jautājumu. Kāds tas varētu būt?

3.6. Sestā nodarbība

3.6.1. a) Jā, eksistē.

b) Nē, neeksistē. Vai šī skaitļa pierakstā var būt cipari 0 un 5?

3.6.2. Pirkuma kopējai summai jādalās ar 3.

3.6.3. Ar katru lauzumu mēs palielinām šokolādes gabaliņu skaitu par 1.

3.6.4. Kādu minimālo skaitu lauciņu apdraud katra dāma?

3.6.5. Centies prasīto paveikt patstāvīgi.

3.6.6. Atceries, ka mediānas, kas novilkta no taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes, garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.

3.6.7. Jā, tā var gadīties. Centies atrast tādu piemēru gan tad, kad ārējais četrstūris ir izliekts, gan arī, ja tas ir ieliekts.

3.6.8. Apzīmējiet skolēnus ar S_1, S_2, S_3, ..., S_{30}. Katrai dienai sadaliet visus skolēnus 2 grupās: vienā grupā tos skolēnus, kuri tajā dienā iet ciemos, bet otrā grupā – tos skolēnus, kuri tajā dienā sēž mājās un gaida viesus.

3.6.9. Iespējami vairāki risinājumi. Piemēram, var ievērot, ka $7\cdot 17=119=120-1$ vai arī $7\cdot 103=721=360\cdot 2+1$.

3.6.10. Detektīvs vispirms var aizbraukt uz to salu, kur laupītājs bija sākumā. Izmanto to, ka detektīvs katrā solī zina, kur atrodas laupītājs.

4. LATVIJAS 20. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. Piektā klase

4.5.1. Saskaiti, cik rūtiņu satur katra daļa.

4.5.2. Centrālajā rūtiņā ieraksti skaitli 5.

4.5.3. Divu skaitļu reizinājums dalās ar 3, ja vismaz viens tā reizinātājs dalās ar trīs.

4.5.4. Pierādi, ka var atrast tādu taisnstūri, kurā nokrāsotas ne vairāk kā 2 rūtiņas, nozīmē pierādīt, ka nav iespējams iekrāsot 11 rūtiņas tā, lai katrā 3×4 rūtiņu taisnstūrī būtu iekrāsotas vismaz trīs rūtiņas.

4.5.5. Lai ievērotu likumsakarības, izpildi vairākkārt atļautās darbības.

4.6. Sestā klase

4.6.1. Apskati, cik rūtiņu gara būs katra kvadrāta mala.

4.6.2. Ar 9 dalās skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 9.

4.6.3. Nē, nevar; šo apgalvojumu nepieciešams pamatot.

4.6.4. Nē; pieņem, ka mazākais skaitlis, kam izpildās uzdevuma nosacījumi ir x, un aplūko, ka var iegūt mazāku skaitli ar tādu pašu īpašību.

4.6.5. Jā, Sprīdītis to var izdarīt.

4.7. Septītā klase

4.7.1. 6 pirmskaitļi; pamato, ka vairāk nav iespējams.

4.7.2. Lai pierādītu uzdevumā prasīto, varam pieņemt pretējo, t.i., ka divas taisnes sakrīt.

4.7.3. **a)** nē; **b)** jā; **c)** nē. Apzīmē uzrakstītos skaitļus ar x, y, z, t, v un atrodi, kā var izteikt reizinājumu $abcde$.

4.7.4. Konstruē pierādījumu, aplūkojot skaitļu pēdējos ciparus.

4.7.5. Saskaiti (atņem) iegūtos skaitļus, savelc līdzīgos locekļus un izdari secinājumus.

4.8. Astotā klase

4.8.1. Pieņem, ka $a=c$ un aplūko y funkcijas.

4.8.2. No visiem apgalvojumiem secinām, ka x ir pāra skaitlis.

4.8.3. Ievēro, ka ΔACO un ΔBCO ir vienādsānu.

4.8.4. **a)** Katrā reizē salīdzinām savā starpā 2 monētas; **b)** Jā, var.

4.8.5. Pieņem pretējo, t.i., ka visi dotie skaitļi pārsniedz $\frac{1}{4}$. Aplūko visu šo skaitļu reizinājumu.

4.9. Devītā klase

4.9.1. Pārveido doto nevienādību, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas.

4.9.2. Mazākas summas iegūst, saskaitot mazākus saskaitāmos, un lielākas summas – saskaitot lielākus.

4.9.3. Pierādi, ka $\Delta ABJ=\Delta BCK$.

4.9.4. Parādi, kā uzvar pirmais spēlētājs.

4.9.5. Ja izpildās uzdevuma pēdējie četri punkti, tad $2x-5$ dalās ar 5, 7, 9 un 11.

5. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

5.5. Piektā klase

5.5.1. Apdomā, kādi var būt katra skaitļa, īpaši skaitļu 1 un 12, kaimiņi.

5.5.2. Aplūko, no cik cipariem var sastāvēt Andra kods

5.5.3. Atceries pamatot, kāpēc vairāk trijstūrīšus nav iespējams iekrāsot.

5.5.4. Zīmējumā doto figūru izgriez kvadrāta centrā.

5.5.5. Mazākais stundu skaits ir 3, atliek parādīt piemēru, kā to realizēt, un pamatot, ka ar 2 stundām noteikti nepietiek.

5.6. Sestā klase

5.6.1. Pieņem, ka rūķīšu skaits ir n un aplūko „kastu nešanas skaitu" divējādi.

5.6.2. 1) var atrast; nepieciešams atrast atbilstošu piemēru;

2) nevar atrast; šis apgalvojums noteikti jāpamato.

5.6.3. Atceries, ka summa ir nepāra skaitlis, ja ierakstītie nepāra skaitļi ir nepāra skaitā.

5.6.4. Aplūko kopējo turnīrā iegūto punktu skaitu, lai pamatotu, ka lielāks skolēnu skaits par atrasto nevar iegūt lielmeistara nosaukumu.

5.6.5. Mazākais stundu skaits ir 5. Atceries parādīt piemēru, kā piecās stundās visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus, kā arī pamatot, ka noteikti nepietiek ar mazāk kā 5 stundām.

5.7. Septītā klase

5.7.1. Apskati līdzīgu uzdevumu ar, piemēram, 10 rindā uzrakstītiem vieniniekiem un izdari secinājumus.

5.7.2. Kāpini pirmās vienādības abas puses ceturtajā pakāpē un no tās atņem otro vienādību.

5.7.3. Sadali pirmreizinātājos skaitli 343.

5.7.4. Pieņem, ka sākumā visi režģa nogriežņi ir nokrāsoti, un aplūko, kāds mazākais daudzums nogriežņu jānodzēš, lai nevienai no rūtiņām nebūtu nokrāsotas visas malas.

5.7.5. Mazākais stundu skaits ir 3; atliek parādīt piemēru, kā to realizēt, un pamatot, ka ar 2 stundām noteikti nepietiek.

5.8. Astotā klase

5.8.1. Lieto kvadrātu starpības formulu, lai pārveidotu katru otrā skaitļa reizinātāju; izdari secinājumus.

5.8.2. Aplūko trīs gadījumus atkarībā no tā, kā ir izvietotas divas vienādās malas.

5.8.3. Uzraksti četrciparu skaitli vispārīgā veidā un izsaki kā summu, kurā viens no saskaitāmajiem ir šī skaitļa ciparu summa.

5.8.4. Nē, neeksistē; var izvēlēties tādas x un y vērtības, lai vienādības labā puse būtu 0, bet kreisā puse vienmēr būs pozitīva.

5.8.5. Vari risināt uzdevumu, pieņemot pretējo – ka iespējams savienot ik divas lampas ar baltu vai sarkanu vītni tā, lai nekādas trīs lampas nebūtu savienotas ar vienas krāsas vītnēm.

5.9. Devītā klase

5.9.1. a) Izmanto Vjeta teorēmu un atrodi, kādai ir jābūt otrajai saknei, lai sakņu summa un reizinājums būtu veseli skaitļi.

b) Pārveido izteiksmi līdzīgi, kā a) gadījumā un rīkojies līdzīgi kā iepriekš.

5.9.2. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāpierāda, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, ja $R^2 + r^2 = d^2$; 2) jāpierāda: ja abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, tad $R^2 + r^2 = d^2$.

Atceries, ka pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta.

5.9.3. Sadali doto trijstūri trīs mazākos trijstūros tā, ka tiem ir kopīga virsotne punktā *P*. Izsaki ΔABC laukumu divos dažādos veidos. Atceries, ka trijstūrī garākais augstums novilkts pret īsāko malu.

5.9.4. Uzdevums risināms divās daļās – pirmajā daļā atrodi, kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits un otrajā daļā parādi piemēru, kā bērni var sasēsties ap galdu.

5.9.5. Pierādi, ka sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos, iegūstot, ka $x^2 + y$ vai $y^2 + x$ atrodas starp divu blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem.

6. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. Devītā klase

6.9.1. Aplūko vienādojuma sakņu summu un reizinājumu, izmantojot Vjeta teorēmu.

6.9.2. Ja četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

6.9.3. Uzdevums risināms divās daļās – pirmajā daļā jāpierāda, ka lielākais skaits pēc kārtas sekojošu skaistu skaitļu ir 5 un otrajā daļā jāparāda piemērs ar pieciem pēc kārtas sekojošiem pāra skaitļiem.

6.9.4. Parādi piemēru, kā no astoņām divu taisnstūru virsotnēm vienlaicīgi otram taisnstūrim var piederēt 0, 2, 3, 4, 5, 6 vai 8 virsotnes. Pierādi, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši 1 un tieši 7 virsotnes.

6.9.5. a) Parādi piemēru, kā ir iespējams izkrāsot taisnstūri.

b) Pierādi, ka prasītais nav iespējams.

7. LATVIJAS 36. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. Piektā klase

7.5.1. Lai atrastu mazāko (lielāko) skaitli, liec pēc iespējas mazus (lielus) ciparus augstākā šķirā.

7.5.2. Atceries, ka figūras ir vienādas, ja, uzliekot vienu uz otras, tās sakrīt.

7.5.3. Apzīmē ierakstāmos skaitļus ar *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f*. Veido vienādības pa rindiņām un kolonnām un pakāpeniski atrodi visus skaitļus.

7.5.4. a) Nē; pierādi, ka nevar būt. Apskati vairākas situācijas, atkarībā no domino kauliņu robežu novietojuma.

b) Jā; pietiek parādīt vienu piemēru, kā to var izdarīt.

7.5.5. Jā, var.

7.6. Sestā klase

7.6.1. Pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem pāra skaitļu var būt augstākais par vienu vairāk.

7.6.2. Aplūko dalāmības pazīmes ar katru no viencipara skaitļiem.

7.6.3. a) Rūtiņu skaits taisnstūrī dalās ar 5, jo to var sadalīt figūrās, kas sastāv no 5 rūtiņām.

b) Nē; atrodi taisnstūri, kuram neizpildās minētā īpašība.

7.6.4. Nē; izpildot atļautās darbības, tabulā ierakstīto skaitļu summa nemainās.

7.6.5. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas – pirmajā daļā atrodi mazāko vērtību un parādi piemēru; otrajā daļā pierādi, ka nav iespējama mazāka n vērtība.

7.7. Septītā klase

7.7.1. Ievēro, ka no ceturtā nosacījuma seko – pirmais, otrais un ceturtais pirmskaitļi visi nevar būt nepāra skaitļi.

7.7.2. Nē, nevar.

7.7.3. Katrā rindiņā (kolonnā) ieraksti pēc kārtas sekojošus skaitļus.

7.7.4. Ievēro, ka katras konfekšu dalīšanas rezultātā starpības starp jebkuru divu bērnu konfekšu daudzumiem mainās par skaitļa bērnu skaita daudzkārtni.

7.7.5. Lielākais skaits *patiešu* ir 201, mazākais – 1.

7.8. Astotā klase

7.8.1. Jā, prasītais ir iespējams abos gadījumos.

7.8.2. Apzīmē viena zēna iedomātos skaitļus ar $a-1$, a un $a+1$ un otra zēna iedomātos skaitļus ar $b-1$, b un $b+1$. Salīdzini šo skaitļu reizinājumus un izdari secinājumus.

7.8.3. Izmanto trijstūru vienādību.

7.8.4. a) Nē; pierādi, ka nevar, izmantojot to, cik daudz dēlīšu paliek neizmantoti.

b) Jā; parādi piemēru.

7.8.5. Mazāko iespējamo uzvarētāja punktu daudzumu apzīmē ar n un aplūko, cik punktus var būt ieguvuši pārējie spēlētāji. Saskaiti visus iegūtos punktus divos dažādos veidos.

7.9. Devītā klase

7.9.1. a) Jā; parādi piemēru.

b) Nē; aprēķini skaitļu summu 1 līdz 20 divos dažādos veidos.

7.9.2. Pierādi no pretējā, pieņemot, ka tā var būt.

7.9.3. Aplūko visus pāra skaitļus, līdz atrodi piecus apaļīgu skaitļus. Atrodi kādas divnieka pakāpes vispārīgā veidā ir apaļīgi skaitļi un pārliecinies, ka tādu ir bezgalīgi daudz.

7.9.4. Ievēro, ka skaitļi tabulā ir izvietoti pa diagonālēm un uz vienas diagonāles esošām rūtiņām rindas un kolonnas numuru summa ir konstanta.

7.9.5. Iztēlojies, ka sienāzis atstāj pēdas katrā rūtiņā, kurā tas „iekāpj” un, vairākkārt izdarot sienāža gājienus, ievēro, kādās rūtiņās sienāzis var nonākt.

ATRISINĀJUMI

1. Konkurss 4.klasēm „Tik vai... Cik?"

1.1. Pirmā kārta

1.1.1. Atbilde: B.

Risinājums: Ievērojot darbību secību, aprēķinām $9+81-1=89$.

1.1.2. Atbilde: A.

Risinājums: Aizpildot *saulītes* no beigām (tātad izpildot apgrieztās darbības), iegūst:

$10-5=5$;

$5\cdot 3=15$;

$15+1=$ **16**.

1.1.3. Atbilde: A.

1.1.4. Atbilde: B.

Risinājums: Iekrāsots ir 1 no 4 vienādiem trijstūrīšiem.

1.1.5. Atbilde: B.

Risinājums: Lauztās līnijas daļa *ABC* ir divas reizes garāka nekā nogrieznis *AC* (jo sastāv no diviem tādiem pašiem nogriežņiem); līdzīgi arī lauztā līnija *CDE* ir divas reizes garāka nekā nogrieznis *CE*, lauztā līnija *EFG* ir divas reizes garāka nekā nogrieznis *EG,* lauztā līnija *GHI* ir divas reizes garāka nekā nogrieznis *GI*. Tāpēc visas lauztās līnijas *ABCDEFGHI* garums ir divreiz lielāks nekā nogriežņa *AI* garums. Tātad visas lauztās līnijas garums ir $15\cdot 2=30\,cm$.

1.1.6. Atbilde: D.

Risinājums: Doto vienādojumu apmierina tikai šādi naturālu skaitļu pāri: $a=3$, $b=3$ un $a=6$, $b=1$. Izmantojot to, redzam, ka patiess ir tikai apgalvojums D. **Piezīme.** Atrisinājumu atrod, piemēram, tieši pārbaudot vērtības a = 1, 2, ... un skatoties, kuros gadījumos b arī ir naturāls skaitlis. Jāatceras, ka **0 nav naturāls skaitlis!** Taču šajā uzdevumā pat atrisinājums a = 0, b = 5 neietekmē doto apgalvojumu patiesumu vai aplamību.

1.1.7. Atbilde: B.

Risinājums: No dotajiem cipariem var izveidot tikai sekojošas stundas: 00; 02; 07; 20. Tātad, ja vajadzīgais brīdis iestātos vēl tajā pašā diennaktī, tas būtu plkst. 20:*xx* (*xx* – minūtes). Bet tā kā no cipariem 0 un 7 var izveidot tikai minūšu rādījumu „07", tad šajā diennaktī tāds mirklis iestāties nevar. Tāpēc tuvākais interesējošais laika brīdis var būt pēc pusnakts, t.i., plkst. **00:27**, tātad pēc 4 h 20 min.

1.1.8. Atbilde: E.

1.1.9. Atbilde: D.

Risinājums: Sākumā ievērojam, ka 1 *h* 20 *min* laikā gliemezis tiek tikai 5 cm uz augšu. Tātad pēc 18 šādiem kāpšanas/ atpūtas cikliem jeb 18 · 1 *h* 20 *min* = 24 *h* gliemezis būs ticis 90 *cm* augstumā. Un pēc vēl 1 *h* kāpšanas gliemezis būs jau 1 *m* augstumā, t.i., būs sasniedzis staba virsotni, un uz leju vairs neslīdēs.

1.1.10. Atbilde: C.

Risinājums: Aizpildot sudoku kvadrātu tālāk, redzams, ka pirmās kolonnas trešajā rindā jāraksta 3, tālāk – trešās rindas otrajā kolonnā nevar būt ne 1, ne 3, tāpēc jābūt 2. Līdz ar to jautājuma zīmes vietā jāraksta **3**.

1.1.11. Atbilde: B.

Risinājums: Nepilngadīgie ir gan bērni, gan pusaudži; abi atbilstošie diagrammas sektori kopā sastāda vairāk nekā pusi no visa riņķa un ir lielāki, nekā pieaugušajiem atbilstošais sektors.

1.2. Otrā kārta

1.2.1. Atbilde: C.

Risinājums: Izteiksmes vērtību aprēķinām pakāpeniski, vispirms atverot iekšējās iekavas:

$$(((2+2)\cdot 2+2)\cdot 2+2):2=((4\cdot 2+2)\cdot 2+2):2=(10\cdot 2+2):2=22:2=11$$

1.2.2. Atbilde: C.

Sniegsim vairākus iespējamos risinājumus.

1) Tā kā kaķiem ir 4 kājas, bet kanārijputniņiem – 2 kājas, tad $16=4k+2(5-k)$, kur k ir kaķu skaits. No vienādojuma iegūstam $k = 3$.

2) Varam pieņemt, ka visi dzīvnieki ir kaķi. Tā kā tiem ir 4 kājas, tad to būtu skaitā $16:4=4$. Tā kā teikts, ka ir 5 dzīvnieki, tad vienu no šiem četriem kaķiem *aizstājam* ar diviem kanārijputniņiem – tad mums ir 3 kaķi un 2 kanārijputniņi. Pārbaudot secinām, ka šī atbilde apmierina uzdevuma nosacījumus.

3) Šo uzdevumu var atrisināt arī tieši pārbaudot visas iespējas, cik var būt kaķi (t.i., 0; 1; 2; 3; 4; 5) un iegūstot, ka uzdevuma nosacījumi izpildās vienīgi tad, ja ir 3 kaķi.

1.2.3. Atbilde: C.

No uzdevumā dotā seko $s=2\cdot b$ un $b=z+2$. Tātad $s=2\cdot(z+2)=2\cdot z+4$. Tāpēc

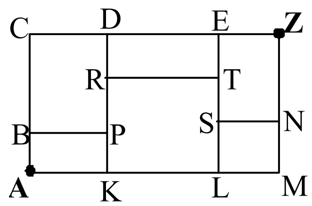
$$s+b+z=(2\cdot z+4)+(z+2)+z=4\cdot z+6.$$

1.2.4. Atbilde: B.

1.2.5. **1)** 2009 *sant.* < 209 *sant.* · 10 = 2090 *sant.*

2) 412 *s* : 2 = 206 *s* = 3 *min.* 26 *s* > 2 *min.* 2 *s*

1.2.6. **Atbilde:** 8 veidos.



A1.1.zīm.

Iespējamie maršruti (skat. A1.1. zīm.):

ABCDEZ (jeb *ACZ*)

AKPRDEZ (jeb *AKDZ*)

ABPRDEZ (jeb *ABPDZ*)

AKPRTEZ (jeb *AKRTEZ*)

ABPRTEZ

AKLSTEZ (jeb *ALEZ*)

AKLMNZ (jeb *AMZ*)

AKLSNZ (jeb *ALSNZ*)

1.2.7. **Atbilde:** 4 meitenes, 3 zēni.

Sniegsim divus iespējamos risinājumus.

1.risinājums: Apzīmēsim meiteņu skaitu ar m, zēnu skaitu – ar z un vietu skaitu – ar v. Tad no dotā izriet, ka $z+m=v+1$.

Ievērosim, ka $v = m + 2$ un $z = m - 1$ (jo, ja apsēstos visi zēni, paliktu par vienu vietu vairāk brīvas nekā tad, ja apsēstos visas meitenes).

Ievietojam iegūtās sakarības vienādībā $z+m=v+1$ un iegūstam $(m-1)+m=(m+2)+1$ un tālāk $2m-1=m+3$, no kā iegūst $m=4$. Tāpēc $z=3$.

2.risinājums: No tā, ka, apsēžoties visām meitenēm, paliktu 2 brīvas vietas, iegūstam, ka zēnu skaits ir 2 + 1 = 3, t.i., tik, cik brīvo vietu un vienam zēnam vietas pietrūkstu.

No tā, ka, apsēžoties visiem zēniem, paliktu 3 brīvas vietas, iegūstam, ka meiteņu skaits ir 3 + 1 = 4, t.i., tik, cik ir brīvo vietu un vienai meitenei vietas pietrūktu. Tātad ir 3 zēni un 4 meitenes.

1.2.8. Vispirms ievērosim, ka taisnību runājošajam rūķītim (***t***) **abās pusēs** stāv meļi, bet melim (***m***) vismaz viens kaimiņš ir taisnību runājošais rūķītis. Tātad nevar būt, ka visi seši rūķīši ir meļi, vai visi seši rūķīši ir taisnību runājošie. Tātad ir vismaz viens taisnību runājošais rūķītis t_1. Viņam abās pusēs stāv meļi m_1 un m_2.

Tagad apskatām rūķīti m_1 (skat. A1.2. zīm.). Viņam vienā pusē jau stāv taisnību runājošs rūķītis t_1, tāpēc otrs kaimiņš var būt gan melis, gan taisnību runājošs kaimiņš (jebkurā gadījumā m_1 jau ir samelojies, teikdams. ka **abi** kaimiņi ir meļi).

$$\begin{array}{ccc} & t_1 & \\ m_1 & & m_2 \\ m_3 & & t_4 \\ & t_2 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & t_1 & \\ m_1 & & m_2 \\ t_2 & & t_3 \\ & m_3 & \end{array}$$

A1.2.zīm.

1) Ja m_1 otrs kaimiņš ir melis m_3. Rūķītim m_3 viens kaimiņš jau ir melis, tātad otram jābūt taisnību runājošam rūķītim t_2. Bet rūķītim t_2 arī otram kaimiņam jābūt melim m_4. Esam ieguvuši gadījumu, kad pa apli stāv 4 meļi un 2 taisnību runājošie rūķīši.

2) Ja m_1 otrs kaimiņš ir taisnību runājošais rūķītis t_2. Rūķītim t_2 arī otram kaimiņam jābūt melim m_3. Šobrīd jau pa apli ir izvietoti pieci rūķīši m_2, t_1, m_1, t_2, m_3. Vēl viens rūķītis jāievieto starp rūķīšiem m_2 un m_3. Tā kā abi kaimiņi meļi var būt tikai taisnību runājošajam rūķītim, tad brīvajā vietā var būt tikai rūķītis t_3. Esam ieguvuši gadījumu, kad pa apli stāv 3 meļi un 3 taisnību runājošie rūķīši.

No risinājuma gaitas redzams, ka citi varianti nav iespējami.

1.3. Trešā kārta

1.3.1. 2 *km* 400 *m* : 300 – 60 *dm* =

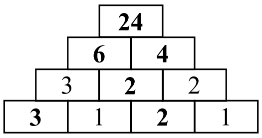
= 2400 *m* : 300 – 60 *dm* =

= 8 *m* – 60 *dm* =

= 80 *dm* – 60 *dm* =

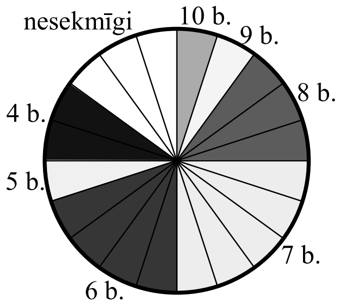
= **20 *dm***

1.3.2. Skat., piem., A1.3. zīm. (tajā izcelti atbilstoši uzdevuma prasībām ierakstītie skaitļi).



A1.3.zīm.

1.3.3. Nesekmīgu vērtējumu ieguvuši $20-(1+1+3+5+4+1+2)=\mathbf{3}$ skolēni.



A1.4.zīm.

Vismaz 7 balles ieguva 1 + 1 + 3 + 5 = 10 skolēni jeb **puse** no klases skolēniem.

Piemēru, kā rezultātus var attēlot riņķa diagrammā, skat. A1.4. zīm.

1.3.4. Zem zvaigznītēm paslēpušies skaitļu pēdējie cipari (arī viencipara skaitlim tā vienīgo ciparu varam saukt gan par pirmo, gan par pēdējo).

Ievērosim, ka *reizinājuma pēdējais cipars vienāds ar reizinātāju pēdējo ciparu reizinājuma pēdējo ciparu* (t.i., lai noskaidrotu vairāku skaitļu reizinājuma pēdējo ciparu, pietiek sareizināt šo skaitļu pēdējos ciparus, iegūtā reizinājuma pēdējais cipars būs arī pašu skaitļu reizinājuma pēdējais cipars; par to varam pārliecināties, piemēram, apskatot „reizināšanas stabiņā" algoritmus).

Tātad šajā uzdevumā mums jānoskaidro, kāds varētu būt tas cipars *, kuru sareizinot pašu ar sevi, reizinājuma pēdējais cipars atkal ir *.

Pārbaudot reizinājumus

$\mathbf{0 \cdot 0 = 0}$; $\mathbf{1 \cdot 1 = 1}$; $2 \cdot 2 = 4$; $3 \cdot 3 = 9$; $4 \cdot 4 = 16$;

$\mathbf{5 \cdot 5 =}$ 2$\mathbf{5}$; $\mathbf{6 \cdot 6 =}$ 3$\mathbf{6}$; $7 \cdot 7 = 49$; $8 \cdot 8 = 64$; $9 \cdot 9 = 81$.

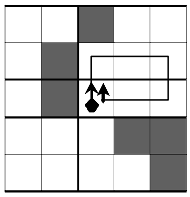
Pārbaudot izceltās iespējas, redzam, ka pareizu vienādību iegūst tikai gadījumā, ja * = 5: $\mathbf{25 \cdot 5 = 125}$.

Uzdevumu var risināt, arī tieši pārbaudot visus 10 reizinājumus:

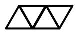
$20 \cdot 0 \neq 120$; $21 \cdot 1 \neq 121$; $22 \cdot 2 \neq 122$; $23 \cdot 3 \neq 123$; $24 \cdot 4 \neq 124$;

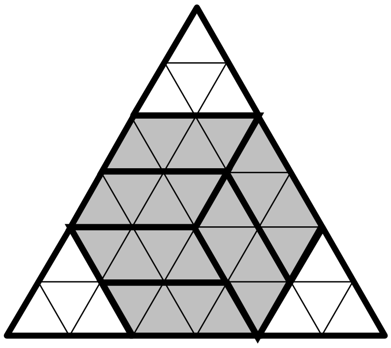
$\mathbf{25 \cdot 5 = 125}$; $26 \cdot 6 \neq 126$; $27 \cdot 7 \neq 127$; $28 \cdot 8 \neq 128$; $29 \cdot 9 \neq 129$.

1.3.5. Robots pārvietosies bezgalīgi ilgi pa taisnstūrveida maršrutu, kas parādīts A1.5. zīmējumā.



A1.5.zīm.

1.3.6. Lielais trijstūris sastāv no 36 maziem trijstūrīšiem, katra dalījumā iegūstamā figūriņa sastāv no 4 maziem trijstūrīšiem, tātad dalījumā pavisam tiks iegūtas 36 : 4 = 9 figūriņas. Tā kā viena veida figūriņām jābūt divas reizes vairāk nekā otra veida figūriņām, tad dalījumā jāiegūst 3 figūriņas  un 6 figūriņas . Vienu no veidiem, kā to var izdarīt, skat., piem., A1.6. zīm.



A1.6.zīm.

1.4. Ceturtā kārta

1.4.1. Viens no risinājumiem ir, piemēram, šāds: $9-8+7-6+5-4+3-2+1=5$.

1.4.2. a) 3 *dm* + 17 *mm* = 317 *mm* > 31 *cm* = 310 *mm*

b) 1 h 30 *min.* = 90 *min.* < 23 *min.* · 5 = 115 *min.*

1.4.3. Tā kā uzdevumā prasīts tikai uzrakstīt četrus skaitļus, par atrisinājumu der jebkurš skaitlis, kas ir mazāks nekā skaitlis $5{,}5 = 5\frac{1}{2}$ (piemēram, 5; 4; 3; 2; 1; 0; u.t.t.).

To, ka der tikai tie *x*, kas ir mazāki nekā $5\frac{1}{2}$, iegūst, atrisinot doto nevienādību (atrisinot nevienādību izmantots, ka, patiesas nevienādības **abām pusēm pieskaitot vai atņemot vienu un to pašu** skaitli, nevienādība paliek patiesa):

$$x+7>3x-4$$

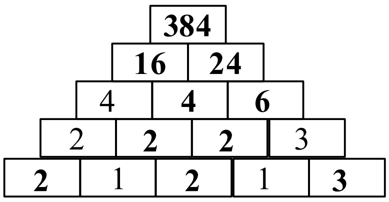
$$3\cdot x-4<x+7$$

$$3\cdot x-4+4<x+7+4$$

$$3\cdot x-x<x-x+11$$

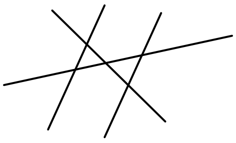
$$2\cdot x<11 \text{ un tad } x<5\frac{1}{2}$$

1.4.4. Skat., A1.7. zīm. (tajā treknrakstā izcelti atbilstoši uzdevuma prasībām ierakstītie skaitļi).



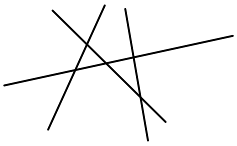
A1.7.zīm.

1.4.5. Viens no iespējamiem atbilžu variantiem redzams A1.8. zīm.


A1.8.zīm.

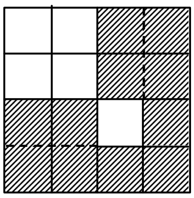
Lai uzzīmētu 4 taisnes atbilstoši prasītajam, noteikti divas no tām būs paralēlas (t.i., tādas, kuras nekad nekrustojas). Pretējā gadījumā vai nu visas taisnes savā starpā krustojas un tad tām kopā ir 6 krustpunkti, vai arī trīs no taisnēm iet caur vienu punktu un ceturtā taisne krusto šīs trīs taisnes – kopā ir 4 krustpunkti.

Ievēro! A1.9. zīm. attēlotajām taisnēm **nav** 5 krustpunkti, jo, tā kā taisnes ir bezgalīgas, tās var neierobežoti pagarināt, tādējādi rodas vēl viens krustpunkts.


A1.9.zīm.

1.4.6. No dotā iegūstam, ka 1 burka ar zemeņu ievārījumu sver 3 kg 500 g : 5 = 700 g. Tā kā tukša burka sver 200 g, tad ievārījuma masa katrā burkā ir 700 g – 200 g = 500 g. Tātad 10 pilnās burkās būs 500 g · 10 = 5000 g = **5 kg** zemeņu ievārījuma.

1.4.7. a) Varam pagarināt jau ievilktās taisnās līnijas tā, lai kvadrāts tiktu sadalīts 16 vienādos kvadrātiņos. Tad, lai iekrāsotu $\frac{11}{16}$ no dotā kvadrāta, pietiek iekrāsot 11 no šiem kvadrātiņiem. Vienu no veidiem, kā to var izdarīt, skat., A1.10. zīm.


A1.10.zīm.

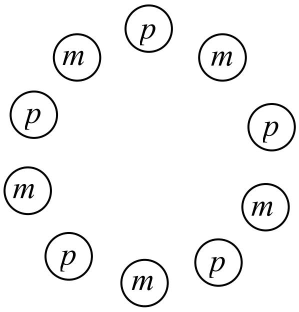
b) Viegli redzēt (un aprēķināt), ka neiekrāsoti palika 16 – 11 = 5 mazie kvadrāti.

1.4.8. Tā kā ir doti 5 cipari un, rakstot skaitli, tiem visiem jābūt dažādiem, tad lielākais skaitlis, ko var uzrakstīt, noteikti ir piecciparu. Lai uzrakstītu vislielāko skaitli, tā desmittūkstošu šķirā jāraksta lielākais no dotajiem cipariem, tūkstošu šķirā – nākamais lielākais, simtu šķirā – nākamais u.t.t. Tādējādi iegūstam, ka lielākais „labais" skaitlis ir 97531.

1.4.9. Ja riņķi ir vienādi, tad ir vienādi to rādiusi. Redzam, ka katra sešstūra mala sastāv no diviem rādiusiem, kas katrs ir 3 *cm* garš. Tātad katras sešstūra malas garums ir $2 \cdot 3 = 6$ *cm*. Tā kā visas šī sešstūra malas ir vienādas, tā perimetrs ir $6 \cdot 6 = 36$ *cm*.

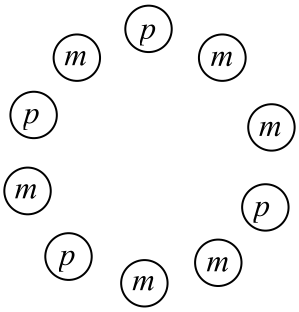
1.4.10. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, jebkuram patiesajam rūķītim abās pusēs noteikti ir meļi. Savukārt jebkuram melim abi blakus esošie rūķīši noteikti nevar būt meļi, tāpēc viens vai abi no tiem ir rūķīši, kas vienmēr saka patiesību.

Izmantojot šos secinājumus, varam izveidot, piemēram, A1.11. zīm. attēloto situāciju, kur katram patiesajam rūķītim (*p*) abi blakus esošie rūķīši ir meļi (*m*), bet meļiem blakus abi rūķīši vienmēr saka patiesību .

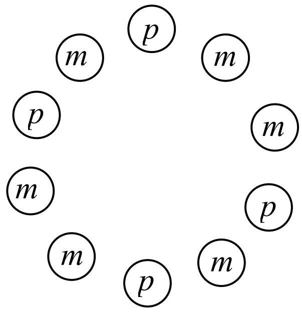


A1.11.zīm.

Protams, iespējami arī citi atrisinājumi, piemēram, izvēloties gadījumus, kad ne vienmēr melim blakus stāv divi patiesie rūķīši (skat., piem., A1.12. un A1.13.zīm.).



A1.12.zīm.



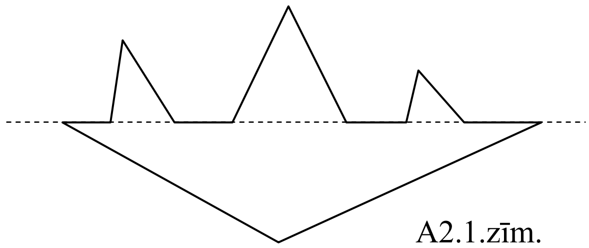
A1.13.zīm.

2. Jauno matemātiķu konkurss

2.1. Pirmā kārta

2.1.1. Der, piemēram, skaitļi 199 ($1+9+9=19$; $199\cdot199=39601$ un $3+9+6+0+1=19$), 289 ($289\cdot289=83521$), 955 ($955\cdot955=912025$) u.c.

2.1.2. Skat., piemēram, A2.1. zīm.



A2.1.zīm.

2.1.3. Atbilde: cipars 1.

Rindā būs uzrakstīti četri viencipara skaitļi, tātad 4 cipari.

Pēc tam būs uzrakstīti visi 45 pāra divciparu skaitļi, kopā 90 cipari.

Pavisam ir 450 pāra trīsciparu skaitļu, kopā 1350 cipari.

Tātad, izrakstot visus pāra skaitļus no 2 līdz 998 ieskaitot, virknē būs uzrakstīti 4 + 90 + 1350 = 1444 cipari.

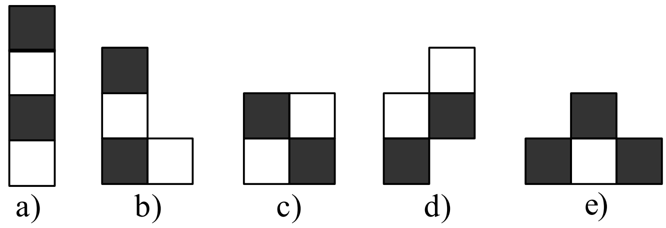
Uzrakstot vēl visus 100 pāra skaitļus no 1000 līdz 1198 ieskaitot, būs uzrakstīti vēl $4\cdot100=400$ cipari; tātad kopā jau 1844 cipari. Līdz 2009. ciparam jāuzraksta vēl 2009 – 1844 = 165 cipari jeb 41 četrciparu skaitlis ($165:4=41$, atlikumā 1) un pirmais cipars no nākamā skaitļa (uzrakstot visus 50 pāra skaitļus no 1200 līdz 1298, tiktu uzrakstīti vēl 200 cipari, tātad interesējošais 2009. cipars ir kādā no šiem četrciparu skaitļiem). Tātad 2009. vietā ir cipars 1.

2.1.4. Atbilde: nē, nevar.

Katra figūriņa aizņem 4 rūtiņas, pavisam ir piecas figūriņas, tātad to kopējais laukums ir 20 rūtiņas. Taisnstūra, kura laukums ir 20 rūtiņas un malu garumi izsakāmi veselos skaitļos, izmēri var būt 1×20 rūtiņas, 2×10 rūtiņas vai 4×5 rūtiņas.

Skaidrs, ka taisnstūri ar izmēriem 1×20 prasītajā veidā salikt nevar. Pieņemsim, ka no dotajām figūriņām ir iespējams salikt 2×10 rūtiņu vai 4×5 rūtiņu taisnstūri. Izkrāsosim katru no šiem taisnstūriem melnā un baltā krāsā šaha galdiņa veidā. Gan taisnstūrī 2×10 rūtiņas, gan 4×5 būs tieši 10 melnas rūtiņas.

Savukārt viegli pārbaudīt, ka 2.zīm. a) figūriņa, lai arī kā būtu novietota taisnstūrī, nosedz tieši divas melnas, tāpat arī 2. zīm. b), c) un d) figūriņas nosedz tieši divas melnas rūtiņas, bet A2.2. zīm. e) figūriņa nosedz vai nu 1, vai 3 melnas rūtiņas. Tātad visas piecas figūriņas kopā nosedz 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9 vai 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 11 melnas rūtiņas.



A2.2. zīm.

Esam ieguvuši pretrunu, jo taisnstūrī melnas ir tieši 10 rūtiņas (nevis 9 vai 11), tāpēc dotās piecas figūriņas nevar savietot tā, lai veidotos taisnstūris.

Piezīme: uzdevuma risinājumā izmantojām *invariantu metodi*: atradām nemainīgu lielumu (melno rūtiņu kopējais skaits), un pamatojām, ka ar dotajām figūriņām kopā nevar iegūt tieši tādu pašu lielumu.

2.1.5. Lielākais skolēnu skaits būs tad, ja katrs bērns būs izlasījis tieši vienu grāmatu, tātad kopā var būt ne vairāk kā 6 + 7 + 8 = 21 skolēni.

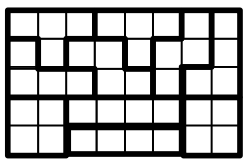
Savukārt mazākais skolēnu skaits būs tad, ja iespējami daudz bērnu ir izlasījuši trīs vai divas grāmatas. Trīs grāmatas var būt izlasījuši ne vairāk kā 6 skolēni (jo grāmatu par Alisi ir izlasījuši tikai 6 skolēni). Ja ir 6 skolēni, kas izlasījuši visas trīs grāmatas, tad vēl jābūt vienam skolēnam, kas nav lasījis grāmatu par Alisi, bet izlasījis grāmatu par Karlsonu. Šis pats skolēns var būt izlasījis arī grāmatu par Vinniju Pūku; tad jau ir 7 skolēni, kas izlasījuši grāmatu par Vinniju Pūku, bet jābūt vēl vienam skolēnam, kas izlasījis šo grāmatu, tātad tas skolēns ir izlasījis tikai grāmatu par Vinniju Pūku. Tātad mazākais iespējamais skolēnu skaits ir 6 + 1 + 1 = 8.

Taču skolēnu skaits klasē var būt jebkurš vesels skaitlis starp 8 un 21 ieskaitot. Pilnā risinājumā nepieciešams uzrādīt piemēru katram gadījumam.

2.2. Otrā kārta

2.2.1. Tā kā skaitlis $6 \cdot A$ beidzas ar ciparu 0, tad A var būt vai nu 0, vai 5. Ja A ir 0, tad skaitlim $5 \cdot K$ jābeidzas ar 8, kas nav iespējams. Tātad $\boldsymbol{A} = \mathbf{5}$. Tālāk ievērojam, ka der tikai $\boldsymbol{K} = \mathbf{1}$ (citos gadījumos summā simtu pozīcijā neiegūsim 0), $\boldsymbol{S} = \mathbf{2}$ un $\boldsymbol{P} = \mathbf{7}$.

2.2.2. Skat., piemēram, A2.3. zīmējumu.



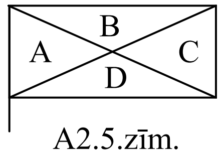
A2.3.zīm.

2.2.3. a) Jā var; skat., piemēram, A2.4. zīmējumu.

A2.4.zīm.

b) Nē, nevar. Vispirms ievērosim, ka, tā kā visi aplīšos ierakstītie skaitļi ir veseli, un divu skaitļu vidējais aritmētiskais ir puse no šo skaitļu summas, tad visos baltajos aplīšos jābūt ierakstītiem vienas paritātes skaitļiem (t.i., visi pāra skaitļi vai visi nepāra skaitļi). Tāpat ievērosim, ka divu dažādu skaitļu vidējais aritmētiskais ir **lielāks par mazāko** skaitli un **mazāks par lielāko** skaitli. Tātad nedz skaitlis 1, nedz skaitlis 10 nevar būt ierakstīts pelēkā aplītī, tāpēc tiem abiem ir jābūt ierakstītiem baltajos aplīšos. Bet 1 ir nepāra skaitlis, bet 10 – pāra skaitlis. Ir iegūta pretruna ar izcelto apgalvojumu.

2.2.4. Atbilde: 84 karogus.



A2.5.zīm.

Skaidrs, ka pirmo trijstūri var nokrāsot jebkurā no 4 krāsām (skat. A2.5. zīm.), turklāt kā pirmo var izvēlēties jebkuru no trijstūriem *A*, *B*, *C* un *D*. Pieņemsim, ka pirmo krāsojam trijstūri *A*. Kad trijstūris *A* nokrāsots, trijstūri *B* varam krāsot jebkurā no atlikušajām trīs krāsām, tātad trijstūrus *A* un *B* kopā varam izkrāsot $4 \cdot 3 = 12$ dažādos veidos. Tagad krāsosim trijstūri *C*. Šķirosim divus gadījumus:

1) <u>trijstūris *C* ir tādā pašā krāsā kā trijstūris *A*</u>; tad atlikušo trijstūri *D* var krāsot jebkurā no krāsām, kas atšķiras no trijstūra *A* krāsas, tātad ir 3 iespējas. Pavisam varam iegūt $12 \cdot 3 = 36$ dažādus karogus, kam trijstūri *A* un *C* ir vienā krāsā.

2) <u>trijstūris *C* ir citā krāsā nekā trijstūris *A*</u>; tad trijstūri *C* var izkrāsot vienā no divām krāsām (kuras vēl nav izmantotas trijstūru *A* un *B* krāsošanai). Pēc tam trijstūri *D* arī varēs izkrāsot vienā no 2 krāsām (tādā, kas vēl nav izmantota trijstūru *A* un *C* krāsošanai). Tātad pavisam varam iegūt $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ tādus karogus, kam trijstūri *A* un *C* ir dažādās krāsās.

Līdz ar to, izmantojot dotās 4 krāsas, var iegūt 36 + 48 = **84** dažādus karogus.

2.2.5. Atbilde: bulciņa maksā 19 santīmus, bet tase tējas maksā 2 santīmus.

Risinājums. Apzīmēsim bulciņas cenu ar *b*, tējas cenu – ar *t*. Pie tam ievērosim, ka visas cenas ir vesels skaits santīmu. Tad uzdevuma situāciju raksturo divas nevienādības:

$5b + 3t > 100$ jeb $5b + 3t \geq 101$ (*)

$3b + 2t < 62$ jeb $3b + 2t \leq 61$. (**)

Sareizinot nevienādības (**) abas puses ar 2, iegūstam pareizu nevienādību $6b + 4t \leq 122$ (t.i., ja 3 bulciņas un 2 tējas tases maksā ne vairāk kā 61 santīmu, tad divreiz lielāks pirkums maksās ne vairāk kā $2 \cdot 61 = 122$ sant.).

Pārveidojam iegūto nevienādību:

$$6b + 4t = (5b + 3t) + (b + t) \leq 122 \ .$$

Tā kā $5b + 3t \geq 101$, tad jābūt $\boldsymbol{b + t \leq 21}$ (citādi kopējā summa būs lielāka nekā 122).

Līdzīgi kā iepriekš, nevienādības (*) abas puses sareizinot ar 2, iegūstam, ka $10b + 6t \geq 202$; pārveidojam šo nevienādību par $b + (9b + 6t) \geq 202$ (***).

Bet ievērojam, ka $9b + 6t = 3(3b + 2t)$, un, tā kā $3b + 2t \leq 61$ (nevienādība (**)), tad $3(3b + 2t) \leq 3 \cdot 61 = 183$. Ievietojot šo vērtību nevienādībā (***), iegūstam, ka $\boldsymbol{b \geq 19}$.

Pārbaudām visas *b* un *t* vērtības, kas apmierina izceltos nosacījumus, t.i.:

$b = 19$ un $t = 1$;

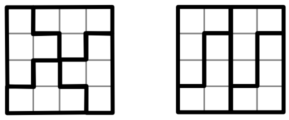
$b = 19$ un $t = 2$;

$b = 20$ un $t = 1$.

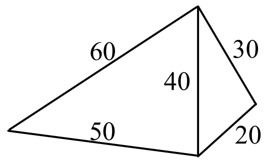
Redzam, ka uzdevuma nosacījumus apmierina tikai vērtības $b = 19$ un $t = 2$.

2.3. Trešā kārta

2.3.1. Skat., piem., A2.6. zīm.



A2.6.zīm.



A2.7.zīm.

2.3.2. Stienītis 10 cm nevar tikt izmantots neviena trijstūra veidošanā, jo no atlikušajiem 5 stienīšiem nevar piemeklēt tādus divus, ar kuriem izpildītos trijstūra nevienādība: trijstūrī jebkuru divu malu garumu summa ir **lielāka** nekā trešās malas garums. No atlikušajiem pieciem stienīšiem vienlaicīgi var izveidot ne vairāk kā divus trijstūrus (skat. A2.7. zīm., pie malām uzrakstīti to garumi cm). Viena trijstūra izveidei jāizmanto 3 stienīši. Pie tam, ja no trīs stienīšiem var izveidot trijstūri, tad to var izdarīt vienā vienīgā veidā, t.i., leņķu lielumi starp malām ir noteikti viennozīmīgi.

Tā kā atlikuši neizmantoti tikai divi stienīši, lai iegūtu vēl citus trijstūrus, par to malām jāizmanto vismaz viena no jau izveidotā trijstūra malām. Ja izmantotu divas jau izveidotā trijstūra malas (un kā jau atzīmējām augstāk – leņķis starp šīm malām arī ir noteikts viennozīmīgi), tad varētu iegūt tikai tādu pašu trijstūri, kas jau ir izveidots. Bet nav divu vienāda garuma stienīšu. Tāpēc jaunam trijstūrim var izmantot ne vairāk kā vienu jau izveidotā trijstūra malu, tātad kopā var izveidot ne vairāk kā vēl vienu jaunu trijstūri.

2.3.3. Atbilde: der, piemēram, skaitlis 21200 – tā pierakstā ir 2 nulles, 1 vieninieks, 2 divnieki un nav neviena trijnieka un četrinieka.

2.3.4. Trīsriteņu skaitam jābūt pāra skaitlim, citādi kopējais riteņu skaits būs nepāra skaitlis, bet 60 ir pāra skaitlis. Tā kā pavisam ir 20 braucamrīki, un zināms, ka trīsriteņu ir vismazāk, tad to ir mazāk nekā trešdaļa no braucamrīkiem, t.i., ne vairāk kā 6.

Pamatosim, ka **kvadriciklu un divriteņu skaits ir vienāds**. Apzīmēsim trīsriteņu, kvadriciklu un divriteņu skaitus attiecīgi ar t, k un d.

No tā, ka kopējais braucamrīku skaits ir 20, izriet vienādība $t + k + d = 20$; savukārt no tā, ka kopējais riteņu skaits ir 60, izriet vienādība $3t + 4k + 2d = 60$. Tātad iegūstam šādu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} t + k + d = 20 \\ 3t + 4k + 2d = 60 \end{cases}$$

Sareizinot pirmā vienādojuma abas puses ar „-3" un tad pieskaitot to otram vienādojumam, iegūstam, ka $k - d = 0$, tātad $k = d$.

Ņemot vērā to, ka trīsriteņu skaits ir pāra skaitlis, kas nepārsniedz 6, kā arī to, ka kvadriciklu un divriteņu skaits ir vienāds, iegūstam, ka pavisam ir trīs iespējas (ja pieņemam, ka pārdod vismaz vienu katra veida braucamrīku) vai četras iespējas (ja pieļaujam, ka pārdošanā ir 0 kāda veida braucamrīku):

1) 6 trīsriteņi, 7 divriteņi un 7 kvadricikli

2) 4 trīsriteņi, 8 divriteņi un 8 kvadricikli

3) 2 trīsriteņi, 9 divriteņi un 9 kvadricikli

4) 0 trīsriteņi, 10 divriteņi un 10 kvadricikli.

2.3.5. Atbilde: abos gadījumos pastaiga beigsies. Pirmajā gadījumā tas notiks pēc 17 *apstāšanās* reizēm; otrajā gadījumā, t.i., mainot virzienus – pēc 13 *apstāšanās* reizēm.

a) Apskatīsim, kā norisinās pastaiga; apzīmēsim Vinniju Pūku ar *VP*, Sivēntiņu ar *S*, Trusīti ar *Tr*, Pūci ar *P*, Ēzelīti I-Ā ar *IĀ*, Tīģerīti ar *Tī*, Mazulīti Rū ar *MR*.

Gājiens	Kā mājiņā apstājas?	Kas mainās?	Kas dodas ceļā?
1.	*S*	***S* dodas** pastaigā	*VP*, *S*
2.	*P*	***P* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *P*
3.	*MR*	***MR* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *P*, *MR*
4.	*P*	***P* paliek** mājiņā	*VP*, *S*, *MR*
5.	*MR*	***MR* paliek** mājiņā	*VP*, *S*
6.	*S*	***S* paliek** mājiņā	*VP*
7.	*Tr*	***Tr* dodas** pastaigā	*VP*, *Tr*
8.	*Ē*	***Ē* dodas** pastaigā	*VP*, *Tr*, *Ē*
9.	*VP*	***VP* paliek** mājiņā	*Tr*, *Ē*
10.	*Tr*	***Tr* paliek** mājiņā	*Ē*
11.	*P*	***P* dodas** pastaigā	*Ē*, *P*
12.	*Tī*	***Tī* dodas** pastaigā	*Ē*, *P*, *Tī*
13.	*S*	***S* dodas** pastaigā	*Ē*, *P*, *Tī*, *S*
14.	*Tī*	***Tī* paliek** mājiņā	*Ē*, *P*, *S*
15.	*S*	***S* paliek** mājiņā	*Ē*, *P*
16.	*P*	***P* paliek** mājiņā	*Ē*
17.	*Ē*	***Ē* paliek** mājiņā	–

b) Apskatīsim, kā norisinās pastaiga, ja maina virzienus.

Gājiens	Kā mājiņā apstājas?	Kas mainās?	Kas dodas ceļā?
1.	*S*	***S* dodas** pastaigā	*VP*, *S*
2.	*MR*	***MR* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *MR*
3.	*Tr*	***Tr* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*
4.	*Tī*	***Tī* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*, *Tī*
5.	*P*	***P* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*, *Tī*, *P*
6.	*Ē*	***Ē* dodas** pastaigā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*, *Tī*, *P*, *Ē*
7.	*Ē*	***Ē* paliek** mājiņā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*, *Tī*, *P*
8.	*P*	***P* paliek** mājiņā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*, *Tī*
9.	*Tī*	***Tī* paliek** mājiņā	*VP*, *S*, *MR*, *Tr*
10.	*Tr*	***Tr* paliek** mājiņā	*VP*, *S*, *MR*
11.	*MR*	***MR* paliek** mājiņā	*VP*, *S*
12.	*S*	***S* paliek** mājiņā	*VP*
13.	*VP*	***VP* paliek** mājiņā	–

2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. Tā kā pirmo reizinātāju sareizinot ar katru otrā reizinātāja ciparu, joprojām starpreizinājumos iegūst trīsciparu skaitli, tad skaidrs, ka tas iespējams tikai tad, ja otrā reizinātāja katrs cipars ir 1. Tātad otrais reizinātājs ir skaitlis 111.

Savukārt, lai rezultāta pēdējais cipars būtu 9, arī reizinājumam ar skaitļa 111 vienu šķiru jābeidzas ar 9, tātad pirmā reizinātāja pēdējais cipars arī ir 9. Arī reizinājumi ar skaitļa 111 desmitu un simtu šķiras ciparu beigsies ar ciparu 9. Līdzīgi arī iegūst, ka katra starprezultāta pirmais cipars ir 8. Esam ieguvuši A2.8. zīm. redzamo situāciju.

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & * & 9 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 8 & * & 9 \\ & 8 & \# & 9 & \\ 8 & * & 9 & & \\ \hline 9 & * & 7 & * & 9 \end{array}$$

A2.8.zīm.

Apskatīsim simtu šķiru: summas $8+9+\#=17+\#$ (ja nerodas pārnesums no desmitu šķiras) vai $8+9+\#+1=18+\#$ (ja rodas pārnesums, tas nepārsniedz 1) pēdējais cipars ir 7. Tātad $\#=0$ vai 9. Ja $\#=0$ (tātad arī * trešajā starpreizinājumā ir 0), tad tūkstošu šķirā nerodas pārnesums un summas pirmais cipars būs 8 (nevis 9). Tātad $\#=9$ (skat. A2.9.zīm.).

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & * & 9 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 8 & * & 9 \\ & 8 & 9 & 9 & \\ 8 & * & 9 & & \\ \hline 9 & * & 7 & * & 9 \end{array}$$

A2.9.zīm.

Tagad skaidrs, ka pirmais reizinātājs ir 899. Veicot pārējos aprēķinus, iegūstam atbildi (skat. A2.10. zīm.).

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 9 & 9 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 8 & 9 & 9 \\ & 8 & 9 & 9 & \\ 8 & 9 & 9 & & \\ \hline 9 & 9 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

A2.10.zīm.

2.4.2. Tā kā kopš diennakts sākuma pagājis piecreiz ilgāks laiks nekā vēl atlicis līdz pusnaktij, tad līdz pusnaktij vēl atlikusi sestdaļa diennakts jeb 24 : 6 = 4 stundas. Tātad tobrīd pulkstenis rādīja **20 : 00**.

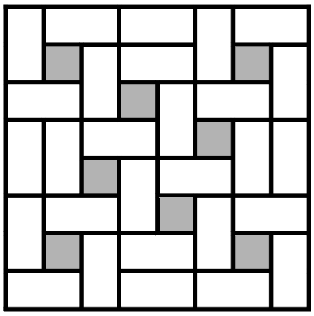
2.4.3. Tā kā kvadrātiņā 2×2 rūtiņas katrai rūtiņai ir vai nu kopīga mala, vai kopīgs stūris ar pārējām trim rūtiņām, tad tām visām jābūt nokrāsotām dažādās krāsās. Tātad vismaz četras krāsas ir nepieciešamas. A2.11. zīmējumā parādīts piemērs, ka ar četrām krāsām pietiek (zīmējumā katra krāsa apzīmēta ar citu ciparu; vienam un tam pašam ciparam atbilst viena un tā pati krāsa).

1	2	1	2
3	4	3	4
1	2	1	2
3	4	3	4

A2.11. zīm.

2.4.4. Ievērojam, ka vienu burvju stīgu sadalot 7 stīgās, stīgu kopējais skaits palielinās par 6, bet sadalot to 10 stīgās, kopējais stīgu skaits palielinās par 9. Tātad ar katru dalīšanu kopējais stīgu skaits palielinās par skaitli, kas dalās ar 3. Sākumā bija tieši viena burvju stīga, tāpēc uz planētas Zvaigzne stīgu kopējais skaits vienmēr būs skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1. Tā kā 2010 dalās ar 3 bez atlikuma, tad **nav iespējams**, ka katram planētas iedzīvotājam pieder tieši viena burvju stīga.

2.4.5. Skat., piem., A2.11. zīm.



A2.11.zīm.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. Atbilde: Ar zvaigznīti aizstāts skaitlis 144.

Apzīmēsim: $a_1 = 9$, $a_2 = 18$, $a_3 = 36$, $a_4 = 63$, $a_5 = 99$, $a_6 = *$, $a_7 = 198$. Tad redzam, ka katru no skaitļu virknes zināmajiem locekļiem varam izteikt kā vesela skaitļa reizinājumu ar skaitli 9:

$$a_1 = 9 \cdot 1,\ a_2 = 9 \cdot 2,\ a_3 = 9 \cdot 4,\ a_4 = 9 \cdot 7,\ a_5 = 9 \cdot 11,\ a_7 = 9 \cdot 22.$$

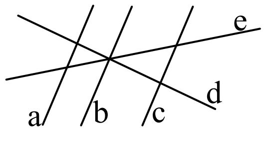
Savukārt katram virknes loceklim, sākot ar otro, veselais reizinātājs tiek iegūts, saskaitot iepriekšējā virknes locekļa kārtas skaitli ar tā veselo reizinātāju.

Tātad ar zvaigznīti apzīmētā virknes locekļa a_6 veselais reizinātājs būs $5 + 11 = 16$, līdz ar to $a_6 = 9 \cdot 16 = 144$.

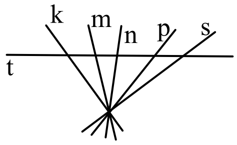
Tālāk līdzīgi iegūstam nākamos divus virknes locekļus: $a_8 = 9 \cdot (7 + 22) = 9 \cdot 29 = 261$ un $a_9 = 9 \cdot (8 + 29) = 9 \cdot 37 = 333$.

2.5.2. a) Vienu no variantiem, kā uzzīmēt piecas taisnes tā, lai tām būtu tieši pieci krustpunkti, skat., piem., A2.12. zīm. Šajā attēlā taisnes *a*, *b* un *c* ir paralēlas, bet taisnes *b*, *e* un *d* krustojas vienā punktā.

b) Vienu no iespējām, kā var uzzīmēt sešas taisnes tā, lai tām būtu tieši seši krustpunkti, skat., piem., A2.13. zīm. Šajā zīmējumā piecas taisnes (*k*, *m*, *n*, *p*, *s*) krustojas visas vienā punktā, un sestā taisne *t* krusto pārējās piecas.



A2.12.zīm.



A2.13.zīm.

2.5.3. Tā kā Māris ieguva 1 punktu, viņš noteikti atbildēja pareizi uz vismaz vienu no jautājumiem.

Ievērojam, ka lielākais iespējamais Māra pareizo atbilžu skaits ir 6. Ja Māris atbildētu pareizi uz 7 jautājumiem, tad viņš jau būtu ieguvis $7 \cdot 7 = 49$, bet, lai kopsummā iegūtu 1 punktu, viņam jāatbild nepareizi uz $48:4=12$ jautājumiem, tad kopā viņš būtu atbildējis uz 17 jautājumiem, bet tas nav iespējams, jo pavisam viņam tika uzdoti 16 jautājumi.

Ja ar x apzīmējam jautājumu skaitu, uz kuriem Māris atbildēja pareizi, bet ar y – jautājumu skaitu, uz kuriem Māris atbildēja nepareizi, tad par pareizi atbildētajiem jautājumiem viņš kopā bija saņēmis $7x$ punktus, bet par nepareizi atbildētajiem – zaudējis $4y$ punktus. Tā kā kopā viņš ieguva 1 punktu, varam sastādīt vienādību $7x-4y=1$.

Apskatot visas iespējamās naturālās x vērtības (mazākas par 7), redzam, ka vienīgais gadījums, kad Māris rezultātā var iegūt tieši 1 punktu, ir, ja viņš **atbildēja pareizi uz 3 eksāmenā uzdotajiem jautājumiem**, bet nepareizi – uz 5 uzdotajiem jautājumiem.

2.5.4. Atbildes: a) jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums: a) Varam izveidot četru atsvaru komplektu, kur atsvaru masas ir $1g$, $2g$, $4g$ un $8g$. Patstāvīgi pārliecinieties, ka ar šo atsvaru komplektu var nosvērt jebkuru veselu gramu skaitu no $1g$ līdz $15g$ ieskaitot.

b) Pieņemsim pretējo, ka ir izdevies izveidot šādu četru atsvaru komplektu, kurā atsvaru masas ir A, B, C un D grami. Apskatīsim, cik dažādas masas varam ar tiem nosvērt.

- Ja uz svaru kausa uzliekam tikai vienu no atsvariem, pavisam varam nosvērt 4 dažādas masas (A, B, C un D gramus smagas).
- Ja uz svaru kausa uzliekam vienlaicīgi jebkurus divus atsvarus, pavisam varam nosvērt ne vairāk kā 6 dažādas masas (A+B, A+C, A+D, B+C, B+D, C+D gramus smagas).
- Ja uz svaru kausa uzliekam vienlaicīgi jebkurus trīs atsvarus, pavisam varam nosvērt ne vairāk kā 4 dažādas masas (A+B+C, A+B+D, A+C+D, B+C+D gramus smagas).
- Ja uz svaru kausa uzliekam visus četrus atsvarus, varam nosvērt tikai masu, kas ir A+B+C+D gramus smaga.

Tātad pavisam varam nosvērt ne vairāk kā $4+6+4+1=15$ dažādas masas. Iegūta pretruna ar pieņēmumu. Tātad nevar izveidot tādu četru atsvaru komplektu, ka, izmantojot tikai šos četrus atsvarus, uz sviras svariem var nosvērt jebkuru veselu gramu skaitu no 1 g līdz 16 g ieskaitot.

2.5.5. Tā kā nav divu spēlētāju ar vienādu vārdu un uzvārdu, tad katram no uzvārdiem atbilst spēlētājs ar vārdu Andris, bet katram no vārdiem atbilst viens spēlētājs ar uzvārdu Kalniņš.

Kopā ar jau doto, esam uzzinājuši 8 spēlētāju vārdu un uzvārdu: Andris Bērziņš, Andris Kalniņš, Andris Krūmiņš, Andris Ezeriņš, Kārlis Kalniņš, Roberts Kalniņš, Jānis Kalniņš un Roberts Ezeriņš.

Vēl jāuzzina vārds un uzvārds 3 spēlētājiem. Mums ir atlikuši šādi uzvārdi – divi Bērziņi un viens Krūmiņš, kā arī šādi vārdi – divi Kārļi un viens Roberts. Tātad noteikti viens no atlikušajiem spēlētājiem ir Kārlis Bērziņš, tāpēc otram Kārlim uzvārds būs Krūmiņš, savukārt Roberta uzvārds būs Bērziņš.

3. Profesora Cipariņa klubs

3.1. Pirmā kārta

3.1.1. Skaitli 5 var iegūt, piemēram, šādi: $1:(2:3:4:5):6$.

Veicot pārveidojumus, pārliecināmies, ka izteiksmes vērtība patiešām ir 5:

$$1:(2:3:4:5):6=1:\left(\frac{2}{3\cdot4\cdot5}\right):6=1:\frac{1}{30}:6=30:6=5$$

Skaitli 2 iegūt nevar. Dalīšanās piedalās skaitļi, kas kopā kā reizinātājus satur četrus pirmskaitļus 2: skaitļi 2 un 6 – pa vienam, skaitlis 4 – divus. Iekavu salikšanas rezultātā šie pirmskaitļi 2 nonāk vai nu skaitītājā, vai saucējā. Lai izteiksmes vērtība būtu 2, skaitītājā pirmreizinātāju 2 jābūt par vienu vairāk nekā saucējā. Tā kā to pavisam ir četri – pāra skaits, tas nav iespējams.

3.1.2. Andris un Maija kopā saņēma par vienu atlaidi vairāk nekā Katrīna. Tāpēc šīs atlaides lielums ir $14-(8+5)=1$ lats.

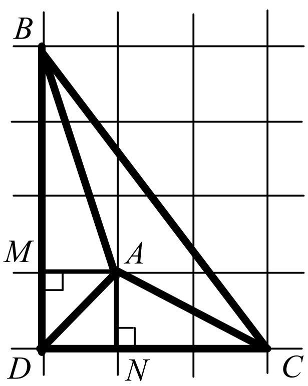
3.1.3. Jā var. Skat., piem., A3.1. zīm.

1	3	5	4	2
2	4	1	5	3
4	1	3	2	5
3	5	2	1	4
5	2	4	3	1

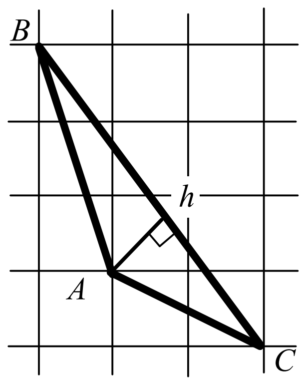
A3.1.zīm.

3.1.4. Skaidrs, ka skaitlis $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot\ldots\cdot2009$ dalās ar 9, jo satur 9 kā reizinātāju. No dalāmības pazīmes ar 9 secinām, ka skaitļa ciparu summa ir skaitlis, kas arī dalās ar 9. Arī šīs ciparu summas ciparu summa dalās ar 9, utt. – ar 9 dalās visi iegūtie skaitļi, tātad arī pēdējais viencipara skaitlis. Vienīgie viencipara skaitļi, kas dalās ar 9, ir 0 un 9. Tā kā visi iegūtie skaitļi ir pozitīvi un neviens no sākotnējiem reizinātājiem nav 0, tad beigās iegūtais skaitlis
nav 0. Tātad tas ir 9.

3.1.5. Apskatām A3.2. zīm.



A3.2.zīm.



A3.3.zīm.

1) Atliekam punktu *D* uz rūtiņu režģa tā, ka trijstūris *BDC* ir taisnleņķa.

2) Aprēķinām trjistūra *BDC* laukumu: $S(BDC)=\frac{1}{2}BD\cdot DC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=24$.

3) Trijstūru *BAD* un *CAD* laukumi ir attiecīgi $\frac{1}{2}BD\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2=8$ un $\frac{1}{2}DC\cdot AN=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$.

4) Tāpēc trijstūra *BAC* laukums ir $24-8-6=10$.

5) Attālums no punkta līdz nogrieznim ir perpendikuls, tātad trijstūrī *ABC* tas ir augstums, kas vilkts no virsotnes *A* pret malu *BC*.

6) No Pitagora teorēmas seko: $BC^2=BD^2+DC^2=8^2+6^2=64+36=100$, tāpēc $BC=10$.

7) Apzīmēsim attālumu no punkta *A* līdz nogrieznim *BC* ar *h* (skat. A3.3. zīm.). Tad *h* ir trijstūra *ABC* tā augstuma garums, kas novilkts pret malu *BC*. Tāpēc $S(ABC)=\frac{1}{2}BC\cdot h$.

8) No iepriekšējā punkta seko, ka $10=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot h$ un $h=2$.

3.1.6. Atbilde: 1, 2, 3 vai 4.

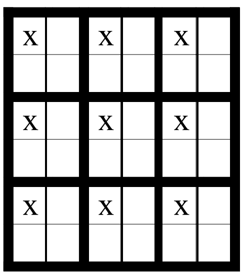
Risinājums. Ja *A* ir melis un patiesībā *B* neko nav teicis, tad *B*, *C*, *D* var būt patiesi vai meļi *jebkurā kombinācijā*, un tas nav pretrunā ar uzdevumā aprakstīto. Tātad meļu skaits var būt 1; 2; 3; 4. Nevar būt, ka nav neviena meļa, t.i., ka visi rūķīši ir patiesi, jo tad *A*, *B*, *C*, *D* paziņojumi visi būtu patiesi, bet no *D* paziņojuma seko, ka *A* ir melis – pretruna.

3.1.7. a) 9 rūtiņas.

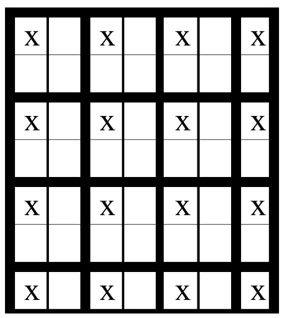
Piemēru ar 9 rūtiņām skat. A3.4. zīm. Doto 6×6 rūtiņu kvadrātu sadalām mazākos 2×2 rūtiņu kvadrātos. Nevienā 2×2 rūtiņu kvadrātā nedrīkst nokrāsot vairāk par vienu rūtiņu. Tā kā šādu kvadrātu 4. zīmējumā pavisam ir 9, tad nokrāsoto rūtiņu nevar būt vairāk par 9.

b) 16 rūtiņas.

Piemēru ar 16 rūtiņām skat. A3.5. zīm. Tā kā nevienā no 16 daļām, kurās sadalīts 5 zīm. Redzamais kvadrāts, nedrīkst nokrāsot vairāk par vienu rūtiņu, tad nokrāsoto rūtiņu nevar būt vairāk par 16.



A3.4.zīm.



A3.5.zīm.

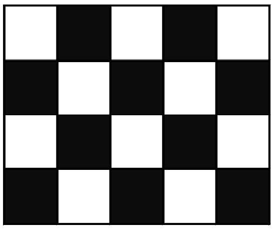
3.1.8. a) nē. **Vislielākā** iegūstamā izteiksmes vērtība tiks sasniegta, lietojot tikai „+” zīmes. Tā ir $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Bet $55<2009$.

b) jā, piemēram:

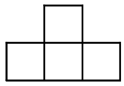
$$1+2+3+4-5-6-7+8-9+10=1.$$

c) nē. No uzrakstītajiem skaitļiem 5 ir pāra un 5 (nepāra daudzums) nepāra. Saskaitot vai atņemot nepāra skaitļus nepāra skaitā, iegūst nepāra skaitli. Tāpēc izteiksmes vērtība vienmēr būs nepāra skaitlis, bet 2 ir pāra skaitlis.

3.1.9. Nē. Izkrāsosim taisnstūra rūtiņas šaha galdiņa kārtībā (skat. A3.6. zīm.). Pavisam ir 10 baltas un 10 melnas rūtiņas – **vienādi daudzumi**.



A3.6.zīm.



A3.7.zīm.

Dotajā figūrā (skat. A3.7. zīm.) melno un balto rūtiņu daudzumi atšķiras, bet pārējās figūrās tie ir vienādi. Tāpēc, ja prasītā sagriešana būtu iespējama, visās figūrās kopā melno rūtiņu skaits **atšķirtos** no balto rūtiņu skaita. Tā ir pretruna.

3.1.10. a) Skaidrs, ka skolēniem A un C abiem nevar būt egles čiekuri, jo tad neizpildās nosacījums, ka tieši vienam no skolēniem A, B un C rokā ir egles čiekurs. Tātad skolēniem A un C rokās ir priedes čiekurs un skolēnam B rokā ir egles čiekurs. Tālāk secinām, ka skolēnam D rokās ir priedes čiekurs. Tātad skolēniem A, C un D rokās ir priedes čiekuri, un, tā kā pavisam ir divi egles čiekuri, skolēniem B un E rokās ir egles čiekuri.

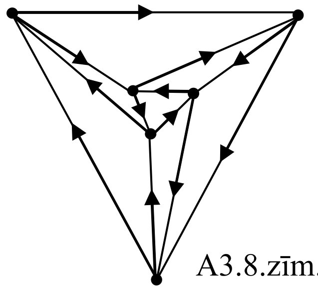
b) Izrādās, ka, pat nemainot Elīnas strādāšanas ātrumu, var iegūt visus 3 variantus – Andris sakrauj vairāk pagaļu nekā Elīna, viņi abi sakrauj vienādu skaitu pagaļu, Elīna sakrauj vairāk pagaļu nekā Andris. Parādīsim katru no variantiem.

Pieņemsim, ka Elīna minūtē sakrauj 12 pagales, tātad Andris minūtē sakraus $12+24:2=14$ pagales.

1) Elīna ietur 4 pauzes (piem., pēc 5., 10., 15. un 20.minūtes). Tātad pēc 30 minūtēm viņa būs sakrāvusi $(30-4)\cdot 12+4\cdot 4=328$ pagales. Andris šajā laikā būs sakrāvis $14\cdot(30-6)=336$ pagales. Tātad Andris būs sakrāvis vairāk pagaļu nekā Elīna.
2) Ja Elīna ietur 3 pauzes (piemēram, pēc 10., 15. un 20.minūtes), tad pēc 30 minūtēm viņa būs sakrāvusi $(30-3)\cdot 12+4\cdot 3=336$ pagaļu, savukārt Andris sakraus tikpat pagaļu, cik iepriekšējā gadījumā. Tātad abi sakraus vienādu skaitu pagaļu.
3) Ja Elīna ietur 2 pauzes (piemēram, pēc 10. un 20.minūtes), tad pēc 30 minūtēm viņa būs sakrāvusi $(30-2)\cdot 12+\cdot 4\cdot 2=344$ pagales, bet Andris – 336 pagales. Tātad šajā gadījumā Elīna būs sakrāvusi vairāk pagaļu nekā Andris.

3.2. Otrā kārta

3.2.1. Jā, var. Skat., piem., A3.8. zīm.



A3.8.zīm.

3.2.2. Daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, jo visi skaitītāji un saucēji ir pozitīvu skaitļu summas, kas ir pozitīvi skaitļi. Tātad, palielinot saucēju, daļas vērtība samazinās. Pieskaitām pirmajai daļai saucējā *a*, otrajai *b*, trešajai *c*, ceturtajai *d*. Tad iegūstam

$$\frac{a+b}{b+c+d}+\frac{b+c}{c+d+a}+\frac{c+d}{d+a+b}+\frac{d+a}{a+b+c}>$$

$$>\frac{a+b}{b+c+d+a}+\frac{b+c}{c+d+a+b}+\frac{c+d}{d+a+b+c}+\frac{d+a}{a+b+c+d}=$$

$$=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)}{a+b+c+d}=\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2\text{, k.b.j.}$$

3.2.3. Visi tādi divciparu naturāli skaitļi, kas dalās ar vismaz 3 dažādiem pirmskaitļiem un nesatur 0, ir $2\cdot3\cdot7=42$, $2\cdot3\cdot11=66$, $2\cdot3\cdot13=78$, $2\cdot2\cdot3\cdot7=84$. Neviens no pirmajiem 50 cipariem nevar būt 2 (jo tad nākošā cipara vispār nevarētu būt), nevar būt 4 (jo tad nākošais būtu 2 un aiznākošā vispār nevarētu būt); tāpat tas nevar būt 8 vai 7. Tāpēc visi pirmie 50 cipari var būt tikai 6.

Skaitlis, kas sastāv tikai no sešiniekiem, apmierina uzdevuma prasības. Tāpēc meklētais cipars ir 6.

3.2.4. Atbilde: a) nē, nevar; **b)** jā, var.

Risinājums. a) Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē, un apzīmēsim tos ar $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9$.

Pēc dotā $a_1\geq1$. Jābūt $a_2>1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$; tā kā a_2 naturāls, tad no $a_2>\frac{3}{2}$ seko $a_2\geq2$. Tā kā $a_3>\frac{3}{2}\cdot a_2$, tad $a_3>\frac{3}{2}\cdot2=3$. Tā kā a_3 naturāls, tad jābūt $a_3\geq4$. Jābūt $a_4>\frac{3}{2}\cdot a_3>\frac{3}{2}\cdot4=6$; tā kā a_4 ir naturāls, tad jābūt $a_4\geq7$. Līdzīgi iegūstam $a_5\geq11$, $a_6\geq17$, $a_7\geq26$, $a_8\geq40$, $a_9\geq61$. Tā kā neviens no šiem skaitļiem nedrīkst būt lielāks par 60, iegūta pretruna; tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

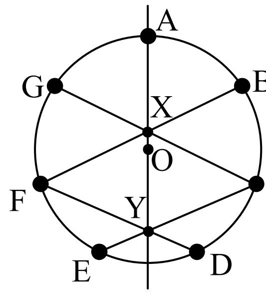
b) Tādi ir, piemēram, augošā secībā izvietoti skaitļi

$$1;\quad \frac{8}{5};\quad \frac{5}{2};\quad 4;\quad \frac{31}{5};\quad \frac{19}{2};\quad 15;\quad 23;\quad 35.$$

Katrs nākamais ir vairāk nekā 1,5 reizes lielāks par iepriekšējo.

3.2.5. Minēto 7 punktu sistēma ir simetriska attiecībā pret diametru *AO* (*O* – riņķa centrs) (skat. A3.9. zīm.). Tāpēc nogriežņi *BF* un *GC* krustojas punktā *X*, kas atrodas uz šī diametra.

Līdzīgi nogriežņi CE un FD krustojas punktā Y, kas atrodas uz šī diametra. Atrodam punktus X un Y un caur tiem novelkam diametru, kas iet caur punktu A. Pēc tam līdzīgi konstruējam diametru, kas iet caur punktu B. Abu diametru krustpunkts ir riņķa centrs.



A3.9.zīm.

3.2.6. Nē, tā nevar būt. Apzīmēsim „pārējās" rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas attiecīgi ar r_1, r_2, k_1, k_2, bet visu tabulā ierakstīto skaitļu summu ar S. Tad jābūt

$S = 2009 + r_1 + r_2$ (tabulā ierakstītie skaitļi saskaitīti pa rindām) un

$S = 2010 + k_1 + k_2$ (tabulā ierakstītie skaitļi saskaitīti pa kolonām), tāpēc

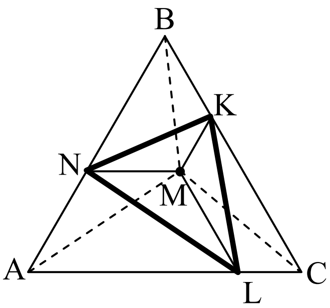
$2009 + r_1 + r_2 = 2010 + k_1 + k_2$, no kurienes seko $r_1 + r_2 - k_1 - k_2 = 1$.

Tā kā r_1, r_2, k_1, k_2 dalās ar 3, tad arī izteiksme $r_1 + r_2 - k_1 - k_2$ dalās ar 3, jo katrs saskaitāmais dalās ar 3. Tātad arī vienādības labajai pusei jādalās ar 3; bet 1 ar 3 nedalās.

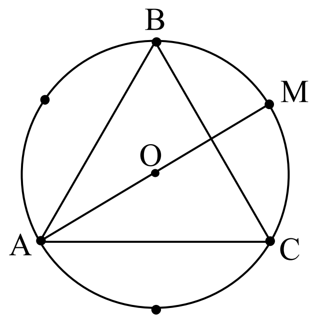
Tāpēc apskatāmā situācija nav iespējama.

3.2.7. a) Risinājums:

1) Novelkam caur punktu M taisnes paralēli ΔABC malām; tās krusto šīs malas atbilstoši punktos N, K, L (skat. A3.10. zīm.).



A3.10.zīm.



A3.11.zīm.

2) Tad $\angle MLA = \angle BCA$ (kāpšļu leņķi), tāpēc $\angle MLA = \angle NAL$.

3) Tāpēc trapece $ANML$ ir vienādsānu trapece.

4) Vienādsānu trapeces diagonāles ir savā starpā vienādas, tāpēc $MA = NL$.

5) Līdzīgi pierāda, ka $MB = NK$ un $MC = KL$.

6) Tātad trijstūris NKL ir meklējamais.

b) Apgalvojums var nebūt pareizs.

Risinājums:

1) Apskatīsim riņķa līnijā ar rādiusu R ievilktu vienādmalu trijstūri ABC un ņemsim M kā loka BC viduspunktu.

2) Tad $MA = 2R$, $MB = R$, $MC = R$ (skat. A3.11. zīm.), jo $BM = MC$ ir vienādi ar šajā riņķa līnijā ievilkta regulāra sešstūra malas garumu, kas ir *R*.

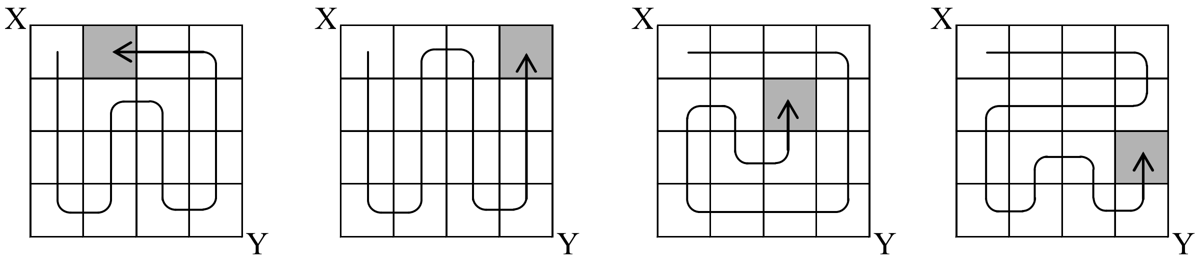
3) Tātad ***MB* + *MC* = *MA***.

4) Bet mēs zinām, ka katrā trijstūri jebkuru divu malu summa ir **lielāka** par trešo malu.

5) Tāpēc trijstūris, kura malu garumi būtu *MA*, *MB* un *MC*, nav iespējams.

3.2.8. Ar katru gājienu skudra pāriet uz citas krāsas lauciņu nekā tas, kurā tā atradās pirms gājiena, turklāt pēc katra nepāra skaita gājiena skudra atrodas uz melnā lauciņa, bet pēc katra pāra skaita gājiena – uz baltā lauciņa. Tāpēc pēc 15 gājieniem skudra noteikti atradīsies uz **melnā** lauciņa.

Veids, kā skudra var beigt savu ceļu melnajos lauciņos virs diagonāles *XY*, parādīts A3.12. zīmējumā. Risinājums lauciņiem zem diagonāles *XY* ir „simetrisks".



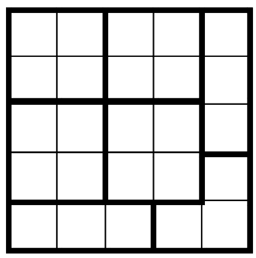
A3.12.zīm.

3.2.9. Atbilde: 11 rūtiņas.

Risinājums. Tas, ka ar 11 rūtiņu izgriešanu pietiek, redzams A3.13. zīm.

		x		
x	x		x	x
		x		
x	x		x	x
		x		

A3.13.zīm.



A3.14.zīm.

Lai pierādītu, ka ar mazāk rūtiņu izgriešanu nepietiek, skat. A3.14. zīm. Skaidrs, ka katrā apgabalā gar kvadrāta apakšējo un labo malu jāizgriež vismaz viena rūtiņa. Savukārt katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā jāizgriež vismaz 2 rūtiņas; izgriežot tikai vienu, atlikušās 3 rūtiņas veidos „stūrīti". Atliek ievērot, ka $1+1+1+8=11$.

3.2.10. Reizinot skaitli *n* ar 5, notiek sekojošais:

- reizinot ciparu 0 ar 5, iegūst 0; pārnesuma nav;
- reizinot ciparu 1 ar 5, iegūst 5; pārnesuma nav;
- reizinot ciparu 2 ar 5, iegūst 10; rezultātā raksta 0, bet 1 pārnes uz nākošo šķiru. Tātad ciparu summā saskaitāmā „$2 \cdot 5$" vietā iekļaujas saskaitāmais 1; starpība starp tiem ir 9.

Redzam, ka $5n$ ciparu summa ir par $9 \cdot k$ mazāka nekā skaitlis $S \cdot 5$, kur S – skaitļa n ciparu summa, bet k – reizināšanā „5 reiz n" notikušo pārnesumu skaits. Tātad $S \cdot 5 = 2009 + 9 \cdot k$ un $S = 402 + 2k - \frac{k+1}{5}$.

Tā kā S – naturāls skaitlis, tad $k+1$ jādalās ar 5. Tāpēc $k = 5t - 1$, t – naturāls, un $S = 402 + 2(5t-1) - t = 400 + 9t$, ja reizināšanā „5 reiz n" ir $5t-1$ pārnesumi. Tā kā katrs pārnesums notiek cipara 2 dēļ, tad n ciparu summa ir **400 + 9*t*, ja skaitlī *n* ir 5*t* – 1 divnieki, *t* – naturāls skaitlis.**

Piemēram, pie $t = 1$ der $n = \underbrace{11...1}_{401}2222$; tad $5n = \underbrace{55...5}_{400}61110$. Līdzīgi konstruē piemērus pie $t = 2; 3; ...; 402$.

Tā kā skaitlī n ir $(400 + 9t) - 2(5t - 1) = 402 - t$ vieninieku (un patvaļīgs skaits nuļļu), tad jābūt $\boldsymbol{t \leq 402}$.

3.3. Trešā kārta

3.3.1. Viegli pārbaudīt, ka $14538 \times 2 = 29076$. Tātad par meklējamajiem skaitļiem der, piemēram, 14538 un 29076.

3.3.2. Izmantosim šādu pakāpju īpašību (runāsim tikai par pakāpēm, kam gan bāze, gan kāpinātājs ir naturāli skaitļi, kas lielāki par 1):

Ja kāpinātāji ir vienādi, tad lielāka tā pakāpe, kurai lielāka bāze.

Šī īpašība mums ļauj salīdzināt uzdevumā minētās pakāpes ar citām pakāpēm un rezultātā – arī savā starpā.

Vispirms atzīmēsim, ka $\mathbf{15^{15} < 16^{15}}$ (pēc īpašības, jo 15 < 16).

Tālāk ievērojam, ka $\mathbf{8^{20} < 9^{20}}$ (pēc īpašības, jo 8 < 9).

Skaitļus 16^{15} un 8^{20} salīdzināsim, izsakot tos abus kā divnieka pakāpes:

$$16^{15} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^{15} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot ... \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{15 \text{ reizes grupa } 2\cdot2\cdot2\cdot2} =$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{15\cdot4 \text{ reizes skaitlis } 2} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{60 \text{ reizes skaitlis } 2} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot ... \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)}_{20 \text{ reizes grupa } 2\cdot2\cdot2} = \underbrace{8 \cdot ... \cdot 8}_{20 \text{ reizes skaitlis } 8} = 8^{20}.$$

Tātad $16^{15} = 8^{20}$, un iegūstam

$15^{15} < 16^{15} = 8^{20} < 9^{20}$, tātad $\mathbf{15^{15} < 9^{20}}$,

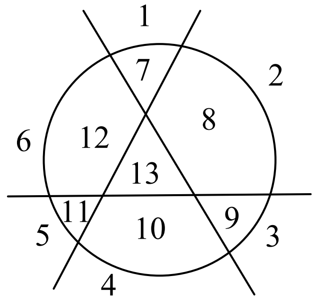
ko arī vajadzēja noskaidrot.

3.3.3. Atceramies, ka divām taisnēm ir vai nu viens, vai neviens kopīgs punkts. Novelkot vienu taisni, tā sadala plakni 2 apgabalos. Novelkot vēl otru taisni, uz tās rodas vai nu neviens, vai viens krustpunkts ar pirmo; tātad otrā taisne vai nu sadalās divos gabalos (staros), vai arī paliek kā viens nedalīts gabals. Katrs no šiem gabaliem sadala vienu no pirmās taisnes veidotajiem apgabaliem divos jaunos apgabalos; tātad apgabalu skaits aug par 2 vai 1, un tas ir 4 vai 3.

Līdzīgi, novelkot trešo taisni, tā ar jau novilktajām taisnēm sadalās 3, 2 vai 1 gabalā (atkarībā no tā, vai uz tās rodas 2, 1 vai neviens krustpunkts). Katrs gabals sadala vienu no divu taišņu veidotajiem apgabaliem divos jaunos. Tātad apgabalu skaits palielinās par 3, 2 vai 1 un tātad nav lielāks par 4 + 3 = 7.

Novelkot riņķa līniju, uz tās rodas ne vairāk par 6 kopīgiem punktiem ar kādu no 3 taisnēm (ne vairāk par diviem ar katru). Tātad riņķa līnija sadalās ne vairāk kā 6 lokos. Katrs loks sadala kādu no triju taišņu veidotajiem apgabaliem divos jaunos apgabalos; tātad apgabalu skaits palielinās ne vairāk kā par 6, un tas nevar būt lielāks par 7 + 6 = 13.

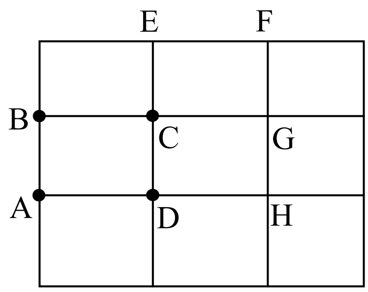
Tas, ka 13 apgabali ir iespējami, redzams A3.15. zīm.



A3.15.zīm.

3.3.4. Atbilde: vidējā taisnstūra perimetrs var būt jebkurš pozitīvs skaitlis, kas mazāks par 3, un nevar būt citāds.

Risinājums. Tā kā perimetrs (četru malu garumu summa) vienmēr ir pozitīvs, tad tas nevar būt ne 0, ne negatīvs. Pierādīsim, ka tas noteikti mazāks par 3.



A3.16.zīm.

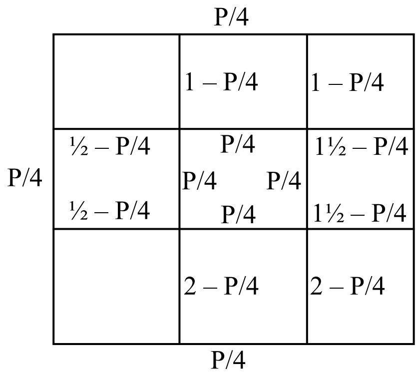
Saskaņā ar doto $AB + BC + CD + DA = 1$ (skat. A3.16. zīm.). Tā kā $AB = CD$ un $BC = DA$, iegūstam $2 \cdot CD + 2 \cdot BC = 1$ un $CD = \frac{1}{2} - BC$. Tā kā $BC > 0$, tad $CD < \frac{1}{2}$; tāpēc arī $\boldsymbol{GH < \frac{1}{2}}$ (jo taisnstūra pretējās malas ir vienādas).

Līdzīgi no $CE + EF + FG + GC = 2$ iegūstam, ka **CG < 1** un tāpēc arī **DH < 1**. No izceltajām nevienādībām seko, ka vidējā taisnstūra perimetrs ir mazāks par $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 3$, kas arī bija jāpierāda.

Tagad pierādīsim uzdevuma otro daļu – pierādīsim, ka katrs skaitlis *P*, kas apmierina sakarību $0 < P < 3$, atbilstoši izveidotā zīmējumā **var būt** vidējā taisnstūra perimetrs.

Mēs šķirojam divus gadījumus:

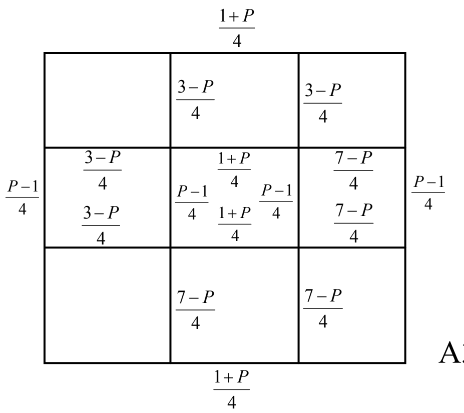
I Skaitlis *P* apmierina sakarību $0 < P < 2$. Vajadzīgais taisnstūris redzams A3.17. zīm.



A3.17.zīm.

II Skaitlis P apmierina sakarību $2 \le P < 3$. Tad iepriekšējā konstrukcija neder, jo $\frac{1}{2} - P/4 \le 0$, kas nedrīkst būt. Tādā gadījumā veidojam A3.18. zīm.

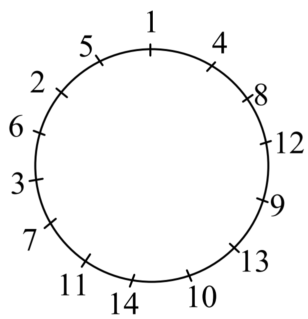
Lasītājs pats var pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi apmierināti. Iespējami arī daudzi citi piemēri.



A3.18.zīm.

3.3.5. Atbilde: Jā, var.

Skaitlim 1 blakus var atrasties vienīgi skaitļi 4 un 5, līdzīgi skaitlim 14 blakus var atrasties vienīgi skaitļi 10 un 11. Atliek izkārtot pārējos skaitļus. Viens no variantiem, kā to var izdarīt, parādīts A3.19. zīm.



A3.19.zīm.

3.3.6. Tā var sadalīt **jebkurus 8** pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Tiešām, apzīmēsim tos ar $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; ...; $x + 7$; $x + 8$ un izveidosim grupas A un B:

***A* grupa:** $x + 1$; $x + 4$; $x + 6$; $x + 7$;

***B* grupa:** $x + 2$; $x + 3$; $x + 5$; $x + 8$.

Grupas A skaitļu summa ir

$$(x+1)+(x+4)+(x+6)+(x+7)=4x+(1+4+6+7)=$$

$= 4x + 18$, bet grupas B skaitļu summa ir $(x+2)+(x+3)+(x+5)+(x+8)=$
$= 4x + (2+3+5+8) = 4x + 18$; tātad tās ir vienādas.

Savukārt grupas A skaitļu kvadrātu summa ir

$$(x+1)^2 + (x+4)^2 + (x+6)^2 + (x+7)^2 =$$
$$= (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 8x + 16) + (x^2 + 12x + 36) + (x^2 + 14x + 49) =$$
$$= 4x^2 + 36x + 102,$$

bet grupas B skaitļu kvadrātu summa ir

$$(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + (x+8)^2 =$$
$$= (x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 6x + 9) + (x^2 + 10x + 25) + (x^2 + 16x + 64) =$$
$$= 4x^2 + 36x + 102,$$

tātad arī tās ir vienādas.

Ja skaitļi $x + 1$; ...; $x + 8$ ir attiecīgi 2002; ...; 2009, tad tie atbilstoši augstāk minētajam algoritmam tiek sadalīti grupās (2002; 2005; 2007; 2008) un (2003; 2004; 2006; 2009).

Iesakām lasītājam pamēģināt patstāvīgi pierādīt, ka jebkurus 16 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus var sadalīt divās grupās tā, lai būtu vienādas gan grupās ietilpstošo skaitļu summas, gan to kvadrātu summas, gan to kubu summas. Vai šo rezultātu nevar „attīstīt” vēl tālāk?

3.3.7. Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11.

Atceramies dalāmības pazīmes ar 3 un ar 11:

- ar 3 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3;
- ar 11 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kam starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu un pāra vietās esošo ciparu summu dalās ar 11. Piemēram, 3476 dalās ar 11, jo $(3+7)-(4+6)=0$ dalās ar 11, bet 82603 nedalās ar 11, jo $(8+6+3)-(2+0)=17-5=15$ nedalās ar 11.

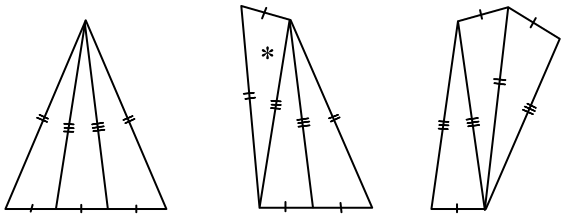
Piemērs 1111110000 parāda, ka meklējamā skaitļa ciparu summa **var būt 6**. No minētās dalāmības pazīmes seko, ka tai jādalās ar 3; tātad, ja tā varētu būt mazāka par 6, tad tai jābūt 3. Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

Pieņemsim no pretējā, ka eksistē tāds desmitciparu naturāls skaitlis, kam ciparu summa ir 3 un kas dalās gan ar 3, gan ar 11. Acīmredzot, pastāv tikai 3 iespējas:

a) skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles,
b) skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles,
c) skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

Viegli pārbaudīt, ka nevienā no šiem gadījumiem starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu n un pāra vietās esošo ciparu summu p nevar dalīties ar 11. Tiešām, a) gadījumā šī starpība ir 3 – 0 vai 0 – 3, b) gadījumā 1 – 2; 2 – 1; 3 – 0 vai 0 – 3, c) gadījumā $(1+1+1)-0$; $0-(1+1+1)$; $(1+1)-1$ vai $1-(1+1)$. Neviena no šīm vērtībām nedalās ar 11. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un naturāla skaitļa ar ciparu summu 3, kas dalītos ar 33, nav. Tātad mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu naturālam skaitlim, kurš dalās ar 33, ir 6.

3.3.8. Tādas situācijas piemērs redzams A3.20. zīm. Trijstūris, kas apzīmēts ar zvaigznīti, ir „apgriezts uz mutes”.



A3.20.zīm.

3.3.9. Apzīmēsim monētu masas no labās uz kreiso pusi ar $m_1, m_2, ..., m_{10}$. Ar šiem pašiem burtiem apzīmēsim arī pašas monētas. Mēs zinām, ka ir tāds indekss n, ka monētas $m_1, m_2, ..., m_n$ katra sver 8 gramus (sauksim tās par smagām), bet pārējās monētas $m_{n+1}, ..., m_{10}$ katra svar 7 gramus (sauksim tās par vieglām). Mums jāatrod n vērtība.

Pirmajā svēršanā novietojam m_1 un m_{10} uz viena kausa, bet m_4 un m_7 – uz otra. Atceramies, ka m_1 noteikti ir smaga, bet m_{10} noteikti ir viegla. Šķirojam trīs iespējas.

A. Izrādās, ka $m_1 + m_{10} > m_4 + m_7$. Tas var notikt tikai tad, ja m_4 un m_7 abas ir vieglas. Tad vieglas ir arī monētas $m_5, m_6, ..., m_9$; tātad vienīgās vēl nenoskaidrotās monētas ir m_2 un m_3. Otrajā svēršanā uz viena kausa atstājam m_1 un m_{10} (smago un vieglo), bet uz otra novietojam m_2 un m_3. Ja $m_1 + m_{10} > m_2 + m_3$, tad m_2 un m_3 abas ir vieglas. Ja $m_1 + m_{10} = m_2 + m_3$, tad m_2 ir smaga, bet m_3 ir viegla. Ja $m_1 + m_{10} < m_2 + m_3$, tad m_2 un m_3 abas ir smagas.

B. Izrādās, ka $m_1 + m_{10} < m_4 + m_7$. Tad m_4 un m_7 abas ir smagas, un šis gadījums ir „simetrisks” A gadījumam; atstājam to lasītājam izanalizēt patstāvīgi.

C. Izrādās, ka $m_1 + m_{10} = m_4 + m_7$. Tad m_4 ir smaga, bet m_7 ir viegla; vienīgās vēl nenoskaidrotās monētas ir m_5 un m_6. Otrajā svēršanā uz viena kausa atstājam m_1 un m_{10}, bet uz otra novietojam m_5 un m_6. Triju iespējamo gadījumu analīze ir analoģiska A gadījumā parādītajai.

3.3.10. a) To var izdarīt, piemēram, šādi: $6 \cdot \left(\left(9+8\right) \cdot 5 \cdot 4 - 7 + 1 + 3 - 2\right) = 2010$.

b) Iespējams izveidot, piemēram, šādas septiņas dažādas izteiksmes, kuras katras vērtība ir 2010:

- $12 \cdot 34 \cdot 5 - 6 - 7 - 8 - 9 = 2010$
- $1 + 2 : 3 \cdot 45 \cdot 67 + 8 - 9 = 2010$
- $-1 - 2 - 34 + (5 \cdot 6 - 7) \cdot 89 = 2010$
- $-12 + 3 + (4 \cdot 5 + 6) \cdot 78 - 9 = 2010$
- $(1 + 2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 56 - 7 - 8 + 9 = 2010$
- $(-1 + 23 + 45) \cdot (6 + 7 + 8 + 9) = 2010$
- $12 \cdot 34 \cdot 5 - 6 - 7 - 8 - 9 = 2010$

Iespējami vēl arī daudzi citi risinājumi.

3.4. Ceturtā kārta

3.4.1. **a)** Ievērojam, ka $n^2 - n = n(n-1)$. Ja n – naturāls skaitlis, tad n un n – 1 ir divi viens otram sekojoši veseli skaitļi. Tāpēc viens no tiem ir pāra, bet otrs – nepāra. Pāra skaitļa un nepāra skaitļa reizinājums ir pāra skaitlis. No tā arī seko vajadzīgais.

b) Ievērojam, ka $n^3 - n = n(n^2-1) = n \cdot [(n-1)(n+1)] = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$. Ja n – naturāls skaitlis, tad n – 1; n; n + 1 ir **trīs viens otram sekojoši veseli skaitļi.** Tāpēc tieši viens no tiem dalās ar 3 (jo veselo skaitļu virknē katrs trešais skaitlis dalās ar 3). Tāpēc arī to reizinājums dalās ar 3.

Piezīme. Abi minētie apgalvojumi ir ļoti slavenas teorēmas speciālgadījumi.

Fermā mazā teorēma. Ja p – pirmskaitlis un n – naturāls skaitlis, tad $n^p - n$ dalās ar p.

Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt šo teorēmu, ja p = 5 un p = 7.

3.4.2. Jā, var. Piemēram, $96432 \cdot 1875 = 180810000$.

3.4.3. **Atbilde:** nē, nevar.

Pierādījums. Pieņemsim, ka naturāla skaitļa n pierakstā kāds no cipariem ir 2. Apskatīsim citu naturālu skaitli n_1, kas no n atšķiras **vienīgi** ar to, ka šī cipara 2 vietā skaitlī n_1 ir cipars 1.

Piemēram, ja n = 13**2**4, tad n_1 = 13**1**4; ja n = 24**2**5 un mēs apskatām otro divnieku n pierakstā, tad n_1 = 24**1**5.

Skaidrs, ka $n_1 < n$. Tātad, ja Jānītis uzraksta skaitli n, tad jau iepriekš viņš uzrakstījis skaitli n_1. Tātad **pirms** katra cipara 2 ir uzrakstīts tam atbilstošais cipars 1. Tāpēc divnieku nekad nevar būt uzrakstīts vairāk nekā vieninieku.

3.4.4. Nevienādību $ax + by + cz > ay + bz + cx$, kuras patiesums jāpierāda, pakāpeniski pārveidosim par tai līdzvērtīgu (ekvivalentu):

$$ax + by + cz - ay - bz - cx > 0.$$

Ja patiesas nevienādības kreisajai pusei pieskaita un atņem vienu un to pašu skaitli, iegūst patiesu nevienādību:

$$ax + by + cz - ay - bz - cx + cy - cy > 0$$

Sagrupējam saskaitāmos:

$$a(x-y) - c(x-y) + b(y-z) - c(y-z) > 0 \text{ un tālāk}$$

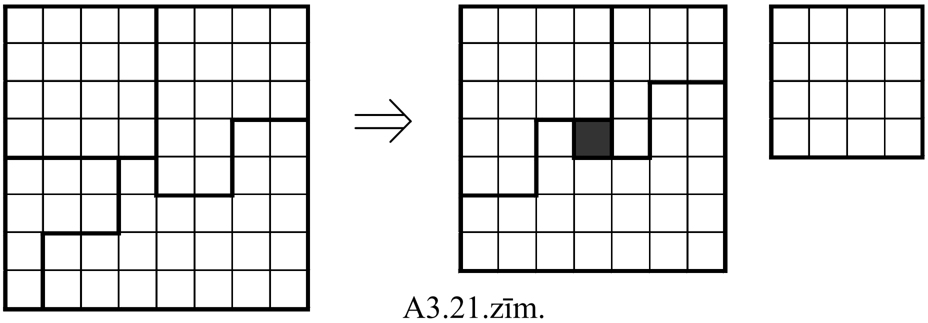
$$(a-c)(x-y) + (b-c)(y-z) > 0$$

Šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama, jo

- tā kā $a > b > c > 0$, tad $a - c > 0$ un $b - c > 0$;
- tā kā $x > y > z > 0$, tad $x - y > 0$ un $y - z > 0$.

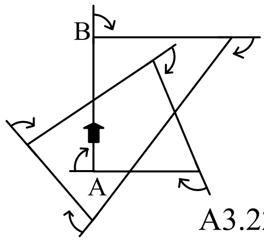
Tā kā pozitīvu skaitļu reizinājums un pēc tam arī summa, ir pozitīvs skaitlis, nevienādības patiesumu esam pamatojuši.

3.4.5. Skat., piem., A3.21. zīm.



A3.21.zīm.

3.4.6. Novietosim uz posma AB bultiņu un bīdīsim to pa lauzto līniju, stūros pagriežoties, kamēr būsim veikuši vienu pilnu „apli” (skat. A3.22.zīm.).



A3.22.zīm.

Izsekojot bultiņas kustībai, redzam, ka tā veikusi divus *pilnus apļus*, t.i., kopā pagriezusies par $2 \cdot 360° = 720°$ pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Tātad, ja bultiņas pagrieziena leņķus apzīmējam ar α_1; α_2; ...; α_7, tad $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_7 = 720°$. Tāpēc mūsu apskatāmo lauztās līnijas veidoto leņķu lielumu summa ir:

$$(180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \ldots + (180° - \alpha_7) = 7 \cdot 180° - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_2) =$$

$$= 7 \cdot 180° - 4 \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°.$$

3.4.7. Katram iespējamam bioloģijas pulciņam B atbilst iespējamais matemātikas pulciņš M, kas satur tieši tos skolniekus, kas nav iesaistīti pulciņā B. Pie tam skaidrs, ka dažādiem B atbilst dažādi M. Tāpēc bioloģijas pulciņus var izveidot tikpat daudz, cik matemātikas pulciņus.

3.4.8. Tā kā abu pirmo kvadrātu malu garumi ir 1 un katru nākošo kvadrātu, sākot ar trešo, zīmē blakus abiem iepriekšējiem, tad kvadrātu malu garumi ir Fibonači skaitļi F_1; F_2; ...; F_n; F_{n+1}; F_{n+2}; ... . Tāpēc visu n pirmo kvadrātu kopīgais laukums ir $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2$.

Šie n kvadrāti kopā veido taisnstūri, kam vienas malas garums ir F_n, bet otras malas garums ir $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ (pie $n \geq 2$).

Iegūstam, ka pie $n \geq 2$ pastāv vienādība

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \qquad (n \geq 2).$$

3.4.9. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim n ir k naturāli dalītāji; apzīmēsim tos augošā secībā ar $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (tātad $d_1 = 1$ un $d_k = n$). Ja d – jebkurš no šiem dalītājiem, tad $\frac{n}{d}$ ir naturāls skaitlis (saskaņā ar dalītāja definīciju); apzīmēsim $\frac{n}{d} = e$. Tad $n = d \cdot e$ un tātad $\frac{n}{e} = d$; tā kā d – naturāls skaitlis, tad arī e ir skaitļa n dalītājs. Tāpēc k skaitļi $\frac{n}{d_1}$, $\frac{n}{d_2}$, ..., $\frac{n}{d_k}$ visi ir skaitļa n naturāli dalītāji.

Tā kā $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > ... > \frac{n}{d_k}$, tad tie visi ir **dažādi**; tātad to skaits ir k. Bet mēs zinām, ka skaitlim ir **tieši** k naturāli dalītāji, un tie ir $d_1; d_2; ...; d_k$.

Tātad skaitļi $\frac{n}{d_1}; \frac{n}{d_2}; ...; \frac{n}{d_k}$ ir tie paši skaitļi $d_1; d_2; ...; d_k$ (tikai izvietoti dilstošā secībā). Tāpēc skaidrs, ka

$$d_1 + d_2 + ... + d_k = \frac{n}{d_1} + ... + \frac{n}{d_k},$$

jo summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības.

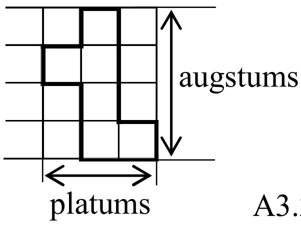
3.4.10. Atbilde: a) nevar, **b)** 24.

Risinājums. a) iedomāsimies, ka skudra rāpo pa daudzstūra kontūru, veicot **vienu pilnu „apli”**. Kustības laikā skudra tikpat garu ceļu gabalu norāpojusi „pa labi”, cik „pa kreisi”, un tikpat garu ceļa gabalu norāpojusi „uz augšu”, cik „uz leju” (jo beigās atrodas turpat, kur sākumā). Tāpēc skudras horizontālā virzienā norāpotais attālums izsakās ar pāra skaitli; tāpat ar pāra skaitli izsakās vertikālā virzienā norāpotais attālums. Tāpēc arī kopējais norāpotais attālums izsakās ar pāra skaitli. Bet 101 nav pāra skaitlis.

b) pierādīsim: ja apskatāmā tipa daudzstūra perimetrs ir n, tad tā laukums ir $\frac{n}{2} - 1$.

Ja daudzstūris sastāv no vienas rūtiņas, tad $n = 4$ un tā laukums ir 1; viegli pārbaudīt, ka $\frac{4}{2} - 1 = 1$.

Pieņemsim, ka dažiem daudzstūriem šī sakarība nav spēkā, un apskatīsim vienu no šādiem daudzstūriem ar vismazāko laukumu; tad šis laukums ir lielāks par 1, jo vienīgais daudzstūris ar laukumu 1 ir viena rūtiņa. Tātad vai nu mūsu daudzstūra „platums”, vai tā „augstums” ir vismaz 2 (skat. A3.23. zīm.).



A3.23.zīm.

Varam pieņemt, ka „platums” ir vismaz 2.

Novelkam vertikālu rūtiņu līniju, kas atrodas starp „kreiso” un „labo” malu (tātad eksistē, jo apskatāmā daudzstūra platums ir vismaz 2). Šī līnija krusto daudzstūri. Tā kā daudzstūra iekšpusē nav rūtiņu virsotņu, tad šī krustošana notiek pa vienu vai vairākiem nogriežņiem ar garumu 1 (skat. A3.24. zīm.). Izvēlamies **vienu** no šiem nogriežņiem. Tas sadala mūsu apskatāmo daudzstūri divos daudzstūros, kuru laukumi ir mazāki nekā sākotnējam. Apzīmējam šo daudzstūru laukumus attiecīgi ar L_1 un L_2, bet perimetrus attiecīgi ar P_1 un P_2 (skat. A3.25. zīm.).

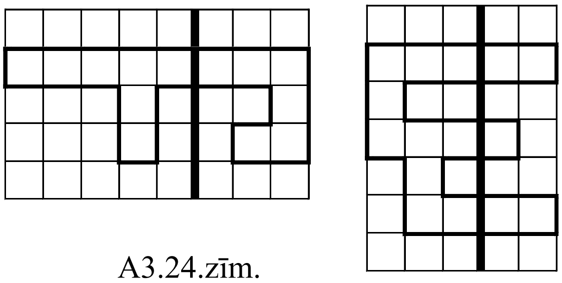
Saskaņā ar pieņēmumu par sākotnējā daudzstūra laukumu (tas ir **mazākais**, kuram neizpildās pierādāmā sakarība) $L_1 = \frac{P_1}{2} - 1$ un $L_2 = \frac{P_2}{2} - 1$.

Tāpēc sākotnējā daudzstūra laukums:

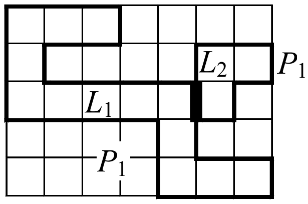
$$L = L_1 + L_2 = \frac{P_1}{2} - 1 + \frac{P_2}{2} - 1 = \frac{P_1 + P_2 - 2}{2} - 1.$$

Bet $P_1 + P_2 - 2$ ir sākotnējā daudzstūra perimetrs P (no P_1 un P_2 „jāatskaita" kopīgais nogrieznis ar garumu 1, kas atrodas sākotnējā daudzstūra iekšpusē). Iznāk, ka $L = \frac{P}{2} - 1$. Tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka sākotnējam daudzstūrim mūsu pierādāmā sakarība neizpildās. Tātad pieņēmums ir nepareizs, un šī sakarība izpildās visiem apskatāmā tipa daudzstūriem.

Tātad šāda tipa daudzstūrim, kuram perimetrs $n = 50$, laukums ir $\frac{50}{2} - 1 = 24$.



A3.24.zīm.



A3.25.zīm.

3.5. Piektā kārta

3.5.1. Risinājums balstīsies uz šādu labi zināmu īpašību: ja gan a, gan b abi dalās ar n, tad arī starpība $a - b$ dalās ar n.

Pieņemsim, ka n – kaut kāds naturāls skaitlis, ar kuru dalās gan 1517, gan 1147. Izmantojot augšminēto īpašību, pakāpeniski iegūstam, ka ar n dalās skaitļi

1517 – 1147 = 370;

1147 – 370 = 777;

777 – 370 = 407;

407 – 370 = 37.

Viegli pārbaudīt, ka no naturāliem skaitļiem 37 dalās tikai ar 1 un ar 37. Tātad n var būt vai nu 1, vai 37. Skaidrs, ka $37 > 1$. Pārbaudām, vai 1517 un 1147 dalās ar 37:

1517 : 37 = 41;

1147 : 37 = 31.

Tātad mūsu meklējamais skaitlis ir 37.

3.5.2. Sadalām visas lapas rūtiņas četrās grupās A; B; C; D, kā parādīts A3.26. zīm. Redzam, nekādām divām vienas grupas rūtiņām nav ne kopīgas malas, ne kopīga stūra.

...

...	A	B	A	B	...
...	D	C	D	C	...
...	A	B	A	B	...
...	D	C	D	C	...

...

A3.26.zīm.

Katra melnā rūtiņa pieder vienai no šīm četrām grupām. Ja nevienā grupā nebūtu vairāk par 14 melnajām rūtiņām, tad to kopskaits nepārsniegtu $14 \cdot 4 = 56$; bet mēs zinām, ka melno rūtiņu pavisam ir 57. Tātad kādā no četrām grupām ir vairāk nekā 14 melno rūtiņu; tātad tajā ir **vismaz 15** melno rūtiņu.

3.5.3. Atbilde: ar 7 dienām.

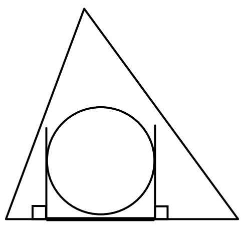
Risinājums. a) Tā kā katrai komandai jāspēlē ar 7 citām, tad pat katrai komandai vienai pašai nepieciešamas **vismaz** 7 dienas.

b) To, kā var iztikt ar 7 dienām, skat. A3.27. zīm. Komandas ir apzīmētas ar burtiem no *A* līdz *H*. Katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis norāda, kurā dienā savā starpā spēlē komandas, kas atbilst šīs rūtiņas rindiņai un kolonnai.

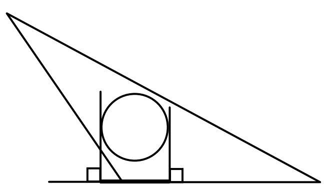
	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7	6	5	4	3	2	1
B	7		5	4	3	2	1	6
C	6	5		3	2	1	7	4
D	5	4	3		1	7	6	2
E	4	3	2	1		6	5	7
F	3	2	1	7	6		4	5
G	2	1	7	6	5	4		3
H	1	6	4	2	7	5	3	

A3.27.zīm.

3.5.4. Projicējam riņķa līniju uz malu ar garumu 10. Projekcijas garums vienāds ar tās diametra garumu. **Tā kā trijstūris ir šaurleņķu, tad projekcija atrodas malas iekšpusē, kā parādīts A3.28. zīm.** (varētu gadīties, ka tā nav, ja trijstūris būtu platleņķa; skat., piem., A3.29.zīm.). Tātad riņķa līnijas diametrs ir īsāks par 10; tāpēc tās rādiuss ir īsāks par $\frac{10}{2} = 5$, k.b.j.



A3.28.zīm.



A3.29.zīm.

3.5.5. Virknei *a b a c a b a* galā pierakstot jebkuru no burtiem *a*; *b*; *c*, iegūst stabilu virkni:

$\underline{a}\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ \underline{a}$

$\underline{a\ b}\ a\ c\ a\ b\ \underline{a\ b}$

$\underline{a\ b\ a\ c}\ \underline{a\ b\ a\ c}$

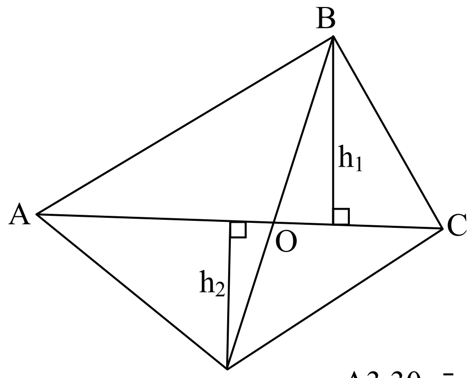
Lasītājs pats var pārbaudīt, ka burtu *a*; *b*; *c*; *d*; *e* gadījumam der, piemēram, virkne

$$a\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ d\ a\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ e\ a\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ d\ a\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ .$$

Padomājiet, vai līdzīgas virknes var izveidot, ja tām galā būtu jāpieraksta jebkurš no sešiem, septiņiem u.t.t. burtiem.

3.5.6. Atbilde: nē.

Risinājums. Trijstūra *XYZ* laukumu apzīmēsim ar $L(XYZ)$, ja *X*, *Y*, *Z* – patvaļīgi punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes (pretējā gadījumā *XYZ* nav trijstūris).



A3.30.zīm.

Četri trijstūri, kurus apskatām uzdevumā, ir *AOB*, *BOC*, *COD* un *DOA*. Novelkam ΔAOB un ΔBOC kopīgo augstumu h_1, kā arī ΔCOD un ΔDOA kopējo augstumu h_2 (skat. A3.30. zīm.).

Tad $L(AOB)=\frac{1}{2}AO\cdot h_1$

$$L(BOC)=\frac{1}{2}CO\cdot h_1 \qquad (1)$$

$$L(COD)=\frac{1}{2}CO\cdot h_2$$

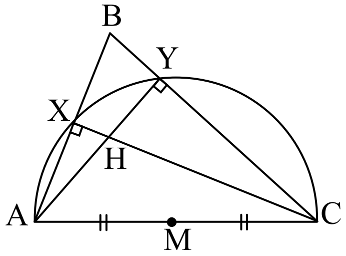
$$L(DOA)=\frac{1}{2}AO\cdot h_2$$

No vienādībām (1) viegli pārbaudīt, ka

$$L(AOB)\cdot L(COD)=L(BOC)\cdot L(AOD) \qquad (2)$$

Bet vienādība $a\cdot b=c\cdot d$, kur *a*; *b*; *c*; *d* – **dažādi** pirmskaitļi, nevar pastāvēt: kreisā puse dalās ar *a*, bet labās puses vienīgie naturālie dalītāji ir 1; *c*; *d*; *cd*.

3.5.7. Iedomāsimies, ka *AY* un *CX* ir divi no meklējamiem augstumiem. Tad ΔAXC un ΔAYC ir taisnleņķa. Kā zināms, taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu ir tikpat gara, cik puse no hipotenūzas; tāpēc $MA=MX=MY=MC$. Tātad, novelkot riņķa līniju ar centru *M* un rādiusu *MA*, tās krustpunkti ar malām *AB* un *CB* ir augstumu pamati (skat. A3.31. zīm.).



A3.31.zīm.

Varam uzzīmēt augstumus AY un CX un atrast to krustpunktu H. Tā kā trijstūra augstumi krustojas vienā punktā, tad, velkot taisni caur B un H, iegūstam arī trešo augstumu no virsotnes B.

3.5.8. Lasītājs, atverot iekavas, pats var pārbaudīt, ka pastāv identitāte $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)=$

$$=\left(ax-by-cz-dt\right)^2+\left(bx+ay-dz+ct\right)^2+\left(cx+dy+az-bt\right)^2+\left(dx-cy+bz+at\right)^2.$$

Šo vienādību sauc par Lagranža identitāti.

3.5.9. Vispirms aprēķināsim tabulas elementu summu pa rindiņām. Pirmās rindiņas skaitļu summu $1 + 2 + 3 + ... + n$ apzīmēsim ar S. Tad otrās rindiņas skaitļu summa ir $2(1+2+...+n)=2S$, trešās rindiņas skaitļu summa ir $3S$, ..., n-tās rindiņas skaitļu summa ir $n(1+2+...+n)=n\cdot S$. Saskaitot visas šīs summas kopā, iegūstam: tabulas visu skaitļu summa ir

$$S+2S+3S+...+(n-1)S+n\cdot S=(1+2+...+n)\cdot S=S\cdot S=S^2.$$

Tagad aprēķināsim tabulas elementu summu, grupējot tos „pa stūrīšiem”.

	$1\cdot 1$	$1\cdot 2$	$1\cdot 3$	...	$1\cdot(n-1)$	$1\cdot n$
(α)	$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 3$	...	$2\cdot(n-1)$	$2\cdot n$
(β)	$3\cdot 1$	$3\cdot 2$	$3\cdot 3$	...	$3\cdot(n-1)$	$3\cdot n$
	...	...	...	...	...	...
	$n\cdot 1$	$n\cdot 2$	$n\cdot 3$	...	$n\cdot(n-1)$	$n\cdot n$

Kreisajā augšējā stūrī esošo skaitli $1\cdot 1$ varam uzrakstīt kā 1^3 (jo $1\cdot 1=1=1^3$).

„Stūrītī” α skaitļu summa ir

$$2\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 2=2\cdot(1+2+1)=2\cdot 4=2\cdot 2^2=2^3$$

„Stūrītī” β skaitļu summa ir

$$3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 3+1\cdot 3=3\cdot(1+2+3+2+1)=3\cdot 9=3\cdot 3^2=3^3$$

Līdzīgi „stūrīti”, kurā kreisais elements ir $k\cdot 1$ (k – patvaļīgs naturāls skaitlis, kas nepārsniedz n), skaitļu summa ir

$$\begin{aligned}S_k &= k\cdot 1+k\cdot 2+...+\\ &+k\cdot(k-2)+k\cdot(k-1)+k\cdot k+(k-1)\cdot k+(k-2)\cdot k+...+\\ &+3\cdot k+2\cdot k+1\cdot k=\\ &=k[\,\underline{1+2+...+(k-2)+(k-1)}+k+\underline{(k-1)+(k-2)+...+2+1}\,].\end{aligned}$$

Pasvītroto apgabalu skaitļus apvienojam pa pāriem:

$$1+(k-1)=k,\ 2+(k-2)=k,\ ...,\ (k-2)+2=k,\ (k-1)+1=k.$$

Pavisam šādu pāru ir $(k-1)$.

Tātad $S_k = k[(k-1)k+k] = k[k^2-k+k] = k\cdot k^2 = k^3$.

Tāpēc visos stūrīšos kopā ierakstīto skaitļu summa ir

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+...+(n-1)^3+n^3.$$

Aprēķinot tabulā ierakstīto skaitļu summu divos dažādos veidos, rezultātiem jābūt vienādiem, jo aprēķina vienu un to pašu lielumu. No tā arī izriet, ka $1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3=(1+2+...+n)^2$.

3.5.10. Atcerēsimies, ka latviešu alfabēta sākums ir

a, *ā*, *b*, *c*, *č*, *d*, *e*, ...

Andris var uzdot Maijai, piemēram, šādu jautājumu:

„Vai taisnība, ka Tavs burts alfabētā atrodas aiz manis iedomātā burta, kas ir vai nu *b*, vai *d*?"

- Ja Maija iedomājusies „*a*", viņas atbilde būs „nē". Tiešām, *a* neatrodas ne aiz *b*, ne aiz *d*.
- Ja Maija iedomājusies „*e*", viņas atbilde būs „jā". Tiešām, *e* atrodas gan aiz *b*, gan aiz *d*.
- Ja Maija iedomājusies „*c*", viņas atbilde būs „nezinu un nevaru zināt". Tiešām, burts *c* atrodas **aiz** *b*, bet **pirms** *d*, un Maija nezina, kuru no burtiem *b* un *d* Andris ir iedomājies.

Tātad atkarībā no Maijas atbildes, Andris jau pēc viena atbildētā jautājuma sapratīs, kuru no burtiem *a*; *c*; *e* Maija ir iedomājusies.

3.6. Sestā kārta

3.6.1. a) Der, piem., skaitlis 9678312.

b) Pavisam ir 10 dažādi cipari. Skaidrs, ka prasītā skaitļa pierakstā nevar izmantot ciparu 0, jo ar nulli nedrīkst dalīt. Arī ciparu 5 nevar izmantot, jo, lai šis skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 5 (jo iepriekš jau izspriedām, ka cipars 0 nevar būt). Bet tad šis būtu nepāra skaitlis un nedalītos ar pāra tiem cipariem, kas ir pāra. Tātad šī skaitļa pierakstā jāizmanto pārējie 8 cipari.

Tātad tur jābūt arī ciparam 3.

Atcerēsimies dalāmības pazīmi ar skaitli 3: ar skaitli 3 dalās tie un tikai tie skaitļi, kuru ciparu summa arī dalās ar 3. Bet mūsu iegūtā skaitļa ciparu summa ir $1+2+3+4+6+7+8+9=40$, kas nedalās ar 3. Tātad arī pats skaitlis nedalās ar 3. Tātad šādu astoņciparu skaitli izveidot nav iespējams.

3.6.2. Ievērosim, ka summa par visām šokolādēm noteikti dalās ar 3, tāpat arī summa par cepumu kārbām dalās ar 3. Tātad arī kopējā summa par šokolādēm un cepumiem dalās ar 3. Summa par torti un konfektēm ir 780 santīmi, kas arī dalās ar 3. Tātad visa pirkuma kopējai summai arī jādalās ar 3. Taču kasiera pieprasītie 982 santīmi nedalās ar 3. Tātad pieprasītā summa nevarēja būt pareiza.

3.6.3. Ar katru lauzumu mēs vienu šokolādes gabalu sadalām divos, tātad palielinām gabaliņu skaitu par 1. Tā kā sākumā mums ir viens gabals šokolādes, savukārt beigās mums vajag iegūt 200 gabaliņus, šokolādes gabaliņu skaitu jāpalielina par $200-1=199$. Tātad nepieciešami 199 lauzumi.

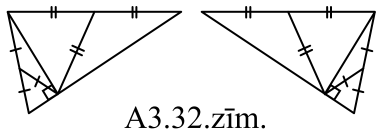
3.6.4. Katra dāma neatkarīgi no tās atrašanās vietas apdraud 7 lauciņus vertikāli, 7 lauciņus horizontāli un vismaz 7 lauciņus pa diagonāli. Lai kāda dāma neapdraudētu nevienu citu dāmu, ir jābūt vismaz $7\cdot 3=21$ brīvam lauciņam. Ja dāmu skaits ir 44, tad brīvi paliek tikai $64-44=20$ lauciņi. Tātad katra dāma apdraud vismaz vienu citu dāmu.

3.6.5. Viens no iespējamiem variantiem, kā rīkoties, attēlots tabulā:

	8 *l* trauks	5 *l* trauks	3 *l* trauks
sākumā	8	0	0
pēc 1.liešanas	5	0	3
pēc 2.liešanas	5	3	0
pēc 3.liešanas	2	3	3
pēc 4.liešanas	2	5	1
pēc 5.liešanas	2	5	0
pēc 6.liešanas	2	2	3
pēc 7.liešanas	0	**4**	3

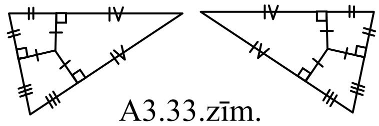
3.6.6. Ievērosim, ka tad, ja torte būtu vienādsānu trijstūris, nekādas problēmas nerastos – to uzreiz varētu ievietot pagatavotajā kastē. Kāda izšķiroša apstākļa dēļ šajā gadījumā var iztikt bez tortes sagriešanas? Acīmredzot tāpēc, ka vienādsānu trijstūrim ir simetrijas ass. Viegli pārliecināties, ka jebkuras formas torti, kurai ir simetrijas ass, var ievietot kastē, kas ir tās spoguļattēls.

Tātad mūsu uzdevums – sagriezt torti tādās daļās, kurām būtu simetrijas ass (piemēram, vienādsānu trijstūros). To var izdarīt, sagriežot vispirms trijstūri divos taisnleņķa trijstūros un pēc tam katru taisnleņķa trijstūri – divos vienādsānu trijstūros (novelkot mediānu no taisnā leņķa virsotnes jeb savienojot taisnā leņķa virsotni ar hipotenūzas viduspunktu). Tādejādi torte jāsagriež 4 daļās (skat. A3.32. zīm.).



A3.32.zīm.

Torti var griezt arī 3 daļās, ja trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru savieno ar tās pieskaršanās punktiem trijstūra malām; arī tad 3 iegūtajiem četrstūriem ir simetrijas ass (skat. A3.33. zīm.).

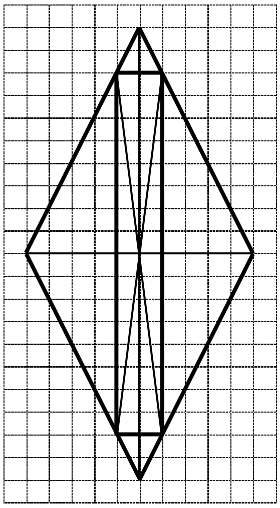


A3.33.zīm.

3.6.7. Jā, tā var gadīties. Viens no piemēriem, kādi var būt šie četrstūri, skat., A3.34. zīm.

Redzam, ka ārējā četrstūra (romba) diagonāļu garumu summa ir $10 + 20 = 30$ vienības.

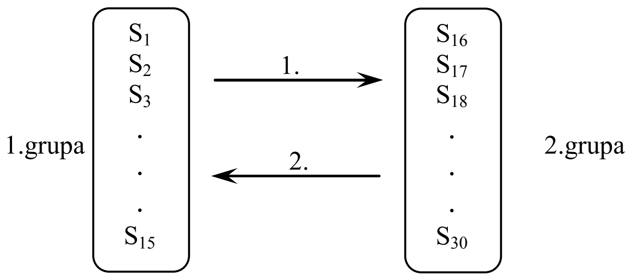
Iekšējais četrstūris ir taisnstūris, kura malu garumi ir 2 un 16 vienības. Tā kā visi taisnstūra leņķi ir 90°, katra diagonāle taisnstūri sadala divos taisnleņķa trijstūros. Zinām, ka taisnleņķa trijstūra hipotenūza (mala pret taisno leņķi) ir garāka par pārējām divām trijstūra malām. Tā kā iekšējā četrstūra diagonāles ir vienādas, un tās ir šo taisnleņķa trijstūru hipotenūzas, katra no tām ir garāka nekā 16 vienības, tātad kopā ir garākas nekā 32 vienības. Tātad to summa ir lielāka nekā ārējā četrstūra diagonāļu garumu summa.



A3.34.zīm.

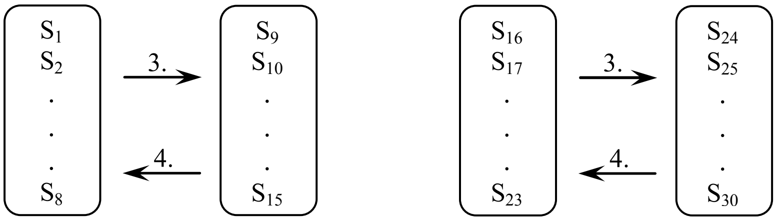
3.6.8. Vispirms parādīsim, kā skolēni var viens otru apciemot 10 dienās. Katru dienu skolēnus var iedalīt 2 grupās: vienā grupā tos skolēnus, kuri tajā dienā iet ciemos, bet otrā grupā – tos skolēnus, kuri tajā dienā sēž mājās un gaida viesus.

Apzīmēsim skolēnus ar S_1, S_2, S_3, ..., S_{30}. 1.dienā iedalīsim visus skolēnus šādās 2 grupās: pirmajā grupā skolēnus S_1, S_2, S_3, ..., S_{15} un S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}. Pirmajā dienā visi pirmās grupas skolēni ies ciemos pie 2. grupas skolēniem, bet 2. grupas skolēni sēdēs mājās. Tātad 1.dienā S_1 apciemos skolēnus S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}; skolēns S_2 apciemos skolēnus S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}, ... un skolēns S_{15} arī apciemos skolēnus S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}. Otrajā dienā pirmās un otrās grupas skolēni mainīsies lomām. 2. grupas skolēni ies ciemos pie 1. grupas skolēniem. Visu to var attēlot, kā parādīts A3.35. zīm. Ar bultiņu norādīts skolēnu ciemos iešanas virziens. Numurs virs bultas ir dienas numurs.



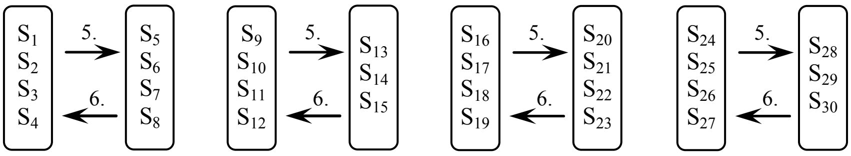
A3.35.zīm.

Pēc 2. dienas katru no skolēnu grupām sadala 2 apakšgrupās: vienā 8 skolēni, otrā – 7 skolēni. Trešajā dienā skolēni no pirmās apakšgrupas apciemo skolēnus no 2. apakšgrupas. Ceturtajā dienā skolēni no 2. apakšgrupas apciemo 1. apakšgrupas skolēnus. 3. un 4. dienas viesošanās parādīta A3.36. zīm.



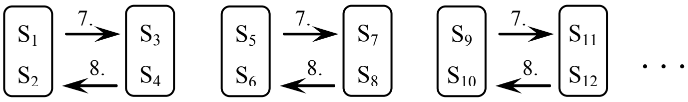
A3.36.zīm.

Pēc 4. dienas katru no esošajām skolēnu grupām atkal sadala 2 apakšgrupās. Piektajā dienā no katras grupas 1. apakšgrupas skolēni dodas ciemos pie 2. apakšgrupas skolēniem. Sestajā dienā iet ciemos 2. apakšgrupa (skat. A3.37. zīm.).



A3.37.zīm.

Pēc 5. dienas katru no esošajām grupām atkal sadala 2 grupās – pa 2 vai 1 skolēnam. Ciemošanās 7. un 8. dienā parādīta A3.38. zīm.

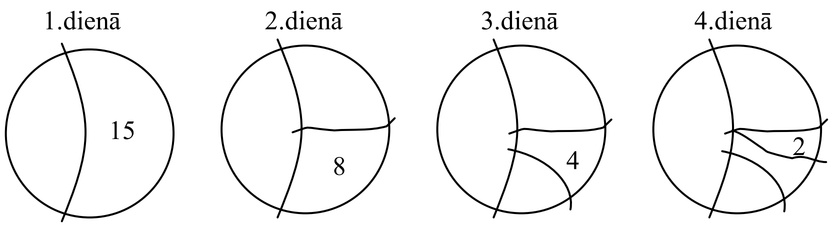


A3.38.zīm.

Pēc 8. dienas katrā grupiņā nav vairāk par 2 skolēniem. Tāpēc 9. un 10. dienā tie viens otru var apciemot. Līdz ar to esam pierādījuši, ka visi skolēni var cits citu apciemot 10 dienās.

Tagad pieradīsim, ka četrās dienās visi skolēni viens otru nevar apciemot. Pirmajā dienā viena grupa skolēnu iet ciemos, otra sēž mājās. Lielākajā no abām grupām G_1 ir vismaz 15 skolēni (jo, ja abās būtu tikai 14, tad skolēnu skaits nevarētu pārsniegt $2 \cdot 14 = 28,$ bet dots, ka ir 30 skolēni). Izvēlēsimies no šīs grupas 15 skolēnus un skatīsimies, ko viņi var darīt 2. dienā.

Skaidrs, ka tos atkal var iedalīt 2 grupās – vieni iet ciemos, bet citi sēž mājās. Lielākajā no grupiņām G_2 ir vismaz 8 skolēni (jo, ja abās būtu tikai 7, tad skolēnu skaits grupiņā būtu $2 \cdot 7 = 14,$ nevis 15). Izvēlēsimies no šīs grupiņas 8 skolēnus un skatīsimies, ko viņi var darīt 3. dienā. Tos atkal var iedalīt 2 grupiņās – vieni sēž mājās, citi iet ciemos. Lielākajā grupiņā G_3 ir vismaz 4 skolēni. Izvēlamies no tās 4 skolēnus. Tad ceturtajā dienā viena grupiņa iet ciemos, otra – sēž mājās. Lielākajā no grupiņām G_4 ir vismaz 2 skolēni. Tātad 2 skolēni 4. dienā atrodas vienā grupiņā G_4, 3. dienā atrodas grupiņā G_3, 2. dienā – grupiņā G_2 un 1. dienā – grupiņā G_1. Tas nozīmē, ka gan 1., gan 2., gan 3., gan 4. dienā, viņi vienlaicīgi vai nu sēž mājās, vai arī iet ciemos, un tāpēc nevar viens otru apciemot (skat. A3.39. zīm.).



A3.39.zīm.

3.6.9. Šādu konstrukciju iespējams veikt dažādos veidos. Sniegsim vienu no iespējamām konstrukcijas gaitām.

1) Apzīmēsim dotā leņķa virsotni ar O un atliksim uz leņķa malām nogriežņus $OB = OA$ (skat. A3.40. zīm.).

2) Uzzīmēsim riņķa līniju ar centru punktā O un rādiusu OA;

3) Uz riņķa līnijas ar cirkuli atliksim punktu C tā, ka $OB = CB$. Skaidrs, ka tad arī $OC = CB$. Tātad izveidojas vienādmalu trijstūris OBC.

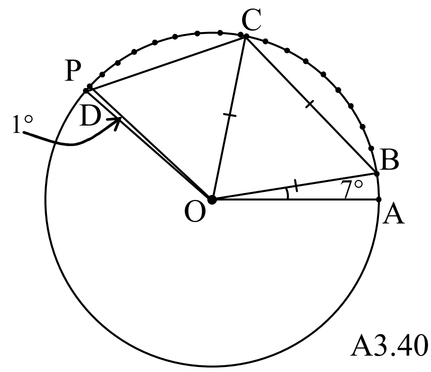
4) Līdzīgi konstruējam vienādmalu trijstūri OCD.

5) Skaidrs, ka $\angle BOD = 2 \cdot 60° = 120°$.

6) Ievērojam, ka $120° - 7° \cdot 17 = 120° - 119° = 1°$.

7) Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām, ir vienādi, tad, sākot ar punktu B atliekot uz riņķa līnijas 17 reizes vienādas hordas (līdz punktam P), iegūsim, ka $\angle BOP = 7° \cdot 17 = 119°$.

8) Tātad $\angle POD = 120° - 119° = 1°$. Tātad esam konstruējuši $\angle POD = 1°$.



A3.40.zīm.

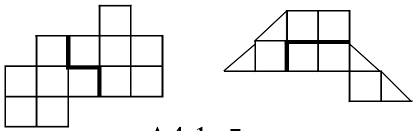
3.6.10. Izveidosim metodi, kā detektīvs var noķert laupītāju jebkuram salu skaitam valstī.

Pieņemsim, ka sākumā laupītājs atrodas salā A. Vispirms detektīvs aizbrauc uz salu A (pēc uzdevuma nosacījumiem to var izdarīt, bet ceļā, iespējams, jāpatērē vairāk nekā viena diena). Ja, nonācis salā A, detektīvs sastop tur laupītāju, viņš var to arestēt. Tomēr pastāv arī iespēja, ka laupītājs no salas A ir aizbraucis. Tādā gadījumā detektīvs dodas viņam pakaļ pa tieši tādu pašu maršrutu, pa kādu braucis laupītājs (šo maršrutu viņš uzzinājis laikā, kad brauca uz salu A, jo visu laiku zināja, kur katrā brīdī atrodas laupītājs). Tā kā laupītājs piektdienās nebrauc, tad katru piektdienu detektīvs tuvojas tam par vienas dienas braucienu. Tāpēc agri vai vēlu detektīvs laupītāju panāks.

4. Latvijas 22. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

4.5. Piektā klase

4.5.1. Skatīt, piemēram, A4.1.zīmējumu.



A4.1.zīm.

4.5.2. Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Skatīt, piemēram, A4.2.zīmējumu.

4	1	7
8	5	2
3	9	6

A4.2.zīm.

Pārbaudi patstāvīgi, ka katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 3.

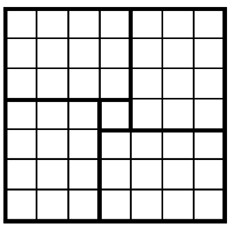
4.5.3. No uzrakstītajiem skaitļiem tieši 3 skaitļi (12; 15; 18) dalās ar 3. Pastāv trīs iespējas:

a) nekādi divi no tiem neatrodas blakus. Tātad meklējamo reizinājumu skaits ir 6 – katrs no trijiem skaitļiem dod divus reizinājumus;

b) divi no tiem ir blakus, viens – „citur"; meklējamo reizinājumu skaits ir 5, jo reizinātājs, kas atrodas „citur", dod divus reizinājumus, bet tie divi, kas atrodas blakus, kopā dod vienu reizinājumu un katrs vēl vienu reizinājumu ar citu skaitli;

c) visi tie ir pēc kārtas; meklējamo reizinājumu skaits ir 4, jo ikkatri divi savā starpā dod 2 reizinājumus un vēl „malējie" katrs pa vienam.

4.5.4. Sadalām doto 7×7 rūtiņu kvadrātu taisnstūros 3×4 rūtiņas, kā parādīts A4.3.zīmējumā. Šajos četros taisnstūros kopā iekrāsotas ne vairāk kā 11 rūtiņas. Pieņemsim, ka <u>nav</u> iespējams atrast tādu 3×4 rūtiņu taisnstūri, kurā iekrāsotas mazāk kā trīs rūtiņas. Tātad katrā no A4.3.zīmējumā attēlotajiem taisnstūriem ir iekrāsotas vismaz 3 rūtiņas, kopā iekrāsotas vismaz $4\cdot3=12>11$. Rodas pretruna ar pieņēmumu, tātad noteikti atradīsies tāds taisnstūris, kurā nokrāsotas ne vairāk kā 2 rūtiņas.



A4.3.zīm.

			x			
		x				x
	x				x	
x				x		
			x			
		x				x
	x				x	

A4.4.zīm.

Otrajā gadījumā apgalvojums var nebūt spēkā. Iekrāsosim 7×7 rūtiņu kvadrātu, kā parādīts A4.4.zīmējumā. Pārliecinieties patstāvīgi, ka, lai arī kā tiktu novietots 3×4 rūtiņu kvadrāts, tajā būs iekrāsotas tieši trīs rūtiņas.

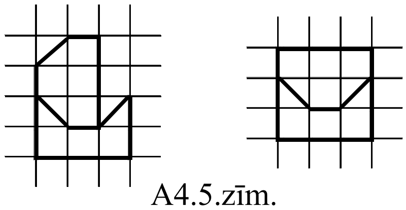
4.5.5. Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Ievērojam, ka tie skaitļi, kas sākotnēji atrodas vienā rindā, arī pēc jebkuras rindiņu un kolonnu maiņas atradīsies vienā rindā (tie var būt novietoti citā secībā); līdzīgi arī skaitļi, kas sākotnēji atrodas vienā kolonnā, jebkuras maiņas rezultātā atradīsies vienā kolonnā.

Aplūkojam skaitļus 7 un 8. Sākotnēji tie atrodas vienā rindā, bet maiņu rezultātā ir jāpanāk, ka tie atrodas dažādās rindās, taču tas nav iespējams. Tāpēc no situācijas pirmajā tabulā nevar iegūt otrās tabulas situāciju.

4.6. Sestā klase

4.6.1. Jā, skatīt, piemēram, A4.5.zīmējumu.



A4.5.zīm.

4.6.2. Atceramies, ka, lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai ir jādalās ar 9.

Pieņemsim, ka meklētājā skaitlī ciparu „7” skaits ir n, tātad skaitļa ciparu summa ir $7n$. Lai tā dalītos ar 9, skaitlim n jādalās ar 9, tātad mūsu skaitlī ir deviņi septītnieki un viena nulle. Nulle var būt jebkurā pozīcijā, izņemot pirmo. Tātad pavisam ir **9 tādi skaitļi**.

4.6.3. Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Ja to varētu izdarīt, tad skaitlis 5 varētu būt blakus tikai ar 1 un ar 9, 4 – tikai ar 8 un 9, 6 – tikai ar 1 un 2. Tāpēc izvietojumam būtu jābūt tādam, kā redzams A4.6.zīmējumā.

5	1	6
9		2
4	8	

A4.6.zīm.

Vienā no divām tukšajām rūtiņām noteikti jāievieto 3, bet tad tas noteikti būs blakus skaitlim 2, rodas pretruna.

4.6.4. Atbilde: Nē.

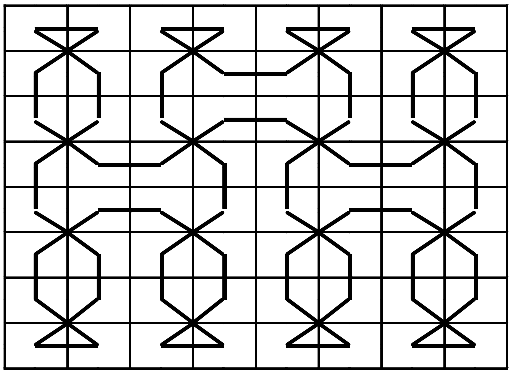
Risinājums: Ja šāds naturāls skaitlis būtu, apskatām mazāko no tiem, apzīmējam ar x. Ir divas iespējas:

a) x dalās ar 10. Tad, nosvītrojot 0 skaitļa x galā, iegūstam skaitli $\frac{x}{10}$ ar tādu pašu īpašību; pretruna, jo x nav mazākais;

b) x nedalās ar 10. Tad skaitlis $(x-111)$ ir ar tādu pašu īpašību – pretruna, jo x nav mazākais.

Piezīme: Iespējami daudzi citi atrisinājumi, analizējot dalīšanas procesu.

4.6.5. Jā, var. Skatīt, piemēram, A4.7.zīmējumu.



A4.7.zīm.

4.7. Septītā klase

4.7.1. Atbilde: 6 pirmskaitļi.

Risinājums: No 1 līdz 12 ieskaitot ir 5 pirmskaitļi, no 2 līdz 13 ieskaitot ir 6 pirmskaitļi – 2, 3, 5, 7, 11 un 13.

Aplūkosim intervālu $[n; n+11], n>2$. Šajā intervālā, kas sastāv no 12 skaitļiem, katrs otrais skaitlis ir pāra skaitlis, kas nav 2, tātad nav pirmskaitlis. Tātad pirmskaitļu skaits nepārsniedz $12-6=6$.

4.7.2. Pierādīsim no pretējā – pieņemsim, ka ir divas taisnes, kas sakrīt. Tātad tās kopā satur vismaz 3 no punktiem *A*; *B*; *C*; *D*.

Ja tās kopā satur 3 no četriem punktiem, tad ar divām sakrītošajām taisnēm, sakrīt arī trešā taisne.

Ja tās kopā satur visus četrus punktus *A*; *B*; *C*; *D*, tad sakrīt visas 6 taisnes.

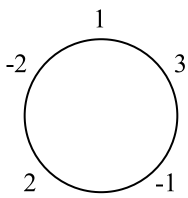
Abos gadījumos ir iegūtas pretrunas, tātad pieņēmums ir nepareizs un seko, ka visas sešas taisnes ir dažādas.

4.7.3. Apzīmējam uzrakstītos skaitļus pēc kārtas ar $x; y; z; t; v$. Tad skaitļi $a; b; c; d; e$ ir xy, yz, zt, tv, vx, un

$abcde = (xyztv)^2$.   (*)

a) Nē, nevar. Skaitļi $x; y; z; t; v$, sakārtoti pēc absolūtās vērtības jeb moduļa, ir vismaz $\pm 1; \pm 2$ un (+3) vai (–3), tāpēc $(xyztv)^2 > 4$.

b) Jā, var. Skatīt A4.8.zīmējumu.



A4.8.zīm.

c) Nevar, jo, atbilsotši (*), *abcde* ir vesela skaitļa kvadrāts, kas nevar būt negatīvs.

4.7.4. Ja starp apskatāmajiem skaitļiem ir divi tādi, kam pēdējie cipari vienādi, tad to starpība dalās ar 10. **Ja tādu nav,** tad sadalām skaitļus 5 grupās atbilstoši to pēdējiem cipariem:

1 vai 9

2 vai 8

3 vai 7

4 vai 6

5

Skaitļu ir 6, grupu – tikai piecas. Tātad, pēc Dirihlē principa, ja katrā grupā būtu ne vairāk kā viens skaitlis, tad skaitļu varētu būt ne vairāk kā pieci, bet skaitļu ir 6; noteikti divi skaitļi nonāk vienā grupā. Tāpēc to summa dalās ar 10.

4.7.5. Ja $a = b$, process var turpināties bezgalīgi. Pieņemsim, ka $a \neq b$. Ievērosim, ka $(2a-b)+(2b-a)=a+b$ un $(2a-b)-(2b-a)=3(a-b)$. Tātad abu uzrakstīto skaitļu summa nemainās, bet to starpība (pēc absolūtās vērtības) katrā gājienā aug 3 reizes. Skaidrs, ka abi skaitļi nevar neierobežoti palikt pozitīvi.

4.8. Astotā klase

4.8.1. Pieņemsim, ka $a = c$ un aplūkojam funkciju $ax+b$ un $cx+d$ grafikus. Tā kā *a* un *c* nosaka taisnes virzienu un $a = c$, tad to grafiki ir paralēlas taisnes un $y = ax+b$ vai $y = cx+d$ visiem *x*; tātad *y* ir lineāra funkcija.

Ja $a \neq c$, minētie grafiki nav paralēlas taisnes, tātad tie krustojas; no tā seko, ka *y* grafiks ir lauzta līnija, un tātad *y* nav lineāra funkcija.

4.8.2. No visiem apgalvojumiem seko, ka *x* ir pāra skaitlis, tātad tā arī ir, jo ir vismaz viens patiess apgalvojums; no tā seko, ka *x* dalās ar 2, kā jebkurš pāra skaitlis. Tāpēc apzīmējam $x = 2y$. Tātad $x^3 = 2y \cdot 2y \cdot 2y = 8y^3$. Acīmredzami, ka $8y^3$ jeb x^3 dalās ar 2, ar 4 un ar 8, jo viens no reizinātājiem – 8 dalās gan ar 2, gan 4, gan 8. Tāpēc **vienīgais** aplamais apgalvojums var būt „x^3 dalās ar 16”. Tā var gadīties, piemēram, ja $x = 2$.

4.8.3. 1) ΔAOC vienādsānu, jo $AO = CO$;

2) Apzīmējam $\angle ACO = x$ (skatīt A4.9.zīmējumā), tātad arī $\angle CAO = x$;

3) $\angle AOC = 180° - 2x$;

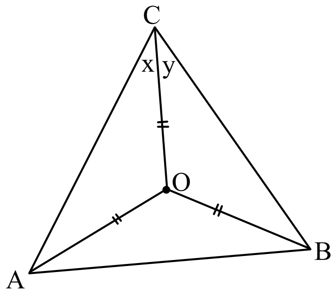
4) Apzīmējam $\angle BCO = y$ (skatīt A4.9.zīmējumā), tātad arī $\angle CBO = y$;

5) $\angle BOC = 180° - 2y$.

6) Tāpēc $\angle AOB = 360° - \angle AOC - \angle BOC =$

$= 360° - (180° - 2x) - (180° - 2y) =$

$= 2x + 2y = 2(x+y) = 2 \cdot \angle ACB$, k.b.j.



A4.9.zīm.

4.8.4. a) Salīdzinām ik divas monētas savā starpā. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu atliekam malā, bet palikušo salīdzinām ar nākošo, utt. Kad malā atliktas 2009 monētas (t.i. pēc 2009 svēršanām), vienīgā palikusī ir smagākā no visām.

Līdzīgi atrodam vieglāko monētu no visām.

b) Sadalām 2010 monētas 1005 pāros. Katra pāra monētas salīdzinām savā starpā un katra pāra vieglākās monētas liekam vienā kaudzītē un katra pāra smagāko monētu – otrā. Pēc tam līdzīgi kā a) punktā ar 1004 svēršanām atrodam „smagāko no smagajām" un ar 1004 svēršanām – „vieglāko no vieglajām". Tās arī ir meklētās. Patērētas $1005+1004+1004=3013<4000$ svēršanas.

Piezīme: var pierādīt, ka ar mazāku svēršanu skaitu uzdevumā prasīto garantēti izdarīt nevar.

4.8.5. Pieņemam pretējo – visi dotie skaitļi pārsniedz $\frac{1}{4}$. Tad $x(1-y)>\frac{1}{4}$, $y(1-z)>\frac{1}{4}$, $z(1-t)>\frac{1}{4}$, $t(1-x)>\frac{1}{4}$. Sareizinām šīs nevienādības $x(1-y)\cdot y(1-z)\cdot z(1-t)\cdot t(1-x)>\left(\frac{1}{4}\right)^4$. Sagrupējam reizinātājus, iegūstot nevienādību $(x\,(1-x))\,(y\,(1-y))\,(z\,(1-z))\,(t\,(1-t))>\left(\frac{1}{4}\right)^4$.

Bet $0<x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\le\frac{1}{4}$, $0<y(1-y)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-y\right)^2\le\frac{1}{4}$, $0<z(1-z)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-z\right)^2\le\frac{1}{4}$, $0<t(1-t)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\le\frac{1}{4}$; iegūstam pretrunu.

4.9. Devītā klase

4.9.1. Doto nevienādību identiski pārveidojam, izmantojot summas un starpības kvadrātu saīsinātās reizināšanas formulas.

$$x^2-2xy+y^2+2x-2y+1\ge 0$$

$$(x-y)^2+2(x-y)+1\ge 0$$

$$(x-y+1)^2\ge 0.$$

Izteiksmi kāpinot kvadrātā vienmēr iegūstam nenegatīvu vērtību, tātad iegūtā nevienādība ir patiesa, no kā seko, ka arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

4.9.2. Tā kā mazāku summu veido mazāki saskaitāmie un attiecīgi lielāku summu – lielāki, tad $x+y=32$ (1), $x+z=36$ (2), $z+v=48$ (3), $t+v=51$ (4). No (2) atņemot (1), iegūstam

$z-y=4$ un no (4) atņemot (3), iegūstam $t-z=3$. No šīm abām sakarībām $t-y=7$.
Tāpēc $x+t=(x+y)+(t-y)=32+7=39$. Tāpēc trešā mazākā summa nevar būt $x+t$.
Tātad $37=y+z$.

Izsakām $2x=(x+y)+(x+z)-(y+z)=32+36-37=31$.

No šejienes $x=15\frac{1}{2}$, $y=16\frac{1}{2}$, $z=20\frac{1}{2}$, $v=27\frac{1}{2}$, $t=23\frac{1}{2}$.

Pārbaudām, vai izpildās uzdevuma nosacījumi:

$$x+y=15\frac{1}{2}+16\frac{1}{2}=32,$$

$$x+z=15\frac{1}{2}+20\frac{1}{2}=36,$$

$$y+z=16\frac{1}{2}+20\frac{1}{2}=37,$$

$$z+v=20\frac{1}{2}+27\frac{1}{2}=48,$$

$$t+v=23\frac{1}{2}+27\frac{1}{2}=51.$$

Tātad atrastās vērtības ir vienīgās iespējamās.

4.9.3. 1) Tā kā $AB=BC$, $BJ=CK$ un $\angle ABJ=90°+\angle CBJ=90°+\angle DCK=\angle BCK$, tad $\Delta ABJ=\Delta BCK$ (pēc pazīmes $m\ell m$).

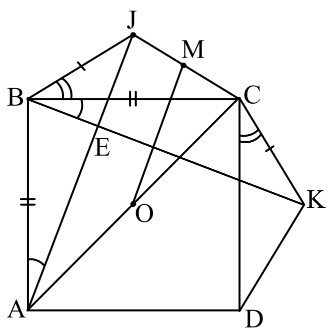
2) Apskatām ΔBEJ un ΔBCK iekšējo leņķu summas:

$180°=\angle BJE+\angle BEJ+\angle EBC+\angle CBJ$,

$180°=\angle CKB+\angle EBC+\angle BCD+\angle DCK$.

3) Tā kā $\angle BJE=\angle CKB$ (vienādu trijstūru atbilstošie leņķi), $\angle CBJ=\angle DCK$ (vienādu vienādsānu trijstūru leņķi pie pamata) un $\angle BCD=90°$ (jo $ABCD$ ir kvadrāts), tad $\angle BEJ=90°$. Tāpēc $AJ\perp BK$.

4) $OM \parallel AJ$ kā viduslīnija trijstūrī ACJ ($JM=MC$ pēc dotā un $OA=OC$, jo kvadrāta diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm). Tāpēc arī $OM\perp BK$, kas bija jāpierāda.



A4.10.zīm.

4.9.4. Atbilde: Uzvar pirmais spēlētājs.

Risinājums: Pirmais „p” ņem 3. Otrajam „o” noteikti jāņem 4, jo pretējā gadījumā „p” paņems 4, izveidos skaitli 34 un uzvarēs. Tagad jau skaidrs, ka „o” ar otro gājienu neuzvarēs, jo ar 4 atlikušajām kartiņām nevar izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 17.

Tālāk „p” ņem 1; „o” jāņem 5, lai „p” nevar izveidot skaitli 51 vai 6, lai „p” nevar izveidot 136. Lai arī ko izvēlas „o”, trešajā gājienā „p” varēs izvēlēties kartiņu, lai kopā ar savām kartiņām izveidotu vajadzīgo skaitli.

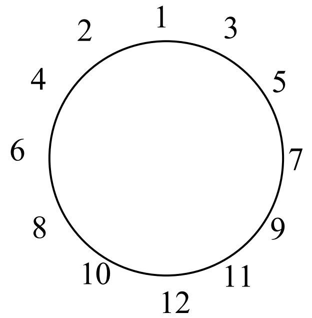
4.9.5. Ievērojam, ka $2x-5=2(x+1)-7=2(x+2)-9=2(x+3)-11$. Tā kā x dalās ar 5, tad $2x$ dalās ar 5 un arī starpība $2x-5$ dalās ar 5, jo gan mazināmais, gan mazinātājs dalās ar 5. Līdzīgi pierāda, ka $2x-5$ dalās ar 7, ar 9, ar11. Tā kā 5, 7, 9, 11 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad $2x-5$ dalās ar $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=3465$. Tā kā $1\le x\le 2009$, tad $2\le 2x\le 4018$ un $-3\le 2x-5\le 4013$. Šajās robežās ar 3465 dalās tikai 0 un 3465. Bet $2x-5=0$ naturālam x nav iespējams, tāpēc $2x-5=3465$ un vienīgais naturālais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 1735.

5. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes
2. (Rajona) kārta

5.5. Piektā klase

5.5.1. Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Piemēram, skatīt A5.1.zīmējumu.



A5.1.zīm.

Skaitlim 1 blakus var atrasties vienīgi skaitļi 2 un 3, tātad 2 rakstām pa kreisi no 1, bet 3 – pa labi. Pa kreisi turpinām rakstīt visus pāra skaitļus un pa labi – visus nepāra skaitļus. Pārliecināmies, ka blakus skaitlim 12 atrodas skaitļi 10 un 11, jo tie ir vienīgie skaitļi, kas var atrasties blakus skaitlim 12.

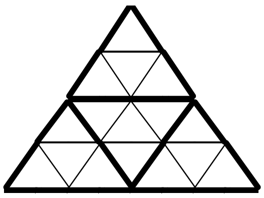
5.5.2. Andra „kods” var būt divciparu, trīsciparu vai četrciparu atkarībā no tā, no cik cipariem sastāv dienas un mēneša pieraksts. Ja kods sastāv no diviem cipariem, tad noteikti tā pirmais cipars norāda dienu un otrais cipars norāda mēnesi, jo gan dienas, gan mēneša pierakstam atbilst vismaz viens cipars. Secinām, ka divciparu kods var būt viena vienīga datuma pieraksts. Līdzīgi arī kods, kurš sastāv no četriem cipariem var būt vienīgi viena datuma pieraksts, jo gan dienas, gan datuma pieraksts sastāv no augstākais diviem cipariem, kur pirmie divi sastāda dienas pierakstu un otrie divi – mēneša pierakstu. Atliek apskatīt kodus, kuri sastāv no 3 cipariem.

Lai kods būtu vairāk kā viena datuma pieraksts, tam jābeidzas vai nu ar ciparu „1” vai ar ciparu „2” (novembris – 11 un decembris – 12). Priekšpēdējais cipars var būt vienīgi „1”. Tā kā janvārī ir 31 diena, iegūstam 111; 211 un 311. Tā kā februārī ir augstākais 29 dienas, iegūstam 112 un 212.

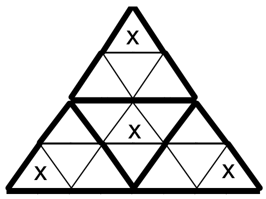
Tātad pavisam ir pieci šādi naturāli skaitļi, kas ir vairāk kā viena datuma pieraksti Andra sistēmā.

5.5.3. Atbilde: 4 trijstūrīšus.

Risinājums: Doto figūru sadalīsim 4 daļās, kā parādīts A5.2.zīmējumā un ievērojam, ka katrā izdalītajā daļā drīkst nokrāsot augstākais vienu trijstūrīti (skatīt A5.3.zīmējumu). Tāpēc maksimums ir 4 (piemēram, stūra un centrālā rūtiņa).



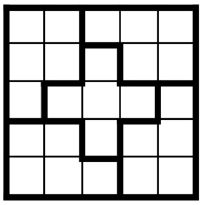
A5.2.zīm.



A.5.3.zīm.

5.5.4. Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Skatīt, piemēram, A5.4.zīmējumu.



A5.4.zīm.

5.5.5. Atbilde: 3 stundās.

Risinājums: Rūķīšus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Ja rūķīši runā šādi:

1. stundā - *AB*, *CD*, *EF*, *GH*;
2. stundā - *AC*, *BD*, *EG*, *FH*;
3. stundā - *AE*, *BF*, *CG*, *DH*,

tad vajadzīgais tiek sasniegts.

Ar 2 stundām noteikti nepietiek. Katru jaunumu pēc vienas stundas var zināt augstākais 2 rūķīši, piemēram, rūķīša *A* jaunumu pēc vienas stundas zina pats rūķītis *A* un rūķītis, ar kuru sarunājās *A* – rūķītis *B*. Šo pašu jaunumu pēc divām stundām zina augstākais 4 rūķīši – klāt vēl tādi divi rūķīši, ar kuriem otrās stundas laikā sarunājās *A* un *B*. Tā kā rūķīšu ir $8>4$, tad ar 2 stundām noteikti nepietiek.

5.6. Sestā klase

5.6.1. a) Atbilde: Nē, nevar gadīties, ka katrs rūķīts piedalījās tieši triju kastu nešanā.

Risinājums: Pieņemsim, ka kastes bija skaitā *n* (*n* ir naturāls skaitlis, jo apzīmē skaitu). Tā kā katru kasti nesa tieši 2 rūķīši, tad teiksim, ka *piedalīšanos skaits* bija $2\cdot n$. Tāpat *piedalīšanos skaitu* varam izteikt kā $5\cdot 3$, jo katrs no 5 rūķīšiem piedalījās tieši triju kastu nešanā. Bet skaidrs, ka naturālam skaitlim *n* nevar pastāvēt vienādība $2\cdot n=3\cdot 5$ jeb $2\cdot n=15$, tāpēc nevar gadīties, ka katrs rūķītis piedalījās tieši triju kastu nešanā.

b) Atbilde: Jā, tas varētu notikt, ja kastu nešanā piedalītos tieši četri rūķīši.

Risinājums: Tā kā katrs no 4 rūķīšiem piedalās tieši triju kastu nešanā, tad *nešanu* ir skaitā 12. Tā kā katrai kastei izmanot 2 *nešanas*, iegūstam, ka kastu skaits ir 6. Viens no veidiem kā to realizēt, parādīts A5.5.zīmējumā.

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
R1	X	X	X			
R2	X			X	X	
R3		X		X		X
R4			X		X	X

A.5.5.zīm.

5.6.2. a) Atbilde: Jā, var.

Piemērs: $10\cdot 17-13\cdot 13=1$, kur $a=10$ un $b=13$.

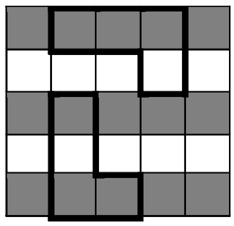
b) Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Gan 39, gan 91 dalās ar 13, tātad gan skaitļi $a \cdot 39$ un $b \cdot 91$, gan arī šo skaitļu starpība dalās ar 13. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar 13, tad ar 13 ir jādalās arī vienādības labajai pusei, taču 2 ar 13 nedalās.

5.6.3. Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Lai visu ierakstītos skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, nepāra skaitļus tabulā nepieciešams ierakstīt nepāra skaitā. Tāpat arī L-figūrā nepāra skaitļus nepieciešams ierakstīt nepāra skaitā.

Iekrāsojot figūru kā parādīts A5.6.zīmējumā, ievērojam, ka, lai arī kā tiktu novietota L-figūra, viena rūtiņa atradīsies uz vienas krāsas laukuma un trīs rūtiņas uz otras krāsas laukuma.



A5.6.zīm.

Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, katrā iekrāsotajā A5.6. zīmējuma rūtiņā nepieciešams ierakstīt nepāra skaitli un katrā neiekrāsotajā – pāra skaitli. Viens no atrisinājumiem parādīts A5.7.zīmējumā.

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
1	1	1	1	1

A5.7.zīm.

5.6.4. Atbilde: 5 skolēni.

Risinājums: Turnīrā kopā izspēlē 45 partijas un katrā partijā tiek izcīnīts viens pukts, tātad visa turnīra laikā komandas kopā izcīna 45 punktus.

Ja lielmeistaru būtu vismaz 7, tad viņu kopējais punktu skaits būtu vismaz $7 \cdot 7 = 49$ – pretruna.

Ja lielmeistaru būtu 6, tad viņiem kopā jāizcīna vismaz $6 \cdot 7 = 42$ punkti; bet atlikušie 4 dalībnieki jau savā starpā vien izcīna 6 punktus. Tātad kopā būtu vismaz 48 punkti; tā ir pretruna.

Tātad lielmeistaru skaits nevar būt vairāk par 5. Pieci lielmeistari var būt – piemēram, ja katrs no viņiem uzvar visus citus dalībniekus, bet savā starpā lielmeistari spēlē neizšķirti; tad katrs iegūst 7 punktus.

5.6.5. Atbilde: Mazākais stundu skaits ir 5.

Risinājums: Rūķīšus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*. Ja rūķīši runā šādi:

1. stundā - *HI*;
2. stundā - *AB*, *CD*, *EF*, *GH*;
3. stundā - *AC*, *BD*, *EG*, *FH*;
4. stundā - *AE*, *BF*, *CG*, *DH*,
5. stundā - *HI*;

tad vajadzīgais tiek sasniegts.

Ar 4 un mazāk stundām nepietiek. Pirmajā stundā vismaz viens rūķītis nerunā (pieņemsim, ka tas ir rūķītis *A*), jo rūķīšu skaits ir nepāra, bet sarunas notiek katru divu rūķīšu starpā. Tātad rūķīša *A* jaunumu pēc pirmās stundas zina tikai viens rūķītis – pats *A*. Pēc otrās stundas to zina augstākais 2 rūķīši – *A* un tas rūķītis, ar kuru viņš sazvanījās 2. stundas laikā (pieņemsim, ka tas ir rūķītis *B*). Pēc trešās stundas rūķīša *A* jaunumu zina augstākais četri rūķīši – *A*, *B* un tie divi tādi rūķīši, ar kuriem 3. stundas laikā sazvanījās *A* un *B*. Pēc ceturtās stundas šo jaunumu zina augstākais astoņi rūķīši, taču rūķīšu pavisam ir 9.

5.7. Septītā klase

5.7.1. **a)** Ar katru gājienu uzrakstīto skaitļu skaits samazinās par 1, jo katrā gājienā divu skaitļu vietā tiek uzrakstīts viens skaitlis. Tā kā tas dilst no 2009 līdz 1, tad pavisam tiks izdarīti $2009-1=2008$ gājieni.

b) Sākotnēji uzrakstīto skaitļu summa bija 2009. Katrā gājienā visu uzrakstīto skaitļu summa paliek nemainīga. Tāpēc pēdējais palikušais skaitlis būs 2009.

5.7.2. Ja zināms, ka $x^3=y^4$, tad vienādības abas puses kāpinot ceturtajā pakāpē arī iegūstam patiesu vienādību. Tāpēc $\left(x^3\right)^4=\left(y^4\right)^4$ jeb $x^{12}=y^{16}$.

Iegūto vienādību izdalām ar otro doto vienādību $\frac{x^{12}}{x^{11}}=\frac{y^{16}}{y^{15}}$ (to drīkst darīt, jo *x*, *y* – pozitīvi skaitļi, tātad nav vienādi ar nulli).

Izmantojot pakāpju īpašības iegūstam, ka $x=y$. Ievietojam pirmajā vienādībā *y* vietā *x*, iegūstam $x^3=x^4$. Vienīgais pozitīvais skaitlis, kam tas spēkā, ir 1. Tātad $x=1$ un $y=1$.

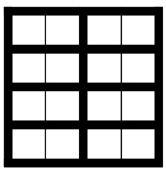
5.7.3. Atbilde: Tādu skaitļu ir 15.

Risinājums: Ievērojam, ka $343=7\cdot7\cdot7$. Tā kā skaitlis $(x+1)(x+2)(x+3)$ dalās ar 343, tad skaitlim $(x+1)(x+2)(x+3)$ jādalās arī ar katru no skaitļa 343 dalītājiem, tātad vismaz vienam no reizinātājiem $x+1$; $x+2$; $x+3$ jādalās ar 7.

Skaitļi, kas dalās ar 7, atšķiras viens no otra vismaz par 7 (apskatām, piemēram, skaitļus, kas dalās ar 7: 7, 14, 21, 35, 42, 49, 56, 63 utt.) Savukārt $x+1$; $x+2$ un $x+3$ ir trīs pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, Tātad tieši vienai iekavai no $(x+1)(x+2)(x+3)$ dalās ar 343. Šī iekava ir viens no skaitļiem $343\cdot1$; $343\cdot2$; $343\cdot3$; $343\cdot4$; $343\cdot5$, jo jau $343\cdot6>2010$. Minētā iekava var būt gan pirmais reizinātājs, gan otrais, gan trešais, tāpēc meklējamo skaitļu ir $5\cdot3=15$.

5.7.4. Atbilde: 32.

1.risinājums: Kā redzam A5.8.zīmējumā, 32 nogriežņus var nokrāsot. Katrai no A5.9.zīmējuma atzīmētajām rūtiņām var nokrāsot ne vairāk kā 3 malas; pieskaitot vēl 8 atlikušos nogriežņus uz kvadrāta kontūra, iegūstam, ka $8\cdot3+8=32$ tiešām ir maksimums.



A5.8.zīm.

x		x	
	x		x
x		x	
	x		x

A5.9.zīm.

2.risinājums: Pieņemsim, ka sākumā visi režģa nogriežņi ir nokrāsoti. Tātad pavisam nokrāsoti $4\cdot5+4\cdot5=40$ nogriežņi. Lai atrisinātu uzdevumu, apskatīsim kāds mazākais daudzums nogriežņu jānodzēš, lai nevienai no rūtiņām nebūtu nokrāsotas visas malas.

Skaidrs, ka nodzēšot vienu nogriezni, tiek „sabojātas” augstākais 2 rūtiņas. Tā kā nepieciešams „sabojāt” 16 rūtiņas, tad ar mazāk kā $16:2=8$ nogriežņu dzēšanu nepietiks. Tātad paliks $40-8=32$ nogriežņi.

5.7.5. Atbilde: Mazākais stundu skaits ir 3.

Risinājums: Apzīmēsim rūķīšus ar *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Ja rūķīši runā šādi:

1. stundā - *AB*, *BE*, *CF*;
2. stundā - *AE*, *BF*, *CD*;
3. stundā - *AF*, *BD*, *CE*,

tad vajadzīgais tiek sasniegts.

Ar 2 stundām noteikti nepietiek, jo katru jaunumu pēc vienas stundas var zināt augstākais 2 rūķīši un pēc 2 stundām ne vairāk kā 4 rūķīši, taču rūķīšu pavisam ir 8.

5.8. Astotā klase

5.8.1. Atbilde: Par vienu vairāk dažādu pirmskaitļu iegūst, pirmskaitļu reizinājumā sadalot otro skaitli.

Risinājums: Pārveidojam otro skaitli, lietojot kvadrātu starpības formulu

$$(102^2-1)(103^2-1)...(199^2-1) = =(102-1)(102+1)(103-1)(103+1)...(199-1)(199+1)=$$

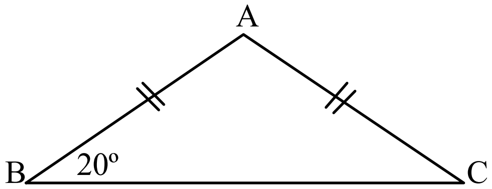
$$= 101\cdot103\cdot102\cdot104\cdot103\cdot105\cdot...\cdot198\cdot200 = =101\cdot102\cdot103^2\cdot...\cdot198^2\cdot199\cdot200.$$

Redzam, ka otrajā skaitlī, papildus rodas skaitļi 101 un 200. Skaitlis 101 ir pirmskaitlis. Sadalot pirmskaitļu reizinājumā $200=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$, ievērojam, ka jaunus pirmskaitļus skaitlis 200 nedod. Tātad otrais sakitlis, sadalot pirmskaitļu reizinājumā, dod par vienu pirmaskaitli vairāk nekā pirmais skaitlis.

5.8.2. Šķirojam 3 gadījumus atkarībā no tā, kuras 3 malas ir vienādas savā starpā.

I $AB=AC$ (skatīt A5.10.zīmējumu)

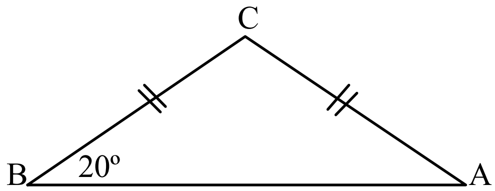
$3\cdot\mathrm{AC}=3\cdot\mathrm{AB}>\mathrm{AB}$.



A5.10.zīm.

II $AC=BC$ (skatīt A5.11.zīmējumu)

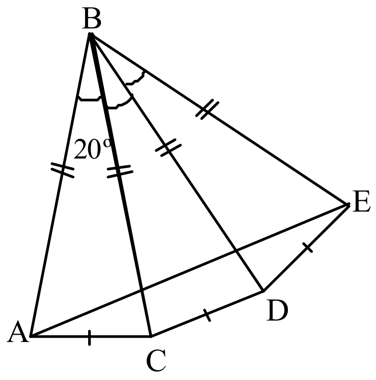
$3\cdot\mathrm{AC}>2\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{AC}+\mathrm{CB}>\mathrm{AB}$.



A5.11.zīm.

III $AB=BC$ (skatīt A5.12.zīmējumu)

Tā kā $\angle ABE = 60°$ un $BA = BE$, tad ΔABE ir vienādmalu. Tāpēc $3AC = AC + CD + DE > AE = AB$.



A5.12.zīm.

5.8.3. Uzrakstām četrciparu skaitli vispārīgā veidā kā $\overline{abcd}$, kur katrs burts atbilst vienam ciparam. To var izteikt $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Vienādības labajā pusē sadalām saskaitāmos $\overline{abcd} = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$. Uzrakstām citu četrciparu skaitli, kas sastāv no šiem pašiem cipariem un līdzīgā veidā sadalām saskaitāmajos, kur viens no saskaitāmajiem ir visu ciparu summa (noteikti citā secībā, bet saskaitāmos drīkst mainīt vietām). Saskaņā ar uzdevuma prasībā, atņemam šos skaitļus vienu no otra un ievērojam, ka saskaitāmie $(a+b+c+d)$ saīsinās. Katrs no atlikušajiem saskaitāmajiem dalās 9, jo katrs saskaitāmais satur kādu no reizinātājiem 9, 99, 999 un, ja viens no reizinātājiem dalās, tad viss skaitlis dalās ar 9. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 9, tad visa summa dalās ar 9, un šī summa ir meklētā divu skaitļu starpība.

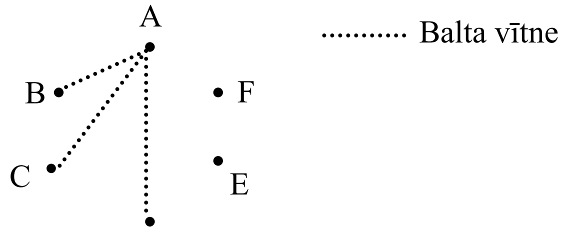
5.8.4. Atbilde: Nē, neeksistē.

Risinājums: Ja kaut viens no skaitļiem a_1, b_1, a_2, b_2 nav 0, tad x un y var izvēlēties tā, lai reizinātājs $(a_1x + b_1y + c_1)$ vai arī reizinātājs $(a_2x + b_2y + c_2)$ būtu 0. Ja viens no reizinātājiem ir 0, tad viss reizinājums – vienādības labā puse ir 0. Vienādības kreisā puse vienmēr ir pozitīva, jo to veido divu nenulles skaitļu un skaitļa 1 summa.

Pretējā gadījumā – ja $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, tad labā puse nav atkarīga no x un y vērtībām, tātad ir konstante, bet kreisā – nav, jo ir atkarīga no x un y vērtībām.

5.8.5. Lai atrisinātu uzdevumu, ir nepieciešams pierādīt, ka nav iespējams lampas savā starpā savienot tā, lai nekādas trīs lampas nebūtu savienotas ar vienas krāsas vītnēm (sacīsim: neveidojas vienas krāsas trijstūris).

Apzīmējam lampas ar A, B, C, D, E, F. Lampa A ir savienota ar piecām pārējām lampām, tātad no lampas A iziet 5 vītnes. Vismaz 3 no šīm vītnēm ir vienas krāsas vītnes, pieņemsim, ka vītnes AB, AC un AD ir baltas (līdzīgi, ja tās ir sarkanas). Skat.A5.13.zīm.



A5.13.zīm.

Ja kaut viena no vītnēm BC, BD, CD arī ir balta, mums ir balts trijstūris jeb trīs lampas, kas visas savā starpā ir savienotas ar vienas krāsas vītni. Atliek, ka vītnes BC, BD, CD ir sarkanas un tādējādi rodas sarkans trijstūris.

Tātad nav iespējams katras divas lampas savā starpā savienot ar baltu vai sarkanu vītni tā, lai nekādas 3 lampas savā starpā nebūtu savienotas ar vienas krāsas vītni jeb noteikti atradīsies tādas 3 lampas, kuras visas savā starpā savienotas ar vienas krāsas vītnēm.

5.9. Devītā klase

5.9.1. a) Piemērs: $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Risinājums: 1) Atceramies Vjeta teorēmu: $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$.

2) Pieņemam, ka $x_1 = \sqrt{2} + 1$. Lai sakņu summa b būtu vesels skaitlis, nepieciešams atbrīvoties no kvadrātsaknes to atņemot. Lai sakņu reizinājums c būtu vesels skaitlis, nepieciešams kāpināt kvadrātsakni.

3) Izvēlamies $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, lai izpildītos izvirzītie nosacījumi.

4) Iegūstam $b = -(x_1 + x_2) = -(\sqrt{2} + 1 + 1 - \sqrt{2}) = -2$,

$$c = (\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2}) = 1^2 - \sqrt{2}^2 = 1 - 2 = -1.$$

b) Vispārinām iepriekšējā punktā iegūto rezultātu un secinām, ka, ja viena no saknēm būs uzdota formā $m + \sqrt{n}$, viegli varēsim atrast otru sakni un kvadrātvienādojumu ar veseliem koeficientiem.

Ievērojam, ka $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = \sqrt{3} + 2 = x_1$. Tātad $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ un $b = -(\sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3}) = -4$, $c = (\sqrt{3} + 2)(2 - \sqrt{3}) = 1$. Meklētais kvadrātvienādojums ir $x^2 - 4x + 1 = 0$.

5.9.2. Atceramies, ka a) pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta; b) tātad taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

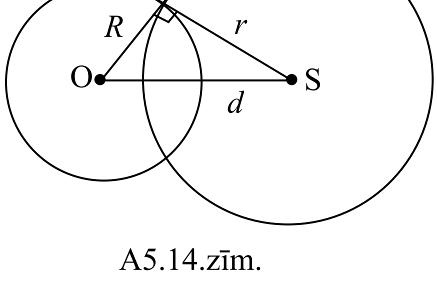
Uzdevuma formulējums **tad un tikai tad** norāda, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas:

I Pieņemam, ka $R^2 + r^2 = d^2$ un pierādīsim, ka tādā gadījumā pieskares ir perpendikulāras viena otrai.

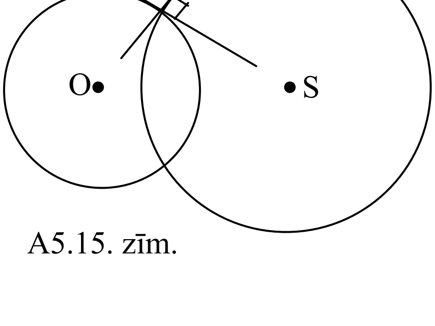
1) Novelkam rādiusus uz abu riņķa līniju krustpunktu A (skatīt A5.14.zīmējumu).

2) Tad saskaņā ar doto $OA^2 + SA^2 = OS^2$, tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas (ja trijstūra divu malu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar trešās malas garumu kvadrātā, tad trijstūris ir taisnleņķa) ΔOAS ir taisnleņķa.

3) Taisne SA ir riņķa līnijas w_1 pieskare, jo $SA \perp R$ (pēc b)). Līdzīgi taisne OA ir w_2 pieskare. Tātad abas pieskares punktā A ir savstarpēji perpendikulāras.



A5.14.zīm.



A5.15. zīm.

II Pieņemam, ka pieskares krustpunktā *A* ir savstarpēji perpendikulāras (A5.15. zīmējums) un pierādīsim, ka tādā gadījumā $R^2 + r^2 = d^2$.

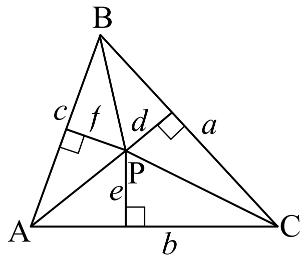
1) Apzīmējam pieskares ar *t* un *l*.

2) Tā kā $t \perp l$, tad *t* satur w_2 rādiusu (no a)), tātad iet caur *S*. Līdzīgi *l* iet caur *O*.

3) Tāpēc ΔOAS ir taisnleņķa.

4) Taisnleņķa trijstūrī izpildās sakarība $OA^2 + SA^2 = OS^2$ (Pitagora teorēma), tātad $R^2 + r^2 = d^2$.

5.9.3. Varam pieņemt, ka garākais augstums *h* ir pret malu *c*. Tātad *c* ir īsākā vai viena no īsākajām malām. $S_{ABC} = \frac{1}{2}hc$



A5.16. zīm.

Sadalām doto trijstūri trīs mazākos trijstūros – *APB*, *BPC*, *CPA* (skatīt A5.16.zīmējumu). Apzīmējam šo trijstūru augstumus pret malām *c*, *a* un *b* attiecīgi ar *f*, *d* un *e*.

Izsakām ΔABC laukumu divos veidos

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{BCP} + S_{CAP} = \frac{1}{2}cf + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}be.$$

Tātad $\frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}cf + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}be$. Izdalām vienādības abas puses ar $\frac{c}{2}$ un iegūstam, ka

$$h = f + \frac{a}{c}\cdot d + \frac{b}{c}\cdot e.$$

Tā kā garākais augstums ir pret malu *c*, tad tā ir īsākā no trijstūra malām. Gadījumā, ja ΔABC ir vienādsānu vai vienādmalu, *c* ir viena no īsākajām malām. Tāpēc $\frac{a}{c} \geq 1$ un $\frac{b}{c} \geq 1$.

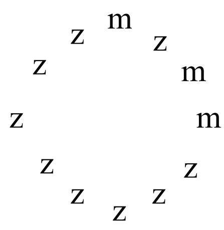
Esam ieguvuši, ka $h \geq f + d + e$, kas arī bija jāpierāda.

5.9.4. **Atbilde:** 12 bērni.

Risinājums: Apzīmēsim meiteņu un zēnu daudzumus attiecīgi ar *m* un *z*. Tad $z = 3m$ (pēc uzdevuma nosacījumiem), un bērnu skaits ir 4*m* (*m* meitenes un 3*m* zēni).

Ja ir *a* pāru „zēns-meitene", tad citu pāru ir 2*a*, tāpēc ir pavisam 3*a* pāru. Tāpēc $3a = 4m$. Vienādības kreisā puse acīmredzami dalās ar 3, tāpēc ar 3 jādalās arī vienādības labajai pusei, tātad *m* jādalās ar 3, jo 4 ar 3 nedalās. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 3, ir 3, tātad ir vismaz 12 bērnu.

Piemēru ar 12 bērniem skatīt A5.17.zīmējumā.



A5.17.zīm.

5.9.5. **1.atrisinājums:** Varam pieņemt, ka $x \geq y$. Tādā gadījumā $x^2 < x^2 + y < x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Ievērojam, ka $x^2 + y$ atrodas starp diviem blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem. Tātad tas nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. Tāpēc sistēmai atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

Piezīme: Ja $x < y$, līdzīgi iegūstam, ka $y^2 < y^2 + x < (y+1)^2$.

2.atrisinājums: Atņemam no pirmā vienādojuma otro $x^2 - y^2 + y - x = 0$, izmantojam saīsinātās reizināšanas formulu $(x-y)(x+y) + (x-y)\cdot(-1) = 0$ un sadalām vienādojuma kreiso pusi reizinātājos $(x-y)(x+y-1) = 0$.

Lai reizinājums būtu nulle, vienam no reizinātājiem jābūt vienādam ar nulli. Apskatām abus gadījumus:

1) Ja $x - y = 0$, tad $y = x$. Ievietojot šo vērtību pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka $x^2 + x = z^2$. Tātad $z^2 = x(x+1)$. Tā kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts, tad x un z nevar vienlaicīgi būt naturāli skaitļi. Tātad šajā gadījumā uzdevumā dotajai vienādību sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

2) Ja $x + y - 1 = 0$, tad $y = 1 - x$. Ja x ir naturāls skaitlis, tad y – vesels skaitlis, kas mazāks par 1, tātad nav naturāls skaitlis. Tātad x un y nevar vienlaicīgi piederēt naturālo skaitļu kopai, tāpēc arī šajā gadījumā uzdevumā dotajai vienādību sistēmai nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Esam pierādījuši, ka sistēmai atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

6. Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 3. (Republikas) kārta

6.9. Devītā klase

6.9.1. Atbilde: Jā, ir iespējams.

Risinājums: Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 + x_2 = a^2$ un $x_1 x_2 = b^2$.

Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi naturāli skaitļi y_1 un y_2, kuriem būtu spēkā $x_1 = y_1^2$ un $x_2 = y_2^2$. Tad $b^2 = y_1^2 y_2^2 = (y_1 y_2)^2$, tātad $b = y_1 y_2$ ir naturāls skaitlis pie visām naturālām y_1 un y_2 vērtībām. Tā kā $y_1^2 + y_2^2 = a^2$, varam izvēlēties, piemēram, $y_1 = 3$ un $y_2 = 4$, kad $a = 5$. Esam ieguvuši vienādojumu $x^2 - 5^2 x + 12^2 = 0$, kura saknes ir 3^2 un 4^2.

6.9.2. 1) Ja caur punktiem *B*, *M*, *O* un *N* var novilkt riņķa līniju, tad $\angle NBM + \angle NOM = 180°$, tātad $\angle NOM = 90°$ (skatīt A6.1. zīm.).

2) Tā kā *OM* ir ΔNMC augstums un mediāna, tad ΔNMC ir vienādsānu trijstūris.

3) Tā kā *CN* ir bisektrise un vienādsānu ΔNMC leņķi pie pamata ir vienādi, tad $\angle ACN = \angle NCM = \angle CNM$.

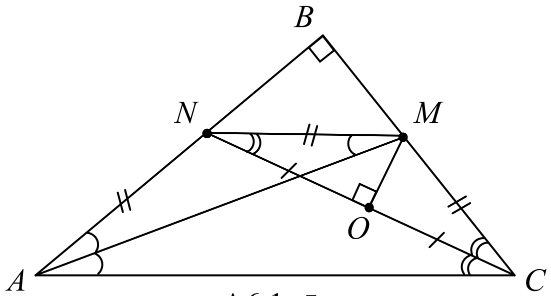
4) No tā seko, ka $AC || MN$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

5) Tā kā AM ir bisektrise un $AC \parallel MN$, tad $\angle NAM = \angle CAM = \angle AMN$.

6) Tātad ΔMNA ir vienādsānu trijstūris, jo leņķi pie pamata ir vienādi.

7) Esam ieguvuši, ka $AN = MN = MC$; tātad *ANMC* ir vienādsānu trapece.

8) $\angle NAC = \angle MCA$ kā leņķi pie vienādsānu trapeces pamata, tāpēc ΔABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris un $\angle BAC = \angle NAC = 45°$.

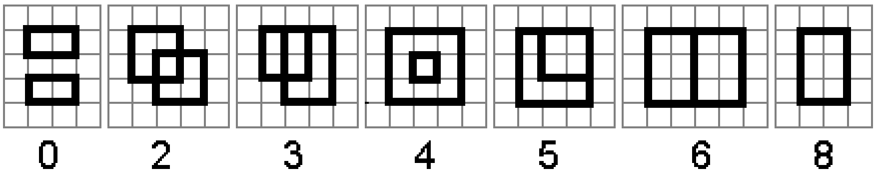


A6.1.zīm.

6.9.3. Aplūkosim 11 tādus pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus no *k* līdz $k+10$ (ieskaitot), ka skaitļa *k* pēdējais cipars ir 1. Skaitlis *k* beidzas ar 1 un dalās ar 1; $k+4$ beidzas ar 5 – tātad dalās ar 5; skaitlis $k+10$ arī beidzas ar 1. Tātad, skaitļi *k*, $k+4$ un $k+10$ nav skaisti. Starp *k* un $k+4$ ir 3 skaitļi; starp $k+4$ un $k+10$ ir 5 skaitļi. Tāpēc nevar būt vairāk nekā 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

Piemēram, skaitļi 866, 867, 868, 869, 870 visi ir *skaisti*, tātad var būt 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

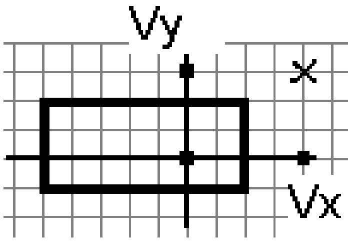
6.9.4. Atbilde: no astoņām divu taisnstūru virsotnēm vienlaicīgi arī otram taisnstūrim var piederēt 0, 2, 3, 4, 5, 6 vai 8 virsotnes, skatīt, piemēram, A6.2.zīmējumu.



A6.2.zīm.

Pierādījums. a) Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši viena virsotne.

Pieņemam pretējo, ka šāda (*īpaša*) virsotne tomēr atrodas – tā ir vienīgā no astoņām virsotnēm, kas vienlaicīgi pieder arī otram taisnstūrim. Šī virsotne nevar sakrist ar kādu no otra taisnstūra virsotnēm, jo tad arī otra taisnstūra virsotnei, ar kuru sakrīt *īpašā* virsotne, būtu spēkā šī īpašība, t.i., būtu vismaz divas virsotnes ar minēto īpašību. Tātad *īpašā* virsotne var atrasties tikai otra taisnstūra iekšpusē vai arī uz kādas no tā malām. A6.3.zīmējumā ir parādīta situācija, kad *īpašā* virsotne ir otra taisnstūra iekšpusē.



A6.3.zīm.

Aplūkojam, kur var atrasties tās divas virsotnes, kurām ar *īpašo* virsotni ir kopīga mala. Vienai virsotnei (V_x) jāatrodas uz tās pašas horizontāles, uz kuras atrodas īpašā virsotne. V_x nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī V_x būtu ar meklēto īpašību. Citai virsotnei (V_y) jāatrodas uz tās pašas vertikāles, uz kuras atrodas īpašā virsotne. V_y nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī V_y būtu ar minēto īpašību. Tātad gan V_x, gan V_y atrodas ārpus otra taisnstūra. Bet tādā gadījumā pirmā taisnstūra (kura trīs virsotnes ir *īpašā* virsotne, V_x un V_y) iekšpusē atrodas kāda no otrā taisnstūra virsotnēm.

Līdzīgi analizējam gadījumu, kad *īpašā* virsotne atrodas uz otra taisnstūra kontūra.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad nevar būt tieši viena virsotne, kas pieder arī otram taisnstūrim.

b) Pierādām, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši septiņas virsotnes.

Ieviešam koordinātu sistēmu un apskatām doto taisnstūru virsotņu koordinātes. Pieņemam, ka viena taisnstūra $ABCD$ virsotnes ir ar koordinātām $A(x_{11}; y_{11})$, $B(x_{11}; y_{12})$, $C(x_{12}; y_{12})$ un $D(x_{12}; y_{11})$; un ir spēkā sakarības $x_{11} < x_{12}$ un $y_{11} < y_{12}$, bet otra taisnstūra ($KLMN$) virsotnes ir ar koordinātām $K(x_{21}; y_{21})$, $L(x_{21}; y_{22})$, $M(x_{22}; y_{22})$ un $N(x_{22}; y_{21})$.

Pieņemam pretējo – ir iespējams divus taisnstūrus novietot tā, ka tieši septiņas no astoņām virsotnēm vienlaikus pieder arī otram taisnstūrim. Šis apgalvojums ir līdzvērtīgs apgalvojumam, ka var novietot divus taisnstūrus tā, ka **tieši viena** no astoņām virsotnēm **nepieder** otram taisnstūrim. Varam pieņemt, ka šī vienīgā „nepiederošā” virsotne ir virsotne $M(x_{22}; y_{22})$.

Tātad virsotņu koordinātas vienlaicīgi saista šādas sakarības:

$x_{11} \le x_{21} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{21} \le y_{12}$ (jo $K(x_{21}; y_{21})$ pieder taisnstūrim $ABCD$) **(1)**

$x_{11} \le x_{21} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{22} \le y_{12}$ (jo $L(x_{21}; y_{22})$ pieder taisnstūrim $ABCD$) **(2)**

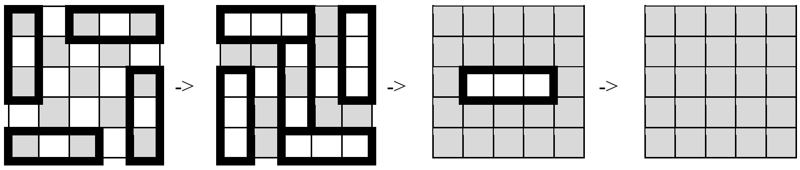
$x_{11} \le x_{22} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{21} \le y_{12}$ (jo $N(x_{22}; y_{21})$ pieder taisnstūrim $ABCD$) **(3)**

Bet no (2) un (3) nosacījumiem seko, ka vienlaicīgi

$x_{11} \le x_{22} \le x_{12}$ un $y_{11} \le y_{22} \le y_{12}$,

tātad arī virsotne $M(x_{22};\ y_{22})$ pieder taisnstūrim $ABCD$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad pieņēmums, ka tieši viena virsotne nepieder otram taisnstūrim, ir aplams, tāpēc tieši septiņas no astoņām abu taisnstūru virsotnēm nevar vienlaikus piederēt arī otram taisnstūrim.

6.9.5. a) Tā kā galarezultātu nosaka tikai tas, cik reizes katrai rūtiņai ir mainīta krāsa, nav svarīgi, kādā secībā gājieni tiek izdarīti. A6.4.zīmējumā parādīts piemērs, kurā ar treknāku līniju apvilktas rūtiņas, kurām tiek mainīta krāsa vienā gājienā.



A6.4.zīm.

b) Katrā rūtiņā ierakstām skaitli 1 vai 2, kā parādīts A6.5.zīmējumā:

1	1	2	1	1
2	1	1	2	1
1	2	1	1	2

A6.5.zīm.

Sākumā skaitļu summa pelēkajās rūtiņās ir 11. Pilnībā baltam laukumam (nav nevienas pelēkās rūtiņas) tā ir 0, bet pilnībā pelēkam laukumam tā ir vienāda ar visus ierakstīto skaitļu summu, t.i. 20. Mainot krāsojumu jebkurās trīs secīgās rūtiņās, skaitļu kopsumma iekrāsotajās rūtiņās mainās (palielinās, samazinās vai nemainās, t.i., izmainās par 0) par pāra skaitli: $(1+1)-2=0$; $(1+2)-1=2$. Tā kā no nepāra skaitļa 11, tam pieskaitot vai atņemot pāra skaitļus, nevar iegūt pāra skaitli, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

7. Latvijas 37. atklātā matemātikas olimpiāde

7.5. Piektā klase

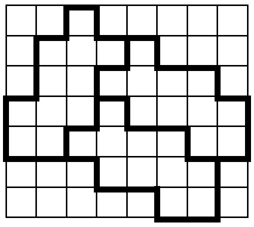
7.5.1. Dotā virkne, no kuras tiek izsvītroti 26 cipari, ir:

1234567891011121314151617181920.

a) Mazākajam piecciparu skaitlim jāsākas ar pēc iespējas mazāku divciparu skaitli. Šajā gadījumā tas ir 10. Mazākais trīsciparu skaitlis, ko var izveidot no atlikušajiem cipariem (11121314151617181920), ir 110, tāpēc mazākais piecciparu skaitlis ir **10110**.

b) Lielākajam piecciparu skaitlim jāsākas ar pēc iespējas lielāku divciparu skaitli. Lielākais divciparu skaitlis, ko var izveidot no dotajiem cipariem, ir 99. Bet tad atliek vairs tikai divi cipari (20), no kuriem nevar izveidot trīsciparu skaitli. Otrs lielākais divciparu skaitlis ir 98. Vislielākais trīsciparu skaitlis, ko var iegūt no atlikušajiem četriem cipariem 1, 9, 2 un 0, ir 920. Tātad vislielākais piecciparu skaitlis, ko var iegūt dotajā virknē izsvītrojot 26 ciparus, ir **98920**.

7.5.2. Skatīt, piemēram, A7.1.zīmējumu.



A7.1.zīm.

7.5.3. Apzīmēsim skaitļus katrā no neaizpildītajām rūtiņām ar burtiem *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f* kā parādīts A7.2.zīmējumā.

a	*b*	*c*
d	19	*e*
17	*f*	25

A7.2.zīm.

Tā kā $17+f+25=b+19+f$, tad $b=23$.

Tā kā $17+19+c=c+e+25$, tad $e=11$.

Tā kā $a+d+17=a+19+25$, tad $d=27$.

Tātad katrā rindiņā, kolonnā un diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir $27+19+11=57$. Tālāk viegli aizpildīt atlikušās tukšās rūtiņas:

$a=57-27-17=13$

$c=57-11-25=21$

$f=57-17-25=15$

Aizpildītu tabulu skatīt A7.3.zīmējumā.

13	23	21
27	19	11
17	15	25

A7.3.zīm.

7.5.4. a) Pieņemsim, ka var gadīties, ka rūtiņās A un B ir vienāds punktu skaits, apzīmēsim to ar a. Tā kā dotajā kauliņu virknes fragmentā nav iezīmētas kauliņu robežas, tad iespējami divi gadījumi:

1) B un C atrodas uz dažādiem kauliņiem (skatīt A7.4.zīmējumu).

		A				*B*	*C*		

A7.4.zīm.

Tā kā B un C ir dažādu kauliņu pusēs, kas saskaras, tad punktu skaitam šajās pusēs jāsakrīt. Arī punktu skaitam kauliņa pusē, kas saskaras ar A, jābūt tādam pašam, kā rūtiņā A, tātad arī a. Iegūstam A7.5.zīmējumā attēloto situāciju.

		a	*a*	X	Y	*a*	*a*		

A7.5.zīm.

Rūtiņās X un Y punktu skaitam jābūt vienādam, tātad abiem vidējiem kauliņiem jābūt vienādiem, bet tā nevar būt. Iegūta pretruna, tāpēc pie šāda kauliņu robežu ievietojuma nevar gadīties, ka A un B rūtiņās ir vienāds punktu skaits.

2) B un C atrodas uz viena kauliņa (skatīt A7.6.zīmējumu).

		A				*B*	*C*		

A7.6.zīm.

Rūtiņai B blakusesošajā rūtiņā arī jābūt a punktiem, skatīt A7.7.zīmējumu.

		a	*x*	*x*	*a*	*a*			

A7.7.zīm.

Līdzīgi kā 1) gadījumā iegūstam, ka arī šajā gadījumā jābūt diviem vienādiem kauliņiem, kas nav iespējams, tātad arī pie šāda kauliņu robežu ievietojuma rūtiņā A nevar būt tāds pats punktu skaits kā rūtiņā B.

Ir apskatītas visas iespējas, kā varētu būt izvietotas kauliņu robežas, tātad nekad **nevar gadīties**, ka rūtiņās A un B ir vienāds punktu skaits.

b) Punktu skaits rūtiņās A un C **var** būt vienāds; skatīt, piemēram, A7.8.zīmējumu.

		5	3	3	4	4	5		

A7.8.zīm.

7.5.5. Skatīt A7.9.zīmējumu; katrā melnā rūtiņā ierakstīts tās balto kaimiņu skaits.

1		**2**		
3	**4**	**5**	**6**	

A7.9.zīm.

7.6. Sestā klase

7.6.1. Atbilde: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Risinājums. Skaidrs, ka, ja pāra skaitļu ir vairāk, tad to ir tieši par vienu vairāk. Tātad viens pāra skaitlis ir 25% jeb $\frac{1}{4}$ no visa nepāra skaitļu skaita. Tātad ir tieši 4 nepāra skaitļi un 5 pāra skaitļi, kopā 9 skaitļi. Apzīmēsim lielāko no šiem skaitļiem ar M, bet mazāko – m. Tad $M = m + 8$. **(*)**

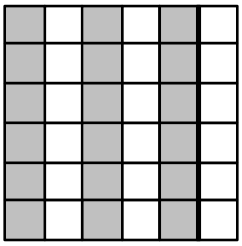
Tā kā M ir 2 reizes lielāks par m, tad $M = m + m$. **(**)**

No (*) un (**) seko, ka $m = 8$ un $M = 16$.

7.6.2. Šāds skaitlis ir, piemēram, **167832**. Pārbaudi patstāvīgi, ka šis skaitlis dalās ar katru no saviem cipariem.

7.6.3. a) No dotā seko, ka $m \cdot n$ dalās ar 5, jo ir zināms, ka taisnstūri $m \cdot n$ var sadalīt taisnstūros, kas sastāv no 5 rūtiņām. Tātad vai nu m, vai n dalās ar 5. Varam pieņemt, ka n dalās ar 5. Tad sagriežam taisnstūri strēmelēs $1 \times n$ un pēc tam šīs strēmeles – gabalos 1×5.

b) Nē, ne noteikti. Lai to pierādītu, pietiek uzrādīt kaut vienu piemēru, kur uzdevumā prasītais neizpildās. Kvadrātu 6×6 var sagriezt kvadrātos 2×2. Pierādīsim, ka to nevar sagriezt L–tetramino. Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas, kā parādīts A7.10.zīmējumā. Katrs L–tetramino satur vai nu 3, vai 1 melnu rūtiņu. Tāpēc 9 L–tetramino kopā satur nepāra skaitu melnu rūtiņu. Bet melno rūtiņu pavisam ir 18 – pāra skaitlis.



A7.10. zīm.

7.6.4. Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Ievērosim, ka, izpildot atļautās darbības, kopējā tabulā ierakstīto skaitļu summa nemainās – aizstājot divus skaitļus x un y, jauno skaitļu summa ir $(3x-2y)+(3y-2x)=x+y$, bet pārējo skaitļu summa nemainās. Tā kā sākotnējā tabulā ierakstīto skaitļu summa ir 12, bet beigās iegūstamajā tabulā tā ir 10, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

7.6.5. Lai izveidotu tādu puķu dobi kā prasīts uzdevumā, nepieciešams, lai dažādo veidu skaits, kā n var izteikt kā trīs nepāra saskaitāmo summu, būtu vismaz n. Katrs šāds sadalījums atbilst vienai derīgai rindai garumā n. Trīs nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Tālāk apskatītajās summās pirmais saskaitāmais atbilst hiacinšu skaitam, otrais – narcišu skaitam, bet trešais – tulpju skaitam.

Ja n ir 3, tad to kā trīs nepāra saskaitāmo summu var izteikt tikai vienā veidā: $3 = 1+1+1$.

Ja n ir 5, tad iespējami tikai trīs veidi: $5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 1+1+3$.

Ja n ir 7, tad iespējami tikai seši veidi:

$$7 = 1+1+5 = 1+5+1 = 5+1+1 = 1+3+3 = 3+1+3 = 3+3+1.$$

Ja n ir 9, tad iespējami desmit dažādi veidi:

$$9 = 1+1+7 = 1+7+1 = 7+1+1 = 1+3+5 = 1+5+3 = 3+1+5 = 3+5+1 = 5+1+3 = 5+3+1 = 3+3+3$$

Izvēloties jebkurus deviņus no šiem veidiem, varēs izveidot uzdevumā prasīto puķu dobi. Tāpēc **mazākā iespējamā n vērtība ir 9**.

7.7. Septītā klase

7.7.1. Atbilde: 7, 2, 41, 3, 37.

Risinājums. Apzīmēsim uz tāfeles uzrakstītos pirmskaitļus ar p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

No 4. nosacījuma var secināt, ka p_1, p_2, p_4 visi nevar būt nepāra skaitļi, jo tad $p_1 + p_4$ būs pāra skaitlis, bet $5p_2$ – nepāra. Tātad kāds no tiem ir pāra skaitlis, un vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Ja $p_4 = 2$, tad būtu $5p_2 = 9$, kas nevar būt. Tātad $p_2 = 2$ un attiecīgi $p_4 = 5 \cdot 2 - 7 = 3$.

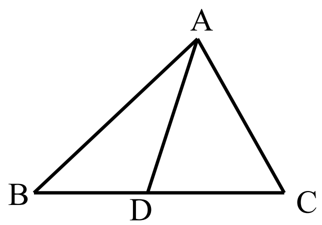
Iespējamie skaitļi, kam visi cipari ir vienādi un, ko var iegūt 3 reizinot ar kādu skaitli, kas nepārsniedz 100, ir 33, 66, 99, 111, 222. Taču tikai $33 = 3 \cdot 11$ un $111 = 3 \cdot 37$ izsakāms kā skaitļa 3 reizinājums ar pirmskaitli. Tāpēc $p_5 = 11$ vai $p_5 = 37$. $p_5 = 11$ neder, jo tad $p_3 = 11 + 4 = 15$, kas nav pirmskaitlis. Tātad $p_5 = 37$ un $p_3 = 41$.

7.7.2. Taisne t krusto malu BC kādā iekšējā punktā D (ja tā nekrustotu pretējo malu, tad sākotnējais trijstūris netiktu sadalīts divos trijstūros). Pieņemsim, ka var gadīties, ka $AB > AC$.

Tā kā trijstūri, kuru virsotnes ir A,B,D un A,D,C ir vienādi, tad to attiecīgajām malām jābūt vienādām. Tā kā $AB > AC$, tad jābūt $AB = DC$ vai arī $AB = AD$.

1) Ja $AB = AD$, tad ΔABD ir vienādsānu, tātad arī tam vienādais ΔACD arī ir vienādsānu trijstūris un $AD = DC$ (nevar būt $AD = AC$, jo $AD = AB > AC$). Tātad $AC = DB$. Iegūstam, ka $BC = BD + DC = AC + AB$, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību $BC < AB + AC$.

2) Ja $AB = DC$, tad $AC = BD$, vai arī $AC = AD$, otrajā gadījumā ΔACD arī ir vienādsānu trijstūris, tātad jābūt $AC = AD = BD$. Atkal iegūstam, ka $BC = AC + AB$, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību.



A7.11.zīm.

Esam apskatījuši visas iespējas, tātad nevar gadīties, ka $AB > AC$.

7.7.3. Skatīt, piemēram, A7.12.zīmējumu.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
1989	1990	1991	1992

A7.12.zīm.

7.7.4. Pieņemsim, ka bērnu ir n. Viegli izsekot, ka katras konfekšu dalīšanas rezultātā starpības starp jebkuru divu bērnu konfekšu daudzumiem mainās par skaitļa n daudzkārtni. Tā kā sākumā šīs starpības visas ir 0 un 0 dalās ar n, tad tās vienmēr ir skaitļa n daudzkārtņi, tāpēc 19 dalās ar n. Tā kā 19 ir pirmskaitlis un bērnu ir vairāk nekā viens, tad $n = 19$.

Piemērs: sākumā ir 19 bērni, katram 22 konfektes. Viens bērns iedod katram no 18 citiem pa vienai konfektei.

7.7.5. Ar p_{max} apzīmēsim lielāko iespējamo *patiešu* skaitu, ar p_{min} – mazāko iespējamo *patiešu* skaitu.

Ja starp rūķīšiem ir p *patieši*, kur $p \geq 202$, tad apskatām 101. *patiesi*, skaitot no kreisās puses. Tam kreisajā pusē ir 100 *patieši*, bet labajā $p - 101 \geq 101$ *patieši*. Tāpēc šis patiesis atbildēja "*jā*" un visi tam pa kreisi esošie 100 patieši arī atbildēja ar "*jā*". Tāpēc vismaz 101 rūķītis atbildēja "*jā*", kas ir pretrunā ar doto. Tāpēc $p \le 201$. *Patiešu* skaits var būt vienāds ar 201: $\underbrace{mm...m}_{1809}p\underbrace{pp...p}_{200}$.

Tāpēc $p_{\max} = 201$.

Ja visi rūķīši būtu *meļi*, tad visi teiktu "*jā*", tāpēc nebūtu tieši 100 atbilžu "*jā*". Tāpēc visi nav *meļi* un $p_{\min} \ge 1$. Tieši viens *patiesis* var būt: $\underbrace{mm...m}_{1909}p\underbrace{mm...m}_{100}$. **Tāpēc $p_{\min} = 1$.**

7.8. Astotā klase

7.8.1. a) Jā, var, piemēram: $(6+1)\cdot 3+4=25$.

b) Jā, var, piemēram: $6:(1-3:4)=6:\left(1-\frac{3}{4}\right)=6:\frac{1}{4}=6\cdot 4=24$.

7.8.2. Pieņemsim, ka viens no puišiem izvēlējies skaitļus $a-1$, a un $a+1$, bet otrs – $b-1$, b un $b+1$. Tā kā visi seši skaitļi ir atšķirīgi, tad varam pieņemt, ka $a-1>b+1$. Izveidosim tabulu, kurā ierakstīsim visus iespējamos skaitļu reizinājumus pa pāriem (skatīt A7.13.zīmējumu).

Vilksim bultiņu no katras rūtiņas uz blakus rūtiņu, ja skaitlis pirmajā rūtiņā vienmēr ir mazāks par skaitli otrajā rūtiņā.

	a - 1	a	a + 1
b - 1	ab-a-b+1	ab-a	ab-a+b-1
b	ab-b	ab	ab+b
b + 1	ab+a-b-1	ab+a	ab+a+b+1

A7.13.zīm.

Viegli redzēt, ka ir vairāki maršruti, kas, ejot pa rūtiņām bultiņu norādītajos virzienos, ļauj nonākt no kreisā augšējā stūra rūtiņas (reizinājuma vērtība vismazākā) labējā apakšējā stūra rūtiņā (reizinājuma vērtība vislielākā). Ja divas rūtiņas atrodas uz kāda no šādiem maršrutiem, tad tajās ierakstītie skaitļi atšķiras.

Katra no rūtiņām atrodas vienā no A7.14.zīmējumu attēlotajiem maršrutiem:

	a-1	**a**	**a+1**
b-1	ab-a-b+1	ab-a	ab-a+b-1
b	ab-b	ab	ab+b
b+1	ab+a-b−1	ab+a	ab+a+b+1

	a-1	**a**	**a+1**
b-1	ab-a-b+1	ab-a	ab-a+b-1
b	ab-b	ab	ab+b
b+1	ab+a-b−1	ab+a	ab+a+b+1

A7.14.zīm.

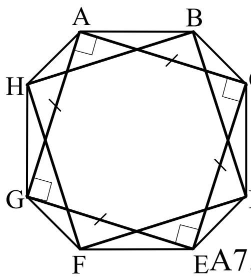
Tātad tabulā neviens skaitlis nevar būt ierakstīts vairāk kā divās dažādās rūtiņās. Noteiksim, kāds tabulā var būt lielākais vienādo skaitļu pāru skaits. Vienai no rūtiņām, kurā ierakstīti vienādi skaitļi, jābūt tādai, kas nepieder pirmajam maršrutam. Iespējami divi varianti:

a) tā ir rūtiņa $(b-1)(a+1)$. Otra rūtiņa nedrīkst atrasties uz viena maršruta ar šo rūtiņu. Vienīgā šāda rūtiņa ir $b(a-1)$. Ja šie skaitļi ir vienādi, tad $ab-a+b-1=ab-b$ jeb $a=2b-1$.

b) tā ir rūtiņa $(b+1)(a-1)$. Vienīgā rūtiņa, kas neatrodas uz viena maršruta ar to, ir rūtiņa $b(a+1)$. Ja šie skaitļi ir vienādi, tad $ab+a-b-1=ab+b$ jeb $a=2b+1$.

Abas sakarības $a=2b-1$ un $a=2b+1$ nevar izpildīties vienlaicīgi, tātad ne vairāk kā divās rūtiņās ierakstītie skaitļi var būt vienādi, tāpēc tabulā ir vismaz astoņi savā starpā atšķirīgi skaitļi.

7.8.3. Lai pierādītu, ka *BDFH* ir kvadrāts, jāpierāda, ka visas tā malas ir vienādas un visi leņķi taisni (skatīt A7.15.zīmējumu).



A7.15.zīm.

Astoņstūra iekšējo leņķu summa ir $(8-2)\cdot 180° = 1080°$, tātad katrs leņķis ir $1080° : 8 = 135°$.

Trijstūrī *ABC* iekšējo leņķu summa ir 180° un $\angle B$ = 135°, tātad $\angle BAC + \angle BCA$ = 45°.

$\angle BCA$ + 90° + $\angle DCE = \angle C$ = 135°, tātad $\angle DCE + \angle BCA$ = 45°.

Trijstūrī *CDE* iekšējo leņķu summa ir 180° un $\angle D$ = 135°, tātad $\angle DCE + \angle DEC$ = 45°.

No pirmajām divām vienādībām var secināt, ka $\angle BAC = \angle DCE$, no pēdējām divām, ka $\angle BCA = \angle DEC$.

Tā kā $AC = CE$ (jo *ACEG* kvadrāts), $\Delta ABC = \Delta CDE$ (*lml*).

No tā seko, ka $AB = CD$ un $BC = DE$ (vienādos trijstūros atbilstošie elementi ir vienādi).

Tātad $\Delta ABC = \Delta DCB$ (*mlm*): *BC* – kopīgā mala, $AB = DC$ un $\angle ABC = \angle BCD$ = 135°. No tā seko, ka $AC = BD$ kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi.

Līdzīgi pierāda, ka $CE = DF$, $EG = FH$, $GA = HB$, tātad $\boldsymbol{BD = DF = FH = HB}$, jo $AC = CE = EG = GA$ kā kvadrāta *ACEG* malas. Tātad četrstūris *BDFH* ir rombs. Lai pierādītu, ka tas ir arī kvadrāts, pietiek pierādīt, ka viens no tā leņķiem ir taisns.

$\Delta BCD = \Delta DEF$ (*mmm*), jo $BC = DE$, $BD = DF$ (iepriekš pierādīts) un $CD = EF$ (pierāda līdzīgi, kā $AB = CD$). Tātad $\angle EDF = \angle CBD$ (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros).

$\angle BDF$ = 135° – $\angle CDB - \angle EDF$ = 135° – $\angle CDB - \angle CBD$ =

= 135° – (180° – 135°) = 90°, k.b.j.

7.8.4. a) Katru baļķi var sazāģēt vai nu bez, vai ar „atlikumu”, „atlikumus” sauksim par „izniekotiem”. Bez „atlikuma” 10 *m* garu baļķi vajadzīgā izmēra baļķīšos var sadalīt tikai divos veidos – **A)** iegūstot divus 5 *m* garus baļķīšus vai **B)** iegūstot divus 3 *m* garus baļķīšus un vienu 4 *m* garu baļķīti.

Visu 39 iegūstamo baļķīšu kopējais garums ir 156 *m*. Pieejamo 16 baļķu kopējais garums ir 160 *m*. Tas nozīmē, ka ne vairāk kā 4 *m* drīkst palikt „atlikumos”.

Tā kā mazākais „atlikums”, kas var palikt pāri no viena baļķa, ir 1 *m* (piemēram, nozāģējot vienu 4 *m* garu baļķīti un vienu 5 *m* garu baļķīti vai nozāģējot trīs 3 *m* garus baļķīšus), tad ne vairāk kā četri baļķi drīkst būt izmantoti ar „atlikumu”. Tātad vismaz 12 baļķi jāsazāģē bez „atlikuma”

Savukārt ne vairāk kā 6 baļķus drīkst sazāģēt A) veidā, jo, sazāģējot vismaz 7 baļķus A) veidā, tiktu iegūti vismaz 14 *gb* 5 *m* gari baļķīši. Ne vairāk kā 6 baļķus drīkst sazāģēt arī B) veidā (pretējā gadījumā tiktu iegūti vairāk nekā 13 *gb* 3 *m* gari baļķīši. Tātad **tieši** 6 baļķi jāsazāģē A) veidā un **tieši** 6 baļķi jāsazāģē B) veidā. No šiem 12 baļķiem tiks iegūti 12 *gb* 5 *m* gari baļķīši, 12 *gb* 3 *m* gari baļķīši un 6 *gb* 4 *m* gari baļķīši. No atlikušajiem četriem baļķiem jāiegūst vēl pa vienam baļķītim garumā 3 *m* un 5 *m* un 7 baļķīšus garumā 4 *m*.

Lai iegūtu vienu trūkstošo 3 *m* baļķīti, tiks „izniekoti” vismaz 2 *m*. Tad atlikušajos trīs baļķos kopā drīkst „izniekot” ne vairāk kā 2 *m*. Taču tā kā vairs nevienu baļķi nevar sazāģēt bez „atlikuma”, tad kopumā tiks „izniekoti” vismaz $3\,m > 2\,m$. Tātad, vajadzīgo baļķu komplektu no 16 *gb* 10 *m* gariem baļķiem **iegūt nevar**.

b) vajadzīgos baļķīšus var iegūt, ja 4 baļķus sazāģē katru divos 5 *m* garos baļķīšos un vienā 3 *m* garā baļķītī, 5 baļķus – katru divos 4 *m* garos baļķīšos un vienā 5 *m* garā baļķītī un trīs baļķus – katru trijos 3 *m* garos baļķīšos un vienā 4 *m* garā baļķītī.

7.8.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām – pirmajā daļā ir nepieciešams atrast mazāko iespējamo uzvarētāja punktu skaitu, bet otrajā daļā jāpierādā, ka mazāks punktu skaits nevar būt.

Uzvarētāja iegūto punktu skaitu apzīmēsim ar *n*. Spēlētāju punktu daudzumi var atšķirties par augstākais puspunktu, tāpēc kopējais iegūto punktu daudzums nav lielāks par

$$n+(n-\frac{1}{2})+(n-1)+(n-1\frac{1}{2})+(n-2)+(n-2\frac{1}{2})+(n-3)=7n-10\frac{1}{2}.$$

Pavisam izspēlēja 21 spēli, tātad ieguva 21 punktu pa visām spēlēm, tāpēc $21 \le 7n-10\frac{1}{2}$ un

$7n \ge 31\frac{1}{2}$, no kurienes $n \ge 4\frac{1}{2}$.

Piemēru, kur $n = 4\frac{1}{2}$, skatīt A7.16.zīmējumā.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**Punkti**
A		1	1	1	1	0,5	0	**4,5**
B	0		1	1	0	1	1	**4**
C	0	0		1	0,5	1	1	**3,5**
D	0	0	0		1	1	1	**3**
E	0	1	0,5	0		0	1	**2,5**
F	0,5	0	0	0	1		0,5	**2**
G	1	0	0	0	0	0,5		**1,5**

A.7.16.zīm.

7.9. Devītā klase

7.9.1. a) Jā, skaitļus no 1 līdz 10 **ir iespējams** sadalīt piecos pāros tā, lai katra pāra skaitļu summa ir atšķirīgs pirmskaitlis. To var izdarīt, piemēram, šādi: $1+6=7$, $2+3=5$, $4+7=11$, $5+8=13$ un $9+10=19$.

b) Aplūkosim, kādus pirmskaitļus var iegūt no dotajiem 20 skaitļiem, summējot tos pa pāriem. Mazākais pirmskaitlis, ko iespējams izveidot, ir $1+2=3$, bet lielākais – $20+17=19+18=37$. Tātad, izmantojot skaitļus no 1 līdz 20, var izveidot 11 pirmskaitļus: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Tā kā katram skaitļu pārim jāveido atšķirīgs pirmskaitlis, tad visu 20 doto skaitļu summai jābūt vienādai ar 10 iespējamo pirmskaitļu summu. Skaitļu no 1 līdz 20 summa ir $21\cdot 10=210$. Lielākā summa, ko var izveidot no 10 iespējamajiem pirmskaitļiem, ja neviens no tiem neatkārtojas, ir 192 (neizmantojam mazāko iespējamo pirmskaitli, t. i., 3), tātad tā nevar būt 210. Varam secināt, ka skaitļus no 1 līdz 20 **nav iespējams** sadalīt pa pāriem uzdevumā prasītajā veidā.

7.9.2. Pieņemsim, ka *E* ir gan *AB*, gan *CD* viduspunkts. Apskatīsim četrstūri *ACBD*, kura diagonāles ir *AB* un *CD*. Tā kā šī četrstūra diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad *ACBD* – paralelograms. Paralelograma pretējās malas pa pāriem ir paralēlas, tātad jābūt $AC \parallel BD$ un $AD \parallel BC$.

Ievērosim, ka punkts $(x;x^2)$ pieder funkcijas $y=x^2$ grafikam. Apzīmēsim doto punktu koordinātas: $A(x_A;x_A^2)$, $B(x_B;x_B^2)$, $C(x_C;x_C^2)$ un $D(x_D;x_D^2)$.

Atceramies, ka taisnes vispārīgais vienādojums ir $y=kx+b$. Apskatām taisni, kas iet caur punktiem *A* un *C*. Apzīmēsim šīs taisnes virziena koeficientu ar k_1 un brīvo locekli ar b_1, tad šīs taisnes vienādojums ir $y=k_1x+b_1$. Ievietojot *x* un *y* vietā punktu *A* un *C* koordinātas, iegūstam, ka

$$\begin{cases} x_A^2 = k_1\cdot x_A + b_1 \\ x_C^2 = k_1\cdot x_C + b_1 \end{cases}.$$

Atņemot, vienu vienādojumu no otra, iegūstam, ka

$$x_A^2 - x_C^2 = k_1x_A - k_1x_C + b_1 - b_1$$

$$(x_A - x_C)(x_A + x_C) = k_1(x_A - x_C).$$

Tā kā punkti *A* un *C* ir dažādi un katram punktam uz funkcijas grafika atbilst atšķirīga *x* koordinātas vērtība, tad $x_A \neq x_C$, tāpēc jābūt $k_1 = x_A + x_C$.

Līdzīgi apskatām taisni, kas iet caur punktiem *B* un *D*, apzīmējot virziena koeficientu ar k_2 un brīvo locekli ar b_2. Iegūstam, ka $\begin{cases} x_B^2 = k_2\cdot x_B + b_2 \\ x_D^2 = k_2\cdot x_D + b_2 \end{cases}$, tātad $(x_B^2 - x_D^2) = k_2(x_B - x_D)$. Esam ieguvuši, ka taisnes, kas iet caur punktiem B un D virziena koeficients $k_2 = x_B + x_D$.

Līdzīgi iegūstam arī taišņu *AD* un *BC* virziena koeficientus, kas ir attiecīgi $k_3 = x_A + x_D$ un $k_4 = x_B + x_C$.

Tā kā paralēlām taisnēm virziena koeficienti ir vienādi un $AC \parallel BD$, tad $k_1 = k_2$ jeb

$$x_A + x_C = x_B + x_D \qquad (1)$$

Tā kā taisnes *AD* un *BC* arī ir paralēlas, tad $k_3 = k_4$ jeb

$$x_A + x_D = x_B + x_C \qquad (2)$$

Atņemot vienādību (2) no (1), iegūstam, ka

$x_C - x_D = x_D - x_C$ jeb $x_C = x_D$, tātad punkti *C* un *D* sakrīt, kas ir pretrunā ar doto.

Tātad sākotnējais pieņēmums ir aplams, un nevar gadīties, ka E ir gan AB, gan CD viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

7.9.3. **a)** Apskatot pirmos pāra skaitļus, atrodam 5 apaļīgus pāra skaitļus, kas ir atšķirīgi no uzdevumā dotajiem:

- $n = 2$; 2 dalās tikai ar 1 un 2, tātad $d(2) = 2$; $n = 2$ dalās ar $d(2) = 2$;
- $n = 8$; 8 dalās tikai ar 1, 2, 4 un 8, tātad $d(8) = 4$; $n = 8$ dalās ar $d(8) = 4$;
- $n = 12$; 12 dalās tikai ar 1, 2, 3, 4, 6 un 12, tātad $d(12) = 6$; $n = 12$ dalās ar $d(12) = 6$;
- $n = 18$; 18 dalās tikai ar 1, 2, 3, 6, 9 un 18, tātad $d(18) = 6$; $n = 18$ dalās ar $d(18) = 6$;
- $n = 24$; 24 dalās tikai ar 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 un 24, tātad $d(24) = 8$; $n = 24$ dalās ar $d(24) = 8$.

b) Ja p ir pirmskaitlis, z – naturāls skaitlis, tad skaitlim p^{z-1} ir tieši z dalītāji – tie ir $1, p, p^2, \ldots, p^{z-1}$.

Tātad, izvēloties $z = p^n$, iegūstam, ka p^{p^n-1} ir tieši p^n dalītāji jeb $d(p^{p^n-1}) = p^n$.

p^{p^n-1} ir apaļīgs skaitlis, ja p^{p^n-1} dalās ar p^n. Tas iespējams tad un tikai tad, ja $p^n - 1 \geq n$. Tā kā jebkurš pirmskaitlis vienāds vai lielāks par 2, ir acīmredzamas nevienādības: $p \geq 2, \quad p \geq \frac{3}{2}, \quad p \geq \frac{4}{3}, \quad \ldots, \quad p \geq \frac{n+1}{n}$. Šajās n nevienādības tiek salīdzināti pozitīvi skaitļi, tādēļ varam tās sareizināt; iegūstam, ka $p^n \geq n+1$. Pārnesot 1 uz nevienādības kreiso pusi, iegūstam $p^n - 1 \geq n$. Tātad p^{p^n-1} ir apaļīgs skaitlis.

Izvēloties $p = 2$ un dažādas n vērtības, varam iegūt dažādus apaļīgus skaitļus, kas ir divnieka pakāpes, tāpēc ir pāra skaitļi. Tā kā n – naturāls skaitlis un naturālu skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī apaļīgu pāra skaitļu ir bezgalīgi daudz.

7.9.4. Ievērosim, ka skaitļi tabulā ir izvietoti pa diagonālēm un uz vienas diagonāles esošām rūtiņām rindas un kolonnas numuru summa ir konstanta, sauksim to par diagonāles *invariantu*. Piemēram, pirmās diagonāles (kas satur tikai skaitli 1) *invariants* ir $1+1=2$, otrās diagonāles (kur ierakstīti skaitļi 2 un 3) *invariants* ir $1+2=2+1=3$, utt.

Diagonālēs, kam *invariants* ir nepāra skaitlis, skaitļu ierakstīšanas virziens ir rindu augšanas virzienā (2, 4, ... diagonāle), bet diagonālēs, kam *invariants* ir pāra skaitlis, skaitļu ierakstīšanas virziens ir kolonnu augšanas virzienā (1, 3, ... diagonāle).

Katrā nākamajā diagonālē gan rūtiņu kopskaits, gan *invariants* ir par 1 lielāks nekā iepriekšējā diagonālē. Tātad rūtiņu skaits diagonālē ar *invariantu n* ir $n-1$.

a) 20. rindas 10. kolonnas rūtiņa atrodas uz diagonāles ar *invariantu* $20+10=30$. Tātad tā atrodas 29. diagonālē. Kopējais skaitļu skaits, kāds ierakstīts diagonālēs ar mazāku *invariantu*, ir $1+2+\ldots+28 = \frac{29 \cdot 28}{2} = 406$.

Tā kā *invariants* ir pāra skaitlis, tad skaitļi uz 29. diagonāles ir ierakstīti kolonnu augšanas secībā un 10. kolonnā būs ierakstīts skaitlis $406+10=$ **416**.

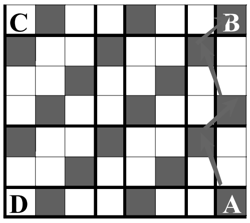
b) Lai noteiktu, kurā rūtiņā ierakstīts skaitlis 2010, nepieciešams noteikt, kurā diagonālē tas atrodas. Tātad, jāatrod tāds k, ka

$$1+2+\ldots.+k-1 < 2010 \leq 1+2+\ldots+k.$$

Apskatot dažādas k vērtības, iegūstam, ka šāds $k = 63$. Tātad 2010 atrodas uz 63. diagonāles, kuras *invariants* ir 64.

Uz iepriekšējām diagonālēm kopā atrodas $1+2+\ldots+62 = \frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ skaitļi. Tā kā diagonāle ir ar *invariantu* – pāra skaitli, tajā skaitļi ierakstīti kolonnu augšanas secībā. Tātad 2010 atrodas $2010-1953=57$. kolonnā. Rindas un kolonnas numuru summa ir 64, tātad 2010 atrodas $64-57=7$. rindā. Esam atraduši, ka skaitlis 2010 atrodas tabulas **7. rindas 57. kolonnā**.

7.9.5. Izkrāsosim dotajā taisnstūrī katru trešo diagonāli kā parādīts A7.17.zīmējumā.



A7.17.zīm.

Ievērosim, ka *sienāzis*, izpildot atļautos gājienus, no melnas rūtiņas var nonākt **tikai** melnā rūtiņā. Tātad no rūtiņas ***A*** viņš nekad nenonāks rūtiņās ***C*** un ***D***. Savukārt, kā nokļūt rūtiņā ***B***, parādīts, piemēram, A7.17.zīmējumā.

Uzdevumu sadalījums pa tēmām

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

Algebra

Algebriski pārveidojumi un izteiksmes – 1.1.8., 1.2.3., 2.2.1., 2.2.5., 2.3.4., 2.4.2., 2.5.1., 2.5.3., 3.1.2., 3.4.8., 4.6.4., 4.7.5., 5.6.2., 5.7.2.

Vienādojumi – 1.1.6., 1.2.7., 5.8.4., 5.9.1., 6.9.1.

Nevienādības – 1.2.5., 1.4.2., 1.4.3., 2.2.5., 3.2.2., 3.2.4., 3.3.2., 3.4.4., 4.8.5., 4.9.1., 7.8.2.

Vienādojumu sistēmas – 5.9.5.

Funkcijas – 1.1.11., 1.3.3., 4.8.1.

Ģeometrija

Klasiskā ģeometrija – 1.1.4., 1.1.5., 1.4.5., 1.4.7., 1.4.9., 2.1.2., 2.3.2., 2.5.2., 3.1.5., 3.2.5., 3.2.7., 3.3.3., 3.3.4., 3.5.4., 3.5.6., 3.6.7., 3.6.9., 4.7.2., 4.8.3., 4.9.3., 5.8.2., 5.9.2., 5.9.3., 6.9.2., 7.7.2., 7.8.3., 7.9.2.

Figūru sistēmas, piemēri – 1.2.4., 2.4.3., 2.4.5., 3.4.8., 6.9.4.

Figūru sagriešana un salikšana – 1.3.6., 2.1.4., 2.2.2., 2.3.1., 2.4.5., 3.1.7., 3.1.9., 3.2.9., 3.3.8., 3.4.5., 3.4.6., 3.6.6., 4.5.1., 4.6.1., 5.5.4., 7.5.2., 7.6.3.

Invariantu metode, krāsošana – 3.2.8., 3.4.10., 3.5.2., 4.5.4., 5.5.3., 5.7.4., 6.9.5.

Konstrukcijas uzdevumi – 3.2.5., 3.6.9.

Skaitļu teorija

Dalāmība, dalīšana ar atlikumu – 3.1.4., 3.3.7., 3.4.1., 3.4.9., 3.5.1., 3.6.2., 4.5.3., 4.8.2., 4.9.5., 7.6.2.

Skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinājumā – 3.2.3., 4.7.1., 5.7.3., 5.8.1., 6.9.3.

Skaitļa pieraksts, aritmētisko darbību izpilde – 1.1.1., 1.1.2., 1.1.3., 1.1.7., 1.1.9., 1.2.1., 1.2.2., 1.3.1., 1.3.2., 1.3.4., 1.4.1., 1.4.4., 1.4.6., 1.4.8., 2.1.1., 2.1.3., 2.3.3., 2.4.1., 3.1.1., 3.2.10., 3.3.1., 3.4.2., 3.6.1., 4.6.2., 4.7.3., 5.8.3., 7.5.1., 7.6.1., 7.8.1., 7.9.3.

Grupēšana – 3.3.6., 3.5.9., 3.6.8., 5.6.3., 5.7.1., 7.5.3., 7.7.1., 7.8.5.

Dirihlē princips – 3.6.4., 4.7.4.

Invariantu metode – 2.2.3., 2.4.4., 3.1.8., 3.2.6., 4.5.4., 7.6.4.

Kombinatorika

Skaitīšana – 1.2.6., 2.2.4., 3.4.7., 4.5.2., 4.6.3., 4.9.2., 7.7.3., 7.9.1.

Kombinatorikas struktūras – 2.1.5., 3.5.3., 4.8.4., 5.5.2., 5.9.4., 7.7.4., 7.8.4.

Ekstremālā elementa metode – 3.6.3.

Invariantu metode – 5.6.1.

Algoritmika

Algoritma izstrāde – 2.5.4., 3.3.9., 3.6.5., 5.5.5., 5.6.5., 5.7.5., 7.9.4.

Loģiska rakstura uzdevumi – 1.3.5., 2.3.5., 3.2.8., 3.6.3., 4.9.4., 5.5.1., 7.5.5.

Procesu analīze – 1.1.10., 1.2.8., 1.4.10., 2.5.5., 3.1.3., 3.1.6., 3.2.1., 3.3.5., 3.5.5., 3.5.10., 3.6.10., 4.9.4., 5.6.4., 5.8.5., 7.5.4., 7.6.5., 7.7.5., 7.9.5.

SĒRIJA „LAIMA" MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome: A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis

Māksliniecisкā noformētāja: A. Šuste

1991. gada augustā Īslande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Īslandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA" GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L.Freija, S.Zabarovska, B. Johannesons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: LU, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: LU, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.** Rīga: LU, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: LU, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: LU, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, Ā. Viļuma, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2009.

36. K. Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums? 1. daļa.** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1984.-1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.

40. M.Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993.-2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000.-2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.

45. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm 2009./2010. mācību gadā.** Rīga: LU, 2011.