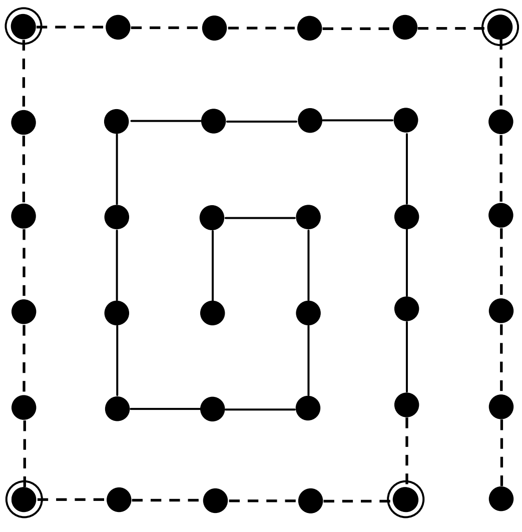
Agnis ANDŽĀNS, Dace BONKA, Zane KAIBE,

Laila ZINBERGA, Benedikts JOHANNESSONS

MATEMĀTIKAS SACENSĪBAS 4.-9. KLASĒM

UZDEVUMI UN ATRISINĀJUMI

2008./2009. MĀCĪBU GADĀ



RĪGA 2009

UDK 51(075.2)
An 318

A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. ***Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2008./2009. mācību gadā.*** Rīga: Latvijas Universitāte, 2009. – 127 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2008./2009. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi un atrisinājumi 4. – 9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Darbs izstrādāts ar Latvijas Republikas Izglītības un Zinātnes ministrijas atbalstu.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-148-0

SATURS

IEVADS

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tas ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes. Mācoties matemātiku, izveidojas priekšstats par pierādījumu un attīstās iekšējā vajadzība pēc tā. Matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē.

Neapšaubāma ir matemātisko uzdevumu loma bērna intelekta attīstībā. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Loģiskajai domāšanai ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā. Matemātikas specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Nepārvērtējama ir dažāda līmeņa matemātikas olimpiāžu nozīme uzdevumu risināšanas popularizēšanā. Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātiskās kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusskolas pasākumi matemātikā: Valsts matemātikas olimpiāde 3 kārtās (sagatavošanās, rajona un Valsts olimpiādes), Atklātā matemātikas olimpiāde, 4. klašu konkurss „Tik vai... Cik?", Jauno matemātiķu konkurss 4. – 7. klašu skolēniem, Profesora Cipariņa klubs visiem pamatskolēniem, Neklātienes Nodarbības vidusskolēniem, Mazā Matemātikas un Informātikas universitāte, matemātikas kursi skolēniem un skolotājiem vairākos Latvijas reģionos, kā arī citas aktivitātes.

Matemātikas olimpiādes un konkursi izvirza skolēniem konkrētus mērķus un faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Tie rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes un konkursi ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību. Kā piemēru varam minēt Atklāto matemātikas olimpiādi, kurā 2008./2009. m. g. piedalījās vairāk nekā 2700 skolēnu.

Piedaloties matemātikas olimpiādēs un konkursos, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Vienlaikus ar matemātisko zināšanu apgūšanu un padziļināšanu šajā procesā rūdās skolēnu raksturi, viņi veidojas kā personības.

Risinot nestandarta uzdevumus, skolēns gūst matemātiskās domāšanas pieredzi un mācās izmantot pasaules matemātiskās izpratnes principus. Nestandarta uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Tā kā lielā daļā skolu ar matemātikas mācīšanu nodarbojas tikai pamatskolas matemātikas līmenī, skolēniem ir ierobežotas iespējas apgūt paaugstinātas grūtības uzdevumu risināšanu. Tāpēc liela nozīme ir šai un citām LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas izdotajām grāmatām ar izstrādātiem olimpiāžu un konkursu uzdevumu atrisinājumiem. Ikviens no LU A. Liepas NMS izdotajiem materiāliem tiek sagatavots tā, lai ar to varētu strādāt ne tikai skolotāji vai paši apdāvinātākie skolēni, bet gan katrs interesents, kurš ir gatavs ieguldīt savā attīstībā laiku un pūles. Tieši interese un pašatdeve ir noteicošie faktori skolēnu izaugsmei un iespējai gūt panākumus.

Strādājot ar grāmatu, iesakām ar katru uzdevumu vispirms darboties patstāvīgi un, neielūkojoties mūsu piedāvātajos atrisinājumos, pēc iespējas pilnīgi un detalizēti pašam to atrisināt, kā arī rūpīgi pierakstīt atrisinājumu. Tādējādi Jūs attīstīsiet iemaņas un praktizēsieties patstāvīgi atrast un pielietot metodes uzdevumu risināšanā.

Ja Jūs nezināt, kā var atrisināt attiecīgo uzdevumu, varat meklēt palīdzību otrajā grāmatas sadaļā „Ieteikumi”, kurā sniegtas norādes, kā nonākt pie mums zināmā atrisinājuma.

Pēc uzdevuma patstāvīgas atrisināšanas iesakām tomēr ieskatīties arī grāmatā piedāvātos risinājumos un tos rūpīgi izpētīt, jo, pat ja Jūs uzdevumu esat atrisinājis pareizi, bet atšķiras pielietotā metode, mūsu metodes var noderēt tālākai attīstībai un citu uzdevumu risināšanai.

Matemātikas sacensības, kuru uzdevumi ir apkopoti šajā grāmatā, tiek rīkotas ar LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas iniciatīvu vai līdzdalību. Visu matemātikas sacensību visi uzdevumi, īsi atrisinājumi, rezultāti un arhīvi ir atrodami arī LU A. Liepas NMS mājas lapā http://nms.lu.lv.

Autori

UZDEVUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?"

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Aprēķini $\mathbf{135 - 15 \cdot 9 + 144 : 18}$

a) 0

b) 8

c) 9

d) 68

e) 69

1.1.2. Aprēķini sešstūra *STROPU* perimetru, ja zināms, ka sešstūra *ABCDEF* perimetrs ir 12 cm un visiem trijstūrīšiem visas malas ir vienāda garuma.

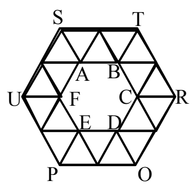
a) 4 cm

b) 12 cm

c) 18 cm

d) 24 cm

e) 36 cm



1.1.3. 4 āboli un 5 bumbieri kopā maksā 1 latu, savukārt 3 āboli, 2 bumbieri un 7 plūmes kopā maksā 82 santīmus. Cik maksā 1 ābols, 1 bumbieris un 1 plūme kopā?

a) 18 sant.

b) 3 sant.

c) 1 Ls

d) 26 sant.

e) nevar noteikt

1.1.4. Dots skaitlis 541. Kur ir jāieraksta cipars 3, lai iegūtais četrciparu skaitlis būtu vislielākais?

a) starp cipariem 4 un 5

b) starp cipariem 4 un 1

c) aiz cipara 1

d) pirms cipara 5

1.1.5. Kā mainīsies starpība, ja mazinātāju palielinās par 4, bet mazināmo samazinās par 4?

a) palielināsies par 4

b) palielināsies par 8

c) nemainīsies

d) samazināsies par 4

e) samazināsies par 8

1.1.6. Kāda daļa no kvadrāta laukuma ir iekrāsota (skat. U1.1. zīm.)?

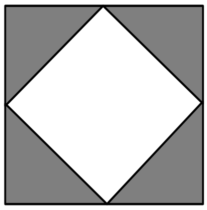
a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{4}{6}$



U1.1.zīm.

1.1.7. Vienādībā *ABC* + *ABC* = *DBCC* vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi cipari – ar dažādiem burtiem. Kāds skaitlis aizstāts ar burtiem *ABCD*?

a) 1605

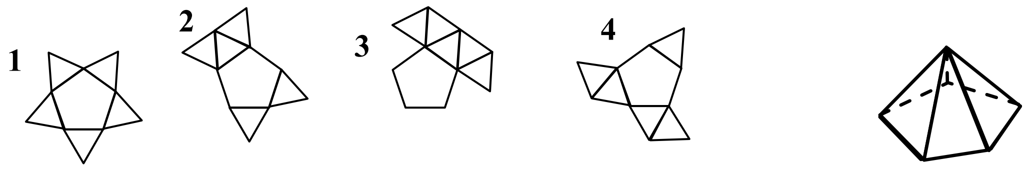
b) 5701

c) 1500

d) 7501

e) nevar noteikt

1.1.8. Nosauc visus zīmējumus, no kuriem iespējams izgatavot piramīdu, kāda attēlota labajā pusē, salokot figūru pa uzvilktajām līnijām.



a) 1

b) 1, 4

c) 1, 3

d) 1, 2, 3, 4

e) 1, 2, 4

f) 1, 2

1.1.9. Jānītis saka Pēterītim: „Ja es pie tavas naudas pielikšu pusi savējās, tad mums tieši sanāks divām vienādām konfektēm.” Savukārt Pēterītis saka: „Bet ja es pie tavas naudas pielikšu pusi savējās, mums būs tieši tik naudas, cik maksā viena šāda konfekte.” Cik naudas ir Jānītim?

a) 20 sant.

b) puse no konfektes cenas

c) divreiz mazāk nekā Pēterītim

d) nav necik

e) nevar noteikt

1.1.10. 1 svece deg 4 stundas. Cik ilgā laikā izdegs 4 šādas sveces, ja tās aizdedzinās vienlaicīgi?

a) 16 stundās

b) 1 stundā

c) 8 stundās

d) 4 stundās

e) nevar noteikt

1.1.11. Diagrammā attēlots vienā zemnieku saimniecībā saražotā piena daudzums piecos mēnešos. Cik *t* piena tika saražotas gada pēdējos trīs mēnešos kopā?

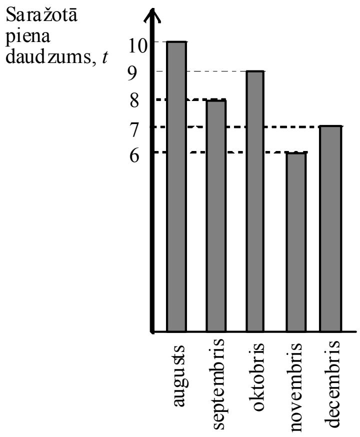
a) 22 *t*

b) 7 *t*

c) 40 *t*

d) 27 *t*

e) 23 *t*



1.1.12. Kāds ir vidējais saražotā piena daudzums šajos 5 mēnešos?

a) 9 *t*

b) 8 *t*

c) 7 *t*

d) 20 *t*

e) 7,5 *t*

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Aprēķini $(2009+29)-19\cdot 2$

a) 1942

b) 1990

c) 2000

d) 4038

e) cits skaitlis

1.2.2. Sākumā eglītē bija iedegtas 7 svecītes. Pēc 1 stundas 3 svecītes izdega, bet to vietā iededza 4 citas. Tas pats atkārtojās ik pēc 60 minūtēm. Cik svecītes degs eglītē pēc 4 stundām 10 minūtēm?

a) 3

b) 10

c) 11

d) 12

e) 20

1.2.3. Cik četrstūrus var saskatīt dotajā U1.2. zīmējumā?

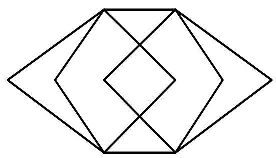
a) 3

b) 4

c) 5

d) 7

e) 9



U1.2.zīm.

1.2.4. Kastē ir 4 dažādi cimdu pāri; 2 pāri ir zaļā krāsā, 2 – sarkanā. Cik veidos no šiem cimdiem var izvēlēties 2 cimdus: zaļu un sarkanu, tā, lai starp izvēlētajiem cimdiem būtu gan labās rokas, gan kreisās rokas cimds?

a) 2

b) 4

c) 8

d) 15

e) 28

1.2.5. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

500 min. ◯ 5 h 10 min.

4 m 5 cm ◯ 45 dm

1.2.6. Tukšajās rūtiņās ieraksti aritmētisko darbību zīmes (+, -, · vai :) tā, lai iegūtu pareizu vienādību. Pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt.

1		2		3		4		5	=	10

1.2.7. Cik daļās taisnstūri var sadalīt 3 taisnes? (Visas taisnes krusto taisnstūri.) Uzrādi visus gadījumus un uzzīmē piemērus!

1.2.8. Ziemassvētku ballē bija ieradušies trīs draugi: Jānis, Pēteris un Rūdis. Viņiem bija dažādu krāsu cepures – sarkana, zaļa un dzeltena. Noskaidro, kādas krāsas cepure bija katram no draugiem, kā arī, kādu dāvanu katrs no viņiem saņēma, ja zināmi sekojoši fakti:

A Pēteris dāvanā saņēma grāmatu, un viņam nav sarkanā cepure.

B Dzeltenās cepures nēsātājs dāvanā saņēma puzzli.

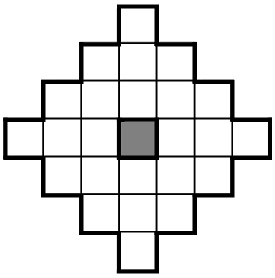
C Jānis dāvanā nesaņēma krāsu zīmuļus.

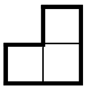
1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. Aprēķini: (25 *cm* + 3 *dm*) · 55 – 3 *m*!

1.3.2. Sadaliet visu doto figūru (neiekrāsoto daļu) „stūrīšos” (skat. U1.3.zīm.)! Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām. „Stūrīši” var būt arī pagriezti savādāk.



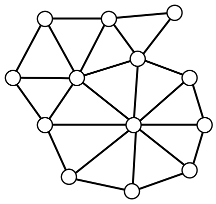


„stūrītis”

U1.3.zīm.

1.3.3. Atrodi **visas** iespējas, kādi naturāli skaitļi vai 0 var būt x un y vietā, lai vienādība $\mathbf{2x + 3y = 20}$ būtu pareiza! Pamato, kāpēc nav citu iespēju!

1.3.4. Izkrāso U1.4. zīmējumā attēlotos punktus trīs krāsās tā, lai katram trijstūrim visas virsotnes būtu dažādās krāsās. Pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt.



U1.4.zīm.

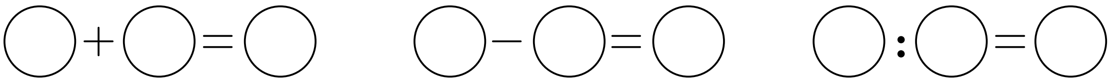
1.3.5. Saldumu tirgotavas „Ķepainītis” grāmatvedis Fredis apkopoja datus par konfekšu pārdošanas apjomiem. Viņš secināja, ka

1) *septembrī* un *oktobrī* kopā tika pārdots tikpat daudz konfekšu, cik *augustā* un *novembrī* kopā, kas ir arī tikpat, cik *decembrī* un *janvārī* kopā.

2) *oktobrī* bija pārdoti 25 *kg* konfekšu, *decembrī* (kā jau pirms Ziemassvētkiem) pārdeva divas reizes vairāk konfekšu nekā *oktobrī*, bet *novembrī* un *augustā* tika pārdoti 30 *kg* konfekšu katru mēnesi.

Aprēķini, cik kilogrami konfekšu tika pārdoti katru mēnesi, un attēlo šos datus stabiņu diagrammā!

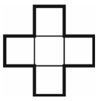
1.3.6. Aplīšos ieraksti pa vienam ciparam, katrā aplītī **citu** ciparu, tā, lai visas trīs iegūtās vienādības **vienlaicīgi** būtu pareizas! Jāizmanto cipari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9.

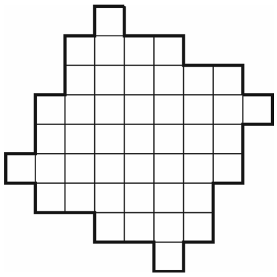


1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. Aprēķini **(25 *cm* + 35 *mm*) · 9 – 2 *m***

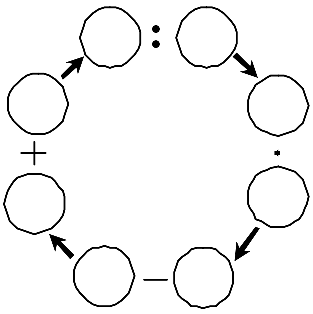
1.4.2. Sadali visu doto figūru „krustiņos“. Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām. Pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt.



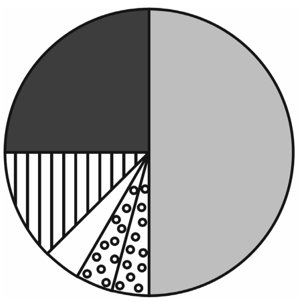


1.4.3. Atrodi **visas** iespējas, kādi naturāli skaitļi vai 0 var būt x un y vietā, lai vienādība $3 \cdot x + 4 \cdot y = 33$ būtu pareiza.

1.4.4. Aplīšos ieraksti pa vienam ciparam, katrā aplītī citu ciparu, tā, lai, izpildot darbības pa apli bultiņu virzienā, katras darbības rezultāts būtu vienāds ar nākamās darbības pirmo locekli.



1.4.5. Olga diagrammā attēloja, kā viņa ir pavadījusi iepriekšējo diennakti. Nosaki, kādu diennakts daļu un cik stundas viņa veltīja katrai nodarbei!

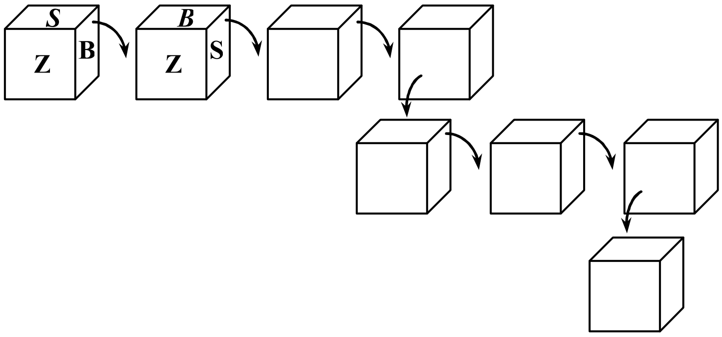


	Diennakts daļa	Laiks (stundas)
- miegs		
- skola		
- pulciņi		
- TV		
- ēšana		

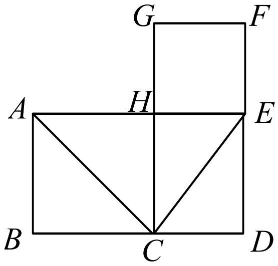
1.4.6. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti zīmes >, < vai =.)

0,050 km ◯ ***500 m*** ***Ls 6,40*** ◯ ***6 lati 4 sant.*** ***3,050 kg*** ◯ ***3 kg 5 g***

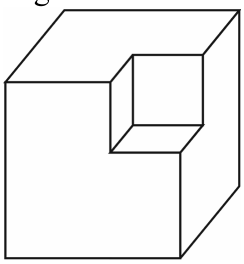
1.4.7. Kubiņu ripina no vienas skaldnes uz citu bultiņu norādītajā virzienā. Nosaki visu kuba skaldņu krāsu pēc katra pagrieziena, ja zināms, ka katras divas kuba pretējās skaldnes ir vienādā krāsā.



1.4.8. Aprēķini dotās figūras *ABDFGH* laukumu un perimetru, ja zināms, ka kvadrāta *ABCH* malas garums ir 4 *cm*, bet kvadrāta *EFGH* malas garums – 3 *cm*.



1.4.9. No kuba ar šķautnes garumu 5 *cm* izgriezts kubs ar šķautnes garumu 2 *cm* tā kā parādīts zīmējumā. Nosaki iegūtā daudzskaldņa virsmas laukumu.



1.4.10. Ir zināms, ka 10 āboli sver tikpat cik 3 bumbieri kopā ar vienu ananāsu un, ka 1 ananāss sver tikpat cik 6 āboli kopā ar vienu bumbieru. Noskaidro, cik āboli atbilst viena ananāsa masai! Visi āboli sver vienādi un arī visi bumbieri pēc masas ir vienādi savā starpā.

1.4.11. Uz galda bija 7 pilnas sulas pudeles, 7 līdz pusei piepildītas pudeles un 7 tukšas tādas pašas pudeles. Mamma palūdza Pēterim, Jānim un Andrim sadalīt tās savā starpā tā, lai katrs zēns saņemtu gan vienādu skaitu pudeļu, gan vienādu daudzumu sulas. Sākumā zēni gribēja pārliet sulu no pilnajām pudelēm tukšajās. Taču viens no zēniem ievēroja, ka uzdevumu var izpildīt, arī nepārlejot sulu. Uzraksti, kā to var izdarīt!

1.4.12. Mamma nopirka audumu Jānīša uzvalkam. Žaketei viņa nopirka 1 *m* 40 *cm* sarkana auduma, bet biksēm – 90 *cm* melna auduma. Izrādījās, ka 1 *m* cena abu krāsu audumiem ir viena un tā pati. Par sarkano audumu mamma samaksāja pa 3 Ls vairāk nekā par melno. Cik maksāja viss pirkums kopā?

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

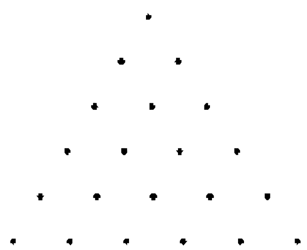
2.1.1. Ievietojiet U2.1.zīm. burtu vietā ciparus, lai iegūtu pareizu reizināšanas piemēru! (Katrs cipars aizstāts ar vienu burtu, dažādiem cipariem atbilst dažādi burti.)

$$\begin{array}{r} \text{S E A M} \\ \cdot \qquad \text{T} \\ \hline \text{M E A T S} \end{array}$$

U2.1.zīm.

Pietiek uzrādīt vienu risinājumu.

2.1.2. Caur visiem U2.2. zīm. attēlotajiem punktiem novelc slēgtu lauztu līniju, kas pati sevi nekrusto. Kāds var būt mazākais šādas līnijas garums? (Par garuma vienību izvēlamies īsāko attālumu starp diviem dotajiem punktiem.)



U2.2.zīm.

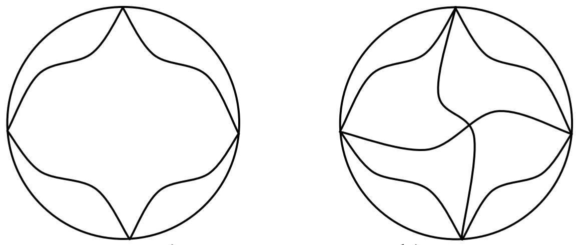
2.1.3. Ar skaitli atļauts veikt sekojošas darbības: 1) pareizināt ar 3; 2) atņemt 6; 3) pieskaitīt šī skaitļa ciparu summu. (Piemēram, no skaitļa 67 ar šīm darbībām tiktu iegūts attiecīgi: 1) $67 \cdot 3 = 201$; 2) $67 - 6 = 61$; 3) $67 + (6 + 7) = 80$.) Vai, veicot šādas darbības jebkurā secībā vairākas reizes pēc kārtas, no skaitļa 33 var iegūt skaitli 2008?

2.1.4. Vai jebkuru trijstūri var sagriezt 5 daļās, starp kurām ir viens trijstūris, četrstūris, piecstūris, sešstūris un septiņstūris?.

2.1.5. Vinnijs Pūks bija atnācis pie Trusīša uz tēju. Trusītis uzklāja galdu un uzlika arī 5 medus trauciņus, kuros bija attiecīgi 30 g, 50 g, 70 g, 90 g un 110 g medus. Abi draugi vienlaicīgi sāka ēst medu un paņēma katrs pa vienam trauciņam (Trusītis ļāva Pūkam izvēlēties pirmajam). Tad, kad viens trauciņš bija izēsts, uzreiz tika ņemts nākamais vēl neaizskartais trauciņš. Kurš trauciņš Pūkam jāizvēlas vispirms, lai kopā viņš varētu apēst vairāk medus nekā Trusītis? Abi draugi medu ēd ar vienādu ātrumu.

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Vai U2.3. **a)** un **b)** zīmējumos attēlotās figūras var uzzīmēt, neatraujot zīmuli no papīra un ne pa vienu posmu nevelkot to vairāk kā vienu reizi? Ja nevar, pamatojiet, kāpēc!



a) b)

U2.3.zīm.

2.2.2. Izteiksmē **8 8 8 8 8** starp cipariem ievietojiet aritmētisko darbību zīmes („+”, „–” , „·”, vai „:”) un/ vai iekavas tā, lai i egūtās izteiksmes vērtība būtu **a)** 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4; **e)** 5. **Nav** jāatrod visas iespējas.

2.2.3. Atrodiet visus tādus naturālu skaitļu a un b pārus, kam ir pareiza vienādība $4a+20=60-5b$. Pamatojiet, ka citu tādu skaitļu pāru, kas apmierina doto vienādību, nav!

2.2.4. Doti desmit dažādi taisnstūrveida dēlīši, kuriem vienas malas garums ir 20 cm, bet otras malas garums ir attiecīgi 10 cm, 20 cm, 30 cm, ..., 90 cm, 1 m. Vai no šiem dēlīšiem var salikt taisnstūri, kura abu malu garumi ir lielāki nekā 20 cm? (Dēlīši nedrīkst pārklāties.)

2.2.5. Dotas 5 lodītes, uz kurām ir uzraksti „1 g”, „2 g”, „3 g”, „4 g” un „5 g” (uz visām lodītēm uzraksti atšķiras). Ir zināms, ka 4 lodītēm svars sakrīt ar uzrakstu, bet vienas lodītes svars atšķiras no uzraksta uz tās. Parādiet, kā ar **iespējami maz** svēršanām, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, var atrast lodīti, kuras svars nesakrīt ar uzrakstu uz tās. (Nav nepieciešams pamatot, ka ar mazāk svēršanām to izdarīt nevar.)

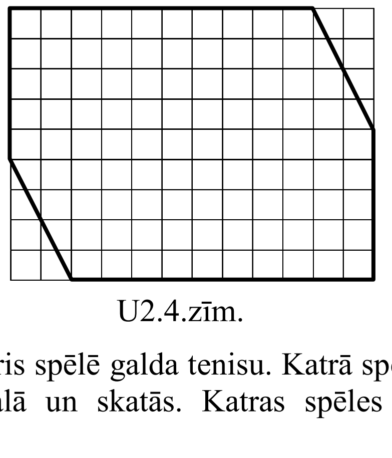
2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Atrodiet vismaz vienu skaitli, kas dalās ar 19, kura ciparu summa ir 19 un kura pēdējie cipari ir „19”!

2.3.2. Rūtiņu lapā uzzīmē divus dažādus piecstūrus, kuru visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs un laukums katram piecstūrim ir vienāds ar 1,5 rūtiņu laukumu. (Piecstūru malām nav obligāti jāiet pa rūtiņu līnijām.)

2.3.3. Noskaidrojiet, cik ir tādu skaitļu n, ka, skaitli 1004 dalot ar n, atlikums ir 14.

2.3.4. U2.4.zīmējumā attēloto figūru sagrieziet divās daļās, no kurām var salikt kvadrātu.



U2.4.zīm.

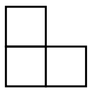
2.3.5. Jānis, Andris un Pēteris spēlē galda tenisu. Katrā spēlē piedalās divi no viņiem, bet trešais stāv malā un skatās. Katras spēles uzvarētājs nākošajā spēlē sacenšas ar malā stāvētāju, savukārt zaudētājs tagad stāv malā. Pēc kāda laika izrādījās, ka Jānis ir piedalījies 10 spēlēs, Andris – 15 spēlēs un Pēteris – 17 spēlēs. Kurš zēns zaudēja otrajā spēlē? Pamatojiet savu atbildi!

2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. Atrisini doto skaitļu rēbusu! Atrodi visus atrisinājumus. (Katrs cipars aizstāts ar vienu burtu: dažādi cipari aizstāti ar dažādiem burtiem, vienādi – ar vienādiem.)

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ + & & S & P & E & D \\ \hline E & T & E & B & S & S \end{array}$$

2.4.2. No 6 zilām un 6 sarkanām figūriņām, kādas attēlotas U2.5.zīm., salieciet kvadrātu 6×6 rūtiņas tā, lai nekādām divām vienas krāsas figūriņām nebūtu kopīgs malas nogrieznis (t.i., vienādas krāsas figūriņas drīkst saskarties tikai ar stūriem).



U2.5. zīm.

2.4.3. Ruksītis Nif-Nifs viens pats mājiņu var uzcelt 8 dienās, arī ruksītis Nuf-Nufs tādu pašu mājiņu viens pats būvē 8 dienas, savukārt čaklais ruksītis Naf-Nafs šādu mājiņu var viens pats var uzcelt 6 dienās. Vēl brāļiem piepalīdz pelēns Tims, kurš vienatnē šādu mājiņu būvētu 12 dienas. Cik ilgā laikā mājiņa tiktu uzbūvēta, ja pie darba ķertos visi draugi kopā?

2.4.4. Dotas 20 kartītes. Tām uz vienas puses uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 20 (uz katras kartītes – cits skaitlis), bet uz otras puses – naturāli skaitļi no 21 līdz 40. Pie tam abu uz vienas kartītes uzrakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati visām 20 kartītēm.

Uz labu laimi no šīm 20 kartītēm izvēlētas 4. Vai no šīm četrām kartītēm noteikti vienmēr varēs paņemt trīs kartītes un nolikt tās uz galda tā, ka redzamo skaitļu summa dalās ar 3?

2.4.5. Uz šaha galdiņa tiek izvietotas figūriņas, uz katra lauciņa ne vairāk kā viena figūriņa, pie tam nekādas divas figūriņas nedrīkst atrasties uz blakus lauciņiem (par *blakus lauciņiem* sauksim lauciņus, kuriem ir kopīga mala vai kopīgs stūris).

Kāds **mazākais** daudzums figūriņu jāizvieto uz galdiņa 8×8 rūtiņas, lai vairāk nevienu figūriņu nebūtu iespējams novietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem?

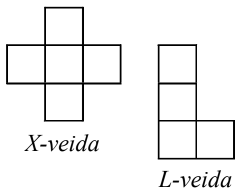
2.5. Piektā kārta

2.5.1. Atrodiet tādu naturālu skaitli A, kuram pieskaitot divkāršotu skaitļa A reizinājumu pašam ar sevi un iegūto summu izdalot ar skaitļa A ciparu summu, rezultāts ir 100.

2.5.2. Alise uzrakstīja rindā visus naturālos skaitļus pēc kārtas no 1 līdz 100 (ieskaitot), neatdalot tos citu no cita un tādējādi iegūstot ciparu virkni (iegūtās virknes sākums ir 1234...). Pēc tam šajā virknē, virzoties no kreisās uz labo pusi, izsvītroja visus tos ciparus, kas ir lielāki par sev sekojošo ciparu (piemēram, virknē 1223**5**4**9**7 tiek izsvītroti cipari 5 (jo 5>4) un 9 (9>7)). Šādu darbību atkārto tik ilgi, kamēr vairs nevienu ciparu izsvītrot nevar. Kāda ir beigās palikušo ciparu summa?

2.5.3. Brīnumu laukā bija 6 koka sprunguļi, kuru garumi ir attiecīgi 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm un 60 cm. Lapsa Alise un runcis Bazilio ar tiem spēlēja šādu spēli: katrs pēc kārtas izvēlas pa vienam sprungulim, līdz visi sprunguļi paņemti (un katram ir pa 3 sprunguļiem); pirmā izvēlas Alise. Uzvar tas, kurš no saviem sprunguļiem var izveidot trijstūri (katrai trijstūra malai jābūt veselam sprungulim, t.i., sprunguļus jāsavieto ar galiem kopā, tos nedrīkst lauzt gabalos). Kurš uzvarēs, pareizi spēlējot? (Aprakstiet, kā uzvarētājam ir jārīkojas, un pamatojiet, kāpēc viņš vienmēr uzvarēs neatkarīgi no pretinieka gājieniem.) Vai var gadīties, ka abi spēlētāji no saviem sprunguļiem var izveidot pa trijstūrim?

2.5.4. Sniega karaliene Ledus pils mazajā zālē grib izklāt visu grīdu ar ledus parketa plāksnēm. Viņai pieejamas divu veidu plāksnes: *L-veida* un *X-veida* (skat. U2.6.zīm.; vienas rūtiņas garums 1 *m*).



U2.6.zīm.

Vai Sniega karalienei to izdosies izdarīt, ja zāles izmēri ir **a)** 6 *m*×6 *m*; **b)** 7 *m*×7 *m*. Jāizmanto vismaz viena katra veida plāksne. Plāksnes nedrīkst griezt gabalos, kā arī nevienā vietā tās nedrīkst pārklāties.

2.5.5. Pepijai ir 10 dažādi cimdu pāri – 5 pāri sarkanā krāsā un 5 pāri zaļā krāsā. Cik dažādos veidos Pepija var izvēlēties 4 cimdus tā, lai starp tiem būtu gan 2 zaļi un 2 sarkani cimdi, gan 2 labās rokas un 2 kreisās rokas cimdi?

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

3.1.1. Andrim ir deviņas kartītes. Uz katras no tām uzrakstīts cipars no 1 līdz 9; visi uzrakstītie cipari ir dažādi. Cik dažādus divciparu skaitļus Andris var salikt no šīm kartītēm? **Skaitļi nav jāsaliek vienlaicīgi.**

3.1.2. Skolā ir 36 klases un 1045 skolēni. Vai var gadīties, ka nevienā klasē nav ne 30, ne vairāk skolēnu?

3.1.3. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām, kurās ierakstīti skaitļi, kā parādīts U3.1.zīmējumā. Ar vienu gājienu var izvēlēties no 2×2 rūtiņām sastāvošu kvadrātu un katrā šī kvadrāta rūtiņā esošajam skaitlim pieskaitīt vieninieku.

1	1	1
1	1	1
1	1	2

U3.1.zīm.

8		9
	36	
10		11

U3.2.zīm.

5	10	6
11	22	12
7	13	8

U3.3.zīm.

Vai, lietojot šādus gājienus atkārtoti, ir iespējams

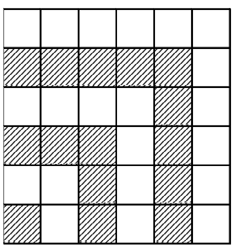
a) panākt, lai vienlaicīgi visās rūtiņās būtu nepāra skaitļi?

b) panākt, lai piecās rūtiņās būtu tādi skaitļi kā U3.2.zīm. (skaitļi citās rūtiņās var būt jebkuri)?

c) tādu ainu, kāda redzama U3.3.zīm.?

3.1.4. Pirmajā septembrī 2008 bērni atnesa profesoram Cipariņam pa konfektei „Gamma”. Šīs konfektes ražo divas fabrikas; vienas fabrikas ražotās konfektes ir mazliet vieglākas nekā otras fabrikas ražotās. Pēc ārējā izskata konfektes atšķirt nevar. Profesors Cipariņš zina, ka vismaz 2006 bērni (varbūt pat visi) ir atnesuši vienādas konfektes, bet nezina, vai konfekšu vairākums ir vieglās vai smagās. Profesoram ir sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanām viņš var uzzināt, vai visas konfektes ir vienādas un, ja nav, tad vai vairākums ir vieglās vai smagās?

3.1.5. **a)** Pamatojoties uz U3.4.zīm., pierādīt teorēmu: ja n – naturāls skaitlis, tad $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$.

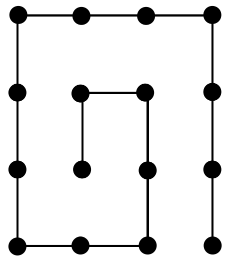


U3.4.zīm.

b) Pamēģiniet izdomāt zīmējumu, kas pierāda teorēmu: ja n – naturāls skaitlis, tad $1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

3.1.6. Ja punktu kvadrātiskā režģī attālums starp blakus esošiem punktiem ir 1, tad U3.5.zīm. attēlotās lauztās līnijas garums ir 15, un tai ir 6 stūri.

Kāds garums un cik stūru ir lauztai līnijai, kas līdzīgā veidā aizpilda 100×100 punktu lielu režģi?



U3.5.zīm.

3.1.7. Gan Sniegbaltītes rotaslietu kastīte, gan tās vāciņš ir regulāra septiņstūra formā.

Vai kastītes stūrus un vāciņa stūrus var nokrāsot 7 dažādās krāsās tā, lai neatkarīgi no tā, kā Sniegbaltīte uzliek kastītei vāciņu, vismaz vienā vietā saskartos vienādi nokrāsoti stūri?

3.1.8. Kā var izvēlēties 3 dažādus nenulles ciparus a, b, c, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības: skaitlis $\overline{abc}$ dalās ar 7, skaitlis $\overline{bca}$ dalās ar 9, skaitlis $\overline{cab}$ dalās ar 11?

3.1.9. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitlis n^2+1 dalās ar vismaz vienu pirmskaitli, kas lielāks par 1 000 000?

3.1.10. Sastādīt matemātisku uzdevumu, kas saistīts ar kādu šīs vasaras notikumu, un atsūtīt mums to līdz ar atrisinājumu.

Sniedzam dažus veiksmīgākos uzdevumus (atrisinājumus skatiet grāmatas „Atbilžu un atrisinājumu” daļā):

1) *Autors: Oļegs Marutkins, Rīgas Zolitūdes ģimnāzija, 6.klase.*

Vasarā ar draugiem spēlējot spēli „Jūras kaujas”, mūs ieinteresēja, kāds mazākais daudzums „šāvienu” nepieciešams, lai noteikti trāpītu kādā kuģī, kas sastāv no 4×1 rūtiņām.

2) *Autors: Valts Štolcers, Līvānu 1.vidusskola, 7.klase.*

Ceļojumā pa ekskursiju es nopirku konfektes. Es pajautāju mammai, abiem brāļiem un tētim, cik konfekšu man tagad ir. Atbildes bija sekojošas:

Mamma teica: 6;
Tētis teica: 4;
Lielais brālis teica:5;
Mazais brālis teica: 1.

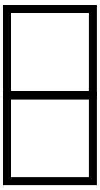
Visi pateica nepareizi. Viens no viņiem kļūdījās par 2, viens par 1, viens par 3 un viens par 6. Cik konfekšu man bija?

3) *Autors: 8.-9.klašu matemātikas pulciņš, Daugavpils Saskaņas pamatskola.*

Svečų dienā uz tilta sapulcējās ļoti liels skaits cilvēku, kuri atnāca, lai iedegtu sveces. Tas notika tā: pēc kārtas katrs cilvēks pienāca pie vietas, kur atradās sveces, un vienā reizē iededza 2 sveces. Šādu procedūru izdarīja katrs. Tādējādi neaizdedzināta palika 1 svecīte. Ja katrs iedegtu pa 3, 4, 5 vai 6 svecēm, tad vienalga 1 svece paliktu neaizdedzināta. Bet, ja katrs iedegtu 7 sveces vienā reizē, tad būtu aizdedzinātas visas sveces. Kāds bija mazākais iespējamais sveču daudzums uz tilta, ja zināms, ka uz tilta bija vismaz 2 sveces?

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

3.2.1. Figūra U3.6.zīm. sastāv no 2 vienādiem kvadrātiem; tā izveidota no 7 vienādiem nogriežņiem.



U3.6.zīm.

Atrodiet **trīs** dažādus veidus, kā nodzēst 3 no šiem nogriežņiem, lai paliktu pāri viens kvadrāts. (Uzskatām: ja diviem nogriežņiem ir kopīgs galapunkts un vienu no šiem nogriežņiem dzēš, tad kopīgais galapunkts paliek nenodzēsts.)

3.2.2. Kuba izmēri ir $4 \times 4 \times 4$. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var to sagriezt 64 kubiņos, kuru izmēri ir $1 \times 1 \times 1$? Katrs grieziens šķeļ griežamo ķermeni pa plakni. Pēc katra grieziena iegūtās daļas drīkst pārkārtot.

3.2.3. Naturāla skaitļa A ciparu summa ir 7. Vai skaitļa $7A$ ciparu summa var būt 24?

3.2.4. Doti 756 dažādi veseli pozitīvi skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz 2008. Pierādīt: no šiem skaitļiem var atrast divus, kuru summa dalās ar 8.

3.2.5. Triju naturālu skaitļu summa ir 31. Kāda ir mazākā iespējamā šo skaitļu kvadrātu summa?

3.2.6. Profesors Cipariņš dzīvo skaitļu ass punktā S. Kādu rītu viņš nolēma doties pastaigā, sperot 10 soļus: pirmo – ar garumu 1, otro – ar garumu 2, ..., desmito – ar garumu 10. (Soļu virzienus Cipariņš var izvēlēties patvaļīgi.) Vai var gadīties, ka Cipariņš pastaigas laikā nevienu brīdi nav attālinājies no sākumpunkta S

a) vairāk par 5,

b) vairāk par 4?

3.2.7. Vai var uzzīmēt plaknē slēgtu lauztu līniju, kurai ir 16 posmi, katri divi blakus posmi ir perpendikulāri viens otram, posmu garumi pēc kārtas ir 1; 2; 3; ...; 16 un pie tam līnija pati sevi nekrusto?

3.2.8. Skolas galda tenisa čempionātā piedalās triju klašu komandas; katrā ir pa 5 spēlētājiem. Katrā spēlē viens ar otru tiekas divi spēlētāji no dažādām klasēm. Katri divi spēlētāji savā starpā spēlē augstākais vienu reizi. Pašreiz ir notikusi

51 spēle. Pierādīt: noteikti var atrast tādus trīs spēlētājus A, B un C, ka savā starpā jau ir spēlējuši gan A ar B, gan B ar C, gan C ar A.

3.2.9. Maija iedomājusies trīs viencipara naturālus skaitļus x, y un z. Katrīna var viņai pateikt trīs savus iedomātus veselus skaitļus a, b un c (tie var arī nebūt viencipara) un lūgt, lai Maija pasaka summas $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ vērtību. Vai Katrīna var izvēlēties skaitļus a, b, c tā, lai, dzirdot Maijas atbildi, viņa varētu noskaidrot gan x, gan y, gan z vērtību?

3.2.10. Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt vienu no burtiem A; B; C; D un vienu no cipariem 1; 2; 3; 4 tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

a) katrā rindā, katrā kolonnā un katrā no abām diagonālēm sastopami gan visi četri burti, gan visi četri cipari,

b) katrs burts un katrs cipars abi kopā sastopami tieši vienā rūtiņā?

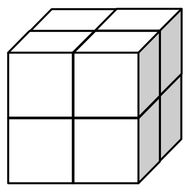
3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

3.3.1. **a)** Vai pastāv 2 viens otram sekojoši naturāli skaitļi, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 11?

b) Vai pastāv 3 tādi viens otram sekojoši naturāli skaitļi?

3.3.2. **a)** Vai var apstaigāt visas kuba virsotnes, ejot tikai pa kuba šķautnēm un nevienā vietā neesot vairāk kā vienu reizi? (Tas, starp citu, nozīmē, ka maršruta sākums ir citur nekā maršruta beigas.)

b) Vai var tā apstaigāt visas kuba virsotnes un visus skaldņu centrus, ja drīkst iet pa kuba šķautnēm un pa „krustiem”, kas sadala katru skaldni tā, kā parādīts U3.7.zīm.?



U3.7.zīm.

3.3.3. Vai eksistē tādi 3 cipari, kas visi atšķiras no nulles un ar kuru palīdzību var pierakstīt bezgalīgi daudzus naturālu skaitļu kvadrātus? (Par kvadrātiem sauc skaitļus 1; 4; 9; 25; ..., t.i., skaitļus, ko iegūst, kādu naturālu skaitli reizinot pašu ar sevi.)

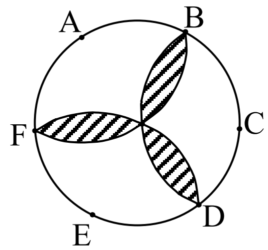
3.3.4. Katrīna izvēlējās kādu naturālu skaitli un vienu no tā dalītājiem, pieskaitīja dalītājam 10, iegūto summu pareizināja ar 5 un rezultātu atņēma no iedomātā skaitļa. Rezultātā Katrīna ieguva skaitli 1. Kāds varēja būt Katrīnas iedomātais skaitlis?

3.3.5. Ja x un y – cipari, pie tam $x \neq 0$, tad ar $\overline{xy}$ saprotam divciparu skaitli, kura desmitu cipars ir x, bet vienu cipars ir y. Vai var pastāvēt vienādība $\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} = \overline{cb} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{ac}$, ja a, b, c ir dažādi nenulles cipari?

3.3.6. Dots, ka n ir naturāls skaitlis, $n > 1$. Katram naturālam skaitlim no $3n + 1$ līdz $4n$ ieskaitot aprēķināja tā apgriezto lielumu. Pierādīt, ka visu apgriezto lielumu summa ir lielāka par $\frac{1}{4}$.

3.3.7. Plaknē atzīmēti vairāki punkti; Andris izmērīja attālumu starp katriem diviem no tiem. Daži no Andra iegūtajiem rezultātiem bija $1m$; $2m$; $4m$; $8m$; $16m$; $32m$; $64m$; $128m$. Kāds ir mazākais iespējamais atzīmēto punktu daudzums?

3.3.8. Uz riņķa līnijas atzīmēti 6 punkti, kas to sadala 6 vienādos lokos. Novilkti 3 loki, kuru centri ir punktos A; C; E, bet rādiusi vienādi ar riņķa līnijas rādiusu (sk. U3.8.zīm.). Vai neiesvītroto daļu var sagriezt 6 gabalos, no kuriem visiem iespējams salikt kaut kādu taisnstūri? Saliekot gabali nedrīkst pārklāties, un taisnstūra iekšpusē nedrīkst palikt tukšas vietas.



U3.8.zīm.

3.3.9. Septiņi rūķīši, kas dzīvo kopā ar Sniegbaltīti, visi ir gan dažāda auguma, gan dažāda svara. Rūķīti sauc par **lielu**, ja, salīdzinot to ar jebkuru citu rūķīti A, viņš ir vai nu garāks, vai smagāks par A (vai arī gan garāks, gan smagāks). Rūķīti sauc par **mazu**, ja, salīdzinot to ar jebkuru citu rūķīti B, viņš ir vai nu īsāks, vai vieglāks par B (vai arī gan īsāks, gan vieglāks).

Rūķītis Gudrītis ievēroja, ka katrs no viņa sešiem biedriem ir vienlaicīgi gan liels, gan mazs. Pierādīt: arī Gudrītis ir vienlaicīgi gan liels, gan mazs.

3.3.10. Andris, Maija un Katrīna sastādīja mājas dežūru plānu Ziemassvētku nedēļai:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K.

Ievērosim, ka katrās divās viena otrai sekojošās dienās dežurantu grupas atšķiras viena no otras tieši par 1 bērnu un nekādas divas grupas nav vienādas.

Ja viņiem pievienotos vēl Imants un Zane, vai plānu ar līdzīgām īpašībām varētu sastādīt visam decembrim?

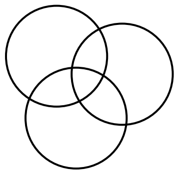
3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus. Zināms, ka skaitlis *ASS* dalās ar 5, bet nedalās ar 4. Vai *OLA* var dalīties ar 5?

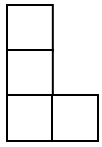
3.4.2. Parādiet, ka kvadrātu var sagriezt šaurleņķu trijstūros. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

3.4.3. Trīs riņķa līnijas U3.9.zīmējumā sadala plakni 8 apgabalos (ieskaitot arī ārējo apgabalu).

Kādā lielākajā daudzumā daļu plakni var sadalīt četras riņķa līnijas?



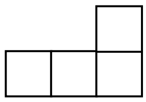
U3.9.zīm.



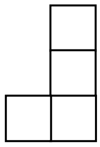
U3.10.zīm.

3.4.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko rūtiņu skaitu var nokrāsot melnas tā, lai katrs no 4 rūtiņām sastāvošs „L burts” (skat. U3.10.zīm.) saturētu vismaz vienu melnu rūtiņu?

Piezīme: „L burts” var būt pagriezts (skat., piem., U3.11.zīm.), bet nevar būt apgriezts „uz mutes” (skat., piem., U3.12.zīm.).



U3.11.zīm.



U3.12.zīm.

3.4.5. Doti 6 punkti, no kuriem nekādi 3 neatrodas uz vienas taisnes. Katri divi punkti savienoti ar taisnes nogriezni. Katrs nogrieznis nokrāsots vai nu balts, vai melns.

a) Pierādīt, ka eksistē trijstūris ar visām virsotnēm dotajos punktos, kam visas malas nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā,

b) vai var būt, ka šāds trijstūris ir tikai viens?

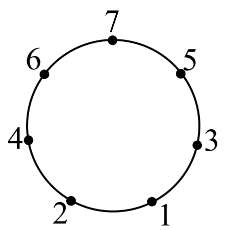
3.4.6. Andris sadalīja piecus dažādus pozitīvus skaitļus divās daļās tā, ka abu daļu summas iznāca vienādas savā starpā. Vai var gadīties, ka Maija sadala šos pašus skaitļus **citās** divās daļās ar tādu pašu īpašību?

3.4.7. Dots, ka *a*, *b* un *c* – trīs dažādi racionāli skaitļi. Pierādīt, ka skaitlis

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

ir kāda racionāla skaitļa kvadrāts.

3.4.8. Septiņi punkti sadala riņķa līniju 7 vienādās daļās; dalījuma punktos ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 7, kā parādīts U3.13.zīm.



U3.13.zīm.

Ievērosim: ja novilksim apskatāmo 7 punktu sistēmai jebkuru simetrijas asi, tad vienā pusē no šīs ass katrs skaitlis ir lielāks par tam simetrisko skaitli otrā pusē.

Vai skaitļus var ierakstīt arī citādā secībā, lai šī īpašība saglabātos?

3.4.9. Kvadrāts sastāv no 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrīna un Maija pamīšus ieraksta rūtiņās dažādus naturālus skaitļus no 1 līdz 100. Sāk Katrīna.

Kad visas rūtiņas aizpildītas, katrā no 10 rindiņām atrod mazāko ierakstīto skaitli. Ja desmit atrasto skaitļu summa ir nepāra skaitlis, uzvar Maija; ja tā ir pāra skaitlis, uzvar Katrīna.

Kura no meitenēm uzvar, pareizi spēlējot?

3.4.10. Sastādiet paši jaunu uzdevumu, kas satur skaitli 2009, un līdz ar atrisinājumu atsūtiet to mums.

Sniedzam dažus veiksmīgākos uzdevumus (atrisinājumus skatiet grāmatas „Atbilžu un atrisinājumu” daļā):

1) *Autors: Toms Lācis, Engures vidusskola, 6.klase.*

Izteiksmē **9 8 7 6 5 4 3 2 1** starp cipariem ievieto aritmētiskās darbību zīmes un/vai iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 2009.

2) *Autors: Kristaps Liepa, Krāslavas Valsts ģimnāzija, 8.klase.*

Pildot mājas darbu matemātikā, Rihards, saskaitot divus naturālus skaitļus, pieļāva kļūdu – vienam no skaitļiem pierakstīja galā nulli un rezultāta 776 vietā ieguva rezultātu 2009. Kādus skaitļus Rihardam vajadzēja saskaitīt?

3) *Autors: Andris Locāns, Gulbenes Valsts ģimnāzija, 8.klase.*

Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $a^4 - a^3 - a^2 = 2009$.

4) *Autors: Romāns Šaripovs, Jēkabpils Valsts ģimnāzija, 9.klase.*

Ir dota vienādība $2009 : 2008 = 200$. Pārbīdiet dažus ciparus tā, lai vienādība būtu patiesa.

5) *Autors: Krista Ošeniece, Sikšņu pamatskola, 9.klase.*

Liepājas rajonā 2008.gadā 9.klases matemātikas eksāmenu kārtoja 2009 skolēni. Ir zināms, ka nevienam skolēnam nebija vairāk par 26 kļūdām. Pierādīt, ka vismaz 75 skolēniem bija vienāds kļūdu skaits.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

3.5.1. Kubs sagriezts $1\,000\,000$ mazākos vienādos kubiņos. Cik reizes visu šo mazo kubiņu kopējā virsma lielāka par sākotnējā kuba virsmu?

3.5.2. Kādiem naturāliem skaitļiem *x*, *y* un *z* pastāv vienādība

$$1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}}?$$

3.5.3. Naturālam simtciparu skaitlim a viens cipars atšķiras no 5, bet visi citi 99 cipari ir piecinieki. Vai skaitlis a var būt kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

3.5.4. Ēdnīcā satikās 7 profesori un konstatēja, ka viņiem kopā ir tieši viens lats, bet naudas daudzumi visiem ir atšķirīgi. Pierādīt: trim bagātākajiem profesoriem kopā ir vismaz 50 santīmu.

3.5.5. Vai taisnstūri var sadalīt ar taisnām līnijām 7 taisnstūros tā, lai nekādi 2, nekādi 3, ..., nekādi 6 dalījumā radušies taisnstūri kopā neveidotu taisnstūri?

3.5.6. Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – pozitīvi skaitļi un $a+b+c+d=1$. Pierādīt, ka

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c}+\frac{bd}{b+d}+\frac{cd}{c+d}\leq\frac{3}{4}.$$

3.5.7. Cik ir tādu trīsciparu skaitļu, kuru ciparu summa dalās ar

a) 2, **b)** 26, **c)** 3?

3.5.8. Labajai fejai jāsagatavo burvju eliksīrs, kas jāvāra tieši 15 minūtes, bet viņai nav pulksteņa. Toties viņai ir maģisku zariņu kaudzīte.

Katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves un ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var uzvārīt eliksīru?

3.5.9. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija rakstīts *MM*, bija 2 melnas bumbiņas, *MB* – melna un balta bumbiņa, *BB* – 2 baltas bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai noteikti uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

3.5.10. Katrā lodes virsmas punktā dzīvoja viens muriburis (katrā cits). Kādu dienu viņi visi sadomāja pārcelties uz dzīvi plaknē. Vai var gadīties, ka attālums starp katriem diviem muriburiem palika tāds pats, kāds tas bija pirms pārcelšanās?

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. Profesors Cipariņš, rakstot savu jauno grāmatu, nopirka 25 flomāsterus (visi maksāja vienādi). Viņš samaksāja pavisam tik latu, cik flomāsteru var nopirkt par vienu latu. Cik maksāja viens flomāsters?

3.6.2. Visiem astoņstūriem ir kaut kas kopīgs: katram no tiem ir 8 virsotnes un 8 malas. Kubam ir 8 virsotnes, 12 šķautnes un 6 skaldnes, kas visas ir četrstūri.

Vai ir tāds ķermenis, kuram arī ir 8 virsotnes, 12 šķautnes un 6 skaldnes, bet ne visas tā skaldnes ir četrstūri?

3.6.3. Dota taisne t un punkts A ārpus tās. Vai var uzzīmēt perpendikulu no punkta A pret taisni t, izmantojot tikai cirkuli un lineālu, pie tam pavisam drīkst novilkt tikai trīs līnijas (meklējamais perpendikuls ir viena no šīm līnijām)?

3.6.4. Vai eksistē slēgta lauzta līnija, kas katru savu posmu krusto tieši vienu reizi, pie tam visas šīs krustošanās notiek taisnos leņķos?

3.6.5. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; vidējā rūtiņa ir izgriezta. Griežot pa rūtiņu līnijām, atlikusī daļa jāsagriež 4 vienādos gabalos. Pacentieties atrast iespējami daudz dažādu veidu, kā to izdarīt. (Nav jāmēģina pierādīt, ka citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.).

3.6.6. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{5}{x+5}+\frac{20}{(x+5)(x+4)}+\frac{60}{(x+5)(x+4)(x+3)}+\frac{120}{(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)}+$$
$$+\frac{120}{(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}=2009$$

3.6.7. Profesoram Cipariņam uzdāvināja 7 zelta monētas. Viņš zina, ka viena no tām patiesībā sver 11g, viena – 12g, ..., viena – 17g. Uz vienas monētas arī rakstīts „11g", uz vienas - „12g" utt. Cipariņš vēlas noskaidrot, vai **visi** uzraksti ir pareizi (ja kāds ir nepareizs, viņam nav svarīgi, kurš, vai cik tādu nepareizu uzrakstu ir). Viņa rīcībā ir svari, uz kuriem var uzlikt vai nu vienu, vai vienlaicīgi divas monētas un kuri pareizi norāda uzlikto smagumu. Kā Cipariņam ar 4 svēršanām noskaidrot vajadzīgo?

3.6.8. Naturāla skaitļa A ciparu summa ir 20, bet naturāla skaitļa B ciparu summa ir 25. Vai skaitļa $A + B$ ciparu summa var būt **a)** 45, **b)** 54, **c)** 22, **d)** 9?

3.6.9. Laboratorijā ir 5 dažādas iekārtas. Tajā strādā 8 līdzstrādnieki, bet katru dienu darbā ierodas tikai 5 no viņiem (iepriekš nav zināms, kuri; pārējie iet uz bibliotēku). Apmācīt vienu līdzstrādnieku darbam ar vienu iekārtu maksā 1000 latu. Ar kādām mazākajām apmācības izmaksām var panākt, lai katru dienu varētu darbināt visas 5 iekārtas? Viens cilvēks vienlaicīgi var strādāt tikai uz vienas iekārtas.

3.6.10. Kāds ir lielākais daudzums pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu, kas katrs lielāks par 1 un sadalās ne vairāk kā 3 pirmskaitļu reizinājumā? (Pirmskaitļus uzskaitām ar atkārtojumiem; piemēram, $12 = 2\cdot 2\cdot 3$ sadalās triju pirmskaitļu reizinājumā.)

4. LATVIJAS 21. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

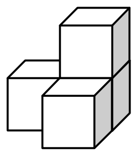
4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Vai var no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, lietojot katru no tiem tieši vienu reizi, izveidot vairākus naturālus skaitļus tā, lai to visu summā visi cipari būtu nepāra?

4.5.2. Kuba šķautnes (malas) garums ir 1. No četriem šādiem kubiem saliktu figūru, kas redzama U4.1.zīm., sauc par ķieģeli.

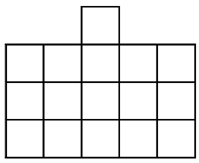
Vai no ķieģeļiem var salikt **a)** kubu ar izmēriem $4 \times 4 \times 4$,

b) kubu ar izmēriem $5 \times 5 \times 5$?

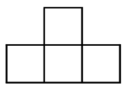


U4.1.zīm.

4.5.3. Kāds ir mazākais rūtiņu daudzums, kādu var atzīmēt U4.2.zīm. attēlotajā figūrā, lai jebkurā tādā šīs figūras gabalā, kāds redzams U4.3.zīm. (tas var būt pagriezts arī citā virzienā) būtu vismaz viena atzīmēta rūtiņa?

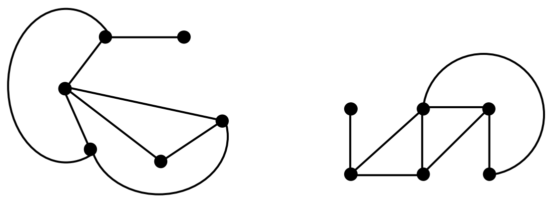


U4.2.zīm.



U4.3.zīm.

4.5.4. Apzīmējiet katrā no U4.4.zīm. parādītajām figūrām punktus ar burtiem *A*; *B*; *C*; *D*; *E*; *F* tā, lai abās figūrās ar līnijām būtu savienoti vieni un tie paši burtu pāri. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



U4.4.zīm.

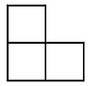
4.5.5. Doti 5 spaiņi. Katra spaiņa ietilpība ir 15 litri. Sākotnēji spaiņos ir attiecīgi 1 *l*; 2 *l*; 3 *l*; 4 *l*; 5 *l* ūdens. Ar vienu gājienu var izvēlēties divus spaiņus un no spaiņa, kurā ūdens nav mazāk kā otrā, pārliet otrā spainī tik ūdens, cik tur jau ir.

Kādu lielāko ūdens daudzumu var savākt vienā spainī, izpildot, ja vajadzīgs, vairākus gājienus?

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Doti 11 dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

4.6.2. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Sākotnēji tās visas ir baltas. Andris un Katrīna pamīšus izdara gājienus. Andris ar savu gājienu pārkrāso melnā krāsā vienu (jebkuru) baltu rūtiņu. Katrīna ar savu gājienu pārkrāso melnā krāsā vienu (jebkuru) no baltām rūtiņām sastāvošu figūriņu, kāda redzama U4.5.zīm. (tā var būt novietota arī citādi). Sāk Andris. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš no bērniem uzvar, pareizi spēlējot?



U4.5.zīm.

4.6.3. Uz galda atrodas trauks ar 10 zilām, 10 zaļām un 10 sarkanām konfektēm. Ar vienu gājienu atļaut apēst jebkādas divas dažādu krāsu konfektes, to vietā ieliekot traukā vienu trešās krāsas konfekti. Vai var gadīties, ka traukā paliek tikai viena konfekte?

4.6.4. Pie eglītes sapulcējušies 10 rūķīši – votivapas un šillišallas. Votivapas vienmēr melo; šillišallas vienmēr runā patiesību. Seši rūķīši uz jautājumu: „Ja Tevi neskaita, tad vai starp pārējiem rūķīšiem būtu vairāk votivapu vai šillišallu?" atbildēja, ka votivapu būtu vairāk. Cik ir votivapu un cik – šillišallu?

4.6.5. Katrā kuba skaldnē (t.i., katrā no 6 kvadrātiem, kas to norobežo) novilkta viena diagonāle. Ja divām diagonālēm ir kopīgs galapunkts, tad saka, ka tās draudzējas. Kāds ir lielākais iespējamais draudzību skaits?

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Izteiksmē $1:2:3:4:5:6$ ievietotas iekavas tā, ka izteiksmes vērtība ir pirmskaitlis. Vai tas var būt

a) 3, **b)** 5 ?

4.7.2. Andris un Maija uzzīmēja pa vienam trijstūrim (varbūt tie pilnīgi vai daļēji pārklājas), bet Katrīna abus trijstūrus izkrāsoja melnus. Vai melnais apgabals var būt

a) septiņstūris, **b)** desmitstūris ?

4.7.3. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 36; četru rūtiņu „saturs" attēlots U4.6.zīm.

Nekādās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstītie skaitļi neatšķiras viens no otra vairāk kā par 15. Pierādīt, ka vismaz divās rūtiņās ierakstīti vienādi skaitļi.

	1			3	
	4			2	

U4.6.zīm.

4.7.4. Rindā novietotas 4 monētas A, B, C, D (tieši šādā secībā). Ar vienu gājienu var mainīt vietām divas blakus esošas monētas. Vai monētas var pārkārtot secībā D, C, B, A, izdarot tieši

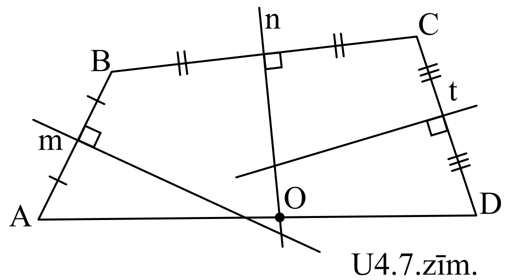
a) 4 gājienus, **b)** 99 gājienus?

4.7.5. Vai kvadrātā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, var ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu 8 dažādi naturāli skaitļi, kas visi dalās ar 4?

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Kādu lielāko daudzumu no naturāliem skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 var sadalīt divās grupās tā, lai abās grupās ietilpstošo skaitļu reizinājumi būtu vienādi savā starpā?

4.8.2. Taisnes *m*, *n* un *t* ir attiecīgi četrstūra *ABCD* malu *AB*, *BC*, *CD* vidusperpendikuli (skat. U4.7.zīm.). Ar *O* apzīmēts *n* un *AD* krustpunkts. Pierādīt, ka $OA > OD$.



U4.7.zīm.

4.8.3. Uzzīmējiet kaut vienu piecstūri, kuram nekādas divas diagonāles nekrustojas viena ar otru.

4.8.4. Vai kuba virsotnes un šķautnes var sanumurēt ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 20 (visiem numuriem jābūt dažādiem), lai katras šķautnes numurs būtu vienāds ar tās galapunktu numuru summu?

4.8.5. Sniegbaltītes pulkstenim ir stundu, minūšu un sekunžu rādītāji; pulkstenis iet absolūti precīzi. Kādu dienu tieši 12:00 uz katra rādītāja nosēdās pa rūķītim. Brīdī, kad viens rādītājs apdzen otru, uz tiem sēdošie rūķīši mainās vietām. Pulksten 24:00 tai pašā dienā katrs rūķītis pateica Sniegbaltītei, cik pilnus apļus viņš novizinājies. Kādus trīs skaitļus dzirdēja Sniegbaltīte? (Varam uzskatīt par zināmu, ka šajā laika posmā nenotika neviena „divkāršā apdzīšana”.)

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Dots, ka $a < b < c < d < e$, $a + b = 10$, $d + e = 18$; visi skaitļi *a*; *b*; *c*; *d*; *e* ir naturāli. Aprēķināt $a + b + c + d + e$.

4.9.2. Uz trijstūra *ABC* malas *BC* atzīmēts punkts *M*, bet uz malas *AC* – punkts *N*. Dots, ka $\angle BCA = 20°$ un $CM = MN = NB = BA$. Pierādīt, ka $AN = BN$.

4.9.3. Skaitļa *n* decimālais pieraksts sastāv no 11 vieniniekiem, 11 divniekiem, 11 trijniekiem un 11 četriniekiem. Vai skaitlis $n + 4$ var būt pirmskaitlis?

4.9.4. Profesoram Cipariņam uzdāvinātas 5 pēc ārējā izskata vienādas zelta monētas; tām visām ir dažādas masas. Ja Cipariņš norāda uz jebkurām 3 monētām, dāvinātājs pasaka, kura no tām ir pēc masas vidējā.

Kā Cipariņš var noskaidrot, kura ir pēc masas vidējā no visām 5 monētām, izmantojot tikai šādus jautājumus un atbildes?

4.9.5. Katrs vesels skaitlis nokrāsots vai nu balts, vai sarkans, pie tam skaitļi 5 un 6 nokrāsoti dažādi. Pierādīt, ka var atrast tādus trīs vienādi nokrāsotus skaitļus, kuru summa ir nulle.

5. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

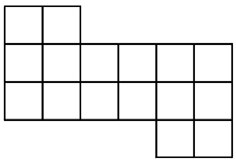
5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 12 katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu:

a) vismaz 5,

b) vismaz 6?

5.5.2. Figūra, kas attēlota U5.1.zīm., sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to var sagriezt divos gabalos tā, lai no šiem gabaliem varētu salikt vienu kvadrātu? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām; gabali saliekot nedrīkst pārklāties, un saliktā kvadrāta iekšpusē nedrīkst palikt tukšumi.



U5.1.zīm.

5.5.3. A) Vai var uzrakstīt piecciparu skaitli, lietojot pa vienai reizei ciparus 1; 2; 3; 4; 5, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

a) izsvītrojot ciparu 1, atlikušais skaitlis dalītos ar 1,

b) izsvītrojot ciparu 2, atlikušais skaitlis dalītos ar 2,

c) izsvītrojot ciparu 3, atlikušais skaitlis dalītos ar 3,

d) izsvītrojot ciparu 4, atlikušais skaitlis dalītos ar 4,

e) izsvītrojot ciparu 5, atlikušais skaitlis dalītos ar 5?

B) Vai var uzrakstīt sešciparu skaitli ar tādām pašām 5 īpašībām, lietojot pa vienai reizei ciparus 0; 1; 2; 3; 4; 5?

5.5.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

Vai var rūtiņās ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 16, katru tieši vienu reizi, lai katrs no astoņiem ierakstītiem skaitļiem būtu mazāks par visās savās kaimiņu rūtiņām ierakstītajiem, bet katrs no astoņiem pārējiem skaitļiem būtu lielāks par visās savās kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem?

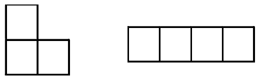
5.5.5. Andris pieraksta datumu kā naturālu skaitli, bez atstarpes rakstot vienu aiz otra dienas numuru mēnesī un mēneša numuru gadā. Piemēram, 2.jūliju viņš pieraksta kā 27, bet 18.septembri – kā 189.

Cik ir tādu naturālu skaitļu, kas ir vairāk nekā viena datuma pieraksti Andra sistēmā?

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām baltām kvadrātiskām rūtiņām. Vai var nokrāsot melnā krāsā **a)** 1 rūtiņu, **b)** 4 rūtiņas tā, lai katrā no 3×3 rūtiņām sastāvošā kvadrātā būtu tieši viena melna rūtiņa?

5.6.2. Andrim ir figūriņas, kas sastāv no vienādiem kvadrātiņiem (skat. U5.2.zīm) – pa 10 katra veida.



U5.2. zīm.

Vai viņš var salikt kvadrātu 7×7 rūtiņas, izmantojot **a)** 12 figūriņas; **b)** 14 figūriņas? Figūriņas nedrīkst pārklāties.

5.6.3. Pieci rūķīši sanesa savā namiņā kastes ar dārgakmeņiem. Katru kasti nesa tieši divi rūķīši. Vai var gadīties, ka katrs rūķītis piedalījās tieši triju kastu nešanā?

Vai tas varētu notikt, ja kastu nešanā piedalītos tieši četri rūķīši?

5.6.4. Maijai bija 7 kartītes; uz katras no tām uzrakstīts pa ciparam, kas nepārsniedz 5. Viņa salika no kartītēm septiņciparu skaitli A, bet pēc tam – citu septiņciparu skaitli B un saskaitīja abus iegūtos skaitļus.

Vai var gadīties, ka summa arī ir septiņciparu skaitlis un visi cipari tajā ir nepāra?

5.6.5. Dotas 200 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Puse no tām sver pa 100 gramiem katra, puse – pa 101 gramu katra. Doti sviras svari bez atsvariem. Jāizveido divas monētu kaudzītes, lai to svari atšķirtos, bet monētu daudzumi tajās būtu vienādi. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu Jūs to spējat izdarīt?

(**Piezīme.** Nav jācenšas pierādīt, ka Jūsu sasniegtais svēršanu skaits ir mazākais iespējamais.)

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n=\frac{x}{y}$, kur $x=a^3$, $y=b^5$, a un b – naturāli skaitļi?

5.7.2. Rindā no sākuma bija uzrakstīti 2009 vieninieki. Ar vienu gājienu nodzēš divus pirmos rindā esošos skaitļus un tās otrā galā pieraksta abu nodzēsto skaitļu summu. Šādus gājienus atkārto, līdz rindā paliek tikai viens skaitlis.

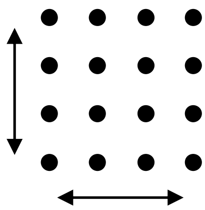
a) cik gājienu tiks izdarīti?

b) atrast vienīgo palikušo skaitli.

5.7.3. Naturālam skaitlim a ir tieši 4 dalītāji, bet naturālam skaitlim b – tieši 6 dalītāji. Pierādiet, ka reizinājumam ab ir **vismaz** 9 dalītāji. Vai var gadīties, ka šim reizinājumam ir **tieši** 9 dalītāji?

(**Piezīme**: apskatām tikai tādus dalītājus, kas paši ir naturāli skaitļi. Pie skaitļa dalītājiem pieskaita gan viņu pašu, gan vieninieku.)

5.7.4. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 16 punkti (skat. U5.3.zīm.). Kādu lielāko daudzumu punktu var nokrāsot sarkanus tā, lai nekādi divi nogriežņi, kam abi gali ir sarkani, viens gals kopīgs un kas vērsti kādā no bultiņu attēlotajiem virzieniem, nebūtu perpendikulāri viens otram?



U5.3.zīm.

5.7.5. Sprīdītis ceļo triju rūķīšu pavadībā. Viņš zina, ka divi rūķīši vienmēr runā patiesību, bet trešais rūķītis dažreiz melo. Sprīdītis nezina, kurš rūķītis ir „neuzticams"; to nezina arī abi patiesie rūķīši. Kādā brīdī Sprīdītis var izvēlēties vienu no trim ceļiem. Viņš zina, ka pa vienu no ceļiem dienas gājiena attālumā atrodas Laimīgā Zeme. Tomēr ne viņš, ne rūķīši nezina, kurš ir šis ceļš. Kā Sprīdītis kopā ar visiem rūķīšiem var nokļūt Laimīgajā Zemē, patērējot ceļā ne vairāk kā 3 dienas?

Pieņemam, ka visas pārrunas notiek momentāni.

(Piezīme. Ja nespējat tikt galā 3 dienās, aprakstiet „visekonomiskāko" no Jūsu atrastajiem plāniem.)

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Tabulā (skat. U5.4.zīm.) Katrīnai jāizvēlas 4 rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā izvēlēta tieši viena rūtiņa. Pierādiet: neatkarīgi no tā, kuras 4 rūtiņas saskaņā ar šiem noteikumiem Katrīna izvēlēsies, tajās ierakstīto skaitļu summa būs 64.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

U5.4.zīm.

5.8.2. Skaitļi a, b, c visi nav vienādi savā starpā. Pierādiet, ka $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + ac + bc$.

5.8.3. Atrodiet skaitļa $113^{113} - 19^{19}$ pēdējo ciparu.

5.8.4. Maijai bija vairāki akmeņi. Viņa tos visus kaut kā sadalīja pa sviras svaru abiem kausiem; svari nostājās līdzsvarā. Pēc tam viņa visus akmeņus sadalīja pa kausiem citādi; svari atkal nostājās līdzsvarā. Trešajā svēršanas reizē Maija uz kreisā svaru kausa atstāja tieši tos akmeņus, kas tur bija abās iepriekšējās reizēs, un līdzīgi uz labā kausa – tieši tos akmeņus, kas **tur** bija abās iepriekšējās reizēs.

Pierādiet, ka svari atkal nostāsies līdzsvarā.

5.8.5. Trijstūrī ABC divas malas ir vienādas savā starpā un $\angle ABC = 20°$. Pierādiet, ka $3 \cdot AC > AB$.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Trijstūrī ABC ar h_a, h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Dots, ka $h_a \geq 5$, $h_b \geq 12$, $h_c \geq 13$.

Kāds ir mazākais iespējamais ΔABC laukums?

5.9.2. Kuri četrciparu naturāli skaitļi vienādi ar savu divu pēdējo ciparu veidotā naturālā skaitļa kvadrātu?

5.9.3. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

5.9.4. Kvadrātvienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir divas dažādas saknes, kas abas pieder intervālam [-1;1]. Pierādīt, ka katram reālam skaitlim x pastāv nevienādība $x^2 + px + q \geq -1$

5.9.5. Pieņemsim, ka $n \geq 3$, n – naturāls skaitlis. Aplūkosim patvaļīgu n cilvēku grupu.

a) Pierādīt, ka šajā grupā var atrast divus tādus cilvēkus A un B, kam starp pārējiem ir vienādi paziņu daudzumi.

b) Rūķītis Muriburis apgalvo: katriem diviem šīs grupas cilvēkiem A un B, kam šajā grupā paziņu daudzumi ir vienādi, var atrast vai nu tādu cilvēku C, kas pazīst gan A, gan B, vai arī tādu cilvēku D, kas nepazīst ne A, ne B. Vai Muriburis runā patiesību, ja $n = 4$? Bet ja $n = 2009$?

Piezīme: uzskatām, ka neviens nepazīst pats sevi un, ja X pazīst Y, tad arī Y pazīst X.

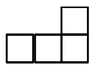
6. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Dots, ka a ir tāds reāls skaitlis, ka kvadrātvienādojumam $x^2 - x + a = 0$ ir divas dažādas reālas saknes x_1 un x_2. Pierādīt: $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = 1$ tad un tikai tad, ja $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 1$.

6.9.2. Naturālu skaitli sauc par vienkāršu, ja tas ir divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Piemēram, 9 = 3·3 ir vienkāršs, bet 18 = 2·3·3 – nav. Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var visi būt vienkārši?

6.9.3. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Katrs kvadrātiņš nokrāsots vienā no k krāsām. Ir zināms: katrā tādā figūrā, kāda redzama U6.1. zīm. (šī figūra var būt arī pagriezta vai apgriezta „uz mutes"), visas rūtiņas nokrāsotas dažādās krāsās. Kāda ir mazākā iespējamā k vērtība?



U6.1. zīm.

6.9.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi AA_1 un BB_1 ir augstumi, H ir augstumu krustpunkts, punkti M, N un K ir attiecīgi nogriežņu AB, AH un BH viduspunkti. Pierādīt, ka $\Delta MKA_1 = \Delta B_1NM$.

6.9.5. Turnīrā piedalās 12 tenisisti. Katrs ar katru citu spēlē tieši vienu reizi; katrā spēlē viens no tās dalībniekiem uzvar, bet otrs – zaudē. Teiksim, ka tenisists A ir spēcīgāks par tenisistu B, ja vai nu A uzvarējis pret B, vai arī var atrast tādu trešo tenisistu C, ka A uzvarējis pret C, bet C uzvarējis pret B. Par čempionu sauc jebkuru tādu tenisistu, kurš turnīra noslēgumā izrādās spēcīgāks par jebkuru citu. Pierādīt:

a) katrs tenisists, kam turnīra noslēgumā ir vislielākais uzvaru skaits, ir čempions,

b) nevar būt, ka turnīra noslēgumā ir tieši divi (ne vairāk un ne mazāk) čempioni.

7. LATVIJAS 36. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Uz kādas planētas tiek lietotas 2009 dažādas valodas. Kāds mazākais daudzums vārdnīcu pietiekams, lai no katras valodas varētu tulkot uz katru citu? (Pieļaujamas vairākpakāpju tulkošanas; ar katru vārdnīcu tulko tikai vienā virzienā, piemēram, no latviešu valodas uz lietuviešu valodu, bet ne otrādi.)

7.5.2. Andris grib izrakstīt rindā naturālos skaitļus no 1 līdz 10 katru tieši vienu reizi tā, lai pirmais skaitlis nedalītos ar otro, pirmo divu skaitļu summa nedalītos ar trešo, pirmo triju skaitļu summa nedalītos ar ceturto, ... , pirmo deviņu skaitļu summa nedalītos ar desmito. Vai to var izdarīt?

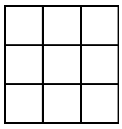
7.5.3. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopēja mala vai kopējs stūris. Tieši 6 rūtiņas nokrāsotas melnas; pārējās ir baltas.

Vai var gadīties, ka vienai melnai rūtiņai ir tieši 1 balts kaimiņš, vienai melnai rūtiņai – tieši 2 balti kaimiņi, ... , vienai melnai rūtiņai – tieši 6 balti kaimiņi?

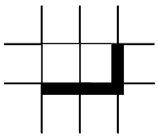
7.5.4. Kvadrātisks režģis sastāv no 3×3 rūtiņām (skat. U7.1. zīm.)

a) vai to var uzzīmēt, novelkot 8 tādas līnijas, kāda attēlota U7.2. zīm.? Līnija var būt novietota arī citādi.

b) vai to var uzzīmēt, novelkot 3 līnijas, katru ar garumu 8? (Rūtiņas malas garums ir 1.)



U7.1. zīm.



U7.2. zīm.

7.5.5. Kādā valstī prezidenta vēlēšanās piedalās 3 kandidāti A, B un C. Katrs valsts iedzīvotājs atbalsta tieši vienu no viņiem. Bez tam katrs iedzīvotājs vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Katram iedzīvotājam aptaujā uzdeva 3 jautājumus:

1) vai Jūs atbalstāt A?

2) vai Jūs atbalstāt B?

3) vai Jūs atbalstāt C?

Uz šiem jautājumiem attiecīgi 60%, 50% un 40% atbilžu bija „jā”.

Kāda daļa no B atbalstītājiem ir meļi?

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Andris nosauc Maijai trīs dažādus ciparus. Pierādiet: Maija, neizmantojot citus ciparus kā Andra nosauktos, var uzrakstīt veselu skaitli (viencipara, divciparu vai trīsciparu), kurā nav vienādu ciparu un kas dalās ar 3.

7.6.2. Punkti apzīmē reizināšanas zīmes, vienādi burti – vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus (izņemot I un $\bar{I}$, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu).

Katrīna aprēķināja izteiksmes $\dfrac{K \cdot R \cdot \bar{I} \cdot Z \cdot E}{L \cdot A \cdot T \cdot V \cdot I \cdot J \cdot A}$ skaitlisko vērtību. Kādu rezultātu viņa ieguva?

7.6.3. Uz tāfeles bija uzrakstīti 4 naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Zane pieskaitīja katram no tiem vieninieku.

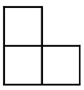
Vai Zanes iegūto skaitļu reizinājuma dalījums ar sākumā uzrakstīto skaitļu reizinājumu var būt **a)** 12 **b)** 18?

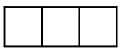
7.6.4. Katram no diviem kubiņiem uz katras no sešām skaldnēm uzrakstīts pa ciparam. Teiksim, ka divciparu skaitli n var attēlot ar kubiņu palīdzību, ja vienam kubiņam uz kādas skaldnes ir skaitļa n pirmais cipars, bet otram kubiņam uz kādas skaldnes ir skaitļa n otrais cipars. Piemēram, ja vienam kubiņam uz kādas skaldnes ir 5, bet otram kubiņam – 7, tad var attēlot gan 57, gan 75.

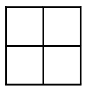
Pieņemsim, ka ar kubiņu palīdzību var attēlot katru divciparu skaitli no 10 līdz x ieskaitot. Kāda ir lielākā iespējamā x vērtība? (**Piezīme**: ciparu 6 nedrīkst izmantot, lai attēlotu ciparu 9, un otrādi.)

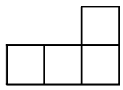
7.6.5. a) Dots, ka taisnstūri ar izmēriem $m \times n$ rūtiņas var sagriezt tādās figūrās, kāda redzama U7.3. zīm. Pierādīt: šo taisnstūri var sagriezt arī tādās figūrās, kāda redzama U7.4. zīm.

b) Vai taisnība, ka jebkuru taisnstūri, kam gan garums, gan platums ir vismaz 4 rūtiņas un kuru var sagriezt U7.5. zīm. redzamās figūrās, var sagriezt arī U7.6. zīm. redzamās figūrās?


U7.3.zīm.


U7.4.zīm.


U7.5.zīm.


U7.6.zīm.

Figūras var būt arī pagrieztas vai apgrieztas „uz mutes”.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Dots, ka x un y – tādi naturāli skaitļi, ka $x \cdot y = 10^{20}$. Vai var būt, ka ne x, ne y nesatur savā pierakstā nevienu ciparu 0?

7.7.2. Trijstūrim T visas malas ir dažāda garuma. Par punktiem M un N zināms tikai tas, ka tie atrodas trijstūra T iekšpusē.

a) vai var gadīties, ka nogrieznis MN garāks par divām T malām?

b) vai var gadīties, ka nogrieznis MN garāks par visām T malām?

7.7.3. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Skaitļu summas rindās un kolonnās visas ir dažādas.

Kāds lielākais daudzums šo summu var būt pirmskaitļi?

7.7.4. Trijstūris ABC ir šaurleņķu. Trijstūri AMB un BNC abi ir vienādmalu un atrodas ārpus ΔABC. Pierādīt, ka $AN = CM$.

7.7.5. Vairākiem rūķīšiem ir vienādi naudas daudzumi. Brīdi pa brīdim kāds no rūķīšiem paņem daļu savas naudas un sadala to pārējiem vienādās daļās. Pēc kāda laika izrādījās, ka vienam no rūķīšiem ir 8 dālderi, bet citam – 25 dālderi. Cik pavisam ir rūķīšu? (Dālderis ir vienīgā rūķīšiem pieejamā naudas vienība.)

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. Vienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir divas dažādas saknes x_1 un x_2. Vai var gadīties, ka

a) $0 < p < q < x_1 < x_2$?

b) $x_1 < q < p < x_2$?

7.8.2. Šaha turnīrā piedalās 8 spēlētāji; katrs ar katru citu spēlē tieši 1 reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Turnīru beidzot, izrādījās, ka nekādiem diviem spēlētājiem nav vienāds punktu daudzums. Kāds ir mazākais iespējamais uzvarētāja iegūtais punktu daudzums? (Par uzvarētāju uzskata to spēlētāju, kam turnīra noslēgumā ir visvairāk punktu.)

7.8.3. Uz kvadrāta *ABCD* malas *BC* ņemts tāds punkts *M*, ka leņķa *AMC* bisektrise krusto malu *CD* tās viduspunktā *K*. Pierādīt, ka *AK* ir leņķa *MAD* bisektrise.

7.8.4. Profesors Cipariņš ar savu ārzemju kolēģi ieradās Ziemassvētku eglītes pasākumā, kurā piedalījās universitātes darbinieki, viņu draugi, ģimenes locekļi, paziņas utt. Norādot uz trim viesiem, Cipariņš piezīmēja: „Šo cilvēku vecumu reizinājums ir 2450, bet summa – divas reizes lielāka nekā Jūsu vecums.” Kolēģis atteica: „Es nezinu un nevaru noskaidrot, cik veci ir šie ļaudis.” Tad Cipariņš piebilda: „Es esmu vecāks par jebkuru citu šai eglītē.” Tagad kolēģis uzreiz pateica minēto 3 viesu vecumus. Cik gadu tai laikā bija Cipariņam un cik – viņa kolēģim? (Visus vecumus izsaka veselos gados.)

7.8.5. Uz riņķa līnijas atzīmēti vairāki punkti. Katram punktam jāpieraksta viens no burtiem *A*; *B*; *C*; *D*; *E*; *F* tā, lai katri divi dažādi burti kaut vienā vietā uz riņķa līnijas atrastos blakus (vienalga kādā secībā).

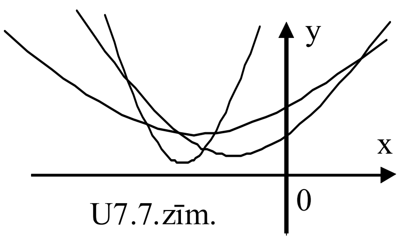
a) pierādīt, ka vajag vismaz 15 punktus,

b) pierādīt, ka vajag vismaz 18 punktus,

c) vai ar 18 punktiem pietiek?

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Pieņemsim, ka U7.7. zīm. attēlotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



U7.7.zīm.

7.9.2. Dots, ka $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ un $|c| \geq |a + b|$. Pierādīt, ka $a + b + c = 0$.

7.9.3. Uz taisnes *t* novietots stienītis ar garumu 1. Sākumā tā gali atrodas punktos *A* un *B*. Stienīti bīda pa plakni tā, ka tas visu laiku paliek paralēls taisnei *t* un beigās atkal nonāk uz *t*; šai brīdī tā gali atrodas punktos *C* un *D*. Turklāt ceļiem, pa kuriem kustas stienīša gali, nav kopīgu punktu. Vai var gadīties, ka $AC > 2009$? (**Piezīme**: uzskatām, ka stienītis ir paralēls *t* arī tad, ja tas atrodas uz *t*.)

7.9.4. Naturāla skaitļa *n* pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar d(*n*). Piemēram, d(1) = 1; d(6) = 4 utt. Sauksim skaitli *n* par apaļīgu, ja tas dalās ar d(*n*).

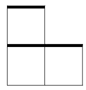
a) atrodiet piecus apaļīgus skaitļus,

b) pierādiet, ka apaļīgu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

7.9.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra no tām izkrāsota vai nu balta, vai melna. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 3 rūtiņas, kas veido U7.8. zīm. parādīto figūru (tā var būt novietota arī citādi), un mainīt krāsu uz pretējo visās šīs figūras rūtiņās. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai viss kvadrāts kļūtu balts, ja

a) sākotnējais krāsojums ir šaha galdiņa izskatā,

b) sākotnējais krāsojums ir patvaļīgs?



U7.8. zīm.

IETEIKUMI

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Ievieto *T* vietā skaitli 8.

2.1.2. Mazākais prasītās līnijas garums ir atkarīgs no attēloto punktu skaita.

2.1.3. Atceries dalāmības pazīmi: ar 3 dalās visi tie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3.

2.1.4. Jā, var.

2.1.5. Apskati visus iespējamos gadījumus, kādu trauciņu pirmo var izvēlēties Pūks un ko, atkarībā no tā, var izvēlēties Trusītis.

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. **a)** Var; **b)** nevar.

2.2.2. Centies iegūt prasīto patstāvīgi

2.2.3. Vienīgais iespējamais skaitļu pāris ir $a = 5$ un $b = 4$. Centies pierādīt, ka šī iespēja der un ir vienīgā.

2.2.4. Jā, var.

2.2.5. Pietiek ar 3 svēršanām; atrodi veidu, kā to izdarīt.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Viens no bezgalīgi daudziem uzdevuma atrisinājumiem ir 17119.

2.3.2. Meklētie piecstūri ir ieliekti.

2.3.3. Sadali 1004 kā $n \cdot k + 14$, kur k ir vesels skaitlis, un aplūko reizinājuma $n \cdot k$ vērtību.

2.3.4. Atrisinājumu meklē mēģinājumu ceļā.

2.3.5. Noskaidro, cik spēles notika pavisam.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Pavisam šim uzdevumam ir 4 atrisinājumi – centies visus atrisinājumus atrast patstāvīgi.

2.4.2. Centieties prasīto veikt patstāvīgi.

2.4.3. Noskaidro, cik daudz darba viens draugs izdara vienā dienā.

2.4.4. Noskaidro, kāda ir visu uzrakstīto skaitļu kopējā summa, un izdomā, kāda ir uz vienas kartītes uzrakstīto skaitļu summa.

2.4.5. Mazākais figūriņu skaits ir 9 figūriņas. Atceries pierādīt, ka vairāk figūriņas izvietot nav iespējams.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. Apskati visus naturālos skaitļus pēc kārtas un pārbaudi, vai katrs no tiem der par atrisinājumu.

2.5.2. Atlikušo ciparu summa būs 0; pierādi to patstāvīgi.

2.5.3. Apskati, kādos veidos no dotajiem sprunguļiem var salikt trijstūri.

2.5.4. **a)** Var, **b)** nevar. Izkrāso doto kvadrātu šaha galdiņa kārtībā un apskati, kādas krāsas rūtiņas var noklāt *L* veida figūriņa.

2.5.5. Pepija cimdus var izvēlēties 825 dažādos veidos.

3. Profesora Cipariņa klubs

3.1. Pirmā nodarbība

3.1.1. Var iegūt 74 skaitļus. Kartītes „6” un „9” katru var novietot divās dažādās pozīcijās.

3.1.2. Aprēķini, cik skolā būtu skolēnu, ja katrā klasē būtu ne vairāk kā 29 skolēni. Var arī izmantot Dirihlē principu.

3.1.3. **a)** Apskati, par cik katrā gājienā palielinās visu skaitļu summa.

b) Apskati, par cik katrā gājienā palielinās kāds no stūra skaitļiem un vidējais skaitlis.

c) Tas ir iespējams.

3.1.4. Sadali visas konfektes 4 pēc skaita vienādās daļās un veic pakāpenisku svēršanu analīzi.

3.1.5. **a)** Apskati, par cik katrā „āķī” palielinās rūtiņu skaits, salīdzinot ar iepriekšējo.

b) Attēlo vienādības kreiso pusi „trepes” veidā; savienojot divas šādas figūras, iegūsi vienādības labo pusi, reizinātu ar 2.

3.1.6. Uzzīmē vairākas pētāmā tipa lauztās līnijas ar vairāk punktiem un skaties, kā mainās lauztās līnijas garums un stūru daudzums, augot punktu skaitam.

3.1.7. Tas ir iespējams.

3.1.8. Izmanto dalāmības pazīmi ar 9 un to, ka skaitļi 9 un 11 ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc $\overline{cab}$ dalās ar $9 \cdot 11$.

3.1.9. Pierādi no pretējā, ka tādu pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

3.1.10. **1)** Mazākais šāvienu daudzums ir 24. Nepieciešams parādīt piemēru un pierādīt, ka ar mazāku šāvienu daudzumu nepietiek.

2) Apskati, kāds ir lielākais un mazākais iespējamais konfekšu skaits.

3) Meklē tādu mazāko skaitli, kas dalās ar 7, bet, dalot ar 2, 3, 4, 5 vai 6, dod atlikumā 1.

3.2. Otrā nodarbība

3.2.1. Apskati gan kvadrātu kā ģeometrisku figūru, gan arī kā jēdzienu algebrā.

3.2.2. Mazākais griezienu skaits ir 6.

3.2.3. Nē, nevar. Izmanto dalāmības pazīmi ar 3.

3.2.4. Padomā, kādus atlikumus, dalot ar 8, var dot šie 756 skaitļi.

3.2.5. Atbilde: 321. Apskati, kāds var būt mazākais un lielākais no skaitļiem.

3.2.6. **a)** Prasītais ir iespējams; **b)** prasītais nav iespējams.

3.2.7. Šādu lauztu līniju var uzzīmēt.

3.2.8. Nav notikušas 24 spēles. Pierādi, ka ir ne vairāk kā $24 \cdot 5$ dažādu klašu skolēnu trijnieku, kuru iekšienē vismaz viena spēle nav notikusi.

3.2.9. Maija par skaitļiem a, b, c var izvēlēties, piemēram, dažādas skaitļa 10 pakāpes ar naturāliem kāpinātājiem.

3.2.10. To var izdarīt.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

3.3.1. **a)** Divi šādi skaitļi pastāv.

b) Trīs šādus skaitļus atrast nevar. Šis apgalvojums ir korekti jāpierāda.

3.3.2. **a)** To var izdarīt.

b) Nokrāso virsotnes un skaldņu centrus vienā krāsā, bet šķautņu viduspunktus – citā. Izmanto to, ka, „staigājot" pa kubu, no vienas krāsas punkta nonāk kādā citas krāsas punktā, lai pierādītu, ka prasītajā veidā kubu apstaigāt nevar.

3.3.3. Jā, to var izdarīt, piem., izmantojot ciparus 1; 2 un 5. Šis apgalvojums prasa rūpīgu pamatojumu.

3.3.4. Uzdevuma nosacījumus var pierakstīt šādi: $k \cdot d - 5(d + 10) = 1$. Iespējami 4 dažādi Katrīnas iedomātie skaitļi.

3.3.5. Katru divciparu skaitli pārveido formā $\overline{xy} = 10x + y$ un ievieto vienādībā.

3.3.6. Izdomā, cik naturālo skaitļu ir no $3n + 1$ līdz $4n$ ieskaitot.

3.3.7. Mazākais punktu daudzums ir 9.

3.3.8. To var izdarīt. Risinājums prasa rūpīgu pierādījumu.

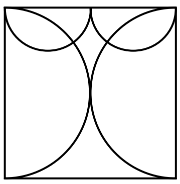
3.3.9. Pieņem pretējo, ka Gudrītis nav liels, lai iegūtu pretrunu. Līdzīgi iegūst pretrunu, pieņemot, ka Gudrītis nav mazs.

3.3.10. Centies izveidot līdzīgu dežūru grafiku 15 dienām četriem bērniem un no tā iegūt dežūru grafiku visam decembrim 5 bērniem.

3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

3.4.1. Apskati, kādam ciparam jābūt burta S vietā un pēc tam – burta A vietā.

3.4.2. Padomā par I1.zīmējumu, kurā redzami 4 pusriņķi.



I1.zīm

3.4.3. 14 daļās.

3.4.4. 4 rūtiņas.

3.4.5. Šķiro gadījumus atkarībā no tā, cik baltu un melnu nogriežņu iziet no viena punkta.

3.4.6. Nē, tas nav iespējams. Šķiro vairākus gadījumus, skatoties, kādi skaitļi var būt vienā grupā ar lielāko no šiem pieciem skaitļiem.

3.4.7. Viens no pierādīšanas veidiem ir apzīmēt $a-b=x$; $b-c=y$; $c-a=z$ un ievietot dotajā izteiksmē.

3.4.8. To var izdarīt.

3.4.9. Maija var uzvarēt, sadalot visus ierakstāmos skaitļus sev izdevīgos pāros.

3.4.10. **1)** Centies sasniegt prasīto, izmantojot, piemēram, to, ka $2009 = 2000 + 9$.

2) Var izveidot vienādojumu sistēmu, kur ar x un y apzīmēti abi sākotnējie saskaitāmie.

3) Iznes a^2 pirms iekavām.

4) Ciparus var ne tikai samainīt vietām, bet arī pabīdīt uz augšu ☺.

5) Izmanto Dirihlē principu.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

3.5.1. 100 reizes.

3.5.2. Nav tādu naturālu skaitļu, kuriem pastāv šāda vienādība.

3.5.3. Apskati divas iespējas: skaitļa a pēdējais cipars ir 5 un skaitļa a pēdējais cipars ir atšķirīgs no 5.

3.5.4. Pierādi no pretējā: pieņem, ka trim bagātākajiem profesoriem kopā ir mazāk nekā 50 santīmi, iegūstot pretrunu.

3.5.5. Jā, tas ir iespējams.

3.5.6. Lai uzdevumu vieglāk risināt, apzīmē $a = \frac{1}{A}$, $b = \frac{1}{B}$, $c = \frac{1}{C}$, $d = \frac{1}{D}$. Pēc tam uzdevumu viegli atrisināt, pierādot un izmantojot to, ka pozitīviem x un y ir spēkā $\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

3.5.7. **a)** 450; **b)** 3; **c)** 300. Protams, šīs atbildes ir korekti jāpamato.

3.5.8. Feja var aizdedzināt zariņu vienlaicīgi no abiem galiem.

3.5.9. Pietiek ar vienu izņemtu bumbiņu no kastītes, uz kuras rakstīts *MB*.

3.5.10. Nē, tā gadīties nevar.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. Ja ar x apzīmē viena flomāstera cenu santīmos, tad Cipariņš samaksāja $\frac{x}{4}$ latus.

3.6.2. Jā, eksistē.

3.6.3. To var izdarīt.

3.6.4. To var izdarīt, piemēram, ja konstrukciju veic, balstoties uz regulāra piecstūra virsotnēm.

3.6.5. To ir iespējams izdarīt vismaz 7 dažādos veidos.

3.6.6. Uzdevums viegli risināms, iesākumā iznesot kopīgos reizinātājus pirms iekavām un tad ievērojot, ka $1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$.

3.6.7. Pirmās apskati trīs monētas ar mazākajiem uzrakstiem; līdzīgi pēc tam apskati trīs nākamās monētas ar lielākiem uzrakstiem.

3.6.8. Risinājumā var izmantot to, ka gadījumā, ja saskaitot rodas pārnesumi, tad rezultāta ciparu summa samazinās par 9 daudzkārtni, salīdzinot ar abu saskaitāmo kopējo ciparu summu.

3.6.9. Atbildi 20 000,- Ls var sasniegt, apmācot ar visām iekārtām rīkoties 3 darbiniekus, bet pārējos – katru ar kādu vienu no iekārtām. Protams, nepieciešams pierādīt, ka ar mazāku summu iztikt nevar.

3.6.10. Uzdevuma risinājumā būtiski tiek izmantots tas, ka starp katriem 8 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens dalās ar $8=2\cdot 2\cdot 2$.

4. LATVIJAS 20. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. To var izdarīt.

4.5.2. **a)** jā, var; **b)** nē, nevar. Būtiski tiek izmantots tas, ka katrā ķieģelī ir 4 kubiņi.

4.5.3. Nepieciešams atzīmēt vismaz 4 rūtiņas. Protams, jāpierāda, ka ar mazāku rūtiņu skaitu nepietiek.

4.5.4. Katrā no figūrām var atzīmēt ar cipariem, cik līniju iziet no katra punkta.

4.5.5. Lielākais ūdens daudzums, ko var savākt vienā no spaiņiem, ir 14 litri.

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Dotajiem 11 skaitļiem iespējami pavisam 10 dažādi pēdējie cipari.

4.6.2. Katrīna var domās sadalīt lielo kvadrātu no 2×2 rūtiņām sastāvošos kvadrātiņos.

4.6.3. Pēc katra gājiena visu konfekšu daudzumi ir vienas paritātes skaitļi.

4.6.4. Pieņemot, ka kādi no rūķīšiem ir vairākumā, var iegūt pretrunu.

4.6.5. Iespējamas ne vairāk kā 12 draudzības.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. **a)** Tas nevar būt. Apskati, cik trijnieku ir starp doto skaitļu pirmreizinātājiem.

b) To var panākt.

4.7.2. Abi gadījumi ir iespējami.

4.7.3. Apskati, kādi ir mazākie skaitļi, kas var atrasties blakus jau norādītajiem skaitļiem.

4.7.4. **a)** Apskati, cik maiņas ir nepieciešamas katrai no monētām A un D, lai tās nonāktu rindas otrā galā.

b) Attēlo monētas kā punktus, kas kustas pa skaitļu asi.

4.7.5. To var izdarīt.

4.8. Astotā klase

4.8.1. Skaidrs, ka pirmskaitļi nevar būt starp šiem skaitļiem; tāpat arī nevar gadīties, ka paliek nepāra skaits kādu pirmreizinātāju.

4.8.2. Izmanto: ja punkts M atrodas uz to pašu pusi no nogriežņa XY vidusperpendikula kā X, tad $MX < MY$

4.8.3. Meklētais piecstūris ir ieliekts.

4.8.4. Nē, to nevar izdarīt.

4.8.5. Aprēķini, cik pilnus apļus kopā ir veikuši rūķīši. Izmanto arī to, ka rūķīši viens otru nav apdzinuši.

4.9. Devītā klase

4.9.1. Iesākumā pierādi, ka $c = 7$.

4.9.2. Lieto vienādsānu trijstūra un trijstūra ārējā leņķa īpašības.

4.9.3. Apskati, kāda ir iegūtā skaitļa ciparu summa, un tad izmanto dalāmības pazīmes.

4.9.4. Uzdod vairākus jautājumus; „noliec” malā norādītās monētas.

4.9.5. Risini uzdevumu, pieņemot pretējo uzdevumā prasītajam, un šķiro gadījumus, kad skaitlis 0 ir nokrāsots balts vai sarkans.

5. Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. (rajona) kārta

5.5. Piektā klase

5.5.1. Apdomā, kādi var būt katra skaitļa kaimiņi.

5.5.2. Noskaidro, no cik rūtiņām sastāv dotā figūra, un no tā secini, kāda izmēra kvadrāts jāiegūst.

5.5.3. Apskati dalāmības pazīmes ar katru no skaitļiem.

5.5.4. Izkrāso doto kvadrātu šaha galdiņa kārtībā.

5.5.5. Apskati, no cik cipariem var sastāvēt Andra „kods”.

5.6. Sestā klase

5.6.1. Abos gadījumos var.

5.6.2. **a)** Nevar; apskati no cik rūtiņām sastāv kvadrāts un cik rūtiņu satur 12 figūriņas.

b) Var; patstāvīgi atrodi veidu kā izvietot figūriņas.

5.6.3. a) Nevar; apzīmē kopējo kastu skaitu ar n un aprēķini, cik kastu „nešanu" bija pavisam.

b) Var; izveido tabulu, kurā attēlots, kā rūķīši var nest kastes.

5.6.4. Nevar. Ērti pierādīt no pretējā – pieņem, ka ir iespējams izveidot.

5.6.5. Centies atrast veidu, kā iztikt ar vienu svēršanu.

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Šādā formā var izsacīt jebkuru naturālu skaitli n. Ievēro, ka $n = n^{21} : n^{20}$.

5.7.2. a) Apskati, kā mainās uzrakstīto skaitļu skaits pēc katra gājiena;

b) Ievēro, ka uzrakstīto skaitļu summa paliek nemainīga.

5.7.3. a) Uzraksti skaitļu a un b dalītājus vispārīgā veidā.

b) Var gadīties. Atrodi konkrētas a un b vērtības, kurām izpildās uzdevuma nosacījumi.

5.7.4. Iespējams nokrāsot sarkanus 6 punktus. Atceries pierādīt, ka vairāk punktus nokrāsot nevar.

5.7.5. Pa vienu ceļu iet Sprīdītis, pa otru viņš nosūta rūķīti A un pa trešo rūķīšus B un C. Aplūko visas iespējamās situācijas, kādas var izveidoties.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Rūpīgi apskatot kvadrātā ierakstītos skaitļus, ievērosi, ka visus skaitļus iespējams sadalīt divos saskaitāmajos tā, ka katrai rindiņai un katrai kolonna ir kopīgi saskaitāmie.

5.8.2. No tā, ka skaitļi visi nav vienādi savā starpā, vari rakstīt, ka $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$. Prasīto vari pierādīt, veicot identiskos pārveidojumus ar iegūto izteiksmi.

5.8.3. Centies noskaidrot, kāds ir katras pakāpes pēdējais cipars.

5.8.4. Uzdevuma risināšanu sāc ar situācijas analīzi trešajā svēršanas reizē.

5.8.5. Apskati visus 3 iespējamos gadījumus, kuras var būt abas vienādās malas.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Mazākais iespējamais trijstūra laukums ir 78; centies patstāvīgi to iegūt un atceries, ka nepieciešams pierādīt, ka mazāku laukumu iegūt nevar.

5.9.2. Apzīmē četrciparu skaitļa pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar a un pēdējo divu ciparu veidoto skaitli ar b, iegūstot, ka meklētais četrciparu skaitlis ir $100a + b$.

5.9.3. Uzdevuma risināšanā izmanto, ka pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta un to, ka taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā ir pieskare.

5.9.4. Šķiro gadījumus, atkarībā no tā vai x atrodas starp kvadrātvienādojuma saknēm vai nē.

5.9.5. a) Pieņem pretējo, ka tādu divu bērnu nav. Apskati, cik dažādi paziņu daudzumi var būt šiem n cilvēkiem.

b) ja n = 4, tad Muribura apgalvojums nav patiess, bet pie n = 2009 tādi cilvēki noteikti atradīsies.

6. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Pārveido $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = 1$, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas un, izmantojot Vjeta teorēmu, izsaki $x_1 + x_2$ no dotā kvadrātvienādojuma.

6.9.2. No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar $4 = 2 \cdot 2$, kas pats ir vienkāršs.

6.9.3. Mazākā iespējamā k vērtība ir 8.

6.9.4. Izmanto viduslīniju īpašības trijstūrī un to, ka mediāna pret hipotenūzu ir puse no hipotenūzas.

6.9.5. **a)** Pieņem, ka A ir visvairāk uzvaru. Šķiro gadījumus atkarībā no tā, vai A ir vai nav uzvarējis jebkuru citu tenisistu.

b) Pieņem pretējo, t.i., ka turnīra noslēgumā ir 2 čempioni. Ievēro, ka to savstarpējā spēlē viens no tiem ir uzvarējis otru.

7. LATVIJAS 36. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Mazākais pietiekamais vārdnīcu daudzums ir 2009; parādi, kā ar 2009 vārdnīcām ir iespējams iztulkot, un atceries pierādīt, ka ar mazāk kā 2009 vārdnīcām nepietiek.

7.5.2. Jā, ir iespējams.

7.5.3. Jā, var gadīties. Apskati, cik kaimiņu ir katrai rūtiņai atkarībā no tā, kur rūtiņa ir novietota.

7.5.4. **a)** Var; centies patstāvīgi atrast atbilstošu piemēru.

b) Nevar; apskati, cik „galu" ir apskatāmajām līnijām.

7.5.5. Pieņem, ka šajā valstī dzīvo n iedzīvotāji.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Atceries dalāmības pazīmi: ar 3 dalās tie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3. Pievērs uzmanību tam, kādu atlikumu var dot skaitļi, dalot ar 3.

7.6.2. Saskaiti, cik dažādi burti ir doti piemērā.

7.6.3. **a)** Var; centies patstāvīgi atrast uzdevumam atbilstošu piemēru.

b) Nevar; apskati vispārīgu gadījumu ar skaitli n.

7.6.4. Īpašu uzmanību pievērs skaitļiem, kas sastāv no vienādiem cipariem.

7.6.5. **a)** Zīmējumā attēlotā figūra sastāv no 3 rūtiņām; no tā var secināt, ka taisnstūra $m \cdot n$ rūtiņu skaits dalās ar 3.

b) Nav taisnība. Lai to pierādītu, nokrāso doto kvadrātu šaha galdiņa kārtībā.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Tas nav iespējams. Lai to pierādītu, ievēro, ka $10^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20}$.

7.7.2. a) Var; apskati, kā platleņķa trijstūrī iespējams izvietot punktus *M* un *N*.

b) Nevar.

7.7.3. Četras summas. Atceries pierādīt, ka lielāku daudzumu summu, kas ir pirmskaitļi, iegūt nevar.

7.7.4. Vispirms uzzīmē uzdevuma nosacījumiem atbilstošu zīmējumu un pēc tam meklē vienādus trijstūrus.

7.7.5. Seko, kā mainās starpības starp rūķīšu naudas daudzumiem.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. a) Nē. Izmanto, piem., Vjeta teorēmu.

b) Jā, tas var gadīties. Atrodi atbilstošu piemēru.

7.8.2. Apskati, kāds var būt maksimālais kopīgi iegūto punktu skaits, ja uzvarētājs ieguvis, piem., *n* punktus. Salīdzini šo maksimālo punktu skaitu ar to, cik vispār punktus var iegūt visās spēlēs kopā.

7.8.3. Pagarini *MK* līdz krustpunktam ar *AD*.

7.8.4. Sadali 2450 pirmreizinātājos un apskati, kādas var būt iespējamās visu kolēģu vecumu summas vērtības.

7.8.5. a) Cik burtu pārus var izveidot no 6 burtiem?

b) Katra burta viens eksemplārs var būt blakus ne vairāk kā 2 citiem burtiem.

c) Jā, pietiek. Atrodi atbilstošu piemēru.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Nē, nevar. Apskati, kāda ir visu trīs funkciju vērtība, kad $x = 1$.

7.9.2. Cel dotās nevienādības kvadrātā un tās saskaiti.

7.9.3. Tas ir iespējams.

7.9.4. a) Centies patstāvīgi atrast piecus apaļīgus skaitļus, kas atšķiras no uzdevumā dotajiem.

b) Ja *p* ir pirmskaitlis, tad skaitlim p^{n-1} ir tieši *n* dalītāji.

7.9.5. No jebkura krāsojuma var iegūt jebkuru. Šis apgalvojums ir jāpierāda.

ATBILDES UN ATRISINĀJUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?"

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Atbilde: B.

Risinājums: 135 – 135 + 8 = 8.

1.1.2. Atbilde: D.

Risinājums: Sešstūra *ABCDEF* (un tātad arī trijstūrīša) malas garums ir $12:6=2\,(cm)$, sešstūra *STROPU* vienu malu veido 2 trijstūrīša malas, tātad sešstūra malas garums ir $2\cdot 2=4\,(cm)$ un perimetrs ir $6\cdot 4=24\,(cm)$.

1.1.3. Atbilde: D.

Risinājums: Ja saskaita abus pirkumus kopā, iegūst, ka 7 āboli, 7 bumbieri un 7 plūmes kopā maksā 182 *sant*. Tātad 1 ābols, 1 bumbieris un 1 plūme kopā maksā 182 *sant.* : 7 = 26 *sant.*

1.1.4. Atbilde: B.

Risinājums: Lielāks ir tas skaitlis, kuram augstākā šķirā ir lielāks cipars. Tādējādi no skaitļiem 3541, 5341, 5431 un 5413 lielākais ir 5431.

1.1.5. Atbilde: E.

Risinājums: Sniegsim divus variantus, kā spriest, lai atrisinātu šo uzdevumu:

I Ja mazinātāju palielināsim par 4, tad mums būs jāatņem par 4 vairāk un rezultāts būs par 4 mazāks. Ja mazināmo samazināsim par 4, tad mums būs par 4 mazāks skaitlis, no kura atņemt, un rezultāts būs par 4 mazāks. Katras no divām darbībām rezultāts samazināsies par 4, tātad kopējais rezultāts samazināsies par 8.

II Pieņemsim, ka sākotnēji mazinātājs ir *a*, bet mazināmais ir *b*, tad jaunā starpība ir $(b-4)-(a-4)=(b-a)-8$.

1.1.6. Atbilde: C.

Risinājums: Novelkam baltajam kvadrātam diagonāles un ievērojam, ka tas tiek sadalīts 4 trijstūros, kas vienādi ar iekrāsotajiem trijstūriem. Tātad iekrāsotās daļas laukums vienāds ar neiekrāsotās daļas laukumu, līdz ar to iekrāsotais laukums ir puse no lielā kvadrāta laukuma.

1.1.7. Atbilde: D.

Risinājums: Vienīgais viencipara skaitlis *C*, kuru saskaitot pašu ar sevi, arī summas pēdējais cipars ir *C*, ir ***C* = 0**. Tad *B* + *B* = 0 vai *B* + *B* = 10. Tā kā $B\neq 0$ (jo *C* = 0), tad ***B* = 5**. ***D* = 1**, jo pat divu vislielāko trīsciparu skaitļu summa nepārsniedz 1998 (999 + 999 = 1998), tātad divu trīsciparu skaitļu summā nevar iegūt 2 vai vairāk tūkstošus. Tā kā *A* + *A* + 1(šķiru pāreja no summas 5 + 5 = 10) = 15, tad ***A* = 7**.

1.1.8. Atbilde: E.

1.1.9. Atbilde: D.

Risinājums: Pieņemsim, ka Jānītim ir j santīmi, Pēterītim – p santīmi, bet konfekte maksā k santīmus. Tad ir zināms, ka $\frac{1}{2}j + p = 2k$ un $j + \frac{1}{2}p = k$ (jeb $2j + p = 2k$). Tātad $\frac{1}{2}j = 2j$, tāpēc $j = 0$.

1.1.10. Atbilde: D.

1.1.11. Atbilde: A.
Risinājums: $9t + 6t + 7t = 22t$.

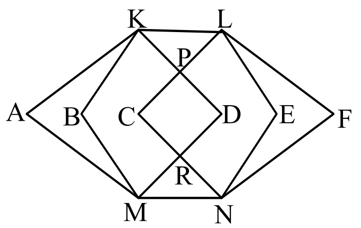
1.1.12. Atbilde: B.
Risinājums: $(10t + 8t + 9t + 6t + 7t) : 5 = 40t : 5 = 8t$.

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Atbilde: C.
Risinājums: $(2009 + 29) - 19 \cdot 2 = 2038 - 38 = 2000$.

1.2.2. Atbilde: C.
Risinājums: Pēc katras stundas degošu svecīšu skaits eglītē palielinās par 1: trīs nodziest, bet to vietā tiek iedegtas četras, kas ir par 1 vairāk nekā nodzisušo. Pēc 4 stundām un 10 minūtēm degošu svecīšu skaits būs tikpat, cik to būs pēc svecīšu izdegšanas un 4 jaunu svecīšu iededzināšanas pēc 4 stundām, tātad par 4 vairāk nekā sākumā. Tātad tajā brīdī eglītē degs $7 + 4 = 11$ svecītes.

1.2.3. Atbilde: D.
Risinājums: Apzīmēsim visus nogriežņu galapunktus un krustpunktus ar burtiem (skat. A1.1.zīm.). Redzamie četrstūri ir: *CPDR*, *AKBM*, *AKDM*, *BKDM*, *ELCN*, *FLCN*, *FLEN*.



A1.1.zīm.

1.2.4. Atbilde: C.
Risinājums: Parādīsim divus šī uzdevuma risināšanas veidus:

Pilna gadījumu pārlase. Tā kā variantu skaits ir salīdzinoši neliels, pie atbildes viegli var nonākt, apskatot visus gadījumus. Kastē pavisam ir 8 cimdi. Apzīmēsim tos sekojoši: viena zaļā pāra labās rokas cimdu ar $Z1_L$, šī pāra kreisās rokas cimdu – $Z1_K$, līdzīgi otra zaļā pāra labās un kreisās rokas cimdus apzīmēsim attiecīgi ar $Z2_L$ un $Z2_K$. Tādā pašā veidā apzīmēsim arī sarkanos cimdus: $S1_L$, $S1_K$, $S2_L$, $S2_K$.

Tagad uzrakstīsim **visus veidus**, kā var izvēlēties 2 cimdus, lai tiktu apmierināti uzdevuma nosacījumi:

1) $Z1_K$ un $S1_L$;	3) $Z2_K$ un $S1_L$;	5) $Z1_L$ un $S1_K$;	7) $Z2_L$ un $S1_K$;
2) $Z1_K$ un $S2_L$;	4) $Z2_K$ un $S2_L$;	6) $Z1_L$ un $S2_K$;	8) $Z2_L$ un $S2_K$.

Kombinatoriskais risinājums. Varam spriest arī vispārīgāk.

Uzdevuma prasības apmierina gadījumi, kad ir izvilkts

1) 1 zaļš labās rokas cimds **un** 1 sarkans kreisās rokas cimds

vai

2) 1 zaļš kreisās rokas cimds **un** 1 sarkans labās rokas cimds.

1 zaļu labās rokas cimdu no dotajiem var izvēlēties 2 veidos, arī 1 sarkanu kreisās rokas cimdu var izvēlēties 2 veidos (neatkarīgi no zaļā cimda izvēles), tāpēc 1) gadījumu var realizēt $2 \cdot 2 = 4$ veidos (*kombinatorikas reizināšanas likums*). Līdzīgi arī 2) gadījumu var realizēt 4 veidos. Tātad pavisam uzdevuma nosacījumiem atbilst $4 + 4 = 8$ veidi (*kombinatorikas saskaitīšanas likums*).

1.2.5. **1)** 500 min. > 5 h 10 min. = 310 min.

2) 4 m 5 cm = 405 cm < 45 dm = 450 cm

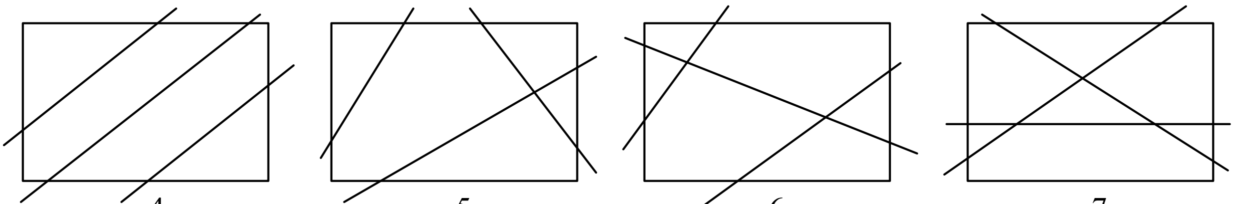
1.2.6. Uzdevumā bija lūgts tikai ierakstīt tukšajās rūtiņās aritmētisko darbību zīmes, tātad iekavu lietošana nav atļauta. Vienīgais pareizais uzdevuma atrisinājums ir:

1	+	2	+	3	·	4	–	5	=	10

.

Lietojot iekavas, var iegūt arī citas izteiksmes, kuru vērtība ir 10.

1.2.7. Trīs taisnes, kas krusto taisnstūri, to sadala vismaz 4 daļās (uzskatām, ka visas taisnes ir dažādas, t.i., nesakrītošas). Savukārt trīs taisnes visu plakni var sadalīt ne vairāk kā 7 daļās, tātad arī ierobežotu plaknes daļu (taisnstūri) tās var sadalīt ne vairāk kā 7 daļās. Līdz ar to uzdevuma atrisinājumā jāuzrāda piemēri visiem 4 iespējamiem gadījumiem, kad taisnstūris ir sadalīts 4; 5; 6 vai 7 daļās.



4 daļas 5 daļas 6 daļas 7 daļas

(*Šī uzdevuma atbildes jeb atšķirīgie gadījumi ir daļu skaiti, nevis dažādi taišņu izvietojumi, kā rezultātā tiek iegūts viens un tas pats daļu skaits.*)

1.2.8. No fakta *A* uzreiz iegūstam, ka Pēteris saņēma grāmatu.

Jānis nesaņēma krāsu zīmuļus (fakts *C*), un nesaņēma arī grāmatu, tātad Jānis dāvanā saņēma puzzli. Tāpēc Jānim ir dzeltenā cepure (fakts *B*).

Tālāk viegli secināt, ka krāsu zīmuļus ir saņēmis Rūdis.

Tā kā Pēterim nav sarkanā cepure (fakts *A*) un nav arī dzeltenā (jo tā ir Jānim), tad Pēterim ir zaļā cepure, bet sarkanā cepure ir Rūdim.

	cepures krāsa	*saņemtā dāvana*
Jānis	**dzeltena**	**puzle**
Pēteris	**zaļa**	**grāmata**
Rūdis	**sarkana**	**krāsu zīmuļi**

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. (25 cm + 3 dm) · 55 – 3 m =

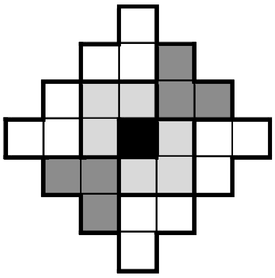
= 55 cm · 55 – 300 cm =

= 3025 cm – 300 cm =

= 2725 cm =

= 27 m 2 dm 5 cm.

1.3.2. Skat., piem., A1.2.zīm.

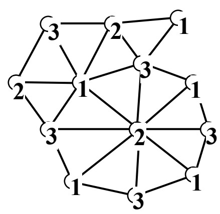


A1.2.zīm.

1.3.3. Skaitļu 2*x* un 3*y* summa ir pāra skaitlis (20); skaitlis 2*x* arī ir pāra skaitlis, tāpēc arī skaitlim 3*y* ir jābūt pāra skaitlim. Tālāk pietiek apskatīt visas iespējamās *y* vērtības, kad 3*y* ir pāra skaitlis un nepārsniedz 20 (ja 3*y* būs lielāks nekā 20, tam pieskaitot vēl 2*x*, summa pārsniegs 20). Pavisam ir četras „derīgas" *y* vērtības; atrodot katrai no tām atbilstošu *x* vērtību, iegūstam visus atrisinājumus: 1) ***x*=10** un ***y*=0**; 2) ***x*=7** un ***y*=2**; 3) ***x*=4** un ***y*=4**; 4) ***x*=1** un ***y*=6**.

Par pareizu atrisinājumu uzskatāms arī tāds, kurā ir veikta, piemēram, visu *x* vērtību no 0 līdz 10 izpēte un „derīgo" variantu atlase.

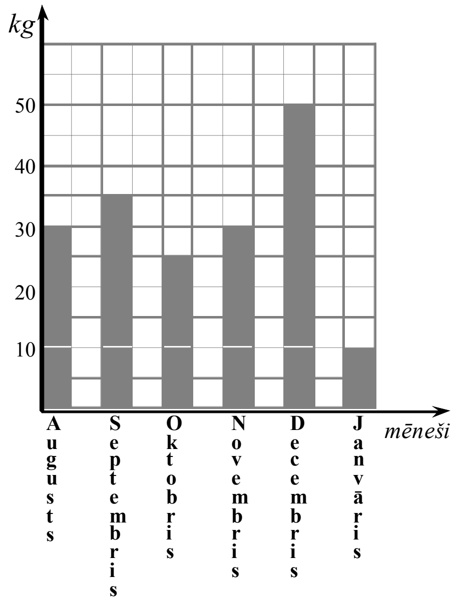
1.3.4. Skat., piem., A1.3.zīm. (dažādās krāsas apzīmētas ar cipariem 1, 2 un 3).



A1.3.zīm.

1.3.5. Atbilde:

Mēnesis	Augusts	Septembris	Oktobris	Novembris	Decembris	Janvāris
Pārdoto konfekšu daudzums, kg	30	35	25	30	50	10

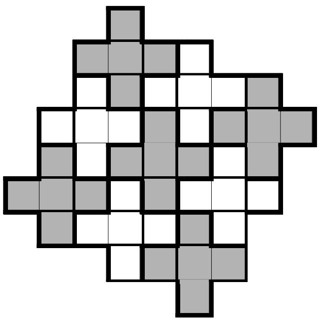


1.3.6. Viens no atrisinājumiem ir $1+7=8$; $9-4=5$; $6:3=2$.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. (25 *cm* + 35 *mm*) · 9 – 2 *m* = (250 *mm* + 35 *mm*) · 9 – 2 *m* = 285 *mm* · 9 – 2 *m* = 2565 *mm* – 2 *m* = 2 *m* 56 *cm* 5 *mm* – 2 *m* = 56 *cm* 5 *mm*.

1.4.2. Iegūti 9 „krustiņi" (skat. A1.4.zīm.).



A1.4.zīm.

1.4.3. Tā kā summa 33 dalās ar 3 un viens no saskaitāmajiem $3x$ dalās ar 3 (reizinājums dalās ar 3, ja viens no reizinātājiem dalās ar 3, un skaidrs, ka 3 dalās ar 3), tad arī otram saskaitāmajam $4y$ jādalās ar 3. Tā kā 4 nedalās ar 3, tad y jādalās ar 3. Ja $y \geq 9$, tad $3x + 4y > 33$. Atliek pārbaudīt iespējas, kad $y = 0$ (tad $x = 11$ un $3 \cdot 11 + 4 \cdot 0 = 33$); $y = 3$ (tad $x = 7$ un $3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 = 33$); $y = 6$ (tad $x = 3$ un $3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 33$).

Atbilde: $x = 11$, $y = 0$;

$x = 7$, $y = 3$;

$x = 3$, $y = 6$.

1.4.4. Ievērosim šādus apsvērumus.

1) Nevienā aplīti nevar būt ierakstīts cipars 0 (jo tad vismaz divos aplīšos būs jāieraksta vienādi cipari: pieskaitot vai atņemot 0, iegūst to pašu skaitli; reizinot ar 0 iegūst 0; 0 dalot ar kādu skaitli, iegūst 0).

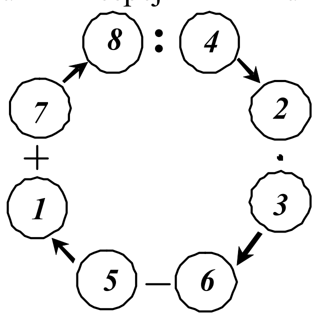
2) Reizināšanas un dalīšanas darbībā nevar būt iesaistīts cipars 1 (jo reizinot vai dalot ar 1, iegūst to pašu skaitli).

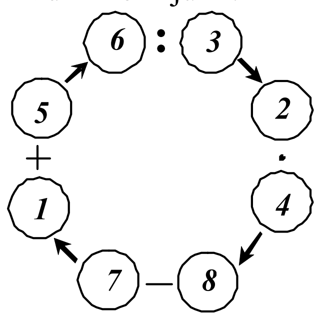
3) Reizināšanas darbībā ietilpst cipars 2, jo jau nākamo mazāko ciparu 3 un 4 reizinājums nav viencipara skaitlis; iespējamās reizināšanas darbības ir $2 \cdot 3 = 6$; $3 \cdot 2 = 6$; $2 \cdot 4 = 8$ vai $4 \cdot 2 = 8$.

4) Dalīšana ir apgriezta darbība reizināšanai, tāpēc vienīgās iespējamās dalīšanas darbības ir 6 : 3 = 2, 6 : 2 = 3, 8 : 2 = 4 vai 8 : 4 = 2.

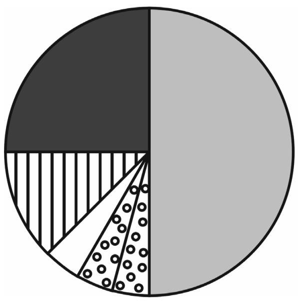
No 3) un 4) apsvērumiem seko, ka dalīšanas rezultātam jābūt 2.

Ņemot vērā šos apsvērumus, aplīšu aizpildīšanu sākam ar dalīšanas darbību. Uzdevumam iespējami tikai divi dažādi atrisinājumi.





1.4.5.



	Diennakts daļa	Laiks (stundas)
- miegs	$\frac{1}{2}$	12 h
- skola	$\frac{1}{4}$	6 h
- pulciņi	$\frac{1}{8}$	3 h
- TV	$\frac{1}{24}$	1 h
- ēšana	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	2 h

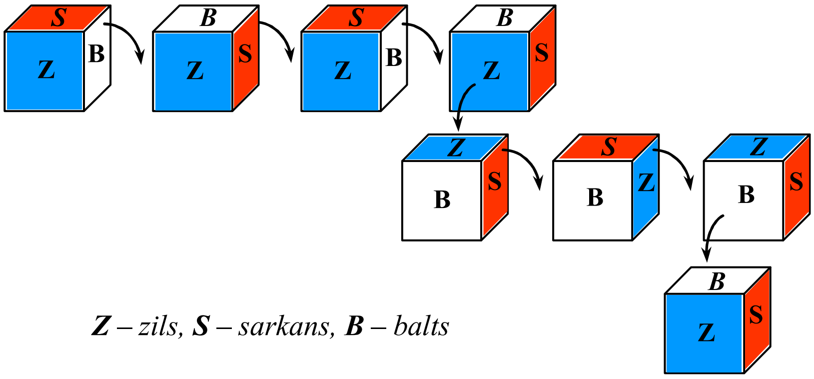
Protams, risinājums balstās uz mērījumiem, kas nevar būt pilnīgi precīzi, tāpēc nav matemātiski šī vārda stingrā nozīme.

1.4.6. 0,050 *km* = 50 *m* < 500 *m*

Ls 6,40 = 6 lati 40 sant. > 6 lati 4 sant.

3,050 *kg* = 3 *kg* 50 *g* > 3 *kg* 5 *g*

1.4.7. Atrisinājumu skatiet zīmējumā.



***Z** – zils, **S** – sarkans, **B** – balts*

1.4.8. Risinājums:

1) $4 \cdot 4 = 16$ (cm^2 kvadrāta *ABCH* laukums)

2) $3 \cdot 3 = 9$ (cm^2 kvadrāta *EFGH* laukums)

3) $3 \cdot 4 = 12$ (cm^2 taisnstūra *CDEH* laukums)

4) $16 + 9 + 12 = 37\ cm^2$ (figūras *ABDFGH* laukums)

$\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{ED} = 4\ cm$

$GF = GH = FE = CD = 3\ cm$

5) $P = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} + CD + \boldsymbol{ED} + EF + GF + GH + \boldsymbol{AH} =$

$= 4 \cdot 4\ cm + 4 \cdot 3\ cm = 28\ cm$

1.4.9. Iegūtā daudzskaldņa virsmas laukums vienāds ar kuba $5\ cm \times 5\ cm \times 5\ cm$ virsmas laukumu, jo izgrieztā kubiņa $2\ cm \times 2\ cm \times 2\ cm$ trīs skaldnes, kas veido „iegriezumu" jaunajā daudzskaldnī, vienādas ar tām trim skaldnēm, kas sākotnēji atradās uz lielā kuba virsmas.

Tātad iegūtā daudzskaldņa laukums ir $6 \cdot (5 \cdot 5) = \mathbf{150\ cm^2}$.

1.4.10. Tā kā viens ananāss sver tikpat, cik 6 āboli un 1 bumbieris, tad pirmajā vienādībā dotajiem 10 āboliem pretī ananāsa vietā varam nolikt šos 6 ābolus un 1 bumbieri. Tādējādi iegūstam, ka 10 āboli sver tikpat cik 6 āboli un 3 +1 = 4 bumbieri kopā. No abām vienādības pusēm pa 6 āboliem, iegūstam, ka 4 āboli sver tikpat, cik 4 bumbieri, tātad 1 bumbieris sver tikpat, cik 1 ābols.

Tāpēc otrajā vienādībā ananāsam pretī esošā bumbiera vietā varam likt ābolu un iegūstam, ka **1 ananāss** sver tik pat, cik 6 + 1 = **7 āboli**.

1.4.11. Piemēram, šādi:

Pēterim: 3 pilnas pudeles, 1 „puspilna" pudele un 3 tukšas pudeles

Jānim: 3 pilnas pudeles, 1 „puspilna" pudele un 3 tukšas pudeles

Andrim: 1 pilna pudeles, 5 „puspilnas" pudeles un 1 tukša pudele

1.4.12. Risinājums:

1) $1\ m\ 40\ cm - 90\ cm = 50\ cm = \frac{1}{2}\ m$ (par tik vairāk nopirka sarkano audumu).

2) 3 Ls · 2 = 6 Ls (tik maksā 1 m auduma; ja pusmetrs maksā 3 Ls, tad 1 m maksā divreiz vairāk).

3) 1 *cm* 40 *cm* + 90 *cm* = 2 *m* 30 *cm* (tik auduma nopirka kopā).

4) 2 *m* 30 *cm* · 6 Ls/*m* = **13 Ls 80 sant.**

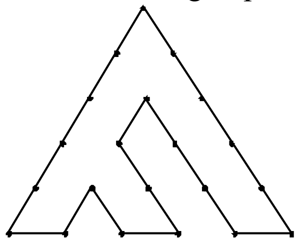
2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Der piemērs

$$\begin{array}{r} 4973 \\ \cdot \quad\ 8 \\ \hline 39784 \end{array}$$

2.1.2. Ievērojam, ka dots 21 punkts. Tā kā jāiegūst slēgta lauzta līnija, kas iet caur katru doto punktu un pati sevi nekrusto, tad katrā punktā „satiekas” tieši 2 nogriežņi – viens „ieiet” punktā un otrs no punkta „iziet”. Nogrieznis savieno divus secīgus punktus uz lauztās līnijas, un nogriežņa garums var būt 1 vai lielāks nekā 1. Katrs lauztās līnijas posms var sastāvēt no vairākiem nogriežņiem. Tātad pavisam meklējamā lauztā līnija sastāv no $\frac{21 \cdot 2}{2} = 21$ nogrieznīšiem (katrā no 21 punkta „satiekas” 2 nogriežņi, un viens nogrieznis savieno 2 punktus). Katra nogriežņa mazākais garums ir 1 vienība, tātad lauztās līnijas **mazākais iespējamais** garums ir $21 \cdot 1 = 21$ vienība. Tas, ka 21 vienību garu lauzto līniju tiešām var iegūt, parādīts A2.1.zīm.



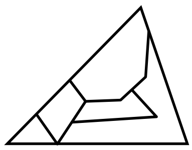
A2.1.zīm.

2.1.3. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Ievērosim: ja sākotnējais skaitlis dalās ar 3, tad, izpildot atļautās darbības, rezultāts arī **dalīsies ar 3**: a) acīmredzami, jo skaitļa reizinājumu ar 3 var ar 3 arī izdalīt; b) 6 dalās ar 3, un divu skaitļu, kas dalās ar 3, starpība arī dalās ar 3; c) ja skaitlis dalās ar 3, tā ciparu summa arī dalās ar 3, un divu skaitļu, kas dalās ar 3, summa arī dalās ar 3.

Tā kā 33 dalās ar 3, tad minēto darbību izpildes rezultātā varēs iegūt tikai skaitļus, kas dalās ar 3, bet 2008 ar 3 nedalās.

2.1.4. Jā, var. Skat., piem. A2.2.zīm.



A2.2.zīm.

2.1.5. Trusītim pavisam ir $30+50+70+90+110=350$ g medus. Tātad, Vinnijam Pūkam ir jādabū vairāk nekā $350:2=175$ g medus. Aplūkosim visus iespējamos veidus, kā Pūks var izvēlēties pirmo trauciņu.

1) Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies trauciņu ar 30 g medus, tad Trusītis var izvēlēties trauciņu ar 70 g medus. Kamēr Trusītis vēl mielosies no 70 g trauciņa, Pūks jau varēs izvēlēties nākamo trauciņu: ja Pūks izvēlēsies 110 g trauku, tad, kamēr vēl Pūks mielosies ar to, Trusītis būs pieveicis 70 g trauku, varēs paņemt un izēst arī 50 g trauku (un Pūks joprojām vēl ēdīs 110 g trauku) un paspēs paņemt vēl arī 90 g trauku; tātad kopā Trusītis dabūs 210 g medus. Savukārt, ja Pūks kā otro izvēlēsies 50 g vai 90 g trauku, Trusītis ar savu 70 g trauciņu būs ticis galā ātrāk nekā Pūks izēdīs abus paņemtos traukus, un kā nākamo trauciņu Trusītis izvēlēsies 110 g trauku, līdz ar to kopā iegūdams vismaz 180 g medus, kas ir vairāk nekā puse visa medus daudzuma.
2) Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 50 g trauciņu, tad Trusītis vispirms izēdīs 30 g trauciņu, tad 70 g trauciņu, un Pūks varēs dabūt augstākais vēl tikai 110 g, līdz ar to kopā tikai 160 g medus, un Trusītis atkal būs apēdis vairāk.
3) Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 90 g trauku, tad, kamēr vēl Pūks našķosies no šī trauka, Trusītis paspēs izēst 30 g trauku, 50 g trauku un vēl paņemt 110 g trauku, līdz ar to kopā notiesājot vairāk nekā pusi visa medus.
4) Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 110 g trauku, tad Trusītis paspēs izēst 30 g un 70 g traukus un paņemt vēl arī 90 g trauku, līdz ar to atkal iegūstot vairāk nekā pusi visa medus.
5) Savukārt, ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 70 g trauku, viņš varēs iegūt vairāk nekā pusi visa medus – vismaz 180 g. Trusītis sākumā var izvēlēties 30 g trauku un, kamēr Pūks vēl mielosies no sava 70 g medus trauka, Trusītis jau varēs ņemt nākošo – 50 g, 90 g vai 110 g. Ja Trusītis izvēlēsies 50 g vai 90g trauku, tad Pūks paņems 110 g un būs apēdis $70+110=180$ g medus. Ja Trusītis izvēlēsies 110 g trauku, tad Pūks paspēs apēst medu no 50 g trauka un iesākt ēst no 90 g trauka, kopā apēdot $70+50+90=210$ g medus.

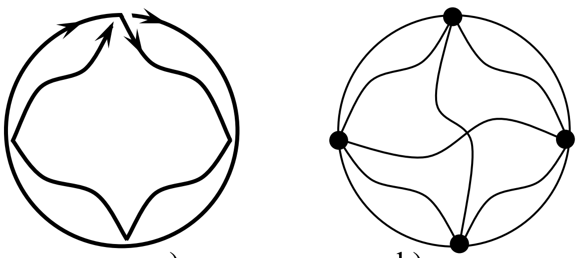
Ja Trusītis sākumā paņem 90 g trauku, Pūks uzvar, kā otro paņemot 110 g trauku. Ja Trusītis sākumā paņem 110 g trauku, Pūks uzvar, kā nākošos paņemot 30 g un 90 g traukus (tieši šādā secībā). Ja Trusītis sākumā paņem 50g trauku, Pūka rīcība atkarīga no Trusīša otrā izvēlētā trauka:

Trusītis 30 g	Pūks 110 g	(70 + 110 = 180)
Trusītis 90 g	Pūks 30 g un 110 g	(70 + 30 + 110 = 210)
Trusītis 110 g	Pūks 30 g un 90 g	(70 + 30 + 90 = 190).

Tātad Pūks, sākot ar 70 g trauciņu, noteikti var apēst vismaz 180 g medus.

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. a) Jā, var. Skat., piem., A2.3.zīm.



a) b)
A2.3.zīm.

b) Nē, nevar. Lai kādu figūru varētu uzzīmēt, neatraujot zīmuli no papīra un nevienu līniju nenovelkot divas reizes, figūrā nedrīkst būt vairāk nekā 2 tādi punkti, kuros „satiekas" nepāra skaits līniju. Tik tiešām, ja, zīmējot figūru, mēs nonākam kādā punktā pa vienu līniju, tad jābūt citai līnijai, pa kuru iziet ārā. Ja šajā punktā atgriežamies vēl kādu reizi, atkal jābūt vēl vienai līnijai, pa kuru aiziet prom. Vienīgie izņēmumi var būt sākuma un beigu punkti („nepārtrauktam" zīmējumam ir viens sākuma un viens beigu punkts)– ja tie nesakrīt, tad katrā no tiem „jāsatiekas" nepāra skaitam līniju. Savukārt b) zīmējumā attēlotajā figūrā ir četri punkti, kuros „satiekas" pa 5 līnijām. Tātad to nevar uzzīmēt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

2.2.2. Piemēram,

a) $8:8+(8-8)\cdot 8=1$;

b) $(8+8):8+8-8=2$;

c) $(8+8):8+8:8=3$;

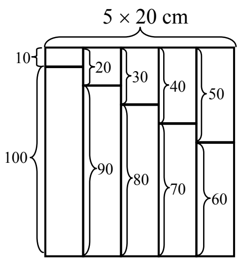
d) $(8+8+8+8):8=4$;

e) $8-(8+8+8):8=5$.

2.2.3. Pārveidojot doto vienādību, iegūstam $4a+5b=40$. Tā kā a un b ir naturāli, tātad pozitīvi skaitļi, tad jābūt $4a < 40$ jeb $a < 10$ un $5b < 40$ jeb $b < 8$. Pārbaudot septiņas iespējamās b vērtības (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7), redzam, ka doto vienādību apmierina tikai skaitļi $\boldsymbol{a}$ **= 5** un $\boldsymbol{b}$ **= 4.**

b	**5*b***	**40 - 5*b***	**Vai *a* = (40 - 5*b*) : 4 ir naturāls skaitlis?**
1	5	35	nē
2	10	30	nē
3	15	25	nē
4	20	20	**jā; *a* = 5**
5	25	15	nē
6	30	10	nē
7	35	5	nē

2.2.4. Jā, var; piemēram, var salikt taisnstūri ar malu garumiem 110 cm × 100 cm; skat. A2.4.zīm.



A2.4.zīm.

2.2.5. Ar trim svēršanām pietiek, lai atrastu „nepareizo” lodīti, ja rīkosies sekojoši.

1. svēršanā uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „4 g”, uz otra svaru kausa – „2 g” un „3 g”.

Ja svari ir līdzsvarā, tad visām šīm lodītēm uzraksti ir pareizi. Tā kā vienai lodītei jābūt nepareizam uzrakstam, tad tā būs malā palikusī lodīte ar uzrakstu „5 g”; šajā gadījumā esam jau atraduši meklēto.

Ja svari nav līdzsvarā, tad „nepareizā” lodīte ir viena no šīm četrām, tāpēc malā palikušajai lodītei ar uzrakstu „5 g” svars norādīts pareizi. Šajā gadījumā svēršana jāturpina.

2.svēršanā uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „4 g”, uz otra – lodīti, kura sver 5 g (iepriekšējā svēršanā secinājām, ka tas uzraksts atbilst patiesībai).

A. Ja svari ir līdzsvarā, tad pareizi uzraksti ir arī lodītēm ar masu 1 g un 4 g, tātad nepareizs uzraksts ir vai nu „2 g”, vai „3 g”. Lai noskaidrotu, kura tieši, nepieciešama vēl vismaz viena svēršana.

3.svēršanā uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „3 g”, uz otra – lodīti, kura sver 4 g (iepriekšējās svēršanās secinājām, ka „1 g” un „4 g” ir pareizi uzraksti).

Ja svari ir līdzsvarā, tad arī „3 g” ir pareizs uzraksts un nepareizam jābūt uzrakstam „2 g”;

ja svari nav līdzsvarā, tad lodīte ar uzrakstu „3 g” ir meklētā.

B. Ja svari 2.svēršanā nav līdzsvarā, tad „nepareizā” lodīte šobrīd atrodas uz svariem. Tā kā „5 g” ir pareizs uzraksts, tad aplams ir vai nu „1 g”, vai „4 g”. Lai noskaidrotu, kura tieši, arī šajā gadījumā nepieciešama vēl vismaz viena svēršana.

3.svēršanā uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „2 g”, uz otra – lodīti, kura sver 3 g (iepriekšējās svēršanās secinājām, ka „2 g” un „3 g” ir pareizi uzraksti).

Ja svari ir līdzsvarā, tad arī „1 g” ir pareizs uzraksts, un nepareizam jābūt uzrakstam „4 g”;

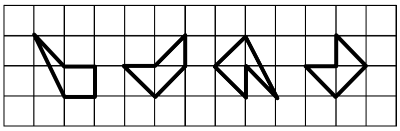
ja svari nav līdzsvarā, tad lodīte ar uzrakstu „1 g” ir meklētā.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Ir jāatrod skaitlis $\overline{A19} = A \cdot 100 + 19$, kur A – skaitlis, kas dalās ar 19 un kura ciparu summa ir 19–(1+9)=9. Taču, tā kā skaitļa A ciparu summa ir 9, tad pašam skaitlim A jādalās arī ar 9 (dalāmības pazīme). Skaitlis 19 nedalās ar 9, tāpēc apskatām skaitli 9·19=171. Tā kā 1+7+1=9, tad 171 varam ņemt A vietā; tātad viens no uzdevumā meklētajiem skaitļiem ir **17119**.

Šim uzdevumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu – uzdevumu apmierina arī, piemēram, skaitļi 34219, 102619, 1710019 utt.

2.3.2. Meklētie piecstūri ir ieliekti. Izliektu piecstūri atbilstoši uzdevuma prasībām uzzīmēt nevar. Piemērus skat. A2.5.zīm.



A2.5.zīm.

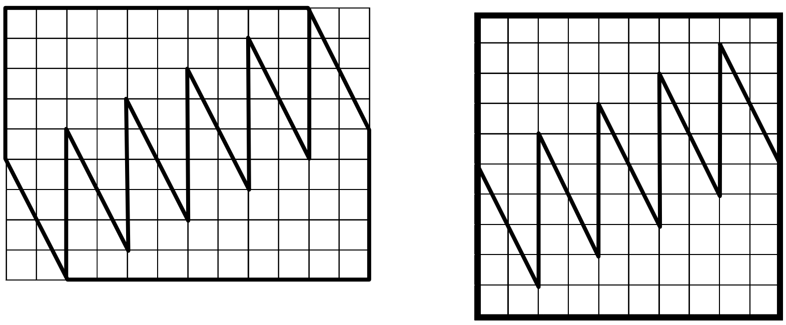
2.3.3. Ir jāatrod tādi skaitļi *n*, ka $1004 = n \cdot k + 14$ jeb $n \cdot k = 1004 - 14 = 990$, kur *k* ir vesels skaitlis, $n > 14$ (jo atlikumam jābūt mazākam nekā dalītājam), tātad par *n* der visi skaitļa 990 dalītāji, kas lielāki nekā 14.

Sadalām skaitli 990 pirmreizinātājos: $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Uzrakstīsim visus skaitļa 990 dalītājus:

1	2·3·3·5·11=**990**
2	3·3·5·11=**495**
3	2·3·5·11=**330**
5	2·3·3·11=**198**
11	2·3·3·5=**90**
2·3=6	3·5·11=**165**
2·5=10	3·3·11=**99**
2·11=**22**	3·3·5=**45**
3·3=9	2·5·11=**110**
3·5=**15**	2·3·11=**66**
3·11=**33**	2·3·5=**30**
5·11=**55**	2·3·3=**18**

Redzam, ka par skaitli *n* no šiem der 16 izceltie skaitļi.

2.3.4. Skat., piemēram, A2.6.zīm.



A2.6.zīm.

2.3.5. Tā kā katrā spēlē piedalījās tieši divi zēni, tad pavisam tika izspēlēta $(10+15+17):2 = 21$ spēle. Pie tam neviens zēns nevar stāvēt malā pēc kārtas 2 vai vairāk spēles – pēc katras spēles malā stāvētājs mainās ar zaudētāju. Tā kā Jānis ir piedalījies 10 spēlēs, tad 21 – 10 = 11 spēles viņš ir stāvējis malā. Bet tas ir iespējams tikai tādā gadījumā, ja Jānis stāvējis malā 1., 3., 5., ..., 21.

spēli. Savukārt visas spēles, kurās viņš piedalījās (2., 4., 6., ..., 20.), Jānis zaudēja. Tātad otrajā spēlē zaudēja **Jānis**.

Vēl tikai atliek parādīt piemēru, ka **ir iespējams** realizēt turnīru saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem:

spēles Nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
uzvar	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	A	A	A	A	A	A	A	A	A
zaudē	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	P	J	P	J	P	J	P	J	P
stāv malā	J	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	P	J	P	J	P	J	P	J

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Vispirms ievērojam, ka $\boldsymbol{A = 9}$, $\boldsymbol{E = 1}$ un $\boldsymbol{T = 0}$. No vienu un desmitu šķirām iegūstam $E + D = S$ jeb $S = D + 1$. Savukārt simtu un tūkstošu šķirās pastāv divas iespējas:

1) $C + P = B$ un $B + S = 10 + E$ (t.i. $B + S = 11$) vai

2) $C + P = B + 10$ un $B + S + 1= E + 10$ (t.i., $B + S = 10$).

Pārbaudot visas iespējamās B vērtības, katrā gadījumā iegūstam 2 atrisinājumus, tātad pavisam šim uzdevumam ir 4 atrisinājumi:

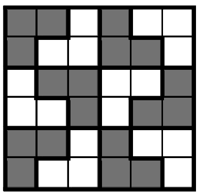
97231 + 4513 = 101744;

97531 + 4213 = 101744;

93861 + 7516 = 101377;

93561 + 7816 = 101377.

2.4.2. Skat., piem., A2.7.zīm.



A2.7.zīm.

2.4.3. Tā kā ruksītis Nif-Nifs viens pats mājiņu var uzcelt 8 dienās, tad vienā dienā viņš uzceļ $\frac{1}{8}$ visas mājas, arī ruksītis Nuf-Nufs vienā dienā uzceļ $\frac{1}{8}$ mājas; ruksītis Naf-Nafs viens pats vienā dienā uzceļ $\frac{1}{6}$ mājas, un pelēns Tims vienā dienā viens pats uzbūvē $\frac{1}{12}$ mājas. Tāpēc visi četri draugi, strādājot kopā, vienā dienā uzceltu $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3+3+4+2}{24}=\frac{1}{2}$ mājas. Ja pusmājas uzcelšanai jāpatērē 1 diena, tad visu šādu māju sivēntiņi un pelēns, strādājot kopā, uzceltu 2 dienās.

2.4.4. Uz visu 20 kartīšu abām pusēm kopumā ir uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz 40, to kopējā summa ir $1+2+...+40=\frac{(1+40)\cdot 40}{2}=820$. Tātad uz katras kartītes abu uzrakstīto skaitļu summa ir 820 : 20 = 41. (Apskatāmās kartītes ir (1; 40), (2; 39), ..., (19; 22) un (20; 21).)

Skaitlis 41, dalot ar 3, dod atlikumu 2. Naturālu skaitli dalot ar 3, atlikums var būt 0, 1 vai 2. Lai divu skaitļu summai atlikums, dalot ar 3, būtu 2, jāsaskaita vai nu

a) divi skaitļi, kuri dod atlikumu 1, dalot ar 3 (tādas ir, piem., kartītes (1; 40), (4; 37); ...), vai arī

b) skaitlis, kas dalās ar 3, un skaitlis, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3 (tādas ir, piemēram, kartītes (2; 39), (3; 38), (5; 36), (6; 35), ...).

Uz labu laimi izvēloties četras no dotajām kartītēm, var būt, ka tiek izvēlētas:

A. Četras a) tipa kartītes; uz galda noliek jebkuras trīs no tām (ar jebkuru skaitli uz augšu), šo skaitļu summa, dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kā atlikumu summa 1+1+1=3, jeb dalās ar 3 (uzdevuma prasības izpildītas).

B. Trīs a) tipa kartītes uz viena b) tipa kartīte; uz galda noliek visas trīs a) tipa kartītes, to, ka uzdevuma noteikumi izpildās, skat. A. gadījumā.

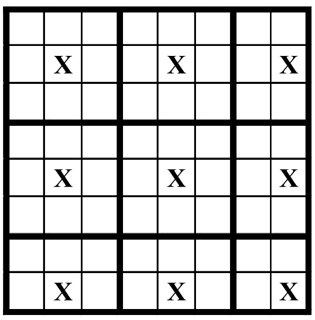
C. Divas a) tipa kartītes un divas b) tipa kartītes; uz galda noliek vienu b) tipa kartīti ar skaitli, kas dalās ar 3, uz augšu, vienu b) tipa kartīti ar skaitli, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2, uz augšu, un vienu a) tipa kartīti; šo skaitļu summa, dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu kā 0+2+1=3 jeb dalās ar 3 (uzdevuma prasības izpildītas).

D. Viena a) tipa kartīte un trīs b) tipa kartītes; uz galda noliek visas trīs b) tipa kartītes, piemēram, ar skaitļiem, kas dalās ar 3, uz augšu (vairāku skaitļu, kas dalās ar 3, summa arī dalās ar 3).

E. Četras b) tipa kartītes; līdzīgi kā D. gadījumā, uz galda noliekam trīs kartītes ar skaitļiem, kas dalās ar 3, uz augšu.

Ir apskatītas visas iespējas, un vienmēr uzdevuma prasības izpildīt ir iespējams.

2.4.5. ***Atbilde:*** 9 figūriņas.



A2.8.zīm.

Lai pierādītu, ka ar mazāk kā 9 figūriņām nepietiek, izmantosim Dirihlē principu – sadalīsim šaha galdiņu 9 taisnstūros, kā parādīts A2.8.zīm. Katrā no šiem taisnstūriem vismaz vienu figūriņu varēs ievietot neatkarīgi no tā, kā ir izvietotas figūriņas pārējos taisnstūros. Tāpēc nepieciešamas vismaz 9 figūriņas. Savukārt A2.8.zīm. ar **X** atzīmētajās rūtiņās ievietojot pa figūriņai, vairāk nevienu figūriņu atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ievietot nevar – tātad 9 ir arī pietiekamais skaits.

2.5. Piektā kārta

2.5.1. Atbilde: piemēram, A = 12 (jo $12+2\cdot12\cdot12=300=100\cdot(1+2)$). Lai atrastu skaitli A, apskatām visus naturālos skaitļus pēc kārtas, meklējot, kurš no skaitļiem virknē der par uzdevuma atrisinājumu.

2.5.2. Atbilde: 0.

Tā kā uzrakstītās virknes paši pēdējie cipari ir ...00, bet jebkurš skaitlis ir lielāks par 0, tad agri vai vēlu no virknes tiks izsvītroti visi cipari, kas atšķiras no 0, bet vairāku nuļļu summa ir 0.

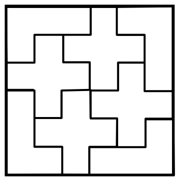
2.5.3. No dotajiem sprunguļiem trijstūri var izveidot 7 veidos: (20 cm, 30 cm, 40 cm), (20 cm, 40 cm, 50 cm), (20 cm, 50 cm, 60 cm), (30 cm, 40 cm, 50 cm), (30 cm, 40 cm, 60 cm), (30 cm, 50 cm, 60 cm), (40 cm, 50 cm, 60 cm). Tā kā nevienā veidā neietilpst 10 cm garš sprungulis, tad nevar gadīties, ka spēles beigās abi spēlētāji var izveidot pa trijstūrim. Gudri spēlējot, neviens no spēlētājiem iespējami ilgi centīsies neizvēlēties pašu īsāko sprunguli, jo tas, kuram pēdējā gājienā būs šo sprunguli jāpaņem, noteikti zaudēs. Skaidrs, ka Alise var atstāt šo sprunguli Bazilio.

Atliek pamatot: lai kā arī Bazilio censtos, viņš nevarēs panākt, ka arī Alisei neizdodas izveidot trijstūri (jo varbūt var gadīties, ka neviens no viņiem neuzvar).

Alisei kā pirmo būtu jāizvēlas sprunguli, ar kuru var izveidot visvairāk trijstūrus, tādi ir 40 cm un 50 cm gari sprunguļi (abi ietilpst piecos veidos). Pieņemsim, ka Alise izvēlas **40 cm** garu sprunguli. Tālāk jāaplūko visas iespējas, kā varētu rīkoties Bazilio, un jāparāda, ka katrā gadījumā Alise var panākt sev vēlamo rezultātu. Visas iespējas apkopotas tabulā.

Bazilio izvēle	Atlikušie trijstūru veidi, ko varētu iegūt	Alise Alises izvēle	Alises izvēlētie sprunguļi
1. 20	(30, 40, 50), (30, 40, 60), (40, 50, 60)	30	[40, 30]
2. 50 (vai 60)	(30, 50, 60), (30, 40, 60) (vai (30, 40, 50))	60 (vai 50)	[30, 40, 60] (vai [30, 40, 50]) var *izveidot trijstūri*
1. 30	(20, 40, 50), (40, 50, 60)	50	[40, 50]
2. 20 (vai 60)	(40, 50, 60) (vai (20, 40, 50))	60 (vai 20)	[40, 50, 60] (vai [20, 40, 50]) var *izveidot trijstūri*
1. 50	(20, 30, 40), (30, 40, 60),	30	[40, 30]
2. 20 (vai 60)	(30, 40, 60) (vai (20, 30, 40))	60 (vai 20)	[30, 40, 60] (vai [20, 30, 40]) var *izveidot trijstūri*
1. 60	(20, 30, 40), (20, 40, 50), (30, 40, 50)	30	[40, 30]
2. 20 (vai 50)	(30, 40, 50) (vai (20, 30, 40))	50 (vai 20)	[30, 40, 50] (vai [20, 30, 40]) var *izveidot trijstūri*

2.5.4. Atbilde: a) jā, skat., piem. A2.9.zīm.; **b)** nē.



A2.9.zīm.

b) Lai pierādītu, ka prasītais nav iespējams, izkrāsosim kvadrātu 7x7 rūtiņas šaha galdiņa veidā tā, lai melno rūtiņu būtu par 1 vairāk nekā balto. L-veida figūriņa noklās 2 baltas un 2 melnas rūtiņas, t.i., starpība starp balto un melno rūtiņu skaitu būs 0, lai kā mēs to novietotu šajā kvadrātā. Savukārt X-veida figūriņa var noklāt vai nu 4 melnas un 1 baltu rūtiņu, vai arī 4 baltas un 1 melnu rūtiņu, t.i., starpība starp dažādas krāsas rūtiņu daudzumiem būs 3. Tāpēc, ja uzdevuma prasības būtu iespējams izpildīt, tad visā lielajā kvadrātā starpība starp balto un melno rūtiņu daudzumiem dalītos ar 3. Tā kā 1 nedalās ar 3, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

2.5.5. Atbilde: 825 dažādos veidos

Risinājums. Apzīmēsim zaļos cimdus ar Z, sarkanos – ar S, labās rokas cimdus – ar L, kreisās rokas – ar K; piemēram, pieraksts „SL" apzīmē sarkanu labās rokas cimdu. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, ir 3 iespējas, kādi cimdi ir izvēlēti:

1) SL, SK, ZL, ZK,

2) SL, SL, ZK, ZK,

3) SK, SK, ZL, ZL.

Aprēķināsim, cik veidos var izvēlēties katru no šīm 3 kombinācijām.

1) Vienu SL var izvēlēties 5 veidos, vienu SK – arī 5 veidos, vienu ZL – arī 5 veidos un vienu ZK – arī 5 veidos. Tātad 1) veida kombināciju var izvēlēties 5·5·5·5=625 veidos.

2) Divus SL no 5 pieejamajiem var izvēlēties 10 veidos, līdzīgi – divus ZK arī var izvēlēties 10 veidos. Tātad 2) veida kombināciju var izvēlēties 10·10=100 veidos.

3) veida kombināciju var izvēlēties tikpat veidos kā 2) veida kombināciju, t.i., 100 veidos.

Tātad Pepija vajadzīgos 4 cimdus var izvēlēties 625+100+100=825 dažādos veidos.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

3.1.1. Kartīti pirmajam ciparam var izvēlēties 9 veidos. Pēc tam, kad tas izdarīts, kartīti otrajam ciparam var izvēlēties 8 veidos (jāizvēlas citu kartīti nekā to, kas jau izmantota pirmajam ciparam). Tādā ceļā varam iegūt $9 \cdot 8 = 72$ skaitļus (visus divciparu skaitļus, kam cipari ir atšķirīgi no nulles un dažādi). Vēl var izveidot arī skaitļus 66 un 99, jo gan kartīti $\boxed{6}$, gan kartīti $\boxed{9}$ var novietot katru divās dažādās pozīcijās.

Tāpēc Andris var salikt $72 + 2 = 74$ skaitļus.

3.1.2. Nē, nevar. Skaidrs, ka gadījumā, ja katrā klasē ir ne vairāk kā 29 skolēni, tad visās 36 skolas klasēs kopā ir ne vairāk kā $36 \cdot 29 = 1044$ skolēnu; bet tas ir pretrunā ar to, ka skolā ir 1045 skolēni. Tātad prasītais nav iespējams.

3.1.3. Atbilde: a) nē, **b)** nē, **c)** jā.

Risinājums:

a) Ar katru gājienu tabulā ierakstīto skaitļu summa aug par 4. Sākumā tā ir 10, tātad visu laiku paliek pāra skaitlis. Ja vienlaicīgi visās rūtiņās būtu nepāra skaitļi, tad šī summa (deviņu nepāra skaitļu summa) būtu nepāra skaitlis – pretruna.

b) ar katru gājienu tieši viens no skaitļiem *a*, *b*, *c*, *d* palielinās par 1; ar katru gājienu par 1 palielinās arī skaitlis *x* (skat. A3.1. zīm.). Tāpēc gājienu izpildes rezultātā lielums $a + b + c + d - x$ nemainās. Sākumā tas ir $1 + 1 + 2 + 1 - 1 = 4$; beigās tam jābūt $8 + 9 + 11 + 10 - 36 = 2$. Tā kā $2 \neq 4$, minētā situācija nav iespējama.

a		b
	x	
d		c

A3.1.zīm.

c) jāizdara 4 gājieni, kas „skar" skaitli *a*; 5 gājieni, kas „skar" skaitli *b*; 6 gājieni, kas „skar" skaitli *c*; 6 gājieni, kas „skar" skaitli *d*. Pārliecinieties patstāvīgi, ka vajadzīgais tiek iegūts.

3.1.4. Ērtības labad sauksim 1 vai 2 atšķirīgās konfektes (ja tādas ir) par viltotām, bet citas – par īstām. Līdz ar profesoru mēs varam rīkoties, piemēram, šādi.

Sadalīsim visas konfektes 4 daļās pa 502 konfektēm katrā. Apzīmēsim šīs daļas ar burtiem *A*, *B*, *C*, *D*.

Pirmajā svēršanā nosvērsim *A* un *B*. Vispirms pieņemsim, ka

$A = B$. Tas nozīmē, ka vai nu šajās daļās viltoto konfekšu nav vispār, vai arī katrā no tām atrodas pa vienai viltotai konfektei. Tāpēc otrajā svēršanā salīdzināsim *B* ar *C*.

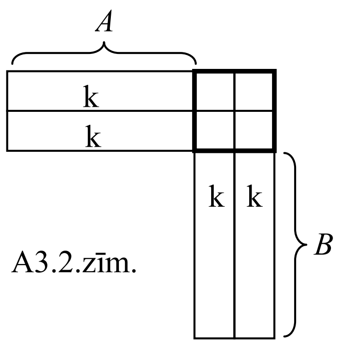
Ja $B = C$, tad kļūst skaidrs, ka grupās *A*, *B* un *C* viltoto konfekšu nav, un ar trešo svēršanu salīdzinām *C* ar *D*. Ja arī šoreiz svari nostājas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka viltoto konfekšu vispār nav. Ja svari nosveras, tad skaidrs, ka viltotās konfektes (vai konfekte) atrodas grupā *D* un tās (tā) ir smagākas (-a), ja kauss, uz kura atradās grupa *D*, nosvērās uz leju; pretējā gadījumā viltotās (-ā) konfektes (-e) ir vieglākas (-a) par pārējām.

Ja $B \neq C$, tad tas nozīmē, ka grupās *A* un *B* ir vai nu pa vienai viltotai konfektei katrā, vai arī grupā *C* ir vismaz viena viltota konfekte. Lai to noskaidrotu, sadalīsim grupu *A* uz pusēm un ar trešo svēršanu salīdzināsim abas šīs grupas *A* daļas savā starpā. Ja svari paliks līdzsvarā, tad tas nozīmēs, ka viltotā konfekte (vai arī viltotās konfektes) atrodas kopā *C*. Šīs konfektes tipu parāda tas, kādā virzienā otrajā svēršanas reizē pārvietojās kauss, uz kura tika uzliktas grupas *C* konfektes: ja tas nosvērās uz leju, tad viltotā konfekte ir smagāka par īsto konfekti, bet, ja otrās svēršanas laikā tas pacēlās uz augšu, tad viltotā konfekte ir vieglāka par īsto. Savukārt, ja trešās svēršanas rezultātā svari nesaglabā līdzsvara stāvokli, tad skaidrs, ka grupās *A* un *B* ir pa vienai viltotajai konfektei. Viltotās konfektes tipu šajā gadījumā noteiksim atkarībā no tā, kādā stāvoklī atradās svaru kauss ar grupas *B* konfektēm pēc otrās svēršanas: ja šis kauss nosvērās uz leju, tad viltotā konfekte ir smagāka par īsto, bet, ja pacēlās uz augšu, tad viltotā konfekte ir vieglāka par īsto konfekti.

Citi svēršanu rezultāti ir reducējami uz šiem diviem gadījumiem, tāpēc tos tuvāk neapskatīsim.

Ievērosim, ka mēs noskaidrojam vajadzīgo, pašas viltotās konfektes (ja tādas ir) neatrodot.

3.1.5. **a)** Acīmredzami katrā nākošajā „āķī” ir par 2 kvadrātiņiem vairāk nekā iepriekšējā (skat. A3.2.zīm.):

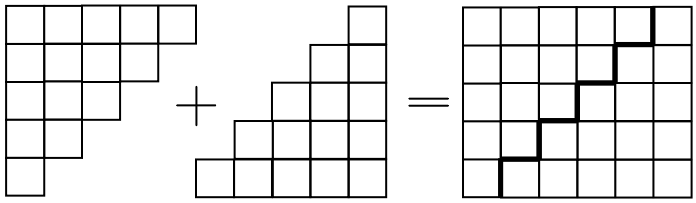


A3.2.zīm.

rajonos *A* un *B* kvadrātiņu daudzumi abos „āķos” ir vienādi, bet izceltajā kvadrātā ārējā „āķī” ir par 2 kvadrātiņiem vairāk nekā iekšējā. Tāpēc „āķos” daudzumi ir secīgi nepāra skaitļi: $3;\ 3+2=5;\ 5+2=7$ utt.

Kreisajā apakšējā stūrī esošais iesvītrotais kvadrātiņš un $(n-1)$ „āķi” kopā satur $1+3+5+7+...+(2\cdot n-1)$ kvadrātiņus. Tā kā tie kopā veido kvadrātu, kam gar katru malu ir n mazo kvadrātiņu malas, tad šo kvadrātiņu skaits ir $n\times n = n^2$, k.b.j.

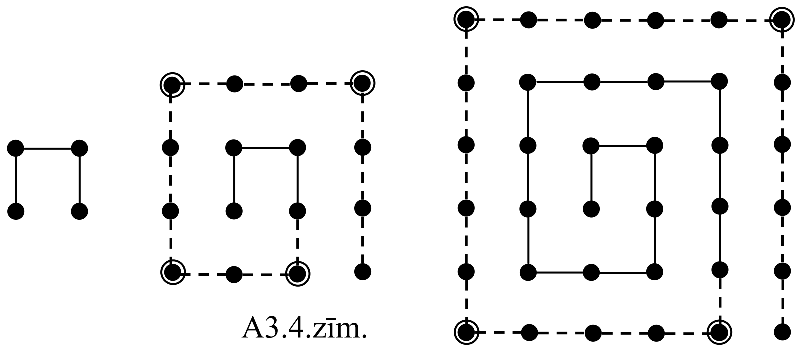
b) viena no iespējām redzama A3.3.zīm. (attēlots gadījums $n=5$):



A3.3.zīm.

3.1.6. Līnija skar katru punktu tieši vienu reizi (ieskaitot sākuma un beigu punktus). Pavisam ir 10 000 punktu. Līnjā ir 10 000 – 1 = 9999 vienu vienību gari posmi: no 1. punkta uz 2. punktu, no 2. punkta un 3. punktu, ..., no 9999. punkta uz 10 000. punktu. Tātad līnijas garums ir 9999.

Apskatīsim pētāmā tipa lauztās līnijas kvadrātiem, kas satur 2×2, 4×4, 6×6 utt. punktus (skat. A3.4.zīm.)

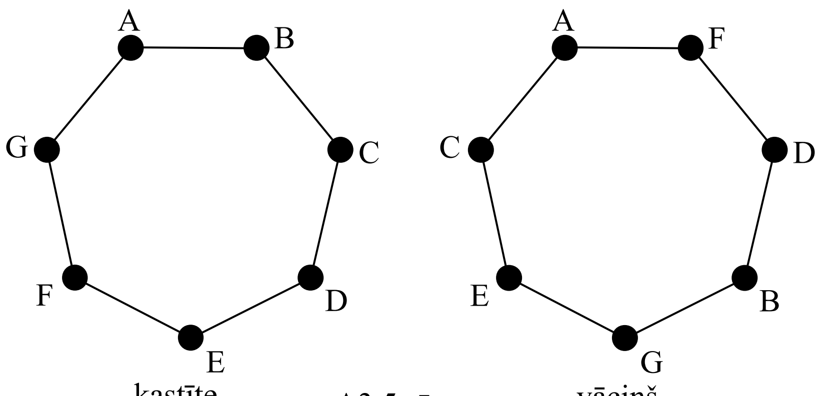


A3.4.zīm.

Kā redzam, katrā nākošajā kvadrātā līnijai ir par 4 stūriem vairāk nekā iepriekšējā (4. zīm. tie apvilkti).

Kvadrātu virknē $2 \times 2 \rightarrow 4 \times 4 \rightarrow 6 \times 6 \rightarrow 8 \times 8 \rightarrow \ldots \rightarrow 98 \times 98 \rightarrow 100 \times 100$ ir pavisam 49 pārejas no viena kvadrāta uz nākošo. Tā kā pirmajai lauztajai līnijai ir 2 stūri, tad pēdējai ir $2 + 49 \cdot 4 = 198$ stūri.

3.1.7. Skat., piem., A3.5.zīm. Krāsas apzīmētas ar burtiem.



A3.5.zīm.

3.1.8. Tā kā $\overline{bca}$ dalās ar 9, tad pēc naturālu skaitļu dalāmības pazīmēm tā ciparu summa $b + c + a$ dalās ar 9. Tāpēc arī skaitļa $\overline{cab}$ ciparu summa $c + a + b$ dalās ar 9; tātad skaitlis $\overline{cab}$ dalās ar 9. Tātad skaitlis $\overline{cab}$ dalās gan ar 9, gan ar 11 (dots). Tā kā skaitļiem 9 un 11 vienīgais kopīgais naturālais dalītājs ir 1, tad secinām: $\overline{cab}$ dalās ar $9 \cdot 11 = 99$. Apskatām visas iespējas:

$\overline{cab}$	$\overline{abc}$
$99 \cdot 2 = 198$	981
$99 \cdot 3 = 297$	972
$99 \cdot 4 = 396$	963
$99 \cdot 5 = 495$	954
$99 \cdot 6 = 594$	945
$99 \cdot 7 = 693$	936
$99 \cdot 8 = 792$	927
$99 \cdot 9 = 891$	918

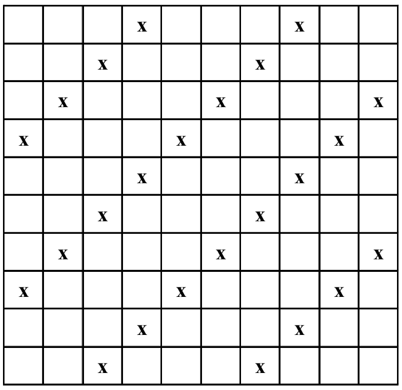
Citu iespēju nav, jo $\overline{cab}$ ir trīsciparu skaitlis. Viegli pārbaudīt, ka no iespējamām $\overline{abc}$ vērtībām tikai 945 dalās ar 7. **Tātad *a* = 9; *b* = 4; *c* = 5.**

3.1.9. Apskatām visus pirmskaitļus, **ar kuriem** dalās kaut viens no skaitļiem $n^2 + 1$, $n = 1; 2; 3; ...$. Piemēram, šādi pirmskaitļi ir $1^2 + 1 = \mathbf{2}$; $2^2 + 1 = \mathbf{5}$; $4^2 + 1 = \mathbf{17}$; tā kā $5^2 + 1 = \mathbf{26}$, kas dalās ar 13, tad šāds pirmskaitlis ir arī **13**, utt. Pierādīsim, ka šādu pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz. Tad noteikti starp tiem ir arī tādi, kas lielāki par $1\,000\,000$.

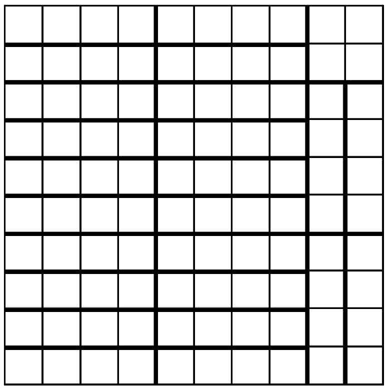
Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda, t.i., pieņemsim, ka šādu pirmskaitļu ir pavisam *k* – galīgs skaits. Apzīmēsim tos ar $p_1; p_2; ...; p_{k-1}; p_k$. Izveidosim to reizinājumu un apzīmēsim to ar *m*; tātad $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Skaidrs, ka *m* ir naturāls skaitlis. Apskatām skaitli $m^2 + 1$. Tā kā $m^2 + 1 > 1$, tad tas dalās ar kādu pirmskaitli. Saskaņā ar to, kā tika izvēlēti skaitļi $p_1; p_2; ...; p_k$, skaitlis $m^2 + 1$ dalās ar kādu no šiem skaitļiem. Tātad $(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k)^2 + 1$ dalās ar kādu no skaitļiem $p_1; p_2; ...; p_k$.

Bet tas nav iespējams: pirmais saskaitāmais dalās ar jebkuru no $p_1; ...; p_k$, bet otrais – vieninieks – nedalās ne ar vienu no tiem, tātad 1 paliek atlikumā. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un mūs interesējošo pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

3.1.10. 1) Atbilde: 24. Piemēru skat., A3.6.zīm., kur atzīmētas rūtiņas, kurās tiek izdarīti šāvieni.
Skaidrs, ka visi iespējamie kuģīši ar izmēriem 4×1 tiek „nosegti”.



A3.6.zīm.



A3.7.zīm.

Pilnīgam atrisinājumam jāpierāda, ka ar mazāku šāvienu daudzumus nepietiek. Sadalot visu 10×10 rūtiņas lielo spēles laukumu 4 rūtiņas lielos apgabalos (skat. A3.7.zīm.), redzam, ka katrā no 24 apgabaliem nepieciešams savs šāviens, k.b.j.

2) Tā kā mazais brālis teica, ka man ir 1 konfekte, tad patiesais konfekšu skaits nevar būt lielāks par $1+6=7$ konfektēm. Tātad, izslēdzot tos konfekšu daudzumus, kurus minēja mana ģimene, man var būt 2, 3 vai 7 konfektes. Tā kā kāds no ģimenes locekļiem kļūdījās par 6, tad neder arī atbildes 2 un 3. Tātad man bija 7 konfektes.

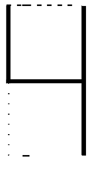
3) Uzdevuma jēga ir: atrast mazāko naturālo skaitli, kas lielāks par 1 tā, lai tas dalītos ar 7, bet dalot ar 2, 3, 4, 5 vai 6 atlikumā dotu 1. Mazākais skaitlis, kas dalās ar 2, 3, 4, 5 un 6 ir 60; tātad nepieciešams atrast tādu skaitli, kas dalītos ar 7 bez atlikuma un būtu par 1 lielāks nekā skaitlis, kas dalās ar 60. Pēc kārtas pārbaudām:

- $(60 \cdot 1+1):7=8;$ atlikums 5
- $(60 \cdot 2+1):7=17;$ atlikums 2
- $(60 \cdot 3+1):7=25;$ atlikums 6
- $(60 \cdot 4+1):7=34;$ atlikums 3
- $(60 \cdot 5+1):7=43$

Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina nosacījumus, ir $60 \cdot 5+1=301$. Tātad uz tilta ir vismaz 301 svece.

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

3.2.1. Var nodzēst **a)** trīs augšējos nogriežņus, **b)** trīs apakšējos nogriežņus, **c)** trīs nogriežņus, atstājot ciparu „4” (skat. A3.8.zīm.). Skaitlis „4” ir „divi kvadrātā”: $4=2 \times 2$. Šādus skaitļus matemātikā sauc par kvadrātiem (dažreiz – par pilniem kvadrātiem).



A3.8.zīm.

3.2.2. Atbilde: ar 6 griezieniem.

Risinājums.

A. Ar 6 griezieniem mērķi var sasniegt, piemēram, šādi. Vispirms ar 3 griezieniem sadalām kubu astoņos kubos, kuru izmēri ir $2\times2\times2$ katram (daļas pat nav jāpārkārto). Pēc tam saliekam šos kubus vienu virs otra tā, ka izveidojas „tornis" ar izmēriem $2\times2\times16$, un ar diviem griezieniem sagriežam to četros „torņos", kam izmēri ir $1\times1\times16$ un kas katrs sastāv no 8 atsevišķiem gabaliņiem, kuru izmēri ir $1\times1\times2$. Saliekam šos gabaliņus vienu otram blakus tā, ka tie veido „plāksnīti" ar izmēriem $2\times1\times32$, un ar sesto griezienu sasniedzam vajadzīgo.

Piezīme: iespējami arī citi paņēmieni.

B. Pierādīsim, ka ar 5 vai mazāk griezieniem nepietiek. No sākuma ir viens nesagriezts kubs. Katrs grieziens sadala katru iepriekš nesagrieztu daļu ne vairāk kā divās. Tāpēc pēc 1. griezienа nav vairāk par $1\times2=2$ daļām, pēc 2. griezienа – par $2\times2=4$ daļām, pēc 3. griezienа –par $4\times2=8$ daļām, pēc 4.griezienа – par $8\times2=16$ daļām; pēc 5.griezienа nav vairāk par $16\times2=32$ daļām. Tā kā beigās jāiegūst 64 daļas, tad ar 5 vai mazāk griezieniem nepietiek.

3.2.3. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums: Atceramies: ar 3 dalās **visi tie** un **tikai tie** naturālie skaitļi, kam ciparu summa dalās ar 3. Tā kā A ciparu summa ir 7 un 7 nedalās ar 3, tad A nedalās ar 3. Tad arī skaitlis $7\cdot A$ nedalās ar 3. Bet, ja $7\cdot A$ ciparu summa būtu 24, tad tas dalītos ar 3, jo 24 dalās ar 3. Tāpēc $7\cdot A$ ciparu summa nevar būt 24.

3.2.4. Sadalām $\{1;2;...;2008\}$ grupās G_0, G_1, ..., G_7 atkarībā no tā, kādu atlikumu dod skaitļi, dalot ar 8. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda – nevaram atrast tādus divus skaitļus, kuru summa dalās ar 8.

Ja būs doti divi skaitļi no grupas G_0, tad šo abu skaitļu summa dalīsies ar 8. Līdzīgi spriežam arī par skaitļiem no grupas G_4. Tāpēc no katras no šīm grupām atbilstoši pieņēmumam ir dots pa vienam skaitlim.

Tāpēc no atlikušajām grupām G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_7 kopā ir vismaz 754 dotie skaitļi. Ievērojam: paņemot pa vienam skaitlim no kādām divām grupām, kurās atlikumu summa ir 8, šo divu skaitļu summa dalīsies ar 8. Tā kā $754=3\cdot251+1$, tad vai nu G_1 un G_7, vai G_2 un G_6, vai G_3 un G_5 kopā satur vismaz 252 dotos skaitļus. Tā kā katrā grupā G_i ir tieši 251 skaitlis, tad attiecīgajā pārī abas grupas satur vismaz pa vienam dotajam skaitlim. Bet tad abu šo skaitļu summa dalās ar 8 – pretruna ar pieņēmumu.

3.2.5. Atbilde: 321.

Risinājums:

A. Ja $a=b=10$ un $c=11$, tad $a+b+c=31$ un $a^2+b^2+c^2=10^2+10^2+11^2=100+100+121=321$.

B. Pierādīsim, ka mazāku summu par 321 iegūt nevar.

Neviens no apskatāmajiem trim naturālajiem skaitļiem nevar būt mazāks par 1 vai lielāks par 31. Tātad katram no tiem ir tikai galīgs skaits iespējamu vērtību. Tāpēc arī pašu apskatāmo skaitļu trijnieku ir tikai galīgs skaits. Tātad starp tiem noteikti **ir** viens (vai vairāki) tādi, kuram (vai kuriem) skaitļu kvadrātu summa ir vismazākā. Apzīmēsim vienu no šādiem trijniekiem ar $(x;\ y;\ z)$, pie tam varam uzskatīt, ka

$x \le y \le z$ (1)

Pierādīsim, ka $\boldsymbol{x \le 10}$. Tiešām, ja būtu $x > 10$, tad $x \ge 11$; bet, tā kā x ir mazākais no skaitļiem, tad $x + y + z \ge 11 + 11 + 11 = 33 > 31$ - pretruna ar uzdevumā doto.

Līdzīgi pierāda, ka $\boldsymbol{z \ge 11}$. Ja $z < 11$, tad $z \le 10$, bet tad $x + y + z \le 10 + 10 + 10 = 30 < 31$ - pretruna ar doto.

Pierādīsim, ka starpība starp lielāko un mazāko no trijiem skaitļiem nav lielāka par 1 jeb $\boldsymbol{z - x \le 1}$. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka $z - x > 1$. Parādīsim, ka tādā gadījumā naturālu skaitļu trijniekam $(x+1;\ y;\ z-1)$ kvadrātu summa būtu mazāka nekā trijniekam $(x;\ y;\ z)$. Tiešām, mums jāpārbauda nevienādība

$(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 < x^2 + y^2 + z^2$ (2)

Ekvivalenti pārveidojot, pakāpeniski iegūstam

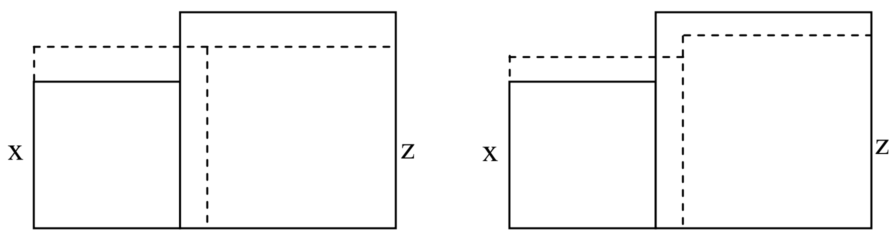
$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 < x^2 + y^2 + z^2$

$2 < 2(z - x)$,

kas saskaņā ar mūsu pieņēmumu, ka $z - x > 1$, ir patiesība. Iznāk, ka skaitļu trijnieka $(x;\ y;\ z)$ kvadrātu summa **nav** mazākā iespējamā; tā ir pretruna ar to, kā šo trijnieku izvēlējāmies. Tātad mūsu pieņēmums par to, ka $z - x > 1$, ir nepareizs, un tiešām $z - x \le 1$.

No $x \le 10$, $z \ge 11$ un $z - x \le 1$ seko, ka $x = 10$ un $z = 11$. No šejienes $y = 31 - x - z = 10$. Tātad mazākā kvadrātu summa tiešām tiek iegūta, ja divi no apskatāmajiem skaitļiem ir 10, bet trešais no tiem ir 11.

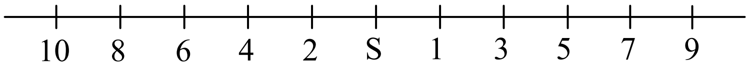
Piezīme. Nevienādību (2) var pierādīt arī citādi, piem., no A3.9.zīm. Izdomājiet patstāvīgi, kā to izdarīt.



A3.9.zīm.

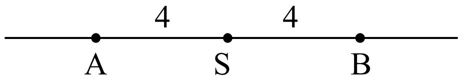
3.2.6. Atbilde: a) var, **b)** nevar.

Risinājums. a) skat.A3.10.zīm, kur ar skaitļiem atzīmētas Cipariņa atrašanās vietas pēc 1., 2., ..., 10. soļa.



A3.10.zīm.

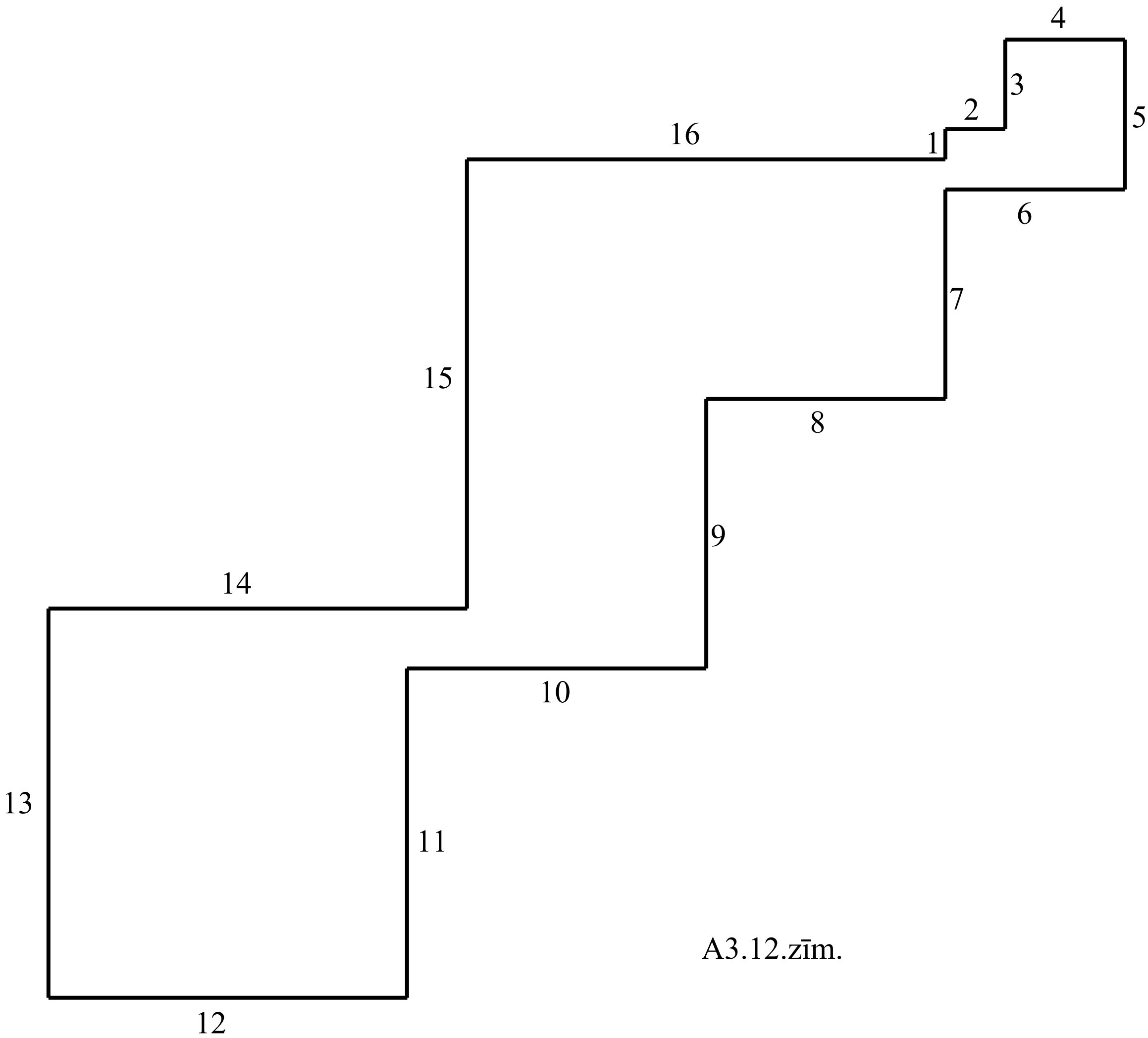
b) pieņemsim, ka Cipariņš to var izdarīt. Atzīmēsim ar A un B tādus skaitļus ass punktus, ka $AS = SB = 4$ (skat. A3.11.zīm.).



A3.11.zīm.

Tad attālums starp A un B ir 8 un Cipariņš pēc 9.soļa atrodas kādā no nogriežņa AB punktiem. Cipariņa kārtējā soļa garums ir 10; tas ir lielāks par AB garumu, tāpēc ar 10.soli Cipariņš noteikti izies ārpus AB, tāpēc nonāks no S tālāk nekā attālumā 4.

3.2.7. Jā, var. Skat., piem., A3.12.zīm.



A3.12.zīm.

3.2.8. Attēlosim spēlētājus ar krāsainiem punktiem: vienas klases spēlētājus – ar sarkaniem, otras klases – ar ziliem, trešās klases – ar dzelteniem. Izvēlēsimies šos punktus tā, lai nekādi trīs no tiem neatrastos uz vienas taisnes. (To var panākt, piemēram, izvēloties tos visus uz vienas riņķa līnijas.) Ja divi spēlētāji savā starpā spēlējuši, novilksim starp atbilstošajiem punktiem taisnes nogriezni.

Tā kā katrs spēlētājs no vienas klases var spēlēt ar katru spēlētāju no pārējām klasēm, tad starp pirmās un otrās klases spēlētājiem var notikt $5 \times 5 = 25$ spēles; līdzīgi spriežam par spēlēm starp pirmo un trešo, kā arī otro un trešo klasi. Tātad pavisam varētu notikt 75 spēles, tātad varētu novilkt 75 taisnes nogriežņus. Novilkts 51 nogrieznis, tātad nenovilkti palikuši 24 nogriežņi.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: pieņemsim, ka uzdevumā minētos A, B, C atrast nevar. Tas nozīmē: lai kā arī paņemtu trīs dažādu krāsu punktus A, B, C, vismaz viens no nogriežņiem AB, BC un CA nav novilkts. Teiksim, ka šis nenovilktais nogrieznis **sabojā trijstūri** ABC.

Ievērosim, ka katrs nenovilkts nogrieznis XY sabojā 5 trijstūrus, proti, visus trijstūrus XYZ, kur Z – jebkura no „trešās krāsas" virsotnēm, t.i., tās krāsas virsotnēm, kurā nav ne X, ne Y. Tātad, pat ja katrs no 24 nenovilktajiem nogriežņiem sabojātu citus piecus trijstūrus, kopā tie sabojātu ne vairāk par $24 \cdot 5 = 120$ trijstūriem. Bet pavisam ir $5 \cdot 5 \cdot 5$ trijstūri ABC, jo gan A, gan B, gan C var izvēlēties piecos veidos (katru no citas krāsas punktu grupas). Tātad kopējais trijstūru skaits ir 125, un $125 > 120$. Tāpēc ir tādi trijstūri, kas nav sabojāti. Katrs šāds trijstūris dod mums vajadzīgos trīs spēlētājus. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka tādus spēlētājus nevar atrast. Tātad pieņēmums ir bijis nepareizs, un tādus spēlētājus atrast var. Tas arī bija jāpierāda.

3.2.9. Katrīna var izvēlēties, piemēram, $a = 100$, $b = 10$ un $c = 1$. Tad Maijas aprēķinātā summa $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ būs trīsciparu skaitlis, kurā Maijas iedomātie viencipara skaitļi x, y un z parādīsies kā cipari. Skaidrs, ka, uzzinot šo trīsciparu skaitli no Maijas, Katrīna uzreiz redzēs Maijas iedomātos skaitļus.

Piemērs. Ja Maijas iedomājusies $x = 2$, $y = 7$ un $z = 1$, tad viņai jāpaziņo Katrīnai skaitlis $100 \cdot 2 + 10 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 200 + 70 + 1 = 271$, un Katrīna, dzirdot to, uzreiz saprot, ka Maijas iedomātie skaitļi ir 2; 7; 1.

3.2.10. Piemēram, tā, kā parādīts A3.13.zīm.

A2	D4	B1	C3
B3	C1	A4	D2
C4	B2	D3	A1
D1	A3	C2	B4

A3.13.zīm.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

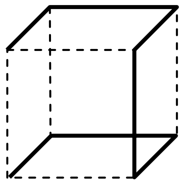
3.3.1. **a)** Divus skaitļus, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 11, var atrast daudzos veidos. Kā piemērs der 28099999 un 28100000.

b) Pierādīsim, ka 3 skaitļus, kas atbilstu uzdevuma prasībām, atrast nevar.

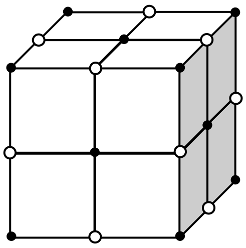
Ja naturāls skaitlis n nebeidzas ar ciparu 9, tad skaitļa $n+1$ ciparu summa ir par 1 lielāka nekā n ciparu summa (skaitlim $n+1$ pēdējais cipars ir par 1 lielāks nekā skaitlim n, bet pārējie cipari, ja tādi ir, abiem skaitļiem sakrīt).

Tā kā vai nu n, vai $n+1$ noteikti nebeidzas ar ciparu 9, tad vai nu n un $n+1$ ciparu summas, vai arī $n+1$ un $n+2$ ciparu summas atšķiras viena no otras par 1. Tāpēc tās abas nevar dalīties ar 11. Tātad nav 3 viens otram sekojošu naturālu skaitļu, kam visiem ciparu summas dalītos ar 11.

3.3.2. a) Kuba virsotnes prasītajā veidā apstaigāt var (skat.A3.14.zīm.).



A3.14.zīm.



A3.15.zīm.

b) Kuba virsotnes un skaldņu centrus prasītajā veidā apstaigāt nevar. Nokrāsosim virsotnes un skaldņu centrus melnus, bet šķautņu viduspunktus – zaļus (skat. A3.15.zīm.) Tad pavisam kopā ir $8+6=14$ melni punkti un 12 zaļi punkti. Staigājot tikai pa šķautnēm un „krustiem", no melna punkta nonāk zaļā un no zaļa – melnā. Tā kā melnie un zaļie punkti maršrutā parādās pamīšus, tad to daudzumi maršrutā nevar atšķirties viens no otra vairāk kā par 1. Bet $14-12=2>1$. Tātad prasītais maršruts nav iespējams.

3.3.3. Viegli pārbaudīt, ka $35^2=1225$; $335^2=112225$; $3335^2=11122225$; $33335^2=1111222225$. Pamatojoties uz šiem piemēriem, rodas doma, ka katram naturālam n ir spēkā $\left(\underbrace{333...3}_{n}5\right)^2=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5$.

Pierādīsim to.

Ievērosim:

$$\underbrace{333...3}_{n}5=\underbrace{333...3}_{n}\cdot 10+5=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{99...9}_{n}\cdot 10+5=\frac{10}{3}\cdot\left(10^n-1\right)+\frac{15}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(10^n\cdot 10-10\right)+\frac{1}{3}\cdot 15=\frac{1}{3}\cdot\left(10^{n+1}-10+15\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(10^{n+1}+5\right).$$

Ceļam šo skaitli kvadrātā un iegūstam

$$\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}+2\cdot 5\cdot 10^{n+1}+25\right)=\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}+10^{n+2}+27-1-1\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^{n+2}-1\right)+3=$$

$$=\underbrace{111...1}_{2n+2}+\underbrace{1...1}_{n+2}+3=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5\text{, k.b.j.}$$

Tātad ar cipariem 1; 2; 5 var pierakstīt bezgalīgi daudzu naturālu skaitļu kvadrātus.

3.3.4. Pieņemsim, ka Katrīna iedomājās naturālu skaitli n un tā dalītāju d; tad $n = k \cdot d$,
k – kaut kāds naturāls skaitlis. Uzdevuma nosacījumus var pierakstīt ar vienādību $k \cdot d - 5(d + 10) = 1$. Atverot iekavas, iegūstam $k \cdot d - 5d - 50 = 1$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$k \cdot d - 5d = 50 + 1$

$k \cdot d - 5d = 51$

Iznesot d pirms iekavām, iegūstam:

$d(k - 5) = 51$.

No šejienes redzam, ka d ir skaitļa 51 dalītājs. Tā kā 51 dalītāji ir tikai skaitļi 1; 3; 17 un 51, tad pastāv viena no 4 iespējām:

$d = 1$; tad $k - 5 = 51$, $k = 56$ un $n = 56 \cdot 1 = 56$;

$d = 3$; tad $k - 5 = 17$, $k = 22$ un $n = 22 \cdot 3 = 66$;

$d = 17$; tad $k - 5 = 3$, $k = 8$ un $n = 8 \cdot 17 = 136$;

$d = 51$; tad $k - 5 = 1$, $k = 6$ un $n = 6 \cdot 51 = 306$

Tātad Katrīnas iedomātais skaitlis ir 56; 66; 136 vai 306.

3.3.5. Atbilde: nē nevar.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka tādi cipari a, b, c pastāv. Katru divciparu skaitli pārveidojam formā $\overline{xy} = 10x + y$. Iegūstam vienādību

$$(10a + b)(10b + c)(10c + a) = (10c + b)(10b + a)(10a + c).$$

Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam

$$1001abc + 100(a^2b + b^2c + c^2a) + 10(a^2c + c^2b + b^2a) =$$

$$= 1001abc + 100(a^2c + c^2b + b^2a) + 10(a^2b + b^2c + c^2a),$$

no kurienes seko

$$90(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - c^2b - b^2a) = 0$$

Reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0. Tātad iekavu vērtībai ir jābūt 0:

$$a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - c^2b - b^2a = 0$$

Pieskaitot un atņemot vienādības kreisajai pusei skaitli abc, izteiksmes vērtība nemainīsies:

$$a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - c^2b - b^2a + abc - abc = 0$$

Sakārtojam saskaitāmos citā secībā un pakāpeniski veicam sadalīšanu reizinātājos:

$$a^2b - ab^2 - abc + b^2c - a^2c + abc + ac^2 - bc^2 = 0$$

$$b \cdot (a^2 - ab - ac + bc) - c \cdot (a^2 - ab - ac + bc) = 0$$

$$(a^2 - ab - ac + bc)(b - c) = 0$$

$$(a(a - b) - c(a - b))(b - c) = 0$$

$$(a - b)(a - c)(b - c) = 0$$

Tātad kādai no iekavām ir jābūt vienādai ar 0, bet tas ir iespējams tikai tad, ja vai nu $a = b$, vai $a = c$, vai arī $b = c$. Tā kā *a*, *b* un *c* ir dažādi cipari, tad šāda vienādība nevar pastāvēt, tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.3.6. No $3n + 1$ līdz $4n$ ieskaitot ir *n* naturāli skaitļi. Tā kā $n > 1$, tad šo skaitļu ir vismaz divi. Viens no tiem ir $4n$; pārējie (tādu ir vismaz viens) ir mazāki par $4n$.

Skaitļa $4n$ apgrieztais lielums ir $\frac{1}{4n}$; pārējo skaitļu apgrieztie lielumi ir **lielāki** par $\frac{1}{4n}$. Tā kā tiek saskaitīti *n* skaitļi, no kuriem viens ir $\frac{1}{4n}$, bet pārēji (vismaz viens) ir lielāki par $\frac{1}{4n}$, tad summa ir **lielāka** par $n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$, k.b.j.

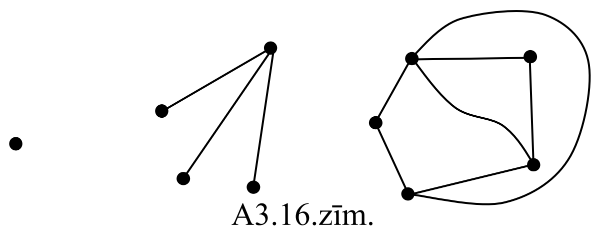
3.3.7. Viegli pārliecināties, ka katra Andra izmērītā minētā nogriežņa *a* garums ir lielāks par visu to izmērīto minēto nogriežņu garumu summu, kuri ir īsāki par *a*: $1 < 2$, $1 + 2 < 4$, $1 + 2 + 4 < 8$ utt. Tāpēc nekādi Andra izmērītie nogriežņi neveido noslēgtu maršrutu: tā būtu pretruna ar teorēmu par lauztas līnijas garumu.

Tāpēc astoņiem Andra izmērītajiem nogriežņiem kopā ir vismaz 9 galapunkti, un kopējais atzīmēto punktu skaits nav mazāks par 9. Deviņi atzīmēti punkti var būt, piemēram, skaitļu ass punkti 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256. Tiešām, $2 - 1 = 1$; $4 - 2 = 2$; $8 - 4 = 4$; $16 - 8 = 8$; $32 - 16 = 16$; $64 - 32 = 32$; $128 - 64 = 64$; $256 - 128 = 128$.

Pamatosim augstāk izcelto apgalvojumu. Pierādīsim visā matemātikā svarīgu rezultātu.

Lemma par ciklu. *Ja pavisam ir n punkti,* $n \geq 2$, *un novilktas vismaz n līnijas, katra no kurām savieno divus no šiem punktiem, tad var atrast dažas līnijas, kuras veido noslēgtu gredzenu.*

Pieņemsim no pretējā, ka šāda noslēgta gredzena nav. Apskatāmā punktu un līniju sistēma var sastāvēt no viena vai vairākiem fragmentiem; vienā fragmentā iekļausim punktus, no kuriem var aiziet no katra uz katru pa apskatāmajām līnijām, un šos punktus savienojošās līnijas. Piemēram, A3.16.zīm. parādītā sistēma sastāv no 3 fragmentiem (viens no tiem satur tikai vienu punktu).



A3.16.zīm.

Balstoties uz izdarīto pieņēmumu, pierādīsim, ka katrā fragmentā līniju ir mazāk nekā punktu. Tad arī kopējais līniju skaits būs mazāks nekā kopējais punktu skaits, bet tā būs pretruna: dots, ka līniju ir vismaz tikpat, cik punktu (t.i., vismaz *n*). Līdz ar to lemma par ciklu būs pierādīta.

Apskatīsim vienu fragmentu. Ņemsim vienu tā punktu *A* un nokrāsojam to sarkanu. Ja no *A* neiziet neviena līnija, vajadzīgais pierādīts (fragmentā ir 1 punkts un 0 līnijas, un $1>0$). Ja ir kāda līnija *AB*, nokrāsojam to sarkanu.

A3.17.zīm.

Ja no *A* un *B* citas līnijas vairs neiziet, vajadzīgais pierādīts: fragmentā ir 2 punkti, 1 līnija un $2>1$. Ja kāda līnija ir, nokrāsojam to sarkanu. **Tā noteikti iet uz citu punktu nekā jau apskatītie *A* un *B*, citādi veidotos gredzens.**

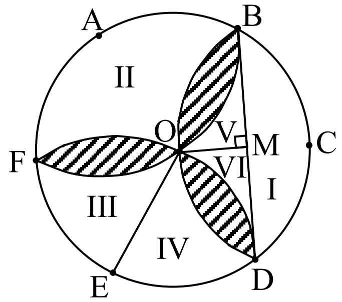
Iegūstam sarkanajā krāsā klāt **vienu** jaunu punktu un **vienu** jaunu līniju.

Tā kā iepriekš punktu sarkanā krāsā bija vairāk nekā līniju, tad arī tagad punktu sarkanajā krāsā joprojām ir vairāk nekā līniju.

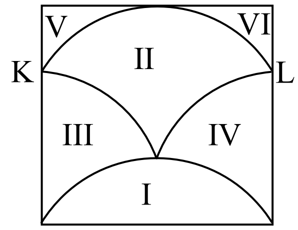
Līdzīgi turpinām, kamēr viss fragments nokrāsots sarkans. Tā kā katrā solī gan nokrāsoto punktu, gan nokrāsoto līniju daudzums palielinājās par 1, bet sākumā nokrāsoto punktu bija vairāk nekā līniju, tad arī beigās ir tāpat. Līdz ar to vajadzīgais pierādīts.

Tagad skaidrs, kā iegūt apgalvojumu par vismaz 9 galapunktiem Andra izmērītajos nogriežņos. Ja tur būtu ne vairāk par 8 galapunktiem, tad saskaņā ar lemmu par ciklu daži no šiem 8 nogriežņiem veidotu noslēgtu kontūru. Bet, kā jau redzējām risinājuma sākumā, tā nevar būt mērījumu skaitlisko vērtību dēļ.

3.3.8. Risinājuma shēma parādīta A3.18. un A3.19.zīm. Tiek izdarīti 3 taisni griezieni *OE*, *BD* un *OM*. Pēc tam daļas tiek saliktas tā, kā redzams 6.zīm.



A3.18.zīm.



A3.19.zīm.

Risinājums prasa rūpīgu pamatojumu. Ir vairāk vai mazāk „acīmredzams”, ka *OE* un *OM* neskar iesvītrotos apgabalus; bet noteikti jāpamato, ka 1) *BD* neiet caur iesvītrotajiem apgabaliem, 2) kāpēc daļas var salikt kopā tā, kā parādīts 6.zīm. (t.i., kāpēc nerodas pārklāšanās vai nepaliek tukšas vietas) un 3) kāpēc kopējā figūra iznāk taisnstūris. Lai pierādītu 3), jāpierāda arī, ka punktos *K* un *L* saliktās figūras ārējā robežā nav „lauzumu”.

1) Grieziens *BD* izvēlēts tā, ka taisne *BD* vienlaicīgi ir pieskare divām riņķa līnijām – ar centru punktā *A* un ar centru punktā *E*. Tiešām, $\angle ABD=\angle EDB=90°$, tāpēc *BD* perpendikulārs rādiusiem to galapunktos,

tātad ir pieskare. Tā kā pieskarei ar riņķa līniju ir viens kopīgs punkts, tā neiet cauri iesvītrotajiem apgabaliem.

2) Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem lielā riņķa līnija sadalīta 6 vienādos lokos un atbilstoši griezumu izvēlei tie ir tikpat lieli kā loki *BO*, *FO* un *OD*. Tāpēc šos lokus ir iespējams salikt kopā tā, lai nerastos pārklāšanās un nepaliktu tukšas vietas.

3) Lai pierādītu, ka izveidotā figūra ir taisnstūris, ir jāpierāda, ka izveidotā četrstūra pretējās malas ir vienādas un tā leņķi ir $90°$ lieli. Četrstūra abas sānu malu garumi ir vienādi ar $OE + OM$, savukārt pamati ir vienādi ar $BD = FB$. Tātad četrstūris ir paralelograms. Savukārt figūrām V un VI pēc griezuma izvēles stūros ir taisnie leņķi (A3.18.zīmējumā $\angle OMB = \angle AMD = 90°$), kas ir arī četrstūra augšējā pamata abi leņķi. To, ka punkts *K* un *L* veidojas izstiepts leņķis, pierāda, aprēķinot leņķus starp daļu „malām" un pieskarēm to stūros; atstājam to izdarīt lasītājam patstāvīgi. Izmantojam taisnstūra pazīmi: ja viens no paralelograma leņķiem ir taisns, tad tas ir taisnstūris. Tātad kopējā figūra iznāk taisnstūris.

3.3.9. Pieņemsim no pretējā, ka Gudrītis nav liels, un iegūsim pretrunu. Tātad Gudrītis nav ne garāks, ne smagāks par kādu rūķīti *A*. Tas nozīmē, ka *A* nav ne īsāks, ne vieglāks par Gudrīti. Bet tad *A* nevar būt mazs – pretruna.

Līdzīgi iegūst pretrunu no pieņēmuma, ka Gudrītis nav mazs.

3.3.10. Viena no iespējamām dežūru secībām Andrim, Maijai, Katrīnai un Imantam 15 dienu periodam ir šāda:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K, KI, KAI, MKAI, MKI, MI, AMI, AI, I.

Savukārt viena no iespējamām dežūru secībām Andrim, Maijai, Katrīnai, Imantam un Zanei decembra 31 dienai ir šāda:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K, KI, KAI, MKAI, MKI, MI, AMI,AI, I, IZ,
AIZ, AMIZ, MIZ, MKIZ, MKAIZ, KAIZ, KIZ, KZ, KAZ, MKAZ, MKZ,
MZ, AMZ, AZ, Z.

Pārbaudiet to patstāvīgi un padomājiet, kā saraksts 4 bērniem iegūts no saraksta 3 bērniem, bet saraksts 5 bērniem – no saraksta 4 bērniem. (Profesors Cipariņš būtiski balstījās uz to, ka $7 = 2^3 - 1$, $15 = 2^4 - 1$ un $31 = 2^5 - 1$.)

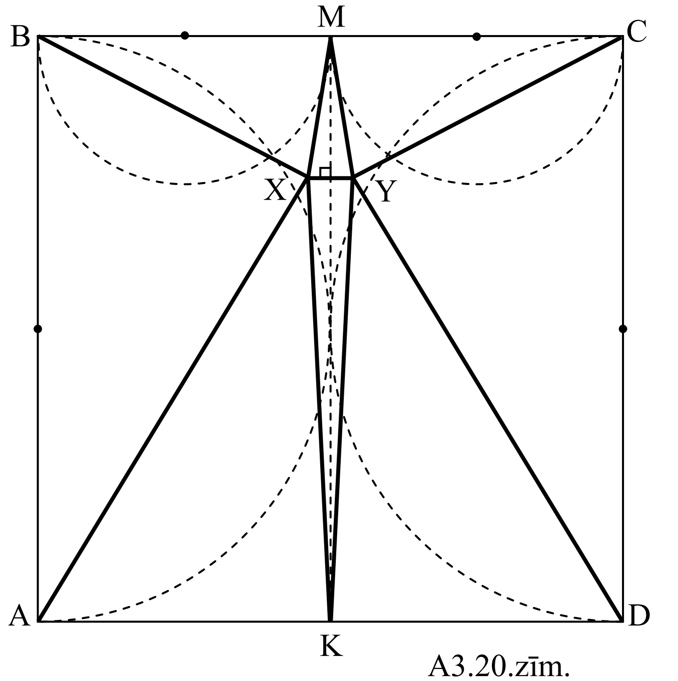
3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

3.4.1. Naturāls skaitlis dalās ar 5 tad un tikai tad, ja tā pēdējais cipars ir vai nu 0, vai 5. Tad $S = 0$ vai $S = 5$. Ja būtu $S = 0$, tad skaitlis *ASS* beigtos ar divām nullēm. Tad tas dalītos ar 100, tātad dalītos arī ar 4. Bet dots, ka *ASS* ar 4 nedalās. Tātad $S = 5$.

Ja *OLA* dalītos ar 5, tad jābūt vai nu $A = 0$, vai $A = 5$. Tā kā $S = 5$ un $A \neq S$, tad jābūt $A = 0$. Bet tad skaitļa *ASS* pieraksts sāktos ar ciparu 0; tas nav iespējams. Iegūta pretruna.

Tātad *OLA* nevar dalīties ar 5.

3.4.2. Skat., piem., A3.20.zīm.

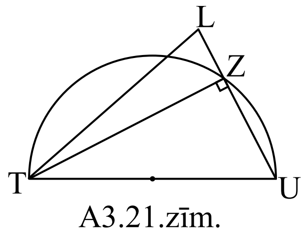


A3.20.zīm.

Punkti M un K ir attiecīgi kvadrāta malu BC un AD viduspunkti. Skaidrs, ka $ABMK$ ir taisnstūris. Pusriņķa līniju centri atrodas attiecīgi AB, BM, MC, CD viduspunktos; tātad AB, BM, MC, CD ir šo pusriņķa līniju diametri. Punkti X un Y izvēlēti tā, ka MK ir nogriežņa XY vidusperpendikuls.

Pamatosim, kāpēc visi 8 zīmējumā redzamie trijstūri ir šaurleņķu.

Lemma. Ja pusriņķa līnijas diametrs ir TU un nogrieznis LU krusto šo pusriņķa līniju, tad $\angle TLU < 90°$.



A3.21.zīm.

Tiešām (skat. A3.21.zīm.) $\angle TZU = 90°$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru. Tāpēc $\angle TZL = 180° - 90° = 90°$. Tāpēc ΔTZL ir taisnleņķa un $\angle TLZ < 90°$. Lemma pierādīta.

Apskatīsim ΔBXM :

$\angle BXM < 90°$ saskaņā ar lemmu,

$\angle MBX < \angle MBA = 90°$,

$\angle BMX < \angle BMK = 90°$.

Tātad ΔBXM ir šaurleņķu.

Līdzīgi pierāda, ka ΔBXA, ΔAXK, ΔKYD, ΔDYC, ΔCYM ir šaurleņķu.

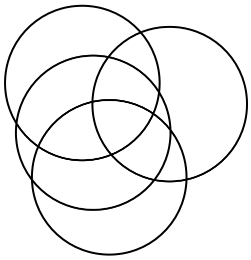
Apskatīsim ΔXMY. Acīmredzami $\angle XMY < 90°$. Saskaņā ar X un Y izvēli ΔXMY ir vienādsānu, tāpēc tā leņķi pie pamata $\angle MXY$ un $\angle MYX$ ir šauri.

Tātad ΔXMY ir šaurleņķu.

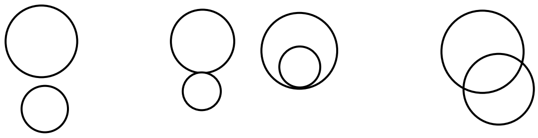
Līdzīgi pierāda, ka ΔXKY ir šaurleņķu.

3.4.3. Atbilde: 14 daļās.

Risinājums. To, ka 14 daļas var būt, redzam A3.22.zīm. Pierādīsim, ka vairāk daļu būt nevar.



A3.22.zīm.



a) b) c)

A3.23.zīm.

Risinājumā ļoti būtiska loma ir tam, ka divām dažādām riņķa līnijām var būt tikai 0, 1 vai 2 kopīgi punkti (skat. A3.23.zīm.). Starp citu, no tā redzam, ka divas riņķa līnijas var sadalīt plakni augstākais 4 daļās: visi iespējamie gadījumi redzami 4.zīm.

Padomāsim, par cik var palielināties apgabalu skaits, novelkot trešo riņķa līniju ω zīmējumā, kurā jau ir divas riņķa līnijas α un β.

Riņķa līnijai ω ar α un β kopā var būt ne vairāk kā 4 kopīgi punkti. Tātad ω ar šiem punktiem sadalās augstākais 4 lokos. Katrs no šiem lokiem sadala kādu no iepriekšējām plaknes daļām divās mazākās. Citā ceļā daļu skaits nepalielinās. Tāpēc daļu skaits pieaug ne vairāk kā par 4.

Tāpēc 3 riņķa līnijas sadala plakni ne vairāk kā $4+4=8$ daļās.

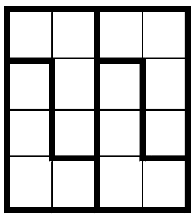
Novelkot vēl ceturto riņķa līniju, iegūstam augstākais $3\cdot 2=6$ kopīgus punktus ar iepriekšējām. Tātad ceturtā riņķa līnija sadalās augstākais 6 lokos, un šie loki palielina plaknes daļu skaitu ne vairāk kā par 6. Tāpēc 4 riņķa līnijas sadala plakni ne vairāk kā $8+6=14$ daļās.

3.4.4. Atbilde: 4 rūtiņas.

Risinājums. To, ka ar 4 rūtiņām pietiek, redzam A3.24.zīm.; viegli pārbaudīt visus iespējamos „L burta” novietojumus.

		x	
		x	
	x		
	x		

A3.24.zīm.



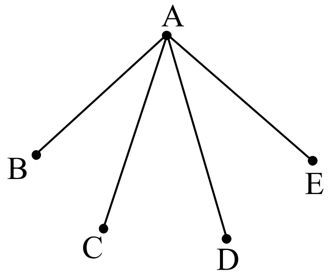
A3.25.zīm.

Pierādīsim, ka mazāk kā ar 4 melnām rūtiņām nepietiek. Apskatot A3.25.zīm. attēloto kvadrāta sadalījumu četros „L burtos”, redzam, ka katrā no daļām nepieciešama cita melna rūtiņa, tātad nepieciešamas ir 4 melnas rūtiņas, k.b.j.

3.4.5. Pierādīsim, ka minētā tipa trijstūru ir vismaz 2. Tā kā atrisinājums tiek drukāts uz balta fona, attēlosim nogriežņus taisnus (____________) vai viļņotus ( ).

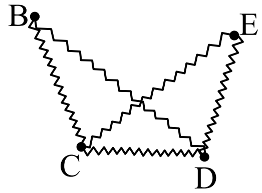
Šķirosim atsevišķas iespējas.

I Var gadīties, ka ir tāds punkts, no kura iziet 4 vai pat 5 viena veida nogriežņi. Apskatīsim četrus no tiem (skat. A3.26.zīm.). Varam pieņemt, ka šie nogriežņi ir taisni (otrs gadījums ir analoģisks).



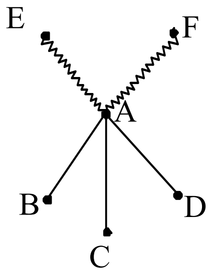
A3.26.zīm.

Ja kaut divi no sešiem nogriežņiem, kas savieno punktus *B*; *C*; *D*; *E* savā starpā, arī ir taisni, tad vajadzīgos divus trijstūrus ar taisnām malām jau esam ieguvuši (trešā virsotne tiem ir *A*). Tāpēc atliek iespēja, kad **augstākais** viens no šiem sešiem nogriežņiem ir taisns. Varam pieņemt, ka visi 5 nogriežņi, izņemot **varbūt** *BE*, ir viļņoti (pārējie gadījumi ir analoģiski). Tad *BCD* un *ECD* ir „viļņoti" trijstūri.

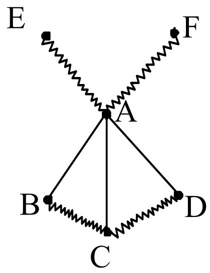


A3.27.zīm.

II Nav tāda punkta, no kura iziet 4 vai 5 viena veida nogriežņi. Tad no katra punkta iziet 3 viena veida un 2 otra veida nogriežņi. Varam pieņemt, ka no *A* iziet 3 taisni un 2 viļņoti nogriežņi (skat. A3.28.zīm.); otrs gadījums ir analoģisks.



A3.28.zīm.

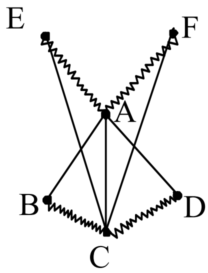


A3.29.zīm.

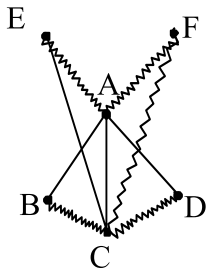
Ja kaut divi (vai visi trīs) no trim nogriežņiem *BC*, *CD*, *DB* arī ir taisni, esam ieguvuši divus „taisnus" trijstūrus (trešā virsotne tiem ir *A*). Tāpēc atliek gadījums, ja augstākais viens no tiem ir taisns, bet vismaz divi – viļņoti. Varam pieņemt, ka *CB* un *CD* ir viļņoti (skat. A3.29.zīm.); citi gadījumi ir analoģiski.

Tā kā mēs apskatām gadījumu, kad ne no viena punkta neiziet 4 vai 5 viena veida nogriežņi, tad pastāv divas iespējas:

II$_1$) abi nogriežņi *CE* un *CF* ir taisni (skat. A3.30.zīm.).



A3.30.zīm.



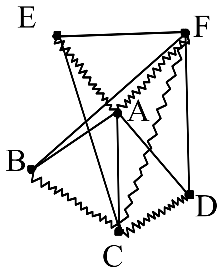
A3.31.zīm.

Viegli redzēt: lai kādi būtu nogriežņi *EF* un *BD*, gan trijstūru pārī „*AEF* un *CEF*”, gan trijstūru pārī „*ABD* un *CBD*” būs pa vienam trijstūrim ar viena veida malām.

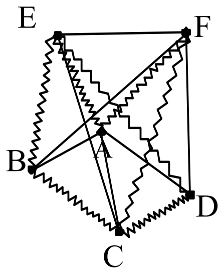
II$_2$) viens no nogriežņiem *CE* un *CF* ir taisns, otrs – viļņots; varam pieņemt, ka *CE* ir taisns (skat. A3.31.zīm.). Kā iepriekš iegūstam, ka atkarībā no *BD* veida vai nu *ABD*, vai *CBD* būs trijstūris ar viena veida malām. Centīsimies izvairīties no otra šāda trijstūra. Pakāpeniski iegūstam:

II$_{21}$) *EF* ir taisns (ΔAEF), *BF* ir taisns (ΔBCF) un *FD* ir taisns (ΔCFD), skat. A3.32.zīm.

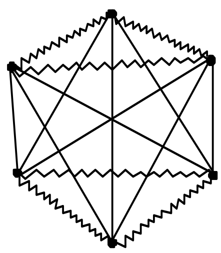
II$_{21}$) *BE* ir viļņots (ΔBEF) un *ED* ir viļņots (ΔEFD), skat. A3.33.zīm.



A3.32.zīm.



A3.33.zīm.



A3.34.zīm.

Tagad redzam: ja *BD* ir taisns, tad otrais vajadzīgais trijstūris ir *BFD*, bet, ja *BD* ir viļņots, tad otrais vajadzīgais trijstūris ir *BED*.

Visi gadījumi apskatīti, uzdevums atrisināts.

Piezīme. Var gadīties, ka vairāk par diviem „vienkrāsainiem” trijstūriem nav; skat., piem., A3.34.zīm.

3.4.6. Apzīmēsim minētos 5 skaitļus ar *a*, *b*, *c*, *d* un *e*. Tā kā visi šie skaitļi ir dažādi, varam pieņemt, ka $a < b < c < d < e$. Apzīmēsim šo skaitļu summu ar 2*S* (tātad $a + b + c + d + e = 2S$) un domāsim, kuri skaitļi var būt vienā grupā ar *e*, lai šīs grupas skaitļu summa būtu *S*. Apzīmēsim šo grupu ar *G*. Šķirosim trīs iespējas.

I Grupa *G* varētu sastāvēt tikai no skaitļa *e*; tad $a + b + c + d = e = S$. Tādā gadījumā cita sadalījuma divās grupās ar vienādām summām nav, jo, pievienojot *e* kaut vienu citu skaitli, summa būs lielāka par *S*, bet atlikušo skaitļu summa – mazāka par *S*.

II Grupa *G* nevar saturēt visus 5 skaitļus (acīmredzams) un nevar arī saturēt 4 skaitļus, jo *e* jau viens pats lielāks par vienīgo atlikušo skaitli.

III Tātad grupa G noteikti satur vai nu e un vēl vienu skaitli (sauksim šādas grupas par mazām), vai arī G satur e un vēl divus skaitļus (sauksim šādas grupas par lielām). Šķirojam apakšgadījumus.

III₁ Gan Andra grupa G_A, gan Maijas grupa G_M ir mazas. Tā nevar būt, jo tad abās šajās grupās skaitlim e pievienots viens un tas pats cits skaitlis, tāpēc tās sakrīt; tad jāsakrīt arī otrajām abu bērnu izveidotajām grupām.

III₂ Gan Andra grupa G_A, gan Maijas grupa G_M ir lielas. Grupas G_A un G_M nevar abas saturēt vēl citu vienu un to pašu skaitli; tā kā to abu summas ir S, tad arī trešajiem skaitļiem tajās būtu jāsakrīt, un tad abu bērnu sadalījumi būtu vienādi.

Tā kā saskaņā ar doto $d+c>b+a$ un $d+b>c+a$, tad vienīgā iespēja ir: viena no grupām G_A un G_M ir $\{e; a; d\}$, otra - $\{e; b; c\}$. Tad iegūstam $e+a+d=S$ un $e+b+c=S$; saskaitot šīs vienādības, iegūstam $e+a+d+e+b+c=2S=a+b+c+d+e$, no kurienes seko $e=0$ - pretruna.

III₃ Viena no grupām G_A un G_M ir maza, otra – liela. Pieņemsim, ka viena no tām ir $\{e; \alpha\}$, bet otra ir $\{e; \beta; \gamma\}$; te α, β, γ ir kaut kādi no atlikušajiem 4 skaitļiem a; b; c; d. Tā kā $e+\alpha=S$ un $e+\beta+\gamma=S$, tad $e+\alpha=e+\beta+\gamma$ un $\alpha=\beta+\gamma$; tāpēc skaitļi α, β, γ visi ir dažādi.

Iegūstam $e+\alpha+e+\beta+\gamma=2S$ jeb

$(e+\alpha+\beta+\gamma)+e=2S=a+b+c+d+e$, jeb

$\boldsymbol{e+\alpha+\beta+\gamma=a+b+c+d}$ (*)

Tā kā α, β, un γ ir trīs no skaitļiem a; b; c; d, tad no (*) seko: e vienāds ar ceturto no šiem skaitļiem. Bet tā ir pretruna ar doto, ka visi skaitļi ir dažādi. Tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

Piezīme. Ja skaitļu skaits (apzīmēsim to ar $n+1$) ir lielāks par 5 (tātad $n \geq 5$), uzdevumā minētā situācija ir iespējama. Apskatīsim skaitļu sistēmu

$$1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n;\ (1+2+...+n)-6\,.$$

Vispirms pierādīsim, ka visi skaitļi tajā ir dažādi. Pietiek pierādīt, ka $(1+2+...+n)-6>n$ jeb, ka $1+2+...+(n-1)>6$. Tā kā $n \geq 5$, tad tiešām $1+2+...+(n-1) \geq 1+2+3+4=10>6$.

Tālāk ir acīmredzams, ka Andris var izvēlēties sadalījumu

$\{1; 2; 4; 5; ...; n\}$ un $\{3; (1+2+...+n)-6\}$,

bet Maija – sadalījumu

$\{3; 4; 5; ...; n\}$ un $\{1; 2; (1+2+...+n)-6\}$.

3.4.7. Apzīmēsim $a-b=x$; $b-c=y$; $c-a=z$. Tad $x+y+z=0$.

Identisku pārveidojumu ceļā iegūstam

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=$$

$$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z} - 2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z} =$$

$$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right) =$$

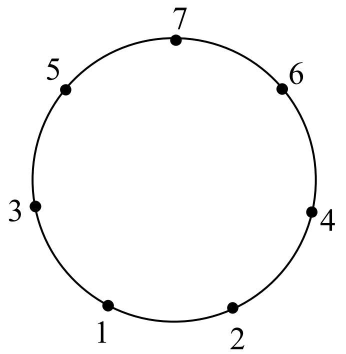
$$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - 2\cdot\frac{x+y+z}{xyz} =$$

$$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2,$$

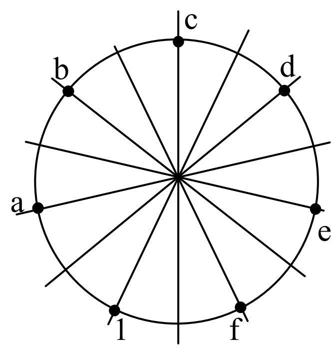
jo $x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, tāpēc lielums $2\cdot\frac{x+y+z}{xyz}$ anulējas.

Tā kā x, y, z – racionāli skaitļi, tad no vienādības $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$ seko vajadzīgais.

3.4.8. Skaidrs, ka der arī secība, kas **pretēja** uzdevumā dotajai (skat. A3.35.zīm.).



A3.35.zīm.



A3.36.zīm.

Pierādīsim, ka citu secību, izņemot uzdevuma nosacījumos minēto un A3.35.zīm. doto, nav.

Apskatāmajai punktu sistēmai ir 7 simetrijas asis; katra no tām iet caur riņķa līnijas centru un kādu no 7 punktiem. Izvēlēsimies skaitļa 1 atrašanās vietu un apzīmēsim pārējos skaitļus, kā parādīts A3.36.zīm.

Pastāv divas iespējas: vai nu $a > f$, vai $a < f$. Pieņemsim, ka $\boldsymbol{a > f}$ (otrs gadījums ir analoģisks). Tad, aplūkojot asi, kas iet caur punktu ar skaitli 1, iegūstam $\boldsymbol{b > e}$ un $\boldsymbol{c > d}$.

Aplūkojot asi, kas iet caur punktu ar skaitli c, redzam, ka $\boldsymbol{f > 1}$; tāpēc jābūt arī $\boldsymbol{e > a}$ un $\boldsymbol{d > b}$.

No izceltajām nevienādībām seko, ka

$\boldsymbol{1 < f < a < e < b < d < c}$ (*)

Tā kā skaitļi *f*; *a*; *e*; *b*; *d*; *c* ir tie paši skaitļi 2; 3; 4; 5; 6; 7, tad iegūstam 16.zīm. parādīto secību.

Līdzīgi, ja būtu $a < f$, mēs iegūtu uzdevuma nosacījumos doto secību.

3.4.9. Maija var uzvarēt, lietojot sekojošu stratēģiju. Viņa domās sadala visus ierakstāmos 100 skaitļus sekojošos pāros: (2; 3), (4; 5), (6; 7), ..., (96; 97), (98; 99), (100; 1). Tikko Katrīna ieraksta kādā rūtiņā vienu skaitli no kāda pāra, Maija ar atbildes gājienu ieraksta citā tās pašas rindiņas rūtiņā otru skaitli no šī paša pāra. Tā kā katrā rindiņā ir 10 (pāra skaits) rūtiņu, tad Maija šo plānu **var** realizēt. Kad visas rūtiņas būs aizpildītas, rindiņās ierakstītie mazākie skaitļi būs deviņi no pāra skaitļiem 2; 4; 6; 8; ...; 96; 98, kā arī vieninieks. Deviņu pāra skaitļu un viena nepāra skaitļa summa būs nepāra skaitlis, tātad Maija uzvarēs.

3.4.10. 1) Piemēram, $9+(8\cdot 7-6)\cdot 5\cdot(4+3+2-1)=2009$.

2) Naturāla skaitļa beigās pierakstot nulli, skaitlis tiek palielināts 10 reizes. Apzīmējot abus saskaitāmos ar *x* un *y*, izveidojam sistēmu:

$$\begin{cases} x+y=776 \\ 10x+y=2009 \end{cases}$$

Atņemot no otrās vienādības pirmo, pakāpeniski iegūstam:

$$10x-x=2009-776$$

$$9x=1233$$

$$x=1233:9$$

$$x=137$$

Otrs skaitlis tātad ir $776-137=639$.

Rihardam vajadzēja saskaitīt skaitļus 137 un 639.

3) Skaidrs, ka $a \neq 1$. Sadalot skaitli 2009 pirmreizinātājos $2009=7^2\cdot 41$, redzams, ka 2009 dalās tikai ar vienu naturāla skaitļa kvadrātu (kas lielāks par 1) – 49. Tātad **varbūt** der tikai $a^2=49$ un $a=7$. Pārbaudot pārliecināmies, ka iegūtā sakne der par vienādojuma atrisinājumu.

4) Ja skaitļos 2009 un 2008 pēdējos ciparus pabīda uz augšu, tad tie kļūst par kāpinātājiem. Tātad $200^9 : 200^8 = 200$.

5) Pieņemsim pretējo, ka nav 75 skolēnu, kuriem ir vienāds kļūdu skaits. Visus skolēnus varam sadalīt grupās: 1.grupa – 0 kļūdas; 2.grupa – 1 kļūda; ...; 27.grupa – 26 kļūdas.

Ja lielākais iespējamais skolēnu skaits vienā grupā ir 74, tad kopā ir ne vairāk kā $74\cdot 27=1998$ skolēni. Tā kā skolēnu skaits ir 2009, tad kādā no grupām būs vismaz 75 skolēni. Tātad pieņēmums ir aplams un varam atrast tādus 75 skolēnus, kuriem ir vienāds kļūdu skaits.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

3.5.1. Tā kā $1000000 = 100 \times 100 \times 100$, tad minēto sagriešanu var izdarīt, sadalot kubu 100 horizontālos slāņos, 100 „ziemeļu – dienvidu” virziena slāņos un 100 „austrumu – rietumu” virziena slāņos. Tādā gadījumā tiek izdarīti 99 horizontāli šķēlumi, 99 „ziemeļu – dienvidu” virziena šķēlumi un 99 „austrumu – rietumu” virziena šķēlumi. Katra šķēluma laukums vienāds ar kuba skaldnes laukumu (apzīmēsim to ar L), turklāt katrs šķēlums veido daļu no virsmas laukuma **divos** kubiņu slāņos. Tāpēc mazo kubiņu virsmas daļa, kas veidojas šķēluma rezultātā, ir (99+99+99)·2L. Pieskaitot vēl sākotnējā kuba skaldņu laukumus, iegūstam, ka visu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir 3·99·2L+6L. Tā kā sākotnējā kuba virsmas laukums ir 6L, tad meklētā attiecība ir (3·99·2L+6L):6L=100.

3.5.2. Pārveidojot vienādojuma kreiso pusi, iegūstam $\frac{17}{30} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}}$, no kurienes

seko $1\frac{13}{17} = x + \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}$ (1).

Tā kā y un z – naturāli skaitļi, tad $0 < \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}} < 1$, pie tam $\cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}$ – racionāls skaitlis. Katram racionālam skaitlim ir viennozīmīgi noteikta tā veselā daļa un daļveida daļa, tāpēc no (1) seko $x = 1$ un $\frac{13}{17} = \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}$, no kurienes

$1\frac{4}{13} = y + \frac{1}{z}$ (2)

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka jābūt $y = 1$ un $z = \frac{13}{4}$. Bet $\frac{13}{4}$ nav naturāls skaitlis. Tātad tādu *x*, *y, z*, par kādiem runāts uzdevumā, nav.

3.5.3. Apskatīsim 2 iespējas.

A. Skaitļa a pēdējais cipars ir 5. Viegli saprast: ja $a = b \cdot b$, kur b – naturāls skaitlis, un a beidzas ar ciparu 5, tad arī b beidzas ar ciparu 5. (Visus citus b pēdējos ciparus var pārbaudīt un konstatēt, ka neviens no tiem neder.) Tad $b = 10 \cdot y + 5$, y – naturāls skaitlis; tāpēc $b^2 = (10y+5)^2 = 100y^2 + 100y + 25$. No tā redzam, ka skaitļa a priekšpēdējam ciparam jābūt 2; tātad $a = \overline{\underbrace{55\ldots5}_{98\ reizes}25}$.

Šī skaitļa ciparu summa ir $99 \cdot 5 + 2$; tātad tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad arī pats skaitlis a dod atlikumu 2, dalot ar 3 (atceramies, ka skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus gan dalot ar 3, gan dalot ar 9). Pieņemsim, ka $a = b^2$, b – naturāls skaitlis. Padomāsim, kādu atlikumu dod b, dalot ar 3. Pastāv 3 iespējas.

A₁. Skaitlis b dod atlikumu 0, dalot ar 3, t.i., $b = 3m$, m – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2$, tātad b^2 dod atlikumu 0, dalot ar 3. Tāpēc šī iespēja atkrīt.

A₂. Skaitlis b dod atlikumu 1, dalot ar 3, t.i., $b = 3m + 1$, m – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2 + 6m + 1$, tātad b^2 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc arī šī iespēja atkrīt.

A₃. Skaitlis b dod atlikumu 2, dalot ar 3, t.i., $b = 3m + 2$, m – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$, tātad b^2 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc arī šī iespēja atkrīt.

B. Skaitļa a pēdējais cipars ir atšķirīgs no 5. Tad $a = \overline{\underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}x}$, kur x – kaut kāds no 5 atšķirīgs cipars. Tātad $\underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}0 \le a \le \underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}9$.

Pārbaudīsim visas iespējas.

Ja $a = \underbrace{55\ldots5}_{99}0$, tad a nav pilns kvadrāts; tiešām, a dalās ar 10, tātad tam būtu jādalās arī ar 100, bet tā nav.

Skaitlis a nevar beigties ar cipariem 2; 3; 7; 8, jo neviena naturāla skaitļa kvadrāts ar tādiem nebeidzas.

Skaitlis a nevar beigties ar ciparu 5 pēc uzdevumā dotā (ne visi a cipari ir piecinieki).

Skaitlis a nevar beigties ar ciparu 6. Ja tā būtu, tad a ciparu summa būtu $99 \cdot 5 + 6$, kas dalās ar 3; tad arī a dalītos ar 3. Tā kā $a = b \cdot b$, b – naturāls, tad b dalās ar 3; tad $a = b \cdot b$ dalās ar $3 \cdot 3 = 9$. Tad a ciparu summai jādalās ar 9. Bet šī summa, kas ir $99 \cdot 5 + 6$, nedalās ar 9 (atlikumā paliek 6).

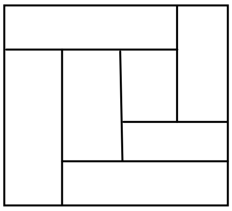
Ja a beigtos ar 1 vai ar 9, tad a dotu atlikumu 3, dalot ar 4 ($a = \underbrace{55\ldots5}_{98}00 + 48 + 3$ resp. $a = \underbrace{5\ldots5}_{98}00 + 56 + 3$); savukārt, ja a beigtos ar 4, tad a dotu atlikumu 2, dalot ar 4 ($a = \underbrace{55\ldots5}_{98}00 + 52 + 2$). Pierādīsim, ka tā nevar būt. Tiešām, ja $a = b^2$ un b ir pāra skaitlis, $b = 2n$, tad $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$, tātad a dod atlikumu 0, dalot ar 4. Savukārt, ja $a = b^2$ un b ir nepāra skaitlis, $b = 2n + 1$, tad $a^2 = 4(n^2 + n) + 1$, tātad a dod atlikumu 1, dalot ar 4.

Visi gadījumi pārbaudīti. Secinām, ka tāda skaitļa a, par kādu runāts uzdevumā, nav.

3.5.4. Apzīmēsim profesoru naudas daudzumus santīmos ar $A < B < C < D < E < F < G$. Pieņemsim, ka $E + F + G < 50$. **Tad noteikti jābūt $E \le 15$.** Tiešām, ja būtu $E \ge 16$, tad $F \ge 17$ (jo jābūt $F > E$) un $G \ge 18$ (jo jābūt $G > F$), bet tad $E + F + G \ge 16 + 17 + 18 \ge 51$ - pretruna.

No izceltā apgalvojuma savukārt pakāpeniski seko $D \le E - 1 \le 14$, $C \le D - 1 \le 13$, $B \le C - 1 \le 12$, $A \le B - 1 \le 11$; tātad $A + B + C + D \le 50$ un $E + F + G < 50$, iegūstam $A + B + C + D + E + F + G < 100$ - pretruna. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

3.5.5. Jā, var. Skat., piem., A3.37. zīm.



A3.37. zīm.

3.5.6. Apzīmēsim $a = \frac{1}{A}$, $b = \frac{1}{B}$, $c = \frac{1}{C}$, $d = \frac{1}{D}$. Tad pirmo nevienādības saskaitāmo pakāpeniski pārveidojam formā:

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}} = \frac{1}{AB} \cdot \frac{1}{\frac{A+B}{AB}} = \frac{AB}{AB \cdot (A+B)} = \frac{1}{A+B}.$$

Līdzīgi pārveidojot arī pārējos saskaitāmos un ievietojot tos nevienādībā, iegūstam:

$$\frac{1}{A+B} + \frac{1}{A+C} + \frac{1}{A+D} + \frac{1}{B+C} + \frac{1}{B+D} + \frac{1}{C+D} \le \frac{3}{4}$$

Sareizinot abas nevienādības puses ar 4, iegūstam
$$\frac{4}{A+B} + \frac{4}{A+C} + \frac{4}{A+D} + \frac{4}{B+C} + \frac{4}{B+D} + \frac{4}{C+D} \le 3 \quad (1)$$

Pieņemsim uz brīdi, ka pozitīviem x un y esam pierādījuši nevienādību
$$\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (2)$$

Ievietojot šai nevienādībā $x = A,\ y = B$, iegūsim $\frac{4}{A+B} \le \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$. Līdzīgi iegūsim $\frac{4}{A+C} \le \frac{1}{A} + \frac{1}{C}$, $\frac{4}{A+D} \le \frac{1}{A} + \frac{1}{D}$, $\frac{4}{B+C} \le \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$, $\frac{4}{B+D} \le \frac{1}{B} + \frac{1}{D}$, $\frac{4}{C+D} \le \frac{1}{C} + \frac{1}{D}$. Saskaitot šīs 6 nevienādības, iegūstam

$$\frac{4}{A+B} + \frac{4}{A+C} + \frac{4}{A+D} + \frac{4}{B+C} + \frac{4}{B+D} + \frac{4}{C+D} \le 3\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) \quad (3)$$

Tā kā saskaņā ar uzdevumā doto $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = a + b + c + d = 1$, tad no (3) seko (1), kas arī bija jāpierāda.

Tātad atliek pierādīt (2).

Identisku pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam

$$\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (2)$$

$$\frac{4}{x+y} \le \frac{x+y}{xy}$$

Reizinām abas puses ar $(x+y)$ un xy; to drīkst darīt, jo x un y ir pozitīvi skaitļi.

$$4xy \le (x+y)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \ge 0$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$$
$$(x-y)^2 \ge 0$$

Pēdējā nevienādība ir pareiza, tāpēc pareiza ir arī sākotnējā (2). Uzdevums atrisināts.

3.5.7. Runājot par viencipara, divciparu, ... skaitļiem, automātiski tiek pieņemts, ka apskatām naturālos skaitļus. Trīsciparu naturālie skaitļi ir no 100 līdz 999 ieskaitot; to pavisam ir 900, un naturālo skaitļu virknē tie izvietoti pēc kārtas. Katrs trešais no tiem dalās ar 3. Tā kā 900 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus var sadalīt 300 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu trijniekos un katrā no tiem tieši viens skaitlis dalās ar 3, tad ir tieši 300 trīsciparu naturāli skaitļi, kas dalās ar 3. Tā kā ar 3 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3, tad atbilde **c)** daļā ir **300**.

Trīsciparu naturāla skaitļa ciparu summa S ir naturāls skaitlis. Tā dalās ar 26, ja tās vērtība ir 26; 52; 78; ... .Tā kā neviens cipars nepārsniedz 9, tad $S \le 27$; tāpēc mūsu gadījumā b) daļā $S = 26$. Skaidrs , ka summa S var būt iegūta tikai kā $8+9+9 = 9+8+9 = 9+9+8$ (ņemot vērā saskaitāmo kārtību). Tāpēc **b)** daļas nosacījumus apmierina tikai skaitļi 899; 989; 998, un atbilde te ir **3**.

Apskatīsim jebkurus 10 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, no kuriem pirmais beidzas ar ciparu 0; tad pēdējais no tiem beidzas ar ciparu 9. Katram nākamajam no tiem ciparu summa ir par 1 lielāka nekā iepriekšējam. Tāpēc pusei no tiem ciparu summas ir pāra skaitļi, bet pusei – nepāra. Tātad katrā šādā desmitniekā pusei skaitļu ciparu summas ir nepāra skaitļi. Tā kā pavisam ir 90 šādi desmitnieki, tad **a)** daļā prasītās ciparu summas dalās ar 2 tieši $\frac{900}{2} = \mathbf{450}$ trīsciparu naturāliem skaitļiem.

3.5.8. Feja aizdedzina reizē no abiem galiem zariņu A un no viena gala – zariņu B. Brīdī, kad zariņš A būs nodedzis pilnībā, būs pagājusi tieši pusstunda; tātad zariņam B būs atlikusi pusstunda, ko degt. Šai brīdī aizdedzinām zariņu B no otra gala un sākam vārīt eliksīru. Brīdī, kad zariņš B būs nodedzis pilnībā, eliksīrs būs gatavs.

3.5.9. Skaidrs, ka uzrakstus var samainīt vairāk nekā vienā veidā, tāpēc pavisam bez bumbiņu izņemšanas prasīto noskaidrot nevarēs.

Alnis izņem vienu bumbiņu no kastītes, uz kuras **tagad** ir uzraksts *MB*. Viņam ir skaidrs, ka šai kastītē patiesībā ir vai nu divas melnas, vai divas baltas bumbiņas; tāpēc, redzot izņemtās bumbiņas krāsu, viņam ir skaidrs, kādas bumbiņas tajā ir.

Pieņemsim, ka Aļņa izņemtā bumbiņa ir balta. Tad no abām atlikušajām kastēm ar uzrakstiem *MM* un *BB* vienā ir divas melnas bumbiņas; saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, tā nevar būt kastīte ar uzrakstu *MM*, tātad tā ir kastīte ar uzrakstu *BB*. Tad kastītē ar uzrakstu *MM* ir viena melna un viena balta bumbiņa. Viss vajadzīgais noskaidrots.

Gadījumu, kad Aļņa izņemtā bumbiņa ir melna, analizē līdzīgi.

3.5.10. Atbilde: nē, tā gadīties nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka lodei ir ziemeļpols Z un dienvidpols D; tie ir diametrāli pretēji punkti. Apskatīsim ekvatoru; skaidrs, ka šajā riņķa līnijā var ievilkt vienādmalu trijstūri ABC. Tātad $AB = BC = CA$; skaidrs arī, ka $ZA = ZB = ZC$ un $DA = DB = DC$.

Pieņemsim, ka muriburi no lodes punktiem A; B; C; D; Z pārceļas attiecīgi uz plaknes punktiem A_1; B_1; C_1; D_1; Z_1. Tad jābūt $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$, t.i., $A_1B_1C_1$ – vienādmalu trijstūris. Jābūt arī $D_1A_1 = D_1B_1 = D_1C_1$, t.i., punktam D_1 jābūt $\Delta A_1B_1C_1$ apvilktās riņķa līnijas centram. Tas pats attiecas uz Z_1. Tas nozīmē, ka muriburiem no punktiem Z un D jāpārceļas uz vienu un to pašu punktu; tātad attālums starp viņiem, kas agrāk bija pozitīvs skaitlis, tagad ir 0 – pretruna.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. Uzdevumā ietverto frāzi „... samaksāja tik latu, cik flomāsteru var nopirkt par vienu latu" var saprast vismaz trejādi. Cik flomāsteru var nopirkt par vienu latu, ja viens flomāsters maksā, piemēram, 11 santīmus? Var sacīt, ka var nopirkt 9 flomāsterus, kas kopā maksā 99 santīmus, un viens santīms paliek pāri; var sacīt arī, ka par 1 latu flomāsterus nopirkt nevar, jo izdotā naudas summa nevar būt tieši 1 lats (100 nedalās ar 11); var arī sacīt, ka par 1 latu var nopirkt jebkuru daudzumu flomāsteru no 1 līdz 9 ieskaitot. Mēs izmantosim pirmo nostādni, kas sakrīt ar sarunvalodā pieņemto. Par vienu latu nopērkamo flomāsteru skaits noteikti ir naturāls skaitlis. Tātad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem Cipariņš izdeva naturālu skaitu latu: 1 latu, 2 latus, 3 latus, ... Apzīmēsim viena flomāstera cenu santīmos ar x; tātad Cipariņš samaksāja $25 \cdot x$ santīmus jeb $\frac{x}{4}$ latus. Tātad $\frac{x}{4}$ ir naturāls skaitlis, un x pieņem vienu no vērtībām 4; 8; 12; ... . Apzīmēsim $x = 4t$, t – naturāls. Tad par vienu latu nopērkamo flomāsteru skaits ir **lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz** $\boldsymbol{\frac{100}{x}}$.

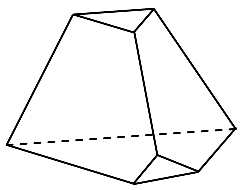
Sastādām tabulu:

x	Izdoto latu skaits $\frac{x}{4}$	Lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz $\frac{100}{x}$
4	1	25
8	2	12

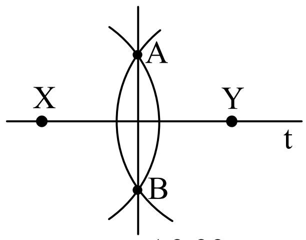
12	3	8
16	4	6
20	**5**	**5**
24	6	4
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Skaidrs, ka, x vērtībai tālāk augot, iztērēto latu skaits $\frac{x}{4}$ būs ne mazāks par 6, bet lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz $\frac{100}{x}$, būs ne lielāks par 4; tāpēc šie lielumi nevarēs būt vienādi. Tātad vienīgā iespēja ir $x = 20$, t.i., viens flomāsters maksā 20 santīmus un Cipariņš izdeva 5 latus; tiešām, redzam, ka par 1 latu var nopirkt 5 flomāsterus.

3.6.2. Jā, eksistē. Skat., piem., A3.38.zīm., kur redzama trijstūra piramīda, kam nošķeltas divas virsotnes.



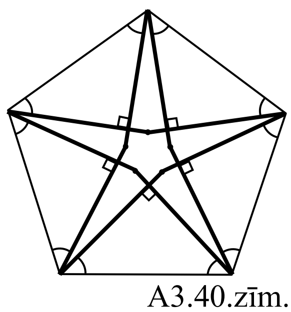
A3.38.zīm.



A3.39.zīm.

3.6.3. Skat., piem., A3.39.zīm. Uz taisnes t brīvi izvēlēti divi punkti X un Y un novilkti loki caur A, kuru centri ir šie divi punkti; loku otru krustpunktu apzīmējam ar B. Tā kā $XA = XB$, tad X atrodas uz AB vidusperpendikula; tā kā $YA = YB$, tad arī Y atrodas uz AB vidusperpendikula. Tātad taisne t ir AB vidusperpendikuls; tātad $AB \perp t$, kas arī bija vajadzīgs.

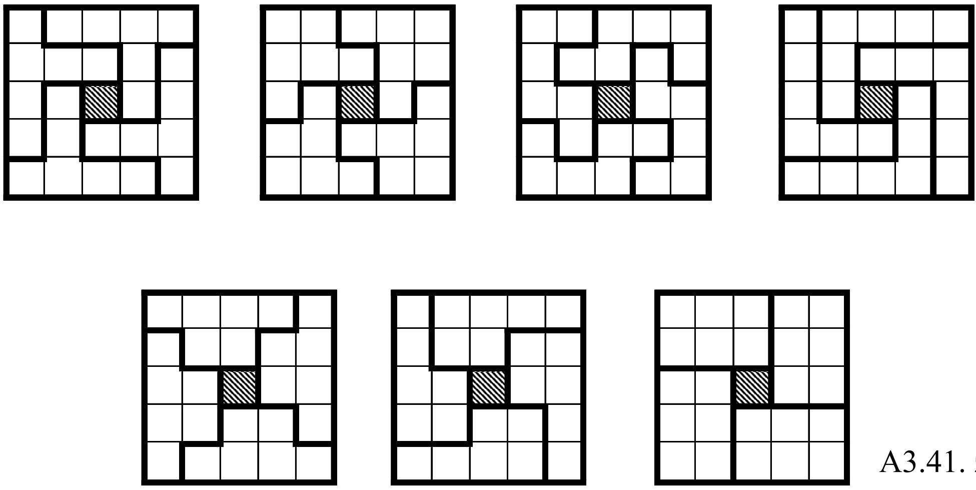
3.6.4. Skat., piem.,A3.40.zīm.



A3.40.zīm.

„Ārējās" virsotnes ir regulāra piecstūra virsotnes. Uz šī piecstūra malām kā hipotenūzām piecstūra iekšpusē konstruēti vienādsānu taisnleņķa trijstūri (tātad visi ar vienu lociņu apzīmētie leņķi ir $45°$ lieli); katešu pagarinājumu krustpunkti ir „iekšējās" virsotnes.

3.6.5. Skat., piem., A3.41.zīm., kur parādītas 7 iespējas; katrā no tām ir citas formas daļas.



A3.41. zīm.

3.6.6. Pārveidojam vienādojumu, iznesot kopīgos reizinātājus pirms iekavām:

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right)\right)\right)=2009$$

Tā kā $1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$, tālāk iegūstam

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+1}\right)\right)\right)=2009 \text{ un tad}$$

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\right)\right)=2009$$

Līdzīgi tālāk pakāpeniski iegūstam

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)\right)=2009$$

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=2009$$

$\frac{5}{x+1}=2009$, no kurienes $x+1=\frac{5}{2009}$ un $x=-\frac{2004}{2009}$.

3.6.7. Monētu, uz kuras uzrakstīts „*n* grami”, apzīmēsim ar n. Cipariņš vispirms nosver kopā 11 un 12. Ja iegūts rezultāts „23g”, tad viena no svērtajām monētām tiešām sver 11g, bet otra – 12g. Otrajā reizē Cipariņš nosver kopā 11 un 13. Rezultāts „24 grami” iespējams tikai, ja viena no svērtajām monētām sver 11g, bet otra – 13g. No abām izdarītajām svēršanām tagad zināms, ka 11, 12 un 13 ir „īstas”. (Ja kaut viena no šīm svēršanām dod citādu rezultātu, tad Cipariņš konstatē, ka ne visi uzraksti uz monētām ir pareizi, un tālākas svēršanas vairs neizdara.)

Tagad Cipariņš atliek malā monētas (11), (12) un (13) un izdara līdzīgus eksperimentus ar (14), (15) un (16). Ja arī tās izrādās „īstas”, tad pēdējā monēta (17) nevar svērt citādi kā 17g, un Cipariņš ir pārliecinājies, ka visi uzraksti ir pareizi. Ja otrajā eksperimentu sērijā tiek konstatēts, ka kāds uzraksts ir nepareizs, Cipariņš arī ir sasniedzis savu mērķi.

3.6.8. Atzīmēsim: ja divu skaitļu saskaitīšanā pārnesumi nerodas, tad summas ciparu summa ir vienāda ar summu, kuru iegūst, saskaitot savā starpā abu saskaitāmo ciparu summas. Ja turpretī kādā šķirā rodas pārnesumi (t.i., saskaitot ciparus šajā šķirā, iegūst divciparu skaitli $\overline{1a} = 10 + a$), tad rezultātā mēs rakstām tikai ciparu a, bet abu saskaitīto ciparu summas komponente 10 tiek pārnesta uz nākošo šķiru kā vieninieks; tātad rezultāta ciparu summa samazinās par 9, salīdzinot ar abu saskaitāmo visu ciparu summu. Nākošais pārnesums, ja tāds ir, atkal „samazina” rezultāta ciparu summu par 9, u.t.t.

No šejienes skaidrs, ka **b)** gadījums nav iespējams, jo $54 > 20 + 25$; **c)** gadījums nav iespējams, jo 22 gan ir mazāks par $20 + 25$, bet $(20 + 25) - 22 = 23$ nedalās ar 9. Savukārt **a)** gadījums ir iespējams (piem., $55555 + 44444 = 99999$), un arī **d)** gadījums ir iespējams (piem., $6667 + 83333 = 90000$).

3.6.9. Atbilde: Ls 20 000,- .

Risinājums. Šādas izmaksas var sasniegt, piemēram, tā, kā parādīts A3.42.zīm.

Darbinieks / Iekārta	A	B	C	D	E	F	G	H
1.	X	X	X	X				
2.	X	X	X		X			
3.	X	X	X			X		
4.	X	X	X				X	
5.	X	X	X					X

A3.42.zīm.

Ja darbā ierodas visi 5 „šauri specializējušies” darbinieki D; E; F; G; H, tad visas iekārtas var darbināt. Ja daži no viņiem aiziet uz bibliotēku, tad viņu vietā ir tāds pats daudzums „universālu”, kas katrs var aizvietot jebkuru iztrūkstošo, un atkal viss ir kārtībā.

Tagad parādīsim, ka ar mazāk nekā 20 apmācībām nepietiek. Tiešām, ja notikuši mazāk nekā 20 apmācības procesi, tad ar vismaz vienu iekārtu apmācīti strādāt **ne vairāk kā 3 darbinieki** (ja ar katru prastu strādāt vismaz četri, tad apmācību skaits būtu ne mazāks par $4 \cdot 5 = 20$). Ja kādu dienu neviena no viņiem nav darbā, attiecīgā iekārta stāv dīkā.

3.6.10. Atbilde: 14.

Risinājums. Skaitļi 2; 3; 4; ...; 15 apmierina uzdevuma prasības; pārbaudiet to patstāvīgi. Pieņemsim, ka izdevies atrast 15 šādus skaitļus; tad lielākais no tiem ir vismaz 16. No katriem 8 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 8; tāpēc arī viens no 8 lielākajiem mūsu apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 8 (apzīmēsim to ar x). Pierādīsim, ka $x > 8$. Tiešām, ja **lielākais** no apskatāmajiem 15 skaitļiem ir vismaz 16, tad **8 lielākie** no šiem 15 skaitļiem visi ir vismaz 9; tātad arī x ir vismaz 9. Ja x dalās ar 8, tad $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot q$, kur q – naturāls skaitlis, turklāt $q > 1$, citādi nebūtu spēkā sakarība $x > 8$. Tā kā q dalās ar vismaz vienu pirmskaitli (varbūt pats ir pirmskaitlis), tad x sadalās vismaz 4 pirmskaitļu reizinājumā – pretruna.

4. LATVIJAS 21. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

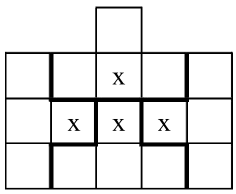
4.5.1. Jā, var. Piemēram: $35+6+47+28+19=135$.

4.5.2. **a)** Jā, var. No diviem ķieģeļiem var salikt kubu $2\times2\times2$, no astoņiem šādiem kubiem – prasīto $4\times4\times4$ kubu.

b) Nē, nevar. Mazo kubiņu kopskaits $5\times5\times5$ kubā būtu $5\cdot5\cdot5=125$, bet katrā no ķieģeļiem ir 4 kubiņi. Tā kā 125 nedalās ar 4, prasītais nav iespējams.

4.5.3. **Atbilde:** 4.

Tā kā katrā no četrām A4.1.zīm. redzamajām daļām jābūt atzīmētai vismaz vienai rūtiņai, tad ar mazāku daudzumu atzīmētu rūtiņu nepietiks. Pārbaude parāda, ka 4 atzīmētās rūtiņas apmierina uzdevuma prasības.

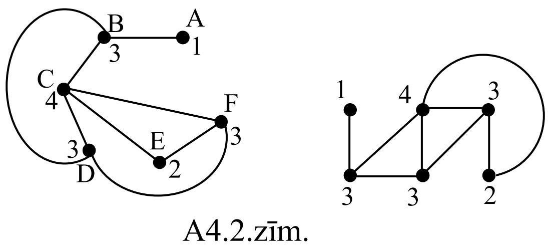


A4.1.zīm.

4.5.4. Sniegsim vienu no veidiem, kā ātri atrisināt šo uzdevumu.

Skaidrs, ka vienā no figūrām varam patvaļīgi apzīmēt punktus ar burtiem, pēc tam otrā figūrā „sameklējot" šiem burtiem atbilstošos punktus. Ērtības labad pirmajā figūrā apzīmēsim burtus pēc kārtas alfabēta secībā (skat. A4.2.zīm.).

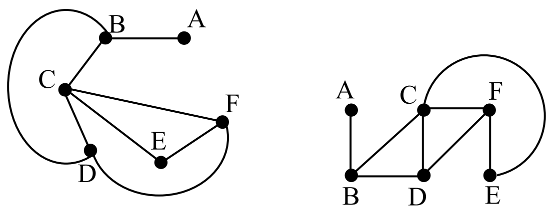
Tad katrā no figūrām ar cipariem atzīmējam, cik līniju iziet no katra punkta.



A4.2.zīm.

Redzam, ka ir cipari, kuri neatkārtojas vienas figūras ietvaros – 1, 2 un 4; tātad otrajā figūrā šo ciparu vietās varam rakstīt atbilstošos burtus – A, E un C. Tā kā no burta A pirmajā figūrā līnija aiziet tikai uz burtu B, tad arī otrajā figūrā burts B atradīsies tam atbilstošajā vietā – apakšējā kreisajā stūrī.

Pavisam no burta B pirmajā figūrā var „aiziet" uz burtiem A, C un D; otrajā figūrā burti A un C mums jau ir ierakstīti, tātad burts D jāraksta pie apakšā vidū esošā punkta. Tad atlikušais neapzīmētais punkts ir F (skat. A4.3.zīm.). Pārbaudot redzam, ka uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.



A4.3.zīm.

4.5.5. Atbilde: 14 *l*.

Risinājums. Tā kā prasīts, kādu lielāko ūdens daudzumu var savākt vienā spainī, vispirms pierādīsim, ka vairāk par 14 litriem savākt nevar.

No uzdevuma nosacījumiem ir skaidrs, ka katrā spainī vienmēr ir vesels skaits litru. No tā, ka sākumā kopā spaiņos ir 15 litri ūdens, secinām, ka jāapskata vienīgi gadījums, kad beigās vienā no spaiņiem būtu visi šie 15 litri. Tas nav iespējams, jo no tā, ka spainī ielej tik ūdens, cik tur jau ir, izriet, ka pēdējā gājienā tiktu kopā salieti divi ūdens daudzumi pa $7\frac{1}{2}$ *l* katrs.

Atliek tikai parādīt, kā savākt 14 *l* vienā spainī. Vienu no variantiem skat. tabulā A4.4.zīm., kur ar tumšāku krāsu iezīmēti tie divi „spaiņi”, kuros ūdens daudzumi iepriekšējā gājienā tikuši izmainīti.

1	2	3	4	5
1	2	6	1	5
1	2	6	2	4
1	2	4	4	4
1	2	4	8	0
2	2	4	7	0
0	4	4	7	0
0	0	8	7	0
0	0	1	14	0

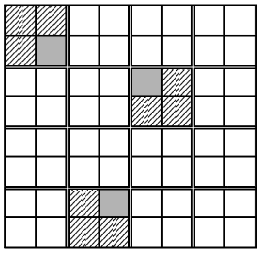
A4.4.zīm.

4.6. Sestā klase

4.6.1. Dotajiem 11 naturālajiem skaitļiem iespējami pavisam 10 dažādi pēdējie cipari. Tā kā $11 > 10$, tad noteikti atradīsies tādi divi skaitļi, kuriem pēdējie cipari ir vienādi. Šo divu skaitļu starpības pēdējais cipars būs 0; pēc pazīmes skaitļu dalāmībai ar 10 secinām, ka šī starpība dalās ar 10.

4.6.2. Atbilde: uzvar Katrīna.

Katrīna domās sadala lielo kvadrātu daļās ar izmēriem 2×2 (skat. A4.5.zīm.). Tikko Andris nokrāso rūtiņu kādā no šīm daļām, Katrīna nokrāso atlikušās rūtiņas šai daļā (zīmējumā ar vienmērīgu krāsojumu atzīmēts Andra gājiens, ar iesvītrotajām rūtiņām – Katrīnas gājiens). Skaidrs, ka pēc 15 gājienu sērijām būs atlikusi vairs viena daļa ar izmēriem 2×2; lai kuru no šīm četrām rūtiņām aizkrāsotu Andris, Katrīna varēs aizkrāsot pārējās trīs, tādējādi gūstot uzvaru.



A4.5.zīm.

4.6.3. Nē, nevar. Tā kā pēc katra gājiena katra konfekšu veida skaits izmainās par 1, visu konfekšu daudzumi vienmēr ir vienas paritātes skaitļi (vai nu visi pāra, vai visi nepāra). Prasītajā beigu situācijā (0; 0; 1) skaitļi nav vienas paritātes; esam ieguvuši pretrunu. Tātad prasītais nav iespējams.

4.6.4. Pieņemsim, ka šillišallu ir vairāk, tātad viņu pārsvars ir vismaz 6 : 4. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, visi šillišallas šajā gadījumā atbildētu, ka viņu būtu vairāk, bet visi votivapas – ka votivapu būtu vairāk. Tātad nebūtu tādu sešu rūķīšu, kas atbildētu, ka votivapu būtu vairāk – pretruna. Līdzīgi iegūstam pretrunu, pieņemot, ka vairāk ir votivapu.

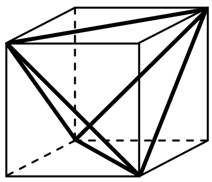
Atliek tikai gadījums, kad gan šillišallu, gan votivapu ir tieši piecas. Pārbaudot secinām, ka tas apmierina uzdevuma nosacījumus.

4.6.5. Atbilde: 12 draudzības.

Piemēru skat. A4.6.zīm.; katrā no 4 virsotnēm ir pa 3 draudzībām.

Pierādīsim, ka vairāk par 12 draudzībām nav iespējamas.

Tā kā kubam ir 6 skaldnes, tad atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ir novilktas 6 diagonāles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Pavisam no tām var izveidot 15 pārus: *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *cd*, *ce*, *cf*, *de*, *df*, *ef*. Bet trijos pāros diagonāles nevar būt draudzīgas, jo diagonālēm, kas atrodas kuba pretējās skaldnēs, kopīgu punktu nav. Tāpēc draudzību skaits nepārsniedz $15-3=12$.



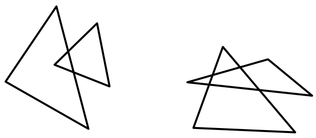
A4.6.zīm.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. a) Nē, nevar. Starp doto skaitļu pirmreizinātājiem ir tieši 2 trijnieki: skaitlī 3 un skaitlī 6. Viens no tiem nevar „noīsināties”, „nenoīsinoties” arī otram. Tāpēc vērtība „3” nav iespējama.

b) Jā, var. Piemēram, izteiksmes $1:(2:3:4:(5:6))$ vērtība ir 5.

4.7.2. Abi gadījumi ir iespējami; skat., piem., A4.7.zīm.



A4.7.zīm.

	x			x	
x	**1**	x	x	**3**	x
	x			x	
	x			x	
x	**4**	x	x	**2**	x
	x			x	

A4.8.zīm.

4.7.3. Lai pierādītu uzdevumā prasīto, pieņemsim pretējo. Tad 16 skaitļi, kas A4.8.zīm. atrodas ar krustiņiem atzīmētajās rūtiņās, visi ir dažādi un lielāki par 4. Lielākais no tiem tātad ir ≥ 20. Tā starpība ar to no skaitļiem 1; 2; 3; 4, kam tas atrodas blakus, ir vismaz 16 – pretruna. Tātad vismaz divās rūtiņās ierakstīti vienādi skaitļi.

4.7.4. Atbilde: a) nē, **b)** nē.

Risinājums. a) Lai katra no monētām A un D nonāktu rindas otrā galā, tai jāpiedalās 3 maiņās, pat visu laiku virzoties vienā virzienā; ja kāda monēta izdara „soli atpakaļ”, gājienu skaits jau ir vismaz 5. Tātad A un D kopā izdara vismaz $3+3=6$ gājienus; tikai viens no tiem ir kopīgs, tātad jau A un D kopā jāizdara vismaz 5 gājieni.

b) Iedomāsimies, ka monētas ir punkti, kas kustas pa skaitļu asi, un apzīmēsim to attēlotos skaitļus attiecīgi ar a; b; c; d. Apskatām izteiksmi

$$R=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Katrā gājienā tieši viena iekava maina zīmi, tāpēc zīmi maina arī R. Tātad pēc 99 gājieniem R būs pretēja zīme nekā sākumā. Bet, ja monētas būtu pārkārtojušās pretējā secībā, tad **visas** iekavas būtu mainījušas zīmi, tātad R zīme būtu tāda pati kā sākumā. Iegūta pretruna.

4.7.5. Jā, var. Skat., piem., A4.9.zīm.

1	2	3	6	12
4	5	7	8	24
10	9	11	14	44
13	16	15	12	56
28	32	36	40	

A4.9.zīm.

4.8. ASTOTĀ KLASE

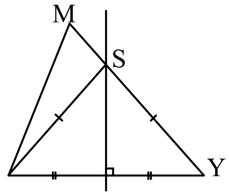
4.8.1. Pirmskaitļi 7 un 11 nevar būt starp šiem skaitļiem, jo tikai vienas grupas skaitļu reizinājums var dalīties ar 7 vai 11. Atlikušajos skaitļos kopā ir 5 – nepāra skaits – pirmreizinātāji „3”, tāpēc, lai tiktu apmierināti uzdevuma nosacījumi, vismaz vēl viens skaitlis jāizslēdz. Tāpēc sadalīti var tikt ne vairāk kā $12-3=9$ skaitļi. Piemērs

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8=2\cdot 4\cdot 9\cdot 10$$

parāda, ka 9 skaitļus var sadalīt tā, kā prasīts uzdevumā.

4.8.2. 1) Atcerēsimies vispārzināmu faktu: ja punkts M atrodas uz to pašu pusi no nogriežņa XY vidusperpendikula kā X, tad $MX < MY$.

2) Tiešām (skat. A4.10.zīm.) $MX < MS + SX = MS + SY = MY$.



A4.10.zīm.

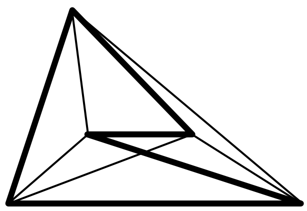
3) Pamatosimies uz šo faktu un zīmējuma elementu izvietojumu, lai pierādītu uzdevumā prasīto. Apskatīsim malu AB un tās vidusperpendikulu m: tā kā punkts O atrodas uz to pašu pusi no vidusperpendikula kā B, tad $OB < OA$. Ērtības labad rakstīsim $OA > OB$.

4) Līdzīgi iegūstam, ka $OC > OD$.

5) Atcerēsimies vidusperpendikula īpašību: ja punkts atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula, tad tas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem. Tāpēc $OB = OC$.

6) Esam ieguvuši $OA > OB = OC > OD$, k.b.j.

4.8.3. Skat., piem., A4.11.zīm. Piecstūra malas zīmētas ar resnākām, diagonāles – ar tievākām līnijām.


A4.11.zīm.

4.8.4. Nē, nevar. No katras virsotnes iziet 3 šķautnes. Tāpēc, aprēķinot visu virsotņu un visu šķautņu numuru summu, iegūtajā rezultātā katras virsotnes numurs ieietu kā saskaitāmais tieši 4 reizes, un citu saskaitāmo nebūtu, bet summa $1+2+3+...+19+20=210$ nedalās ar 4.

4.8.5. Aprēķināsim, cik pilni apļi kopā ir veikti. Skaidrs, ka stundu rādītājs ir veicis vienu pilnu apli, minūšu rādītājs – 12, bet sekunžu - $12 \cdot 60 = 720$ pilnus apļus. Tātad kopā rūķīši ir novizinājušies $1 + 12 + 720 = 733$ pilnus apļus.

No tā, ka rūķīši cits citu neapdzen, secinām, ka katru divu rūķīšu veikto pilno apļu daudzumi neatšķiras viens no otra vairāk kā par 1. Ievērojam, ka $733 = 3 \cdot 244 + 1$. Tātad nav iespējams, ka visi 3 rūķīši nosauca vienu un to pašu skaitli. Tad viegli saprast, ka Sniegbaltītei tika pateikti skaitļi 244; 244; 245.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Pierādīsim, ka $c = 7$. Ja būtu $c \le 6$, tad no tā, ka $a < b < c$, seko, ka $a + b \le 4 + 5 = 9$ – pretruna. Ja būtu $c \ge 8$, tad līdzīgi iegūstam $d + e \ge 9 + 10 = 19$ – pretruna.

Tātad $a + b + c + d + e = (a + b) + c + (d + e) = 10 + 7 + 18 = 35$.

4.9.2. Vairākas reizes lietojot vienādsānu trijstūra un trijstūra ārējā leņķa īpašības, pakāpeniski iegūstam:

1) $\angle MNC = \angle MCN = 20°$ (skat. A4.12.zīm.);

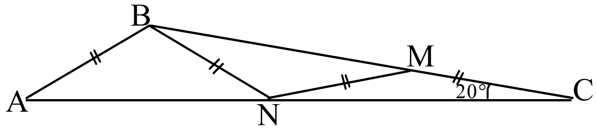
2) $\angle BMN = 20° + 20° = 40°$;

3) $\angle MBN = \angle BMN = 40°$;

4) $\angle BNM = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$;

5) $\angle BNA = 180° - 100° - 20° = 60°$

6) $\angle BAN = \angle BNA = 60°$. Tātad ΔABN ir regulārs, no kā seko vajadzīgais.



A4.12.zīm.

4.9.3. Skaitlim n pieskaitot 4, pārnesumi nerodas. Tāpēc $n + 4$ ciparu summa ir $11(1 + 2 + 3 + 4) + 4 = 114$. Tā kā 114 dalās ar 3, tad pēc naturālu skaitļu dalāmības pazīmes ar 3 arī $n + 4$ dalās ar 3. Tā kā $n + 4 > 3$, tad tas nav pirmskaitlis.

4.9.4. Vispirms uzdodam 3 jautājumus un pēc katras atbildes „noliekam malā” norādīto vidējo monētu (tā vairs nepiedalās nākošajos no šiem 3 jautājumiem). Palikušās, malā nenoliktās divas monētas ir smagākā un vieglākā no visām (mēs nezinām, „kura ir kura”).

Tagad meklēto monētu atrodam ar vienu jautājumu par „malā noliktajām” monētām.

4.9.5. To, ka skaitlis n ir nokrāsots balts/sarkans, pierakstīsim kā n~b/n~s. Tā kā skaitļi 5 un 6 nokrāsoti dažādi, varam uzskatīt, ka 5~b un 6~s.

Tagad pieņemsim no pretējā, ka uzdevuma apgalvojums nav spēkā. Šķirojam divus gadījumus.

A: Skaitlis 0 ir nokrāsots sarkans jeb **0 ~ s**

Apskatām summu, kas ir 0	Secinām
(-6) + 0 + 6	(-6) ~ b
1 + 5 + (-6)	1 ~ s
(-1) + 0 + 1	(-1) ~ b
(-4) + (-1) + 5	(-4) ~ s
(-2) + (-4) + 6	(-2) ~ b

3 + (-1) + (-2)	3 ~ s
(-3) + 0 + 3	(-3) ~ b

Iegūta pretruna, jo (-3) + (-2) + 5 = 0.

B: Skaitlis 0 ir nokrāsots balts jeb **0 ~ b**

Apskatām summu, kas ir 0	Secinām
(-5) + 0 + 5	(-5) ~ s
(-1) + (-5) + 6	(-1) ~ b
1 + 0 + (-1)	1 ~ s
4 + 1 + (-5)	4 ~ b
(-4) + 0 + 4	(-4) ~ s
3 + (-4) + 1	3 ~ b
(-3) + 0 + 3	(-3) ~ s
2 + (-3) + 1	2 ~ b
(-2) + 0 + 2	(-2) ~ s

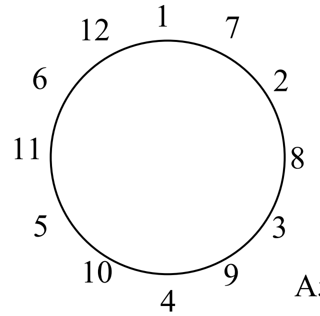
Iegūta pretruna, jo (-2) + (-4) + 6 = 0.

Tā kā neatkarīgi no tā, kā nokrāsosim nulli, būsim ieguvuši pretrunu, esam pierādījuši, ka var atrast tādus trīs vienādi nokrāsotus skaitļus kuru summa ir nulle.

5. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

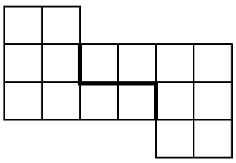
5.5.1. a) Jā, var. Skat., piem., A5.1. zīm. Šādu risinājumu iegūstam mēģinājumu ceļā un pēc tam pārliecināmies, ka katru divu blakus esošu skaitļu starpība ir vismaz 5.

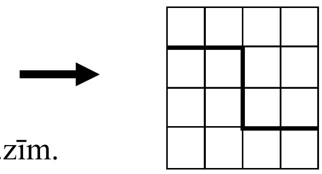


A5.1. zīm.

b) Nē, nevar. Skaitlim „6” iespējams tikai viens kaimiņš – skaitlis „12”. Tas nozīmē, ka uz abām pusēm no „6” būtu jāraksta „12”, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka katrs skaitlis var tikt uzrakstīts tikai vienu reizi.

5.5.2. Tā kā dotā figūra sastāv no 16 rūtiņām, secinām, ka mums jāiegūst kvadrāts ar malu garumiem 4×4 rūtiņas. Sadalām figūru, kā redzams A.5.2. zīmējumā, un iegūstam A.5.3. zīm. redzamo kvadrātu.


A.5.2.zīm.


A.5.3.zīm.

5.5.3. A) Atbilde: nē

Risinājums: zinām, ka ar „5” dalās visi tie skaitļi, kuru pēdējais cipars ir vai nu „0” vai „5”. Tā kā „0” nav dots un „5” mēs izsvītrojam, tad iegūtais skaitlis nevar dalīties ar „5”.

B) Jā, meklējamais sešciparu skaitlis var būt, piemēram, 154320.

Pārbaudām:

„1”: iegūtais skaitlis 54320 dalās ar 1, jo ar 1 dalās jebkurš naturāls skaitlis;

„2”: iegūtais skaitlis 15430 dalās ar 2, jo ar 2 dalās visi skaitļi, kuru pēdējais cipars ir pāra;

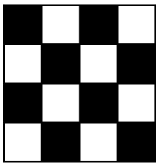
„3”: iegūtais skaitlis 15420 dalās ar 3, jo visu ciparu summa ($1+5+4+2+0=12$) dalās ar 3;

„4”: iegūtais skaitlis 15320 dalās ar 4, jo skaitļa pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis 20 dalās ar 4;

„5”: iegūtais skaitlis 14320 dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 0.

5.5.4. Atbilde: Jā.

Risinājums: Izkrāsojot rūtiņas šaha galdiņa kārtībā, kā parādīts A5.4.zīmējumā, mums ir tieši 8 baltas rūtiņas un 8 melnas rūtiņas.



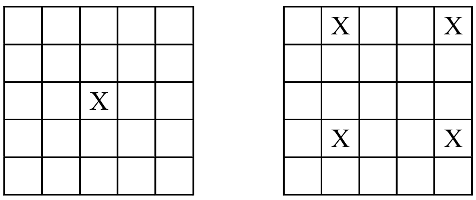
A5.4.zīm.

Astoņus „mazākos” skaitļus no 1 līdz 8 ierakstīsim baltajās rūtiņās un 8 „lielos” skaitļus no 9 līdz 16 ierakstīsim melnajās rūtiņas. Tā kā melno rūtiņu kaimiņi ir tikai un vienīgi baltās rūtiņas (tāpat arī balto rūtiņu kaimiņi ir tikai un vienīgi melnās rūtiņas), tad redzam, ka jebkurš baltajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir mazāks par jebkuru melnajā rūtiņā ierakstīto skaitli, tāpat arī jebkurš melnajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir lielāks par jebkuru baltajā rūtiņā ierakstīto skaitli.

5.5.5. Andra „kods” var būt divciparu, trīsciparu vai četrciparu atkarībā no tā, no cik cipariem sastāv dienas un mēneša pieraksts. Ja kods sastāv no diviem cipariem, tad tā pirmais cipars norāda dienu un otrais cipars norāda mēnesi, jo gan dienas, gan mēneša pierakstam atbilst vismaz viens cipars. Secinām, ka divciparu kods var būt viena vienīga datuma pieraksts. Līdzīgi arī kods, kurš sastāv no četriem cipariem var būt tikai viena vienīga datuma pieraksts, jo gan dienas, gan mēneša pieraksts sastāv no augstākais diviem cipariem, kur pirmie divi sastāda dienas pierakstu un otrie divi – mēneša pierakstu. Atliek apskatīt kodus, kuri sastāv no trīs cipariem. Lai kods būtu vairāk kā viena datuma pieraksts, tam jābeidzas vai nu ar ciparu „1”, vai ar ciparu „2” (novembris – 11 un decembris – 12). Priekšpēdējais cipars var būt vienīgi „1”. Tā kā janvārī ir 31 diena, iegūstam 111, 211 un 311; tā kā februārī ir augstākais 29 dienas, tad iegūstam 112 un 212. Tātad pavisam ir pieci šādi kodi, kuri ir vairāk kā viena datuma pieraksti.

5.6. SESTĀ KLASE

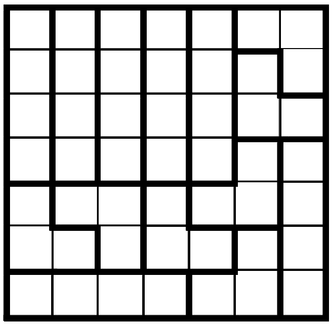
5.6.1. Jā, var abos gadījumos. Skat., piemēram, A5.5.zīm.



A5.5.zīm.

5.6.2. a) Nē, nevar. Pat ja mēs iedomātos, ka Andrim ir 12 tādas figūriņas, kuras katra sastāv no četrām rūtiņām (šīs ir rūtiņu skaita ziņā lielākās figūriņas), viņš varētu noklāt augstākais $12 \cdot 4 = 48 < 7 \cdot 7$ rūtiņas.

b) Jā, var. Vienu no iespējamiem veidiem, kā to izdarīt, skat. A5.6.zīm.



A5.6. zīm.

5.6.3. a) Nē, nevar. Ja kastes būtu skaitā *n*, tad rūķīšu piedalīšanos kopā būtu $2 \cdot n$ (katru kasti nes 2 rūķīši). Tāpat ir zināms, ka katrs no 5 rūķīšiem ir piedalījies 3 kastu nešanā, tātad piedalīšanos pavisam ir $5 \cdot 3$. Redzam, ka piedalīšanos kastu nešanā var uzrakstīt gan kā $2 \cdot n$, gan arī $5 \cdot 3$, bet tā nevar būt, jo naturālam skaitlim *n* nevar pastāvēt vienādība $2n = 15$.

b) Jā, var. Skat., piem., A5.7.zīm.

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
R1	X	X	X			
R2	X			X	X	
R3		X		X		X
R4			X		X	X

A5.7.zīm

5.6.4. Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Spriežam no pretējā. Pieņemsim: ir iespējams, ka iegūtā summa arī ir septiņciparu skaitlis un visi cipari tajā ir nepāra.

Šķirojam divas iespējas:

saskaitīšanā pārnesums nerodas. Tad katrā šķirā tiek saskaitīts pāra cipars un nepāra cipars. Tātad gan pāra cipariem, gan nepāra cipariem ir jābūt vienādā skaitā, bet tas nav iespējams, jo 7 nedalās ar 2.

kādā šķirā rodas pārnesums. Aplūkojam pašu labējo no šādām šķirām. Tur saskaitīti divi piecinieki (citādi summu, kas ir vismaz 10, iegūt nevar); bet tad summā šajā šķirā rodas pāra cipars 0.

5.6.5. Pierādīsim, ka pietiek ar 1 svēršanu. Uzliekam uz kausiem pa 67 monētām. Ja svari nav līdzsvarā, vajadzīgās monētu kaudzītes atrodas uz kausiem. Ja svari ir līdzsvarā, tad par meklējamām kaudzītēm der malā palikušās 66 monētas un jebkuras 66 monētas no viena svaru kausa. Pierādīsim to.

Tiešām, ja malā palikušās 66 monētas kopā sver tikpat, cik 66 monētas no 1. kausa, tad šajos komplektos ir vienāds skaits (apzīmēsim to ar x) „vieglo monētu”. Tad uz 1. kausa atrodas vai nu x, vai x + 1 „vieglā” monēta (atkarībā no tā, vai 67-ā monēta uz šī kausa ir „smagā” vai „vieglā”). Atbilstoši uz otrā svaru kausa ir vai nu x, vai x + 1 „vieglā monēta” (jo kausi atrodas līdzsvarā). Tātad pavisam vieglo monētu ir vai nu $2x + x = 3x$, vai $2(x + 1) + x = 3x + 2$. Bet ne vienādojumam $3x = 100$, ne vienādojumam $3x + 2 = 100$ nav atrisinājuma veselos skaitļos. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un malā palikušo monētu svars noteikti atšķiras no 1. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara. Tieši tāpat pierāda, ka malā palikušo monētu kopējais svars noteikti atšķiras no 2. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara.

Skaidrs, ka pavisam bez svēršanas prasītās monētu kaudzītes atrast nevar. Tātad meklējamais minimums ir 1.

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Šādā formā var izsacīt jebkuru naturālu skaitli *n*. Skatīt sekojošos pārveidojumus: $n = n^{21} : n^{20} = \left(n^7\right)^3 : \left(n^4\right)^5$. Tātad, ja $a = n^7$ un $b = n^4$, tad, ievietojot iegūtajā izteiksmē, iegūstam $n = a^3 : b^5$. Zinot, ka $x = a^3$ un $y = b^5$, redzam, ka $n = x : y$.

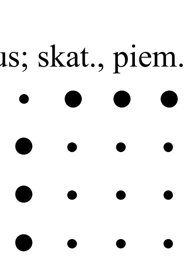
5.7.2. a) Katrā gājienā divu skaitļu vietā tiek uzrakstīts viens, tātad skaitļu skaits katrā gājienā samazinās par 1. Tā kā tas dilst no 2009 līdz 1, tad pavisam izdarīs $2009 - 1 = 2008$ gājienus.

b) Uzrakstīto skaitļu summa paliek nemainīga. Doto skaitļu summa ir 2009, tāpēc pēdējais palikušais skaitlis būs 2009.

5.7.3. a) Ir zināms, ka skaitlim *a* ir tieši četri dalītāji, no tiem zināmi ir 1 un pats skaitlis *a*. Pārējos divus dalītājus apzīmēsim ar a_1 un a_2 tā, ka $1 < a_1 < a_2 < a$. Ir zināms, ka skaitlim *b* ir tieši 6 dalītāji, no tiem zināmi ir 1 un pats skaitlis *b*. Pārējos dalītājus apzīmēsim ar b_1, b_2, b_3 un b_4 tā, ka $1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b$. Tad $1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b < a_1b < a_2b < ab$ ir 9 dažādi skaitļa *ab* dalītāji.

b) Jā, var gadīties. Lai to pierādītu, nepieciešams atrast vienu piemēru, kur izpildās prasītais. Apskatīsim piemēru, kad $a = 8$ (dalītāji 1, 2, 4, 8) un $b = 32$ (dalītāji 1, 2, 4, 8, 16, 32), tad $ab = 256$ un tā dalītāji ir 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 un 256.

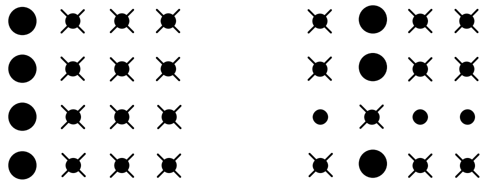
5.7.4. a) var nokrāsot 6 punktus; skat., piem., A5.8.zīm.



A5.8.zīm.

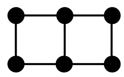
b) pierādīsim, ka 7 vai vairāk punktus nokrāsot nevar. Pieņemsim no pretējā, ka tas izdevies. Šķirojam gadījumus.

b1) ir kolonna, kurā nokrāsoti 3 vai vairāk punkti. Tātad tajās rindās, kurās ir šie punkti, citu nokrāsotu punktu nav. Tāpēc vēl var nokrāsot vai nu 0, vai augstākais 3 punktus (skat. A5.9.zīm.).



A5.9.zīm.

b2) nevienā kolonnā nav nokrāsoti vairāk par 2 punktiem. Ņemam kolonnu α, kurā nokrāsoti 2 punkti (tāda noteikti eksistē); pieņemsim, ka tie ir rindās β un γ. Citi nokrāsotie punkti var atrasties tikai ārpus α, β un γ. Tur pavisam ir 6 taisnstūra režģa veidā izvietoti punkti (skat. A5.10.zīm.).



A5.10.zīm.

Viegli pārbaudīt: lai kurus 5 punktus no šiem 6 nokrāsotu (t.i., tikai vienu atstātu nenokrāsotu), uzdevumā minētais taisnleņķa trijstūris eksistē. Iegūta pretruna.

5.7.5. Sprīdītis nosūta vienu rūķīti A izlūkos pa vienu ceļu, divus citus rūķīšus B un C izlūkos pa otru ceļu, bet pats dodas izlūkos pa trešo ceļu. Visiem pieteikts pēc divām dienām atgriezties ceļu sazarojuma vietā.

Ja Sprīdītis konstatē, ka Laimīgā Zeme sasniedzama pa viņa izvēlēto ceļu, tad viņš rūķīšus nemaz neaptaujā, bet kopā ar visiem dodas uz mērķi. Aplūkosim gadījumu, kad Sprīdītis savā izlūkgājienā Laimīgo Zemi nav sasniedzis. Tad viņš jautā visiem rūķīšiem, vai viņi ir sasnieguši Laimīgo Zemi. Šķirojam divas iespējas:

a) B un C atbildes ir dažādas. Tātad viens no viņiem ir neuzticams. Tātad A noteikti runā patiesību. Balstoties uz A teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu;

b) B un C atbildes ir vienādas. Tad tās abas nevar būt nepareizas; tātad tās ir pareizas. (Ievērojiet: mēs neapgalvojām, ka B un C abi **vienmēr** runā patiesību!). Balstoties uz B un C teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Apskatīsim divus iespējamos risinājumus.

A. Rūpīgi apskatot doto tabulu, ievērojam: skatoties pa rindiņām, katrs nākošais skaitlis ir par 2 lielāks nekā iepriekšējais. Tātad katrs otrajā kolonnā ierakstītais skaitlis ir par 2 lielāks nekā tajā pašā rindiņā ierakstītais pirmās kolonnas skaitlis, attiecīgi trešajā kolonnā ierakstītais – par 4 un ceturtajā – par 6 lielāks nekā attiecīgās rindiņas pirmajā kolonnā ierakstītais skaitlis. Ņemot vērā šo spriedumu, sadalīsim katrā rūtiņā ierakstīto skaitli divos saskaitāmajos, kā parādīts A5.11.zīmējumā.

1+0	1+2	1+4	1+6
9+0	9+2	9+4	9+6
17+0	17+2	17+4	17+6
25+0	25+2	25+4	25+6

A5.11.zīm.

Ievērosim, ka katrā rindiņā ir vienādi pirmie saskaitāmie, bet katrā kolonnā – otrie. Tā kā no katras rindiņas ņemta viena rūtiņa, tad visu izvēlēto skaitļu pirmo saskaitāmo summa ir $1+9+17+25=52$; līdzīgi, tā kā no katras kolonnas ņemta viena rūtiņa, tad visu izvēlēto skaitļu otro saskaitāmo summa ir $0+2+4+6=12$. Atliek ievērot, ka $52+12=64$.

B. Minētās 4 rūtiņas var izvēlēties tikai 24 veidos; visas šīs summas var tieši aprēķināt un konstatēt, ka katra no tām ir 64.

5.8.2. Izmantosim to, ka skaitļi a, b un c visi nav vienādi savā starpā. Tāpēc par šiem skaitļiem mēs varam apgalvot, ka to visu starpību kvadrātu summa ir lielāka par nulli: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$. Atcerēsimies, ka nav svarīgi, vai starpības ir pozitīvas vai negatīvas, jo, jebkuru nenulles skaitli kāpinot kvadrātā, rezultāts ir pozitīvs.

Veicot identiskus pārveidojumus, no iepriekš uzrakstītās nevienādības iegūstam:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$$

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2>0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac>0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2bc+2ac$$

$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$, k.b.j.

5.8.3. Pievērsīsim uzmanību tikai katras pakāpes pēdējam ciparam. Ievērosim, ka $113^{113}=113^{112}\cdot 113$, tātad $113^{113}=\left(113^4\right)^{28}\cdot 113$ un 113^4 beidzas ar ciparu 1 ($3^4=81$). Tāpēc 113^{113} beidzas ar ciparu 3. Līdzīgi $19^{19}=\left(19^2\right)^9\cdot 19=(\ldots 1)^9\cdot 19$ beidzas ar ciparu 9. Tāpēc $113^{113}-19^{19}$ beidzas ar ciparu 4.

5.8.4. Apskatīsim situāciju trešajā svēršanā. Pieņemsim, ka to akmeņu kopējā masa, kuri atradās uz kreisā kausa, bija x, savukārt to akmeņu kopējā masa, kuri atradās uz labā kausa, bija y. Pārējie akmeņi bija tādi, kuri pirmajā svēršanā atradās uz viena svaru kausa, bet otrajā svēršanā – uz otra svaru kausa. Apzīmēsim ar a to akmeņu masu, kuri pirmajā svēršanā atradās uz labā kausa, bet otrajā – uz kreisā; līdzīgi apzīmēsim ar b to akmeņu masu, kuri pirmajā svēršanā atradās uz kreisā kausa, bet otrajā – uz labā. Zinot, ka pirmajā svēršanā svari nostājās līdzsvarā, akmeņu masas uz abiem kausiem bija vienādas. Iegūstam vienādību $b+x=a+y$. Līdzīgi no otrās svēršanas rezultāta seko vienādība $a+x=b+y$. Saskaitām šīs abas vienādības, iegūstot

$a + b + 2x = b + a + 2y$,

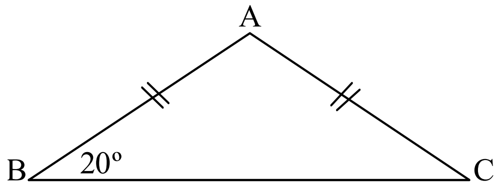
$2x = 2y$,

$x = y$, kb.j.

5.8.5. Šķirojam 3 gadījumus atkarībā no tā, kuras divas malas ir vienādas.

I AB = AC (skat. A5.12.zīm.)

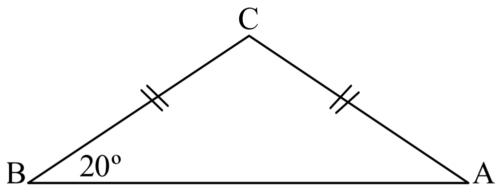
$3 \cdot AC = 3 \cdot AB > AB$.



A5.12.zīm.

II $AC = BC$ (skat. A5.13.zīm.)

$3 \cdot AC > 2 \cdot AC = AC + CB > AB$.

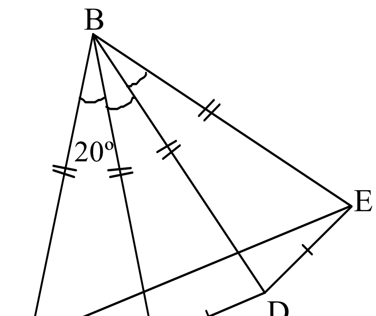


A5.13.zīm.

III $AB = BC$ (skat. A5.13.zīm.)

Tā kā $\angle ABE = 60°$ un $BA = BE$, tad ΔABE ir vienādmalu. Tāpēc

$3 \cdot AC = AC + CD + DE > AE = AB$.



A5.14.zīm.

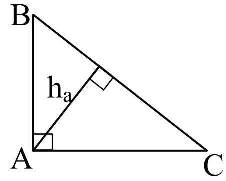
5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas. Pirmkārt pierādīsim, ka ΔABC laukums nevar būt mazāks kā 78: saskaņā ar teorēmu par slīpnes un perpendikula garumu $CA \geq h_c \geq 13$. Tāpēc:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_b \geq \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78.$$

Otrkārt parādīsim, ka eksistē tāds trijstūris, kura laukums ir 78 un kura augstumi atbilst uzdevuma prasībām. Apskatām taisnleņķa trijstūri ABC, kur $AB = 12$; $AC = 13$; $\angle A = 90°$ (skat. A5.15.zīm.). Šis trijstūris apmierina uzdevuma nosacījumus:

- $h_b = AB = 12$,
- $h_c = AC = 13$,
- $h_a = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{12 \cdot 13}{\sqrt{313}} > \dfrac{12 \cdot 13}{18} > 5$.



A5.15.zīm.

5.9.2. Apzīmējam četrciparu skaitļa *n* pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar *a*, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli ar *b*. Tad $n = 100a + b$, tāpēc iegūstam vienādojumu: $100a + b = b^2$, kas ekvivalents vienādojumam: $25 \cdot 4 \cdot a = b(b-1)$. Vienādojuma kreisā puse dalās ar 25, tātad arī labajai pusei jādalās ar 25. Tā kā *b* un *b*–1 ir divi pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tad LKD(b,b–1)=1 un varam secināt, ka vai nu *b*, vai *b*–1 dalās ar 25. Tādā gadījumā *b* iespējamās vērtības ir 00; 01; 25; 26; 50; 51; 75; 76. Ievietojot šīs vērtības vienādojumā, redzam, ka atbilstoši *a* vērtība iznāk divciparu naturāls skaitlis tikai pie $b = 76$; tad $a = 57$. Tāpēc ir tikai viens meklējamais skaitlis $n = 5776$.

5.9.3. Atceramies, ka

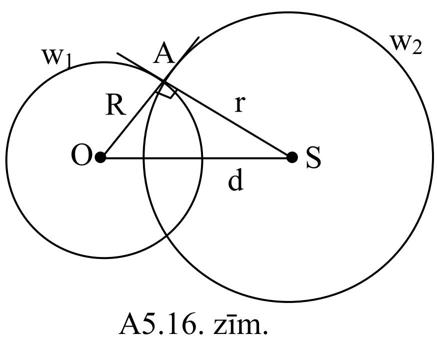
I pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta,

II tātad taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

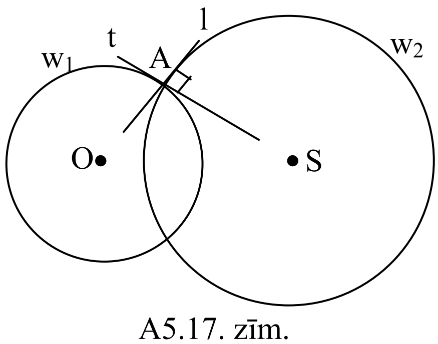
Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas. Pirmkārt pierādīsim, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

Pieņemam, ka $R^2 + r^2 = d^2$.

Novelkam rādiusus uz r.l. krustpunktu *A* (skat. A5.16.zīm.). Tad $OA^2 + SA^2 = OS^2$, tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas ΔOAS ir taisnleņķa. Tāpēc taisne *SA* ir r.l. w_1 pieskare (pēc II), un tāpat taisne *OA* ir w_2 pieskare. Tātad abas pieskares punktā *A* ir savstarpēji perpendikulāras.



A5.16. zīm.



A5.17. zīm.

Otrkārt, pierādīsim doto apgalvojumu no otras puses: ja mums ir dots, ka abu riņķa līniju krustpunktā novilktās pieskares ir perpendikulāras, tad varam secināt, ka $R^2 + r^2 = d^2$.

Pieņemam, ka pieskares krustpunktā A ir savstarpēji perpendikulāras (skat. A5.17.zīm.).

Tā kā $t \perp l$, tad t satur w_2 rādiusu (no I), tātad iet caur S. Līdzīgi l iet caur O. Tāpēc pieskares veido ΔOAS, kas ir taisnleņķa. No Pitagora teorēmas mēs secinām, ka $OA^2 + SA^2 = OS^2$, tātad $R^2 + r^2 = d^2$.

5.9.4. Apzīmēsim dotā kvadrātvienādojuma saknes ar x_1 un x_2, kur $x_1 < x_2$.

Šķirojam divus gadījumus:

- $x \notin (x_1; x_2)$: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \geq 0 > -1$, no kā seko vajadzīgais.
- $x \in (x_1; x_2)$:

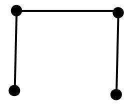
$$\left|x^2 + px + q\right| = \left|(x - x_1)(x_2 - x)\right| = (x - x_1) \cdot (x_2 - x) \leq$$

$$\leq \left(\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1.$$

Tātad $-1 \leq x^2 + px + q \leq 1$, no kā seko vajadzīgais.

5.9.5. a) Pieņemsim pretējo, ka tādu divu cilvēku nav. Tā kā cilvēku ir tieši n un paziņu daudzums vienam cilvēkam var būt 0; 1; 2; ...; n-1 (t.i., tieši n dažādas vērtības), tad katrai šai vērtībai „jārealizējas"; t.sk. jārealizējas arī paziņu daudzumiem 0 un n-1. Bet tas nav iespējams: ja ir kāds, kam nav neviena paziņas, tad nevar būt neviena, kas pazīst visus n-1 citus. Iegūta pretruna, tātad eksistē divi tādi cilvēki A un B, kam starp pārējiem ir vienādi paziņu daudzumi.

b) Pie $n = 4$ var gadīties, ka nevar atrast tādu cilvēku C vai tādu cilvēku D: skat, piem., A5.18.zīm., kur punkti attēlo cilvēkus, bet līnijas – pazīšanās. Šajā gadījumā rūķīša Muribura apgalvojums ir nepatiess.



A5.18. zīm.

Pie $n = 2009$ tādi cilvēki noteikti atradīsies. Pieņemsim pretējo: nekādiem diviem cilvēkiem ar vienādiem paziņu daudzumiem minētā trešā cilvēka nav. Ņemsim divus cilvēkus A un B ar vienādiem paziņu daudzumiem (tādi eksistē saskaņā ar a) punktu). Katru no pārējiem n-2 cilvēkiem pazīst **tieši viens** no A un B, tāpēc n-2 jādalās ar 2 (citādi A un B paziņu daudzumi neiznāktu vienādi). Tāpēc arī n jābūt pāra skaitlim. Bet 2009 ir nepāra. Iegūta pretruna un varam secināt, ka var atrast tādu trešo cilvēku, kurš vai nu pazīst gan A, gan B, vai arī nepazīst ne A, ne B.

6. LATVIJAS 59. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Pārveidojam $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\right| = 1$. Saskaņā ar Vjeta teorēmu iegūstam, ka $x_1 + x_2 = 1$, tāpēc pēc tālākiem pārveidojumiem iegūstam $\left|1 \cdot (x_1 - x_2)\right| = 1 \Leftrightarrow \left|x_1 - x_2\right| = 1$.

Aprēķinām x_1 un x_2: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$ un $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$. Ievietojam iegūtajā sakarībā un, izmantojot arī moduļa definīciju, pārveidojam to: $\left|x_1 - x_2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{1-4a}\right| = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{1}{4} - a} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = 0$.

Līdzīgi veicam otru pārveidojumu sēriju:

$$\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 1 \Leftrightarrow \left|(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{1-4a}\left((x_1+x_2)^2 - x_1x_2\right)\right| = 1.$$

Pēc Vjeta teorēmas $x_1 + x_2 = 1$ un $x_1 \cdot x_2 = a$, tāpēc iegūstam $\left|\sqrt{1-4a} \cdot (1-a)\right| = 1$. Izmantojot moduļa īpašības, iegūstam $\sqrt{1-4a}\left|1-a\right| = 1$.

Kāpinot abas puses kvadrātā un atverot iekavas iegūstam $4a^3 - 9a^2 + 6a = 0$. Iznesam a pirms iekavām: $a\left(4a^2 - 9a + 6\right) = 0$; tā kā iekavās esošajai izteiksmei nav reālu sakņu, vienīgais vienādojuma atrisinājums ir $a = 0$.

6.9.2. Atbilde: trīs skaitļi.

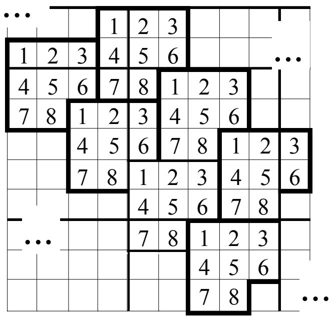
Risinājums: triju skaitļu piemērs ir 33 = 3·11, 34 = 2·17, 35 = 5·7. No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 4; ja tas pats nav 4, tad tas nav vienkāršs. Tieši pārbaudot četru pēc kārtas ņemtu skaitļu komplektus, kas satur „4”, redzam, ka neviens no tiem neder.

6.9.3. Atbilde: $k = 8$.

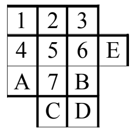
Krāsojumu ar 8 krāsām skat. A6.1.zīm.

Parādīsim, ka ar 7 krāsām nepietiek.

Viegli saprast, ka A6.2.zīm. rūtiņās 1÷7 visām krāsām jābūt dažādām, un izvairīties no 8. krāsas var tikai, krāsojot *A* krāsā 3 un B – krāsā 1. Cenšoties tālāk izvairīties no 8. krāsas, pakāpeniski iegūstam *C* = 2 un *D* = 4. Bet tad rūtiņai *E* nav piemērotas krāsas.



A6.1.zīm.

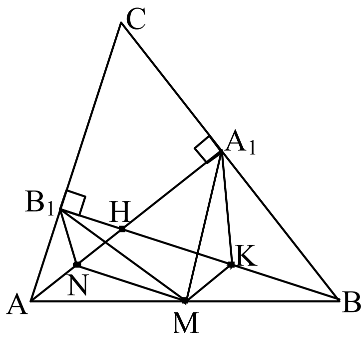


A6.2.zīm.

6.9.4. 1) No viduslīniju īpašībām trijstūrī AHB iegūstam $NM = \frac{1}{2}HB$ un $KM = \frac{1}{2}AH$ (skat. A6.3.zīm.).

2) Tā kā mediāna pret hipotenūzu ir puse no hipotenūzas, tad $B_1N = \frac{1}{2}AH = MK$ un $A_1K = \frac{1}{2}HB = MN$, kā arī $A_1M = \frac{1}{2}AB = B_1M$.

3) Pēc pazīmes *mmm* prasītie divi trijstūri ir vienādi.



A6.3.zīm.

6.9.5. **a)** Pieņemsim, ka A noslēgumā ir visvairāk uzvaru. Ņemsim jebkuru citu tenisistu B. Šķirojam divus gadījumus:

- A uzvarējis B. Tātad A ir spēcīgāks par tenisistu B.
- A zaudējis pret B. Nevar būt, ka nav tāda C, ka $A \rightarrow B \rightarrow C$; ja tāda C nebūtu, tad B būtu vairāk uzvaru nekā A (uzvaras pret visiem tiem, pret ko uzvarējis A, un vēl uzvara savstarpējā spēlē ar A) – pretruna, tādēļ A ir spēcīgāks par B.

b) Pieņemsim, ka turnīra noslēgumā ir 2 čempioni A un B, un to savstarpējā spēlē uzvarējis tenisists A.

Tā kā A un B uzvaru skaitiem ir jābūt vienādiem, tad ir jābūt spēlētājiem, pret kuriem A ir zaudējis. Apskatām šo spēlētāju „apakšturnīra" čempionu C:

- C ir spēcīgāks par visiem apakšturnīra spēlētājiem;
- C ir spēcīgāks par A;
- A ir uzvarējis visus pārējos spēlētājus, līdz ar to C ir spēcīgāks arī par šiem spēlētājiem.

Tātad C ir spēcīgāks par visiem turnīra dalībniekiem un ir arī visa turnīra čempions.

Esam pierādījuši: ja turnīrā ir 2 čempioni, tad ir arī trešais, un tātad nevar būt tieši 2 čempioni.

7. LATVIJAS 36. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Atbilde: 2009.

Risinājums. Tā kā prasīts ir mazākais vārdnīcu daudzums, tad patiesībā ir divi uzdevumi – pirmkārt, jānoskaidro un jāparāda ar piemēru, kā šo mazāko daudzumu sasniegt, otrkārt, jāpierāda, ka ar vēl mazāku daudzumu vārdnīcu nepietiek.

A. Tā kā jāvar tulkot uz katru no 2009 valodām, tad ar mazāk kā 2009 vārdnīcām noteikti nepietiek.

B. Ja vārdnīcas ļauj tulkot "pa apli", kā redzams A7.1.zīm., tad ar 2009 vārdnīcām pietiek.

$$\to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to 2008 \to 2009$$

A7.1. zīm.

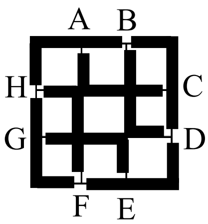
7.5.2. Piemēram, tā: 1; 2; 4; 3; 6; 7; 5; 9; 8; 10.

Tā kā ar 1 dalās jebkurš skaitlis, 1 var atrasties tikai pirmajā pozīcijā. Pārējos skaitļus virknē izvietojam pēc sekojoša principa: cenšamies uzrakstīt pēc iespējas mazāku vēl neuzrakstītu skaitli, pārbaudot vai tas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

7.5.3. Skat., piem., A7.2.zīm. Iekrāsotās rūtiņas apzīmētas ar cipariem, kuri norāda, cik balto kaimiņu rūtiņu ir katrai iekrāsotajai rūtiņai.

1	2		
3		6	
			4
	5		

A7.2. zīm.



A7.3.zīm.

7.5.4. a) Jā, ir iespējams. Skat., piem., A7.3.zīm.

b) nē. Katrā no 8 punktiem A; B; ...; H saiet kopā 3 (nepāra skaits) nogriežņu, tāpēc katrā no tiem jābūt vismaz vienas līnijas galam. Bet 3 līnijām kopā ir tikai 6 gali.

7.5.5. Pieņemsim, ka šajā valstī dzīvo n iedzīvotāji. Tā kā katram iedzīvotājam tika uzdoti tieši 3 jautājumi, tad kopējais uzdoto jautājumu skaits bija $3n$. Dots, ka atbilžu „jā" bija attiecīgi par kandidātu A 60% no n jeb $0{,}6n$, par kandidātu B 50% no n jeb $0{,}5n$ un par kandidātu C 40% no n jeb $0{,}4n$. Tātad atbilžu „jā" kopā bija $0{,}6n + 0{,}5n + 0{,}4n = 1{,}5n$. Ir zināms, ka katrs iedzīvotājs atbalsta vienu no kandidātiem, tāpēc secinām, ka katrs patiesais iedzīvotājs uz **vienu** no trijiem jautājumiem atbildēja ar „jā", bet katrs melis ar „jā" atbildēja uz **diviem** jautājumiem no trim. Tātad katrs no n iedzīvotājiem ir devis vienu atbildi „jā", un bez tam vēl katrs melis ir devis vēl otru atbildi „jā". Tāpēc meļu ir $1{,}5n - n = 0{,}5n$. Tātad arī $0{,}5 = 50\%$ jeb puse iedzīvotāju bija patiesi. Ja patieso B atbalstītāju ir $x\%$ no visiem iedzīvotājiem, tad meļu, kas neatbalsta B, ir $(50 - x)\%$; tātad meļu, kas atbalsta B, ir $50\% - (50 - x)\% = x\%$ no visiem iedzīvotājiem. Tātad starp B atbalstītājiem tieši puse ir meļi.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Pirms uzdevuma risināšanas atcerēsimies pazīmi skaitļa dalāmībai ar 3: skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3.

Apskatīsim, kādus ciparus Andris var nosaukt un vai Maija var no tiem izveidot tādu skaitli, kas dalītos ar 3.

Ja Andris nosauc jebkuru no cipariem 0; 3; 6 vai 9, tad Maija vienkārši raksta šim ciparam atbilstošo viencipara skaitli, jo skaitlis, kas veidots no jebkura viena no šiem cipariem, dalīsies ar 3.

Pieņemsim, ka Andris nesauc nevienu no cipariem 0; 3; 6; 9. Tātad nosaukšanai paliek tikai cipari 1; 2; 4; 5; 7 un 8. Sadalīsim tos divās kopās tā, ka katrs no cipariem ir sastopams tikai vienā no kopām: $A = \{1; 4; 7\}$ (katrs no kopas skaitļiem, dalot ar 3, dod atlikumu 1) un $B = \{2; 5; 8\}$ (katrs no kopas skaitļiem, dalot ar 3, dod atlikumu 2).

Aplūkojot abas kopas, redzam: ja Andris nosauc visus trīs ciparus no kopas *A*, tad Maija var no tiem sastādīt trīsciparu skaitli (ciparus kombinējot jebkādā veidā). Šī skaitļa ciparu summa būtu $1 + 4 + 7 = 12$. Tātad pēc dalāmības pazīmes šis skaitlis dalīsies ar 3. Līdzīgi iegūstam, ka arī tad, ja Andris nosauc visus trīs kopas *B* elementus, Maija var sastādīt trīsciparu skaitli, kas dalās ar 3.

Ja Andris nenosauc ciparus tā, ka tie visi trīs ir no vienas un tās pašas kopas, tad noteikti būs tā, ka viens skaitlis ir no vienas kopas, savukārt pārējie divi – no otras. Šajā gadījumā Maija ņem to ciparu pāri, kur viens cipars ir no kopas *A*, savukārt otrs – no kopas *B*. No šiem cipariem Maija var izveidot divciparu skaitli. Kopas *A* skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumu 1, kopas *B* – 2. Tā kā $1 + 2 = 3$, kas dalās ar 3, tad abu ciparu summa dalās ar 3. Tātad arī Maijas izveidotā divciparu skaitļa ciparu summa dalās ar 3, k.b.j.

7.6.2. Pavisam izteiksmē ir 10 dažādi burti, tātad tie šifrē 10 dažādus ciparus. Tā kā katram burtam atbilst viens no 10 cipariem, tad viens no tiem ir 0. Tā kā 0 nevar būt saucējā, jo ar 0 dalīt nedrīkst, tad 0 var atrasties vienīgi skaitītājā. Tātad skaitītājs ir 0, jo viens no reizinātājiem ir 0, tāpēc arī izteiksmes vērtība ir 0. (Tā kā uzdevumā ir teikts, ka Katrīna aprēķināja izteiksmes vērtību, secinām, ka izteiksmei ir jēga, tātad 0 noteikti neatrodas saucējā.)

7.6.3. a) Jā, var. Piemēram, ja sākumā bija uzrakstīti skaitļi 1; 1; 1; 2, to reizinājums ir $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$. Pēc tam, kad katram no tiem tika pieskaitīts vieninieks, reizinājums kļuva $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. Iegūto skaitļu dalījums $24 : 2 = 12$.

b) Nē, nevar. Apskatīsim skaitli n. Pieskaitot tam 1, iegūsim $n + 1$. Ievērosim, ka $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 2$ (*n* vietā ieliekot jebkuru naturālu skaitli, dalījums $\frac{1}{n}$ nepārsniegs vērtību 1, tātad summa nepārsniegs 2). Tātad $n + 1$ dalījums ar *n* nepārsniedz 2, lai arī kāds būtu skaitlis *n*. Tāpēc reizinājuma vērtība var pieaugt augstākais $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ reizes.

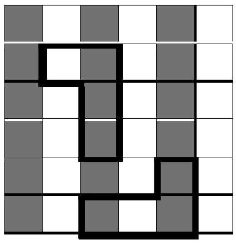
7.6.4. Atbilde: 32.

Risinājums: Viegli pārbaudīt, ka skaitļus no 10 līdz 32 ieskaitot var attēlot, ja uzrakstīto ciparu sistēmas ir {1; 2; 3; 4; 5; 6} un {0; 1; 2; 7; 8; 9}.

Lai izsacītu skaitļus līdz 33 ieskaitot (tātad arī 11 un 22), uz diviem kauliņiem jābūt gan 1, gan 2, gan 3. Septiņiem pārējiem cipariem uz skaldnēm vairs nepaliek vietas, jo neaizpildītas ir ne vairāk kā $6+6-(2+2+2)=6$ skaldnes.

7.6.5. a) No dotā seko, ka $m \cdot n$ dalās ar 3, jo dotā figūra sastāv no trim rūtiņām. Tātad vai nu *m*, vai *n* dalās ar 3. Varam pieņemt, ka *n* dalās ar 3. Tad sagriežam taisnstūri strēmelēs $1 \times n$ un pēc tam šīs strēmeles – gabalos 1×3.

b) Nē, nav taisnība. Lai to pierādītu, pietiek uzrādīt kaut vienu piemēru, kur uzdevumā prasītais neizpildās. Piemēram, kvadrātu 6×6 var sagriezt kvadrātos 2×2. Pierādīsim, ka to nevar sagriezt L – tetramino. Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas, kā parādīts A7.4.zīm. Katrs L – tetramino satur vai nu 3, vai 1 melnu rūtiņu. Tāpēc deviņi L – tetramino kopā satur nepāra skaitu melnu rūtiņu. Bet melno rūtiņu pavisam ir 18.



A7.4.zīm.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Atbilde: nē.

Pierādījums. Ievērosim, ka *x* un *y* reizinājumu varam izteikt kā divu pakāpju reizinājumu: $x \cdot y = 10^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20}$ (atceramies formulu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$).

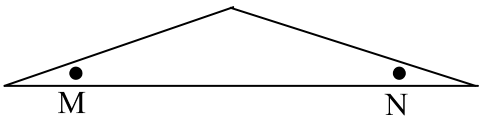
Skatāmies, kādi var būt *x* un *y*. Tā kā $x \cdot y$ ir tādu pakāpju reizinājums, kuru bāzes ir pirmskaitļi 2 un 5 (tātad tos sīkāk pirmreizinātājos sadalīt nevar), tad gan *x*, gan *y* ir izsakāmi kā 2 un 5 pakāpes vai arī kā pakāpju ar bāzēm 2 un 5 reizinājumi.

Ja *x* vai *y* izsakāms kā 2 un 5 pakāpju reizinājums, tad šis skaitlis dalās ar 10, tātad tā pēdējais cipars ir 0 (Piemēram, ja $x = 2^{19} \cdot 5 = 2^{18} \cdot 2 \cdot 5 = 2^{18} \cdot 10$ un $y = 2 \cdot 5^{19} = 2 \cdot 5 \cdot 5^{18} = 10 \cdot 5^{18}$,tad šie abi skaitļi dalās ar 10). Tātad šis gadījums neder.

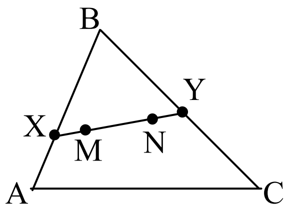
Atliek iespēja, ka viens no skaitļiem ir 2^{20}, bet otrs ir 5^{20} (nevienā no šo skaitļu pierakstiem beigu cipars nav 0). Bet $2^{20} = 1048576$. Tātad arī šis gadījums neder.

Citu iespēju kā izvēlēties *x* un *y*, nav. Tātad prasītais nav iespējams.

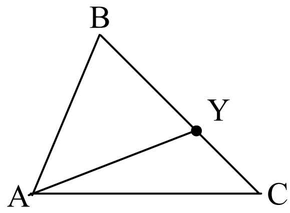
7.7.2. a) Jā, skat., piem., A7.5.zīm.



A7.5.zīm.



A7.6.zīm.



A7.7.zīm.

b) Atbilde: nē.

Risinājums: 1) Novelkam taisni MN; pieņemsim, ka tā krusto trijstūra kontūru punktos X un Y (A7.6.zīm.),

2) vispirms pieņemam, ka ne X, ne Y nav T virsotne. Tā kā $\angle YXA + \angle YXB = 180°$, tad viens no šiem leņķiem nav šaurs,

3) varam pieņemt, ka $\angle AXY \geq 90°$,

4) tad $\angle AXY$ ir lielākais leņķis trijstūrī AXY,

5) tāpēc AY ir tur garākā mala,

6) tāpēc AY>XY>MN. Tā kā $\angle AYB + \angle AYC = 180°$, tad viens no šiem leņķiem nav šaurs; ja tas ir, piemēram, $\angle AYC$, tad kā iepriekš iegūstam, ka AC>AY>XY>MN,

7) ja kāds no punktiem X un Y ir T virsotne, uzreiz nonākam pie augšminētā sprieduma 6) daļas.

7.7.3. Atbilde: četras summas.

Risinājums: Piemēru ar 4 summām skat. A7.8.zīm. Pirmskaitļi ir 11; 19; 23; 13.

Pierādīsim, ka lielāks daudzums pirmskaitļu nav iespējams. Vienīgie iespējamie pirmskaitļi – summu vērtības – ir 7; 11; 13; 17; 19; 23. ($1+2+3=6$, tāpēc par 7 mazāks pirmskaitlis nevar tikt iegūts un $7+8+9=26$, tāpēc lielākais iespējamais pirmskaitlis, ko iespējams iegūt ir 23). Lai visas 6 summas būtu pirmskaitļi, tām jābūt tieši šādām. Bet tādas tās nevar būt, jo 7 iegūstams tikai kā 1+2+4 un 23 – tikai kā 6+8+9. Tie abi atrodas vai nu rindā vai kolonnā, jo satur atšķirīgus saskaitāmos. Tad trešajā rindā/kolonnā summa būtu $(1+2+\ldots+9)-7-23=15$, kas nav pirmskaitlis. Tātad visas sešas summas nevar būt pirmskaitļi.

Ievērosim, ka visu 6 apskatāmo summu summa noteikti ir $2(1+2+\ldots+9)=90$, jo katrs no skaitļiem tiek ieskaitīts gan rindā, gan kolonnā. Tāpēc, ja 5 summas būtu pirmskaitļi (to būtu nepāra skaits) no jau minētajām, tad pirmskaitlis būtu arī sestā summa. Kā jau redzējām, tas nevar būt. Tāpēc arī 5 summas nevar būt pirmskaitļi.

11	15	19	
6	8	9	23
4	2	3	9
1	5	7	13

A7.8.zīm.

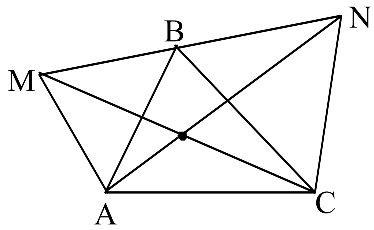
7.7.4. Skat. A7.9.zīm.

1) Tā kā $AB = MB$, $BN = BC$ un $\angle ABN = \angle ABC + 60° = \angle MBC$,

2) zinām, ka $\angle ABC < 90°$, tāpēc $\angle MBC < 90° + 60° = 150°$,

3) tad $\Delta ABN = \Delta MBC$ (mlm),

4) tāpēc $AN = MC$.



A7.9.zīm.

7.7.5. Pieņemsim, ka ir n rūķīši. Viegli izsekot, ka katras naudas dalīšanas rezultātā starpības starp jebkuru divu rūķīšu naudas daudzumiem mainās par skaitļa n daudzkārtni. Tā kā sākumā šīs starpības visas ir 0 un 0 dalās ar n, tad tās vienmēr ir skaitļa n daudzkārtņi, tāpēc $25 - 8 = 17$ dalās ar n. Tā kā 17 ir pirmskaitlis un rūķīšu ir vairāk nekā viens, tad $n = 17$. Piemērs: sākumā ir 17 rūķīšu, katram 24 dālderi. Viens rūķītis iedod katram no 16 citiem pa vienam dālderim.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. a) Nē; saskaņā ar Vjeta teorēmu jābūt $x_1 + x_2 = -p \Leftrightarrow p + x_1 + x_2 = 0$, bet tas nav iespējams, jo gan p, gan x_1 un x_2 ir pozitīvi skaitļi.

b) Jā. Skat, piem., vienādojumu $x^2 - 0{,}3x - 0{,}54 = 0$, kam ir saknes $x_1 = -0{,}6$ un $x_2 = 0{,}9$.

7.8.2. Tā kā uzdevumā ir prasīts noteikt mazāko iespējamo uzvarētāja iegūto punktu daudzumu, tad uzdevums patiesībā sastāv no divām daļām: pirmkārt, ir jāatrod šis mazākais punktu daudzums un jāparāda atbilstošs piemērs; otrkārt, ir jāpierāda, ka vēl mazāks punktu daudzums nav iespējams.

Lai atrastu uzdevumā prasīto, iesākumā apzīmēsim uzvarētāja iegūto punktu skaitu ar n.

I Tā kā spēlētāju punktu daudzumi var atšķirties par, mazākais, puspunktu, tad kopējais visu 8 spēlētāju iegūtais punktu skaits noteikti nav lielāks par šādas izteiksmes vērtību:

$n+(n-\frac{1}{2})+(n-1)+(n-1\frac{1}{2})+(n-2)+(n-2\frac{1}{2})+(n-3)+(n-3\frac{1}{2})$. Atverot iekavas un savelkot izteiksmes līdzīgos locekļus, iegūstam, ka spēlētāju kopējais iegūto punktu daudzums nav lielāks par $8n-14$.

II Skaidrs, ka katra spēle kopā bija 1 punktu vērta (uzvarētāja 1 punkts, summēts ar zaudētāja 0 punktiem, ir vienāds ar 1 punktu; neizšķirta gadījumā katrs spēlētājs iegūst $\frac{1}{2}$ punkta, tātad abi kopā iegūst 1 punktu), un, tā kā kopā tika izspēlētas 28 spēles, tad spēlētāji ieguva kopā 28 punktus.

III No otras puses, mēs aprēķinājām, ka kopējais visu 8 spēlētāju punktu skaits (28) nav lielāks par $8n-14$. Tātad $28 \le 8n-14$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam $8n \ge 42$, un tad $n \ge 5\frac{1}{4}$. Un, tā kā katra spēlētāja iegūtais punktu daudzums ir vai nu vesels skaitlis, vai „vesels un puse”, tad no $n \ge 5\frac{1}{4}$ seko $n \ge 5\frac{1}{2}$.

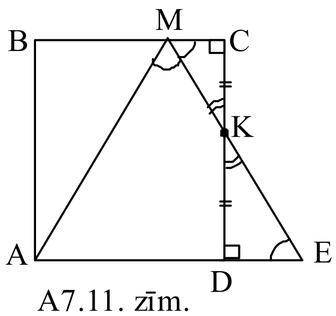
Šim rezultātam atbilstošu piemēru skat. A7.7.zīm., kur rindās ir attēloti spēlētāju (apzīmēti ar A, B, C, D, E, F, G, H) iegūtie punkti spēlēs ar pretiniekiem (attēloti kolonnās), un pēdējā kolonnā (ar nosaukumu „Σ”) ir attēloti katra spēlētāja iegūtie punkti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	Σ
A		1/2	1/2	1/2	1	1	1	1	5 1/2
B	1/2		1/2	1/2	1/2	1	1	1	5
C	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1	1	4 1/2
D	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1	4
E	0	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	3
F	0	0	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	2 1/2
G	0	0	0	1/2	1/2	1/2		1/2	2
H	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2		1 1/2

A7.10. zīm.

7.8.3. 1) Pagarinām *MK* līdz krustpunktam *E* ar *AD* (skat. A7.11.zīm.).

2) Tā kā $BC \parallel AD$, tad $\angle DEK = \angle CMK$ kā iekšējie šķērsleņķi. Tātad ΔAME - vienādsānu, jo $\angle AME = \angle EMC = \angle AEM$.



A7.11. zīm.

3) Tā kā $CK = KD$ (K ir malas CD viduspunkts), $\angle C = \angle D = 90°$ un $\angle CKM = \angle DKE$ (kā krustleņķi), tad $\Delta MCK = \Delta EDK$ (lml).

4) Tad $MK = KE$.

5) Tāpēc AK ir vienādsānu trijstūra MAE mediāna pret pamatu, tāpēc tā ir arī $\angle MAD$ bisektrise, kbj.

7.8.4. Ja trīs viesu vecumi ir x, y, z, iegūstam sakarības $x \cdot y \cdot z = 2450$ un $x + y + z = 2v$, kur v – kolēģa vecums. Kolēģis savu vecumu, protams, zina. Ja viņš nevarēja noteikt x; y; z, tad tikai tāpēc, ka abu vienādojumu sistēmai attiecībā uz x; y; z, eksistē vairāk nekā viens atrisinājums. Apskatīsim, kādas var būt $x + y + z$ iespējamās vērtības.

Sadalīsim skaitli 2450 pirmreizinātājos: $2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$. Izmantojot šo sadalījumu, apskatīsim visus iespējamos veidus, kā varam sadalīt šo skaitli triju naturālu skaitļu reizinājumā: (1; 1; 2450), (1; 2; 1225), (1; 5; 490), (1; 7; 350), (1; 10; 245), (1; 14; 175), (1; 25; 98), (1; 35; 70), (1; 49; 50), (2; 5; 245), (2; 7; 175), (2; 25; 49), (2; 35; 35), (2; 25; 35), (5; 5; 98), (5; 7; 70), (5; 14; 35), (5; 10; 49), ((7; 7; 50), (7; 10; 35), (7; 14; 25).

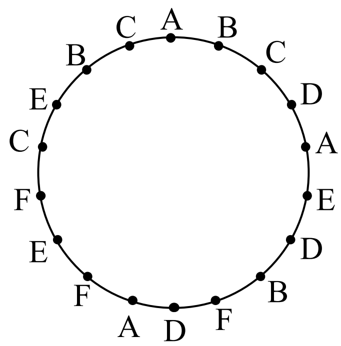
Pārbaudot redzam: tikai sadalījumiem (50; 7; 7) un (49; 10; 5) reizinātāju summas ir vienādas, t.i., 64. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, šī summa ir divas reizes lielāka nekā kolēģa vecums. Tātad kolēģim bija 32 gadi.

Pieņemsim, ka Cipariņam bija t gadu. Ja t>50, kolēģis nevarētu atrast viesu vecumus arī pēc Cipariņa otrās piezīmes, jo abos iepriekš iegūtajos sadalījumos vecākais viesis būtu jaunāks par Cipariņu. Situācija t<50 nav iespējama, jo tad neviens no sadalījumiem neatbilstu uzdevuma nosacījumiem. Tāpēc atliek, ka $t = 50$.

7.8.5. **a)** No 6 burtiem var izveidot 15 dažādu burtu pārus, tāpēc diviem punktiem jābūt blakus vismaz 15 vietās. Tāpēc arī punktu ir vismaz 15.

b) Katram burtam jābūt blakus ar 5 citiem. Tā kā katra burta viens eksemplārs var būt blakus ne vairāk kā 2 citiem burtiem, tad katram burtam jābūt vismaz 3 eksemplāros; tāpēc vajag vismaz $6 \cdot 3 = 18$ punktus.

c) Skat, piem., A7.12. zīm.



A7.12. zīm.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Atbilde: nē, nevar būt.

Risinājums. Gadījumā, ja $x = 1$, visu trīs funkciju vērtības ir $a+b+c$, tātad visu trīs funkciju grafiki iet caur punktu $(1; a+b+c)$. Bet dotie 3 kvadrātfunkciju grafiki neiet caur vienu punktu (visi 6 to iespējamie krustpunkti zīmējumā jau redzami, tātad citu nav), tātad tie nevar būt uzdevumā doto funkciju grafiki.

7.9.2. Ceļot dotās nevienādības kvadrātā, iegūstam

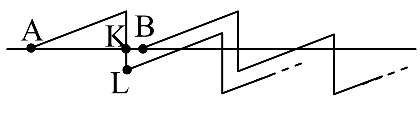
$a^2 \geq b^2 + 2bc + c^2$

$b^2 \geq a^2 + 2ac + c^2$

$c^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

Saskaitot, pārnesot visus locekļus uz labo pusi un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam $(a+b+c)^2 \leq 0$. Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $a+b+c=0$, kas arī bija jāpierāda.

7.9.3. Jā, var. Skat, piem., A7.13. zīm. Ievērojam, ka attālumiem *KB* un *KL* ir jābūt izvēlētiem ievērojami maziem, lai *AC* varētu sasniegt garumu, kas ir lielāks nekā 2009.



A7.13. zīm.

7.9.4. a) Atrodam 5 apaļīgus skaitļus, kas ir atšķirīgi no uzdevumā dotajiem:

- $n = 2$; 2 dalās tikai ar 1 un 2, tātad $d(2) = 2$; $n = 2$ dalās ar $d(2) = 2$;
- $n = 9$; 9 dalās tikai ar 1, 3 un 9, tātad $d(9) = 3$; $n = 9$ dalās ar $d(9) = 3$;
- $n = 12$; 12 dalās tikai ar 1, 2, 3, 4, 6 un 12, tātad $d(12) = 6$; $n = 12$ dalās ar $d(12) = 6$;
- $n = 18$; 18 dalās tikai ar 1, 2, 3, 6, 9 un 18, tātad $d(18) = 6$; $n = 18$ dalās ar $d(18) = 6$;

- $n = 625$; 625 dalās tikai ar 1, 5, 25, 125 un 625, tātad $d(625) = 5$; $n = 625$ dalās ar $d(625) = 5$.

b) Ja p ir pirmskaitlis, tad skaitlim p^{n-1} ir tieši n dalītāji – tie ir 1; p; p^2; …; p^{n-1}. Izvēloties $n = p$, mēs iegūstam, ka $d\left(p^{p-1}\right) = p$. Ievērojam, ka $p^{p-1} : p = p^{p-2}$, tātad $n = p^{p-1}$ dalās ar $d(n) = p$, jo $p \geq 2$. Tātad n ir apaļīgs skaitlis. Tā kā ir bezgalīgi daudz pirmskaitļu, tad ir arī bezgalīgi daudz apaļīgu skaitļu.

7.9.5. Mainot krāsas stūrīšos *ABC*, *ADC*, *BAD*, rezultātā krāsa mainījusies tikai rūtiņā *A*. Tātad varam mainīt krāsu vienā (patvaļīgā) rūtiņā. Tātad no jebkura krāsojuma varam iegūt jebkuru.

B	C
A	D

A7.14. zīm.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

ALGEBRISKI PĀRVEIDOJUMI UN IZTEIKSMES – 1.1.1., 1.1.5., 1.1.12., 1.2.1., 1.3.1., 1.4.1., 1.4.5., 1.4.12., 2.4.3., 3.3.5., 3.4.7., 5.7.1., 5.8.2., 7.6.3., 7.9.2.

VIENĀDOJUMI – 1.1.3., 1.1.9., 1.3.3., 1.4.3., 1.4.10., 2.2.3., 3.5.2., 3.5.4., 3.6.6.

NEVIENĀDĪBAS – 1.2.5., 1.4.6., 3.3.6., 3.5.6.

VIENĀDOJUMU SISTĒMAS – 1.3.5.

FUNKCIJAS – 5.9.4., 6.9.1., 7.8.1., 7.9.1.

ĢEOMETRIJA

KLASISKĀ ĢEOMETRIJA – 1.1.2., 1.1.6., 1.4.8., 1.4.9., 3.5.1., 3.6.3., 4.8.2., 4.9.2., 5.8.5., 5.9.1., 5.9.3., 6.9.4., 7.7.2., 7.7.4., 7.8.3.

FIGŪRU SISTĒMAS, PIEMĒRI – 1.1.8., 1.2.3., 2.3.2., 3.2.7., 3.6.2., 3.6.4., 4.7.2., 4.8.3.

FIGŪRU SAGRIEŠANA UN SALIKŠANA – 1.2.7., 1.3.2., 1.4.2., 2.1.4., 2.2.4., 2.3.4., 2.4.2., 2.5.4., 3.2.1., 3.2.2., 3.3.8., 3.4.2., 3.4.3., 3.4.4., 3.5.5., 3.6.5., 4.5.2., 5.5.2., 5.6.2., 7.6.5.

INVARIANTU METODE, KRĀSOŠANA – 1.3.4., 2.5.3., 3.5.10., 4.5.3., 4.6.2., 5.6.1., 6.9.3., 7.5.4.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 2.1.2., 5.7.4., 7.5.3.

SKAITĻU TEORIJA

DALĀMĪBA, DALĪŠANA AR ATLIKUMU – 2.1.3., 2.3.1., 2.3.3., 2.4.4., 3.1.8., 3.1.9., 3.2.3., 3.4.2., 3.2.9., 3.3.4., 3.4.1., 3.5.7., 3.6.1., 4.6.1., 4.8.4., 5.5.3., 5.7.3., 5.9.2., 7.5.2., 7.6.1., 7.9.4.

SKAITĻA SADALĪJUMS PIRMSKAITĻU REIZINĀJUMĀ – 3.6.10., 4.7.1., 4.8.1., 6.9.2., 7.8.4.

SKAITĻA PIERAKSTS, ARITMĒTISKO DARBĪBU IZPILDE – 1.1.4., 1.1.7., 1.2.6., 2.1.1., 2.2.2., 2.4.1., 3.3.1., 3.3.3., 3.4.1., 3.5.3., 3.6.8., 4.5.1., 4.9.1., 4.9.3., 5.6.4., 5.8.1., 5.8.3., 7.6.2., 7.7.1.

GRUPĒŠANA – 1.3.6., 1.4.4., 4.7.5., 5.7.2., 7.6.4.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 3.2.5., 4.7.3., 7.7.3.

INVARIANTU METODE – 3.4.8., 4.6.3.

KOMBINATORIKA

UZDEVUMI, KAS REDUCĒJAS UZ GRAFIEM – 2.2.1., 3.3.7., 3.4.5., 4.5.4., 7.5.1.

SKAITĪŠANA – 1.2.4., 2.5.5., 3.1.1., 4.6.5.

KOMBINATORIKAS STRUKTŪRAS – 3.2.8., 3.2.10., 3.3.9., 5.5.4.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 2.4.5., 3.1.2., 3.6.9., 5.5.1., 5.9.4., 6.9.5., 7.5.1., 7.8.5.

INVARIANTU METODE – 7.8.4., 7.8.2.

ALGORITMIKA

ALGORITMA IZSTRĀDE – 1.2.2., 2.2.5., 3.1.3., 3.1.6., 3.3.2., 3.3.10., 3.6.7., 4.7.4., 4.9.4., 5.6.3., 5.6.5., 7.9.5.

LOĢISKA RAKSTURA UZDEVUMI – 1.1.11., 1.4.7., 2.1.5., 2.3.5., 3.1.4., 3.2.6., 3.4.9., 3.5.8., 4.6.2., 4.8.5., 4.9.5., 5.8.4., 7.7.5.

PROCESU ANALĪZE – 1.1.10., 1.2.8., 1.4.11., 2.5.2., 3.2.1., 3.2.9., 3.4.6., 3.5.9., 4.5.5., 4.6.4., 5.5.5., 5.7.5., 7.5.5., 7.6.2., 7.9.3.

LITERATŪRA

Vairāki uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde: 3.3.5., 4.8.5., 7.5.5.

Lietuvas matemātikas olimpiāde: 3.4.4.

Slovēnijas matemātikas olimpiāde: 4.6.5., 6.9.3.

Ukrainas matemātikas olimpiāde: 4.9.1.

Bulgārijas matemātikas olimpiāde: 6.9.1.

LU MII olimpiāžu grupa (M.Opmanis, Rihards Opmanis, A.Verza): 7.5.2., 7.6.3., 7.6.4., 7.7.3., 7.8.1., 7.8.3.

Žurnāls „Kvants”: 5.8.4.

A.Spivaks: 3.6.4.

SĒRIJA „LAIMA" MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Īslande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Īslandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA" GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.

22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L.Freija, S.Zabarovska, B. Johannesons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: LU, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: LU, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: LU, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: LU, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: LU, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, Ā. Viļuma, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2009.

36. K. Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums? 1. daļa.** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984.-1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: Latvijas LU, 2009.

40. M.Lehtinen. **Events in Mathematics. Part II.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.