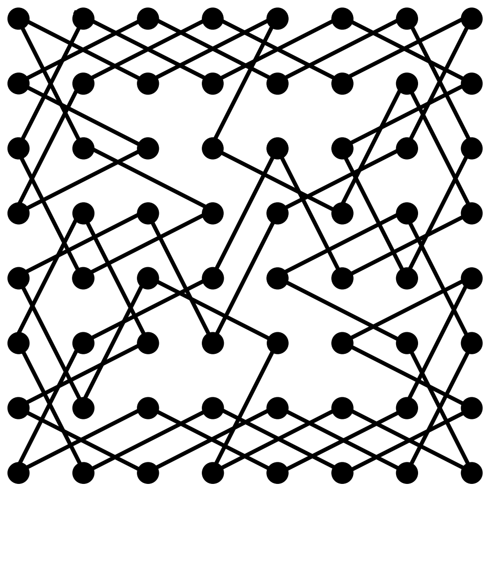
Agnis ANDŽĀNS, Dace BONKA, Zane KAIBE,
Laila RĀCENE, Benedikts JOHANNESSONS

MATEMĀTIKAS SACENSĪBAS 4.–9. KLASĒM
UZDEVUMI UN ATRISINĀJUMI
2007./2008. MĀCĪBU GADĀ



RĪGA 2008

UDK 51(075.2)
Ma 828

A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. ***Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2007./2008. mācību gadā.***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2008. – 125 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2007./2008. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi un atrisinājumi 4. – 9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Darbs izstrādāts LU projekta „LU FMF centra – A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas – darbība" ietvaros.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

© **Agnis Andžāns, Dace Bonka,**
Zane Kaibe, Laila Rācene,
Benedikts Johannessons, 2008

ISBN 978-9984-45-043-8

SATURS

IEVADS

Matemātika ir tik nopietns priekšmets, ka
nevajag palaist garām izdevību to padarīt mazliet saistošāku.
/Blēzs Paskāls/

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tas ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes. Mācoties matemātiku, izveidojas priekšstats par pierādījumu un attīstās iekšējā vajadzība pēc tā. Matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē.

Neapšaubāma ir matemātisko uzdevumu loma bērna intelekta attīstībā. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Loģiskajai domāšanai ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā. Matemātikas specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Nepārvērtējama ir dažāda līmeņa matemātikas olimpiāžu nozīme uzdevumu risināšanas popularizēšanā. Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātiskās kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusskolas pasākumi matemātikā: Valsts matemātikas olimpiāde 3 kārtās (sagatavošanās, rajona un Valsts olimpiādes), Atklātā matemātikas olimpiāde, 4. klašu konkurss „Tik vai... Cik?", Jauno matemātiķu konkurss 4. – 7. klašu skolēniem, Profesora Cipariņa klubs visiem pamatskolēniem, Neklātienes Nodarbības vidusskolēniem, Mazā Matemātikas un Informātikas universitāte, matemātikas kursi skolēniem un skolotājiem vairākos Latvijas reģionos, kā arī citas aktivitātes.

Matemātikas olimpiādes un konkursi izvirza skolēniem konkrētus mērķus un faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Tie rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes un konkursi ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību. Kā piemēru varam minēt Atklāto matemātikas olimpiādi, kurā 2007./2008. m. g. piedalījās vairāk nekā 3000 skolēnu.

Piedaloties matemātikas olimpiādēs un konkursos, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Vienlaikus ar matemātisko zināšanu apgūšanu un padziļināšanu šajā procesā rūdās skolēnu raksturi, viņi veidojas kā personības.

Risinot nestandarta uzdevumus, skolēns gūst matemātiskās domāšanas pieredzi un mācās izmantot pasaules matemātiskās izpratnes principus. Nestandarta uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Tā kā lielā daļā skolu ar matemātikas mācīšanu nodarbojas tikai pamatskolas matemātikas līmenī, skolēniem ir ierobežotas iespējas apgūt paaugstinātas grūtības uzdevumu risināšanu. Tāpēc liela nozīme ir šai un citām LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas izdotajām grāmatām ar izstrādātiem olimpiāžu un konkursu uzdevumu atrisinājumiem. Ikviens no LU A. Liepas NMS izdotajiem materiāliem tiek sagatavots tā, lai ar to varētu strādāt ne tikai skolotāji vai paši apdāvinātākie skolēni, bet gan katrs interesents, kurš ir gatavs ieguldīt savā attīstībā laiku un pūles. Tieši interese un pašatdeve ir noteicošie faktori skolēnu izaugsmei un iespējai gūt panākumus.

Strādājot ar grāmatu, iesakām ar katru uzdevumu vispirms darboties patstāvīgi un, neielūkojoties mūsu piedāvātajos atrisinājumos, pēc iespējas pilnīgi un detalizēti pašam to atrisināt, kā arī rūpīgi pierakstīt atrisinājumu. Tādējādi Jūs attīstīsiet iemaņas un praktizēsieties patstāvīgi atrast un pielietot metodes uzdevumu risināšanā. Pēc uzdevuma patstāvīgas atrisināšanas iesakām tomēr ieskatīties arī grāmatā piedāvātos risinājumos un tos rūpīgi izpētīt, jo, pat ja Jūs uzdevumu esat atrisinājis pareizi, bet atšķiras pielietotā metode, mūsu metodes var noderēt tālākai attīstībai un citu uzdevumu risināšanai.

Matemātikas sacensības, kuru uzdevumi ir apkopoti šajā grāmatā, tiek rīkotas ar LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas iniciatīvu vai līdzdalību. Visu matemātikas sacensību visi uzdevumi, īsi atrisinājumi, rezultāti un arhīvi ir atrodami arī LU A. Liepas NMS mājas lapā http://nms.lu.lv.

Autori

UZDEVUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

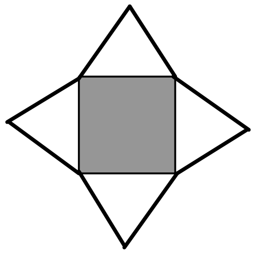
1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Aprēķini $2007 - 57 : 3 + 7 \cdot 3$!

a) 2008
b) 2009
c) 671
d) 1971
e) 585

1.1.2. Kāds ir U1.1.zīmējumā attēlotās figūras perimetrs, ja iekrāsotā kvadrāta perimetrs ir 8 cm? (Visiem četriem trijstūriem visas malas ir vienāda garuma.)

a) 24 cm
b) 8 cm
c) 16 cm
d) 6 cm
e) 32 cm



U1.1. zīm.

1.1.3. 2 āboli sver 300 g, 10 bumbieri sver puskilogramu, bet 200 arbūzi sver 1 t. Cik sver 1 ābols, 1 bumbieris un 1 arbūzs kopā?

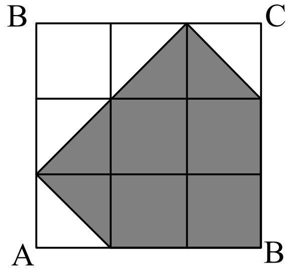
a) 205 g
b) 5 kg 200 g
c) 700 g
d) 1150 g
e) 5 kg 650 g

1.1.4. Kā mainīsies starpība, ja mazināmo palielinās par 2, bet mazinātāju samazinās par 2?

a) palielināsies par 2
b) palielināsies par 4
c) nemainīsies
d) samazināsies par 2
e) samazināsies par 4

1.1.5. Kāda daļa no kvadrāta ABCD laukuma ir iekrāsota (U1.2.zīm.)?

a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{6}{9}$
d) $\frac{1}{3}$



U1.2. zīm.

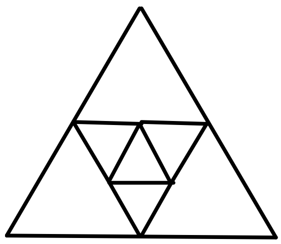
e) $\frac{7}{9}$

1.1.6. Cik iegūs, ja 4 simtus sareizinās ar 2 simtiem?
a) 8
b) 8 simtus
c) 400
d) 80 tūkstošus
e) 8 tūkstošus

1.1.7. Ielas kreisajā pusē atrodas mājas ar nepāra numuriem no 1 līdz 21, bet labajā pusē – mājas ar pāra numuriem no 2 līdz 36. Cik māju ir uz šīs ielas?
a) 28
b) 29
c) 30
d) 31
e) 36
f) 57

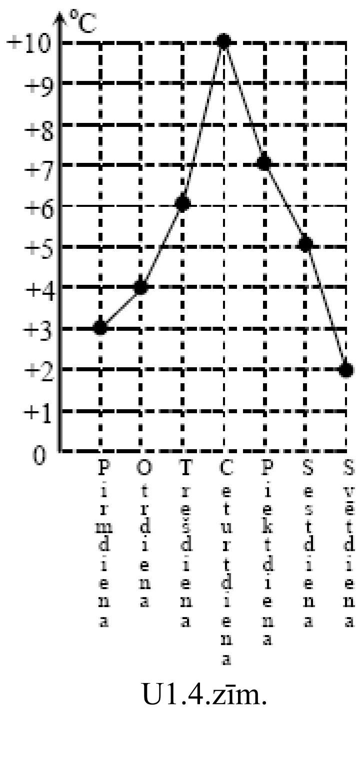
1.1.8. Reizināšanas piemērā **MATE • M=ATIKA** vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem, neviens no tiem nav 0. Kāds cipars aizstāts ar burtu **M**?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 5
e) 8

1.1.9. Cik četrstūri redzami U1.3.zīmējumā?
a) 0
b) 2
c) 6
d) 9
e) 12


U1.3. zīm.

1.1.10. Grafikā (U1.4.zīm.) attēlota nakts vidējā gaisa temperatūra. Kurās naktīs gaisa temperatūra bija virs $+5^\circ C$?
a) trešdien, ceturtdien, piektdien
b) ceturtdien, piektdien, sestdien
c) sestdien
d) pirmdien, otrdien, svētdien
e) trešdien, ceturtdien, piektdien, sestdien

1.1.11. Kurās dienā temperatūra mainījās visstraujāk (skat. U1.4.zīm.)?
a) no pirmdienas uz otrdienu
b) no otrdienas uz trešdienu
c) no trešdienas uz ceturtdienu
d) no ceturtdienas uz piektdienu



U1.4.zīm.

e) no sestdienas uz svētdienu

1.1.12. Par vienas klases bērniem ir zināms sekojošais.

Visi zēni lasa grāmatas. Visas meitenes rotaļājas ar lellēm. Ja bērns nelasa grāmatas, tad viņš arī nerotaļājas ar lellēm.

Tātad noteikti

a) visi bērni rotaļājas ar lellēm
b) neviens bērns nelasa grāmatas
c) visi bērni lasa grāmatas
d) klasē visi bērni ir meitenes
e) visi bērni, kas lasa grāmatas, ir zēni

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Aprēķini $33-3\cdot(10+12+13):5+2$

a) 10
b) 14
c) 18
d) 212
e) cits skaitlis

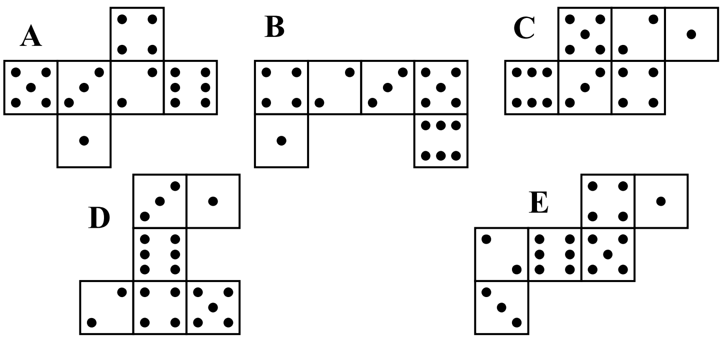
1.2.2. 10 dzīvnieki – kaķi un suņi – apēda 56 kotletes. Katrs suns apēda tieši 6 kotletes, bet katrs kaķis – tieši 5 kotletes. Cik no šiem dzīvniekiem ir kaķi?

a) 1
b) 4
c) 5
d) 6
e) 9

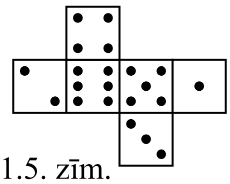
1.2.3. Pļavā ganās g govis, z zirgi un a aitas. Govju ir divas reizes mazāk, nekā aitu, savukārt aitu ir par 6 vairāk nekā zirgu. Kura no dotajām vienādībām nav patiesa?

a) $2g=6+z$
b) $a=2g$
c) $a=z-6$
d) $2a=z+2g+6$
e) $z=a-6$

1.2.4. Metamā kauliņa izklājums attēlots U1.5.zīmējumā. Kurš no pārējiem zīmējumiem arī ir tāda paša kauliņa izklājums?



Dotais izklājums:



U1.5. zīm.

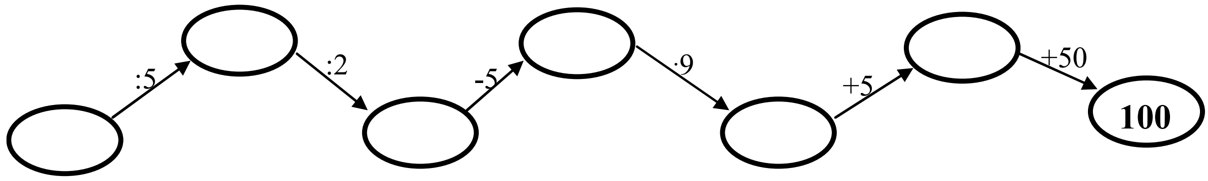
1.2.5. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

156 dm ◯ 3 m 14 cm · 5 432 min. - 3000 s ◯ 4 h 2 min

1.2.6. Jānīša vectētiņš ar zirdziņu no mājām līdz veikalam var aizbraukt pusstundā. Jānītis ar mocīti brauc 10 reizes ātrāk nekā vectētiņš ar zirdziņu. Cik ilgā laikā Jānītis ar mocīti aizbrauks no savām mājām līdz vectētiņa mājām, ja mazdēla māja atrodas 3 reizes tālāk no veikala nekā vectētiņa māja (skat. U1.6.zīm.)?

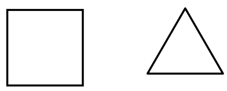
U1.6. zīm.

1.2.7. Noskaidro, kāds skaitlis jāieraksta katrā no ovāliem (skat. U1.7.zīm.)!

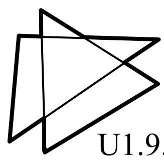


U1.7. zīm.

1.2.8. Baibai bija 2 papīra figūras – vienādmalu trijstūris ar malas garumu 1 cm un kvadrāts ar malas garumu 1 cm (skat. U1.8.zīm.). Viņa uzlika tās vienu otrai virsū tā, ka vismaz daļēji tās pārklājās. Cik virsotņu var būt iegūtajai figūrai? (Piemēram, uzliekot vienam trijstūrim otru trijstūri tā kā parādīts U1.9.zīm., tika iegūts 10-stūris.)



U1.8. zīm.



U1.9. zīm.

Ar piemēriem parādiet, ka var iegūt 7 atšķirīgus virsotņu skaitus! (Par atšķirīgiem tiek uzskatīti gadījumi, kad atšķiras iegūto figūru virsotņu skaiti, t.i., ja divos zīmējumos tiek iegūti, piem., 7-stūri, tas tiek uzskatīts par vienu iespēju.)

1.2.9. Namiņā dzīvo 15 rūķīši. Daži no tiem ir meļi – viņi vienmēr melo, citi ir godīgi – vienmēr saka tikai patiesību. Ir zināms, ka namiņā dzīvo vismaz viens godīgs rūķītis, bet starp katriem diviem rūķīšiem vismaz viens ir melis.

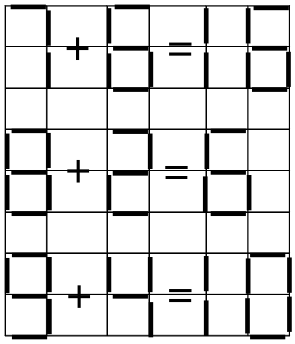
Cik godīgo rūķīšu ir šajā namiņā? Pamato savu atbildi!

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. Aprēķini: (15 h 15 min. + 45 min.) · 6!

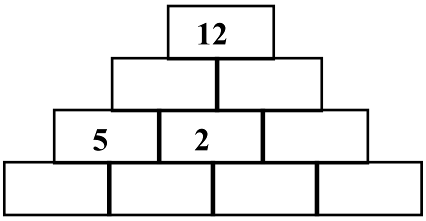
1.3.2. Uzzīmē slēgtu lauztu līniju ar 5 posmiem, kas pati sevi krusto tieši 5 punktos!

1.3.3. No sērkociņiem izveidotas trīs „vienādības”, taču tās visas ir nepareizas (skat. U1.10.zīm.). Vai var katrā „vienādībā” pārvietot tieši vienu sērkociņu tā, lai iegūtā vienādība būtu pareiza?



U1.10. zīm.

1.3.4. Dotajā piramīdā (skat. U1.11. zīm.) katrā ķieģelītī ierakstāms viens naturāls skaitlis; sākot ar 2. stāvu, katrā ķieģelītī ierakstītais skaitlis vienāds ar to divu skaitļu summu, kas ierakstīti divos ķieģelīšos tieši zem tā. Ieraksti trūkstošos skaitļus!



U1.11. zīm.

1.3.5. Trim rūķīšiem – Ašajam, Īsajam un Nīgrajam – katram ir atšķirīgas krāsas cepurīte: pelēka, zaļa vai sarkana. Ir zināms, ka

1) Ašajam nav pelēka cepure;
2) Īsajam garšo piens, un viņš no rītiem ceļas pirmais;
3) rūķītis, kam ir pelēka cepure, no rītiem guļ visilgāk;
4) rūķītim, kas nēsā zaļo cepuri, negaršo piens.

Kādas krāsas cepuri nēsā katrs no rūķīšiem?

1.3.6. Literatūras pulciņā darbojas 10 bērni. Pašlaik viņus interesē trīs grāmatas: „Alise Brīnumzemē”, „Lennebergas Emīla piedzīvojumi. Emīla nedarbi” un „Nezinītis uz Mēness”. Grāmatu par Emīla nedarbiem izlasīja 7 bērni, grāmatu „Alise Brīnumzemē” – 6 bērni, bet grāmatu par Nezinīti – 5 bērni. Pie tam zināms, ka 6 bērni ir izlasījuši tikai vienu no šīm grāmatām.

Cik bērni ir izlasījuši visas trīs grāmatas?

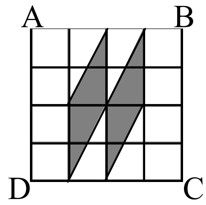
Cik ir tādu bērnu, kas izlasīja tieši divas grāmatas?

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. Starp cipariem 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1 ieliec aritmētisko darbību zīmes (+; -; ·; :) un iekavas tā, lai iegūtu pareizu vienādību! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

1.4.2. Atrodi kaut vienu naturālu skaitli, kas dalās ar 12, kura pēdējie divi cipari ir 12 un kura ciparu summa ir 12!

1.4.3. Kāda daļa no kvadrāta ABCD laukuma ir iekrāsota (skat. U1.12.zīm.)?



U1.12. zīm.

1.4.4. Kastē atrodas *m* bumbiņas, *b* kubiņi un *a* piramīdas. Bumbiņu ir 2 reizes mazāk nekā piramīdu, bet piramīdu ir par 6 vairāk nekā kubiņu. Kura vienādība ir aplama?

a) $2\,m = 6 + b$
b) $a = 2\,m$
c) $a = b - 6$
d) $2\,a = b + 2\,m + 6$
e) $b = a - 6$

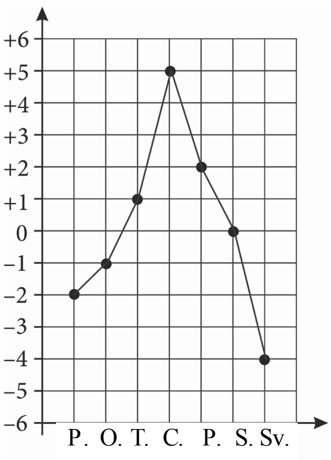
1.4.5. Salīdzini! Aplīšos ieraksti zīmi >, < vai = !

156 mm ◯ 3 cm 14 mm · 5 7 h 2 min. ◯ 432 min. – 3000 s

1.4.6. Grafikā (U1.13.zīm.) attēlota dienas vidējā gaisa temperatūra. Kad gaisa vidējā temperatūra bija virs -1°C?

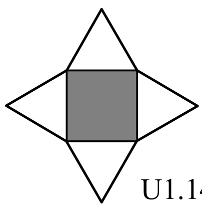
1.4.7. Kurās naktīs gaisa temperatūra mainījās visvairāk? (Skat. U1.13.zīm.)

A no pirmdienas uz otrdienu;
B no otrdienas uz trešdienu;
C no trešdienas uz ceturtdienu;
D no ceturtdienas uz piektdienu;
E no sestdienas uz svētdienu.



U1.13. zīm.

1.4.8. Kāds ir U1.14. zīmējumā attēlotās figūras perimetrs, ja iekrāsotā kvadrāta perimetrs ir 8 cm? (Visiem četriem trijstūriem visas malas ir vienāda garuma.)

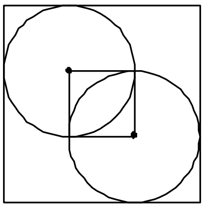


U1.14. zīm.

1.4.9. Rindā pie kases stāv 40 cilvēki. Kasiere katram cilvēkam biļeti noformē 1 min. 32 s. Par cik minūtēm ātrāk nekā četrdesmitais cilvēks biļeti saņems divdesmit piektais cilvēks?

1.4.10. Cik reizes skaitļos no 0 līdz 100 sastopams cipars 9?

1.4.11. Attēlotas divas riņķa līnijas ar vienādiem rādiusiem (ar punktiem atzīmēti to centri) un divi kvadrāti (skat. U1.15.zīm.). Atrast riņķa līnijas diametru, ja ir zināms, ka lielā kvadrāta perimetrs ir 36 cm, bet attēlotie riņķa līniju rādiusi ir paralēli un perpendikulāri kvadrāta malām.



U1.15. zīm.

1.4.12. Kādam skaitlim jābūt x vietā?

a) $x : 2 = x : 3$
b) $x : 1 = x \cdot 1$

1.4.13. Salīdziniet nenegatīvus skaitļus x un y, ja:

a) $3x = 5y$

A $x > y$;
B $x < y$;
C $x = y$;
D *nevar noteikt.*

b) $17x - 8 = 17y - 8$

A $x > y$;
B $x < y$;
C $x = y$;
D *nevar noteikt.*

c) $x + y = 4$

A $x > y$;
B $x < y$;
C $x = y$;
D *nevar noteikt.*

1.4.14. Valdis katru stundu, sākot no plkst. 12:00, mērīja ūdens temperatūru. Mērījumus viņš veica 5 stundas. Cik mērījumus Valdis izdarīja?

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Aprēķini $(2007 \cdot 9999 + 27) : 9$. Centies aprēķinus veikt racionāli!

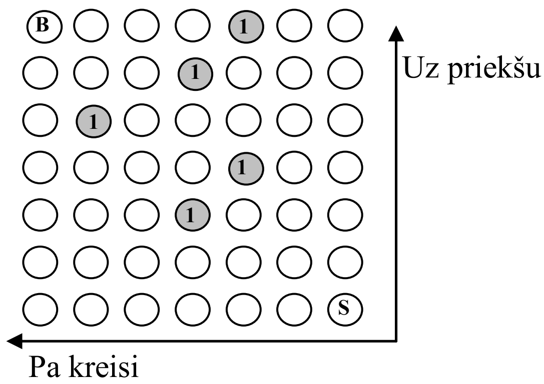
2.1.2. Plaknē uzzīmē vienu trijstūri, vienu četrstūri, vienu piecstūri un vienu sešstūri tā, lai **katrām** divām figūrām būtu kopīga vismaz viena mala.

2.1.3. Kvadrātā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, katrā rūtiņā ierakstīts pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 16, katrā rūtiņā cits skaitlis. Pēc tam aprēķināja katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summas. Vai var gadīties, ka visas 8 iegūtās summas ir astoņi pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi?

2.1.4. Reiz dzīvoja divi rūķīši – Samtiņš un Pūciņš. Viens no viņiem vienmēr meloja, otrs – vienmēr teica tikai patiesību (nebija zināms, kurš bija melis un kurš – nē).

Kā, uzdodot vienam no rūķiem tikai **vienu** jautājumu, varēja noskaidrot, kurš no abiem ir Pūciņš? Paskaidro savu atbildi!

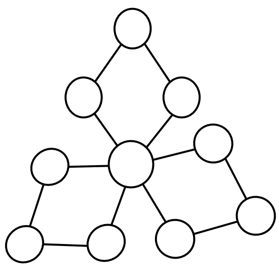
2.1.5. Vasaras nometnē piedalījās 49 skolēni. Kādu dienu viņi spēlēja sekojošu spēli. Visi bērni sastājās 7 rindās, pa 7 skolēniem vienā rindā (skat. U2.1.zīm.). Skolēnam **S** skolotājs iečukstēja vienu skaitli N. Pēc tam **S** saviem kaimiņiem iečukstēja ausī vienu skaitli pēc šāda likuma: bērnam, kas stāv no viņa pa kreisi, **S** iečukstēja skaitli $N + 2$, savukārt bērnam, kas stāv viņam priekšā, **S** iečukstēja skaitli $N + 1$. Katrs bērns, izdzirdot skaitli, iečukstēja jaunus skaitļus abiem saviem kaimiņiem (pa kreisi un priekšu), ja tādi ir, pēc iepriekš aprakstītā likuma. Ar „1” atzīmētie skolēni ir pirmklasnieki, un viņi vēl saskaitīt nemācēja, tāpēc nekādu informāciju tālāk nenodeva. Kad skolniekam **B** kāds iečukstēja skaitli, viņš to nosauca skaļi. Kādus skaitļus varēja nosaukt **B**, ja $N = 3$?



U2.1. zīm.

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. U2.2.zīm. aplīšos ierakstiet ciparus no 0 līdz 9 (katrā aplītī – citu), tā lai četrstūru virsotnēs ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



U2.2. zīm.

2.2.2. Tirgū divi zemnieki tirgo ābolus. 1 kg ābolu pie abiem tirgotājiem maksā vienādi. Pirmais zemnieks sauc: „Ja nopirksi 2 kg ābolu, būs 40% atlaide visam pirkumam!” Savukārt otrs saka: „Pērkot 1 kilogramu ābolu par parasto cenu, otru kilogramu atdošu par 20 santīmiem.”

Kādā gadījumā (t.i., pie kādas ābolu cenas) ir izdevīgāk pirkt 2 kg ābolu pie pirmā tirgotāja un kādā – pie otrā?

2.2.3. Vai starp 7 nogriežņiem noteikti var atrast trīs tādus, no kuriem var izveidot trijstūri? (Trijstūra katra mala ir tieši viens no dotajiem nogriežņiem; nevienu no nogriežņiem nedrīkst sadalīt mazākās daļās.)

2.2.4. Atrodiet tādus 100 naturālus skaitļus, kuru reizinājums vienāds ar to summu! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

2.2.5. Klasē vienu aiz otra nosēdināja Andri, Dāvi un Edžu tā, ka Andris redz Dāvi un Edžu, Dāvis redz Edžu, bet Edžus neredz nevienu. Viņiem pastāstīja, ka ir 5 cepures – 2 baltas un 3 sarkanas. Tad viņiem aizsēja acis un katram uzlika galvā vienu no cepurēm. Pārējās cepures iznesa no klases.

Kad viņiem atsēja acis un viņi ieraudzīja priekšā sēdētāju cepures, Andris paziņoja, ka viņš zina, kādā krāsā ir viņa cepure, pēc tam Dāvis paziņoja, ka tagad arī viņš var pateikt savas cepures krāsu. Pēc tam arī Edžum bija skaidrs, kādas krāsas cepure ir viņam galvā.

Kādas cepures bija uzliktas zēniem, ja viņi dzirdēja, ko katrs teica, un sprieda vissaprātīgākajā iespējamā veidā?

2.3. Trešā kārta

2.3.1. Starp cipariem **8 7 6 5 4 3 2 1 9** ievietojiet aritmētisko darbību zīmes („+”, „-”, „:”, „·”; ne obligāti visas) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 2008. Ciparu secību mainīt nedrīkst. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

2.3.2. Uz riņķa līnijas atzīmēti 9 punkti. Novelciet 13 nogriežņus ar galapunktiem šajos punktos tā, lai neizveidotos neviens četrstūris, kura malas būtu novilktie nogriežņi!

2.3.3. 113 āboli salikti pa 17 maisiņiem. Dažos maisiņos atrodas pa 4 āboliem, citos – pa x āboliem. Nosakiet visas iespējamās x vērtības!

2.3.4. Uz galda novietots sarkans kartona aplis, kura rādiuss ir 1 cm. Vēl ir doti vairāki zaļi kartona apļi, kuru rādiuss arī ir 1 cm. Kāds ir lielākais skaits zaļo apļu, ko var novietot uz galda tā, lai tie saskartos ar sarkano apli, bet nekādi divi apļi nepārklātos? Pamato savu atbildi!

2.3.5. Ķēniņa pilī ieradās bruņinieks lūgt princeses roku. Ķēniņš sarīkoja bruņiniekam šādu pārbaudījumu.

Vienā no trim istabām atradās princese, divās citās – pa vienam tīģerim. Uz durvīm bija uzliktas šādas plāksnītes:

1.	2.	3.
Tīģeris sēž 2. istabā.	Tīģeris sēž 3. istabā.	Šajā istabā sēž tīģeris.

Ir zināms, ka uz durvīm, aiz kurām atrodas princese, uzraksts ir patiess, bet vismaz viens no pārējiem uzrakstiem ir aplams. Palīdzi bruņiniekam noskaidrot, kurā istabā ir princese!

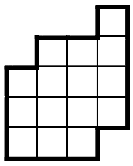
2.4. Ceturtā kārta

2.4.1. Atjaunojiet reizināšanas piemēru (ar vienu zvaigznīti aizstāts viens cipars)! Atrodiet visus atrisinājumus!

$$\begin{array}{r}
2\,*\,* \\
3\,*\,* \\
\hline
5\,*\,* \\
\,4\, \\
\,\,3 \\
\hline
\,\,*\,*\,*
\end{array}$$

2.4.2. Burtu virknes BCFKJ, DCHGC un EFIAG ir aizšifrēti vārdi CIRKS, MAIZE, LAPSA (nav zināms, kuram vārdam atbilst katra virkne; vienādi burti aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem). Atšifrējiet, kādi vārdi šajā šifrā aizstāti ar burtu virknēm HCIJFKF BCDCEFG!

2.4.3. U2.3.zīmējumā attēloto figūru sadaliet 3 pēc formas dažādās, bet vienlielās daļās (daļās ar vienādu laukumu) tā, lai griezuma līnijas ietu pa rūtiņu malām. Atrodiet 5 dažādus veidus, kā to var izdarīt!



U2.3. zīm.

2.4.4. Klasē mācās 25 skolēni; 17 no viņiem nodarbojas ar riteņbraukšanu, 13 – trenējas peldēšanā, bet 8 – apmeklē karatē nodarbības. Neviens skolēns nenodarbojas ar visiem 3 sporta veidiem. Zināms, ka skolēniem, kas trenējas kaut vienā sporta veidā, matemātikā ir sekmīgas, bet ne teicamas atzīmes; 6 skolēni šajā klasē ir nesekmīgi matemātikā.

Noskaidrojiet, 1) cik skolēniem šajā klasē matemātikā ir teicamas atzīmes; 2) cik ir tādu skolēnu, kas apmeklē gan peldēšanas, gan karatē treniņus?

2.4.5. Divās kaudzītēs konfekšu katrā ir pa 10 konfektēm. Jānis un Pēteris spēlē sekojošu spēli. Gājienus abi izdara pēc kārtas; izlaist gājienu nedrīkst. Vienā gājienā jāpaņem no vienas kaudzītes (pēc izvēles) tieši 3 konfektes un no otras kaudzītes tieši 1 konfekti. Tas, kurš vairs nevar izpildīt gājienu, zaudē. Jānis izdara pirmo gājienu.

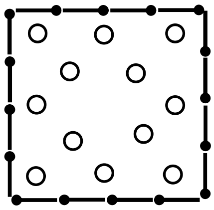
Kurš uzvarēs šajā spēlē? Pamato savu atbildi!

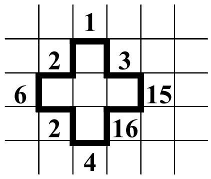
2.5. PIEKTĀ KĀRTA

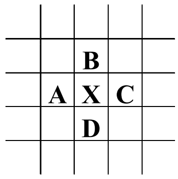
2.5.1. Salieciet izteiksmē **56 - 24:2 + 6** iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu **a)** 50; **b)** 22; **c)** 4.

2.5.2. Jānis, Ansis, Baiba un Ruta nopirka vienādas grāmatiņas. Jānis par savu grāmatu maksāja ar divsantīmu monētām, Ansis – ar piecsantīmu monētām, Baiba – ar desmitsantīmu monētām, bet Ruta – ar divdesmitsantīmu monētām. Kopā viņi izdeva 51 monētu. Cik maksāja viena grāmata?

2.5.3. No 16 sērkociņiem salikts kvadrāts un tā iekšpusē izvietotas 12 monētas (skat. U2.4.zīm.). Ar 12 sērkociņiem sadali šo kvadrātu četrās pēc formas un lieluma vienādās daļās tā, lai katrā daļā būtu tieši 3 monētas!







U2.4. zīm. U2.5. zīm. U2.6. zīm.

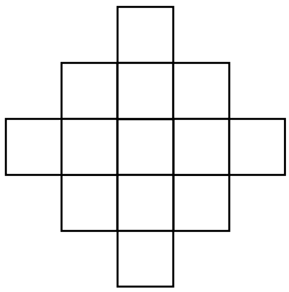
2.5.4. U2.5.zīmējumā attēlotās figūras katrā iekšējā rūtiņā ierakstiet pa vienam skaitlim tā, lai katrs ierakstītais skaitlis būtu vienāds ar tā četru kaimiņu vidējo aritmētisko (par kaimiņiem sauksim skaitļus, kas uzrakstīti rūtiņās ar kopīgu malu; piem., U2.6. zīm. skaitļa X kaimiņi ir A, B, C un D, tātad X = (A + B + C + D) : 4).

2.5.5. Saviesīgā pasākumā piedalās 19 cilvēki. Pierādiet, ka starp tiem var atrast vai nu 4 tādus cilvēkus, kas visi pa pāriem nepazīst viens otru, vai arī tādu cilvēku, kas pazīst vismaz 6 no pārējiem.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

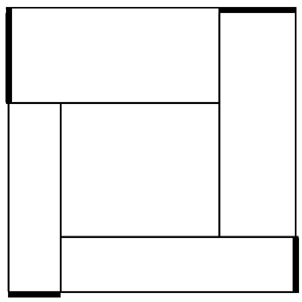
3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

3.1.1. Ierakstīt visās U3.1.zīm. parādītās figūras rūtiņās pa vienam veselam skaitlim tā, lai katrā no 3 rūtiņām sastāvošā taisnstūrī ierakstīto skaitļu summa būtu 1. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



U3.1. zīm.

3.1.2. Kvadrāts, kura malas garums ir 5, sadalīts 5 taisnstūros, kā parādīts U3.2.zīm. Tumšāk iezīmēto nogriežņu garumu summa ir 6. Aprēķināt vidējā taisnstūra apkārtmēru (perimetru).



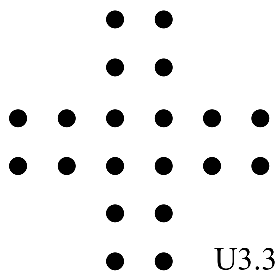
U3.2.zīm.

3.1.3. Cik daļās riņķa līnija un kvadrāta kontūrs var sadalīt plakni?

3.1.4. Pa apli novietoti 8 grozi. Tajos kopā ir a) 2008 āboli; b) 2007 āboli. Vai var gadīties, ka katros divos blakus esošos grozos ābolu skaits atšķiras tieši par 1?

3.1.5. Divos naturālos skaitļos ciparus aizstāja ar burtiem (vienādus – ar vienādiem, dažādus – ar dažādiem). Ir zināms, ka skaitlis VAUVAURRR dalās ar 56, bet skaitlis KRAA dalās ar 24. Parādīt vienu piemēru, kad šie nosacījumi izpildās. Vai tie var izpildīties, ja neviens cipars nav 0?

3.1.6. Kvadrātisku rūtiņu režģī atzīmētas 20 rūtiņu virsotnes (skat. U3.3.zīm.). Nodzēsiet iespējami maz atzīmēto virsotņu tā, lai nekādas četras atlikušās nebūtu viena kvadrāta virsotnes.



U3.3. zīm.

3.1.7. Gar aleju, kas ved no viņu mājiņas uz Sniegbaltītes pili, rūķīši grib iestādīt vismaz 500 kokus. Turklāt viņi vēlas, lai no katriem 3 pēc kārtas iestādītiem kokiem vismaz 1 būtu bērzs, no katriem 4 vismaz 1 – kļava, no katriem 5 vismaz 1 –ozols, no katriem 6 vismaz 1 – liepa un no katriem 7 vismaz 1 – egle. Vai to var izdarīt?

3.1.8. Sešiem draugiem katram bija pa 6 āboliem. Katrs no viņiem uzdāvināja dažus ābolus citiem (dāvanā saņemtos ābolus tālāk nedāvina). Rezultātā viņiem visiem bija atšķirīgi ābolu daudzumi. Vai var gadīties, ka katrs no draugiem uzdāvināja citiem mazāk ābolu, nekā viņam pašam bija beigās?

3.1.9. Klasē mācās 25 skolēni. Pierādīt: vismaz 2 no viņiem dzimšanas dienu datumi atšķiras ne vairāk kā par 2 nedēlām.

3.1.10. Triju brāļu mājas visas atrodas 1 km attālumā cita no citas. Kur uzcelt māju viņu māsai, lai attālumu summa no māsas mājas līdz visu brāļu mājām būtu vismazākā iespējamā?

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

3.2.1. Jānītis sareizināja piecus pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai reizinājuma ciparu summa var būt 2?

3.2.2. Viena klade un divi zīmuļi kopā maksā vairāk par trim burtnīcām, bet trīs klades un divi zīmuļi – vairāk par četrām burtnīcām. Pierādīt, ka piecas klades un seši zīmuļi kopā maksā vairāk par desmit burtnīcām.

3.2.3. Dotas sešas pēc ārējā izskata vienādas lodītes. Uz tām uzrakstīts attiecīgi 1g; 2g; 3g; 4g; 5g; 6g (katrs uzraksts – uz citas lodītes). Pieci uzraksti atbilst patiesībai, bet viena lodīte ir smagāka, nekā uz tās rakstīts. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar divām svēršanām var noskaidrot, kura ir „īpašā" lodīte?

3.2.4. Dots, ka trijstūrī ABC visi leņķi vienādi savā starpā. Zināms, ka punkts M apmierina sakarības $\angle MBC = 75^0$ un $\angle MAC = 45^0$. Pierādīt, ka nogrieznis MC perpendikulārs nogrieznim AC.

3.2.5. Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem $abc - d$, $abd - c$, $acd - b$ un $bcd - a$ dalās ar 4. Pierādīt, ka arī skaitlis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dalās ar 4.

3.2.6. Vai trijstūri var sagriezt a) trijos, b) četros, c) 2007 ieliektos piecstūros?

3.2.7. Dots, ka $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2=1$ un $ad+be+cf=0$. Pierādīt, ka $(a+b+c)^2+(d+e+f)^2\le 3$.

3.2.8. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām: dažas no tām nokrāsotas baltas, citas – sarkanas. Zināms, ka tieši 3 stūra rūtiņas ir sarkanas. Pierādīt: var atrast tādu 2×2 rūtiņu kvadrātu, kurā ir nepāra skaits sarkanu rūtiņu.

3.2.9. Cik ir dažādu 12ciparu virkņu, kas vienlaicīgi apmierina sekojošus nosacījumus:

- katrā virknē ir tieši 6 nulles un 6 vieninieki,
- nevienā virknes sākuma fragmentā nuļļu daudzums nav lielāks par vieninieku daudzumu?

Piezīme. Par virknes sākuma fragmentu sauc vienu vai vairākus (vienalga, cik) tās pirmos locekļus. Piemēram, burtu virknes *abcd* sākuma fragmenti ir *a*; *ab*; *abc*; *abcd*.

3.2.10. Atrast mazāko *n* ar īpašību: lai kā arī izvēlētos *n* skaitļus no kopas $\{1; 2; 3; ... ; 16\}$, starp izvēlētajiem būs divi tādi, kuru kvadrātu summa ir pirmskaitlis.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

3.3.1. Divu naturālu skaitļu summa ir 2101. Ja vienā no šiem skaitļiem izsvītro vienu ciparu, iegūst otru skaitli. Kas tie ir par skaitļiem?

3.3.2. Tabulas rūtiņās ierakstīti skaitļi, kā parādīts U3.4.zīmējumā. Andris izvēlējās sev četras rūtiņas, bet Maija sev – citas četras rūtiņas. Izrādījās, ka Andra izvēlētajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 3 reizes lielāka nekā Maijas izvēlētajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa. Kura rūtiņa palika neizvēlēta?

8	14	25
16	20	5
4	7	11

U3.4. zīm.

3.3.3. Vai var pa apli izrakstīt 8 dažādus naturālus skaitļus tā, lai neviens no tiem nepārsniegtu 20 un lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 5, vai par 7?

3.3.4. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise *AN*; dots, ka $AN=AC$. Uz šīs bisektrises atlikts punkts *M* tā, ka $CM=NB$. Pierādīt, ka leņķi *CMN* un *ABC* vienādi savā starpā.

3.3.5. Uz katras no 50 kartītēm uzrakstīti divi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100; visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Katrai kartītei aprēķināja uz tās uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Pierādīt: visu aprēķināto reizinājumu apgriezto lielumu summa ir mazāka par 1.

3.3.6. Rindā stāv 2007 šillišallas. Katrs šillišalla apgalvo: „vairāk nekā trešdaļa no tiem, kas stāv no manis pa kreisi, ir meļi.” Cik rindā ir meļu? (Uzskatām: meļi melo **vienmēr**, bet tie, kas nav meļi, nemelo **nekad**.)

3.3.7. Rindā izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 40, katrs tieši vienu reizi. Katrīna izvēlējās 10 pāra skaitļus, bet Matīss – 10 nepāra skaitļus. Izrādījās, ka abu bērnu izvēlēto skaitļu summas ir vienādas. Vai noteikti var atrast vienu Katrīnas izvēlēto skaitli un vienu Matīsa izvēlēto skaitli tā, lai abu šo skaitļu summa būtu 41?

3.3.8. Dambretes turnīrā bija 7 dalībnieki. Katrs spēlēja ar katru citu tieši vienu reizi. Turnīra beigās izrādījās: nav tādu triju dalībnieku, kas visi savā starpā nospēlējuši neizšķirti. Kāds ir lielākais iespējamais neizšķirtu skaits turnīrā?

3.3.9. Šaha zirdziņš, sākot no kaut kāda lauciņa, secīgi izdarīja 31 gājienu; nevienā lauciņā viņš neatradās vairāk kā vienu reizi. Pēc tam visus 32 lauciņus, kuros zirdziņš pabija (ieskaitot sākotnējo), izgrieza. Pierādīt: ir palikuši tādi divi neizgriezti lauciņi A un B, ka zirdziņš var ar vienu gājienu nonākt no A uz B.

3.3.10. Trijstūris sagriezts vairākos izliektos daudzstūros; neviens no tiem nav trijstūris. Pierādīt: no šiem daudzstūriem var atrast divus ar vienādu malu skaitu.

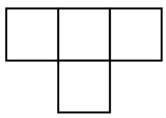
3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. Viens smilšu pulkstenis „iztek” 6 minūtēs, otrs – 8 minūtēs. Kā ar šo pulksteņu palīdzību Sniegbaltīte var izcept kūku, ja zināms, ka tai jācepas tieši 10 minūtes?

3.4.2. Vai kvadrātu var sagriezt 2008 kvadrātos tā, lai nekādi 5 no griežot iegūtajiem nebūtu savā starpā vienādi?

3.4.3. Uz galda atrodas divas konfekšu kaudzītes. Andris un Maija pamīšus ēd pa patvaļīgam daudzumam konfekšu no vienas kaudzītes (katrā gājienā katrs bērns izvēlas, no kuras kaudzītes un cik konfekšu viņš ēdīs). Sāk Andris. Tas, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš uzvar, pareizi spēlējot?

3.4.4. Vai kvadrātu, kas sastāv no a) 9×9, b) 8×8, c) 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta U3.5.zīm.? Figūras var būt pagrieztas arī citādi.



U3.5. zīm.

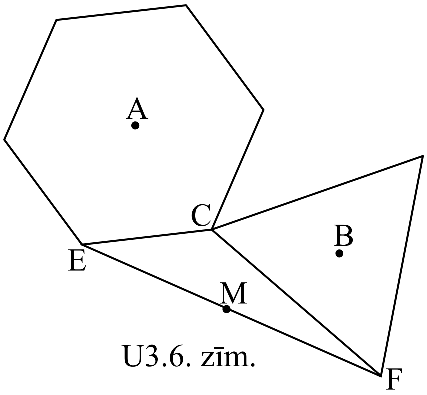
3.4.5. Gunārs sareizināja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot un rezultātā izsvītroja visas nulles. Kāds ir iegūtā skaitļa pēdējais cipars – pāra vai nepāra?

3.4.6. Dots, ka $a+b+c=0$ un $ab+ac+bc=0$. Pierādīt, ka $a^3+b^3+c^3=0$.

3.4.7. Pierādīt, ka vienādojumam $\left|x^2+ax+b\right|+\left|x^2+cx+d\right|=\left|x^2+ex+f\right|$ nav vairāk par 8 saknēm. (Šeit x – mainīgais, bet a, b, c, d, e, f – kaut kādi fiksēti skaitļi.)

3.4.8. Naturālu skaitļu virknē katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar kaut kādu divu iepriekšējo locekļu summu. Vai virknē noteikti ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav pirmskaitļi?

3.4.9. Regulāram sešstūrim ar centru A un regulāram trijstūrim ar centru B ir kopīga virsotne C; punkts M ir EF viduspunkts (skat. U3.6.zīm.). Pierādīt, ka $\angle AMB = 90°$.



U3.6. zīm.

3.4.10. Katrīnai jāatrod divdesmit skaitļu „11” reizinājums (citiem vārdiem, jāaprēķina 11^{20}). Viņa nedrīkst izmantot kalkulatoru, datoru, reizināšanas tabulas u.tml. Viņas rīcībā ir rūtiņu lapa ar izmēriem 30×40 rūtiņas; katrā rūtiņā drīkst ierakstīt augstākais vienu ciparu. Vai viņa var izpildīt uzdevumu? (Piem., U3.7.zīm. parādīts, kā 4×5 rūtiņas lielā taisnstūrī var sareizināt 23 un 67).

		2	3
		6	7
	1	6	1
1	3	8	
1	5	4	1

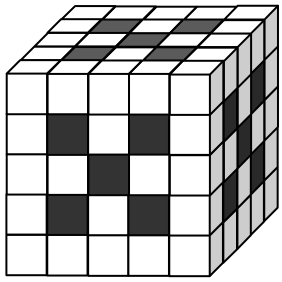
U3.7. zīm.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

3.5.1. Andrim ir taisnstūrveida papīra lapa, kas sadalīta 36 paralēlās joslās; joslas pamīšus izkrāsotas melnas un baltas. Ar vienu gājienu Andris var pārkrāsot vienu joslu citā krāsā. Ja tā rezultātā vairākas pēc kārtas sekojošas sākotnējās joslas tagad ir vienā krāsā, tad turpmāk tās uzskata par vienu joslu.

Ar kādu mazāko gājienu skaitu Andris var panākt, lai visa lapa būtu balta?

3.5.2. Kubs sastāv no $5 \times 5 \times 5$ vienādiem mazākiem kubiņiem. Daži kubiņi ir melni; melnie kubiņi izvietoti taisnās rindās, kas paralēlas lielā kuba šķautnēm, pa 5 kubiņiem katrā rindā (skat. U3.8.zīm.) Cik ir melno kubiņu?



U3.8. zīm.

3.5.3. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 25 (katrā rūtiņā – cits skaitlis).

Vai var gadīties, ka katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir

a) pāra skaitlis,

b) nepāra skaitlis?

3.5.4. Spēle notiek kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas. Andris un Maija pamīšus raksta rūtiņās sava vārda pirmos burtus (Andris – A, Maija – M). Katrā rūtiņā drīkst atrasties augstākais viens burts. Ja divām rūtiņām ir kaut viena kopīga virsotne, tajās nedrīkst atrasties dažādi burti. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Spēli sāk Andris. Kurš uzvar, pareizi spēlējot?

3.5.5. Daži no skaitļiem no 1 līdz 105 izrakstīti vienā rindā cits aiz cita bez atstarpēm, citi – otrā rindā. Iegūti divi „gari" naturāli skaitļi. Vai var gadīties, ka tie ir vienādi?

3.5.6. Pierādiet, ka vienādmalu trijstūri var sagriezt n vienādsānu trijstūros, ja $n \geq 4$, n – naturāls. (**Piezīme**: arī vienādmalu trijstūri uzskatām par vienādsānu.)

3.5.7. Vai pastāv piecciparu naturāls skaitlis, kam nav citu ciparu kā 1; 4; 7 un kas dalās ar

a) 8,

b) 9?

3.5.8. Jaungada dienā katrs no 7 rūķīšiem uzdāvināja Sniegbaltītei dažus dārgakmeņus: viens – dimantus, otrs – rubīnus, trešais – smaragdus, ceturtais – topāzus, piektais – safīrus, sestais – ametistus, septītais – hrizolītus. Visi uzdāvinātie dārgakmeņu daudzumi bija dažādi. Turpmāk katru dienu katrs rūķītis dāvināja Sniegbaltītei 1, 2 vai 3 tā paša veida dārgakmeņus, ko Jaungada dienā. Kādā laika posmā katru dienu Sniegbaltītei visi dārgakmeņi bija dažādā skaitā, pie tam šai posmā bija gan tāda diena, kad viņai visvairāk bija dimantu, gan tāda, kad – rubīnu, ..., gan tāda, kad – hrizolītu. Kāds ir mazākais iespējamais šī laika posma dienu skaits?

3.5.9. Sadalīt reizinātājos izteiksmi $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

3.5.10. Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = x^2 + px + q$. Dots, ka $a + b = c + d$ un $f(a) = f(b)$. Pierādīt, ka $f(c) = f(d)$.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. Atrodiet kaut vienu naturālu skaitli ar īpašību: pārliekot tā ciparus citā kārtībā un saskaitot iegūto skaitli ar sākotnējo, iegūst 20052008.

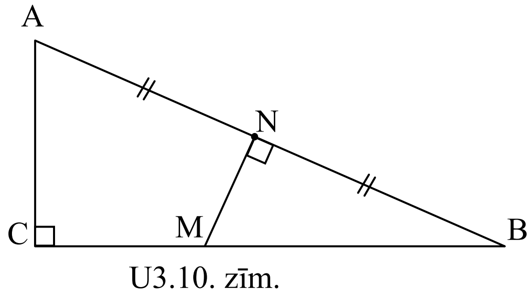
3.6.2. Visi naturālie skaitļi pēc kārtas tiek izrakstīti „pa spirāli” rūtiņu lapā tā, kā parādīts U3.9.zīm.:

17	16	15	14	13	
18	5	4	3	12	
19	6	1	2	11	
20	7	8	9	10	
21	22	23	24	25	...

U3.9. zīm.

Cik rūtiņas horizontālā un cik – vertikālā virzienā no skaitļa 1 būs „nobīdīts” skaitlis 2008?

3.6.3. Dots, ka $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = 30°$, N ir AB viduspunkts, $NM \perp AB$. Pierādīt, ka $NM = \frac{1}{3}BC$ (skat. U3.10.zīm.).



U3.10. zīm.

3.6.4. Dots, ka x, y un z ir naturāli skaitļi un gan $xy + 2y + 4$, gan $yz + 2z + 4$ dalās ar 7. Pierādīt, ka arī $zx + 2x + 4$ dalās ar 7.

3.6.5. Vai kvadrātu ar izmēriem 5×5 var pilnīgi pārklāt, izmantojot trīs kvadrātus, katru ar izmēriem 4×4? Vai to var izdarīt, ja visu četru kvadrātu malām jābūt savstarpēji paralēlām / perpendikulārām?

3.6.6. Atrodiet kaut vienu tādu racionālu skaitli r, ka gan r, gan r + 5, gan r + 10 ir racionālu skaitļu kvadrāti.

3.6.7. Vai pozitīviem skaitļiem x, y, z, t var vienlaicīgi izpildīties sakarības $(x+y) < 2(z+t)$ un $(x^2+y^2) > 9(z^2+t^2)$?

3.6.8. Regulāra desmitstūra virsotnēs ierakstīti divciparu naturāli skaitļi (pa vienam katrā virsotnē). Pierādīt: var novilkt tādu taisni, ka tās abās pusēs esošo skaitļu summas atšķiras viena no otras ne vairāk kā par 90.

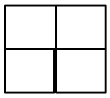
3.6.9. Katram skolēnam kādā klasē ir tieši 5 draugi – klasesbiedri (draudzības ir abpusējas). Ja apskata jebkurus divus draugus, tad vienam no viņiem ir tieši 2 reizes vairāk kompaktdisku nekā otram. Vai visiem skolēniem kopā var būt tieši 2008 kompaktdiski?

3.6.10. Sniegbaltīte uzdāvināja katram no 7 rūķīšiem pa 5 konfektēm: „Vāverīti", „Margrietiņu" un „Lācīti", pie tam katrs rūķītis saņēma vismaz vienu katra veida konfekti. Pierādīt: ir divi tādi rūķīši, kam viņa uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus.

4. LATVIJAS 20. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Rūtiņas malas garums ir 1 cm (skat. U4.1.zīm.). Parādiet, kā var uzzīmēt 1. zīm. attēloto figūru, neatraujot zīmuli no papīra un novelkot līniju ar garumu 14 cm (pa dažām vietām līnija drīkst iet vairākas reizes).



U4.1. zīm.

4.5.2. Katrīnai ir 9 zīmuļi; vismaz viens no tiem ir zils. Ir zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

a) no katriem 5 zīmuļiem var izvēlēties ne vairāk kā 3 dažādu krāsu zīmuļus,

b) no katriem četriem zīmuļiem ne vairāk kā 3 ir vienā un tai pašā krāsā.

Cik zilu zīmuļu ir Katrīnai?

4.5.3. Zvaigznītes jāaizstāj ar dažādiem cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību:

$$2*8*+48*7=2*1*+39*2\,.$$

Atrodiet iespējami daudzus veidus, kā to izdarīt. Pacentieties pamatot, kāpēc citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.

4.5.4. Jūrnieka krekls sastāv no 25 melnām un 24 baltām joslām, kas izvietotas pamīšus. Ar vienu gājienu vienu joslu var pārkrāsot pretējā krāsā. Ja pēc tam divas vai vairākas pēc kārtas esošas joslas ir vienā krāsā, tās turpmāk uzskata par vienu joslu.

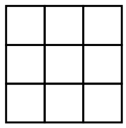
Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai viss krekls būtu vienā krāsā?

4.5.5. Andrim ir 16 kastītes. Tajās ir attiecīgi 1; 2; 3; ...; 15; 16 konfektes. Katru dienu Andris izvēlas dažas kastītes un apēd vienādu daudzumu konfekšu no tām visām.

Parādiet, kā Andris var 5 dienās apēst visas konfektes.

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Rūtiņas malas garums ir 1 cm (skat. U4.2.zīm.). Parādiet, kā var uzzīmēt 2. zīm. attēloto figūru, neatraujot zīmuli no papīra un novelkot līniju ar garumu 27 cm (pa dažām vietām līnija drīkst iet vairākas reizes).



U4.2. zīm.

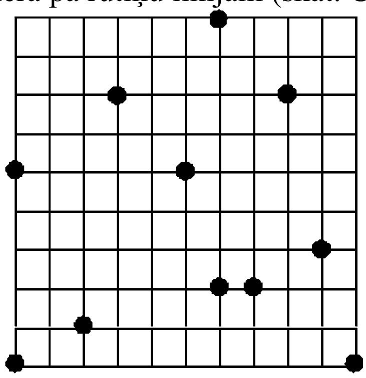
4.6.2. Ja x – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 10, tad ar x' apzīmēsim skaitli, kas iegūts, uzrakstot x ciparus pretējā kārtībā. Vai var atrast tādus 5 naturālus skaitļus a, b, c, d, e, ka vienlaicīgi $a < b < c < d < e$ un $a' > b' > c' > d' > e'$?

4.6.3. Dažiem skolēniem klasē patīk matemātika, dažiem vēsture; pie tam dažiem patīk gan matemātika, gan vēsture, un katram patīk vismaz viens no šiem priekšmetiem. Ceturtdaļai no tiem, kam patīk matemātika, patīk arī vēsture; piektdaļai no tiem, kam patīk vēsture, patīk arī matemātika.

Kādai daļai skolēnu patīk matemātika?

4.6.4. Katri divi no 6 profesoriem savā starpā sarakstās vai nu angliski, vai latviski (tikai vienā no šīm valodām). Ir zināms, ka nav tādu trīs profesoru, kas visi savā starpā sarakstās angliski. Pierādīt: ir tādi 3 profesori, kas visi savā starpā sarakstās latviski.

4.6.5. Kuru rūtiņu virsotni jāizvēlas, lai attālumu summa no tās līdz atzīmētajiem 11 punktiem būtu vismazākā iespējamā. Režģis sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām; attālumus mēra pa rūtiņu līnijām (skat. U4.3.zīm.).



U4.3. zīm.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Dots, ka a, b un c ir dažādi naturāli skaitļi, c dalās ar a un $(a-b)(b-c)>0$. Kurš no šiem skaitļiem ir vislielākais, kurš – vismazākais?

4.7.2. Plaknē novilktas 6 taisnes. Vai var gadīties, ka ir tieši 16 punkti (ne vairāk un ne mazāk), katrs no kuriem pieder vismaz divām taisnēm? Vai var gadīties, ka ir tieši 14 šādi punkti?

4.7.3. Tabula sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstītie skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 5, vai par 7?

4.7.4. Apļveida šosejas garums ir 100 km. Blakus tai atrodas 10 ciemati. Katra ciemata iedzīvotāji izmērīja attālumu pa šoseju līdz tuvākajam no abiem kaimiņu ciematiem; visu mērījumu summa ir 30 km. Pierādiet, ka uz šosejas ir tāds 14 km garš posms, kurā nav neviena ciemata. (Ciematus uzskatām par punktiem.)

4.7.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa var būt vai nu balta, vai melna; sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vai nu vienu rindiņu, vai vienu kolonnu un visas rūtiņas tajā pārkrāsot pretējā krāsā. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai kvadrātā būtu

a) tieši 17 melnas rūtiņas,

b) tieši 6 melnas rūtiņas?

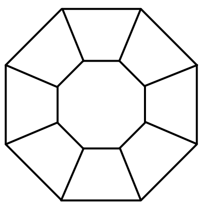
4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Pierādiet, ka neviens no skaitļiem 2347108569; 123457754321; 359999 nav pirmskaitlis.

4.8.2. Maija iedomājās naturālu skaitli n. Dalot to ar 9, atlikums izrādījās vienāds ar nepilno dalījumu. Tas pats notika, dalot n ar 14. Kādas ir iespējamās n vērtības?

4.8.3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BM; zināms, ka $AB = BM$. Uz bisektrises turpinājuma aiz punkta M atzīmēts tāds punkts N, ka $\angle BAN + \angle BAM = 180°$. Pierādīt, ka $BN = BC$.

4.8.4. Katrs U4.4.zīm. redzamais nogrieznis ir sarkans vai zaļš. Katram sarkanajam nogrieznim izskaitīja, cik zaļiem nogriežņiem ar to ir kopīgs galapunkts. Vai visu iegūto skaitļu summa var būt 21?



U4.4. zīm.

4.8.5. Kvadrāts sadalīts 10×10 vienādās kvadrātiskās rūtiņās. Katrā rūtiņā dzīvo pa rūķītim. Katrs rūķītis vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Katrs no viņiem apgalvo, ka vienā kolonnā ar viņu ir vairāk meļu nekā vienā rindā ar viņu. Pierādīt, ka meļu skaits kvadrātā dalās ar 10.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Dots, ka katram no vienādojumiem $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ un $x^2 + 2bx + a^2 = 0$ ir vismaz viena sakne. Cik dažādu sakņu var būt kopā abiem vienādojumiem?

4.9.2. Koordinātu plaknē uzzīmēti visu funkciju $y = ax + b$ grafiki, kur a un b – naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 10. Kāds lielākais daudzums šo grafiku iet caur vienu punktu?

4.9.3. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Dots, ka $AB = BD$ un $AC = BC$. Pierādīt, ka $\angle ABC < 60°$.

4.9.4. Pa apli stāv 24 cilvēki; katrs no tiem vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Katrs no viņiem apgalvo: „nākošie 11 cilvēki pulksteņa rādītāja kustības virzienā aiz manis visi ir meļi”. Cik meļu stāv aplī?

4.9.5. Kvadrāts sastāv no 16×16 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa var būt balta vai melna; sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties

a) 2×2 rūtiņu kvadrātu, **b)** 9×9 rūtiņu kvadrātu un izvēlētajā kvadrātā mainīt visu rūtiņu krāsas: baltās rūtiņas pārkrāsot melnas, bet melnās – baltas.

Katrā no gadījumiem **a)** un **b)** noskaidrojiet, vai, atkārtojot šādus gājienus, iespējams iegūt kvadrāta krāsojumu šaha galdiņa formā (t.i., lai katras divas rūtiņas ar kopīgu malu būtu nokrāsotas dažādās krāsās).

5. LATVIJAS 58. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. Starp katriem diviem blakus uzrakstītiem cipariem vienādības zīmes kreisajā pusē jāievieto „+" vai „–" zīme tā, lai iegūtu pareizu vienādību. Jābūt sešām „+" zīmēm un divām „–" zīmēm. Pacentieties atrast trīs dažādus zīmju izvietojumus.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 19

5.5.2. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 10 katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu:

a) vismaz 4,

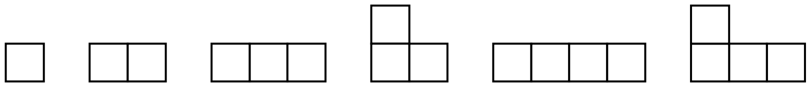
b) vismaz 5?

5.5.3. Deju kolektīvā ir 5 zēni un 5 meitenes; visu bērnu augumi ir dažādi. Dejā „Alfa" bērni sadalīti 5 pāros tā, ka katrā pārī zēns ir garāks par meiteni.

a) Vai var gadīties, ka dejā „Beta" bērni sadalīti 5 pāros tā, ka **katrā** pārī meitene garāka par zēnu?

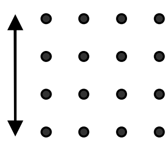
b) Vai var gadīties, ka dejā „Gamma" bērni sadalīti 5 pāros tā, ka **četros** pāros meitene garāka par zēnu?

5.5.4. Vai no figūrām, kas parādītas U5.1.zīm., var salikt kaut kādu taisnstūri? Katru figūru jāņem tieši vienā eksemplārā. Visas rūtiņas ir vienādi kvadrātiņi. Figūras drīkst pagriezt un pat apgriezt „uz mutes", bet tās nedrīkst pārklāties viena ar otru.



U5.1. zīm.

5.5.5. Sešpadsmit punkti izvietoti kvadrātiska režģa formā (skat. U5.2.zīm.). Kādu mazāko daudzumu punktu jāizdzēš, lai nekādi 4 palikušie punkti nebūtu tāda kvadrāta virsotnes, kura malas vērstas bultiņu virzienos?

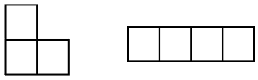


U5.2. zīm.

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Basketbola spēlē starp votivapām un šillišallām uzvarēja votivapas ar rezultātu 68:62. Spēles gaitā bija tāds brīdis, kad votivapas bija guvuši tik punktu, cik šillišallām vēl bija atlicis gūt līdz spēles beigām. Cik punktu šai brīdī bija guvušas abas komandas kopā?

5.6.2. Andrim ir figūriņas, kas sastāv no vienādiem kvadrātiņiem (skat. U5.3.zīm.) – pa 10 katra veida.



U5.3. zīm.

Vai viņš var salikt kvadrātu 7×7 rūtiņas, izmantojot a) 12 figūriņas; b) 14 figūriņas? Figūriņas nedrīkst pārklāties.

5.6.3. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka

a) $xy(x-y)=20082007$?

b) $xy(x-y)=240$?

5.6.4. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka reizinājums $n \times n$ sākas ar 1234567...?

5.6.5. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Ir zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

a) nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā,

b) neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.

Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n=\frac{x}{y}$, kur $x=a^3$, $y=b^4$, a un b – naturāli skaitļi?

5.7.2. Ir 4 tortes gabali ar masām x, y, z, t; dots, ka $x<y<z<t$. Andris un Maija spēlē šādu spēli. Andris izvēlas vienu tortes gabalu, pēc tam Maija – otru; abi bērni nekavējoties sāk ēst. Tikko kāds savu gabalu apēdis, viņš nekavējoties izvēlas kādu gabalu no atlikušajiem un sāk ēst to, utt. Spēles mērķis ir apēst vairāk tortes nekā otram. Abi bērni torti ēd vienmērīgi un ar vienādiem ātrumiem.

Vai var gadīties, ka Andris uzvar, no sākuma izvēloties gabalu x? Uzskatām, ka Maija noteikti ēd torti sev visizdevīgākajā veidā.

5.7.3. Sporta klubā sapulcējušies cīkstoņi un vingrotājas. Cīkstoņu vidējais svars ir 84 kg; vingrotāju vidējais svars ir 54 kg; visu sportistu vidējais svars ir 71 kg. Pierādīt, ka cīkstoņu skaits dalās ar 17.

5.7.4. Vai eksistē

a) sešstūris, kuru var sagriezt divos trijstūros,

b) sešstūris, kuru nevar sagriezt divos četrstūros?

5.7.5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts nenegatīvs vesels skaitlis. Visu ierakstīto skaitļu summa ir 101. Katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstītie skaitļi atšķiras viens no otra tieši par 1. Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Sešciparu naturālu skaitli sauc par laimīgu, ja kaut kādu 3 ciparu summa vienāda ar pārējo 3 ciparu summu. Divi viens otram sekojoši skaitļi ir laimīgi. Pierādīt, ka viens no tiem dalās ar 10.

5.8.2. Kvadrāts sastāv no 2008×2008 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas sagriezts mazākos kvadrātos ar nepāra skaitu rūtiņu katrā. Pierādiet: no šo kvadrātu centrālajām rūtiņām tieši puse ir baltas un puse – melnas. (Ja kvadrāts sastāv no 1 rūtiņas, tad šo vienīgo rūtiņu uzskata par tā centrālo).

5.8.3. Skaitļi *a*, *b*, *c* visi nav vienādi savā starpā. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + ac + bc$.

5.8.4. Katrīna katru dienu nēsā citas krāsas cepuri. Viņa nolēmusi, ka pēc sarkanas cepures viņa nēsā dzeltenu, pēc dzeltenas – zaļu, pēc zaļas – brūnu, pēc brūnas – violetu, pēc violetas – atkal sarkanu, utt. Pirmajā dienā Katrīnai bija zaļa cepure, 2008. dienā – dzeltena. Ir zināms, ka Katrīna pieļāva **tieši vienu kļūdu**, valkājot sarkanu cepuri dienā, kad to nevajadzēja darīt. Kādas krāsas cepuri viņa valkāja iepriekšējā dienā pirms šīs kļūdas pieļaušanas?

5.8.5. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *CH*; izrādījās, ka *AH* = *BC*. Caur *H* paralēli malai *BC* novilkta taisne; tā krusto augstumu AA_1 punktā *K*. Pierādīt, ka *K* atrodas uz $\angle ABC$ bisektrises.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Atrodiet vismaz 5 dažādus pirmskaitļus, ar kuriem dalās skaitlis $3^{32} - 2^{32}$.

5.9.2. Trijstūrī *ABC* ar h_a, h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm *A*, *B*, *C*. Dots, ka $h_a \geq 3$, $h_b \geq 4$, $h_c \geq 5$.

Kāds ir mazākais iespējamais ΔABC laukums?

5.9.3. Ceļu policijas vienībā ir 7 policisti. Katru vakaru dežūrēt dodas 3 no tiem. Pēc kāda laika izrādījās, ka katri divi policisti kopā dežurējuši tieši n reizes.

a) atrodiet kaut vienu iespējamu n vērtību,

b) vai var būt, ka *n* = 3?

5.9.4. Katram no kvadrāttrinomiem $x^2 + ax + b$ un $x^2 + cx + d$ ir divas dažādas saknes; visi skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* ir dažādi. Minēto četru sakņu summas puse ir vienādojuma $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ sakne. Pierādīt, ka pirmā kvadrāttrinoma sakņu kvadrātu summa vienāda ar otrā kvadrāttrinoma sakņu kvadrātu summu.

5.9.5. Kādā valstī ir 100 pilsētas. No katras pilsētas iziet 5 ceļi. Katrs ceļš savieno divas pilsētas, neiegriežoties citās; starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk par vienu ceļu; visu ceļu garumi ir dažādi. Visu ceļu kopgarums ir 30 000 km. Ja izvēlas katrai pilsētai visīsāko no tās izejošo ceļu un saskaita visu 100 izvēlēto ceļu garumus (varbūt dažu ceļu garumus ieskaita summā divreiz), iegūst 10 000 km. Pierādīt, ka šajā valstī ir tāds ceļš, kura garums nav mazāks par 125 km.

6. LATVIJAS 58. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Dots, ka x un y – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka mazākais naturālais skaitlis, kas dalās gan ar x, gan ar y, nav $x+y$.

6.9.2. Dots, ka a, b un c – pozitīvi skaitļi, pie tam pastāv vienādības $ab = \frac{c-a+1}{b} = \frac{c+1}{2}$. Pierādīt, ka

- $b = 1$,
- viens no skaitļiem a, b, c ir divu pārējo summas puse.

6.9.3. Katrs riņķa līnijas punkts nokrāsots vai nu balts, vai sarkans. Ir zināms: ja kāds vienādmalu trijstūris ievilkts šajā riņķa līnijā, tad vismaz 2 no tā virsotnēm ir baltas.

Pierādīt: eksistē tāds šajā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts, kuram vismaz 3 virsotnes ir baltas.

6.9.4. Dots, ka ABC – trijstūris, bet X un Y – tādi punkti, ka $\angle AXB = \angle BYC = 90°$. Pierādīt, ka nogrieznis XY nav garāks par ΔABC pusperimetru.

6.9.5. Dotas 27 lodītes. Uz tām uzrakstīti numuri – naturālie skaitļi no 1 līdz 27 (uz katras lodītes – cits skaitlis). Lodītes kaut kā saliktas baltā, sarkanā un melnā kastē (katra lodīte ir vienā kastē). Zināms, ka baltajā kastē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 15; sarkanajā kastē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 3; melnajā kastē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 18. Cik lodīšu var būt baltajā kastē?

7. LATVIJAS 35. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Uz kādas planētas tiek lietotas 2008 dažādas valodas. Kāds mazākais daudzums vārdnīcu pietiekams, lai no katras valodas varētu tulkot uz katru citu? (Pieļaujamas vairākpakāpju tulkošanas; ar katru vārdnīcu tulko tikai vienā virzienā, piemēram, no latviešu valodas uz lietuviešu valodu, bet ne otrādi.)

7.5.2. Skaitļi tabulā ierakstīti tā, kā parādīts U7.1.zīm. Ar vienu gājienu var vai nu pieskaitīt 1 visiem vienas (jebkuras) rindiņas skaitļiem, vai arī atņemt 1 no visiem vienas (jebkuras) kolonnas skaitļiem. Parādīt, ka var panākt, lai skaitļi būtu ierakstīti tabulā tā, kā parādīts U7.2.zīm.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

U7.1. zīm.

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

U7.2. zīm.

7.5.3. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Parādiet, ka visas rūtiņas var pārsvītrot ar četrām taisnēm, kuras neiet caur rūtiņu stūriem.

7.5.4. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka n ciparu summa ir 9, bet reizinājuma $n \cdot n$ ciparu summa ir 81?

Vai eksistē tāds naturāls skaitlis k, ka k ciparu summa ir 6, bet reizinājuma $k \cdot k$ ciparu summa ir 24?

7.5.5. Šaha turnīrā piedalās 7 dalībnieki. Katrs ar katru citu spēlē tieši vienu reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu ½ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Spēles tiek organizētas šādi: katru dienu kaut kādi 6 spēlētāji sadalās 3 pāros, un katra pāra spēlētāji spēlē savā starpā.

Pierādiet: gan pēc pirmās, gan pēc otrās, gan pēc trešās dienas var atrast divus spēlētājus ar vienādiem iegūto punktu daudzumiem.

7.6. Sestā klase

7.6.1. Uz tāfeles uzrakstīti vairāki skaitļi. Katrs no tiem vienāds ar vienu desmito daļu no pārējo skaitļu summas. Cik skaitļu uzrakstīts? Atrisināt šo uzdevumu divos gadījumos:

a) ir zināms, ka visi uzrakstītie skaitļi ir pozitīvi,

b) par skaitļiem nav zināms, vai tie ir pozitīvi, negatīvi vai nulle.

7.6.2. Taisnstūris sastāv no 7x13 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to var sagriezt daļās tā, lai 15 daļas būtu taisnstūri ar izmēriem 2x3 rūtiņas? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.

7.6.3. Andris nosauc Maijai trīs dažādus ciparus. Pierādiet: Maija, neizmantojot citus ciparus kā Andra nosauktos, var uzrakstīt veselu skaitli (viencipara, divciparu vai trīsciparu), kurā nav vienādu ciparu un kas dalās ar 3.

7.6.4. Visi dažādie viencipara skaitļi, kas nav 0, sadalīti trīs grupās pa trim skaitļiem katrā un katrai grupai aprēķināts tajā ietilpstošo skaitļu reizinājums. Apzīmēsim lielāko (vai vienu no lielākajiem, ja tādu ir vairāki) no šiem reizinājumiem ar A. Kāda ir mazākā iespējamā A vērtība?

7.6.5. Katrīna iedomājusies divciparu naturālu skaitli, bet Profesors Cipariņš cenšas to uzminēt. Ar vienu jautājumu viņš nosauc Katrīnai kaut kādu **savu iedomātu** divciparu skaitli, bet Katrīna pasaka, **cik šķirās** (nevienā, vienā vai divās) profesora nosauktais skaitlis sakrīt ar viņas iedomāto. Pierādiet, ka profesors var noskaidrot Katrīnas iedomāto skaitli, uzdodot ne vairāk kā 10 jautājumus.

Piezīme. Ja Jūs nevarat izdomāt stratēģiju ar 10 jautājumiem, bet varat ar 11, 12 utt., uzrakstiet labāko no savām atrastajām.

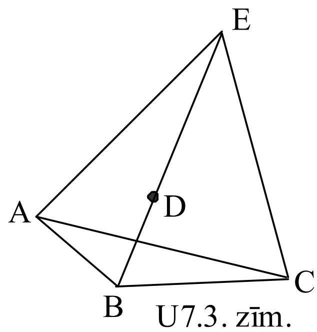
7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Kādu lielāko daudzumu dažādu nenulles ciparu var izrakstīt pa apli tā, lai katri divi blakus uzrakstīti cipari, lasot tos vienalga kādā virzienā, veidotu pirmskaitļa pierakstu?

7.7.2. Dots, ka x un y – tādi naturāli skaitļi, ka $x \cdot y = 10^{12}$. Vai var būt, ka ne x, ne y nesatur savā pierakstā nevienu ciparu 0?

7.7.3. Traukā sākumā atradās 1 baktērija. Kādā brīdī tā sadalījās divās baktērijās. Katra no jaunajām baktērijām atkal kādā brīdī sadalījās divās baktērijās, utt. Vakar plkst. 12^{00} traukā bija tieši 2008 baktērijas. Pierādiet: kādā brīdī traukā bija tāda baktērija, kuras pēcteču skaits starp minētajām 2008 baktērijām – apzīmēsim šo skaitu ar n – apmierina nosacījumus $670 \le n \le 1339$.

7.7.4. Dots, ka $\angle ABD = \angle CBD = 60°$, B, D un E atrodas uz vienas taisnes, $BD = BA$, $DE = BC$ (skat. U7.3.zīm.) . Pierādīt, ka trijstūrī ACE visas malas vienādas savā starpā.



U7.3. zīm.

7.7.5. Plaknē atzīmēti 17 punkti. Pierādīt, ka 5 no tiem var nokrāsot sarkanus tā, lai nevienam trijstūrim ar trim sarkanām virsotnēm visas malas nebūtu vienādas.

7.8. ASTOTĀ KLASE

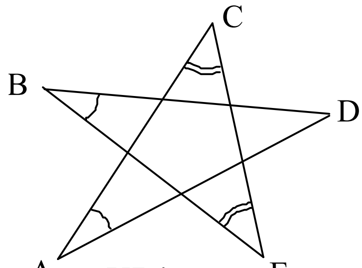
7.8.1. Kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_3 un x_4. Nav tādas x vērtības, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses būtu vienādas savā starpā. Pierādīt, ka $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

7.8.2. Dots, ka $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Pierādīt, ka $a = b = c$.

7.8.3. Dots, ka $n > 1$ - naturāls skaitlis, kas nav pirmskaitlis. Pierādīt, ka var atrast dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, ..., a_k$, kur $k \ge 3$, kas apmierina sakarību

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k}\right).$$

7.8.4. Piecstūra zvaigznē ABCDE (skat. U7.4.zīm.) pastāv sakarības $\angle A = \angle B$, $\angle E = \angle C$, $AC = BE$. Pierādīt, ka $AD = BD$.



U7.4. zīm.

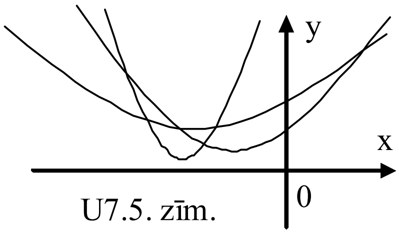
7.8.5. Šaha turnīrā piedalās 8 spēlētāji; katrs ar katru citu spēlē tieši 1 reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Turnīru beidzot, izrādījās, ka nekādiem diviem spēlētājiem nav vienādi punktu daudzumi. Kāds ir mazākais iespējamais uzvarētāja iegūtais punktu daudzums? (Par uzvarētāju uzskata to spēlētāju, kam turnīra noslēgumā ir visvairāk punktu.)

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Kvadrātveida tabula sastāv no 12×12 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts nenulles cipars. No katras rindiņas un katras kolonnas cipariem, ņemot tos patvaļīgā secībā, izveidots viens divpadsmitciparu naturāls skaitlis. Vai var gadīties, ka tieši 23 no šiem skaitļiem (ne vairāk un ne mazāk) dalās ar 3?

7.9.2. Pieņemsim, ka U7.5.zīm. attēlotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki.

Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



U7.5. zīm.

7.9.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC dots, ka $\angle ABC = 30°$, AX un CY ir augstumi, M un N – attiecīgi malu AB un BC viduspunkti. Pierādīt, ka $MX \perp NY$.

7.9.4. Naturālie skaitļi no 1 līdz 2008 ieskaitot jāsadala grupās tā, lai izpildītos sakarība: ja a dalās ar b un b dalās ar c (a, b, c – dažādi naturāli skaitļi), tad a, b un c visi nepieder vienai un tai pašai grupai. Kāds ir mazākais iespējamais grupu skaits?

7.9.5. Kvadrāts sadalīts rūtiņās ar malu garumu 1; rūtiņu ir vairāk nekā viena. Pa dalījuma līnijām (kvadrāta iekšpusē un uz tā ārējās robežas) uzzīmētas vairākas slēgtas līnijas; katra no tām ierobežo kaut kādu taisnstūri. Vai var gadīties, ka katras rūtiņas katra mala pieder

a) pāra skaitam līniju,

b) nepāra skaitam līniju?

ATBILDES UN ATRISINĀJUMI

1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Atbilde: B.
Risinājums: 2007 – 19 + 21 = 2009.

1.1.2. Atbilde: 16 cm.
Risinājums: Kvadrāta (un tātad arī trijstūru) vienas malas garums ir 8 cm : 4 = 2 cm. Attēlotās figūras robeža sastāv no 8 šādiem nogriežņiem, tātad perimetrs ir 8 · 2cm = 16 cm.

1.1.3. Atbilde: B.
Risinājums: 1 ābols sver 150 g, 1 bumbieris sver 50 g, 1 arbūzs sver 5 kg.

1.1.4. Atbilde: B.
Risinājums: Zinām, ka, palielinot mazināmo par kādu skaitli, starpība arī palielinās par to pašu skaitli. Savukārt, mazinātāju samazinot par kādu skaitli, starpība palielināsies par to pašu skaitli.
Tātad, ja mazināmo palielinās par 2, tad starpība arī palielināsies par 2. Un, ja mazinātāju samazinās par 2, tad tieši par 2 palielināsies starpība. Tātad kopā starpība būs **palielinājusies** par $2+2=\mathbf{4}$.
Izvēlēsimies un apskatīsim konkrētu piemēru! Sākotnējā izteiksmē $10-3=7$ mazināmo (10) palielināsim par 2 ($10+2=12$) un mazinātāju (3) samazināsim par 2 ($3-2=1$). Aprēķinot starpību, iegūstam $12-1=11$. Jauniegūtā starpība ir palielinājusies par $11-7=4$.

1.1.5. Atbilde: C.

Risinājums: Redzam, ka kvadrāts *ABCD* sastāv no 9 vienādiem kvadrātiem. No tiem četri kvadrāti ir iekrāsoti pilnībā; savukārt vēl četriem ir iekrāsota tieši puse. Viegli saprast, ka no šīm 4 pusēm varam izveidot 2 pilnus iekrāsotus kvadrātus. Tātad iekrāsoti kopā būs $4+2=6$ no 9 kvadrātiem, t.i., $\frac{6}{9}$ no kvadrāta *ABCD* laukuma.

1.1.6. Atbilde: D.
Risinājums:
$400\cdot 200=(4\cdot 100)\cdot(2\cdot 100)=(4\cdot 2)\cdot(100\cdot 100)=8\cdot 10\,000=80\,000$.

1.1.7. Atbilde: B.
Sniegsim divus veidus, kā atrisināt šo uzdevumu.
1. risinājums: Padomāsim, cik māju ir katrā ielas pusē! Ielas kreisajā pusē ir 11 mājas (no 1 līdz 21 ir 11 nepāra skaitļi), bet labajā pusē ir 18 mājas (no 2 līdz 36 ir 18 pāra skaitļi). Tātad pavisam ir $11+18=29$ mājas.
2. risinājums: Redzam, ka uz ielas ir visas mājas no 1. līdz 22. mājai ieskaitot, tātad kopā 22 mājas. Atliek saskaitīt, cik vēl māju ir ielas labajā pusē sākot no divdesmit ceturtās: 24., 26., 28., 30., 32., 34. un 36; tātad kopā vēl 7 mājas. Tātad pavisam uz ielas ir $22+7=29$ mājas.

1.1.8. Atbilde: E.

Risinājums: Šo uzdevumu var atrisināt, izmantojot izslēgšanas metodi – pakāpeniski pārbaudot visus dotos atbilžu variantus un „atmetot” nederīgos.
A) 1 neder, jo tad reizinājumam jābūt tādam pašam kā otram reizinātājam (jebkuru skaitli reizinot ar 1, iegūstam to pašu skaitli);
B) 2 neder, jo, pat ņemot vislielāko četrciparu skaitli, kas sākas ar 2, t.i., 2999, un sareizinot to ar 2, iegūsim $(2 \cdot 2999 = 5998)$ četrciparu skaitli, taču rezultātā jāiegūst piecciparu skaitlis. Iegūta pretruna.
C) Ja M = 3, tad A=1: $\overline{3ATE} \cdot 3 < 3999 \cdot 3 = 11997$. Tātad T jābūt 1 vai 0 – pretruna, jo visiem cipariem jābūt dažādiem un neviens no tiem nav 0.
D) Ja M = 5, tad A jābūt vai nu 5, vai 0. Neviena no šīm iespējām neder.
E) Atliek variants M = 8. Viegli redzēt, ka tas der, jo $8692 \cdot 8 = 69536$.
Var pierādīt, ka aizstāt burtus ar cipariem citā veidā nekā parādītajā piemērā nevar.

1.1.9. Atbilde: E.

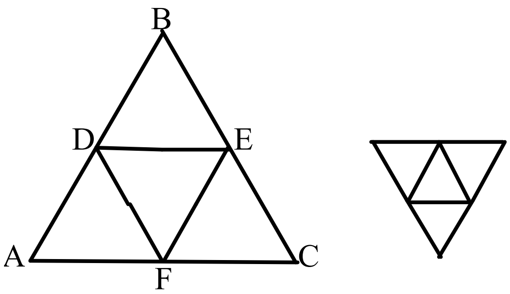
Risinājums: Ievērojam, ka četrstūri veidojas, tikai kombinējoties lielajam trijstūrim ar vidējo trijstūri, kā arī vidējam trijstūrim kopā ar mazo trijstūri (skat. A1.1.zīm.). Turklāt šie gadījumi ir līdzīgi, tātad iegūstamo četrstūru skaiti tajos būs vienādi. Tātad pietiek apskatīt vienu no gadījumiem.

Apskatām lielākā un vidējā trijstūra veidoto figūru.

Viena veida četrstūri veidojas, „piesedzot” kādu no virsotnēm A, B vai C. Tādējādi rodas 3 četrstūri $DBCF$, $ECAD$ un $FABE$.

„Piesedzot” vienlaicīgi divas no virsotnēm A, B un C, rodas 3 četrstūri $DECF$, $EFAD$ un $FDBE$. Citu iespēju, kā iegūt četrstūrus, nav. Tātad kopā ieguvām $3 + 3 = 6$ četrstūrus.

Tāpat arī vidējā un mazākā trijstūra veidotajā figūrā iegūstam 6 četrstūrus. Tātad kopā redzami $6 + 6 = 12$ četrstūri.



A1.1. zīm.

1.1.10. Atbilde: A.

1.1.11. Atbilde: C.

Risinājums: Ievērosim, ka no pirmdienas uz otrdienu temperatūra palielinājās par 1°, no otrdienas uz trešdienu – par 2°, **no trešdienas uz ceturtdienu – par 4°**, no ceturtdienas uz piektdienu temperatūra samazinājās par 3°, no piektdienas un sestdienu – par 2°, bet no sestdienas uz svētdienu – par 3°!

1.1.12. Atbilde: C.
Risinājums: pārbaudīsim katru atbildes variantu.
A) Nekas nav zināms, vai zēni arī rotaļājas ar lellēm, tāpēc nevar droši apgalvot, ka visi bērni rotaļājas ar lellēm.

B) Ja bērns nelasa grāmatas, tad viņš arī nerotaļājas ar lellēm. Tā kā visi zēni lasa grāmatas, bet meitenes spēlējas ar lellēm (tātad nevar būt, ka viņas nelasa grāmatas), tad nav neviena bērna, kas atbilst šim apgalvojumam.
C) Zēni lasa grāmatas (pēc dotā), un nevar būt, ka meitenes nelasa grāmatas (jo tad viņas nerotaļātos ar lellēm), tātad visi bērni lasa grāmatas – **patiess apgalvojums.**
D) No dotajiem apgalvojumiem neko nevar secināt par zēnu un meiteņu sadalījumu klasē.
E) Arī šīs apgalvojums nav patiess, jo, kā pamatots iepriekš, arī meitenes lasa grāmatas.

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Atbilde: B.
Risinājums: $33-3\cdot 35:5+2=33-105:5+2=33-21+2=12+2=14$.

1.2.2. Atbilde: B.
Risinājums: Viens no risinājuma veidiem ir šāds. Pieņemsim, ka visi 10 dzīvnieki ir kaķi. Tad tie kopā būtu apēduši 50 kotletes, paliek vēl 6 kotletes. Tā kā katrs suns apēda par 1 kotleti vairāk nekā katrs kaķis, tad šīs 6 „liekās" kotletes ir tikušas suņiem – katram pa vienai. Tāpēc suņu ir 6, bet kaķu ir $10-6=4$.

Protams, par pareizu uzskatāms arī jebkurš cits risinājums, kas noved līdz pareizai atbildei.

1.2.3. Atbilde: C.

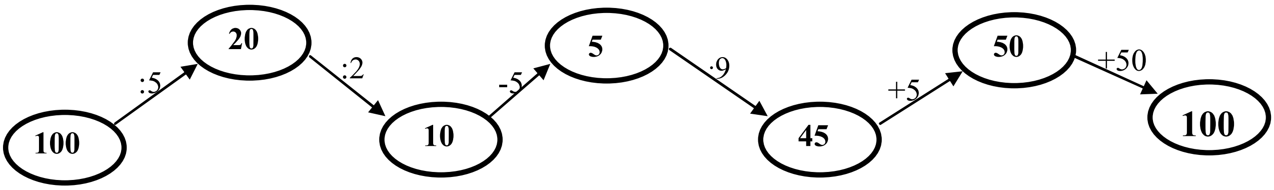
1.2.4. Atbilde: E.
Risinājums: B, C un D figūras vispār nav kuba izklājumi. Figūra A ir kuba izklājums, taču tas nav dotā metamā kauliņa izklājums – ievērojam, ka punktu summai uz šī metamā kauliņa pretējām skaldnēm jābūt 7, taču, piem., 6 + 3 = 9 nav 7. Tātad atliek tikai variants E. Pārbaudot secinām, ka tas patiešām ir tāda paša kauliņa izklājums, kāds redzams U1.5.zīm.

1.2.5. **1)** 156 dm = 15 m 60 cm < 3 m 14 cm · 5 = 15 m 70 cm

2) 432 min. – 3000 s = 432 min. – 50 min. = 382 min. = 6 h 22 min. > 4 h 2 min.

1.2.6. Atbilde: 12 minūtēs.
Risinājums: Tā kā vectētiņš no mājas līdz veikalam var nokļūt 30 min., bet mazdēliņš pārvietojas 10 reizes ātrāk, tad Jānītis no veikala līdz vectētiņa mājai nokļūs 3 min. No veikala līdz Jānīša mājai ir 3 reizes tālāk, tātad ceļā jāpavada 3 reizes ilgāks laiks, tāpēc no savas mājas līdz veikalam Jānītis brauc 9 min. Kopā visu ceļu no savas mājas līdz vectētiņa mājai Jānītis var veikt 3+9=12 min.

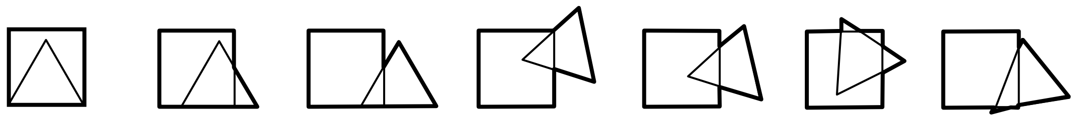
1.2.7. Lai atrisinātu šo uzdevumu atceramies, ka saskaitīšanai pretējā darbība ir atņemšana, atņemšanai attiecīgi – saskaitīšana, reizināšanai pretējā darbība ir dalīšana un dalīšanai – reizināšana. Varam sākt risināt uzdevumu „no beigām" un, lietojot pretējās darbības, virzīties no labās uz kreiso pusi. Neaizmirsīsim pārbaudīt rezultātu! Skat. A1.2.zīmējumu.



A1.2. zīm.

1.2.8. Mēs nevaram iegūt figūru ar mazāk kā četrām virsotnēm, jo kvadrātam jau ir 4 virsotnes un trijstūris nevar to pilnībā pārklāt. Nevaram iegūt arī figūru ar vairāk nekā 11 virsotnēm, jo iegūtā daudzstūra virsotnes var būt 4 kvadrāta virsotnes + 3 trijstūra virsotnes + ne vairāk kā 4 virsotnes, kas rodas, trijstūra malām krustojot kvadrāta malas. Tiešām, trijstūris var krustot ne vairāk kā 2 kvadrāta blakus malas (jo lielākais attālums starp trijstūra diviem punktiem vienāds ar trijstūra garākās malas garumu, šajā gadījumā 1 cm), katru ne vairāk kā 2 punktos.

Gadījumi, kad iegūstamo virsotņu skaits ir 4, 5, 6, 7, 8, 10 un 11, skat. A1.3.zīm. Protams, zīmējumi katram gadījumam var būt arī citi.



A1.3. zīm.

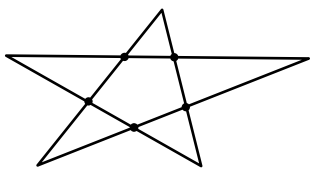
1.2.9. Atbilde: ir tieši viens godīgs rūķītis.

Risinājums: Uzdevumā teikts, ka vismaz vienam godīgam rūķītim jābūt. Savukārt, ja būtu 2 vai vairāk godīgi rūķīši, tad, izvēloties šos divus rūķīšus, starp tiem nebūtu neviena meļa – pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.

1.3. TREŠĀ KĀRTA

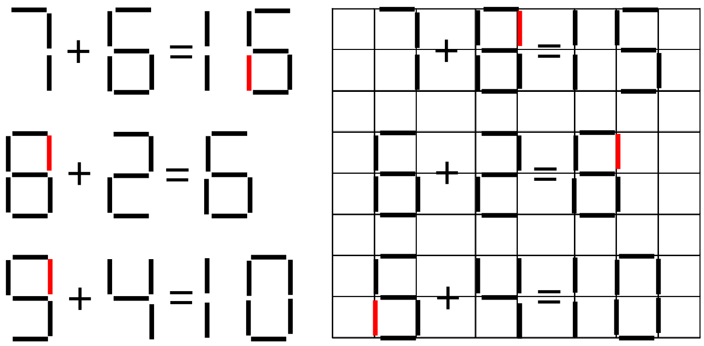
1.3.1. (15 h 15 min. + 45 min.) · 6 = 16 h · 6 = 96 h = **4 diennaktis.**

1.3.2. Skat., piem., A1.4.zīm.



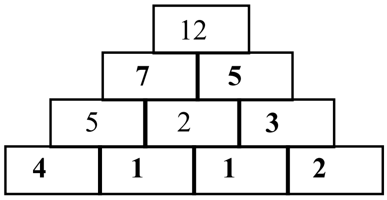
A1.4. zīm.

1.3.3. Skat., piem., A1.5.zīm.



A1.5. zīm.

1.3.4. Vienīgo pareizo atbildi skat. A1.6.zīm.



A1.6. zīm.

Ievērojam, ka vienīgais veids, kā izteikt 2 kā divu naturālu skaitļu summu, ir $1+1=2$. Tālāk pakāpeniski iegūstam pārējos iztrūkstošos skaitļus.

1.3.5. Atbilde*:* Ašajam ir zaļa cepure, Īsajam – sarkana cepure, Nīgrajam – pelēka cepure.
Risinājums: No 2), 3) un 4) nosacījuma seko, ka Īsajam ir sarkana cepure (viņam nav pelēka cepure, jo viņš neguļ ilgāk par citiem, un viņam nav zaļa cepure, jo viņam garšo piens).

No 1) nosacījuma, ka Ašajam nav pelēka cepure, un no secinājuma, ka sarkana cepure ir Īsajam, seko, ka Ašajam var būt tikai zaļa cepure.

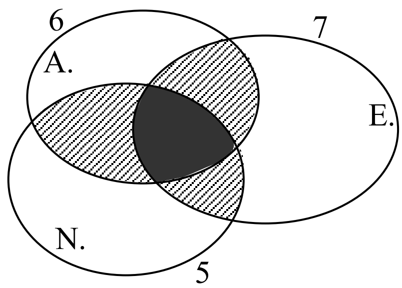
Tā kā sarkanā un zaļā cepures jau „aizņemtas”, atliek vienīgi iespēja, ka Nīgrajam ir pelēka cepure. Pārbaudot secinām, ka tas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

1.3.6. Atbilde*:* visas trīs grāmatas izlasīja 4 skolēni, bet nav neviena skolēna, kas izlasīja tieši divas grāmatas.
Risinājums: Iespējami vairāki risinājuma veidi.

1.risinājums. Pieņemsim, ka katrs bērns lasīja savu grāmatas eksemplāru (viens bērns izlasīja ne vairāk kā vienu katra nosaukuma grāmatu). Tad pavisam tika izlasītas 7 + 6 + 5 = 18 grāmatas.

Seši skolēni izlasīja tikai 1 grāmatu, tātad 18 – 6 = 12 grāmatas izlasīja tie bērni, kas izlasījuši vairāk nekā 1 grāmatu. Tādu skolēnu (kas izlasījuši vairāk nekā 1 grāmatu) ir 10 – 6 = 4. Katrs no šiem 4 skolēniem var būt izlasījis vai nu 2, vai 3 grāmatas. Ja kāds no viņiem būtu izlasījis tikai 2 grāmatas, tad viņi visi četri kopā būtu izlasījuši **mazāk** nekā $4\cdot 3=12$ grāmatas, bet viņi kopā ir izlasījuši **tieši** 12 grāmatas. Tas iespējams tādā gadījumā, ja 4 skolēni izlasījuši visas trīs grāmatas, un nav neviena skolēna, kas izlasīja tieši 2 grāmatas.

2.risinājums. Apskatīsim diagrammu (skat. A1.7.zīm.). Tie, kas izlasījuši „Alisi Brīnumzemē” (A.), attēloti elipses A. iekšpusē, elipses E. iekšpusē attēloti tie, kas izlasījuši grāmatu par Emīla nedarbiem (E.), bet elipses N. iekšpusē attēloti tie, kas lasīja par Nezinīti (N.). Iesvītrotajos apgabalos iekļauti tie, kas izlasījuši tieši 2 atbilstošās grāmatas, bet melnajā apgabalā iekļauti tie, kuri izlasījuši visas 3 grāmatas.



A1.7. zīm.

Katra elipse satur 1 balto apgabalu, 2 iesvītrotos apgabalus, katrs no kuriem pieder 2 elipsēm, un 1 melno apgabalu, kurš pieder visām trim elipsēm. Apzīmēsim visos baltajos apgabalos kopā iekļauto skolēnu skaitu ar v (tie ir tie, kas izlasījuši tikai 1 grāmatu), pie tam $\boldsymbol{v} = \mathbf{6}$; visos iesvītrotajos apgabalos kopā iekļauto skolēnu skaitu ar d (tie ir tie, kas izlasījuši tieši 2 grāmatas); melnajā apgabalā iekļauto skolēnu skaitu ar t (tie, kas izlasījuši visas 3 grāmatas).

Tad $6 + 7 + 5 = 18 = v + 2d + 3t$. Tā kā $v = 6$, tad

$$\mathbf{2d + 3t = 12}.$$

Grāmatu A. nav lasījuši $10 - 6 = 4$ skolēni; tie ir tie, kas izlasīja tikai E., tikai N. vai 2 grāmatas E. un N. (2 balti apgabali un viens iesvītrotais); grāmatu E. nelasīja $10 - 7 = 3$ skolēni, un grāmatu N. nelasīja $10 - 5 = 5$ skolēni. Ja saskaitīsim šos trīs skaitļus, tad divreiz tiks ieskaitīti visi baltie apgabali un vienreiz visi iesvītrotie apgabali (t.i., šajos apgabalos iekļautie skolēni). Tātad $4 + 3 + 5 = 12 = 2v + d$. Tā kā $v = 6$, tad $12 = 2\cdot 6 + d$ jeb $12 = 12 + d$ un $d = 0$. Tad no iepriekš izceltās vienādības iegūstam $2\cdot 0 + 3t = 12$ jeb $t = 12:3 = \mathbf{4}$.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. Sniegsim divus piemērus, kā var atrisināt šo uzdevumu:

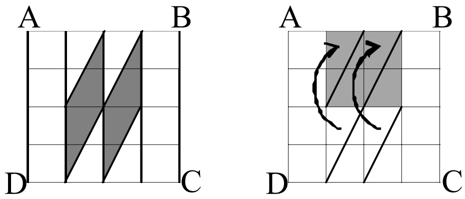
$$((1\cdot 2+3)\cdot 4:5\cdot 6-7-8):9=1$$

$$1+2+3+4-5+6+7-8-9=1$$

1.4.2. Piemēram, 912, 12121212 u.c.

Der visi trīs un vairāk ciparu skaitļi, kuru pēdējie cipari ir 12, bet pārējo ciparu summa ir 9. Tiešām, lai skaitlis dalītos ar 12, tam jādalās gan ar 4, gan ar 3 (jo $12 = 4\cdot 3$ un skaitļiem 4 un 3 nav citu kopīgu dalītāju kā 1). Savukārt skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3 ($9+1+2=12$ dalās ar 3), un skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4 (12 dalās ar 4).

1.4.3. Pārvietojot iekrāsotās daļas tā, kā parādīts A1.8.zīm., redzam, ka nokrāsotas ir 4 no 16 rūtiņām, tātad kvadrātā ABCD ir iekrāsota $\frac{4}{16}$ jeb $\frac{1}{4}$ daļa laukuma.



A1.8. zīm.

1.4.4. Atbilde: C

Risinājums: **C** un **E** ir pretrunīgi apgalvojumi, tāpēc viens no tiem ir patiess, bet otrs aplams. Piramīdu ir par 6 vairāk nekā kubiņu, tātad $a-6=b$ jeb $a=b+6$; tātad **E** ir patiess un <u>C ir aplams.</u> Bumbiņu ir 2 reizes mazāk nekā piramīdu, tātad $m=a:2$ jeb $a=2\cdot m$; tātad **B** ir patiess. Tā kā $a=2\cdot m$ un $a=b+6$, tad $2m=b+6$ un **A** ir patiess. Saskaitot vienādības $a=2m$ un $a=b+6$, iegūstam $2a=b+2m+6$, tāpēc **D** arī ir patiess.

1.4.5. 1) 156 mm **<** 3 cm 14 mm · 5 **2)** 7 h 2 min. > 432 min. – 3000 s

1.4.6. Atbilde: trešdien, ceturtdien, piektdien, sestdien.

1.4.7. Atbilde: C, E.

Risinājums: no pirmdienas uz otrdienu temperatūra paaugstinājās par 1 ^{o}C.
no otrdienas uz trešdienu temperatūra paaugstinājās par 2 ^{o}C.
no trešdienas uz ceturtdienu temperatūra paaugstinājās par **4 ^{o}C**.
no ceturtdienas uz piektdienu temperatūra samazinājās par 3 ^{o}C.
no piektdienas uz sestdienu temperatūra samazinājās par 2 ^{o}C.
no sestdienas uz svētdienu temperatūra samazinājās par **4 ^{o}C**.

1.4.8. Atbilde: 16 cm.

Risinājums: Kvadrāta (un tātad arī trijstūru) vienas malas garums ir $8\,cm:4=2\,cm$. Attēlotās figūras robeža sastāv no 8 šādiem nogriežņiem, tātad perimetrs ir 8 · 2 *cm* = 16 *cm*.

1.4.9. Atbilde: Par 23 minūtēm.

Risinājums: 1) 40 · 1 min. 32 s = 40 · 92 s = 3680 s (pēc tik ilga laika biļeti saņems četrdesmitais cilvēks rindā)

2) 25 · 1 min. 32 s = 25· 92 s = 2300 s (pēc tik ilga laika biļeti saņems divdesmit piektais cilvēks rindā)

3) 3680 s – 2300 s = 1380 s = 23 min. (par tik minūtēm ātrāk nekā četrdesmitais cilvēks biļeti saņems divdesmit piektais cilvēks).

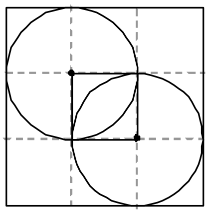
1.4.10. Vienu šķirā cipars 9 sastopams 10 reizes – katrā desmitā viens „9" (skaitļos **9**, 1**9**, 2**9**, 3**9**, 4**9**, 5**9**, 6**9**, 7**9**, 8**9**, 9**9**).

Desmitu šķirā cipars 9 arī sastopams 10 reizes – skaitļos **9**0, **9**1, **9**2, **9**3, **9**4, **9**5, **9**6, **9**7, **9**8, **9**9.

Tātad pavisam skaitļos no 0 līdz 100 cipars „9" sastopams 10 + 10 = **20 reizes.**

1.4.11. Kvadrāta malas garums ir 36 cm : 4 = 9 cm.

Sadalot kvadrātu ar pārtrauktām līnijām tā, kā parādīts A1.9.zīm., iegūstam 9 vienādus kvadrātiņus; mazā kvadrātiņa vienas malas garums ir vienāds ar riņķa rādiusu un tas ir trešā daļa no lielā kvadrāta malas. Tātad riņķa rādiuss ir 9 cm:3=3 cm, bet diametrs ir 2·3 cm = **6 cm**.



A1.9. zīm.

1.4.12. a) der tikai skaitlis $\boldsymbol{x = 0}$;
b) x var būt **jebkurš skaitlis**, jo, jebkuru skaitli dalot ar 1 vai reizinot ar 1, iegūst to pašu skaitli.

1.4.13. a) **Atbilde:** D.
Risinājums: Ja apskatām tikai pozitīvus skaitļus, tad, lai $3 \cdot x$ būtu vienāds ar $5 \cdot y$, x jābūt lielākam nekā y (lai reizinājumi būtu vienādi, mazāks skaitlis jāreizina ar lielāku). Bet arī gadījumā, ja $x = y = 0$, dotā vienādība ir patiesa. Tāpēc $x \geq y$, bet, tā kā starp dotajiem atbilžu variantiem šāda varianta nav, jāatzīmē atbilde D.

b) **Atbilde:** C.
Risinājums: No $17x - 8 = 17y - 8$ seko $17x = 17y$ un tātad $x = y$.

c) **Atbilde:** D.
Risinājums: Var būt gan $x = y$, piem., $2 + 2 = 4$. Var būt arī $x < y$, piem., $1 + 3 = 4$; var būt arī $x > y$, piem., $3 + 1 = 4$.

1.4.14. Mērījumus Valdis izdarīja plkst. 12:00, 13:00, 14:00, 15:00, 16:00 un 17:00 (no plkst. 12:00 līdz plkst. 17:00 paiet 5 stundas), tātad pavisam viņš izdarīja **6 mērījumus**.

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. $(2007 \cdot 9999 + 27) : 9 =$

$$= \frac{2007 \cdot 9999 + 27}{9} =$$

$$= \frac{2007 \cdot 9999}{9} + \frac{27}{9} =$$

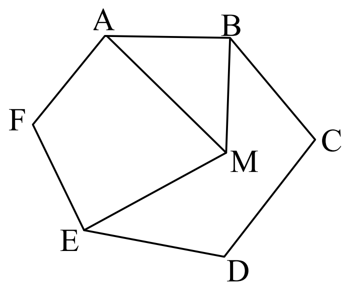
$$= 2007 \cdot 1111 + 3 =$$

$$= 2229777 + 3 =$$

$$= 2229780.$$

Iespējami arī citi risinājumi.

2.1.2. Skat., piem., A2.1.zīm. trijstūris *ABM*, četrstūris *AMEF*, piecstūris *BCDEM* un sešstūris *ABCDEF*.



A2.1. zīm.

Iespējami arī citi pareizi risinājumi.

2.1.3. Nē, tā nevar gadīties.

Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $1+2+...+16=136$. Saskaitot visu rindiņu summas, arī iegūsim 136 – katrs tabulas skaitlis šajās summās ir ieskaitīts tieši vienu reizi. Tāpat arī visu kolonnu summu summa ir 136. Tātad apskatāmo 8 skaitļu (rindiņu un kolonnu summu) summa ir 136 + 136 = 272. Pieņemsim, ka tie ir pēc kārtas sekojoši 8 naturāli skaitļi. Mazāko no tiem apzīmēsim ar *n*, tad lielākais no tiem ir *n* + 7 un visu astoņu skaitļu summa:

$$(n)+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)=8n+28\,.$$

Iepriekš ieguvām, ka šo skaitļu summa ir 272, tātad $8n+28=272$, bet tad iegūstam $8n=272-28$, tātad $n=244:8=30{,}5$, t.i., *n* nav naturāls skaitlis. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir aplams un uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

2.1.4. Šāds jautājums ir, piemēram: „Vai Pūciņš ir melis?”.

Tabulā apkoposim, kādas atbildes uz šo jautājumu var sniegt katrs no rūķiem.

	Samtiņš	Pūciņš
ja Samtiņš ir melis	*melo* „jā”	*saka patiesību* „nē”
ja Pūciņš ir melis	*saka patiesību* „jā”	*melo* „nē”

Izmantojot tabulu, redzam, ka, tad, ja šo jautājumu uzdod Pūciņam, viņš jebkurā gadījumā saka „nē”, bet, ja mēs jautājam Samtiņam, tad viņa atbildes vienmēr ir „jā”. Tātad, ja uz savu jautājumu saņemam atbildi „nē”, tad mēs sarunājamies ar Pūciņu, bet, ja saņemam atbildi „jā”, tad sarunu biedrs ir Samtiņš, bet Pūciņš ir otrs rūķis.

Ievērojiet! Ar šī jautājuma palīdzību mēs varam tikai noskaidrot, kurš no abiem rūķiem ir Pūciņš, bet nevaram pateikt, vai viņš ir melis vai nav!

2.1.5. Atbilde: 21.

Kamēr skaitlis „nonāca” līdz B, tas tika tieši sešas reizes nosaukts kaimiņiem pa kreisi (jo skaitļa „kustība” var notikt **tikai** virzienā pa kreisi vai uz priekšu), tātad tam 6 reizes tika pieskaitīts „2”, un tieši sešas reizes saukts kaimiņiem uz priekšu, tātad 6 reizes pieskaitīts „1”. Tātad visi skaitļi, ko pačukstēja skolēnam B, bija $3+6\cdot 2+6\cdot 1=21$.

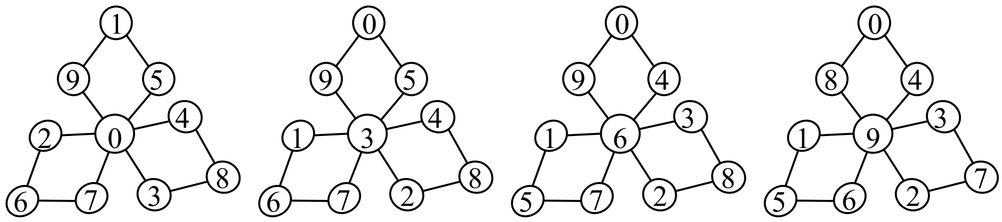
2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Apzīmēsim viena četrstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summu ar *S*; tad visu trīs četrstūru virsotnēs ierakstīto skaitļu kopējā summa ir 3*S*. Šajā summā vienu reizi ieskaitīti visos aplīšos ierakstītie skaitļi un vēl divas reizes ieskaitīts vidējā aplītī ierakstītais skaitlis (apzīmēsim to ar a); pavisam a tiek ieskaitīts trīs reizes, jo tas pieder katram apskatītajam četrstūrim. Tātad

$$3S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 2a = 45 + 2a .$$

Apskatām izveidoto vienādību $3S = 45 + 2a$.

Skaidrs, ka vienādības kreisajā pusē skaitlis $3S$ dalās ar 3. Tātad, lai vienādība būtu pareiza, arī labajā pusē jābūt skaitlim, kas dalās ar 3. Labajā pusē ir divi saskaitāmie, no kuriem viens (45) jau dalās ar 3, tātad arī otrajam ($2a$) jādalās ar 3. Tā kā 2 nesaīsinās ar 3, tad noteikti ar 3 dalās a. Tā kā a ir viencipara skaitlis, tad a var būt 0, 3, 6 vai 9. Tad S būs attiecīgi 15, 17, 19, 21. Katram no šiem gadījumiem eksistē vairāki atrisinājumi. Piemēru katram gadījumam skat. A2.2.zīm.



A2.2. zīm.

2.2.2. Pieņemsim, ka 1 kg ābolu maksā x santīmus. Tad, pērkot 2 kg ābolu pie 1.pārdevēja, būs jāsamaksā $2x - 0{,}4 \cdot 2x = 1{,}2x$ santīmu. Savukārt 2. pārdevējam par 2 kg ābolu būs jāsamaksā $x + 20$ santīmus.

Ja $1{,}2x > x + 20$, tad izdevīgāk iepirkties pie 2.pārdevēja; savukārt, ja $1{,}2x < x + 20$ - pie 1.pārdevēja; ja $1{,}2x = x + 20$, tad pie abiem pārdevējiem 2 kg ābolu pirkums maksās vienādi. Atrisināsim šīs nevienādības:

$$1{,}2x > x + 20$$

$$1{,}2x - x > 20$$

$$0{,}2x > 20$$

$$x > 100$$

Tātad 2kg ābolu pirkt pie 2.pārdevēja ir izdevīgāk, ja 1 kg ābolu maksā vairāk nekā 100 santīmu jeb 1 latu; pie 1.pārdevēja 2 kg ābolu pirkt ir izdevīgāk, ja 1 kg ābolu maksā mazāk nekā 1 Ls. Bet, ja 1 kg ābolu maksā 1 latu, tad 2 kg ābolu pirkums pie abiem pārdevējiem izmaksās vienādi, t.i., Ls 1,20 .

2.2.3. Nē, ne noteikti. Zinām: lai no trīs nogriežņiem varētu izveidot trijstūri, garākajam nogrieznim jābūt īsākam nekā abu pārējo nogriežņu garumu summai. Taču varam izvēlēties pirmos divus nogriežņus 1 cm un 2 cm garus, savukārt katru nākošo nogriezni tā, lai tas būtu par 1 centimetru garāks nekā abu iepriekšējo skaitļu summa. Tad nogriežņu garumi ir 1 cm, 2 cm, 4 cm, 7 cm, 12 cm, 20 cm, 33 cm, un starp tiem nevar atrast trīs tādus, lai garākā nogriežņa garums būtu mazāks nekā abu pārējo nogriežņu garumu summa; tātad esam atraduši tādus nogriežņus, no kuriem nevar izveidot trijstūri.

2.2.4. Uzdevuma prasības apmierina, piemēram, 100, 2 un 98 skaitļi '1':

$$100 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{98 \text{ reizes}} = 200 = 100 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{98 \text{ reizes}}.$$

Ir iespējami arī citi atrisinājumi.

2.2.5. Atbilde: Andrim ir sarkana cepure, Dāvim – balta cepure, Edžum – balta cepure,

Risinājums: Apskatīsim gadījumus, kādas cepures varēja redzēt Andris, kad viņam atsēja acis:

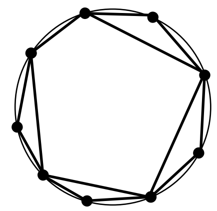
1) 2 sarkanas cepures;
2) 1 sarkanu un 1 baltu cepuri;
3) 2 baltas cepures.

1. un 2. gadījumā Andris nevar viennozīmīgi pateikt, kādā krāsā ir viņa cepure, jo starp trim tām cepurēm, ko Andris neredz (1 cepure ir Andrim galvā un 2 noliktas malā), vēl ir vismaz 1 sarkana un vismaz 1 balta cepure; tātad jebkura no tām varētu būt Andrim galvā. Bet 3. gadījumā Andris redz, ka abas baltās cepures ir draugiem galvās, tāpēc viņam pašam galvā var būt tikai sarkana cepure (tāpat kā arī abas malā noliktās). Dāvis, dzirdot, ka Andris ir pārliecināts par savas cepures krāsu, var secināt, ka tas ir iespējams tikai tad, ja viņam un Edžum abiem ir baltas cepures. Tieši tāpat arī Edžus var izsecināt, ka viņam galvā ir balta cepure.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Piemēram, $8 \cdot ((7 + 6) \cdot 5 \cdot 4 + 3 - 2 - 1 - 9) = 2008$.

2.3.2. Skat., piem., A2.3.zīm.



A2.3. zīm.

2.3.3. Pieņemsim, ka visos 17 maisiņos ir pa 4 āboliem; tad pavisam kopā būtu $17 \cdot 4 = 68$ āboli. Tātad vēl $113 - 68 = 45$ āboli jāizvieto pa dažiem maisiņiem vienādā skaitā. Tā kā $45 = 1 \cdot 45 = 3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$, tad tālāk jāaplūko 6 dažādas iespējas:

1) 1 maisiņā pieliekot pie tur jau esošajiem 4 āboliem visus atlikušos 45 ābolus, iegūstam 16 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 1 maisiņu ar 49 āboliem ($x = 49$);

2) 3 maisiņos pieliekot klāt vēl pa 15 āboliem, iegūstam 14 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 3 maisiņus ar 19 āboliem katrā ($x = 19$);

3) 15 maisiņos pieliekot klāt vēl pa 3 āboliem, iegūstam 2 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 15 maisiņus ar 7 āboliem katrā ($x = 7$);

4) 5 maisiņos pieliekot klāt vēl pa 9 āboliem, iegūstam 12 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 5 maisiņus ar 13 āboliem katrā ($x = 13$);

5) 9 maisiņos pieliekot klāt vēl pa 5 āboliem, iegūstam 8 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 9 maisiņus ar 9 āboliem katrā ($x = 9$).

Pārliecināsimies, ka nav citu iespējamo x vērtību!

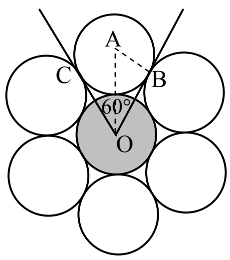
Nevar 45 maisiņos pielikt pa 1 ābolam katrā, jo kopējais maisiņu skaits ir 17<45. Citos veidos skaitli 45 nevar izteikt kā naturālu skaitļu reizinājumu, tātad visas iespējamās x vērtības ir apskatītas. Tās ir 49; 19; 7; 13; 9.

2.3.4. Prasītā veidā var novietot ne vairāk kā 6 apļus (skat. A2.4.zīm.). Ievērosim, ka viens zaļais aplis „aizņem" 60° lielu sektoru (šajā sektorā nevar ietilpt neviens cits zaļais aplis, kas arī pieskaras sarkanajam aplim). Tā kā pilns aplis satur 360°, tad to var sadalīt 360° : 60° = 6 šādos sektoros, katrā no kuriem var ievietot ne vairāk kā vienu zaļo apli.

Piezīme. Pilnam atrisinājumam nepieciešams arī pierādīt, ka apskatāmā sektora lielums ir 60°.

Pierādījumā izmantosim pieskares īpašības un sakarības taisnleņķa trijstūrī OAB (O – sarkanā apļa centrs, A – zaļā apļa centrs, B un C – punkti, kuros pieskaras no O vilktās pieskares zaļajam aplim):

1) Tā kā visi izvietotie aplīši ir vienādi, tad vienādi ir arī to rādiusi r;
2) Hipotenūza AO ir divas reizes garāka nekā katete AB ($AO = 2r$, $AB = r$);
3) Zinām, ka taisnleņķa trijstūrī katete, kura ir divas reizes īsāka nekā hipotenūza, atrodas pret $30°$ lielu leņķi, tātad $\angle BOA = 30°$;
4) Ievērojam, ka stars OA ir $\angle COB$ bisektrise, tātad $\angle BOA = \angle AOC$ un $\angle COB = 30° + 30° = 60°$ k.b.j.



A2.4. zīm.

2.3.5. Ievērosim, ka uzraksti uz 2. un 3. istabu durvīm abi reizē ir vai nu patiesi, vai aplami (tie abi izsaka vienu un to pašu apgalvojumu).

Taču tie nevar būt aplami: ja uzraksts uz 3. istabas durvīm ir aplams, tad īstenībā 3. istabā tīģera nav, tāpēc šajā istabā jābūt princesei. Bet te princese nemaz nevar atrasties, jo pēc uzdevuma nosacījumiem uzraksts uz durvīm istabai, kurā atrodas princese, ir patiess. Tā kā katrā istabā jābūt vai nu tīģerim, vai princesei, esam ieguvuši pretrunu (jo 3. istabā nevar atrasties ne tīģeris, ne princese), tāpēc uzraksts uz 3. istabas durvīm (un līdz ar to arī uz 2. istabas durvīm) nevar būt aplams, tātad tam jābūt patiesam.

Tā kā vismaz viens uzraksts ir aplams, tad uzraksts uz 1. istabas durvīm ir aplams, tātad 2. istabā atrodas princese, bet 1. un 3. istabā sēž pa tīģerim.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Uzdevumam ir divi atrisinājumi.

$$\begin{array}{r} 271\\ 322\\ \hline 542\\ 542\\ 813\\ \hline 87262 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 281\\ 332\\ \hline 562\\ 843\\ 843\\ \hline 93292 \end{array}$$

Apzīmēsim dažus meklējamos ciparus kā parādīts A2.5.zīmējumā.

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & A & B \\ & & 3 & C & D \\ \hline & & 5 & * & * \\ & * & 4 & * & \\ * & * & 3 & & \\ \hline * & * & * & * & * \end{array}$$

A2.5. zīm.

1) Tā kā, trīsciparu skaitli $\overline{2AB}$ reizinot ar viencipara skaitli D, jāiegūst trīsciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir 5, tad **D = 2**. Tiešām, ja D = 1, tad $\overline{2AB}\cdot 1 \le 299\cdot 1 < 300$, savukārt, ja D≥3, tad $\overline{2AB}\cdot 3 \ge 200\cdot 3 = 600$.
2) Tā kā reizinājums $3\cdot\overline{2AB}$ beidzas ar ciparu 3, tad **B = 1** (skaitli 3 reizinot ar viencipara skaitli, reizinājuma pēdējais cipars ir 3 tikai gadījumā 3·1=3).
3) Lai reizinājums $\overline{2A1}\cdot 2$ būtu vismaz 500, jābūt **A ≥ 5**; ja A ≤ 4, tad $\overline{2A1}\cdot 2 \le 241\cdot 2 < 500$.
4) Lai reizinājums $C\cdot\overline{2A1}$ būtu trīsciparu skaitlis, jābūt **C<4**; pretējā gadījumā, ja C ≥ 4, tad $C\cdot\overline{2A1} \ge 4\cdot 251 > 1000$.

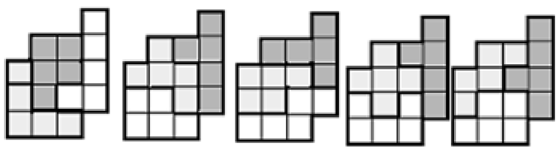
Tā kā B = 1, tad reizinājums C·B ir viencipara skaitlis un šķiras pārnesumi nerodas, tāpēc reizinājuma C·A pēdējam ciparam jābūt 4. Ievērojot, ka A ≥ 5 un C < 4, iegūstam divas iespējas: 2·7=14 vai 3·8=24. Pārbaudot redzam, ka abas iespējas apmierina uzdevuma nosacījumus.
Tā kā tika apskatītas visas iespējas, citu atrisinājumu nav.

2.4.2. Ar virknēm HCIJFKF BCDCEFG ir aizšifrēti vārdi **PAREIZI MALACIS**.

Ievērojam, ka tikai virknē DCHGC un tikai vārdā **LAPSA** sastopami 2 vienādi burti; tātad vārdam **LAPSA** atbilst virkne DCHGC, no kurienes iegūstam, ka burtam **A** atbilst C; **L** – D; **P** – H; **S** – G. Tālāk jau viegli iegūt, ka vārdam **MAIZE** atbilst virkne BCFKJ un vārdam **CIRKS** atbilst virkne EFIAG. Iegūstam šādu šifra tabulu:

burts	**A**	**C**	**E**	**I**	**K**	**L**	**M**	**P**	**R**	**S**	**Z**
šifrs	C	E	J	F	A	D	B	H	I	G	K

2.4.3. Skat., piem., A2.6.zīm.



A2.6. zīm.

2.4.4. Atbilde: klasē nav neviena teicamnieka; 2 skolēni apmeklē gan peldēšanas, gan karatē treniņus.

Risinājums. Matemātikā sekmīgi ir $25-6=19$ skolēni. Tātad arī „sportistu" skaits šajā klasē nav lielāks par 19.

Pieņemsim, ka katram sporta „pulciņa" dalībniekam ir izsniegta dalībnieka kartīte. Tad pavisam šīs klases skolēniem ir izsniegtas 17 + 13 + 8 = 38 kartītes, pie tam vienam skolēnam var būt ne vairāk kā 2 kartītes. Tātad

„sportistu” skaits šajā klasē ir **vismaz** 38 : 2 = 19 (citādi kādam skolēnam būtu vismaz 3 kartītes – pretruna).

Tā kā „sportistu” skaits vienlaicīgi ir vismaz 19 un nepārsniedz 19, tad ar sportu nodarbojas tieši 19 skolēni – visi sekmīgie skolēni. Līdz ar to klasē nav neviena skolēna ar teicamām atzīmēm matemātikā. Pie tam katrs skolēns nodarbojas **tieši** ar diviem sporta veidiem.

Tā kā 17 no 19 skolēniem nodarbojas ar riteņbraukšanu, tad pārējie 19 – 17 = 2 skolēni nodarbojas ar diviem citiem sporta veidiem, t.i., ar peldēšanu un karatē.

Tāpat nav grūti noskaidrot, ka 8 – 2 = 6 skolēni nodarbojas ar karatē un riteņbraukšanu, bet 11 skolēni – ar riteņbraukšanu un peldēšanu.

2.4.5. Pēteris var uzvarēt.

Apzīmēsim vienu no kaudzītēm ar A un otru – ar B.

Uz katru Jāņa gājienu Pēteris atbild ar simetrisku gājienu, t.i., ja Jānis no kaudzītes A paņem 1 konfekti un no kaudzītes B paņem 3 konfektes, tad Pēteris no kaudzītes A paņem 3 konfektes un no kaudzītes B – 1 konfekti. Tādējādi pēc viena Jāņa un viena Pētera gājiena no abām kaudzītēm ir paņemtas pa 4 konfektēm. Tā kā sākumā abās kaudzītēs bija vienāds skaits konfekšu, tad pēc Pētera gājiena abās kaudzītēs atkal būs vienāds skaits konfekšu. Atkārtojot šādu gājienu sēriju vēl 2 reizes, no abām kaudzītēm būs paņemts pa 8 konfektēm, tātad katrā kaudzītē būs atlicis pa 2 konfektēm un tātad nākamais spēlētājs, t.i., Jānis, vairs nevarēs izdarīt gājienu, tāpēc viņš zaudēs un līdz ar to Pēteris uzvarēs.

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. **a)** Piem., 56 – (24 : 2) + 6 = 50

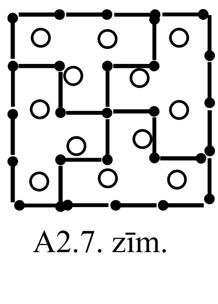
b) Piem., (56 – 24) : 2 + 6 = 22

c) Piem., (56 – 24) : (2 + 6) = 4

2.5.2. Pieņemsim, ka Ruta samaksāja x divdesmitsantīmu monētas; tātad viena grāmata maksā $20 \cdot x$ santīmus. Tā kā Baiba maksā ar desmitsantīmu monētām, tad viņa izdeva 2 reizes vairāk monētu nekā Ruta, t.i., $2x$ monētas. Savukārt Ansis izdeva 20:5=4 reizes vairāk monētu nekā Ruta jeb $4x$ monētas un Jānis izdeva 20:2=10 reizes vairāk monētu nekā Ruta jeb $10x$ monētas.

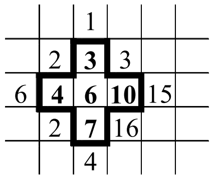
Tāpēc $x + 2x + 4x + 10x = 51$ jeb $17x = 51$ un $x = 3$. Tātad viena grāmata maksā $20 \cdot 3 = 60$ santīmus.

2.5.3. Skat., piem., A2.7.zīm.

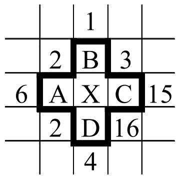


A2.7. zīm.

2.5.4. **Atbilde:** skat. A2.8.zīm.



A2.8. zīm.



A2.9. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim nezināmos skaitļus ar burtiem, kā parādīts A2.9.zīm. Tad ir spēkā šādas vienādības:

$$X = (A + B + C + D) : 4 \text{ jeb } \quad 4X = A + B + C + D$$

$$4A = 2 + 6 + 2 + X = 10 + X$$

$$4B = 2 + 1 + 3 + X = 6 + X$$

$$4C = 3 + 15 + 16 + X = 34 + X$$

$$4D = 16 + 4 + 2 + X = 22 + X$$

Saskaitot pēdējās četras vienādības, iegūstam

$4\,(A + B + C + D) = 72 + 4X$ jeb $4 \cdot 4X - 4X = 72$, t.i., $12X = 72$ un $X = 6$.

Pēc tam viegli iegūt, ka $A=(10+6):4=4$; $B=(6+6):4=3$; $C=(34+6):4=10$; $D=(22+6):4=7$.

2.5.5. Ja pasākumā ir vismaz viens cilvēks, kas pazīst vismaz 6 citus, tad tas ir meklētais cilvēks.
Ja tāda cilvēka nav, tad katrs pasākuma dalībnieks pazīst ne vairāk kā 5 citus cilvēkus, tātad nepazīst vismaz 13 citus cilvēkus. Izvēlēsimies divus cilvēkus A un B, kas viens otru nepazīst. Turklāt katrs no viņiem nepazīst vēl vismaz 12 citus cilvēkus. Tā kā $2 + 12 + 12 = 26 > 19$, tad ir vismaz $26 - 19 = 7$ cilvēki, ko nepazīst ne A, ne B. Tā kā katrs pazīst ne vairāk kā 5 citus cilvēkus, tad starp šiem 7 cilvēkiem (kas nav pazīstami ne ar A, ne ar B) var atrast tādus divus cilvēkus C un D, kas nav pazīstami savā starpā. Tad A, B, C un D ir meklētais „četrinieks”.

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

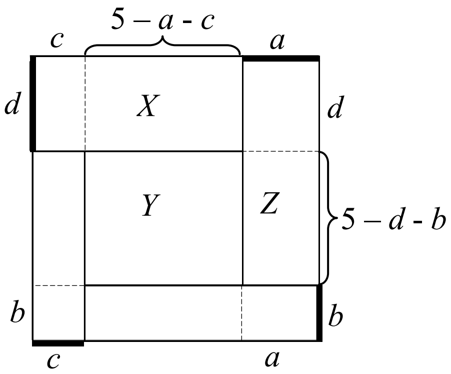
3.1.1. Skat., piem., A3.1.zīm. Viegli pārbaudīt, ka uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

		-2		
	-2	1	2	
-2	1	2	-2	1
	2	-2	1	
		1		

A3.1. zīm.

Komentārs. Ievērosim, ka arī visu ierakstīto skaitļu summa ir 1. Interesanti būtu noskaidrot jautājumu: kādiem veseliem skaitļiem *a* un *b* iespējams panākt, ka katrā no 3 rūtiņām sastāvošā taisnstūrī ierakstīto skaitļu summa ir *a*, bet visu ierakstīto skaitļu summa ir *b*?

3.1.2. Pagarinām taisnstūru malas līdz krustpunktiem ar kvadrāta malām, tādējādi viss kvadrāts sadalās taisnstūros. Katram taisnstūrim pretējās malas ir vienādas. Apzīmējot tumši iekrāsoto nogriežņu garumus metros ar *a*; *b*; *c*; *d*, iegūstam ainu, kas parādīta A3.2.zīm.



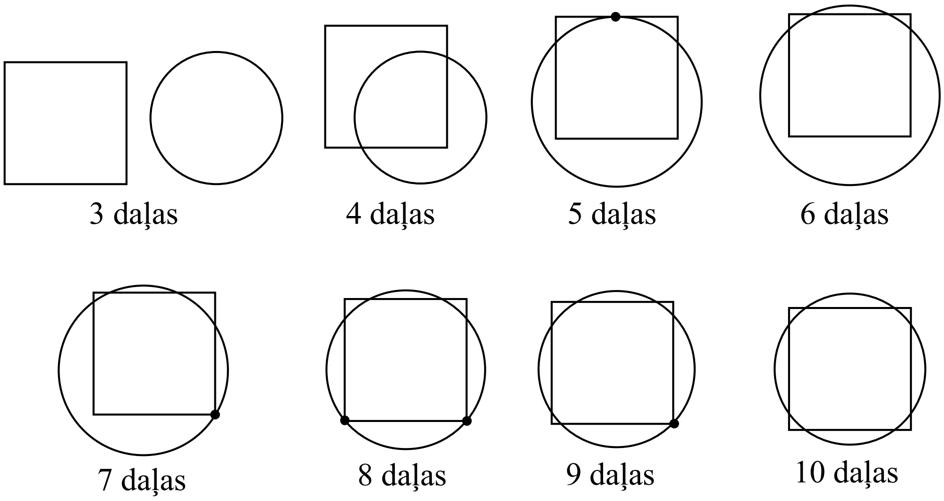
A3.2. zīm.

Mazā taisnstūra *X* apakšējā horizontālā mala vienāda ar tā augšējo horizontālo malu, tāpēc tās garums ir $5-a-c$. Līdzīgi iegūstam, ka taisnstūra *Z* kreisās malas garums ir $5-d-b$. Tātad taisnstūrim *Y* vienas horizontālās malas garums ir $5-a-c$, bet vienas vertikālās malas garums ir $5-d-b$. Tā kā taisnstūrī pretējās malas ir pa pāriem vienādas, tad *Y* visu malu garumu summa ir $S=(5-a-c)+(5-d-b)+(5-a-c)+(5-d-b)=20-2(a+b+c+d)$. Saskaņā ar uzdevumā doto, tumšāk iezīmēto nogriežņu summa ir 6, t.i., $a+b+c+d=6$. Tāpēc $S=20-2\cdot 6=20-12=8$.

Tāda situācija patiešām ir iespējama, ja, piemēram, $a=b=c=d=1\frac{1}{2}$. (Tad vidējais taisnstūris sanāk kvadrāts.) Protams, ir iespējami arī daudzi citi gadījumi.

3.1.3. Atbilde: jebkurā skaitā daļu no 3 līdz 10 ieskaitot.

Risinājums: Vispirms parādīsim, ka minētās vērtības ir iespējamas. To var redzēt A3.3.zīm.



A3.3. zīm.

Tagad pierādīsim, ka citāds daļu skaits nevar būt.

Skaidrs, ka nevar būt viena daļa, jo gan riņķa līnija, gan kvadrāta kontūrs katrs atsevišķi sadala plakni divās daļās. Nevar būt arī tikai divas daļas: riņķa līnija sadala plakni 2 daļās, un kvadrāta kontūra uzzīmēšana neradītu jaunas daļas tikai tad, ja tas sakristu ar riņķa līniju, bet tā nevar būt.

Padomāsim, vai varētu rasties vairāk par 10 daļām. Šķirosim visas iespējas.

A. Ja riņķim un kvadrātam nav kopīgu iekšēju punktu, tad acīmredzot ir tikai 3 daļas.

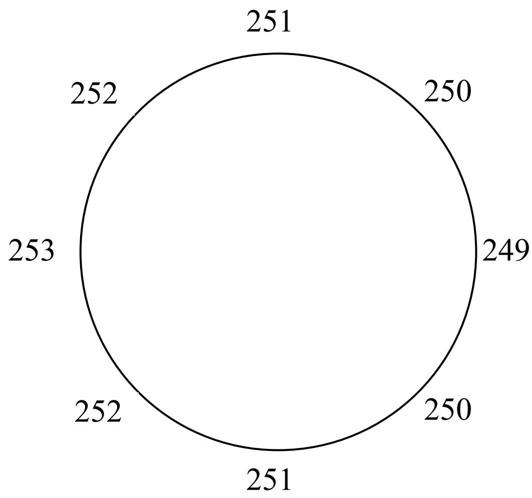
B. Ja riņķim un kvadrātam ir kopēji iekšēji punkti, tad tie visi veido vienu plaknes daļu. Otru daļu veido tie plaknes punkti, kas ir gan ārpus kvadrāta, gan ārpus riņķa. Atliek noskaidrot, cik, vislielākais, var būt riņķa daļu, kas ir ārpus kvadrāta, un kvadrāta daļu, kas ir ārpus riņķa.

Katra kvadrāta mala veido augstākais vienu hordu, tāpēc izveidojas ne vairāk par 4 hordām. Katra horda atšķeļ no riņķa augstākais vienu daļu, un šīm daļām nav kopīgu iekšēju punktu. Tāpēc ir ne vairāk par 4 riņķa daļām, kas ir ārpus kvadrāta. Pie katras kvadrāta malas var veidoties ne vairāk kā divas kvadrāta daļas, kas atrodas ārpus riņķa (pretējā gadījumā kvadrāta malai jābūt vairāk nekā 2 kopīgiem punktiem ar riņķa līniju, bet tas nevar būt). Tātad kopā ir ne vairāk kā $4 \cdot 2 = 8$ šādas veidošanās. Tā kā katra kvadrāta daļa, kas ir ārpus riņķa, veidojas pie divām kvadrāta malām, tad šādu daļu nav vairāk kā $\frac{8}{2} = 4$.

Tātad kopējais daļu skaits nepārsniedz $1 + 1 + 4 + 4 = 10$, k.b.j.

3.1.4. Atbilde: a) jā, **b)** nē.

Risinājums. a) Skat., piem., A3.4.zīm. Viegli pārbaudīt, ka katru divu pretējo skaitļu summa ir 502, tāpēc visu skaitļu summa ir $502 \cdot 4 = 2008$.



A3.4.zīm.

b) Ja divi veseli skaitļi viens no otra atšķiras par 1, tad viens no tiem ir pāra, bet otrs – nepāra. Tātad četros grozos būtu jābūt pāra skaitam, bet četros – nepāra skaitam ābolu. Bet četru pāra un četru nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, kas nevar būt 2007.

3.1.5. Ievērosim, ka $VAUVAURRR = VAUVAU000 + RRR$ (pirmā saskaitāmā 3 pēdējie cipari ir nulles) $= VAUVAU \cdot 1000 + RRR$. Summa $VAUVAURRR$ dalās ar 56, tātad arī ar 8 (jo $56 = 8 \cdot 7$). Arī saskaitāmais $VAUVAU \cdot 1000$ dalās ar 8, jo $1000 = 125 \cdot 8$ dalās ar 8. Tāpēc arī otram saskaitāmajam RRR jādalās ar 8.

Ievērojam, ka $RRR = R \cdot 111$. Reizinātājs 111 ir nepāra skaitlis, tāpēc dalīšanos ar 8 neietekmē; tāpēc R jādalās ar 8. Tā kā R ir viencipara skaitlis, tad pastāv tikai divas iespējas: **R = 8 vai R = 0.**

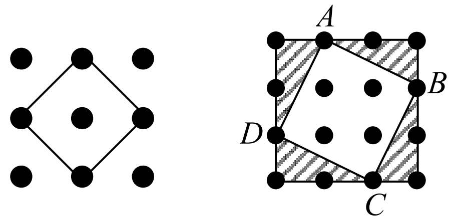
Tālāk ievērosim, ka $KRAA = KR \cdot 100 + A \cdot 11$. Mēs jau ieguvām, ka $R = 8$ vai $R = 0$. Tāpēc KR ir pāra skaitlis, un KR dalās ar 2. Un, tā kā 100 dalās ar 4, tad $KR \cdot 100$ dalās ar $8 = 2 \cdot 4$. Tāpēc $KR \cdot 100$ dalās ar 8. Turklāt skaidrs, ka *KRAA* dalās ar 8, jo pēc uzdevumā dotā tas dalās ar 24.

Tā kā gan *KRAA*, gan $KR \cdot 100$ dalās ar 8, tad līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka *A* dalās ar 8; tāpēc **A = 8 vai A = 0.**

Tā kā burti *R* un *A* apzīmē dažādus ciparus, tad uzdevumā minētajā situācija nav iespējama, ja ne *A*, ne *R* nedrīkst būt 0. Ja ciparu 0 var izmantot, tad viegli iegūstam piemēru, kad uzdevuma nosacījumi izpildās: $VAUVAURRR = 381381000$ un $KRAA = 5088$.

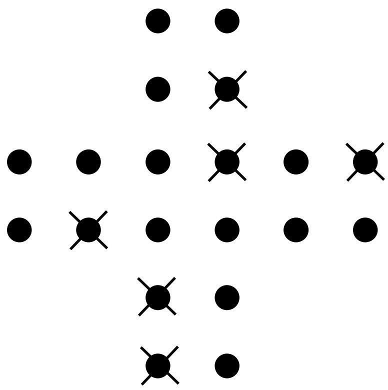
Iespējami arī citi piemēri, burtu *V*, *U* un *K* vietā ņemot citus ciparus.

3.1.6. Ievērosim, ka 4 rūtiņu virsotnes var veidot arī „slīpi" novietotu kvadrātu (skat., piem., A3.5.zīm.).

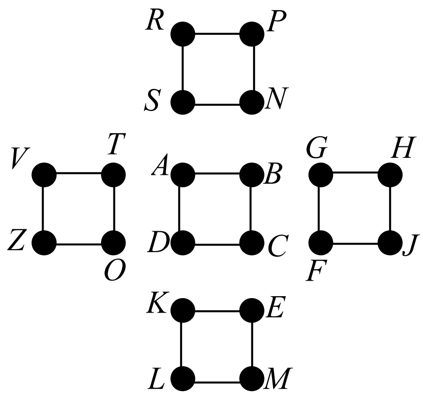


A3.5. zīm.

Pamatosim, piemēram, ka $ABCD$ ir kvadrāts. Iesvītrotie taisnleņķa trijstūri ir vienādi (pazīme kk jeb mlm), tātad $AB = BC = CD = DA$. Tālāk $\angle DAB$ iegūstam, no 180^0 atņemot taisnleņķa trijstūra divu šauro leņķu summu; tāpēc $\angle DAB = 90^0$.Vajadzīgais pierādīts: četrstūris, kam visas malas vienādas un viens leņķis taisns, ir kvadrāts. Citu „slīpi novietotu” kvadrātu gadījumos pierādījums ir analoģisks.



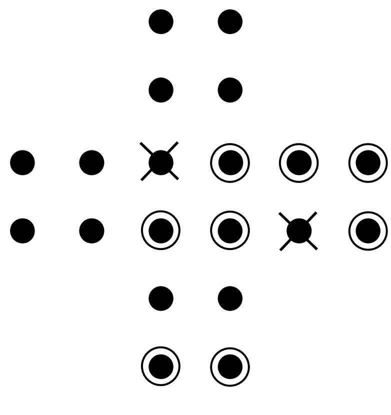
A3.6. zīm.



A3.7. zīm.

Uzdevumā prasīto var sasniegt ar 6 virsotņu nodzēšanu (skat. A3.6.zīm.); pārliecinieties par to patstāvīgi.

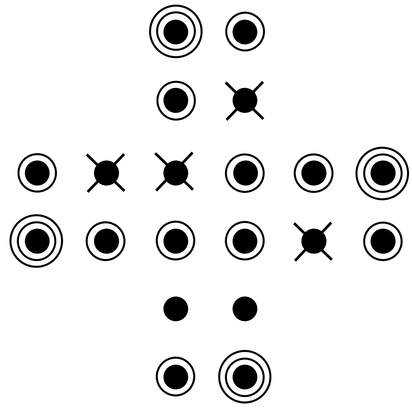
Ja mēs gribētu iztikt ar 5 virsotņu nodzēšanu, tad katrā no A3.7.zīm. redzamajiem 5 kvadrātiem jānodzēš **tieši viena** virsotne. Varam pieņemt, ka centrālajā kvadrātā nodzēsta virsotne A. Tad B; C; D netiek nodzēstas. Lai „atbrīvotos” no kvadrāta $BDEF$, jānodzēš vismaz viena no virsotnēm E un F; varam pieņemt, ka F tiek nodzēsta. Tad G, H, J netiek nodzēstas. Lai „atbrīvotos” no kvadrāta $DCEK$, jānodzēš vismaz viena no virsotnēm E un K; tātad ne L, ne M, netiek nodzēstas. Iegūstam A3.8.zīm. (šeit un turpmāk ar aplīšiem tiek apvilktas tās virsotnes, kas noteikti netiek nodzēstas).



A3.8. zīm.

Lai atbrīvotos no kvadrāta *MJNO*, jānodzēš vai nu *N*, vai *O* (apzīmējumus skat. 7.zīm.). Apskatām abas iespējas.

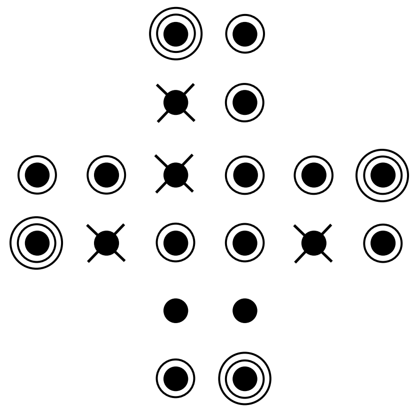
I Pieņemsim, ka nodzēsts *N*. Tad *P*, *R*, *S* nav nodzēsti. Kvadrāta *SBDT* dēļ jānodzēš *T*; tāpēc *V*, *Z*, *O* nav nodzēsti. Iegūstam A3.9.zīm. attēloto ainu:



A3.9. zīm.

Tagad kvadrātā *RHMZ* nav nodzēsta neviena virsotne – pretruna.

II Pieņemsim, ka nodzēsts *O*. Tad *Z*, *V*, *T* nav nodzēsti. Kvadrāta *SBDT* dēļ jānodzēš *S*; tad *R*, *P*, *N* nav nodzēsti. Iegūstam pretrunu kā iepriekšējā gadījumā (skat. A3.10.zīm).



A3.10. zīm.

Tātad, nodzēšot tikai 5 virsotnes, uzdevuma prasības nav izpildāmas. Tātad mazākais nodzēšamo virsotņu skaits ir 6.

3.1.7. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Iedomāsimies, ka tas izdarīts, un apskatīsim 420 pēc kārtas iestādītus kokus. Tā kā $420 = 3 \cdot 140$, varam tos sadalīt 140 grupās pa trim pēc kārtas iestādītiem kokiem katrā. Tā kā katrā grupā jābūt vismaz vienam bērzam, tad vismaz 140 no šiem kokiem jābūt bērziem.

Līdzīgi iegūstam, ka no šiem kokiem vismaz $\frac{420}{4} = 105$ jābūt kļavām, vismaz $\frac{420}{5} = 84$ - ozoliem, vismaz $\frac{420}{6} = 70$ - liepām un vismaz $\frac{420}{7} = 60$ - eglēm. Saskaitot kopā visus nepieciešamos kokus, iegūstam

$140+105+84+70+60=459>420$. Iegūta pretruna, tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

3.1.8. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim pretējo, ka tā tomēr noticis, t.i., katrs no draugiem uzdāvināja citiem mazāk ābolu nekā viņam pašam bija sākumā. Pierādīsim, ka **tādā gadījumā katram draugam beigās būtu vismaz 4 āboli.** Ja tas būs pierādīts, tad no nosacījuma, ka visiem draugiem beigās bija atšķirīgi ābolu daudzumi, sekos, ka kopā visiem draugiem beigās ir **vismaz** $4+5+6+7+8+9=39$ āboli (saskaitījām mazākos iespējamos 6 dažādus naturālus skaitļus, kas nav mazāki par 4). Bet draugiem sākumā bija $6\times 6=36$ āboli. Tā kā $39>36$, iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums bijis nepareizs.

Atliek pierādīt augstāk izcelto apgalvojumu.

Tiešām, ja kādam draugam beigās bija **ne vairāk** par 3 āboliem, tad **vismaz** 6 – 3 ābolus viņš ir uzdāvinājis citiem. Bet tā ir pretruna ar mūsu pieņēmumu, ka arī **šis** draugs uzdāvinājis citiem mazāk ābolu, nekā viņam bija beigās. Tātad tāda drauga nav.

3.1.9. Uzdevuma nosacījumos ietverto formulējumu „datumi atšķiras ne vairāk kā par 2 nedēļām" var saprast divējādi (tas nav matemātisks jēdziens un nav precīzi definēts nevienā mācību grāmatā).

1) Ja mēs uzskatām, ka, piemēram, datumi „31.decembris" un „1.janvāris" atšķiras viens no otra par 1 dienu, tad uzdevuma risinājums varētu būt šāds.

Pieņemsim no pretējā, ka katriem diviem no minētajiem 25 skolēniem dzimšanas dienu datumi atšķiras viens no otra vairāk kā par 2 nedēļām. Tas nozīmē, ka visas 25 dzimšanas dienas ir dažādas un starp katrām divām viena otrai sekojošām dzimšanas dienām ir vismaz 14 citas dienas. Attēlojot visas gada dienas uz apļa ar 366 (vai 365) punktiem, iegūstam: uz apļa jābūt 25 punktiem, kas attēlotu dzimšanas dienas, un vēl vismaz 14 punktiem katrā no intervāliem starp divām dzimšanas dienām; tātad kopā uz apļa jābūt vismaz $25+14\cdot 25=375$ punktiem – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

2) Ja mēs uzskatām, ka atšķirības starp datumiem jāapskata viena un tā paša kalendārā gada ietvaros (un tātad 1.janvāris no 31.decembra atšķiras par 364 vai 365 dienām), tad uzdevuma apgalvojums ir nepareizs. Var gadīties, ka klases skolēni dzimuši gada 1., 16., 31., 46., ... dienā; tad katriem diviem no viņiem dzimšanas dienu datumi atšķiras viens no otra vismaz par 15 dienām, t.i., **vairāk** nekā par 2 nedēļām.

Mums jāpamato, kāpēc mūsu piemērā minētajā veidā izdosies gadā izvietot 25 skolēnus. To var pamatot vismaz divos dažādos veidos:

a) izrakstot visus 25 iedomātos dzimšanas dienu kārtas numurus gada dienu sarakstā:

1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121, 136, 151, 166, 181, 196, 211, 226, 241,
256, 271, 286, 301, 316, 331, 346, 361

b) aprēķinot uzreiz pēdējā skolēna domājamo dzimšanas dienas kārtas numuru gada dienu sarakstā. Tā kā pavisam ir 25 kārtas numuri un katrs nākošais ir par 15 lielāks nekā iepriekšējais, tad pēdējam numuram būtu jābūt $1+\underbrace{15+15+...+15}_{24\ reizes}=1+15\cdot 24=1+360=361$.

Tā kā $361<365$, tas ir iespējams.

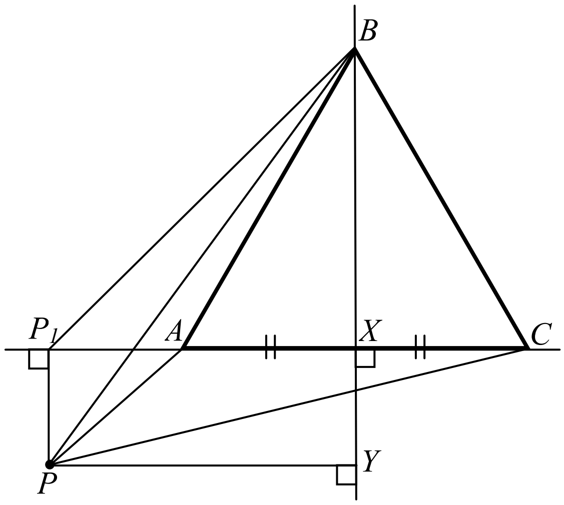
3.1.10. Atbilde: māsas māja jāceļ brāļu māju veidotā vienādmalu trijstūra centrā.

Pierādījums. Apzīmēsim brāļu mājas ar A, B un C, trijstūra ABC centru – ar M. Pierādīsim: **ja punkts *P* nesakrīt ar *M*, tad**

PA + PB + PC + > MA + MB + MC (*)

Šķirosim vairākus gadījumus atkarībā no P atrašanās vietas.

I Punkts P un ΔABC atrodas **dažādās pusēs** kādai no taisnēm AB, BC, CA (skat., piem., A3.11.zīm.)



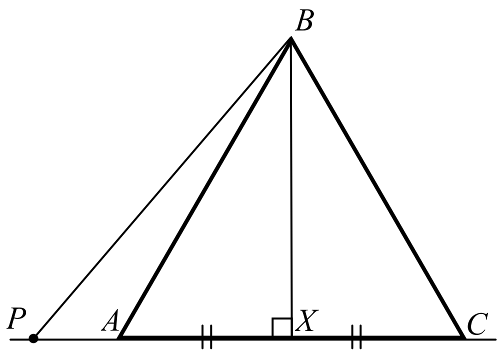
A3.11. zīm.

1) Konstruējam punktus P_1, X, Y, kā parādīts 11.zīmējumā.
2) Tā kā vienādmalu trijstūrī augstums ir arī mediāna, tad $AX = XC$.
3) Tā kā slīpne garāka par tās projekciju, iegūstam nevienādības $PA > P_1A$ (1) un $PC > P_1C$ (2).
4) Tā kā trijstūrī BP_1P leņķis BP_1P ir plats, tad $PB > P_1B$ (3).
5) Saskaitot nevienādības (1), (2) un (3), iegūstam

$$PA+PB+PC>P_1A+P_1B+P_1C \qquad (4)$$

6) Tātad, ja punkts atrodas dažādās pusēs kādai no taisnēm AB, BC, CD, tad atradīsies vēl tāds punkts, kuram attālumu summa līdz trijstūra virsotnēm būs mazāka nekā punktam P.

II Punkts P atrodas uz kādas no taisnēm AB, BC, CA, bet nav atbilstošās malas punkts (skat., piem., A3.12.zīm.)



A3.12. zīm.

1) Acīmredzami $PA + PC > AC = XA + XC$ (5)
2) Tā kā taisnleņķa trijstūrī (šajā gadījumā tas ir ΔPBX) hipotenūza ir garāka par kateti, tad PB > XB (6).
3) Saskaitot nevienādības (5) un (6), iegūstam

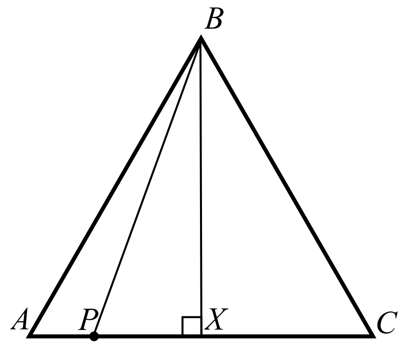
$$PA + PB + PC > XA + XB + XC \qquad (7)$$

4) Līdzīgi kā iepriekš secinām, ka atradīsies tāds punkts, kura attālumu summa līdz trijstūra malām būs mazāka nekā punktam *P*,

III Punkts *P* pieder kādai no malām *AB*, *BC*, *CA*; varam pieņemt, ka *P* pieder malai *AC* (skat. piem., A3.13.zīm.)

1) Ja *X* ir *AC* viduspunkts, tad $PA + PC = AC = XA + XC$ (8).
2) Tā kā ΔPBX ir taisnleņķa, tad no tā seko, ka $PB \geq XB$ (9),
3) Skaidrs, ka nevienādība (9) pārvēršas par vienādību tad un tikai tad, ja *P* sakrīt ar *X*.
4) Saskaitot nevienādības (8) un (9), iegūstam

$$PA + PB + PC \geq XA + XB + XC = AC + XB \ (10).$$



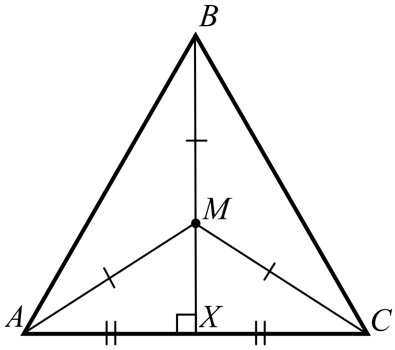
A3.13. zīm.

Vispārīgi no **I**, **II**, **III** seko: ja *P* nav trijstūra *ABC* iekšējs punkts, tad summa $PA + PB + PC$ nav mazāka par **kādas** trijstūra malas un pret to novilktā augstuma garumu summu. Tā kā vienādmalu trijstūrī visas malas vienādas savā starpā un visi augstumi – arī, tad secinām, ka šādiem punktiem P pastāv nevienādība

$$PA + PB + PC \geq a + h \qquad (11),$$

kur a - ΔABC malas garums, h – tā augstuma garums.

1.lemma Ja ΔABC ir regulārs un M – tā centrs, tad $MA + MB + MC < a + h$ (a - ΔABC malas garums, h – tā augstuma garums) (skat.A3.14.zīm.).



A3.14. zīm.

1) No vienādmalu trijstūra īpašībām zināms, ka $MA = MB = MC$, M atrodas uz BX, $MX \perp AC$ un $\angle MCX = 30°$.

2) Vienādmalu trijstūrī augstums ir arī mediāna, bet centrs ir mediānu krustpunkts.

3) No mediānu īpašībām seko, ka $h = 3 \cdot MX$ un $MX = \frac{1}{2} MB$.

4) Tā kā taisnleņķa trijstūrī MXC šaurais leņķis C ir 30° liels, tad $MX = \frac{1}{2} MC$.

5) Ņemot visu iepriekšminēto vērā, lemmas apgalvojumu $MA + MB + MC < a + h$ var pierakstīt kā

$3 \cdot MA < AC + 3 \cdot MX$.

6) Tā kā $MX = \frac{1}{2} \cdot MA$, tad varam rakstīt, ka

$3 \cdot MA < AC + \frac{3}{2} MA$ jeb

$\frac{3}{2} MA < AC$.

7) Tā kā $MB = MA$ un $AB = AC$, tad

$1\frac{1}{2} MB < AB$ jeb

$BX < AB$,

kas ir acīmredzams, jo taisnleņķa trijstūrī AXB hipotenūza garāka par kateti. Lemma pierādīta.

No lemmas un no nevienādības (11) seko: ja P nav ΔABC iekšējs punkts, tad sākotnējā nevienādība (*) ir spēkā.

Atliek pierādīt sakarību (*) ΔABC iekšējiem punktiem P, kas nesakrīt ar trijstūra ABC centru M.

2.lemma Ja punkts P atrodas ΔABC iekšpusē un nesakrīt ar tā centru M, tad vismaz viens no leņķiem APB, BPC, CPA nav 120° liels.

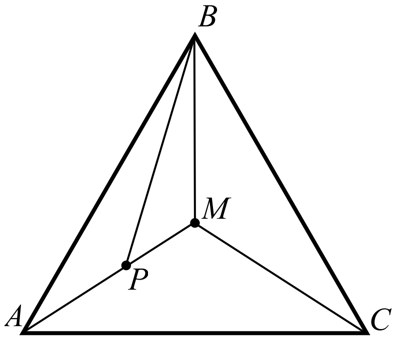
Pierādījums.

Ievērojam, ka $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$. Pastāv divas iespējas:

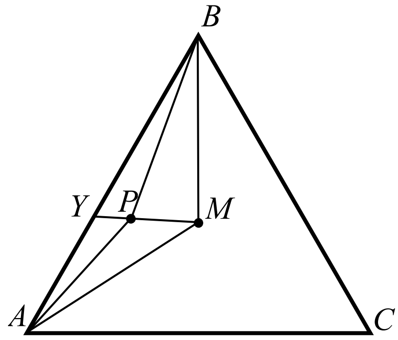
a) Punkts P pieder kādam no nogriežņiem MA, MB, MC (varam pieņemt, ka MA; skat.A3.15.zīm.). Tādā gadījumā, izmantojot ΔPMB ārējā leņķa īpašību, iegūstam $\angle APB = \angle BPM + \angle BMP > \angle BMP = \angle BMA = 120°$. Tātad $\angle APB > 120°$.

b) Punkts P nepieder MA, MB, MC. Tad tas ir iekšējs punkts vienam no trijstūriem AMB, BMC, CMA (varam pieņemt, ka AMB; skat. A3.16.zīm.). Šajā gadījumā no ΔBMP un ΔAMP ārējo leņķu īpašībām līdzīgi iegūstam $\angle BPY > \angle BMP$ un $\angle APY > \angle AMP$; saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $\angle APB > \angle AMB = 120°$.

Lemma pierādīta.



A3.15. zīm.

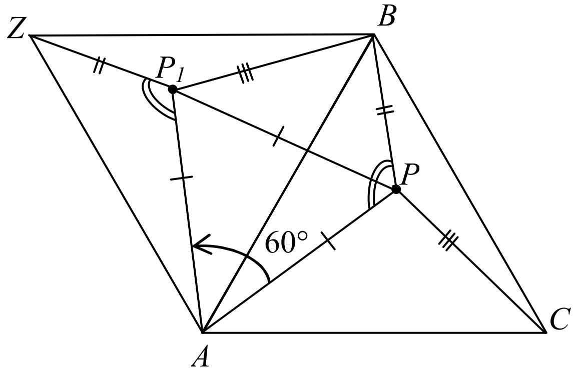


A3.16. zīm.

Turpināsim pierādīt, ka nevienādība (*) ir spēkā ΔABC iekšējiem punktiem P, kas nesakrīt ar M.

1) Tagad pieņemsim, ka ABC – vienādmalu trijstūris un P – tā iekšējs punkts, kas nesakrīt ar centru M.

2) Saskaņā ar 2.lemmu varam pieņemt, ka $\angle APB \neq 120°$.



A3.17. zīm.

3) Pagriežam ΔABC ap punktu A par 60° lielu leņķi pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam; reizē ar visu trijstūri pagriežas arī punkts P, nonākot

stāvoklī P_1. Tā kā $AC = AB$ un $\angle CAB = 60°$, punkts C nonāk punktā B (skat. A3.17.zīm.).

4) Punktu, kurā nonāk B, apzīmēsim ar Z.

5) Pēc definīcijas $P_1Z = PB$, $P_1A = PA$ un $\angle P_1AP = 60°$.

6) No tā seko, ka ΔP_1AP ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi 60°, tātad tas ir vienādmalu.

7) Skaidrs, ka $PA = P_1P$. Secinām, ka $PB + PA + PC = ZP_1 + P_1P + PC$ (12)

8) Tā kā ΔAP_1P ir vienādmalu, tad $\angle AP_1P = 60°$.

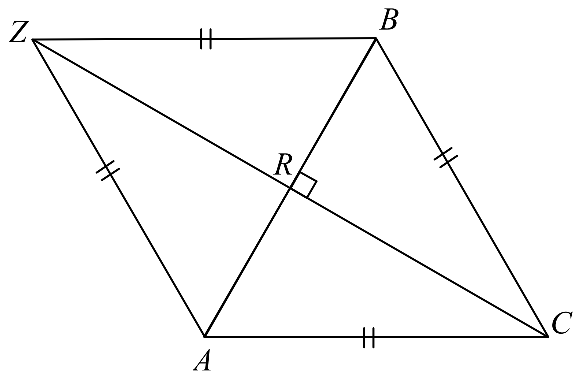
9) Tā kā $\angle ZP_1A = \angle BPA \neq 120°$, tad $\angle ZP_1P = \angle ZP_1A + \angle AP_1P \neq 180°$.

10) Tātad punkti Z, P_1 un P neatrodas uz vienas taisnes.

11) Tāpēc $ZP_1 + P_1P > ZP$ un $ZP_1 + P_1P + PC > ZP + PC \geq ZC$ (13)

12) No sakarībām (12) un (13) seko, ka $PA + PB + PC > ZC$ (14)

13) Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $MA + MB + MC = ZC$ (15), tad no (14) un (15) sekos mums vajadzīgā sakarība (*), un uzdevums būs atrisināts.



A3.18. zīm.

14) Tā kā četrstūris $ACBZ$ sastāv no diviem vienādmalu trijstūriem, tad tas ir rombs (skat. A3.18.zīm.); tāpēc $AB \perp CZ$ un $CZ = 2 \cdot CR$. Mums jāpierāda, ka $2 \cdot CR = MA + MB + MC$.

15) Atceramies, ka $MA = MB = MC$; tātad jāpierāda, ka $2 \cdot CR = 3 \cdot MC$ jeb $MC = \frac{2}{3} CR$. Bet tas tieši seko no vienādmalu trijstūra īpašībām (skat. 1.lemmas pierādījumu).

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

3.2.1. Nē, nevar.

No katriem trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 3. Tāpēc vismaz viens no pieciem Jānīša sareizinātajiem skaitļiem dalās ar 3. Tātad arī iegūtais reizinājums dalās ar 3. Pēc dalāmības pazīmēm zināms, ka, ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad arī tā ciparu summa dalās ar 3. Tomēr 2 nedalās ar 3. Tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

3.2.2. Apzīmēsim klades, zīmuļa un burtnīcas cenas (piemēram, santīmos) attiecīgi ar k, z, b. No uzdevumā dotā seko:

$k + 2z > 3b$ (1)

$3k + 2z > 4b$ (2)

Pareizinot nevienādības (1) abas puses ar 2, iegūstam

$2k + 4z > 6b$ (3)

Saskaitot nevienādību (2) un (3) labās un kreisās puses, iegūstam

$(3k + 2z) + (2k + 4z) > 4b + 6b$ jeb $5k + 6z > 10b$, kas bija jāpierāda.

3.2.3. Pirmā svēršana var būt šāda (skat. A3.19.zīm.):

2 6 | 3 5

A3.19. zīm.

I Ja svari ir līdzsvarā, tad visas šeit izmantotās lodītes sver tik, cik uz tām rakstīts. Tātad īpašā lodīte ir 4 vai 1. Otro svēršanu tad izdara šādi (skat. A3.20.zīm.):

1 3 | 4

A3.20. zīm.

Ja uz leju nosveras kreisais kauss, tad īpašā lodīte ir 1; ja uz leju nosveras labais kauss, tad īpašā lodīte ir 4.

II Ja jau pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad smagākā lodīte atrodas uz tā kausa, kas nosveras uz leju. Apskatīsim abus iespējamos gadījumus:

a) Ja uz leju nosveras kreisais kauss, otro svēršanu izdarām, kā parādīts A3.21.zīm. Ja tad uz leju nosveras kreisais kauss, tad īpašā lodīte ir 6.

Savukārt, ja svari ir līdzsvarā, tad īpašā lodīte ir 2

1 6 | 4 3

A3.21. zīm.

3 6 | 4 5

A3.22. zīm.

b) Ja pirmajā svēršanā uz leju nosvērās labais kauss, tad otro svēršanu izdarām, kā parādīts A3.22.zīm.

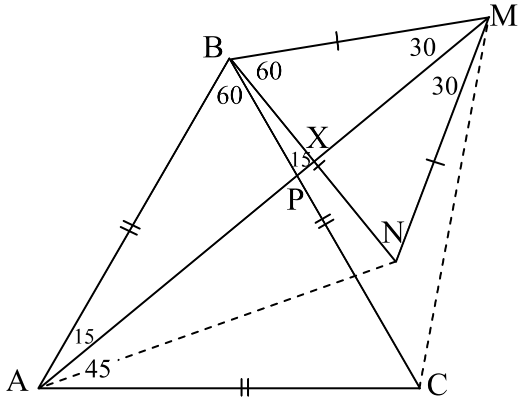
Un, ja šajā svēršanā uz leju nosveras kreisais kauss, tad īpašā lodīte ir 3, bet, ja labais kauss, tad īpašā lodīte ir 5.

Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

3.2.4. 1) Tā kā trijstūrī ABC visi leņķi ir vienādi savā starpā (tātad tie ir $180° : 3 = 60°$), tad ΔABC ir vienādmalu trijstūris.

2) Konstruējam regulāru trijstūri *BMN* (sk.A3.23..zīm.).

3) $\angle ABC = 60°$, jo ΔABC ir vienādmalu.



A3.23. zīm.

4) Tā kā $\angle MAC = 45°$, tad $\angle MAB = 15°$.

5) Tā kā $\angle MBC = 75°$, bet $\angle MBN = 60°$, tad $\angle NBC = 75° - 60° = 15°$.

6) $\angle APB = 180° - 60° - 15° = 105°$, tātad $\angle BPX = 180° - 105° = 75°$ un $\angle BXP = 180° - 75° - 15° = 90°$.

7) No tā, ka $\angle BXP = 90°$ seko, ka arī $\angle BXM = 90°$.

8) Tātad $\angle BMX = 180° - 90° - 60° = 30°$.

9) $\angle NMX = 60° - 30° = 30°$.

10) Redzam, ka $\Delta ABN = \Delta CBM$ (mlm), tātad ***AN = CM***.

11) Atceramies, ka $\angle BXM = 90°$, tātad *MX* ir regulārā trijstūra *BMN* augstums, tātad arī mediāna. Tāpēc *BX* = *XN*.

12) Seko, ka punkti *B* un *N* ir simetriski viens otram attiecībā pret *AM*.

13) Tāpēc $\Delta ABM = \Delta ANM$ (tie ir simetriski viens otram attiecībā pret *AM*), tātad ***AB = AN***.

14) No izceltajām vienādībām seko, ka $AB = CM$. Un, tā kā ΔABC ir vienādmalu, tad *AB* = ***AC = CM***.

15) Tātad ΔACM - vienādsānu.

16) Tā kā $\angle MAC = 45°$, tad arī $\angle AMC = 45°$.

17) Tātad $\angle MCA = 90°$, kas arī bija jāpierāda.

3.2.5. No dotā seko, ka arī skaitlis $S = d(abc - d) + c(abd - c) + b(acd - b) + a(bcd - a)$ dalās ar 4, jo katrs no šiem četriem saskaitāmajiem dalās ar 4.

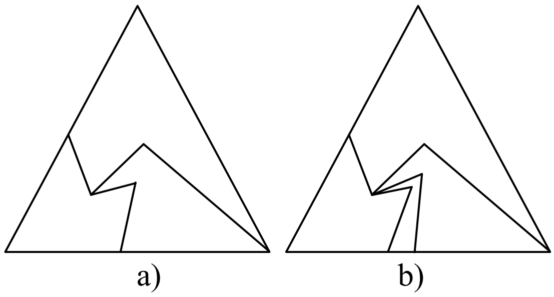
Atverot iekavas, iegūstam: $S = dabc - d^2 + cabd - c^2 + bacd - b^2 + abcd - a^2$. Savelkot līdzīgos locekļus un sagrupējot saskaitāmos, iegūstam $S = 4abcd - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, no kurienes seko, ka

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4abcd - S$.

Tā kā zinām, ka gan *4abcd*, gan S dalās ar 4, tad secinām, ka arī $a^2+b^2+c^2+d^2$ dalās ar 4, kas bija jāpierāda.

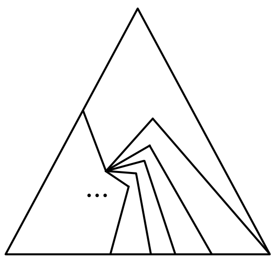
3.2.6. Atbilde: a) jā, b) jā, c) jā.

Sadalījumus 3 un 4 piecstūros skat. A3.24.zīm.



A3.24. zīm.

Sadalījumus 5, 6, 7, ..., 2007 ieliektos piecstūros iegūst secīgi vienu no otra tāpat, kā 2.b) zīmējums iegūts no 2.a) zīmējuma (skat. A3.25.zīm.).



A3.25. zīm.

Iespējami daudzi citi risinājumi.

3.2.7. Ērtības labad apzīmēsim $a+b+c=x$ un $d+e+f=y$.

Tad

$$3-x^2-y^2=3-x^2-x^2+x^2-y^2-y^2+y^2=3+x^2+y^2-2x^2-2y^2+0=(*)$$

Izmantojam to, ka $ad+be+cf=0$

$$(*)=1+1+1+x^2\cdot 1+y^2\cdot 1-2x^2-2y^2+2xy(ad+be+cf)=$$
$$=1+1+1+x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(d^2+e^2+f^2)-2x(a+b+c)-2y(d+e+f)+$$
$$+2xy(ad+be+cf)=(**)$$

Sagrupējam saskaitāmos:

$$(**)=(1+x^2a^2+y^2d^2-2\cdot xa\cdot 1-2\cdot yd\cdot 1+2\cdot xa\cdot yd)+$$
$$+(1+x^2b^2+y^2e^2-2\cdot xb\cdot 1-2\cdot ye\cdot 1+2\cdot xb\cdot ye)+$$
$$+(1+x^2c^2+y^2f^2-2\cdot xc\cdot 1-2\cdot yf\cdot 1+2\cdot xc\cdot yf)=(***)$$

Katru no iekavām sadalām reizinātājos:

$$(***)=(1-xa-yd)(1-xa-yd)+(1-xb-ye)(1-xb-ye)+(1-xc-yf)(1-xc-yf)=$$
$$=(1-xa-yd)^2+(1-xb-ye)^2+(1-xc-yf)^2\geq 0$$, jo kvadrāti nav negatīvi.

Tātad $3 - x^2 - y^2 \geq 0$, tāpēc $x^2 + y^2 \leq 3$ jeb $(a+b+c)^2 + (d+e+f)^2 \leq 3$, kas bija jāpierāda.

3.2.8. Ierakstīsim sarkanajās rūtiņās 0 un baltajās rūtiņās 1.

Pieņemsim, ka katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā ir pāra skaits sarkano (tātad arī pāra skaits balto) rūtiņu. Tad katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā summa ir pāra skaitlis. Saskaitot visas šīs atsevišķo kvadrātu summas vienā „lielā” summā S, arī iznāks pāra skaitlis. Bet tā nevar būt, jo „lielajā” summā S

a) iekšējās rūtiņas tiek ieskaitītas četras reizes katra,

b) malējās (ne stūra) rūtiņas – divas reizes katra,

c) stūra rūtiņas – 1 reizi katra.

Tāpēc iekšējo rūtiņu kopējais „ieguldījums” summā S dalās ar 4, malējo rūtiņu kopējais „ieguldījums” – ar 2, bet stūra rūtiņu kopējais „ieguldījums” ir tieši 1. Tāpēc S kā divu pāra skaitļu un vieninieka summa ir nepāra skaitlis.

Iegūta pretruna, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un ir vismaz viens tāds 2x2 rūtiņu kvadrāts, kurā ir nepāra skaits sarkano rūtiņu.

3.2.9. Atbilde: 132 virknes.

Lai uzskatāmi atrisinātu šo uzdevumu, izveidosim tabulu (skat. A3.26.zīm.), kur attēlosim iespējamo virkņu skaitu atkarībā no vieninieku un nuļļu daudzuma virkņu sākuma fragmentos. Elementu skaits sākuma fragmentā ir vienāds ar vieninieku un nuļļu daudzumu summu.

Skaidrs, ka sākuma fragmentā var gadīties, ka nav nevienas nulles, tātad jāapskata arī gadījumi, kad nuļļu skaits ir „0”; taču nevar gadīties, ka sākuma fragmentā nav neviena vieninieka, tātad mazākais iespējamais vieninieku skaits ir 1. Tāpat arī nevar gadīties, ka kādā sākuma fragmentā nuļļu skaits ir lielāks nekā vieninieku skaits, jo tas būtu pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tāpēc zīmējumā aizkrāsotajās rūtiņās domājam ierakstītas nulles.

Apskatīsim tabulas rindu, kurā nuļļu skaits ir 0. Ja jebkurš no sākuma fragmentiem sastāv tikai no skaitļa „1”, tad šādu fragmentu var izveidot vienā vienīgā veidā, tātad visās šajās rūtiņās rakstāms „1”.

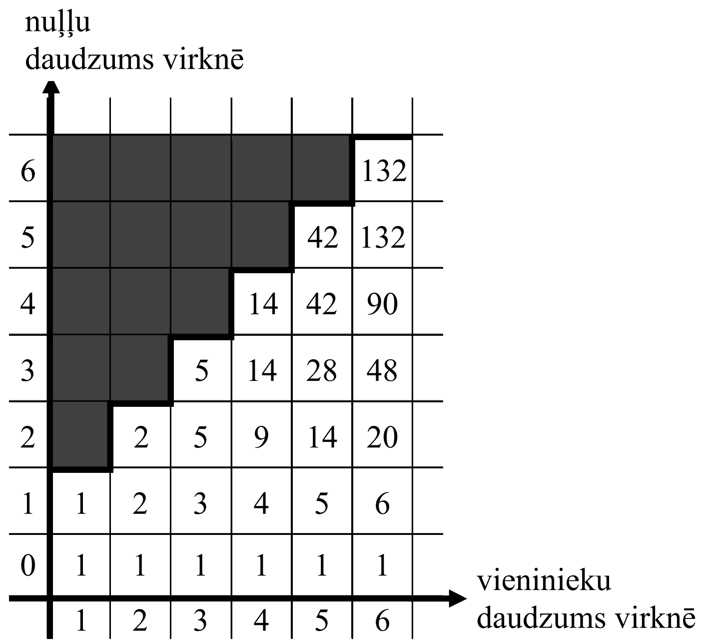
Viegli saprast, ka, ja virknes sākuma fragmentā ir viena nulle un viens vieninieks, tad šādu virkni var sastādīt vienā vienīgā veidā: „10” („01” nevar, jo tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem).

Tabulu aizpilda saskaņā ar A3.27.zīm. Šis zīmējums izveidots, ņemot vērā trīs acīmredzamus faktus:

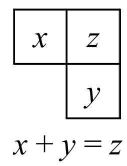
a) katra pieļaujama fragmenta *F* „sākums” (izņemot *F* pēdējo ciparu) arī ir pieļaujams fragments,

b) jebkuram pieļaujamam fragmentam galā var rakstīt 1, atkal iegūstot pieļaujamu fragmentu,

c) jebkuram pieļaujamam fragmentam, kurā vieninieku ir vairāk nekā nuļļu, galā var rakstīt 0, atkal iegūstot pieļaujamu fragmentu.



A3.26. zīm.



A3.27. zīm.

3.2.10. Atbilde: $n = 9$.

Mazāk par 9 skaitļiem izvēlēties nevar, jo, piemēram, gadījumā, ja izvēlas 8 pāra skaitļus, tad katru divu kvadrātu summa ir pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad nav pirmskaitlis. Tāpēc $n \geq 9$.

Pierādīsim, ka ar 9 izvēlētiem skaitļiem pietiek.

Ievērosim, ka katrā no pāriem (1;4), (2;3), (5;8), (6;11), (7;10), (9;16), (12;13), (14;15) kvadrātu summa ir pirmskaitlis (pārbaudīt to patstāvīgi). Tā kā šādu pāru ir tikai 8, tad no katriem 9 izvēlētiem skaitļiem vismaz divi būs vienā pārī.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

3.3.1. Apzīmēsim lielāko no skaitļiem ar x, mazāko – ar y. Ja skaitlī x būtu pieci vai vairāk cipari, tad arī summā $x + y$ būtu pieci vai vairāk cipari. Ja x būtu ne vairāk kā 3 cipari, tad $x \leq 999$ un, tā kā y iegūstam, skaitlī x izsvītrojot vienu ciparu, tad $y \leq 99$, tāpēc $x + y \leq 1098 < 2101$. Tāpēc x ir tieši 4 cipari.

Ievērosim: ja skaitli y iegūtu, izsvītrojot no x pirmo, otro vai trešo ciparu, tad skaitļiem x un y pēdējie cipari būtu vienādi, un summa $x + y$ būtu pāra skaitlis, kas būtu pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad skaitli y iegūst, izsvītrojot no x pēdējo ciparu, un y ir trīsciparu skaitlis (nevis divciparu vai viencipara, kā varētu notikt, piemēram, izsvītrojot **pirmo** ciparu skaitlī 1021 vai 1001).

Ja x pirmais cipars būtu 2 vai lielāks, tad $x \geq 2000$ un $y \geq 200$, tāpēc $x + y \geq 2000 + 200 = 2200 > 2101$. Tātad x pirmais cipars ir 1. Apzīmējam x nākošos ciparus ar a, b, c. Tad $x = \overline{1abc}$ un $y = \overline{1ab}$.

Ja $a \le 8$, tad $x \le 1899$ un $y \le 189$, tāpēc $x + y \le 1899 + 189 = 2088 < 2101$. Tāpēc $a = 9$, $x = \overline{19bc}$ un $y = \overline{19b}$.

Ja $b \ge 2$, tad $x \ge 1920$ un $y \ge 192$; tāpēc $x + y \ge 1920 + 192 = 2112 > 2101$. Tātad $b < 2$, t.i., vai nu $b = 0$, vai $b = 1$.

Ja $b = 0$, iegūstam vienādību $\overline{190c} + 190 = 2101$, no kurienes $\overline{190c} = 1911$, kas nav iespējams.

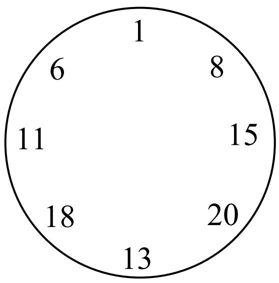
Ja $b = 1$, iegūstam $\overline{191c} + 191 = 2101$, no kurienes $\overline{191c} = 2101 - 191 = 1910$, tātad $c = 0$.

Līdz ar to meklējamie skaitļi ir 1910 un 191.

3.3.2. Apzīmēsim Maijas izvēlēto skaitļu summu ar *M*; Andra izvēlēto skaitļu summu ar *A*; skaitli, kas ierakstīts neizvēlētajā rūtiņā, ar *x*. Tad ***A* = 3*M*** un ***A* + *M* + *x* = 110** (tiešām, $4 + 7 + 11 + 16 + 20 + 5 + 8 + 14 + 25 = 110$). No izceltajām sakarībām seko, ka $3M + M = 4M = 110 - x$. Tā kā acīmredzami *4M* dalās ar 4, tad arī skaitlim $110 - x = 112 - 2 - x = 112 - (x + 2) = 4 \cdot 28 - (x + 2)$ jādalās ar 4. Tā kā $4 \cdot 28$ dalās ar 4, tad arī $x + 2$ jādalās ar 4. Pārbaudām katru no tabulā ierakstītajiem skaitļiem un secinām, ka no visiem skaitļiem šo nosacījumu apmierina tikai $x = 14$.

Ja rūtiņa 14 paliek neizvēlēta, tad Maija var izvēlēties skaitļus 4; 5; 7; 8, bet Andris – skaitļus 11; 14; 16; 25. Tā kā $4 + 5 + 7 + 8 = 24$, $11 + 16 + 20 + 25 = 72$ un $24 \cdot 3 = 72$, tad šāds gadījums patiešām ir iespējams. Uzdevums atrisināts.

3.3.3. Jā, var. Skat., piem., A3.28.zīm.



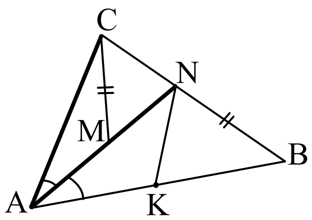
A3.28. zīm.

3.3.4. 1) Tā kā $AC = AN$, tad ΔCAN ir vienādsānu.

2) No tā, ka ΔCAN ir vienādsānu, seko, ka $\angle CNA$ ir šaurs; tāpēc $\angle ANB$ ir plats (kā $\angle CNA$ blakusleņķis).

3) Tātad trijstūrī *ANB* mala *AB* ir visgarākā kā mala pret plato leņķi, tātad $AB > AN$.

4) Tā kā *M* atlikts uz bisektrises *AN*, tad $AM \le AN < AB$. Iegūstam, ka ***AM* < *AB***.



A3.29. zīm.

5) Atliekam uz *AB* tādu punktu *K*, ka $AK = AM$ (skat. A3.29.zīm.).

6) Saskaņā ar izcelto nevienādību $AK < AB$, tātad *K* nesakrīt ar *B*.

7) Tā kā $AC = AN$ (dots), $\angle CAN = \angle NAK$ (jo dots, ka *AN* ir leņķa *CAB* bisektrise) un $AM = AK$ (saskaņā ar *K* izvēli), tad $\Delta CAM = \Delta NAK$ (mlm).

8) Tātad $CM = NK$.

9) Tā kā $CM = NB$ (dots), iegūstam, ka $NK = NB$.

10) Tātad ΔKNB ir vienādsānu; tāpēc $\angle NKB = \angle NBK$.

11) Savukārt $\angle NKB = \angle CMN$ kā atbilstošie ārējie leņķi vienādos trijstūros (skat. 7.punktu risinājumā).

12) Tātad $\angle CMN = \angle NKB = \angle NBK = \angle ABC$, kas bija jāpierāda.

3.3.5. Apskatīsim jebkurus 100 dažādus skaitļus, kas augošā secībā apzīmēti ar $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{99} < x_{100}$. Pieņemsim, ka šie skaitļi sadalīti pāros pa divi un katra pāra elementi sareizināti savā starpā. **Tad visu reizinājumu summa nepārsniedz** $\boldsymbol{x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + ... + x_{97} x_{98} + x_{99} x_{100}}$ (t.i., visu reizinājumu summa ir vislielākā, ja savā starpā sareizina abus mazākos skaitļus, tad – abus nākošos mazākos, tad – abus nākošos mazākos u.t.t., beidzot – abus lielākos skaitļus).

Pieņemsim uz brīdi, ka šis apgalvojums ir pareizs, un pievērsīsimies mūsu uzdevumam.

Ja uz vienas kartītes ir uzrakstīti skaitļi *a* un *b*, tad uzdevumā minēto apgriezto lielumu $\frac{1}{ab}$ varam uztvert arī kā $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$. Tātad patiesībā situācija ir šāda: skaitļi $\frac{1}{100}, \frac{1}{99}, \frac{1}{98}, ..., \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ ir kaut kā sadalīti pa pāriem un katra pāra elementi sareizināti savā starpā. Saskaņā ar mūsu pieņēmumu iegūto reizinājumu summa ir vislielākā tad, ja $\frac{1}{100}$ reizina ar $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{98}$ ar $\frac{1}{97}$, ... , $\frac{1}{4}$ ar $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ar $\frac{1}{1}$; šīs summas vērtība ir $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $S < 1$, tad arī citas iegūstamās summas būs mazākas par 1, jo saskaņā ar pieņēmumu *S* ir vislielākā iegūstamā summa.

Tāpēc tagad centīsimies pierādīt, ka

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1 \qquad (*)$$

Pievienosim kreisajā pusē vēl citus pozitīvus saskaitāmos: $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{4\cdot 5}$, $\frac{1}{6\cdot 7}$, ..., $\frac{1}{98\cdot 99}$. No tā kreisās puses vērtība tikai palielināsies. Ja mēs pratīsim pierādīt, ka arī palielinātā kreisā puse mazāka par 1, tad, protams, (*) arī būs pierādīta.

Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{96\cdot 97}+\frac{1}{97\cdot 98}+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}<1 \qquad (**)$$

Katru saskaitāmo izsacīsim kā starpību (visas izveidotās vienādības ir viegli pārbaudīt, vienādojot saucējus katras vienādības labajā pusē):

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

...

$$\frac{1}{97\cdot 98}=\frac{1}{97}-\frac{1}{98}$$

$$\frac{1}{98\cdot 99}=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$$

$$\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

Tad (**) pārveidojas par

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{98}\right)+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)<1 \qquad (\square)$$

Atverot iekavas, gandrīz visi saskaitāmie saīsinās: „$\frac{1}{2}$” sastopams vienreiz ar „-„ zīmi, vienreiz ar „+” zīmi, „$\frac{1}{3}$” tāpat, „$\frac{1}{4}$” tāpat, ..., „$\frac{1}{99}$” tāpat. Nesaīsinās tikai „1” un „$-\frac{1}{100}$”. Tāpēc ($\square$) kreisā puse ir $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$; skaidrs, ka $\frac{99}{100}<1$. Tāpēc ($\square$), līdz ar to arī (**) un (*) ir pierādīta.

Lai uzdevums būtu atrisināts, jāpierāda sākumā minēto apgalvojumu, ka visu reizinājumu summa ir vislielākā, ja savā starpā sareizina abus mazākos skaitļus, tad – abus nākošos mazākos u.t.t., beidzot – abus lielākos skaitļus. Pierādīsim to.

Mēs vispirms pierādīsim līdzīgu apgalvojumu 4 skaitļu gadījumam: **ja $a < b < c < d$, tad no visām trim iespējamām pāru reizinājumu summām**
$ab + cd$, $ac + bd$ un $ad + bc$ vislielākā ir pirmā, t.i. tā, kurā pāros apvienoti abi mazākie un abi lielākie skaitļi.

Tiešām, nevienādību $ab+cd > ac+bd$ viegli pakāpeniski pārveidot par

$$ab - ac > bd - cd$$
$$a(b-c) > d(b-c)$$
$$a(b-c) - d(b-c) > 0$$
$$(a-d)(b-c) > 0$$

Pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa, jo $a-d<0$ un $b-c<0$, bet divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs. Tāpēc patiesa ir arī sākotnējā nevienādība $ab+cd > ac+bd$. Nevienādību $ab+cd > ad+bc$ pierāda līdzīgi.

Tagad pierādīsim mums vajadzīgo apgalvojumu.

Pieņemsim, ka visu 100 skaitļu pāru reizinājumu summā abi mazākie skaitļi x_1 un x_2 nav sareizināti savā starpā, bet ar citiem skaitļiem: x_1 ar x_i, bet x_2 ar x_j (ne x_i, ne x_j nav ne x_1, ne x_2). Izmainīsim šo summu: aizstāsim $x_1x_i + x_2x_j$ ar $x_1x_2 + x_ix_j$. Saskaņā ar nupat pierādīto 4 skaitļu gadījumam

$$x_1x_2 + x_ix_j > x_1x_i + x_2x_j,$$

jo x_1 un x_2 ir abi mazākie no skaitļiem x_1, x_2, x_i, x_j. Tā kā citi pāri nemainās, tad nemainās arī to reizinājumi; tātad **visu** reizinājumu summa palielinās.

Apskatām jauno sadalījumu pa pāriem (kurā x_1 un x_2 ir vienā pārī un tātad sareizināti savā starpā). Līdzīgi spriežot, ja x_3 un x_4 nav vienā pārī, tad, aizstājot pārus $x_3x_n + x_4x_k$ ar $x_3x_4 + x_nx_k$ ($n,k \geq 5$), t.i., apvienojot x_3 un x_4 vienā pārī un viņu agrākos „pāriniekus" otrā pārī, visu reizinājumu summa atkal palielinās. Skaidrs, ka līdzīgi turpinot, mēs nonāksim pie summas $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{97}x_{98} + x_{99}x_{100}$, kura būs lielāka par sākotnējo (ja tikai tā jau pašā sākumā nebija tieši šāda). Tātad šī summa no visām pāru reizinājumu summām ir lielākā iespējamā, kas arī bija jāpierāda. Uzdevums atrisināts.

3.3.6. Pierādīsim, ka šillišallas izvietojušies šādā secībā:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{669\ grupas\ "mpp"}$$

Apskatīsim vispirms šillišallu, kas rindā stāv pašā kreisajā malā. Viņam pa kreisi nestāv neviens, t.i., stāv 0 šillišallas. „Vairāk nekā trešdaļa no 0" nozīmē „vismaz 1". Apgalvojums „no manis pa kreisi stāv vismaz 1 melis" šī šillišallas mutē ir meli. Tātad viņš ir melis.

Nākošais šillišalla apgalvo, ka „vairāk nekā trešdaļa no 1” no viņa pa kreisi stāvošajiem šillišallām ir meļi, tātad „vismaz 1” ir melis. Tā kā tiešām pa kreisi no viņa jau atrodas 1 melis, tad šis šillišalla saka taisnību, tātad ir patiess.

Līdzīgi secinām, ka arī trešais no kreisās puses stāvošais šillišalla ir patiess.

Kas ir nākošais pa labi stāvošais šillišalla?

$$m\,p\,p\,?$$

Mēs zinām, ka **tieši trešdaļa** no pa kreisi esošajiem šillišallām ir meļi. Tātad ? izsacītais apgalvojums, ka vairāk nekā trešdaļa no viņa pa kreisi esošajiem šillišallām ir meļi, nav taisnība. Tātad ? pats ir melis:

$$mppm$$

Tagad viegli pārbaudīt, ka abi tālākie šillišallas ir teikuši patiesību, tātad ir patiesi:

$$(mpp)(mpp)$$

Pierādīsim, ka arī tālāk seko grupas (mpp). Tiešām, padomāsim, kas notiek, ja ir jau izveidotas n grupas mpp:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "}mpp\text{"}}\,x\,y\,z$$

No x pa kreisi stāv $3n$ šillišallas, no kuriem tieši n ir meļi. Tātad **tieši trešdaļa** no tiem, kas stāv pa kreisi no x, ir meļi. Tātad x ir samelojies, tātad ir melis:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "}mpp\text{"}}\; m\,y\,z$$

No y pa kreisi stāv $3n+1$ šillišallas, no kuriem $n+1$ ir melis. Tā kā $\frac{n+1}{3n+1} > \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$, tad y ir teicis patiesību, tātad ir patiess šillišalla:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "}mpp\text{"}}\; mp\,z$$

No z pa kreisi stāv $3n+2$ rūķīši, no kuriem $n + 1$ ir melis. Tā kā $\frac{n+1}{3n+2} > \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$, tad z ir teicis patiesību, tātad ir patiess rūķītis:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "}mpp\text{"}}\; mpp$$

Esam ieguvuši, ka aiz sākotnējām grupām „*mpp*” atkal seko vēl viena grupa „*mpp*”. Līdzīgi aiz tās atkal seko grupa „*mpp*”, utt.

Tā kā $2007 : 3 = 669$, tad skaidrs, ka rindā ir tieši 669 meļi.

3.3.7. Sadalīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 40 pāros:

1 un 40

2 un 39

3 un 38

...

19 un 22

20 un 21

Katrā pārī ir viens pāra un viens nepāra skaitlis, un katrā pārī iekļauto skaitļu summa ir 41. Mums tātad jānoskaidro, vai skaitļus p_1, p_2, ... , p_{10} (pāra skaitļus) un n_1, n_2, ... , n_{10} (nepāra skaitļus) varēja izvēlēties tā, lai nekādi divi no tiem nebūtu vienā pārī.

Pieņemsim, ka izdevies to izdarīt, t.i., nevar atrast vienu Katrīnas un vienu Matīsa izvēlētu skaitli, lai šo abu skaitļu summa būtu 41.

Apskatīsim skaitļus $41-n_1$, $41-n_2$, ... ,$41-n_{10}$. Tie visi ir pāra skaitļi (ja no nepāra skaitļa atņem nepāra skaitli, iegūst pāra skaitli), pie tam dažādi (jo visi skaitļi n_1, n_2, ... , n_{10} ir dažādi). Lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu 41, neviens no šiem 10 pāra skaitļiem nedrīkst būt vienāds ne ar vienu no 10 Katrīnas izvēlētajiem pāra skaitļiem p_1, p_2, ... , p_{10} (tiešām, ja $41-n_i=p_j$, tad $n_i+p_j=41$).

Tātad $41-n_1$, $41-n_2$, ... , $41-n_{10}$, p_1, p_2, ... , p_{10} ir 20 dažādi pāra skaitļi. Tā kā no 1 līdz 40 vispār ir tikai 20 pāra skaitļi, tad viens no skaitļiem $41-n_1$, $41-n_2$, ... , $41-n_{10}$, p_1, p_2, ... , p_{10} ir 2, otrs ir 4, trešais ir 6, ... , divdesmitais ir 40. Tāpēc to summa

$(41-n_1)+(41-n_2)+...+(41-n_{10})+p_1+p_2+...+p_{10}$ ir

$2+4+6+...+38+40$ jeb

$$41\cdot 10-(n_1+n_2+...+n_{10})+(p_1+p_2+...+p_{10})=420 \qquad (*)$$

(pārbaudiet paši, ka visu pāra skaitļu summa no 2 līdz 40 ieskaitot ir 420).

Bet saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $n_1+n_2+...+n_{10}=p_1+p_2+...+p_{10}$, tātad $p_1+p_2+...+p_{10}-(n_1+n_2+...+n_{10})=0$ un, ievietojot to vienādībā (*), tā pārveidojas par vienādību $410=420$, kas, protams, nav pareiza. Tātad iegūta pretruna; secinām, ka mūsu pieņēmums ir nepareizs, un, izvēloties skaitļus uzdevuma nosacījumos minētajā veidā, noteikti atradīsies tādi divi izvēlēti skaitļi, kuru summa ir 41.

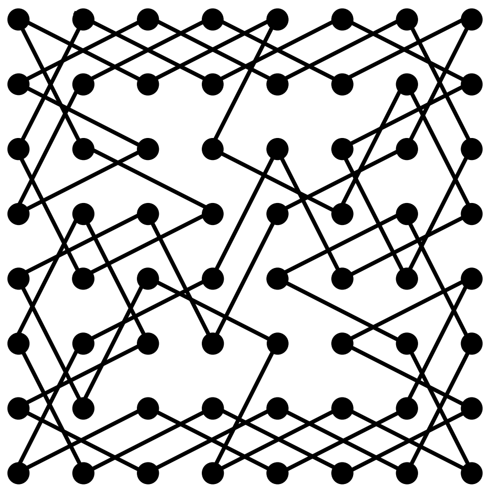
3.3.8. Atbildi: 12 neizšķirtas spēles.

Vispirms parādīsim, ka 12 neizšķirtas spēles var būt. Sadalīsim visus spēlētājus 2 grupās: grupā *A* iekļausim 4 spēlētājus, grupā *B* – 3 spēlētājus. Pieņemsim, ka neizšķirti beidzas visas tās spēles, kurās spēlē kāds *A* spēlētājs pret kādu *B* spēlētāju, un nekādas citas. Tad neizšķirtu pavisam ir $4\cdot 3=12$. No jebkuriem trim spēlētājiem *X*, *Y* un *Z* **vismaz divi** ir no vienas grupas (vai nu abi no *A*, vai abi no *B*), un viņi savā starpā nav spēlējuši neizšķirti. Tāpēc uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Tagad pierādīsim, ka vairāk par 12 neizšķirtām spēlēm nevar būt. Pieņemsim, ka to **ir vairāk par 12**, tātad vismaz 13, un *AB* ir spēle, kas beigusies neizšķirti (*A* un

B – spēlētāji). Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrs no 5 pārējiem spēlētājiem var būt spēlējis neizšķirti ar augstākais **vienu** no A un B; tātad ar A vai B līdzdalību ir notikušas augstākais $5+1=6$ neizšķirtas spēles. Apskatām 5 pārējos spēlētājus; to starpā ir bijušas vismaz $13-6=7$ neizšķirtas spēles. Ja CD ir viena no tām (C un D – spēlētāji), tad līdzīgi iegūstam: šo 5 spēlētāju grupas ietvaros ir ne vairāk kā $3+1=4$ neizšķirtas spēles ar C vai D līdzdalību. Tātad starp trim pārējiem spēlētājiem E, F, G notikušas vismaz $7-4=3$ neizšķirtas spēles – pretruna, jo tad iznāk, ka viņi visi trīs savā starpā spēlējuši neizšķirti. Tātad mūsu pieņēmums par vismaz 13 neizšķirtām spēlēm ir nepareizs.

3.3.9. Attēlojot šaha galdiņa laucinus ar to centriem (pavisam ir $8\times 8=64$ punkti, kas izvietoti kvadrātiska režģa formā), A3.30.zīm. parādīts tāds **noslēgts** šaha zirdziņa maršruts, kas katrā rūtiņā ieiet tikai vienu reizi; apzīmēsim to ar M. **Uzdevumā minētais zirdziņš varbūt neizdara nevienu no tiem gājieniem, kas ietilpst maršrutā *M*.**



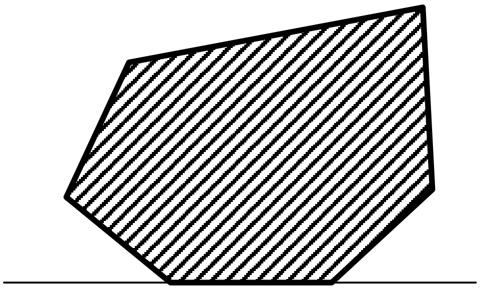
A3.30. zīm.

Maršrutā M **pamīšus** izvietotas 32 baltas un 32 melnas rūtiņas, un tas satur 64 zirdziņa gājienus. Padomāsim, kā maršrutā M var būt izvietotas neizgrieztās 32 rūtiņas. Ja kaut divas no tām maršrutā M seko viena otrai, tad tās arī ir meklējamās rūtiņas A un B. Lai nekādas divas no 32 neizgrieztajām rūtiņām maršrutā M nesekotu viena otrai, izgrieztai jābūt katrai otrajai maršruta M rūtiņai. Bet tad visām izgrieztajām rūtiņām jābūt vienā krāsā, kas nav iespējams, jo puse no izgrieztajām rūtiņām ir melna, puse – balta. Tātad kaut divas neizgrieztās rūtiņas maršrutā M seko viena otrai.

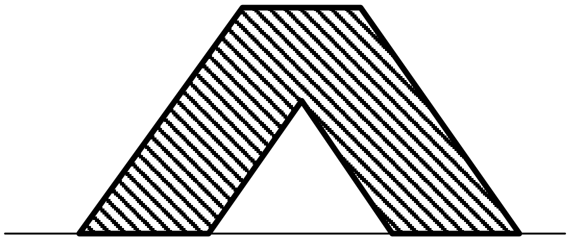
3.3.10. Vispirms atzīmēsim divas svarīgas izliektu daudzstūru īpašības.

I. Ja viena no izliekta daudzstūra malām atrodas uz taisnes t, tad nekādi citi daudzstūra punkti uz taisnes t neatrodas (skat. A3.31.zīm.).

Ja daudzstūris var būt ieliekts, šī īpašība nav spēkā (skat. A3.32.zīm.).



A3.31. zīm.



A3.32. zīm.

II. Teiksim, ka divi izliekti daudzstūri D_1 un D_2 saskaras pa malām a_1 un a_2, ja vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

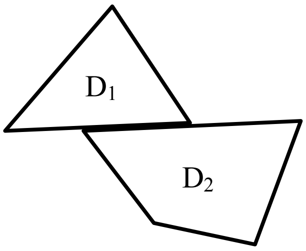
1) D_1 un D_2 neklājas viens otram virsū,

2) viena no D_1 malām ir a_1,

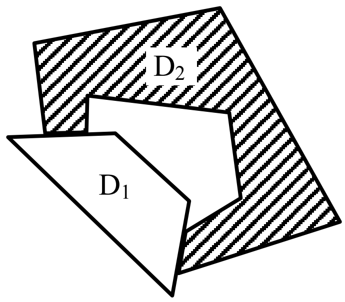
3) viena no D_2 malām ir a_2,

4) malām a_1 un a_2 ir kopīgi **iekšējie** punkti (ne tikai virsotnes).

Katri divi izliekti daudzstūri var saskarties pa augstākais vienu malu pāri (skat. A3.33.zīm.).



A3.33. zīm.



A3.34. zīm.

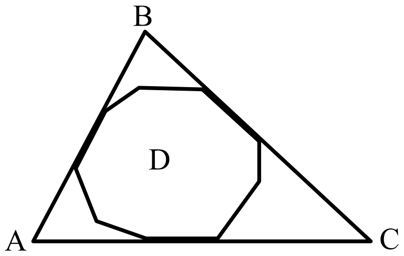
Ja kaut viens no daudzstūriem D_1 un D_2 var būt ieliekts, šī īpašība nav spēkā (skat. A3.34.zīm.).

Tagad ķersimies pie uzdevuma risinājuma.

Apskatīsim tos izliektos daudzstūrus, kuros sagriezts trijstūris ABC. Izvēlēsimies no šiem daudzstūriem tādu, kuram ir **visvairāk malu**; pieņemsim, ka tas ir daudzstūris D ar n malām. (Ja ir vairāki daudzstūri ar vislielāko malu skaitu, ņemam jebkuru no tiem.)

Kas var atrasties „blakus” daudzstūrim D aiz tā malām?

Pirmkārt, aiz dažām malām var „neatrasties nekas”; tās ir tās malas, kuras atrodas uz ΔABC malām. Tomēr tādu malu daudzstūrim D ir ne vairāk kā 3 – saskaņā ar īpašību I ne vairāk kā viena uz katras no ΔABC malām (skat. A3.35.zīm.).



A3.35. zīm.

Aiz katras no citām D malām (šo citu malu ir **vismaz n – 3**) atrodas vismaz viens no izliektajiem daudzstūriem, kuros sagriezts ΔABC; turklāt saskaņā ar II īpašību aiz katras no šīm citām malām atrodas savs izliektais daudzstūris. Tātad bez D ir radušies vēl vismaz n – 3 citi izliekti daudzstūri. Katram no tiem ir vismaz 4 malas (jo neviens no tiem nav trijstūris saskaņā ar uzdevumā doto), un nevienam no tiem nav vairāk par n malām (jo n-stūris D ir ar vislielāko malu skaitu starp radušamies daļām). Ja kādam no šiem n – 3 daudzstūriem ir n malas, tad tam un D ir vienāds malu skaits. Pretējā gadījumā šiem n – 3 daudzstūriem malu skaits var būt tikai viens no skaitļiem 4; 5; 6; ... ; n – 2; n – 1 – pavisam n – 4 dažādas vērtības. Tā kā apskatāmo daudzstūru daudzums n – 3 ir lielāks par iespējamo malu skaitu daudzumu n – 4, tad nevar būt tā, ka visiem daudzstūriem malu skaiti ir dažādi. Tāpēc diviem no tiem malu skaiti ir vienādi, k.b.j.

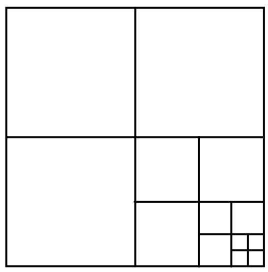
3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. Apzīmēsim pulksteni, kurš iztek 6 minūtēs, ar A, bet pulksteni, kas iztek 8 minūtēs – ar B. Sniegbaltīte vispirms „palaiž" abus pulksteņus. Brīdī, kad A iztecējis, pulkstenī B augšējā traukā vēl palikušas smiltis 2 minūtēm. Šai brīdī Sniegbaltīte sāk cept kūku un turpina vērot pulksteni B. Brīdī, kad no B augšējā trauka visas smiltis iztecējušas (būs pagājušas tieši 2 minūtes), viņa apgriež B otrādi. Brīdī, kad no B augšējā trauka atkal iztecējušas visas smiltis (būs pagājušas 8 minūtes), viņa pārtrauc kūkas cepšanu. Kūka ir cepusies $2+8=10$ minūtes.

Iespējami arī citi pareizi risinājumi.

3.4.2. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Sagriežam kvadrātu vispirms 4 vienādos kvadrātos, tad vienu no 4 iegūtajiem – atkal 4 vienādos kvadrātos, vienu no šiem 4 kvadrātiem – atkal 4 vienādos kvadrātos, utt. Skat. A3.36.zīm., kur parādīti pirmo 4 griešanu rezultāti.



A3.36.zīm.

Viegli saprast, ka, turpinot griešanu šādā veidā, vismazākā izmēra kvadrātu ir 4, bet visu citu izmēru kvadrāti – pa 3. Ievērojam, ka

$2008 = 4 + 2004 = 4 + 668 \cdot 3$. Tātad brīdī, kad būs izveidoti 668 triju vienādu kvadrātu komplekti (tas notiks pēc 669 griešanām), vajadzīgā situācija būs sasniegta.

3.4.3. Atbilde atkarīga no tā, vai sākumā abās kaudzītēs ir vienādi konfekšu daudzumi vai nē.

A. Ja sākumā abās kaudzītēs ir vienādi konfekšu daudzumi, tad, pareizi spēlējot, Maija uzvar. Viņa visu laiku „atdarina" Andra gājienus: ja Andris ar savu gājienu apēd kaut kādu daudzumu konfekšu no vienas kaudzītes, tad Maija ar savu sekojošo gājienu apēd tikpat konfekšu no otras kaudzītes, tādējādi **atkal atjaunojot konfekšu daudzumu vienādību kaudzītēs.** Skaidrs, ka tādā ceļā **Maijai gājienu nepietrūks:** tā kā kaudzītes ir vienādas, tad tikpat konfekšu, cik Andris apēd no vienas, Maija var apēst no otras. Tā kā spēlei tomēr kādreiz jābeidzas (nevar ēst konfektes bezgalīgi), tad gājienu pietrūks Andrim. Tāda situācija iestāsies brīdī, kad viņš pilnīgi iztukšos vienu kaudzīti; tad Maija ar savu gājienu nākošo pilnīgi iztukšos otru kaudzīti, un spēle būs beigusies.

B. Ja sākumā abās kaudzītēs ir atšķirīgi konfekšu daudzumi, tad, pareizi spēlējot, uzvar Andris. Ar savu pirmo gājienu viņš apēd no lielākās kaudzītes tik daudz konfekšu, lai abās kaudzītēs paliktu vienāds konfekšu daudzums, un tālāk spēlē „uz izlīdzināšanu" tāpat, kā Maija **A** gadījumā.

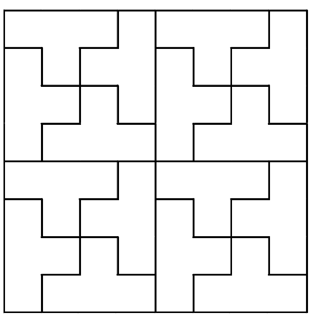
3.4.4. Atbilde: a) nevar, **b)** var, **c)** nevar.

Risinājums:

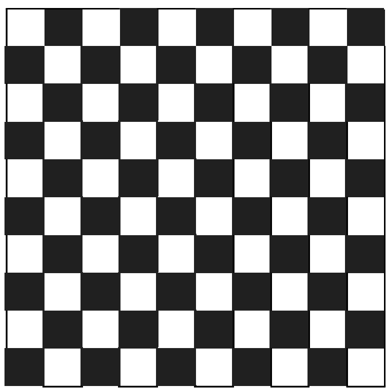
a) Ievērojam, ka katrā mazajā figūriņā ir 4 rūtiņas. Dotajā 9×9 rūtiņu kvadrātā pavisam kopā ir 81 rūtiņa; 81 nedalās ar 4. Tāpēc kvadrāta rūtiņas nevar sadalīties pa figūriņām tā, lai katrā figūriņā būtu 4 rūtiņas.

b) Skat. A3.37.zīm. Skaidrs, ka iespējami arī citi risinājumi.

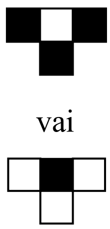
c) Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā (skat.A3.38.zīm.); ir 50 baltas un 50 melnas rūtiņas.



A3.37. zīm.



A3.38. zīm.



A3.39. zīm.

Pieņemsim pretējo tam, ko vēlamies pierādīt – pieņemsim, ka kvadrāts sagriezts uzdevumā minētajās figūriņās. Tā kā kvadrātā ir 100 rūtiņas, bet viena figūriņa satur 4 rūtiņas, tad figūriņu ir $100 : 4 = 25$. Ievērosim, ka katra figūriņa noteikti satur vai nu 1, vai 3 baltas rūtiņas (skat. A3.39.zīm.), lai kurā vietā tā arī būtu izgriezta. Gan 1, gan 3 ir nepāra skaitļi.

Tā kā figūriņas ir 25 un katrā no tām ir nepāra skaits baltu rūtiņu un nepāra skaits melnu rūtiņu, tad kopā visā lielajā kvadrātā jābūt nepāra skaitam melno un balto rūtiņu (jo divu nepāra skaitļu reizinājums būs nepāra skaitlis). Bet mēs jau iepriekš ieguvām, ka ir tieši 50 baltas un 50 melnas rūtiņas. Esam ieguvuši pretrunu. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams. Kvadrātu ar izmēriem 10×10 rūtiņas nevar sagriezt dotā tipa figūriņās.

3.4.5. Uzrakstām reizinātājus citā kārtībā:

$R = (2 \cdot 5) \cdot 10 \cdot (4 \cdot 15) \cdot 20 \cdot (8 \cdot 25) \cdot Q$, kur ar Q apzīmēts visu to reizinātāju reizinājums, kas nav uzrakstīti atsevišķi. Acīmredzot, Q ir vesels skaitlis, kas nebeidzas ne ar 0, ne ar 5 (jo Q nesatur nevienu reizinātāju, kas dalītos ar 5), un $R = 10 \cdot 10 \cdot 60 \cdot 20 \cdot 200 \cdot Q = 24000000 \cdot Q = (24 \cdot Q) \cdot 1000000$. Skaitlis $24 \cdot Q$ ir pāra skaitlis, kas nebeidzas ar 0; tātad tā pēdējais cipars ir **nenulles pāra cipars**. Šis cipars ir tas, par kuru runā uzdevumā.

3.4.6. Viegli pārbaudīt, ka pastāv identitāte

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc).$$

Tā kā $a + b + c = 0$ un $ab + ac + bc = 0$, tad iegūstam, ka $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Atceramies, ka katra skaitļa kvadrāts ir vai nu pozitīvs, vai 0. Tāpēc vienādība $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ pastāv tad un tikai tad, ja $a^2 = b^2 = c^2 = 0$, t.i., tad un tikai tad, ja $a = b = c = 0$. No tā seko, ka $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, k.b.j.

3.4.7. Kā zināms no absolūtās vērtības (moduļa) definīcijas, jebkurai izteiksmei vai skaitlim A ir spēkā sakarība

$$|A| = \begin{cases} A, \, ja \ A \geq 0, \\ -A, \, ja \ A < 0. \end{cases}$$

Apzīmēsim $x^2 + ax + b = f(x)$; $x^2 + cx + d = g(x)$; $x^2 + ex + f = h(x)$.

Tāpēc dotais vienādojums $|f(x)| + |g(x)| = |h(x)|$ pārveidojas par vienu no 8 vienādojumiem atkarībā no tā, vai $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$ ir negatīvi vai nav:

Nr.	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	Iegūtais vienādojums
1.	≥0	≥0	≥0	$f(x) + g(x) = h(x)$
2.	≥0	≥0	<0	$f(x) + g(x) = -h(x)$
3.	≥0	<0	≥0	$f(x) - g(x) = h(x)$
4.	≥0	<0	<0	$f(x) - g(x) = -h(x)$
5.	<0	≥0	≥0	$-f(x) + g(x) = h(x)$
6.	<0	≥0	<0	$-f(x) + g(x) = -h(x)$
7.	<0	<0	≥0	$-f(x) - g(x) = h(x)$
8.	<0	<0	<0	$-f(x) - g(x) = -h(x)$

Viegli saprast, ka katrs pēdējā kolonnā iegūtais vienādojums ir kvadrātvienādojums (visi 3 saskaitāmie x^2 nevar saīsināties, jo to ir nepāra skaits), tāpēc tam nav vairāk par divām saknēm (kuras pie tam der par **dotā** vienādojuma atrisinājumiem tikai tad, ja apmierina tos nosacījumus par $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$, pie kuriem atbilstošais pēdējās kolonnas vienādojums iegūts).

Viegli saskatīt, ka 1. un 8. vienādojums ir līdzvērtīgi (ekvivalenti), tāpēc tiem ir vienas un tās pašas saknes. Tāpat ekvivalenti ir 2. un 7., 3. un 6., 4. un 5. vienādojumi. Tātad mums ir ne vairāk par 4 dažādiem kvadrātvienādojumiem, kam kopā nav vairāk par 8 dažādām saknēm, kuras pie tam visas varbūt nemaz nav sākumā dotā vienādojuma saknes. Tāpēc uzdevumā dotajam vienādojumam **nav vairāk par 8 dažādām saknēm**.

Komentārs. Jau šāda rezultāta iegūšana skolēnam būtu labs sasniegums. Tomēr mēs neesam noskaidrojuši, vai 8 dažādas saknes tiešām **var** būt? (Tas gan uzdevumā arī nebija prasīts.) Atstājam to lasītājiem patstāvīgai pētīšanai.

3.4.8. Nē, ne noteikti. Uzrādīsim minētā tipa virkni, kurā visi locekļi ir pirmskaitļi (t.i., tajā nav neviena skaitļa, kas nebūtu pirmskaitlis):

pirmais virknes loceklis ir 2;

otrais virknes loceklis ir 3;

katrs nākošais loceklis ir pirmā locekļa un otrā locekļa summa, t.i. $2+3=5$.

Tātad šī virkne ir 2; 3; 5; 5; 5;... , t.i., sastāv tikai no pirmskaitļiem.

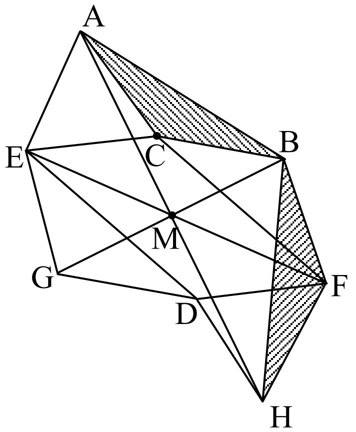
Komentārs. Ja uzdevuma formulējumā pievieno nosacījumu, ka virkne ir augoša (t.i., katrs nākošais virknes loceklis ir stingri lielāks par iepriekšējo), uzdevuma apgalvojums ir pareizs. Pamēģiniet pierādīt to patstāvīgi.

3.4.9. 1) Saskaņā ar uzdevumā doto ΔEAC ir vienādmalu.

2) ΔCBF ir vienādsānu ar virsotnes leņķi $\angle CBF = 120°$.

3) Papildinām zīmējumu simetriski attiecībā pret punktu *M* (skat. A3.40.zīm.).

4) Tad *M* ir četrstūra *ECFD* diagonāļu *EF* un *CD* krustpunkts un vienlaicīgi viduspunkts, tāpēc *ECFD* ir paralelograms.



A3.40. zīm.

5) Pieņemsim uz brīdi, ka $\Delta ACB = \Delta HFB$ (1).

6) Simetrijas pēc $\Delta HFB = \Delta AEG$ un $\Delta ACB = \Delta HDG$.

7) No četru trijstūru vienādībām seko $AB = HB$, $HB = AG$ un $AB = HG$.

8) Tātad četrstūrī $ABHG$ visas malas ir vienādas; tātad tas ir rombs.

9) Tātad šī romba diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras; tātad $\angle AMB = 90°$, k.b.j.

10) Tagad mums atliek pierādīt (1).

11) Simetrijas pēc $AC = HD = HF$.

12) Tā kā ΔCBF ir vienādsānu, tad $CB = FB$.

13) Lai pierādītu trijstūru vienādību (1) (mlm), atliek pierādīt, ka $\angle ACB = \angle HFB$.

14) No 2. punkta seko, ka $\angle BCF = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Tātad arī $\angle BFC = 30°$.

15) $\angle ACB = 360° - \angle ACE - \angle BCF - \angle ECF = 360° - 60° - 30° - \angle ECF =$
$= \mathbf{270° - \angle ECF}$.

16) Atceramies, ka $ECFD$ ir paralelograms, tāpēc $\angle DFC = 180° - \angle ECF$.

17) Tad iegūstam, ka arī $\angle HFB = \angle HFD + \angle DFC + \angle CFB =$
$= 60° + (180° - \angle ECF) + 30° =$ $\mathbf{270° - \angle ECF}$. Vajadzīgais pierādīts.

3.4.10. Vispirms ievērosim, ka $11 \times 11 = 11 \times (1 + 10) = 11 + 11 \times 10$. Tāpēc 11×11 var aprēķināt šādi (pēc skolā mācītā saskaitīšanas paņēmiena) (skat.A3.41.zīm.):

	1	1
1	1	0
1	2	1

A3.41. zīm.

Tālāk $(11 \times 11) \times 11 = (11 \times 11) \times (1 + 10) = 11 \times 11 + 11 \times 11 \times 10$, un to pēc skolā mācītā saskaitīšanas paņēmiena var aprēķināt (skat. A3.42.zīm.):

	1	2	1
1	2	1	0
1	3	3	1

A3.42. zīm.

Līdzīgi turpinot (skat. A3.43.zīm.), 39.rindiņā iegūsim vajadzīgo rezultātu

				1	1	
			1	1	0	
			1	2	1	3.rinda
		1	2	1	0	
		1	3	3	1	5.rinda
	1	3	3	1	0	
	1	4	6	4	1	7.rinda
1	4	6	4	1	0	
1	6	1	0	5	1	9.rinda

...

A3.43. zīm.

Lai risinājums būtu pilnīgs, jāpamato, kāpēc rezultātā nav vairāk par 30 cipariem (mūsu lapas platums ir 30 rūtiņas) jeb, ka $11^{20} < 10^{30}$ (10^{30} ir pirmais naturālais skaitlis, kam ir vairāk par 30 cipariem).

No A3.43.zīm. redzams, ka $11^5 < 200000$. Tāpēc

$11^{20} = 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11^5 < 200000 \cdot 200000 \cdot 200000 \cdot 200000 =$

$= 16 \cdot 10^{20} < 100 \cdot 10^{20} = 10^{22} < 10^{30}$.

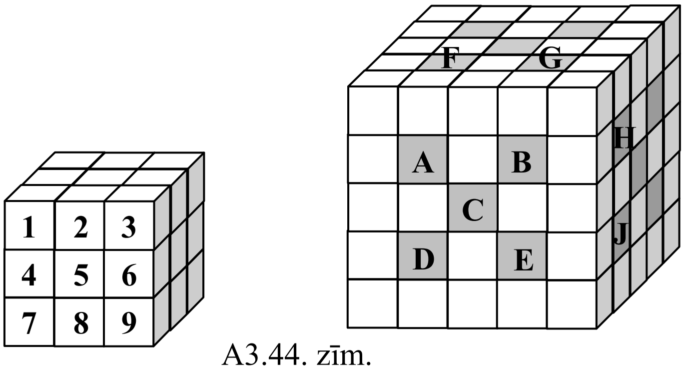
3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

3.5.1. Sākotnēji uz Andra lapas ir 35 robežas starp melniem un baltiem apgabaliem. Beigās, kad visa lapa būs balta, šādu robežu vairs nebūs. Tātad robežu skaitu jāsamazina no 35 uz 0. Vienu joslu nokrāsojot, robežu skaits samazinās ne vairāk kā par 2 (vienā un otrā pusē no šīs joslas). Tā kā $35 > 17 \cdot 2$, tad ar 17 krāsošanām visu lapu baltu padarīt nevar, un nepieciešamas vismaz 18 krāsošanas. Skaidrs, ka ar 18 krāsošanām mērķi var sasniegt: nokrāsojam pa vienai baltas visas 18 sākotnēji melnās joslas.

3.5.2. Atbilde: ir 57 melni kubiņi.

Risinājums. Kubā ārējā slānī ir 30 melni kubiņi – pa 5 katrā no skaldnēm (neviens melnais kubiņš nav redzams vienlaicīgi vairāk kā vienā kuba skaldnē). Noņemsim šos ārējos kubiņus. Pāri paliek kubs, kas sastāv no $3 \times 3 \times 3$ mazajiem kubiņiem.

Pamatosim, ka visi šie kubiņi ir melni. Skaidrs, ka centrālais kubiņš ir melns. Apskatīsim palikušā kuba priekšējo skaldni un katram tās kubiņam norādīsim tādu sākotnējā kuba rindu, „kuras dēļ” šis kubiņš ir melns (skat.A3.44.zīm.)



A3.44. zīm.

1 – A; 2 – H; 3 – B; 4 – F; 5 – C; 6 – G; 7 – D; 8 – J; 9 – E (ir arī citi „vaininieki”).

Tā kā mūsu krāsojums ir „vienāds”, raugoties no visām pusēm, tad arī pārējās kuba skaldnes visas ir melnas. Tāpēc visi $3\times3\times3=27$ palikušie kubiņi ir melni.

Tātad melno kubiņu pavisam ir $30+27=57$.

3.5.3. Atbilde: a) nevar, **b)** var.

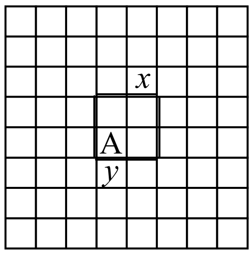
Risinājums.

a) Summā $S=1+2+3+...+24+25$ ir 12 pāra saskaitāmie un 13 nepāra saskaitāmie. Tāpēc S ir nepāra skaitlis. Ja katrā rindā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, tad S būtu izsakāma kā piecu pāra skaitļu summa (pirmās rindas summa + otrās rindas summa + ... + piektās rindas summa). Tā ir pretruna.

b) Situāciju, kurā visas apskatāmās summas ir nepāra skaitļi, skat. A3.45.zīm. Ar krustiņiem apzīmētajās rūtiņās ierakstīti nepāra skaitļi, pārējās – pāra skaitļi.

x				
x				
x	x	x		
x	x	x		
x	x	x	x	x

A3.45. zīm.



A3.46. zīm.

3.5.4. Atbilde: uzvar Andris

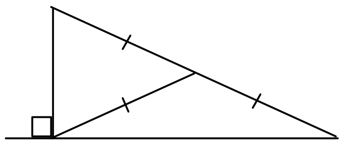
Risinājums. Andra stratēģija var būt, piemēram, šāda. Ar savu pirmo gājienu viņš ieraksta „A”, kā parādīts A3.46.zīm. Ievērosim, ka turpmāk Maija nedrīkst rakstīt „M” nevienā no izceltā 2×2 rūtiņas lielā kvadrāta rūtiņām. Ja Maija ar savu kārtējo gājienu ieraksta „M” kādā rūtiņā (piem., x), tad Andris ar savu atbildes gājienu ieraksta „A” rūtiņā y, kas ir simetriska rūtiņai x attiecībā pret kvadrāta centru (skaidrs, ka Andris zīmējumā attēlotajā rūtiņā y sava vārda pirmo burtu rakstīt drīkst, jo tas atbilst spēles noteikumiem). Šādi spēlējot, burti A un M (izņemot pirmo burtu A) izvietojas simetriski; tāpēc, ja rūtiņa x ir pieejama Maijai, tad rūtiņa y ir pieejama Andrim. Tāpēc Andrim gājienu nepietrūks: uz katru Maijas gājienu viņam ir atbildes gājiens. Tā kā kādam tomēr gājienu pietrūks, tad to pietrūks Maijai, un Andris uzvarēs.

3.5.5. Atbilde: nē, nevar.

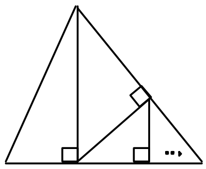
Risinājums: Visos izrakstītajos skaitļos kopā ir 21 cipars „pieci": 11 reizes kā vienu cipars un 10 reizes kā desmitu cipars. Ja abi iegūtie garie skaitļi būtu vienādi, tajos būtu vienādi piecinieku daudzumi, bet tad piecinieku pavisam būtu pāra skaits – esam ieguvuši pretrunu. Tātad prasītais nav iespējams.

Iespējami daudzi atrisinājumi, kas balstās uz citām idejām.

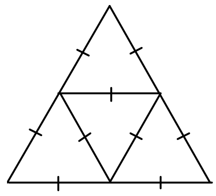
3.5.6. Atceramies, ka taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas (A3.47.zīm.) Tātad taisnleņķa trijstūri var sagriezt 2 vienādsānu trijstūros.



A3.47. zīm.



A3.48. zīm.

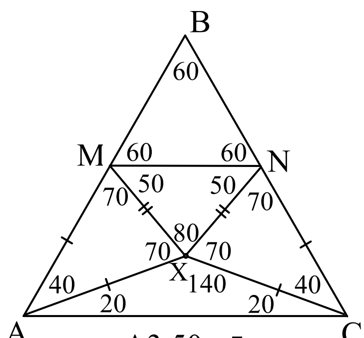


A3.49. zīm.

Tā kā **katru** trijstūri var sagriezt 2; 3; 4;... taisnleņķa trijstūros (skat. A3.48.zīm.), tad **katru** trijstūri var sagriezt 4; 6; 8;... vienādsānu trijstūros.

Novelkot vienādmalu trijstūrī viduslīnijas, tas sadalās 4 vienādmalu trijstūros (skat. A3.49.zīm.) Atstājot 3 no tiem nedalītus, bet ceturto dalot 4; 6; 8;... vienādsānu trijstūros, kā aprakstīts augstāk, iegūstam sākotnējā trijstūra sadalījumu 7; 9; 11;... vienādsānu trijstūros.

Atliek parādīt, kā sadalīt vienādmalu trijstūri piecos vienādsānu trijstūros. Viena no iespējām redzama A3.50. zīm.; skaitļi apzīmē leņķu lielumus grādos.



A3.50. zīm.

Parādīsim konstrukcijas gaitu un pierādīsim, ka visi iegūtie trijstūri ir vienādsānu:

1) Vispirms iegūst punktu X ΔABC iekšpusē tā, ka $\angle XAC = \angle XCA = 20°$.

2) Tātad ΔAXC ir vienādsānu.

3) $\angle AXC = 180° - 20° - 20° = 140°$

4) Atliekam punktus M un N uz malām AB un BC tā, ka $AM = AX = CX = CN$.

5) Tātad ΔAMX un ΔXNC ir vienādsānu trijstūri.

6) $\angle AMX = \angle MXA = (180° - 40°) : 2 = 70°$. Līdzīgi iegūstam, ka arī $\angle CNX = \angle CXN = 70°$.

7) Skaidrs, ka $\Delta MXA = \Delta NXC$ (mlm), tātad ΔMXN - vienādsānu trijstūris.

8) $\angle MXN = 360° - 70° - 70° - 140° = 80°$ un $\angle XMN = (180° - 80°) : 2 = 50° =$ $= \angle XNM$.

9) $\angle BMN = \angle BNM = 180° - 50° - 70° = 60°$.

10) Tātad ΔBMN - vienādmalu. Tātad esam parādījuši, kā sadalīt vienādmalu trijstūri 5 vienādsānu trijstūros.

3.5.7. Atbilde: a) jā, **b)** nē.

Risinājums.

a) Viegli pārbaudīt, ka skaitlis $\overline{ab144} = \overline{ab000} + 144 = \overline{ab} \cdot 1000 + 144 =$

$= 8(\overline{ab} \cdot 125 + 18)$ dalās ar 8 pie **jebkuriem** cipariem a un b.

b) Ievērosim, ka skaitļus 4 un 7 varam uzrakstīt kā skaitļu 1 un 3 summas: $4 = 3 + 1$ un $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Tāpēc, ja skaitļa $\overline{abcde}$ cipari drīkst būt vienīgi 1; 4; 7, tad tā ciparu summa sastāv no 5 vieniniekiem un (varbūt) dažiem trijniekiem, tātad tā nedalās ar 3. Tātad tā nedalās arī ar 9. Bet tad pats skaitlis $\overline{abcde}$ arī nedalās ar 9.

3.5.8. Atbilde: 12 dienas.

Risinājums: Tas, ka 12 dienās prasīto var sasniegt, redzams sekojošā tabulā:

Datums	Dim	Rub	Smar	Top	Saf	Amet	Hriz
1.	7	6	5	4	3	2	1
2.	8	9	7	6	5	4	3
3.	9	11	10	8	7	6	5
4.	10	12	13	11	9	8	7
5.	11	13	15	14	12	10	9
6.	12	14	16	17	15	13	11
7.	13	15	17	19	18	16	14
8.	15	16	18	20	21	19	17
9.	17	18	19	21	23	22	20
10.	19	20	21	22	24	25	23
11.	21	22	23	24	25	27	26
12.	23	24	25	26	27	28	29

Katrā datumā apvilkts tas dārgakmeņu daudzums, kas šajā datumā ir vislielākais. Viegli pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Tagad parādīsim, ka ar mazāk kā 12 dienām nepietiek. Sauksim dienu, kurā kāds no dārgakmeņiem **pirmo reizi** Sniegbaltītei ir vislielākajā skaitā, par **īpašu** šim dārgakmenim. Skaidrs, ka 1. janvāris ir īpaša diena kādam dārgakmenim. Ir vēl 6 citas īpašas dienas; sauksim tās parādīšanās secībā par 2., 3., 4., 5., 6., 7. īpašo dienu.

Pierādīsim, ka 2. un 3. īpašā diena, 3. un 4. īpašā diena, ... , 6. un 7. īpašā diena nevar kalendārā atrasties blakus. Tad uzdevums būs atrisināts: apskatāmajā laika posmā jābūt 7 īpašajām dienām un vēl vismaz 5 „atdalītājdienām" pirms 3., 4., 5., 6., 7. īpašās dienas. Tātad kopā jābūt vismaz 7+5=12 dienām.

Atliek pierādīt izcelto apgalvojumu.

Pieņemsim, ka dienā „X" divi lielākie dārgakmeņu daudzumi ir $a>b$ un attiecīgie dārgakmeņi ir A un B. Tā kā dārgakmeņu daudzumi ir naturāli skaitļi (turklāt tie ir dažādi), tad $b \le a-1$, bet pārējo dārgakmeņu ir ne vairāk kā $a-2$ katrs.

Dienā „X+1" dārgakmeņu A ir vismaz $a+1$, dārgakmeņu B ir $b+1$, $b+2$ vai $b+3$, bet citu dārgakmeņu ir ne vairāk kā $(a-2)+3=a+1$ katrs.

Tātad diena „X+1" nav īpaša dārgakmenim A (jo tā nav pirmā diena, kad dārgakmeņu A ir visvairāk) un nav īpaša nevienam citam dārgakmenim bez A un B (jo to nav vairāk kā A katrs).

Tātad diena „X+1"var būt īpaša tikai dārgakmenim B, kurš pirms tam dienā „X" bija „otrajā vietā"; savukārt iepriekšējais „līderis" A dienā „X+1" atrodas otrajā vietā.

Aplūkosim n-to īpašo dienu, $n \ge 3$; apzīmēsim to ar „Y+1", bet iepriekšējo kalendāra dienu – ar „Y". Pieņemsim, ka „Y" arī ir īpašā diena.

Tā kā $n \ge 3$, tad „Y" ir vismaz otrā īpašā diena, tāpēc eksistē kalendāra diena tieši pirms „Y". Apzīmēsim to ar „Y-1".

Pieņemsim, ka diena „Y+1" ir īpaša diena dārgakmenim B, bet diena „Y" – dārgakmenim A. Saskaņā ar iepriekš pierādīto dienā „Y" dārgakmeņu B skaits bija otrais lielākais. Bet tad dienā „Y-1" dārgakmeņu A skaits bija otrais lielākais un dārgakmeņu B skaits – lielākais. Tā ir pretruna, jo tad diena „Y+1" nav **pirmā** diena, kurā dārgakmeņu B skaits ir vislielākais (līdz ar to tā nav šī dārgakmeņa īpašā diena). Tāpēc mūsu pieņēmums par to, ka dienas „Y" un „Y+1" abas ir īpašas, ir nepareizs.

Piezīme. Šādu pretrunu nevar iegūt no pieņēmuma, ka 1. un 2. īpašā diena atrodas blakus; šai gadījumā diena „Y-1" var vispār neeksistēt.

3.5.9. Viegli pārbaudīt, ka $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

Viens no ceļiem, kā iegūt minēto sadalījumu, izmanto kubu summas formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ un summas kuba formulu $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Pakāpeniski iegūstam:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$

$= (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3 - 3xyz =$

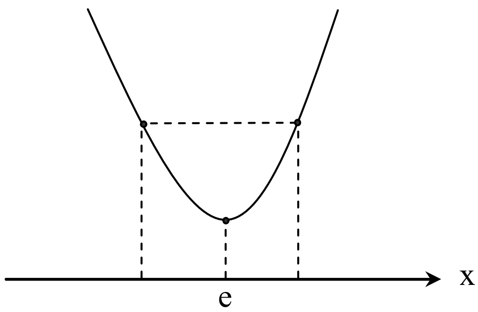
$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) =$

$= ((x+y)+z)((x+y)^2 - (x+y)z + z^2) - 3xy(x+y+z) =$

$= (x+y+z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy) =$

$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$, k.b.j.

3.5.10. Funkcijas *f(x)* grafiks novietojas šādi (skat. A3.51.zīm.) (nav svarīgi, vai tas krusto vai nekrusto Ox asi un kur atrodas Oy ass):



A3.51. zīm.

Funkcijas mazākā vērtība atbilst kaut kādai argumenta *x* vērtībai *x=e*. Pie $x \le e$ funkcija *f(x)* dilst, pie $x \ge e$ - aug. Turklāt grafiks ir simetrisks attiecībā pret taisni *x=e*. Tāpēc no nosacījuma *f(a)=f(b)* seko, ka viens no skaitļiem *a* un *b* atrodas pa kreisi no *e* (vai sakrīt ar *e*), bet otrs – pa labi no *e* (vai sakrīt ar *e*), turklāt $|a-e| = |b-e|$. Tāpēc uz skaitļu ass *e* atrodas „tieši vidū" starp *a* un *b*; tāpēc $\frac{a+b}{2} = e$.

Tā kā $a+b=c+d$, tad no šejienes seko, ka $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2} = e$, t.i., *e* atrodas „tieši vidū" starp *c* un *d*. No šī fakta un augšminētās simetrijas arī seko, ka *f(c)=f(d)*, k.b.j.

Iespējami arī citi risinājumi, piemēram, pakāpeniski algebriski pārveidojumi, kas sākas ar vienādību $a^2 + pa + q = b^2 + pb + q$.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. Tāds ir, piemēram, skaitlis 10004728. Tiešām,

$$\begin{array}{r} 10004728 \\ +\ 10047280 \\ \hline 20052008 \end{array}.$$

3.6.2. Ievērosim, ka brīžos, kad mēs spirāles kārtējā rūtiņā ierakstām nepāra skaitļu kvadrātus (t.i., $1 = 1^2, 9 = 3^2, 25 = 5^2$ utt.), aizpildītās rūtiņas veido ģeometrisku figūru – kvadrātu, un mēs attiecīgā nepāra skaitļa kvadrātu ierakstām apakšējā labajā stūra rūtiņā (skat. A3.52.zīm.).

1

5	4	3
6	1	2
7	8	9

17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	23	24	25

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49

utt.

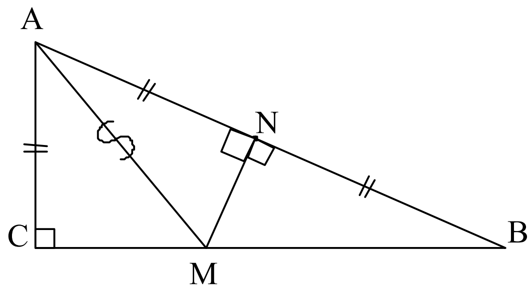
A3.52. zīm.

Tas arī saprotams, jo katrs nākošais spirāles pilnais gredzens pievieno aizpildītajam kvadrātam vienu rūtiņu joslu gar katru malu, t.i., palielina tā malas garumu (rūtiņās) par 2.

Ievērosim, ka $43^2 = 1849 < 2008 < 2025 = 45^2$. Skaitlis $45^2 = 2025$ tiek uzrakstīts tā spirāles gredzena labajā apakšējā stūrī, kura mala satur 45 rūtiņas. Naturālo skaitļu rindā 44 tieši pirms 2025 esošie naturālie skaitļi (t.i., skaitļi $2025-1, 2025-2, \ldots, 2025-44$) tiek ierakstīti šī spirāles gredzena apakšējā horizontālajā posmā. Tā kā arī skaitlis $2008 = 2025 - 17$ ir viens no tiem, tad tas arī tiek ierakstīts šajā posmā.

Skaitļu virknē $3^2; 5^2; 7^2; \ldots; 45^2$ skaitlis $45^2 = 2025$ ir $\left(\frac{45-3}{2}+1\right)$-ais jeb 22-ais. Tātad tas ir nobīdīts 22 rūtiņas uz leju un 22 rūtiņas pa labi no skaitļa 1. Tā kā 2008 ir nobīdīts 17 rūtiņas pa kreisi no 2025, tad 2008 ir nobīdīts 22 rūtiņas uz leju un $22 - 17 = 5$ rūtiņas pa labi no skaitļa 1.

3.6.3. 1) Atceramies skolā mācītu faktu: ja taisnleņķa trijstūrī viens šaurais leņķis ir $30°$ liels, tad šī leņķa pretkatetes garums ir puse no hipotenūzas garuma.



A3.53. zīm.

2) Tāpēc $AN = BN = AC$ (skat. A3.53.zīm.).

3) Tāpēc $\Delta ANM = \Delta ACM$ (kh).

4) $\angle CAM = \angle NAM = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30° = \angle NBM$.

5) Tāpēc $\Delta ACM = \Delta BNM$ (lml).

6) No iepriekšējiem punktiem seko, ka $CM = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BM$.

7) $CM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(CB - CM)$.

8) Vienkāršojot iepriekšējā punktā iegūto vienādību $CM = \frac{1}{2}CB - \frac{1}{2}CM$, iegūstam $CM = \frac{1}{3}CB$.

9) Tā kā $NM = CM$, tad $NM = \frac{1}{3}BC$, līdz ar to vajadzīgais pierādīts.

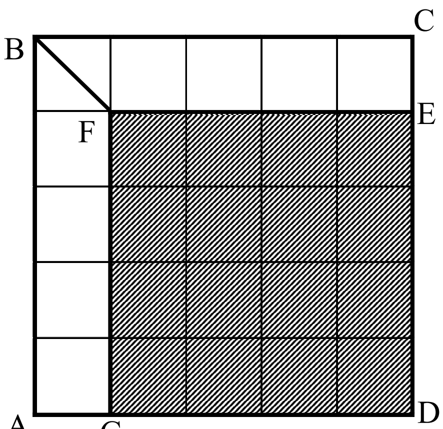
3.6.4. Saskaņā ar doto eksistē tāds naturāls skaitlis *n*, ka $xy + 2y + 4 = 7n$; tātad $\boldsymbol{4 = 7n - xy - 2y}$. Tāpēc *y* nedalās ar 7 (ja *y* dalītos ar 7, tad izceltajā vienādībā visi locekļi labajā pusē dalītos ar 7, tāpēc arī 4 dalītos ar 7 – pretruna). Identisku pārveidojumu ceļā iegūstam:

$y(zx + 2x + 4) = xyz + 2xy + 4y =$

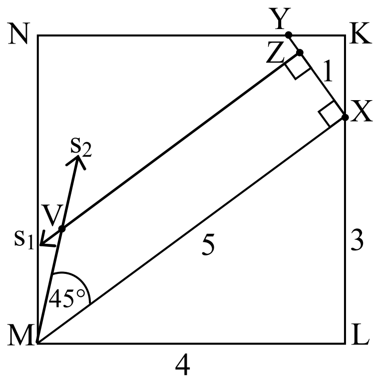
$= z(\boldsymbol{xy + 2y + 4}) - 2(\boldsymbol{yz + 2z + 4}) + 2(\boldsymbol{xy + 2y + 4})$.

Saskaņā ar uzdevumā doto trīs izceltās iekavas dalās ar 7. Tāpēc arī $y(zx + 2x + 4)$ dalās ar 7. Tā kā *y* nedalās ar 7 un 7 – pirmskaitlis, tad $zx + 2x + 4$ dalās ar 7, k.b.j.

3.6.5. a) jā, var. Vienu kvadrātu ar izmēriem 4×4 novietojam, kā parādīts A3.54.zīm. Atliek parādīt, ka katru no četrstūriem *ABFG* un *BCEF* var pārklāt ar kvadrātu ar izmēriem 4×4. Šie četrstūri ir vienādi. Parādīsim, ka vienu no tiem var ievietot kvadrātā ar izmēriem 4×4. Tad uzdevums būs atrisināts.



A3.54. zīm.



A3.55. zīm.

1) Pieņemsim, ka *MNKL* – kvadrāts ar malas garumu 4 (skat. A3.55.zīm.).

2) Atliekam punktu *X* uz malas *LK* tā, ka $LX = 3$; tad $XK = 4 - 3 = 1$.

3) Pēc Pitagora teorēmas $MX^2 = ML^2 + LX^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, tātad $MX = 5$.

4) Novelkam $XY \perp MX$.

5) Tā kā taisnleņķa trijstūrī *XKY* hipotenūza garāka par kateti, tad $XY > XK = 1$.

6) Tāpēc, atliekot uz stara *XY* tādu punktu *Z*, ka $XZ = 1$, šis punkts *Z* atradīsies kvadrāta *MNKL* iekšpusē.

7) Velkam caur *Z* staru s_1 paralēli *MX*.

8) Skaidrs, ka $\angle LMX < \angle LMK = 45°$, tāpēc $\angle NMX > 45°$.

9) Velkam staru s_2 ar sākumpunktu *M* tā, lai tas veidotu $45°$ leņķi ar *MX*.

10) Saskaņā ar augstāk pierādīto šis stars sākotnēji ies kvadrāta *MNKL* iekšpusē.

11) Apzīmēsim s_1 un s_2 krustpunktu ar *V*.

12) Saskaņā ar konstrukciju četrstūri *BCEF* un *MXZV* vienādi savā starpā, un otrais no tiem ir pārklāts ar 4×4 kvadrātu *MNKL*. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

b) nē, nevar. Viegli saprast, ka viens kvadrāts ar izmēriem 4×4 nevar pārklāt divas virsotnes kvadrātam ar izmēriem 5×5, ja abu kvadrātu malas ir paralēlas / perpendikulāras. Tāpēc katrai 5×5 kvadrāta virsotnei vajadzīgs cits pārklājošais kvadrāts; tātad tos vajag vismaz četrus.

3.6.6. Viegli pārbaudīt, ka var ņemt, piemēram, $r = \left(\frac{31}{12}\right)^2 = \frac{961}{144}$. Tiešām, tad

$$r + 5 = \frac{961}{144} + 5 = \frac{961 + 720}{144} = \frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2 \text{ un}$$

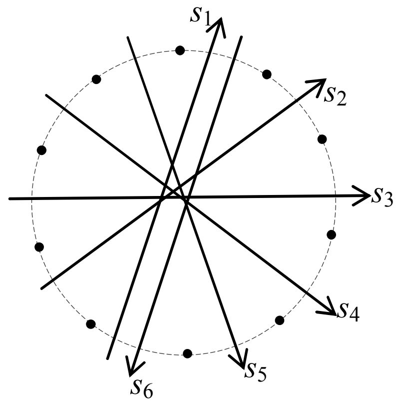
$$r + 10 = \frac{961}{144} + 10 = \frac{961 + 1440}{144} = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

3.6.7. Nē, nevar.

Pierādīsim, ka no pirmās nevienādības seko $x^2 + y^2 < 8(z^2 + t^2)$. Tas būs pretrunā ar otro uzdevumā doto nevienādību.

Ceļot $x + y < 2(z + t)$ abas puses kvadrātā, iegūstam $x^2 + 2xy + y^2 < 4(x^2 + 2xt + t^2)$. Tā kā gan *x*, gan *y* ir pozitīvi skaitļi, tad iegūstam $x^2 + y^2 < 4(z^2 + t^2) + 8zt =$ $= 4(z^2 + t^2) + 4(z^2 + t^2 - (z - t)^2) = 8(z^2 + t^2) - 4(z - t)^2 \le 8(z^2 + t^2)$, k.b.j.

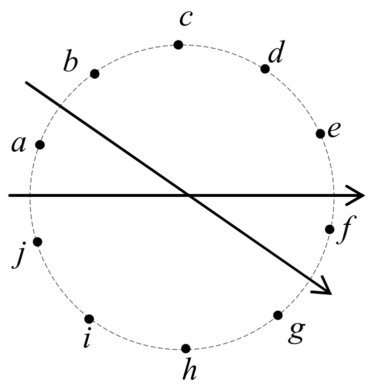
3.6.8. Pierādīsim, ka tādu taisni var novilkt tā, lai katrā pusē no tās būtu tieši 5 uzrakstītie skaitļi.



A3.56. zīm.

Apskatīsim sešus starus; katrs no tiem atdala vienas 5 desmitstūra virsotnes no pārējām 5 (skat. A3.56.zīm.). Katram no šiem stariem s_i ar K_i apzīmēsim skaitļu summu tā kreisajā pusē, ar L_i – skaitļu summu tā labajā pusē. Ar S_i apzīmēsim starpību $S_i = K_i - L_i$, $i = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Mēs pierādīsim, ka kādam i lielums S_i pēc moduļa (absolūtās vērtības) nepārsniedz 90.

Ja kāda no starpībām $S_1; S_2; ...; S_6$ ir nulle, vajadzīgā taisne jau atrasta. Pieņemsim, ka tādas S_i nav un ka $\boldsymbol{S_1 > 0}$ (otrs gadījums ir analoģisks). Ievērosim, ka $K_1 = L_6$ un $L_1 = K_6$ (skatoties pretējos virzienos, kreisā un labā puse mainās vietām), tāpēc $S_6 = -S_1$; tātad $\boldsymbol{S_6 < 0}$. Tāpēc starpību virknē $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6$ jābūt divām tādām **blakus esošām** starpībām, no kurām pirmā ir pozitīva, bet otrā – negatīva. Aplūkosim šīs starpības (skat. A3.57.zīm.).



A3.57. zīm.

Ja

$$(a+b+c+d+e)-(f+g+h+i+j) > 90 \qquad (*)$$

un

$$(b+c+d+e+f)-(g+h+i+j+a) < -90, \qquad (**)$$

tad vispirms no (**) iegūstam

$$(g+h+i+j+a)-(b+c+d+e+f) > 90 \qquad (***)$$

un pēc tam, saskaitot (*) un (***), iegūstam

$2a-2f>180$ jeb $\boldsymbol{a-f>90}$.

Bet izceltā nevienādība nevar būt patiesa, jo lielākā iespējamā starpība starp naturāliem divciparu skaitļiem ir $99-10=89$. Tātad vajadzīgā pretruna iegūta un uzdevums atrisināts.

3.6.9. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas ir iespējams. Palūgsim, lai katrs skolēns A uzdāvina katram savam draugam tik konfekšu, cik kompaktdisku viņam (A) ir. Tā kā katrs skolēns dāvina 5 reizes vairāk konfekšu, nekā viņam ir kompaktdisku, tad kopējais uzdāvināto konfekšu skaits ir $5\cdot 2008=10\,040$.

No otras puses, katri divi draugi kopā viens otram uzdāvina konfekšu daudzumu, kas dalās ar 3 (ja vienam ir x, bet otram – $2x$ kompaktdiski, tad viņu starpā tiek dāvinātas $3x$ konfektes). Tāpēc arī kopējam dāvināto konfekšu skaitam jādalās ar 3. Bet $10\,040$ ar 3 nedalās. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.6.10. Viegli pārliecināties, ka 5 var izteikt kā triju naturālo saskaitāmo summu tikai divos veidos: $3+1+1$ un $2+2+1$ (ja nerūpējamies par saskaitāmo kārtību). Ņemot vērtā arī to, kura no konfektēm pirmajā gadījumā dāvināta 3 eksemplāros un kura no konfektēm otrajā gadījumā – vienā eksemplārā, iegūstam 6 dažādas iespējas:

$3+1+1 \qquad 1+3+1 \qquad 1+1+3$

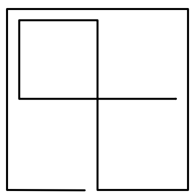
$2+2+1 \qquad 2+1+2 \qquad 1+2+2$

Tā kā rūķīšu ir vairāk nekā dažādo iespēju uzdāvināt konfektes (7 > 6), tad atradīsies tādi rūķīši, uz kuriem attiecas viena un tā pati no minētajām iespējām.

4. LATVIJAS 20. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Lai atrisinātu šo uzdevumu, pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt! Uzdevuma atrisinājumu skat. A4.1.zīm.



A4.1. zīm.

4.5.2. No **a)** seko: **krāsu nav vairāk kā 3**.

Tiešām, ja zīmuļu krāsu skaits būtu ≥ 4, tad gadījumā, ja tiktu paņemti tieši šie zīmuļi kopā ar vēl vienu jebkādu zīmuli, uzdevuma prasības neizpildītos.

No **b)** seko: **nevienā krāsā nav vairāk kā 3 zīmuļi**.

Atkal, ja būtu vismaz 4 vienas krāsas zīmuļi, tad varētu tikt paņemti tieši šie, un uzdevumā prasītais, ka vienā krāsā no paņemtajiem ir **ne vairāk** kā 3 zīmuļi, neizpildās.

Tātad ir tieši 3 krāsas un katrā no tām (arī zilajā) – tieši 3 zīmuļi (citās situācijās kopējais zīmuļu skaits būtu mazāks nekā 9).

4.5.3. 1) Apskatīsim, kāda ir **mazākā** iespējamā kreisās puses vērtība:

Ievērosim: lai vērtība būtu pēc iespējas mazāka un izpildītos prasība, ka zvaigznītes aizstātas ar dažādiem cipariem, mums nepieciešams iespējami lielākās šķiras vienībās ierakstīt iespējami mazus ciparus, t.i. tās zvaigznītes vietā, ar kuru ir aizstāts simtu cipars, rakstīsim 0, desmitu cipars – 1, bet vienu cipars – 2. Viegli pārliecināts, ka mazāka vērtība nav iespējama. Iegūstam summu $2082+4817=6899$.

2) Noskaidrosim, kāda ir **lielākā** iespējamā labās puses vērtība:

Rīkosimies tieši pretēji kā pirmajā gadījumā. Lai iegūtu lielāko iespējamo vērtību, mums nepieciešams likt lielākos iespējamos ciparus iespējami augstākās šķiras vienībās. Aizstāsim zvaigznīti, kura novietota simtu šķirā, ar lielāko iespējamo viencipara skaitli 9, desmitu vietā – 8 un vienu vietā – 7. Iegūtā summa ir $2917+3982=6899$.

Tā kā 1) un 2) gadījumā iegūtās summas ir vienādas, secinām, ka **vienīgā** iespēja, kā izpildīt uzdevumu, ir $2082+4817=2917+3982$.

4.5.4. Lai atrisinātu šo uzdevumu, vispirms ir jānoskaidro, ar cik gājieniem iespējams pārkrāsot visu kreklu. Pēc tam mūsu uzdevums ir pierādīt, ka ar mazāku gājienu skaitu nepietiek.

Nokrāsojot melnu katru no sākotnējām baltajām joslām, viss krekls kļūst melns 24 gājienos, jo katrā gājienā pārkrāsojam tieši vienu no baltajām joslām.

Sākumā pavisam ir 49 joslas, turklāt pirmā un pēdējā ir melnas; beigās ir tikai viena „josla" – pēc dotā. Ar katru gājienu joslu skaits samazinās ne vairāk kā par 2. Apskatām situāciju, kad joslas jebkurā vietā ir izvietotas sekojoši (*m* – melns, *b* – balts): *mbm*; pārkrāsojot balto joslu, visas trīs joslas būs melnas – *mmm*, bet tādas trīs joslas, kuras visas ir vienā krāsā, mēs uzskatām par vienu joslu. Tātad trīs joslu vietā esam ieguvuši vienu joslu, jeb joslu skaits ir samazinājies par 2. Viegli iztēloties, ka šāda situācija veidosies vienmēr.

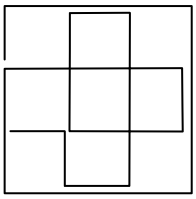
No sākotnējā joslu skaita atņemot beigu joslu skaitu un dalot iegūto skaitli ar 2 (par tik samazinās joslu skaits katrā gājienā), iegūstam, ka nepieciešami vismaz $(49-1):2=24$ gājieni.

4.5.5. Attēlosim tabulā vienu no veidiem, kā iespējams atrisināt šo uzdevumu. Tabulā treknrakstā attēlotas tās kastītes, no kurām Andris nākošajā dienā ēdīs konfektes. Ievērojam, ka pirmajā dienā tiek apēstas 8 konfektes no izvēlētajām kastītēm tā, lai kopumā paliktu divas kastītes, kurās katrā ir pa vienai konfektei, divas – pa divām, divas – pa trijām, ..., divas – pa astoņām konfektēm katrā kastītē. Nākošajā dienā pēc līdzīga principa Andris izvēlas kastītes, kurās ir attiecīgi 5, 6, 7 un 8 konfektes, no katras izvēlētās kastītes paņemot četras konfektes. Ir izveidojusies šāda situācija: ir četras kastītes pa vienai konfektei katrā, četras – pa divām, četras – pa trijām un četras – pa četrām konfektēm katrā kastītē. Līdzīgi rīkojoties arī nākošajās dienās redzam, ka pēc piektās dienas visas konfektes ir apēstas:

Sākumā:	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Pēc 1.d.:	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	**8**	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	**8**
Pēc 2.d.:	1	2	**3**	**4**	1	2	**3**	**4**	1	2	**3**	**4**	1	2	**3**	**4**
Pēc 3.d.:	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**
Pēc 4.d.:	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Pēc 5.d.:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Lai atrisinātu šo uzdevumu, pietiek uzrādīt vienu veidu, kā prasīto var izdarīt. Vienu atrisinājumu skat. A4.2.zīm.



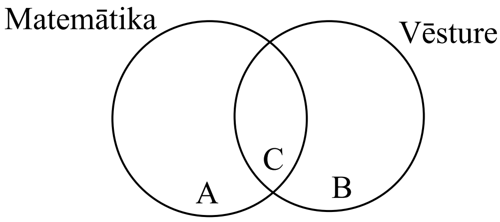
A4.2. zīm.

4.6.2. Viens no variantiem, kā var tikt izveidoti šie pieci meklētie skaitļi, varētu būt: $11112 < 11121 < 11211 < 12111 < 21111$.

Ir arī bezgalīgi daudz citu atrisinājumu.

4.6.3. Atbilde: Pusei skolēnu patīk matemātika.

Risinājums: Uzdevuma risināšanā izmantosim diagrammu (skat. A4.3.zīm.).



A4.3. zīm.

Daļā *A* ir tie skolēni, kuriem patīk tikai matemātika, daļā *B* ir tie skolēni, kuriem patīk tikai vēsture, bet daļā *C* ir tie skolēni, kuriem patīk gan matemātika, gan vēsture.

Uzdevumā teikts, ka ceturtdaļai no visiem tiem skolēniem, kuriem patīk matemātika, patīk arī vēsture. Tā kā skolēnu skaitam, kuriem patīk matemātika, jādalās ar 4, tad to varam uzrakstīt kā $4n$ (n – naturāls skaitlis). Tādā gadījumā to skolēnu skaits, kuriem patīk gan matemātika, gan vēsture, ir $\frac{1}{4} \cdot 4n = \frac{4}{4}n = n$. Tad to skolēnu skaits, kuriem patīk tikai matemātika, ir $4n - n = 3n$.

Teikts arī, ka piektdaļai no visiem tiem skolēniem, kuriem patīk vēsture, patīk arī matemātika. Jau aprēķinājām, ka to skolēnu skaits, kuriem patīk gan vēsture, gan matemātika, ir n. Varam aprēķināt, kāds ir visu vēstures cienītāju skaits, ja zināms, ka piektā daļa no tiem ir n. Tātad viss vēstures cienītāju skaits ir $5n$ un to skolēnu skaits, kuriem patīk tikai vēsture, ir $5n - n = 4n$. Kopējais skolēnu skaits ir $3n + n + 4n = 8n$. Skolēnu skaits, kuriem patīk matemātika, ir $3n + n = 4n$. Aprēķinām, kādai daļai visu skolēnu patīk matemātika: $\frac{4n}{8n} = \frac{1}{2}$. Redzam, ka pusei visu skolēnu patīk matemātika.

4.6.4. Pirmais risinājums.

Izvēlēsimies vienu profesoru A. Viņš sarakstās ar 5 citiem. Tā kā $5 > 2 \cdot 2$, tad vai nu var atrast 3 profesorus, ar kuriem viņš sarakstās angliski, vai arī var atrast 3 profesorus, ar kuriem viņš sarakstās latviski. Apskatīsim abas iespējas atsevišķi.

1) Profesors A angliski sarakstās ar profesoriem B; C; D. Saskaņā ar uzdevumā doto, ka nav trīs tādu profesoru, kuri sarakstās angliski, profesori B, C, D visi savā starpā sarakstās latviski.

2) Profesors A sarakstās latviski ar profesoriem B; C; D. Ne visi profesori B; C; D savā starpā sarakstās angliski; tie no viņiem, kas sarakstās latviski, kopā ar profesoru A veido meklējamo trijnieku.

Otrais risinājums.

Attēlosim profesorus ar punktiem A, B, C, D, E, F tā, kā parādīts 8. zīm.

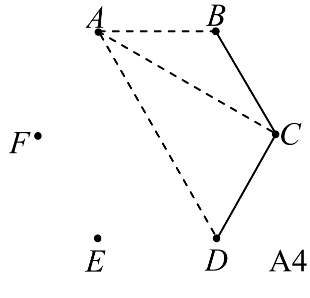
Profesorus, kuri savā starpā sarakstās latviski, savienosim ar nepārtrauktu līniju, bet profesorus, kuri savā starpā sarakstās angliski, savienosim ar raustītu līniju. Vai var panākt, lai neveidotos trijstūris, kura visas malas ir nepārtrauktas?

Skaidrs, ka no katra punkta iziet pavisam piecas līnijas, kas savieno punktu ar kādu no pārējiem punktiem. Tā kā līniju veidu ir tikai 2, tad noteikti būs tādas 3 līnijas, kas ir viena veida – raustītas vai nepārtrauktas.

Pieņemsim, ka no punkta A trīs vienādās līnijas ir AB, AC un AD. Pieņemsim, ka tās visas trīs ir raustītas (skat. A4.4.zīm.).

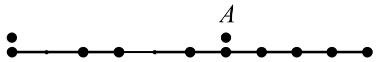
Tad, lai trijstūros ABC un ACD visas malas nebūtu raustītas, līnijām BC un CD jābūt nepārtrauktām. Apskatām malu BD. Ja tā būtu raustīta, tad veidotos trijstūris ABD, kura visas malas ir raustītas – tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad atliek, ka BD ir nepārtraukta, jo citu iespēju nav. Tātad profesori B, C un D savā starpā sarakstās latviski.

Analoģiski apskata arī gadījumu, kad līnijas AB, AC un AD visas ir nepārtrauktas.



A4.4. zīm.

4.6.5. Veicamie ceļi sastāv no horizontāliem un vertikāliem nogriežņiem, jo tiem jāiet pa rūtiņu līnijām). Minimizēsim horizontālo posmu garumu summu, projicējot visus dotos punktus uz kvadrāta apakšējās malas:

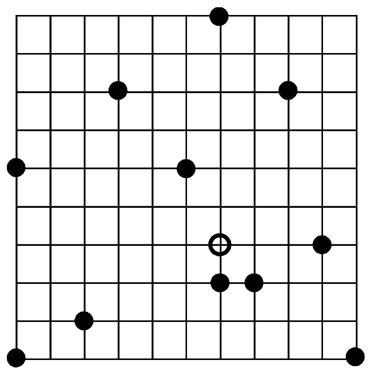


Pārbaudes rezultātā viegli pārliecināties, ka horizontālo pārvietojumu summa būs vismazākā, ja „satikšanās vieta" būs uz vertikāles *A*, ievērojot, ka uz vienu pusi no *A* atrodas četras, bet uz otru – 5 projekcijas. Tiešām, padomājiet, kas notiktu ar šo summu, ja „satikšanās vietu" bīdītu no *A* pa kreisi vai pa labi!

Tāpat minimizēsim visu vertikālo posmu garumu, projicējot visus dotos punktus uz kvadrāta labās malas:

Pārbaudām un pārliecināmies, ka vertikālo pārvietojumu summa būs vismazākā, ja „satikšanās vieta" būs uz horizontāles *B*, ievērojot, ka uz katru pusi no *B* atrodas tieši piecas projekcijas.

Esam atraduši, ka „satikšanās vietai" jābūt ar aplīti apvilktajā virsotnē (skat. A4.5.zīm.) – kā redzams, nebūt ne „centrā".



A4.5. zīm.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. No tā, ka c dalās ar a seko, ka $c > a$. Lai reizinājums $(a-b)(b-c)$ būtu lielāks par 0, vai nu abi reizinātāji $a-b$ un $b-c$ ir pozitīvi, vai arī abi reizinātāji ir negatīvi (jo tikai, sareizinot vienādzīmju skaitļus, iegūstam pozitīvu reizinājumu).

Ja abi reizinātāji ir pozitīvi, tad no $a-b>0$ seko, ka $a>b$ un no $b-c>0$ seko, ka $b>c$. Tā kā $a>b$ un $b>c$ jeb $a>b>c$, tad seko, ka $a>c$. Rodas pretruna ar uzdevumā doto, tātad tā nevar būt.

Atliek iespēja, kad abi reizinātāji ir negatīvi, jo divu negatīvu reizinātāju reizinājums ir pozitīvs jeb lielāks par nulli. Pārbaudot secinām, ka no

$a-b<0$ seko, ka $a<b$, un no $b-c<0$ seko, ka $b<c$. Tātad $a<b$ un $b<c$ jeb $a<b<c$; seko, ka $a<c$. Redzam, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, tātad skaitļu sakārtojums augošā secībā ir $a<b<c$**.**

4.7.2. a) Atbilde: nē, nevar gadīties.

Risinājums: Divas vai vairākas taisnes nedrīkst sakrist, jo, ja tā būtu, tad divām vai vairākām taisnēm vien būtu kopīgi bezgalīgi daudzi punkti. Sešām dažādām taisnēm *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, un *f* pa pāriem var būt augstākais 15 krustpunkti (*ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *cd*, *ce*, *cf*, *de*, *df*, *ef*). Esam atraduši visus iespējamos taišņu krustpunktus, kuru pavisam ir 15; tā kā $15<16$, tad redzam: noteikti nevar gadīties, ka kopīgu punktu ir tieši 16.

b) Atbilde: jā, var gadīties.

Risinājums: Šāda situācija var gadīties, ja divas no taisnēm tiek novietotas paralēli un citu paralelitāšu starp šīm 6 dotajām taisnēm nav, pie tam visi krustpunkti ir dažādi. Tātad šīm abām taisnēm krustpunktu nebūs, taču pārējās visas krustosies savā starpā (kopā 6 punktos), kā arī ar katru no šīm divām taisnēm (vēl $4+4=8$ punktos). Tātad kopā būs $6+8=14$ vajadzīgo punktu.

4.7.3. Lai aizpildītu doto tabulu, kura sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, rīkosimies sekojoši:
1) kreisajā apakšējā tabulas rūtiņā ierakstīsim skaitli 1;
2) visas pārējās četras rūtiņas no šīs pa labi aizpildīsim, katrai iepriekšējai pieskaitot 5;
3) pirmajā kolonnā uz augšu katru rūtiņu aizpildām, katrai iepriekšējai pieskaitot 7;
4) katrā no nākošajām rindiņām un kolonnām rīkojamies līdzīgā veidā, līdz visa tabula ir aizpildīta;

Veicam pārbaudi un secinām, ka, lai arī kuras divas tabulas rūtiņas ar kopīgu malu mēs aplūkotu, tajās ierakstītie skaitļi viens no otra atšķiras vai nu par 5 vai arī par 7. Redzam arī, ka visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Izveidoto tabulu skat. A4.6.zīm.

29	34	39	44	49
22	27	32	37	42
15	20	25	30	35
8	13	18	23	28
1	6	11	16	21

A4.6.zīm.

4.7.4. Apskatīsim *1., 3., 5., 7., 9.* ciematus un saskaitīsim tos attālumus līdz tuvākajam ciematam, kurus izmērīja šo ciematu iedzīvotāji. Lai arī kurš no kaimiņu ciematiem būtu tuvāks, visi šie attālumi ir nepārklājošos šoseju posmu garumi, skaitā 5, tāpēc to summa **mazāka par** 30 km (uzdevumā ir teikts, ka visu 10 ciematu izmērītie attālumi līdz tuvākajam kaimiņu ciematam ir tieši 30 km) Tāpēc piecu atlikušo šosejas posmu garumu summa ir lielāka par $100-30=70$ (km). Tāpēc vismaz viens no tiem ir garāks par $70:5=14$ (km).

4.7.5. Abos gadījumos atbilde ir „nē”.

a) ievērosim, ka ar katru gājienu, pārkrāsojot x melnas rūtiņas baltas un $(8-x)$ baltas rūtiņas melnas, melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par $|x-(8-x)|=|2x-8|$, t.i., par pāra skaitli. Tā kā sākumā tas ir 0, tad tas nevar kļūt 17;

b) pieņemsim, ka tas izdarīts. Tad ir vismaz 2 baltas rindas. Koncentrēsimies uz vienu baltu rindu r. Pastāv divas iespējas:

b1) šī rinda mainīta pāra skaitu reižu un visas kolonnas – arī pāra skaitu reižu,

b2) šī rinda mainīta nepāra skaitu reižu un visas kolonnas – arī nepāra skaitu reižu.

Skaidrs, ka rezultāts nav atkarīgs no tā, kādā secībā izdara gājienus. Varam pieņemt, ka vispirms izdarītas visas maiņas kolonnās (pēc tam vai nu visa tabula ir balta, vai visa – melna), un pēc tam – maiņas rindās. Bet, izdarot maiņas rindās, balto rūtiņu skaits visu laiku mainās par 8; tāpēc, sākot no 0 vai 64, tas nevar kļūt 6. Iegūta pretruna.

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Atceramies, ka pirmskaitļi ir skaitļi, kas ir lielāki par 1 un kam ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis. Skaitļus, kuri nav ne pirmskaitļi, ne 1, sauc par saliktiem skaitļiem. Tātad mums jāpierāda, ka uzdevumā dotie skaitļi ir salikti skaitļi, t.i., ka tiem ir vairāk nekā divi dažādi dalītāji.

Izanalizēsim katru skaitli atsevišķi:

1) Skaitļa 2347108569 ciparu summa ir 45 (lai būtu vieglāk aprēķināt, ievērojam, ka šo skaitli veido visi desmit cipari, katrs vienu reizi). Atceramies skaitļa dalāmības pazīmi ar 3 (vai 9): skaitlis dalās ar 3 (vai 9), ja tā ciparu summa dalās ar 3 (vai 9). Tā kā dotā skaitļa ciparu summa 45 dalās gan ar 3, gan arī ar 9, tad arī pats skaitlis dalās ar 3 un ar 9. Tātad tas ir salikts skaitlis.

2) Skaitļa 123457754321 ciparu summa ir 44 un tā nedalās ar 3. Tātad iepriekšējam skaitlim pielietoto dalāmības pazīmi izmantot nevarēsim.

   Atceramies skaitļa dalāmības pazīmi ar 11: ja skaitļa ciparu summa, kur katrs otrais cipars ņemts ar „-„ zīmi, ir vienāda ar nulli, tad skaitlis dalās ar 11. Pārbaudot šo pazīmi dotajam skaitlim, tiešām iegūstam 0 ($1-2+3-4+5-7+7-5+4-3+2-1=0$), tātad varam apgalvot, ka skaitlis dalās ar 11 (ja nepieciešams, to var papildus pārbaudīt, izdalot skaitli ar 11).

3) Pārveidojam trešo doto skaitli 359999 par divu skaitļu reizinājumu, lai varētu parādīt, ka tas nav pirmskaitlis: $359999=360000-1=600^2-1^2=$ $=(600+1)\cdot(600-1)=601\cdot599$ (starp citu, 601 un 599 abi ir pirmskaitļi).

4.8.2. Tā kā, dalot skaitli n ar 9, atlikums izrādījās vienāds ar nepilno dalījumu, tad, apzīmējot nepilno dalījumu pirmajā dalīšanā ar x, skaitli n varam izteikt $n=9x+x=10x$, turklāt $x\le 8$ (jo atlikumam jābūt mazākam par dalītāju). Tātad, tā kā n varam uzrakstīt kā skaitļu 10 un x reizinājumu, n dalās ar *10* un, tā kā x nav lielāks par 8, tad n nav lielāks par 80 ($n\le 80$).

No otras puses, tā kā, dalot skaitli n ar 14, atlikums arī izrādījās vienāds ar nepilno dalījumu, tad, apzīmējot nepilno dalījumu šajā dalīšanā ar y, skaitli n varam izteikt $n = 14y + y = 15y$. Tā kā n tagad ir uzrakstīts kā skaitļu 15 un y reizinājums, tad n dalās arī ar 15.

Tā kā n jādalās gan ar 15, gan ar 10, turklāt tas nevar būt lielāks nekā 80, tad n **varētu būt** tikai 30 vai 60. Pārbaude parāda, ka abas šīs vērtības der.

4.8.3. 1) Pēc dotā ΔABM ir vienādsānu, tāpēc $\angle BAM = \angle BMA$ (skat. A4.7.zīm.).

2) Tā kā $\angle BAM + \angle BAN = 180°$ (dots), tad $\angle BAM + (\angle BAM + \angle MAN) = 180°$.

3) No 1.punkta iegūstam, ka $\angle BAM + \angle BMA + \angle NAM = 180°$. (1)

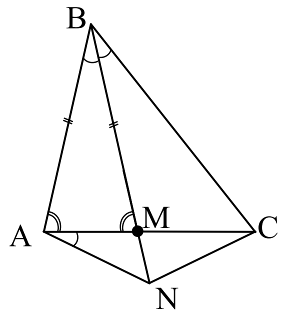
4) Tā kā trijstūra visu leņķu summa ir $180°$, tad iegūstam, ka arī $\angle BAM + \angle BMA + \angle ABM = 180°$. (2)

5) No vienādībām (1) un (2) iegūstam, ka $\angle NAM = \angle ABM = \angle MBC$.

6) No trijstūra ārējā leņķa īpašības seko, ka $\angle BMC = \angle ABM + \angle BAM = \angle MAN + \angle BAM = \angle BAN$.

7) No iepriekšējā punkta un uzdevuma nosacījumiem seko, ka $\Delta BAN = \Delta BMC$ (lml).

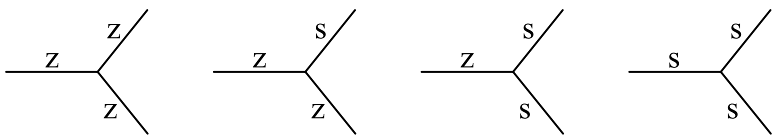
8) Tātad $BN = BC$, k.b.j.



A4.7. zīm.

4.8.4. Atbilde: nē.

Risinājums. Katrā virsotnē veidojas viena no A4.8. zīm. redzamajām situācijām (nekādas citas situācijas veidoties nevar):



A4.8. zīm.

Redzam, ka gadījumā, ja visi trīs nogriežņi ir nokrāsoti vienā krāsā, tad šajā virsotnē veidojas 0 saskarsmes „sarkans – zaļš”.

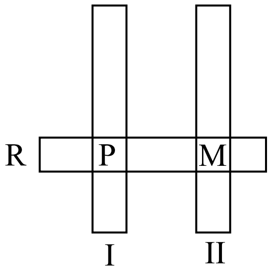
Ja virsotnē „satiekas” viens sarkans un divi zaļi nogriežņi, tad veidojas 2 saskarsmes „sarkans – zaļš”.

Arī tad, ja virsotnē „satiekas” divi sarkani un viens zaļš nogrieznis, veidojas 2 saskarsmes (pa vienai katram no sarkanajiem nogriežņiem).

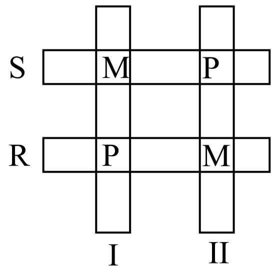
Tātad katrā virsotnē veidojas 0 vai 2 saskarsmes „sarkans – zaļš”, tātad kopējā iegūto skaitļu summa noteikti būs pāra skaitlis. Bet skaitlis 21 nav pāra skaitlis, tātad prasītais nav iespējams.

4.8.5. Pierādīsim, ka **katrā rindā vai nu visi rūķīši ir patiesi, vai arī visi rūķīši ir meļi**. Tad, tā kā katrā rindā ir tieši 10 rūtiņas, tad kopējais melīgo rūķīšu skaits būs izsakāms kā $10 \cdot n$, kur n – to rindu skaits, kurās dzīvo melīgie rūķīši. Tādējādi kopējais meļu skaits kvadrātā dalīsies ar 10.

Tagad mums atliek pierādīt izcelto apgalvojumu. Lai to izdarītu, pieņemsim pretējo: katrā rindā vienā rūtiņā dzīvo patiess rūķītis (P), bet citā – melis (M) (skat. A4.9.zīm.).



A4.9. zīm.



A4.10. zīm.

Kolonnā I meļu ir vairāk nekā rindā R (to apgalvo šajā kolonnā esošais patiesais rūķītis, tātad tā ir patiesība), bet kolonnā II meļu ir ne vairāk kā rindā R (jo šajā kolonnā esošais melīgais rūķītis apgalvoja pretējo). **Tātad kolonnā I meļu ir vairāk nekā kolonnā II.** Tāpēc eksistē tāda rinda S, kurā I kolonnā dzīvo melis (lai kolonnā I būtu vairāk meļu nekā kolonnā II, tad kolonnā I jābūt kādam melim), bet II kolonnā - patiess rūķītis (ja arī šeit dzīvotu melīgs rūķītis, tad kolonnās I un II esošo meļu skaitu starpība rindas S dēļ nemainītos (skat. A4.10.zīm.).

Tagad, spriežot par rindas S rūķīšiem tāpat kā par rūķīšiem rindā R, iegūstam: **kolonnā II meļu ir vairāk nekā kolonnā I.** Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams. Tātad katrā no rindām vai nu visi rūķīši ir patiesi, vai arī visi rūķīši ir meļi; tātad meļu skaits dalās ar 10.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. No tā, ka katram no vienādojumiem ir vismaz viena sakne, iegūstam, ka abu kvadrātvienādojumu diskriminanti ir pozitīvi vai nulles:

- $x^2 + 2bx + a^2 = 0$; D = $4b^2 - 4a^2 \geq 0$;
- $x^2 + 2ax + b^2 = 0$; D = $4a^2 - 4b^2 \geq 0$

Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus ar nevienādībām, iegūstam, ka $b^2 \geq a^2$ un $a^2 \geq b^2$. Tātad $a^2 = b^2$ jeb $|a| = |b|$.

Apskatīsim sīkāk vienādību $|a| = |b|$:

- Ja $a = b$, tad abus kvadrātvienādojumus pārveidojam par $x^2 + 2ax + a^2 = 0$, tātad abiem vienādojumiem kopā ir viena sakne $x = -a$.

- Ja $a = -b \neq 0$, tad, ievietojot „b” vietā „$-a$”, vienādojumus pārveidojam par $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ un $x^2 + 2ax + a^2 = 0$. Viegli iegūstam, ka abiem vienādojumiem kopā ir divas saknes $\pm a$.

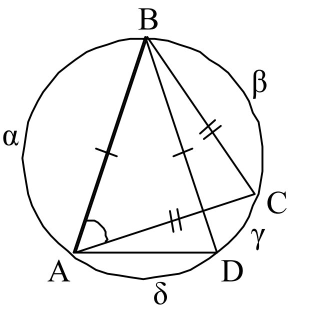
Tātad vienādojumiem kopā var būt divas dažādas saknes.

4.9.2. Atbilde: 10.

Risinājums. Taisnes $y = ax + b$ vienādojumā koeficients a ir taisnes virziena koeficients. Tā kā koeficients a var pieņemt 10 dažādas vērtības (naturālos skaitļus intervālā $[1;10]$), tad apskatāmajām taisnēm ir 10 dažādi virziena koeficienti, tātad vairāk nekā 10 no taisnēm caur vienu punktu iet nevar.

To, ka ir tādas 10 taisnes, kuras visas iet caur vienu punktu, redzam piemērā $y = ax + 1$, $a = 1; 2; ...; 10$, kur visu taišņu grafiki iet caur punktu $(0;1)$.

4.9.3. 1) Apzīmēsim izveidojušos riņķa lokus ar mazajiem grieķu alfabēta burtiem, kā tas parādīts A4.11.zīm.



A4.11. zīm.

2) No tā, ka vienādas hordas savelk vienādus lokus, seko, ka $\alpha = \beta + \gamma$ un $\beta = \delta + \gamma$.

3) Tā kā $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, tad, izmantojot 2.punktā iegūto, ka $\beta = \delta + \gamma$, pārrakstām vienādību: $\alpha + 2\beta = 360°$ (*)

4) Tā kā $\alpha = \beta + \gamma$, tad $\alpha > \beta$.

5) No iepriekšējā punkta un (*) seko, ka $\alpha + 2\alpha > 360°$, tātad $\alpha > 120°$.

6) Līdzīgi no (*) un tā, ka $\alpha > \beta$, iegūstam, ka $\beta + 2\beta < 360°$, tātad $\beta < 120°$.

7) Tāpēc $\gamma + \delta = \beta < 120°$.

8) Atceramies, ka ievilktais leņķis ir puse no loka, uz kuru tas balstās. Tāpēc $\angle ABC = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) < 60°$, k.b.j.

4.9.4. Atbilde: 22 meļi.

Risinājums. Skaidrs, ka visi nevar būt meļi, jo tad iznāktu, ka visi runā patiesību – tā būtu pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.

Izvēlēsimies vienu patieso cilvēku un apzīmēsim to ar C_1; nākošos pulksteņa rādītāja kustības virzienā apzīmēsim ar C_2, C_3, ..., C_{23}, C_{24}. Tā kā C_1 ir patiess cilvēks, tad visi nākošie 11 aiz viņa esošie cilvēki (t.i., C_2, C_3, ..., C_{12}) ir meļi.

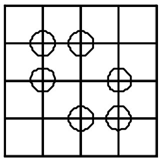
Arī 11 no C_1 pa kreisi esošie (t.i., C_{24}, C_{23}, ..., C_{14}) cilvēki ir meļi, jo viņi samelojušies attiecībā uz C_1.

Tātad neskaidrs ir palicis C_{13}. Ja viņš būtu melis, tad C_2 būtu runājis patiesību – pretruna; tātad C_{13} ir patiess cilvēks.

Pārbaudot šādu meļu un patieso cilvēku izkārtojumu pa apli, redzam, ka visas uzdevuma prasības ir izpildītas.

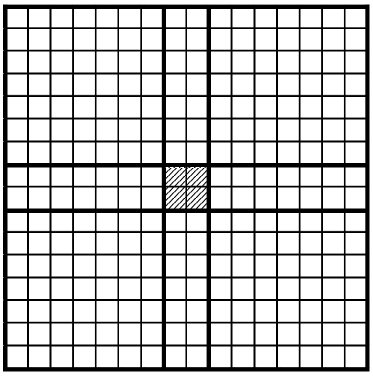
4.9.5. Atbilde: a) var, **b)** nevar.

Risinājums. a) Sadalīsim lielo 16×16 rūtiņu kvadrātu 16 mazākos 4×4 rūtiņu kvadrātos. Kvadrātā 4×4 uzdevumā prasīto var sasniegt, izdarot izmaiņas 2×2 rūtiņu kvadrātos, kuru centri parādīti A4.12.zīmējumā. Šādi izdarot izmaiņas katrā no 16 mazajiem kvadrātiem, prasītais sasniedzams arī lielajā 16×16 rūtiņu kvadrātā.



A4.12. zīm.

b) katra izmaiņa, ko izdarīsim 9×9 rūtiņu kvadrātā, skars arī visu centrālo 2×2 rūtiņu kvadrātu (skat. A4.13.zīm.), tātad tur visas rūtiņas vienmēr būs vienā krāsā. Tātad, pat ja pārējās rūtiņas mēs pārveidosim, lai būtu šaha galdiņa krāsojums, centrālajā 2×2 kvadrātā rūtiņas paliks visas vienā krāsā.



A4.13. zīm.

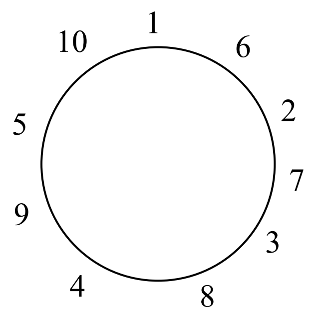
5. LATVIJAS 58. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. Aplūkosim, kāda būtu summa, ja mēs starp katriem diviem cipariem liktu „+” zīmi: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Aprēķinām, ka šī iegūtā summa par $45-19=26$ atšķiras no prasītā rezultāta, tātad „-„ zīme jāliek priekšā tādiem diviem skaitļiem, kuru summa ir $26:2=13$. Viegli ievērot, ka $9+4=8+5=7+6=13$. Citu iespēju nav. Tie arī ir mūsu meklētie zīmju izvietojumi:

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 = 19$$
$$1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 = 19$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 = 19$$

5.5.2. a) Jā, var. Skat., piem., A5.1. zīm. Šādu risinājumu iegūstam mēģinājumu ceļā un pēc tam pārliecināsimies, ka katru divu blakus esošu skaitļu starpība ir vismaz 4.



A5.1. zīm.

b) Nē, nevar. Skaitlim „5” iespējams tikai viens kaimiņš – skaitlis „10”. Tas nozīmē, ka uz abām pusēm no „5” būtu jāraksta „10”, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka katrs skaitlis var tikt uzrakstīts tikai vienu reizi.

5.5.3. a) Atbilde: Nē, nevar.

Risinājums: Neviena meitene nav garāka par visgarāko zēnu, jo visgarākā meitene dejā „Alfa” dejo ar zēnu, kurš ir garāks par šo meiteni. Ja zēns ir garāks par garāko meiteni, tad viņš ir garāks par visām meitenēm, un starp pārējām neatradīsies neviena meitene, kura ir garāka par šo zēnu.

b) Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Izveidosim tabulu, kur doti dejotāju augumi centimetros. Tad sadalīsim visus bērnus pāros tā, ka četros pāros meitene ir garāka par zēnu. Secinām, ka uzdevumā prasītais ir iespējams.

Zēni	Meitenes
170	169
168	167
166	165
164	163
162	161

„Alfa”

Zēni	Meitenes
170	161
168	169
166	167
164	165
162	163

„Gamma”

5.5.4. Atbilde: Nē, nevar.

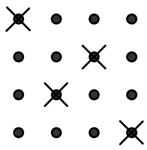
Risinājums: Saskaitīsim cik pavisam kopā rūtiņu ir dotajām figūrām: $1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 17$ (rūtiņas).

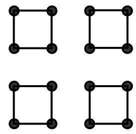
Lai varētu izveidot taisnstūri no dotajām figūrām, mums ir jānoskaidro, kādi ir iespējamie taisnstūra izmēri. Tā kā rūtiņu skaitu visā taisnstūrī aprēķina, reizinot rūtiņu skaitu platumā ar rūtiņu skaitu garumā, mūsu uzdevums ir atrast divus tādu naturālus skaitļus, kuru reizinājums ir 17.

Pārbaudot viegli konstatēt: 17 ir pirmskaitlis, t.i., šī skaitļa vienīgie dalītāji ir 1 un pats skaitlis 17. Tātad vienīgais veids, kādā var izteikt 17 kā divu naturālu skaitļu reizinājumu, ir $17 = 1 \cdot 17$. Secinām, ka mums nepieciešams izveidot taisnstūri ar platumu 1 rūtiņa un garumu 17 rūtiņas, taču tas nav iespējams, jo divas no dotajām figūrām nevar ietilpt joslā ar platumu 1.

5.5.5. Mums ir prasīts atrast mazāko daudzumu punktu, kurus nepieciešams izdzēst, lai nekādi 4 palikušie punkti nebūtu tāda kvadrāta virsotnes, kura malas vērstas bultiņu virzienā. Tas nozīmē, ka uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: pirmajā daļā mēs atradīsim, ar cik nodzēstiem punktiem pietiek, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, savukārt atrisinājuma otrajā daļā mēs parādīsim, ka ar mazāku nodzēsto punktu skaitu nepietiek.

I Izveidosim situāciju, kad pietiek ar četriem nodzēstiem punktiem, skat. A5.2.zīm.


A5.2. zīm.


A5.3. zīm.

II Savienojam punktus pa četriem tā, lai izveidotos četri kvadrāti - skat. A5.3.zīm. Redzam, ka nevienam no kvadrātiem nav kopīgu punktu ar jebkuru no trim pārējiem, tātad, lai arī kā mēs nodzēstu tikai trīs punktus, noteikti vismaz viens no kvadrātiem „paliktu neskarts" un netiktu izpildīti uzdevuma nosacījumi. Skaidrs, ka jānodzēš vismaz 4 punkti, ar mazāku skaitu nepietiek.

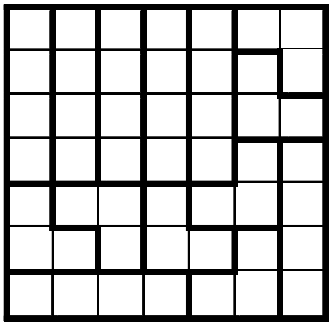
5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Atbilde: 62.

Risinājums: Votivapu punktu skaitu apskatāmajā brīdī apzīmēsim ar v, bet šillišallu iegūto punktu skaitu apzīmēsim ar $š$. Ir zināms vien tas, ka votivapām šajā brīdī ir tik pat daudz punktu, cik šillišallām atlicis gūt līdz spēles beigām. Tā kā no spēles beigu rezultāta mēs redzam, ka šillišallas ieguva kopā 62 punktus, tad no apskatāmā brīža līdz spēles beigām tām vēl jāiegūst $62 - š$ punkti. Tātad $v = 62 - š$. Pārveidojot vienādību, iegūstam: $v + š = 62$. Tātad apskatāmajā brīdī votivapu un šillišallu punktu summa bija 62, kas arī bija jāaprēķina.

5.6.2. a) Nē, nevar. Pat, ja mēs iedomātos, ka Andrim ir 12 tādas figūriņas, kuras katra sastāv no četrām rūtiņām (šīs ir rūtiņu skaitā lielākās figūriņas), viņš varētu noklāt augstākais $12 \cdot 4 = 48 < 7 \cdot 7$ rūtiņas.

b) Jā, var. Vienu no iespējamiem veidiem, kā to izdarīt, skat. A5.4.zīm.



A5.4. zīm.

5.6.3. **a) Atbilde:** nē.

Risinājums: Ievērosim: sareizinot trīs skaitļus, jāiegūst nepāra skaitlis (20082007 ir nepāra skaitlis).

Tāpat atcerēsimies zināmu faktu: ja reizinājumā kaut viens skaitlis ir pāra, tad arī reizinājums būs pāra skaitlis.

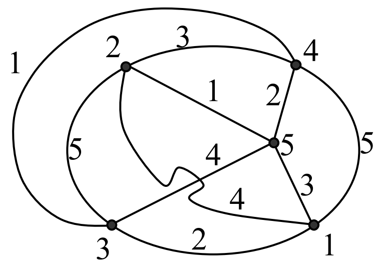
Aplūkosim, kādas paritātes var būt skaitļiem x un y:
1) Abi pāra. Tādā gadījumā arī starpība $x-y$ ir pāra skaitlis. Trīs pāra skaitļu reizinājums $xy(x-y)$ būs pāra skaitlis.
2) Viens ir pāra, otrs – nepāra. Tad starpība $x-y$ ir nepāra skaitlis. Sareizinot $p\bar{a}ra \times nep\bar{a}ra \times nep\bar{a}ra$ ir pāra skaitlis, jo ir viens reizinātājs, kurš ir pāra skaitlis.
3) Abi nepāra. Tad starpība $x-y$ ir pāra skaitlis, tātad arī visu trīs skaitļu reizinājums būs pāra skaitlis.
Redzam: lai arī kādus mēs izvēlētos x un y, izteiksmes $xy(x-y)$ vērtība būs pāra skaitlis. Tātad nav iespējams iegūt nepāra vērtību *20082007*.

b) Varam ņemt, piemēram, $x=10$, $y=6$. Tad $10 \cdot 6 \cdot (10-6) = 10 \cdot 6 \cdot 4 = 240$.

5.6.4. Jā, eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka reizinājums $n \times n$ sākas ar *1234567...*, piemēram, $n=1111111$. Pārbaudiet to patstāvīgi.

5.6.5. Tā kā mums ir prasīts atrast mazāko n vērtību, atrisinājuma pirmajā daļā jāuzrāda piemērs, kur pietiek ar attiecīgo krāsu skaitu, bet atrisinājuma otrajā daļā jāpierāda, ka ar mazāku krāsu skaitu nepietiek.

I Katru no piecām lampām attēlosim ar punktu un izvēlēsimies krāsas tā, lai katra lampa būtu nokrāsota citā krāsā. Apzīmēsim krāsas ar cipariem no 1 līdz 5. Mēģināsim lampas savienot ar vītnēm tā, lai netiktu ieviesta neviena jauna krāsa. To, ka šādu situāciju ir iespējams panākt, skat. A5.5.zīm. Tātad n vērtība var būt 5.



A5.5. zīm.

II Pie katras lampas piestiprinātas tieši 4 vītnes (katra no tām aiziet uz kādu no citām 4 lampām). Tātad, lai uzdevumu atrisinātu atbilstoši tā nosacījumiem, katrai no šīm vītnēm jābūt savā krāsā, kā arī lampai jābūt krāsā, kas nesakrīt ne ar vienu no krāsām, kurā ir jebkura pie šīs lampas piestiprināta vītne. Tātad krāsu skaitam jābūt vismaz $4+1=5$

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Šādā formā var izsacīt jebkuru naturālu skaitli *n*. Skatīt sekojošos pārveidojumus: $n = n^9 : n^8 = \left(n^3\right)^3 : \left(n^2\right)^4$. Tātad, ja $a = n^3$ un $b = n^2$, tad, ievietojot iegūtajā izteiksmē, iegūstam $n = a^3 : b^4$. Zinot, ka $x = a^3$ un $y = b^4$, redzam, ka $n = x : y$.

5.7.2. Jā, var gadīties, ka Andris uzvar, no sākuma ņemot mazāko tortes gabaliņu. Mēs varam izvēlēties tortes gabaliņus ar masām $x = 4$; $y = 5$; $z = 6$; $t = 10$.

Ja Maija pirmo ēd gabaliņu *y*, tad Andris paspēj sākt ēst gabaliņu *t*, Andris ir apēdis gabaliņus *x* un *t*, kamēr Maija ir apēdusi gabaliņus *y* un *z*, bet $4+10>5+6$. Redzam, ka Andris ir apēdis vairāk tortes. Līdzīgi notiek arī gadījumā, ja Maija izvēlas gabaliņu *z*.

Ja gadījumā Maija pirmo ņem gabaliņu *t*, tad Andris paspēs apēst *x*, *y* un iesākt ēst gabaliņu *z*, iekams Maija pabeigusi ēst *t*. Tādējādi Andris apēdīs tortes gabaliņus ar kopējo masu $4+5+6=15$, kamēr Maija tikai 10. Esam atraduši vajadzīgo piemēru.

5.7.3. Sākumā atceramies, kā aprēķina skaitļu vidējo aritmētisko: visu skaitļu summu izdala ar skaitļu skaitu. Tāpēc skaitļu summa vienāda ar to vidējā aritmētiskā reizinājumu ar šo skaitļu skaitu.

Tātad, ja cīkstoņu ir *c* un vingrotāju – *v*, tad cīkstoņu kopsvars ir 84*c*.

Līdzīgā veidā iegūstam, ka visu vingrotāju kopējais svars ir 54*v*.

Visu sportistu vidējo svaru varam iegūt kā visu sportistu kopējo svaru $84c+54v$, izdalītu ar visu sportistu kopējo skaitu $c+v$. Tā kā ir zināms, ka visu sportistu vidējais svars ir 71, tad $\dfrac{84c+54v}{c+v} = 71$.

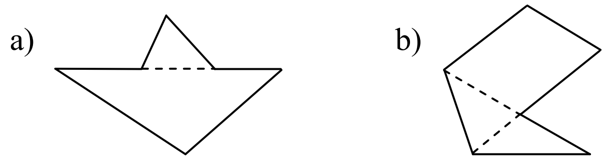
Veicam identiskus pārveidojumus:

$$84c + 54v = 71 \cdot (c + v)$$
$$84c + 54v = 71c + 71v$$
$$84c - 71c = 71v - 54v$$
$$13c = 17v$$

Tā kā $17v$ acīmredzami dalās ar 17 (jo $17v$ ir skaitļu 17 un vingrotāju skaita reizinājums), tad ar 17 jādalās arī $13c$ (jo vienādības abas puses dalās ar vieniem un tiem pašiem skaitļiem).

Tā kā $LKD(13;17) = 1$, tad ar 17 noteikti ir jādalās c. Tā kā ar c mēs apzīmējām cīkstoņu skaitu, tad cīkstoņu skaits dalās ar 17, k.b.j.

5.7.4. Jā, eksistē. Skat. A5.6.zīm.



A5.6. zīm.

5.7.5. Sākumā izkrāsosim visas $n \times n$ kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā tā, ka augšējā kreisā rūtiņa ir melna (nokrāsot kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā nozīmē, ka nav divu baltu vai divu melnu rūtiņu ar kopīgu malu; kopīgas malas veidojas tikai baltajai rūtiņai ar melno).

Tagad noskaidrosim, vai meklētais n ir pāra vai nepāra skaitlis. Šķirosim divus gadījumus:

1) Pieņemsim, ka n ir pāra skaitlis. Tad kvadrātā gan melno, gan balto rūtiņu skaits būs pāra skaitlis. Lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstītie skaitļi atšķirtos viens no otra tieši par 1, baltajās rūtiņās jāieraksta vienas paritātes skaitļi, bet melnajās rūtiņās – otras. Pieņemsim, ka baltajās rūtiņās ierakstīti pāra skaitļi, savukārt melnajās – nepāra. Tad visu pāra skaitļu summa noteikti būs pāra skaitlis, un arī visu nepāra skaitļu summa noteikti būs pāra skaitlis, jo pāra skaita saskaitāmo summa vienmēr ir pāra skaitlis. Tāpēc visu ierakstīto skaitļu summa nevar būt nepāra skaitlis 101.

2) Tātad n noteikti ir nepāra skaitlis. Mēģinājumu rezultātā secinām, ka der visi nepāra skaitļi, kas nav lielāki par 13.

Parādīsim, ka vērtība n = 13 der par atrisinājumu. Kvadrāta melnajās rūtiņās ierakstām skaitli „1”, 8 baltajās rūtiņās – „2”, citās baltajās rūtiņās – „0”. Aprēķināsim, cik melno rūtiņu pavisam ir kvadrātā, t.i., cik skaitļu „1” tiks ierakstīti. Tā kā šaha galdiņa krāsojumu izvēlējāmies tā, ka visas stūra rūtiņas ir melnas, tad viegli aprēķināt, ka melno rūtiņu pavisam ir 85. Tātad visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa ir $85 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 85 + 16 = 101$.

Pierādīsim, ka n = 13 ir lielākā iespējamā n vērtība.

Iepriekš jau parādījām, ka n nevar būt pāra skaitlis, tātad $n \neq 14$.

Apskatīsim, vai var gadīties, ka $n \geq 15$. Ievērosim, ka šajā gadījumā mazākais vienas krāsas rūtiņu skaits kvadrātā ir $(225 - 1) : 2 = 112$. Tā kā dažādas krāsas rūtiņās esošajiem skaitļiem paritātes ir atšķirīgas, tad vienas krāsas katrā rūtiņā ir jābūt ierakstītam vismaz 1, tāpēc ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 112, kas jau ir lielāka nekā 101. Tātad n nevar būt ne 15, ne arī lielāks.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Ja mazākā laimīgā skaitļa pēdējais cipars nav 9, tad abu laimīgo skaitļu ciparu summas ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi, jeb, citiem vārdiem sakot, ja mazākā laimīgā skaitļa ciparu summa ir a, tad nākošā laimīgā skaitļa ciparu summa ir $a+1$. Tā kā šo skaitļu ciparu summas atšķiras tieši par 1, tad viena no tām ir pāra skaitlis, otra – nepāra. Ja skaitļa ciparu summa ir nepāra, tad šo summu nevar sadalīt divās vienādās naturālās daļās, t.i., nekādu 3 ciparu summa nevar būt vienāda ar pārējo 3 ciparu summu. Iegūta pretruna, tātad mazākā skaitļa pēdējais cipars ir 9, līdz ar to lielākā laimīgā skaitļa pēdējais cipars ir 0. Pēc dalāmības pazīmēm mēs zinām, ka skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0. Esam pierādījuši, ka viens no diviem viens otram sekojošiem laimīgiem skaitļiem noteikti dalās ar 10.

5.8.2. Katrā griežot iegūtajā kvadrātā vienas krāsas rūtiņu ir par 1 vairāk nekā otras krāsas rūtiņu (jo tajā ir nepāra skaits rūtiņu, tātad tās nevar sadalīt divās vienādās daļās), un vairākums rūtiņu ir tajā krāsā, kurā ir centrālā rūtiņa (jo tā atrodas tieši „diagonāļu" krustpunktā, kas nosaka visu stūra rūtiņu krāsojumu). „Vairākumu nodrošinošo" balto rūtiņu jābūt tikpat, cik „vairākumu nodrošinošo" melno rūtiņu, jo lielajā kvadrātā melno un balto rūtiņu ir vienāds daudzums.

5.8.3. Izmantosim to, ka skaitļi a, b un c visi nav vienādi savā starpā. Tāpēc par šiem skaitļiem mēs varam apgalvot, ka to visu starpību kvadrātu summa ir lielāka par nulli: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$. Atcerēsimies, ka nav svarīgi, vai starpības ir pozitīvas vai negatīvas, jo, jebkuru nenulles skaitli kāpinot kvadrātā, rezultāts ir pozitīvs.

Veicot identiskus pārveidojumus, no iepriekš uzrakstītās nevienādības iegūstam:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$$

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2>0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac>0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2bc+2ac$$

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac\text{, k.b.j.}$$

5.8.4. Atbilde: zaļu.

Risinājums. Cepuru virkne ir periodiska ar periodu ZBVSD un tā garumu 5. Ja Katrīna nekļūdītos, tad 2008. dienā viņa nēsātu violetu cepuri, jo $2008=401\cdot5+3$. Tātad kļūdas dēļ notika pārbīde par 2 cepurēm uz priekšu. Tātad kļūdainajā dienā viņai patiesībā bija jānēsā balta cepure (jo tā periodā atrodas divas pozīcijas pirms sarkanās). Tā kā balto cepuri viņa nēsā tūlīt pēc zaļās, tad skaidrs, ka iepriekšējā dienā viņa šo zaļo arī nēsāja. Uzdevums atrisināts.

5.8.5. 1) Tā kā taisnleņķa trijstūrī šauro leņķu summa ir $90°$, tad $\angle KAH=\angle A_1AB=90°-\angle ABC$ (skat. A5.7.zīm.).

2) Arī $\angle HCB = 90° - \angle ABC$.

3) Ievērojam, ka 1. un 2. punktā vienādību labās puses ir vienādas, tātad jābūt vienādām arī to kreisajām pusēm, t.i., $\angle KAH = \angle HCB$.

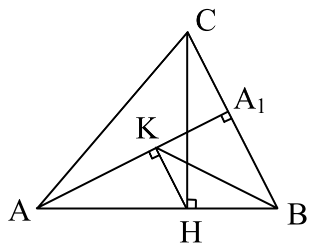
4) No dotā un no 3.punkta seko, ka $\Delta KAH = \Delta HCB$ (hl).

5) Tad $HK = BH$. Tātad ΔKHB - vienādsānu trijstūris.

6) Tad $\angle HBK = \angle HKB$, jo vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi.

7) Tā kā $HK \parallel BC$, tad $\angle HKB = \angle KBC$ kā kāpšļu leņķi.

8) No 6. un 7. punkta pēc transitīvās īpašības varam apgalvot, ka $\angle HBK = \angle KBC$, k.b.j.



A5.7. zīm.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Pārveidosim $3^{32} - 2^{32}$, vairākas reizes izmantojot formulu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:

$$\begin{aligned}
&3^{32} - 2^{32} = \\
&= \left(3^{16} + 2^{16}\right)\left(3^{16} - 2^{16}\right) = \\
&= \left(3^{16} + 2^{16}\right)\left(3^{8} + 2^{8}\right)\left(3^{8} - 2^{8}\right) = \\
&= \left(3^{16} + 2^{16}\right)\left(3^{8} + 2^{8}\right)\left(3^{4} + 2^{4}\right)\left(3^{4} - 2^{4}\right) = \\
&= \left(3^{16} + 2^{16}\right)\left(3^{8} + 2^{8}\right)\left(3^{4} + 2^{4}\right)\left(3^{2} + 2^{2}\right)\left(3^{2} - 2^{2}\right) = \\
&= \left(3^{16} + 2^{16}\right)\left(3^{8} + 2^{8}\right)\left(3^{4} + 2^{4}\right)\left(3^{2} + 2^{2}\right)(3+2)(3-2)
\end{aligned}$$

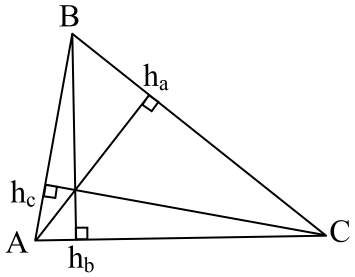
Skaidrs, ka skaitlis $3^{32} - 2^{32}$ dalās ar jebkuru no iekavām. Tātad, ja kāda no iekavu vērtībām ir pirmskaitlis vai arī to var sadalīt kā divu pirmskaitļu reizinājumu, tad šie skaitļi der par atrisinājumiem. Atliek atrast piecus šādus pirmskaitļus.

Aplūkojam iekavas, sākot no labās puses:

- $3 - 2 = 1$. Šī vērtība neder, jo 1 nav ne pirmskaitlis, ne salikts skaitlis.
- $3 + 2 =$ **5**. Šis skaitlis ir pirmskaitlis, tādēļ der.
- $3^2 + 2^2 =$ **13** – der.
- $3^4 + 2^4 =$ **97** – der.
- $3^8 + 2^8 = 6561 + 256 = 6817 =$ **17** · **401**. Abi šie skaitļi ir pirmskaitļi (Skaitlis 401 ir pirmskaitlis, jo nedalās ne ar vienu skaitli no 2 līdz $\left\lfloor \sqrt{401} \right\rfloor = 20$ ieskaitot), tātad tie abi der par meklētajiem dalītājiem.

Tātad esam atraduši 5 pirmskaitļus – 5; 13; 97; 17 un 401, ar kuriem dalās dotais skaitlis.

5.9.2. 1) Tā kā pret taisni vilktā perpendikula garums nevar pārsniegt pret šo pašu taisni vilktās slīpnes garumu (teorēma par slīpnes un perpendikula garumu), tad $CA \geq h_c \geq 5$ (skat.A5.8.zīm.).

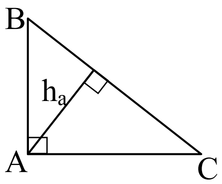


A5.8. zīm.

2) Tāpēc trijstūra laukums $S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_b \geq \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$.

3) Vērtība $S(ABC) = 10$ tiek sasniegta, piemēram, taisnleņķa trijstūrī ABC (skat. A5.9.zīm.), kur $AB = 4$; $AC = 5$ un $\angle A = 90°$. Šis trijstūris apmierina uzdevuma nosacījumus: $h_b = AB = 4$, $h_c = AC = 5$, savukārt

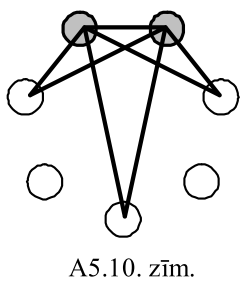
$$h_a = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{41}} = \sqrt{\frac{400}{41}} = \sqrt{9\frac{31}{41}} > \sqrt{9} = 3.$$



A5.9. zīm.

5.9.3. a) Pieņemsim, ka katrs iespējamais policistu trijnieks ir kopā nostrādājis tieši vienu reizi. Tad noteikti katri divi policisti kopā ir strādājuši ar katru no pieciem atlikušajiem policistiem, tātad katrs pāris kopā strādājis tieši piecas reizes. Tātad var būt $n = 5$.

b) Attēlosim policistus ar regulāra 7-stūra virsotnēm (skat. A5.10.zīm.). Izvēlamies divus policistus (iekrāsoti pelēki). Dežūras izveidojam tā, lai pa reizei dežūrē tie policistu trijnieki, kuru atbilstošās virsotnes veido vienādsānu trijstūri. Analoģiski apskatām pārējos policistu pārus. Tādā veidā mēs esam panākuši situāciju $n = 3$.


A5.10. zīm.

5.9.4. Vienādojumu $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ pārveidojam, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + ax + b - x^2 - cx - d = 0$$

$$ax + b - cx - d = 0$$

$$x(a - c) + b - d = 0$$

$$x(a - c) = d - b$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}, \text{ jo } a \neq c.$$

Tātad vienādojumam eksistē sakne $x_0 = \frac{d - b}{a - c}$.

Apzīmējam doto kvadrāttrinomu saknes attiecīgi ar x_1, x_2; x_3, x_4. Izmantojot Vjeta teorēmu, aprēķinam, ka pirmā kvadrāttrinoma sakņu summa ir $x_1 + x_2 = -a$, savukārt otrā kvadrāttrinoma sakņu summa $x_3 + x_4 = -c$. Tātad visu četru sakņu summa ir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(a + c)$.

Tā kā dots, ka visu četru sakņu summas puse ir kopīgā vienādojuma sakne, tad $-\frac{a + c}{2} = \frac{d - b}{a - c}$. Izmantojot proporciju pamatīpašību, iegūstam, ka $2d - 2b = c^2 - a^2$.

Pēc Vjeta teorēmas varam aprēķināt abu kvadrāttrinomu sakņu summas un reizinājumus:

- $a = -(x_1 + x_2)$
- $c = -(x_3 + x_4)$
- $b = x_1 \cdot x_2$
- $d = x_3 \cdot x_4$

Ievietojot šīs vērtības iepriekš iegūtajā sakarībā $2d - 2b = c^2 - a^2$, iegūstam:

$$2(x_3 \cdot x_4) - 2(x_1 \cdot x_2) = (-(x_3 + x_4))^2 - (-(x_1 + x_2))^2.$$

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam:

$$2x_3x_4 - 2x_1 \cdot x_2 = x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$2x_3x_4 - 2x_3x_4 - 2x_1 \cdot x_2 + 2x_1 \cdot x_2 = x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$0 = x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2, \text{ k.b.j.}$$

5.9.5. Iedomāsimies, ka no katras pilsētas pa **katru** ceļu nobrauc automašīna. Tā kā ir 100 pilsētas un no katras iziet tieši 5 ceļi, tad no katras pilsētas izbrauc 5 automašīnas, kopā 500 automašīnu.

Ja ir ceļš, kurš savieno pilsētu A ar pilsētu B, tad šo ceļu veiks divas automašīnas – tā, kura izbrauc no pilsētas A uz pilsētu B, un tā, kura izbrauc no pilsētas B uz pilsētu A. Tāpat arī katru no pārējiem ceļiem veiks tieši 2 automašīnas. Varam aprēķināt visu automašīnu kopā nobraukto attālumu, t.i., $2 \cdot 30\,000 = 60\,000$ (km).

Automašīnas, kas brauca pa uzdevumā minētajiem īsākajiem ceļiem, kopā nobrauca 10 000 km. Tādu automašīnu bija vismaz 100, jo no katras pilsētas tieši viena no piecām automašīnām brauca pa visīsāko ceļu. Tad pārējās, ne vairāk kā $500 - 100 = 400$, automašīnas kopā nobrauca atlikušos $60\,000 - 10\,000 = 50\,000$ (km).

Noteikti vismaz viena no automašīnām nobrauca ne mazāk kā $\frac{50\,000}{400} = 125$ (km). Ja bija kaut viena automašīna, kura veica ceļa posmu, kas nav īsāks par 125 km, esam pierādījuši, ka eksistē ceļš, kura garums ir vismaz 125 km.

6. LATVIJAS 58. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Uzdevumu atrisināsim, izmantojot vienu no matemātikā visbiežāk pielietotajām pierādījumu metodēm – pierādījums no pretējā.

Pieņemsim, ka mazākais naturālais skaitlis, kas dalās gan ar x, gan ar y, ir $x + y$, t.i., $MKD(x, y) = x + y$.

Izdalot $x + y$ ar x, iegūstam $\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$. Savukārt, izdalot $x + y$ ar y, iegūstam $\frac{x+y}{y} = 1 + \frac{x}{y}$.

Tā kā abās vienādībās kreisajā pusē ir kāds naturāls skaitlis (jo $x + y$ dalās gan ar x, gan ar y bez atlikuma), tad arī labajās pusēs jābūt naturāliem skaitļiem. Bet tas nozīmē, ka gan y dalās ar x, gan x dalās ar y. Bet tā var būt vienīgi tad, ja $x = y$. Bet tad $MKD(x, y) = MKD(x, x) = x \neq x + y$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums ir aplams – mazākais naturālais skaitlis, kas dalās gan ar x, gan ar y, nav $x + y$.

6.9.2. Sākumā pārveidosim dotās sakarības $ab = \frac{c-a+1}{b} = \frac{c+1}{2}$ kreiso daļu:

$$ab = \frac{c-a+1}{b}$$

$$ab \cdot b = c - a + 1$$

$$ab^2 + a = c + 1 \qquad (*)$$

Tad pārveidosim dotās sakarības otru daļu:

$$ab = \frac{c+1}{2}$$

$$2 \cdot ab = c + 1 \qquad (**)$$

Tā kā vienādību (*) un (**) labās puses ir vienādas, tad vienādām jābūt arī to kreisajām pusēm:

$$ab^2 + a = 2ab$$

Pārveidojam iegūto vienādību:

$$ab^2 + a - 2ab = 0$$
$$a(b^2 - 2b + 1) = 0$$
$$a(b-1)^2 = 0$$

Lai divu skaitļu reizinājums būtu vienāds ar nulli, vienam vai abiem no skaitļiem ir jābūt 0. Tā kā dots, ka a – pozitīvs skaitlis, tad $a \neq 0$. Atliek variants, ka $(b-1)^2 = 0$, tātad $b = 1$ (ievērojam, ka esam jau atrisinājuši uzdevuma pirmo daļu).

Izmantosim šo iegūto b vērtību uzdevuma otrā punkta pierādīšanā: ievietojot vienādībā $ab = \frac{c+1}{2}$ skaitļa 1 vietā b un b vietā skaitli 1 (jo $b = 1$), iegūstam $a = \frac{c+b}{2}$. Esam ieguvuši prasīto: skaitlis a ir puse no skaitļu c un b summas.

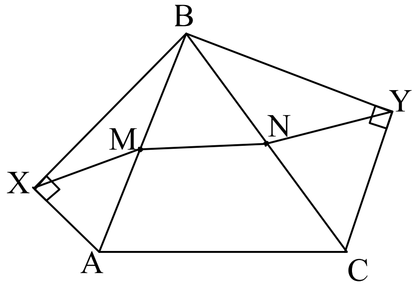
Uzdevums atrisināts.

6.9.3. Tā kā iekrāsots kādā no krāsām ir katrs riņķa līnijas punkts, tad varam apskatīt riņķa līnijā ievilktu regulāru 12-stūri: $A_1A_2...A_{12}$. Aplūkosim tā virsotnes.

Ievērosim, ka ievilktie trijstūri $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ ir vienādmalu, jo to malas savelk vienādus lokus, tātad tās ir vienādas. Un, ja riņķī ievilkta daudzstūra visas malas ir vienādas, tad tas noteikti ir regulārs daudzstūris. Līdzīgi pierāda, ka četrstūri $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$ ir kvadrāti.

Tad katrā no četriem ievilktajiem vienādmalu trijstūriem $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ ir vismaz divas baltas virsotnes (tas ir dots), tātad pavisam balto virsotņu ir vismaz astoņas. Tās sadalās pa trīs kvadrātiem $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$. Ja katrā kvadrātā būtu augstākais divas baltas virsotnes, tad kopā to nebūtu vairāk par $2 \cdot 3 = 6$ – pretruna ar to, ka baltās virsotnes ir vismaz astoņas.

6.9.4. 1) Apzīmēsim ar M un N malu AB un BC viduspunktus (skat. A6.1.zīm.). Tad XM un YN ir ΔAXB un ΔBYC mediānas pret hipotenūzām.



A6.1. zīm.

2) Atceramies, ka taisnleņķa trijstūrī tās mediānas garums, kas novilkta pret hipotenūzu, ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma. Tad $XM = \frac{1}{2}AB$ un $YN = \frac{1}{2}BC$.

3) Tā kā trijstūra viduslīnijas garums ir vienāds ar tai paralēlās trijstūra malas garuma pusi, tad $MN = \frac{1}{2}AC$.

4) Izmantojot teorēmu par lauztas līnijas garumu, iegūstam $XY \le XM + MN + NY = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.

5) Trijstūra pusperimetru var aprēķināt pēc formulas $p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$. Iepriekšējā punktā ieguvām, ka $XY \le \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$. Tātad prasītais ir pierādīts.

6.9.5. Apzīmēsim lodīšu daudzumu kastēs attiecīgi ar *b*, *s*, *m*. Tā kā sarkanajā kastītē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 3, tad $s \le 5$ (pat sešu **vismazāko** numuru vidējais aritmētiskais ir $(1+2+3+4+5+6):6 = 3\frac{1}{2} > 3$, un, pievienojot lielākus numurus, tas augs).

Skaidrs, ka pastāv vienādība $b + s + m = 27$ (*).

Atceramies, ka skaitļu $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \in N$) vidējo aritmētisko aprēķina pēc formulas $a_{vid} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$. Tātad mēs varam izteikt visu skaitļu summu kā vidējā aritmētiskā reizinājumu ar skaitļu skaitu. To zinot, varam izteikt arī visu uz uzdevumā dotajām lodītēm uzrakstīto skaitļu summu:

$$15b + 3s + 18m = 1 + 2 + ... + 27 = 378 \qquad (**)$$

No (*) un (**) iegūstam $(15b + 3s + 18m) - 3(b + s + m) = 378 - 3 \cdot 27 = 297$, tāpēc $12b + 15m = 297$ un $\mathbf{4b + 5m = 99}$, pie tam *b* un *m* – naturāli skaitļi.

Tiešas pārbaudes ceļā pārliecināmies, ka skaitļu pāri $(b;m)$ var būt (21;3), (16;7), (11;11), (6;15), (1;19); atbilstošās *s* vērtības ir attiecīgi 3; 4; 5; 6; 7, Tā kā $s \le 5$, divas pēdējās iespējas atkrīt.

Parādīsim, ka trīs pirmās tiešām pastāv:

baltajā kastē	5; 6; ...; 25	7; 8; ...; 14; 16; 17; ...; 23	10; 11; ...; 20
sarkanajā kastē	2; 3; 4	1; 2; 4; 5	1; 2; 3; 4; 5
melnajā kastē	1; 26; 27	3; 6; 15; 24; 25; 26; 27	6; 7; 8; 9; 21; ...; 27

Pārliecinieties paši, ka vidējie aritmētiski iznāk tādi, kā dots uzdevuma nosacījumos.

7. LATVIJAS 35. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Atbilde: 2008.

Risinājums. A. Tā kā jāvar tulkot **uz katru** no 2008 valodām, tad ar mazāk kā 2008 vārdnīcām noteikti nepietiek.

B. Ja vārdnīcas ļauj tulkot "pa apli", kā redzams A7.1.zīm., tad ar 2008 vārdnīcām pietiek.

$$\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \ldots \rightarrow 2007 \rightarrow 2008$$

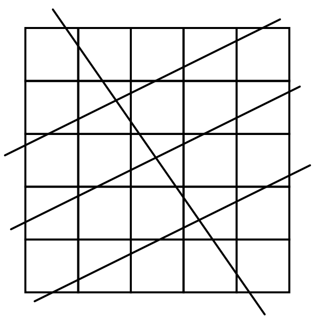
A7.1. zīm.

7.5.2. Piemēram, tā: pieskaitām pirmajai rindiņai 12, otrajai 9, trešajai 6, ceturtajai 3 un pēc tam atņemam no pirmās kolonnas 12, no otrās 9, no trešās 6 un no ceturtās 3 (skat. A7.2.zīm.).

1	2	3	4	+12
5	6	7	8	+9
9	10	11	12	+6
13	14	15	16	+3
-12	-9	-6	-3	

A7.2. zīm.

7.5.3. Skat., piem., A7.3. zīm. Redzam, ka katra rūtiņa ir pārsvītrota ar kādu no taisnēm, atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.



A7.3. zīm.

7.5.4. a) jā, piemēram, n = 111 111 111. Acīmredzams, ka skaitļa n veidoto ciparu summa ir 9 un skaitļa $n \cdot n = 12345678987654321$ ciparu summa ir 81.

b) nē. Atceramies skaitļa dalāmības pazīmes ar 3 un 9:

- Skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3.

- Skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9.

Tā kā skaitļa k ciparu summa ir 6 (tātad tā dalās ar 3) tad arī pats skaitlis k dalās ar 3. Tātad var uzrakstīt, ka $k:3=r$ (r – naturāls skaitlis), tātad, izsakot no vienādības k, iegūstam $k=3\cdot r$.

Skaitli $k\cdot k$ tad varam uzrakstīt kā $k\cdot k=3\cdot 3\cdot r\cdot r=9\cdot r\cdot r$, tātad $k\cdot k$ dalās ar 9 (jo tas ir uzrakstāms kā skaitļa 9 un naturāla skaitļa reizinājums). Bet ir dots, ka skaitļa $k\cdot k$ ciparu summa ir 24. Tā kā 24 nedalās ar 9, tad pēc skaitļa dalāmības pazīmes ar 9 varam apgalvot, ka $k\cdot k$ nedalās ar 9. Bet tas ir pretrunā ar iepriekš iegūto, ka $k\cdot k$ jādalās ar 9. Tāpēc tāds naturāls skaitlis k neeksistē.

7.5.5. Apskatīsim katru variantu atsevišķi:

1) Pēc 1. dienas katrs spēlētājs var būt ieguvis attiecīgi 0; ½ vai 1 punktu. Tātad ir 3 iespējas, cik punktu var būt spēlētājam. Tā kā spēlētāju pavisam ir 7, tad noteikti būs tādi divi spēlētāji, kuriem iegūto punktu skaiti būs vienādi.

2) Pēc 2. dienas katrs spēlētājs var būt ieguvis attiecīgi 0; ½; 1; 1½ vai 2 punktus. Atkal, tā kā spēlētāju ir 7, bet iespējas, cik punktus iegūt, ir tikai 5, noteikti būs tādi divi spēlētāji, kuriem iegūto punktu skaiti būs vienādi.

3) Pēc 3. dienas spēlētājs var būt ieguvis 0; ½; 1; 1½; 2; 2½ vai 3 punktus – pavisam 7 iespējas. Tātad triju dienu gadījumā visi iegūto punktu daudzumi var būt dažādi tikai tad, ja realizējas **visas** minētās 7 iespējas. Tomēr ievērojam, ka katrā spēlē pavisam tiek izspēlēts 1 punkts (ja spēlē kāds uzvar, tad 1 punkts tiek uzvarētājam, bet zaudētājam tiek 0 punkti – tātad abiem kopā 1 punkts; ja ir neizšķirts, tad katram spēlētājam tiek ½ punkta, tātad arī kopā 1 punkts), tātad, saskaitot kopā visu spēlētāju iegūtos punktus visās spēlēs, rezultātam jābūt veselam skaitlim. Bet, ja visi spēlētāji tiešām iegūst dažādus punktu daudzumus, tad ir izmantotas visas iegūstamo punktu iespējas, bet to summa ($0+\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+3=10\frac{1}{2}$) nav vesels skaitlis. Tātad arī trešajā dienā būs tādi divi spēlētāji, kuriem iegūto punktu skaiti būs vienādi.

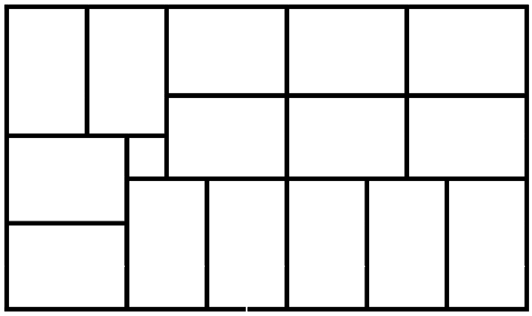
7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Atbilde: a) 11, **b)** var būt jebkurš skaits, kas lielāks par 1.

Risinājums. a) Tā kā katrs no skaitļiem vienāds ar vienpadsmito daļu no **visu** skaitļu summas, tad tie visi ir vienādi, un mēs varam katru no tiem apzīmēt, piemēram, ar a. Tā kā katrs no skaitļiem ir vienāds ar vienpadsmito daļu no visu skaitļu summas, varam rakstīt, ka $a=\frac{a\cdot x}{11}$, kur x ir skaitļu kopējais skaits. No dotā zinām, ka $a\neq 0$, tātad ar a var saīsināt. Tad $1=\frac{x}{11}$ un $x=11$.

b) Ja starp uzrakstītajiem skaitļiem var būt arī nulle, iepriekšējais spriedums neder. Mēs nevaram apgalvot, ka uzrakstīto skaitļu skaits ir skaidri nosakāms, jo **visas** skaitļu sistēmas (0;0), (0;0;0), (0;0;0;0) utt. apmierina uzdevuma prasības.

7.6.2. Jā, var. Skat., piem., A7.4. zīm.



A7.4. zīm.

Komentārs. Lai gan $7 \cdot 13 = 91$ nedalās ar $2 \cdot 3 = 6$ ($91 : 6 = 15; A1$), šoreiz, atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, nav obligāti nepieciešams, lai, sadalot lielo taisnstūri mazākos taisnstūros, pāri nepaliktu neviena rūtiņa.

7.6.3. Pirms uzdevuma risināšanas atcerēsimies pazīmi skaitļa dalāmībai ar 3: skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3.

Apskatīsim, kādus ciparus Andris var nosaukt un vai Maija var no tiem izveidot tādu skaitli, kas dalītos ar 3.

Ja Andris nosauc jebkuru no cipariem 0; 3; 6 vai 9, tad Maija vienkārši raksta šim ciparam atbilstošo viencipara skaitli, jo skaitlis, kas veidots no jebkura viena no šiem cipariem, dalīsies ar 3.

Pieņemsim, ka Andris nesauc nevienu no cipariem 0; 3; 6; 9. Tātad nosaukšanai paliek tikai cipari 1; 2; 4; 5; 7 un 8. Sadalīsim tos divās kopās: $A = \{1; 4; 7\}$ un $B = \{2; 5; 8\}$ (katrs no cipariem ir sastopams tikai vienā no kopām).

Aplūkojot abas kopas, redzam: ja Andris nosauc visus trīs ciparus no kopas *A*, tad Maija var no tiem sastādīt trīsciparu skaitli (ciparus kombinējot jebkādā veidā). Šī skaitļa ciparu summa būtu $1 + 4 + 7 = 12$. Tātad pēc dalāmības pazīmes šis skaitlis dalīsies ar 3. Līdzīgi iegūstam, ka arī tad, ja Andris nosauc visus trīs kopas *B* elementus, Maija var sastādīt trīsciparu skaitli, kas dalās ar 3.

Ja Andris nenosauc ciparus tā, ka tie visi trīs ir no vienas un tās pašas kopas, tad noteikti būs tā, ka viens skaitlis ir no vienas kopas, savukārt pārējie divi – no otras. Šajā gadījumā Maija ņem to ciparu pāri, kur viens cipars ir no kopas *A*, savukārt otrs – no kopas *B*. No šiem cipariem Maija var izveidot divciparu skaitli. Lai arī no kuriem diviem tādiem cipariem, kur viens ir no kopas *A*, otrs – no kopas *B*, mēs izveidotu divciparu skaitli, šī skaitļa ciparu summa dalīsies ar 3. Tātad arī Maijas izveidotā divciparu skaitļa ciparu summa dalās ar 3, k.b.j.

7.6.4. Atbilde: 72.

Piemērs: $1 \cdot 8 \cdot 9 = 72$**,** $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$**,** $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$**.**

Pierādīsim, ka 72 ir mazākā iespējamā *A* vērtība. Pierādījumu veidosim, pieņemot pretējo, t.i., ka $A < 72$. Ja mums izdosies parādīt, ka šis pieņēmums rada pretrunu, tad būs skaidrs, ka pieņēmums ir bijis aplams un 72 tiešām ir mazākā iespējamā *A* vērtība.

Tātad pieņemam, ka $A < 72$.

Tā kā A ir trīs viencipara skaitļu reizinājums, tad tas nevar būt 71, jo 71 ir pirmskaitlis.

Nākošā iespējamā A vērtība ir 70. Tā kā A ir lielākais no reizinājumiem, tad varam apgalvot, ka visu triju izveidoto reizinājumu reizinājums noteikti nepārsniedz $70 \cdot 70 \cdot 70 = 343000$. Bet, sareizinot dotos viencipara skaitļus, iegūstam $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$. Bet tā nevar būt, jo $362880 > 343000$. Esam ieguvuši pretrunu. Tātad pieņēmums ir bijis aplams. Mazākā iespējama A vērtība tiešām ir 72.

7.6.5. Vispirms Profesors Cipariņš nosauc Katrīnai skaitļus 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 91.

Skaidrs, ka, ja Katrīna par kādu skaitli atzīst divas sakrišanas, tad tas ir viņas iedomātais skaitlis.

Ja no visiem skaitļiem Katrīna atzīst sakrišanu tikai vienā šķirā vienam skaitlim $\overline{ab}$, tad iedomātais skaitlis ir $\overline{a0}$. Piemēram, ja Cipariņa nosauktajam skaitlim 78 Katrīna atzīst sakrišanu vienā šķirā, bet citas sakrišanas neatzīst, tad viņas iedomātais skaitlis noteikti ir 70 (acīmredzams, ka tas nevar būt 8, jo Katrīna iedomājās divciparu skaitli; tas nevar būt arī 80, jo Katrīna atbild, cik šķirās, nevis cik ciparos skaitļi sakrīt).

Ja divos no profesora nosauktajiem skaitļiem $\overline{ab}$ un $\overline{cd}$ Katrīna atzīst pa vienai sakrišanai vienā šķirā, tad iedomātais skaitlis ir vai nu $\overline{ad}$, vai $\overline{cb}$. Nosaucot vienu no tiem, Katrīna vai nu atzīst sakrišanu divās šķirās (tad tas ir viņas iedomātais skaitlis), vai saka, ka sakrišanas nav nevienā no šķirām. Tātad minējumi vairs nav nepieciešami un Profesors Cipariņš var apgalvot, ka Katrīnas iedomātais skaitlis ir nenosauktais skaitlis.

7.7. Septītā klase

7.7.1. Atbilde: 3 ciparus.

Risinājums: Atcerēsimies, kas ir pirmskaitlis: skaitlis, kas nav 1 un kam ir tieši divi dalītāji – pats skaitlis un 1.

Zinot to, pievērsīsimies uzdevuma risināšanai.

Acīmredzot pa apli nevar rakstīt ne pāra ciparus, ne ciparu 5, jo tad kādā no virzieniem veidosies skaitļi, kuriem pēdējais cipars ir pāra vai 5, bet, kā zināms, gan pāra skaitļi, gan skaitļi, kas beidzas ar 5, nav pirmskaitļi (pāra skaitļi vienmēr dalās ne tikai ar 1 un paši ar sevi, bet arī ar 2; savukārt skaitļi, kas beidzas ar 5, vienmēr dalās arī ar 5).

Tātad atliek cipari 1; 3; 7; 9. Ja tos visus uzrakstītu, tad skaitlim 9 vismaz vienā pusē būtu vai nu 3, vai 1, bet ne 93, ne 91 nav pirmskaitļi (93 dalās arī ar 3 un 91 dalās arī ar 7).

Ciparus 1; 3; 7 var izrakstīt jebkurā secībā, jo visi šo ciparu veidotie divciparu skaitļi (13; 31; 17; 71; 37; 73) ir pirmskaitļi.

7.7.2. Atbilde: nē.

Pierādījums. Ievērojam, ka x un y reizinājumu varam izteikt kā divu pakāpju reizinājumu: $x \cdot y = 10^{12} = 2^{12} \cdot 5^{12}$ (atceramies formulu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$).

Skatāmies, kādi var būt x un y. Tā kā to reizinājumu veido pakāpju reizinājumi, kur bāzes ir pirmskaitļi (tātad tos sīkāk pirmreizinātājos sadalīt nevar), tad skaidrs, ka gan x, gan y ir izsakāmi kā šīs pakāpes vai arī pakāpju ar bāzēm 2 un 5 reizinājums.

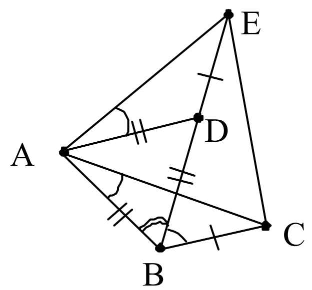
Ja x vai y izsakāms kā divu pakāpju reizinājums, tad šis skaitlis dalās ar 10, tātad tas beidzas ar 0 (Piemēram, ja $x = 2^{11} \cdot 5 = 2^{10} \cdot 2 \cdot 5 = 2^{10} \cdot 10$ un $y = 2 \cdot 5^{11} = 2 \cdot 5 \cdot 5^{10} = 10 \cdot 5^{10}$, tad šie abi skaitļi dalās ar 10). Tātad šis gadījums neder.

Atliek, ka viens no skaitļiem ir 2^{12}, bet otrs ir 5^{12} (nevienā no šo skaitļu pierakstiem beigu cipars nav 0). Bet $2^{12} = 4096$. Tātad arī šis gadījums neder.

Citu veidu, kā izvēlēties x un y, nav. Tātad prasītais nav iespējams.

7.7.3. Pirmajai baktērijai ir 2008 pēcteči; apzīmējam $x_1 = 2008$. Vienai no tās „meitām" pēcteču nav mazāk kā $\frac{1}{2}x_1 = x_2$. Vienai no šīs baktērijas meitām pēcteču nav mazāk kā $\frac{1}{2}x_2 = x_3$, utt. Pieņemsim, ka n ir **pirmais** indekss, pie kura $x_n \le 1399$. Ja būtu $x_n < 670$, tad $x_n \le 669$; tad $x_{n-1} \le 2x_n \le 1338$ - pretruna saskaņā ar n izvēli. Tāpēc $x_n \ge 670$.

7.7.4. 1) Tā kā dots, ka $BD = BA$ (skat. A7.5.zīm.), tad ΔABD ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi $\angle ABD = 60°$, tāpēc tas ir regulārs jeb vienādmalu trijstūris.



A7.5. zīm.

2) Tātad $\angle ADE = 180° - 60° = 120°$.

3) Saskaņā ar doto $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 60° + 60° = 120°$. Tāpēc $\angle ABC = \angle ADE$.

4) Tā kā dots arī, ka $DE = BC$, tad varam apgalvot, ka $\Delta ABC = \Delta ADE$ (mlm).

5) No tā, ka $\Delta ABC = \Delta ADE$, seko, ka $\angle EAD = \angle CAB$ un $EA = CA$.

6) Tātad $\angle EAC = \angle EAD + \angle DAC = \angle CAB + \angle DAC = \angle DAB = 60°$.

7) No tā, ka $EA = AC$, seko, ka ΔEAC ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi $60°$, tātad tas ir regulārs un visas tā malas ir vienādas savā starpā, k.b.j.

7.7.5. Ņemam divus patvaļīgus dotos punktus A un B un nokrāsojam sarkanus; tos 2 punktus (abās pusēs taisnei AB), kas ar A un B veido regulāru trijstūri (var gadīties, ka šie punkti nesakrīt ar dotajiem punktiem), nokrāsojam melnus. Esam nokrāsojuši lielākais **2** + **2** = 4 dotos punktus (no tiem tieši 2 sarkanā krāsā), tātad ir vēl vismaz $17-4=13$ nenokrāsoti dotie punkti.

Vienu no vēl nenokrāsotajiem dotajiem punktiem – C – nokrāsojam sarkanu. Tos ≤ 4 dotos punktus, kas ar A un C vai B un C veido regulāru trijstūri, nokrāsojam melnus (šo doto punktu skaits var būt mazāks par 4, jo atkal var gadīties, ka kāds no regulāros trijstūrus veidojošajiem punktiem nav dotais punkts). Šobrīd aizkrāsoti ir lielākais 2 + 2 + **1** + **4** = 9 dotie punkti (no tiem sarkanā krāsā ir tieši 3), tātad nenokrāsoti ir vēl vismaz $17-9=8$ dotie punkti.

No šiem vēl nenokrāsotajiem punktiem vienu – D – atkal nokrāsojam sarkanu, savukārt tos ≤ 6 dotos punktus, kas ar D un A, D un B, D un C veido regulāru trijstūri, nokrāsojam melnus. Tātad tagad ir nokrāsoti ne vairāk kā 2 + 2 + 1 + 4 + **1** + **6** = 16 dotie punkti (no tiem tieši 4 ir sarkani). Tāpēc ir vismaz vēl viens dots nenokrāsots punkts. Nokrāsojot šo punktu sarkanā krāsā, uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. Padomāsim, kāpēc var gadīties, ka nav tādas x vērtības, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses ir vienādas savā starpā. Apskatīsim, kas būtu tādā gadījumā, ja tās pie kaut kādas *x* vērtības būtu savā starpā vienādas. Tad varētu rakstīt, ka $x^2+px+q=x^2+ax+b$. Sagrupējot nezināmos, iegūtu vienādojumu $(p-a)x=b-q$. Tā kā dots, ka nav tādas x vērtības, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses būtu vienādas savā starpā, tad šim vienādojumam nav atrisinājuma. Lai vienādojumam nebūtu atrisinājuma, $p-a=0$ jeb $p=a$ (un $b\neq q$, bet tas mums nav svarīgi), jo, ja $p-a$ nebūtu 0, tad, izsakot $x=\dfrac{b-q}{p-a}$, mēs iegūtu tādu x vērtību, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses būtu vienādas. Taču, saskaņā ar uzdevumā doto, tā nevar būt.

Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam, ka $x_1+x_2=-p$ un $x_3+x_4=-a$. Mēs jau noskaidrojām, ka $p=a$, tātad $x_1+x_2=x_3+x_4$, kas arī bija jāpierāda.

7.8.2. No dotā seko, ka ne *a*, ne *b*, ne *c* nav 0 (jo ar 0 dalīt nedrīkst).

Izmantojot proporcijas pamatīpašību, iegūstam:

$a\cdot a=b\cdot c$ jeb $a^2=bc$ (1);

$b\cdot b=a\cdot c$ jeb $b^2=ac$ (2);

$c\cdot c=a\cdot b$ jeb $c^2=ab$ (3).

Dalot vienādību (1) ar vienādību (2), iegūstam $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{bc}{ac}\Rightarrow\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b}{a}$. Vēlreiz izmantojot proporcijas pamatīpašību, iegūstam $a^3=b^3$, no kurienes seko, ka $a=b$.

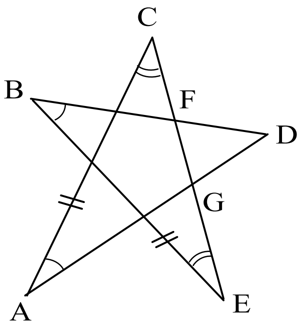
Līdzīgi, dalot vienādību (2) ar vienādību (3), iegūstam $\frac{b^2}{c^2}=\frac{ac}{ab}\Rightarrow\frac{b^2}{c^2}=\frac{c}{b}\Rightarrow$ $c^3=b^3\Rightarrow c=b$. Ja $a=b$, $b=c$, tad $a=b=c$, k.b.j.

7.8.3. Tā kā dots, ka skaitlis n ir naturāls skaitlis, kas ir lielāks par 1 un kas nav pirmskaitlis (tātad ir salikts skaitlis), tad tam ir vismaz 3 naturāli dalītāji (atceramies, ka skaitlis nav pirmskaitlis, ja tam ir vairāk kā divi dažādi dalītāji).

Apzīmēsim **visus** n naturālos dalītājus augošā secībā ar $a_1<a_2<...<a_k$ ($k\geq 3$). Skaidrs, ka katrs dalījums $\frac{n}{a_i}$ ($i=\overline{1...k}$) ir naturāls skaitlis, turklāt tā rezultāts ir kāds n dalītājs (gadījumā, ja $n=a_i\cdot a_i$, t.i., n ir kāda skaitļa kvadrāts, dalījums $\frac{n}{a_i}=a_i$ ir tas pats dalītājs). Skaidrs, ka tad $\frac{n}{a_1},\frac{n}{a_2},...,\frac{n}{a_k}$ ir visi n naturāli dalītāji dilstošā secībā ($\frac{n}{a_1}>\frac{n}{a_2}>...>\frac{n}{a_k}$).

Tā kā izteiksme $a_1+a_2+...+a_k$ ir visu skaitļa n dalītāju summa, kur saskaitāmie ir uzrakstīti augošā secībā, un izteiksme $\frac{n}{a_1}+\frac{n}{a_2}+...+\frac{n}{a_k}=n\cdot(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k})$ ir visu skaitļa n dalītāju summa, kur saskaitāmie ir uzrakstīti dilstošā secībā, tad ir skaidrs, ka $a_1+a_2+...+a_k=n\cdot(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k})$, jo summa nemainās, mainot saskaitāmo kārtību.

7.8.4. 1) Apzīmējam malu AD un CE krustpunktu ar G un malu BD un CE krustpunktu ar F (skat. A7.6.zīm.).



A7.6. zīm.

2) No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $\Delta ACG=\Delta BEF$ (lml).

3) No tā, ka $\Delta ACG=\Delta BEF$ seko, ka $\angle AGC=\angle BFE$ un $\boldsymbol{AG=BF}$.

4) No iepriekšējā punktā uzrakstītās leņķu vienādības seko, ka $\angle FGD=\angle GFD$ (kā vienādo leņķu blakusleņķi).

5) Tāpēc ΔFDG ir vienādsānu un $\boldsymbol{DG=DF}$.

6) Saskaitot abas izceltās vienādības, iegūstam $AG+GD=BF+FD$. Un, tā kā $AD=AG+GD$ un $BD=BF+FD$, tad iegūstam $AD=BD$, k.b.j.

7.8.5. Apzīmēsim uzvarētāja iegūto punktu skaitu ar n.

I Tā kā spēlētāju punktu daudzumi var atšķirties par, mazākais, puspunktu, tad kopējais visu 8 spēlētāju iegūtais punktu skaits noteikti nav lielāks par šādas izteiksmes vērtību:

$$n+(n-\frac{1}{2})+(n-1)+(n-1\frac{1}{2})+(n-2)+(n-2\frac{1}{2})+(n-3)+(n-3\frac{1}{2})=8n-14$$

.

II Skaidrs, ka katra spēle kopā bija 1 punktu vērta (uzvarētāja 1 punkts, summēts ar zaudētāja 0 punktiem, ir vienāds ar 1 punktu; neizšķirta gadījumā katrs spēlētājs iegūst $\frac{1}{2}$ punkta, tātad pa abiem kopā iegūst 1 punktu), un, tā kā kopā tika izspēlētas 28 spēles, tad spēlētāji ieguva kopā 28 punktus.

III No otras puses, mēs aprēķinājām, ka kopējais visu 8 spēlētāju punktu skaits (28) nav lielāks par $8n-14$. Tātad varam rakstīt $28 \le 8n-14$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam $8n \ge 42$ un tad $n \ge 5\frac{1}{4}$. Un, tā kā katra spēlētāja iegūtais punktu daudzums ir vai nu vesels skaitlis, vai „vesels un puse”, tad no $n \ge 5\frac{1}{4}$ seko $n \ge 5\frac{1}{2}$.

Šim rezultātam atbilstošu piemēru skat. A7.7.zīm., kur rindās ir attēloti spēlētāju (apzīmēti ar A, B, C, D, E, F, G, H) iegūtie punkti spēlēs ar pretiniekiem (attēloti kolonnās), un pēdējā kolonnā (ar nosaukumu „Σ”) ir attēloti katra spēlētāja iegūtie punkti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	Σ
A		½	½	½	1	1	1	1	5½
B	½		½	½	½	1	1	1	5
C	½	½		½	½	½	1	1	4½
D	½	½	½		½	½	½	1	4
E	0	½	½	½		½	½	½	3
F	0	0	½	½	½		½	½	2½
G	0	0	0	½	½	½		½	2
H	0	0	0	0	½	½	½		1½

A7.7. zīm.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Atbilde: nē.

Risinājums. Pieņemsim, ka tā noticis, un apskatīsim gadījumu, kad vienīgais skaitlis, kas nedalās ar 3, ir izveidots no kādas kolonnas cipariem.

Tas nozīmē, ka visās pārējās vienpadsmit kolonnās un pilnīgi visās rindiņās izveidotie skaitļi dalās ar 3. Izmantosim dalāmības pazīmi – ar 3 dalās visi tie skaitļi, kuriem ciparu summa dalās ar 3. Zinot to, ka katrs no rindiņām izveidotais skaitlis dalās ar trīs, secinām, ka arī katras rindiņas ciparu summa dalās ar 3, līdz ar to arī visu rindiņu visu ciparu summa dalās ar trīs, tātad visu ciparu summa, kuri atrodas dotajās 144 rūtiņās, dalās ar 3.

Savukārt katrā no vienpadsmit kolonnām esošo ciparu summa dalās ar 3, bet vienas kolonnas ciparu summa – nē. No tā secinām, ka visu to ciparu summa, kas atrodas dotajās 144 rūtiņās, ar 3 nedalās.

Iegūta pretruna, kas pierāda: nevar gadīties, ka tieši 23 no izveidotajiem skaitļiem dalās ar 3.

Līdzīgi apskatām gadījumu, ja vienīgais skaitlis, kas nedalās ar 3, ir izveidots no kādas rindiņas cipariem.

7.9.2. Atbilde: nē, nevar būt.

Risinājums. Gadījumā, ja $x=1$, visu trīs funkciju vērtības ir $a+b+c$, tātad visu trīs funkciju grafiki iet caur punktu $(1; a+b+c)$. Bet dotie 3 kvadrātfunkciju grafiki neiet caur vienu punktu (visi 6 to iespējamie krustpunkti zīmējumā jau redzami, tātad citu nav).

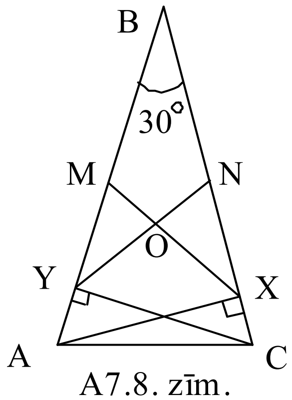
7.9.3. 1) Atceramies, ka taisnleņķa trijstūrī mediānas, kura novilkta pret hipotenūzu, garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma. Tad taisnleņķa trijstūrī *AXB* mediāna $MX=\frac{1}{2}BA$, savukārt taisnleņķa trijstūrī *CYB* mediāna $YN=\frac{1}{2}BC$ (skat. A7.8.zīm.).

2) Atceramies vēl vienu labi zināmu ģeometrijas faktu: taisnleņķa trijstūrī katetes pret $30°$ leņķi garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma. Tā kā dots, ka $\angle ABC=30°$, tad trijstūrī *AXB* iegūstam, ka $AX=\frac{1}{2}BA$, savukārt trijstūrī *CYB* iegūstam, ka $CY=\frac{1}{2}BC$.

3) Tā kā $\frac{1}{2}BA=MA=MX=AX$, tad ΔAXM ir regulārs trijstūris. Līdzīgi arī $\frac{1}{2}BC=NC=YN=CY$, tātad ΔCYN ir regulārs trijstūris.

4) Tāpēc $\angle BMX=\angle BNY=180°-60°=120°$ (kā leņķu *AMX* un *YNX* blakusleņķi).

5) Tāpēc, apskatot četrstūri *NOMB*, varam aprēķināt, ka $\angle MON=360°-120°-120°-30°=90°$, tātad $MX\perp NY$, k.b.j.



A7.8. zīm.

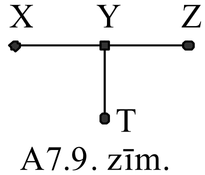
7.9.4. Atbilde: 6 grupas.

Minimalitātes pierādījums. Apskatīsim 11 skaitļus $1; 2; 4; 8; ...; 1024 = 2^{10}$. Ja grupu skaits nepārsniedz 5, tad ir grupa, kas satur 3 no šiem skaitļiem (jo $11 > 5 \cdot 2$) $a < b < c$. Bet c dalās ar b un b dalās ar a, kā nedrīkst būt.

Piemērs. Nosauksim par naturāla skaitļa n augstumu $h(n)$ to kāpinātāju summu, ar kuriem n satur dažādus pirmreizinātājus (piemēram, $h(8) = h(2^3) = 3$; $h(10) = h(2^1 \cdot 5^1) = 2$; $h(1) = 0$). Acīmredzot, ja x dalās ar y un $x > y$, tad $h(x) - h(y) \geq 1$. Mūsu apskatāmajiem skaitļiem n, $1 \leq n \leq 2008$, $h(n) < 11$ (jo tie visi mazāki par $2^{11} = 2048$). Iekļaujam 1. grupā skaitļus ar h = 0 un h = 1; otrajā – ar h = 2 un h = 3; ... ; sestajā – ar h = 10. Ja $a \vdots b$ un $b \vdots c$, tad $h(a) - h(c) \geq 2$, tātad a un c nav vienā grupā.

7.9.5. a) jā. Novelkam katras rūtiņas kontūru un visa kvadrāta kontūru. Tādējādi rūtiņu malas gan kvadrāta iekšpusē, gan uz tā ārējās robežas katra pieder 2 slēgtām līnijām.

b) nē. Pieņemsim, ka X, Y, Z, T – rūtiņu virsotnes, pie tam X, Y, Z atrodas uz kvadrāta malas (skat. A7.9.zīm.) Katrs kontūrs vai nu satur tieši divas no malām YX, YZ, YT, vai nesatur nevienu no tām. Apzīmēsim kontūru skaitus, kas satur atbilstošās malas, attiecīgi ar $n(XY)$, $n(YZ)$, $n(YT)$. Ja tie visi būtu nepāra skaitļi, tad $\widetilde{N} = n(XY) + n(TZ) + n(YT)$ būtu nepāra skaitlis. Bet $\widetilde{N}$ ir pāra skaitlis, jo katrs kontūrs „dod pienesumu" vai nu diviem saskaitāmajiem, vai nevienam. Tā ir pretruna, tātad prasītais nav iespējams.



A7.9. zīm.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

ALGEBRA

ALGEBRISKI PĀRVEIDOJUMI UN IZTEIKSMES – 1.1.3., 1.1.4., 1.2.3., 1.2.6., 1.4.4., 3.2.2., 3.2.5., 3.4.6., 3.5.9., 3.6.4., 5.7.1., 5.8.3., 6.9.2., 7.5.2., 7.8.2.

VIENĀDOJUMI – 1.2.2., 1.2.6., 1.3.4., 1.4.9., 1.4.12., 1.4.14., 2.3.3., 2.5.2., 2.5.4., 3.4.7., 4.9.1., 5.6.1., 5.9.4., 7.8.1.

NEVIENĀDĪBAS – 1.2.5., 1.4.5., 1.4.13., 2.2.2., 3.1.7., 3.1.8., 3.2.7., 3.3.3., 3.3.5., 3.6.7., 4.7.1., 5.7.5.

VIENĀDOJUMU SISTĒMAS – 7.6.1.

FUNKCIJAS – 1.1.10., 1.1.11. 1.4.6., 1.4.7., 3.5.10., 4.9.2., 7.9.2.

ĢEOMETRIJA

KLASISKĀ ĢEOMETRIJA – 1.1.2., 1.1.5., 1.4.3., 1.4.8., 1.4.11., 3.1.2., 3.1.10., 3.2.4., 3.3.4., 3.4.9., 3.6.3., 4.8.3., 4.9.3., 5.8.5., 5.9.2., 6.9.4., 7.7.4., 7.8.4., 7.9.3.

FIGŪRU SISTĒMAS, PIEMĒRI – 1.1.9., 1.2.4., 1.2.8., 1.3.2., 2.1.2., 2.2.3., 2.3.2., 2.3.4., 3.1.3., 3.6.5., 4.5.1., 4.6.1., 4.7.2., 7.5.3., 7.7.5.

FIGŪRU SAGRIEŠANA UN SALIKŠANA – 2.4.3., 2.5.3., 3.2.6., 3.3.10., 3.4.2., 3.4.4., 3.5.6., 5.5.4., 5.6.2., 5.7.4., 7.6.2.

INVARIANTU METODE, KRĀSOŠANA – 3.2.8., 3.4.4., 5.8.2., 7.9.5.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 3.1.6., 3.3.10., 3.5.1., 4.5.4., 4.7.4., 5.5.5., 5.9.5., 6.9.3., 7.7.5.

SKAITĻU TEORIJA

DALĀMĪBA, DALĪŠANA AR ATLIKUMU – 1.4.2., 2.3.3., 3.1.5., 3.2.1., 3.2.5., 3.3.2., 3.5.7., 3.6.4., 4.8.1., 4.8.2., 5.6.3., 6.9.1., 7.5.4., 7.6.3., 7.8.3., 7.9.1.

SKAITĻA SADALĪJUMS PIRMSKAITĻU REIZINĀJUMĀ – 3.4.5., 5.7.3., 5.9.1., 7.7.2., 7.9.4.

SKAITĻA PIERAKSTS, ARITMĒTISKO DARBĪBU IZPILDE – 1.1.1., 1.1.6., 1.1.8., 1.2.1., 1.2.7., 1.3.1., 1.3.3., 1.4.1., 1.4.10., 2.1.1., 2.2.4., 2.3.1., 2.4.1., 2.5.1., 3.3.1., 3.4.10., 3.6.1., 3.6.6., 4.5.3., 4.6.2., 4.7.3., 5.5.1., 5.6.4., 5.8.1., 7.5.4., 7.7.1., 7.7.2.

GRUPĒŠANA – 2.2.1., 2.2.4., 3.1.1., 3.1.4., 3.2.10., 3.3.2., 3.4.8., 3.5.3., 6.9.5., 7.6.4.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 3.2.10., 3.3.7., 7.6.4., 7.9.4.

INVARIANTU METODE – 2.1.3., 3.1.4., 3.3.7., 3.5.3.

KOMBINATORIKA

UZDEVUMI, KAS REDUCĒJAS UZ GRAFIEM – 2.5.5., 3.3.8., 3.3.9., 4.6.4., 5.6.5., 5.9.3., 7.5.1.

SKAITĪŠANA – 1.1.7., 1.4.14., 3.2.9., 3.5.2.

KOMBINATORIKAS STRUKTŪRAS – 1.2.9., 1.3.6., 2.4.2., 2.4.4., 3.1.7., 3.5.5., 4.6.3.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 3.1.9., 3.3.9., 3.6.10., 5.5.2., 7.5.1.

INVARIANTU METODE – 3.6.9., 4.7.5., 4.8.4., 4.9.5., 7.5.5., 7.8.5.

EKSTREMĀLĀ ELEMENTA METODE – 5.5.3.

ALGORITMIKA

ALGORITMA IZSTRĀDE – 2.4.5., 3.2.3., 3.4.1., 3.4.3., 3.4.10., 3.5.4., 3.6.8., 4.5.5., 4.9.5., 7.6.5.

LOĢISKA RAKSTURA UZDEVUMI – 1.1.12., 1.3.5., 2.1.4., 2.1.5., 2.2.5., 2.3.5., 3.3.6., 4.5.2., 4.6.3., 4.9.4., 5.6.1.

PROCESU ANALĪZE – 2.1.5., 2.2.5., 3.1.8., 3.5.8., 3.6.2., 3.6.8., 4.6.5., 4.8.5., 5.7.2., 5.8.4., 7.7.3.

LITERATŪRA

Vairāki uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Maskavas matemātikas olimpiāde: 3.2.3., 3.4.2., 3.6.8.

Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde: 3.2.8., 3.4.9., 3.6.3., 3.6.4., 4.8.4., 4.9.3., 5.7.3., 7.8.4., 7.8.5., 7.9.3.

Lietuvas matemātikas olimpiāde: 4.5.2., 7.5.5.

Vjetnamas matemātikas olimpiāde: 3.2.10.

Baltijas ceļš: 3.3.9.

Bulgārijas matemātikas olimpiāde: 3.5.2.

Raitis Ozols: 3.4.10.

Vents Valle: 2.1.5.

P. Vaderlinds: 4.6.5.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome: A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis

Mākslinieciskās noformētājas: L. Kalniņa

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA" GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L.Freija, S.Zabarovska, B. Johannesons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.