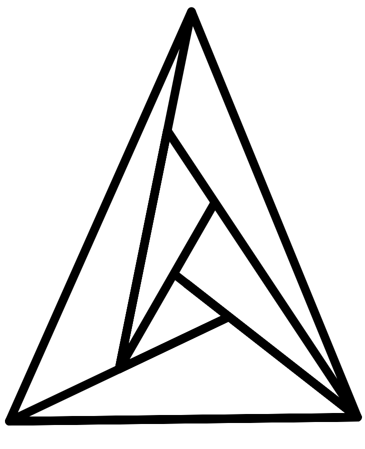
A.Andžāns, I.Bērziņa, D.Bonka, B.Johannessons

Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm uzdevumi un atrisinājumi 2005./ 2006. mācību gadā



Rīga 2006

UDK

A.Andžāns, I.Bērziņa, D.Bonka, B.Johannessons. Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2005./ 2006. mācību gadā.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2006. – 88 lpp.

Šajā darbā apkopoti to 2005./ 2006. mācību gadā notikušo matemātikas sacensību uzdevumi un atrisinājumi 4. –9. klašu skolēniem, kuru rīkošanā piedalījusies Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Darbu izdošanai sagatavojusi Inese Bērziņa.

ISBN

SATURS

IEVADS

Dažādas sacensības, t. sk. olimpiādes, patlaban ir ļoti nopietns stabilizējošs faktors matemātikas padziļinātā mācīšanā Latvijā. Kaut arī oficiālais skolas mācību saturs pēdējo 15 gadu laikā vairākkārt mainījies, kopumā saglabājot tendenci vienkāršoties, matemātisko sacensību sistēma saglabājusi nemainīgus augstus standartus, pēc kuriem daudzi skolotāji orientējas savā darbā. Olimpiāžu sistēmas organizatoriskā stabilitāte ļauj veidot skolotājam matemātikas padziļinātas mācīšanas procesu ar tālu perspektīvu un (sevišķi jaunāko klašu skolēniem) skaidri uztveramiem un emocionāli pievilcīgiem mērķiem.

Tāpēc matemātiskās sacensības var kalpot par līdzekli, lai izplatītu matemātiskās zināšanas un prasmes plašās skolotāju un skolnieku aprindās. Tā ir būtiska atšķirība no situācijas vēl 15 gadus atpakaļ, kad skolotājiem bija brīvi pieejami daudzi augsta līmeņa metodiski materiāli, un olimpiādes galvenokārt bija tikai svētki un padarītā darba skate. Šodien olimpiāžu un konkursu uzdevumu krājumi ar izvērstiem atrisinājumiem bieži ir vienīgais materiāls, ko skolotājs izmanto padziļinātā darbā.

Konkurss „Tik vai cik” tika nodibināts 2004. gadā, par tā organizēšanu vienojoties LU A.Liepas NMS līdzstrādniecei Dacei Bonkai un Šauļu Universitātes profesoram Arkādijam Kiseļovam. 2004. gada maijā notika viena izmēģinājuma kārta, taču, sākot no 2004./ 2005. m.g., konkurss notiek regulāri visa mācību gada garumā.

Šajā mācību gadā vairāku „Tik vai cik” nodarbību uzdevumu sastādīšanā piedalījusies arī LU A.Liepas NMS līdzstrādniece Marina Avlasenko.

„Jauno matemātiķu konkursu” 1992. gadā nodibināja Preiļu Valsts 1. ģimnāzijas matemātikas skolotāja, ilggadīga LU A.Liepas NMS līdzstrādniece Mārīte Seile (Stupāne). Sākotnēji tas bija paredzēts Latgales skolu 4. –7. klašu skolēniem. Patlaban konkurss kļuvis populārs visā Latvijā. To organizē LU A.Liepas NMS un Rudzātu vidusskola (jāatzīmē Venerandas Springes ieguldījums) ar vairāku Latgales rajonu laikrakstu atbalstu.

„Profesora Cipariņa klubs” tika nodibināts 1974. gada rudenī pēc laikraksta „Pionieris” skolu daļas vadītājas Veltas Jurševicas ierosinājuma. Patlaban tas darbojas ar laikraksta „Latvijas Avīze” un tās pielikuma „Mājas Viesis” atbalstu.

Sagatavošanās olimpiādes matemātikā notiek kopš 1987./ 88. mācību gada; to rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai.

Rajona olimpiādes 9. –12. (agrāk 8. –11.) klasēm notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem, bet 5. –8. (agrāk 4. –7.) klasēm – kopš 1979./ 80. mācību gada. Kopš 1977./ 88. mācību gada tās, tāpat kā valsts olimpiādes 3. kārta, tiek rīkotas, sadarbojoties LR IZM/ LR IZM ISEC un LU A.Liepas NMS.

Atklātās matemātikas olimpiādes notiek kopš 1974. gada. Tās rīko LU A.Liepas NMS.

Visu minēto sacensību uzdevumi, atrisinājumi, rezultāti, arhīvi utt. Atrodami LU A.Liepas NMS mājas lapā (šobrīd http://www.liis.lv/NMS/, vēlāk http://www.nms.lu.lv).

Jāatzīmē, ka visi minētie pasākumi var notikt tikai pateicoties daudzu studentu, zinātnieku, skolotāju, skolu un citu organizāciju ieinteresētībai un atbalstam. Sīkāk par to lasiet augšminētajā mājas lapā.

Starp „lielo zinātni” un matemātiskajām sacensībām pastāv daudzi saskares punkti, un to kļūst aizvien vairāk. Kā iemeslus var minēt:

a) Tradicionālo uzdevumu grupu saturs tiek izsmelts, un oriģinālu uzdevumu sastādītājiem aizvien biežāk jāgriežas pie jaunām matemātikas un radniecīgu zinātņu nozarēm, kur nav izteiktas robežas starp „elementārām” un „nopietnām” problēmām,
b) Daudzi bijušie matemātisko sacensību dalībnieki kļuvuši par aktīvi strādājošiem zinātniekiem, saglabājot saikni ar olimpiādēm gan organizatoriskā, gan radošā ziņā. Viņi ienes tur savu pētījumu garu un tematiku,

c) Aizvien vairāk zinātnieku un augstskolu mācību spēku iesaistās padziļinātā matemātikas apmācībā, kuras mērķis un kulminācija bieži ir veiksmīgi starti olimpiādēs. Tas būtiski paaugstina matemātisko sacensību dalībnieku līmeni un savukārt ved pie uzdevumu tematikas padziļināšanās un paplašināšanās.

Elektronisko skaitļotāju plaša izmantošana informācijas apstrādē, zinātnes un tehnikas uzdevumu risināšanā, sarežģītu procesu vadīšanā ir ievērojami izmainījusi arī matemātikas pētījumu tematiku un metodes. Šīs matemātikas zinātnē notiekošās pārmaiņas ietekmējušas arī elementārās matemātikas uzdevumu saturu. Tāpēc līdz ar uzdevumiem aritmētikā, algebrā un klasiskajā ģeometrijā grāmatā ir arī uzdevumi par algoritmiem, par konfigurācijām, par kombinatoriskās ģeometrijas jautājumiem.

Strādājot ar grāmatu, iesakām katru uzdevumu censties atrisināt patstāvīgi.

Ja izraudzīto uzdevumu neizdodas uzreiz atrisināt, tad nevajadzētu pēc pirmā neveiksmīgā mēģinājuma skatīties risinājumus, jo īstu gandarījumu par paveikto darbu var gūt tikai tad, ja uzdevums ir atrisināts patstāvīgi. Visi patstāvīgi iegūtie atrisinājumi jāpieraksta iespējami precīzi un pilnīgi. Ja uzdevuma formulējumā vai atrisinājumā ir lietoti jēdzieni, kas matemātikas stundās vēl nav aplūkoti, šo jēdzienu saturs jānoskaidro mācību grāmatās vai konsultējoties ar matemātikas skolotāju.

Kad ir izdevies atrisināt vairākus līdzīga satura uzdevumus, iesakām padomāt par iespējām šos uzdevumus vispārināt.

Noslēgumā sirsnīgi pateicamies savām kolēģēm NMS-ā Marinai Avlasenko, Lāsmai Kalniņai, Julitai Klušai par līdzdalību šeit aplūkoto pasākumu organizēšanā, kā arī LU rektoram I.Lācim, LU Matemātikas un informātikas institūtam (direktors prof. J.Bārzdiņš) un LU Fizikas un matemātikas fakultātei (dekāns prof. M.Auziņš) par izrādīto atbalstu, kā arī visiem tiem pedagogiem ,vecākiem un skolēniem, kas ar savu darbu padarījuši vajadzīgu un iespējamu šīs grāmatas tapšanu.

Rīgā, 2006. gada 23. jūnijā Autori

UZDEVUMI

1. KONKURS 4. KLASĒM „TIK VAI CIK”

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. Aprēķini (3+3):3+(2-2):2-(1+1):1

a) 2
b) 0
c) 4
d) 3
e) 1

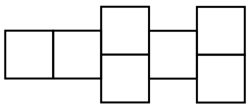
1.1.2. Kurš no dotajiem skaitļiem ir vislielākais?

a) 90099
b) 9999
c) 99000
d) 90909
e) 900000

1.1.3. Degot 1 stundu, tievā svece saīsinās par 2 cm, bet resnā – par 1cm. Tumšā istabā vienlaicīgi iededza divas sveces: 14 cm garu tievo sveci un 8 cm garu resno sveci. Cik ilgi istaba būs apgaismota?

a) 15 stundas
b) 7 stundas
c) 8 stundas
d) 22 stundas
e) nevar noteikt

1.1.4. Meitenes ar krītu uz asfalta uzzīmēja klasītes (tādas, kā parādīts 1. zīm.). Katra klasīšu rūtiņa ir kvadrāts ar malas garumu 25 cm. Zīmējumā neviena līnija netika novilkta divreiz. Pēc zīmēšanas krītiņš bija samazinājies uz pusi. Cik garu līniju var uzzīmēt ar atlikušo krītiņa gabalu?



1. zīm.

a) 50m 50cm
b) 7m
c) 175cm
d) 4m 50cm
e) nevar noteikt

1.1.5. Kādu skaitli jāievieto x vietā vienādojumā $x:2=8:x$, lai iegūtu pareizu vienādību?

a) 2
b) 8
c) 4
d) 16
e) tāda skaitļa nav

1.1.6. Cik ir $100-50+51-72+73+94-95$?

a) 103
b) 102

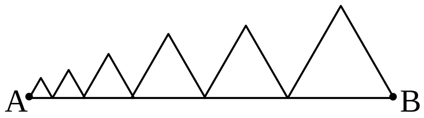
c) 101
d) 100
e) 99

1.1.7. Starpbrīdī Pēteris parāva aiz bizēm ***x*** meitenes, bet Juris – ***y*** meitenes. Starp dotajiem atbilžu variantiem atrodi vienu nepareizu, ja zināms, ka Pēteris pārāva aiz bizēm par 3 meitenēm vairāk nekā Juris.
a) x - 3 = y
b) x – y = 3
c) y + 3 = x
d) x + y = 3
e) meitenes aiz bizēm raustīt nedrīkst

1.1.8. Maijai ir x santīmu, Jānim 5 reizes vairāk naudas nekā Maijai, bet Andrim par 30 santīmiem vairāk nekā Jānim. Ko nozīmē izteiksme $(5x+30):x$?
a) tik santīmu ir Andrim
b) tik santīmu ir Jānim un Maijai kopā
c) tik santīmu ir Andrim un Maijai kopā
d) par tik santīmiem Andrim ir vairāk nekā Maijai
e) tik reizes Andrim vairāk naudas nekā Maijai

1.1.9. Parastajā luksoforā trīs krāsu lampiņas izvietotas secībā: sarkans, dzeltens, zaļš. Samainot šīs trīs lampiņas vietām, iegūsim pavisam citu luksoforu. Cik dažādus luksoforus var izveidot, ja ir 3 lampiņas: sarkana, dzeltena un zaļa?
a) 6
b) 5
c) 3
d) 1
e) 9

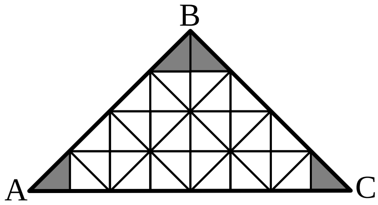
1.1.10. Audzinātāja no punkta A uz punktu B gāja pa zemi, bet bērni – pa trijstūrveida kāpnītēm (skat. 2. zīm.). Zīmējumā katram trijstūrim visas malas ir vienāda garuma. Cik reizes audzinātājas noietais ceļš ir īsāks nekā bērnu veiktais ceļš?



2. zīm.

a) 6 reizes
b) 2 reizes
c) 3 reizes
d) viņi veica vienādu ceļu
e) nevar noteikt

1.1.11. Kāda daļa trijstūrī ABC (skat. 3. zīm.) ir iekrāsota?



3. zīm.

a) $\frac{1}{10}$

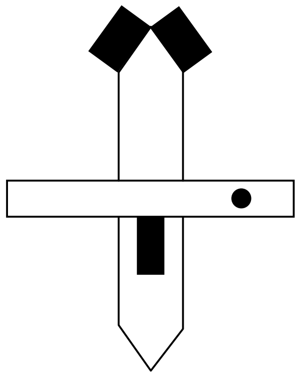
b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{12}$

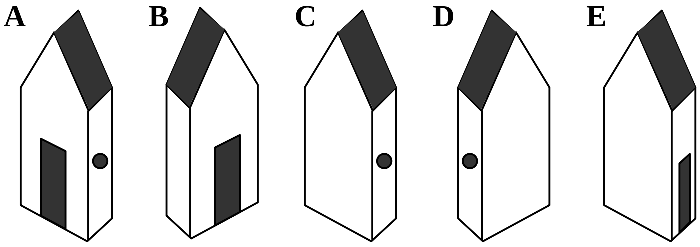
d) $\frac{1}{7}$

e) $\frac{1}{8}$

1.1.12. No papīra lapas izgrieza tādu figūru, kā parādīts 4. zīmējumā, un no tās izlocīja mājiņu. Kuru mājiņu ieguva?



4. zīm.



1.1.13. Diagrammā attēlotas dažādas *sadzīviskas* temperatūras. Par cik grādiem atšķiras visaugstākā temperatūra no viszemākās?

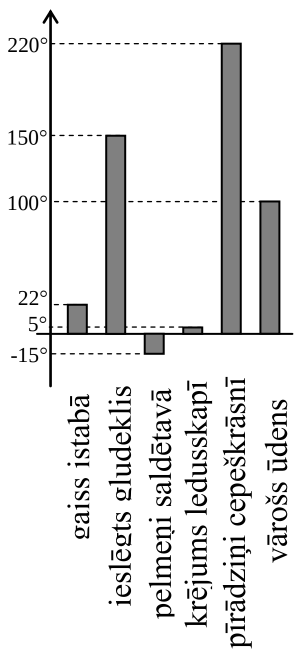
a) par 220°

b) par 215°

c) par 235°

d) par 205°

e) par 225°



1.1.14. Kuras temperatūras neatrodas diapazonā no -10° līdz 110°?

a) Gludekļa, krējuma un pīrādziņu
b) istabas gaisa, krējuma un vāroša ūdens
c) gludekļa, pīrādziņu un vāroša ūdens
d) pelmeņu, pīrādziņu un istabas gaisa
e) gludekļa, pelmeņu un pīrādziņu

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. Cik ir $100-9-8-7-6-4-3-2-1$?

a) 50
b) 59
c) 60
d) 55
e) cits skaitlis

1.2.2. Ansītis no TV videokasetē ierakstīja savu mīļāko filmiņu. Filmai pa vidu bija 2 reklāmas pauzes. Ansītis novēroja, ka filmas fragments līdz pirmajai reklāmas pauzei bija tieši pusstundu garš, otrs fragments bija 38 minūtes garš un pēdējais fragments bija tieši 330 sekundes garš.

Cik gara ir visa ierakstītā filma?

a) 1 h 14 min.
b) 73 min. 30 s
c) 1 h 11 min. 30 s
d) 91 min. 30 s
e) 73 min. 50 s

1.2.3. Kā izmainīsies dalījums, ja dalāmo palielinās 2 reizes, bet dalītāju samazinās 4 reizes?

a) samazināsies 8 reizes
b) palielināsies 2 reizes
c) palielināsies par 8
d) palielināsies 8 reizes
e) nemainīsies

1.2.4. Spainī, kura tilpums ir 12 l, ielēja 10 puslitra pudeles kvasa. Cik tādas pudeles kvasa vēl ir jāielej, lai spainis būtu pilns?

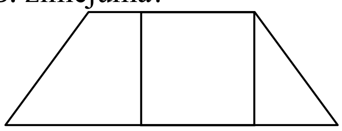
a) 2
b) 8
c) 14
d) 22
e) cits skaitlis

1.2.5. $(x+6):2=x$

Cik liels ir nezināmais skaitlis x?

a) 8
b) 6
c) 4
d) cits skaitlis
e) nevar noteikt

1.2.6. Cik četrstūri ir redzami 5. zīmējumā?



5. zīm.

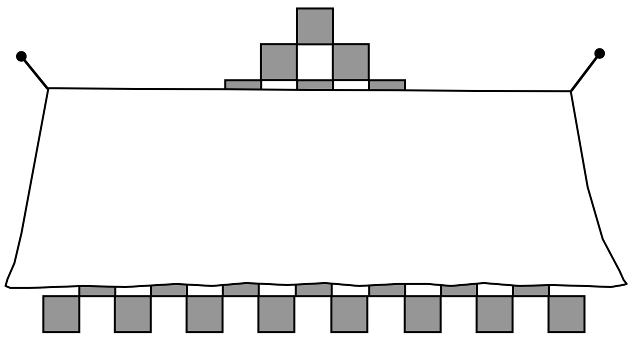
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

1.2.7. Gorillas svars ir no 250 kg līdz 300 kg, strausa svars ir no 80 kg līdz 90 kg, brūnā lāča svars ir no 400 kg līdz 500 kg.
Uz sviras svaru viena kausa nosēdināts viens brūnais lācis, uz otra – viens gorilla. Kāds mazākais skaits strausu jānosēdina blakus gorillam, lai tie kopā ar gorillu noteikti būtu smagāki par lāci?
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) nevar noteikt

1.2.8. Salīdzini x un y($x > 0$, $y > 0$)! (Aplītī ieraksti „<”, „=” vai „>”.)
a) Ja $3x=y$, tad $x \bigcirc y$
b) Ja $x-y=2$, tad $x \bigcirc y$
c) Ja $x:y=1$, tad $x \bigcirc y$
d) Ja $x+y>2x$, tad $x \bigcirc y$
e) Ja $5x-12y=0$, tad $x \bigcirc y$

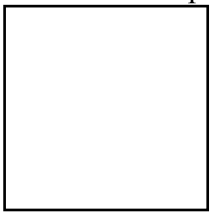
1.2.9. Putnu barotavā mielojās vairāki putniņi. Atlidoja vēl viens zvirbulis. Tad zvirbuļu bija 2 reizes mazāk nekā zīlīšu. Pēc tam atlidoja vēl viena zīlīte, un tagad barotavā ir 5 zīlītes. Cik zvirbuļu un cik zīlīšu barotavā bija pašā sākumā?

1.2.10. No vienādiem rotaļu kubiņiem bērni uzbūvēja piramīdu un paslēpa to aiz aizkariem, kā parādīts 6. zīmējumā. Katra kubiņa šķautnes garums ir 5 cm. Cik augsta ir visa piramīda?



6. zīm.

1.2.11. Papīra kvadrāts pa taisnu līniju jāsagriež divās daļās tā, lai iegūto figūru perimetru summa būtu lielākā iespējamā.
7. zīmējumā parādi griezuma līniju! Pamato savus spriedumus!



7. zīm.

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. Aprēķini!

98765 – 43210 - (50000 + 500) - 5

1.3.2. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti „<”, „=” vai „>”.)

a) 1450 m + 500 dm ○ 3 km : 2

b) 10 kg – 100 g ○ 3330 g · 3

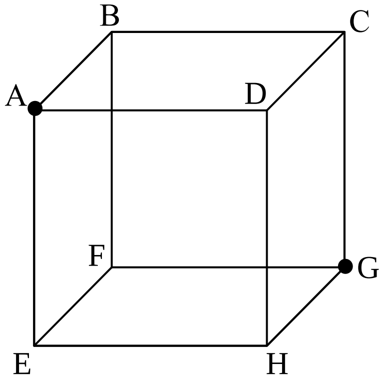
1.3.3. Tētis apēda 2 cepumus, mamma un vecmāmiņa – pa vienam cepumam, mazais Andrītis notiesāja 16 cepumus, bet žurkai Anfisai netika neviens cepums. Cik cepumus būtu apēdis katrs, ja viņi tos sākumā būtu sadalījuši visiem vienādās daļās?

1.3.4. Noskaidro, kāds skaitlis var būt nezināmais x, ja

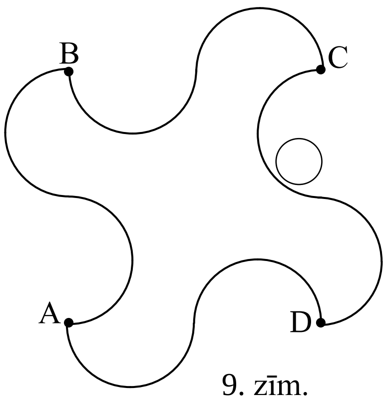
a) x + x = 0
b) x – x = 0
c) x : x = 1
d) x : x = 2
e) x (x : x - 1) = 2

1.3.5. Jānītis atnāca uz skolu tieši pirms pirmās stundas sākuma plkst. 8:30, bet aizgāja uzreiz pēc 5.stundas beigām plkst. 12:50. Viena stunda ilgst 40 minūtes. Cik km ir noskrējis Jānītis skolā, ja visos starpbrīžos viņš skraidīja ar ātrumu 8 km/h? (Stundu laikā Jānītim skraidīt ir aizliegts.)

1.3.6. No stieples izlocīts kuba karkass, kā parādīts 8. zīmējumā.



8. zīm.



9. zīm.

Skudrai ir jāaizrāpo no virsotnes A uz virsotni G.

Cik dažādos veidos skudra to var izdarīt, ja viņai jārāpo tieši pa trim šķautnēm?

Uzrakstiet visus iespējamos skudras ceļus: AEHG, ...

1.3.7. 9. zīmējumā attēlotā figūra sastāv tikai no vienādiem pusriņķiem. Katra pusriņķa rādiuss ir 4 cm.

Noskaidrojiet kvadrāta ABCD perimetru.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. Salīdzini! (Aplīšos ieraksti zīmi „<”, „=” vai „>”.)

1450 m + 500 cm ○ 3 km : 2

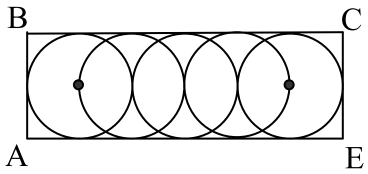
10 kg – 9 g ○ 3300 g · 3

1.4.2. $90909 : 3 - 20202 + 1010 \cdot 3 = \ldots$

$(10000 - 1) : 9 + 3 \cdot 41 = \ldots$

1.4.3. Kā izmainīsies starpība, ja mazināmo samazinās par 6, bet mazinātāju palielinās par 4?

1.4.4. 10. zīmējumā katra riņķa rādiuss ir 2 cm. Aprēķini taisnstūra ABCD laukumu.



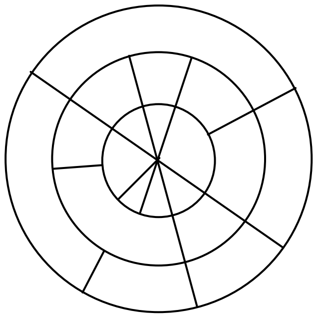
10. zīm.

1.4.5. Bērni gribēja uzzināt, cik sver sniegavīrs. Viņi ielika sniegavīru spainī, kura tilpums ir 10 *l*, un nosvēra to kopā ar spaini. Sniegavīrs kopā ar spaini svēra 4 kg 300 g. No rīta bērni atklāja, ka sniegavīrs izkusis un ūdens aizņem $\frac{2}{5}$ spaiņa. Noskaidrojiet, cik sver spainis, ja zināms, ka 1 *l* ūdens sver tieši 1 kg.

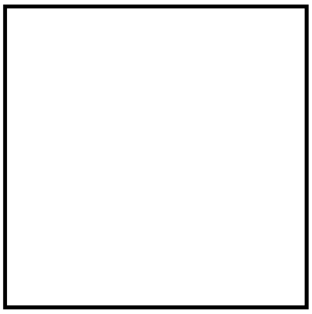
1.4.6. Lai apsētu 3 m^2 zālāja, nepieciešami 40 g sēklu. Cik kg sēklu būs nepieciešami, lai apsētu taisnstūrveida laukumu, kura garums ir 20 m, bet platums 15 m?

1.4.7. Par cik gramiem $\frac{3}{5}$ kg ir vairāk nekā $\frac{1}{2}$ kg?

1.4.8. Saskaiti, cik rādiusi un cik diametri redzami 11. zīmējumā?



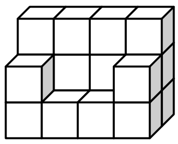
11. zīm.



12. zīm.

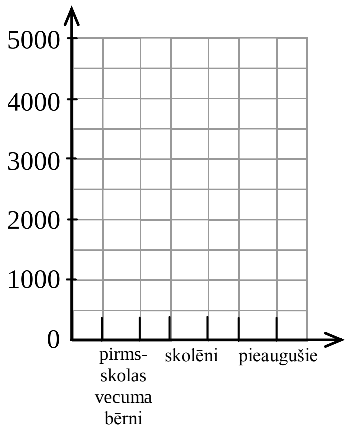
1.4.9. Iesvītrojiet $\frac{1}{8}$ daļu kvadrāta (skat. 12. zīm.), iekrāsojiet $\frac{4}{8}$ kvadrāta. Kura daļa kvadrāta palika balta?

1.4.10. Bērni nolēma no rotaļu klucīšiem salīmēt lellei krēslu (tādu, kāds parādīts 13. zīmējumā). Lai salīmētu kopā divas skaldnes, nepieciešams 1 g līmes. Cik daudz līmes nepieciešams, lai salīmētu visas saskarošās skaldnes?



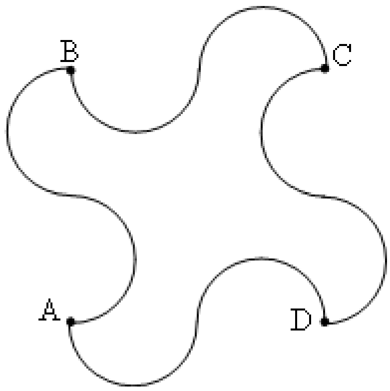
13. zīm.

1.4.11. Zooparkā nedēļas laikā bija 10000 apmeklētāju. No visiem apmeklētājiem $\frac{2}{5}$ bija skolnieki, pieaugušo skaits bija $\frac{1}{2}$ no skolnieku skaita, bet pārējie apmeklētāji bija pirmsskolas vecuma bērni. Aprēķiniet, cik katra vecuma apmeklētāju bija, un attēlojiet iegūtos datus diagrammā (skat. 14. zīm.).



14. zīm.

1.4.12. 15. zīmējumā attēlotā figūra sastāv tikai no vienādiem pusriņķiem. Katra pusriņķa rādiuss ir 4 cm. Noskaidrojiet kvadrāta ABCD perimetru.

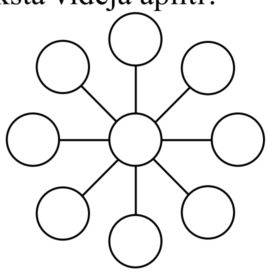


15. zīm.

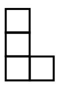
2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Vai var ierakstīt aplīšos (skat. 16. zīm.) visus ciparus no 1 līdz 9 (katru ciparu tieši vienu reizi) tā, lai katros 3 aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto ciparu summa būtu 15? Kāds cipars ir jāieraksta vidējā aplītī?



16. zīm.



17. zīm.

2.1.2. No kvadrāta 5×5 rūtiņas izgriezta 1 rūtiņa. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādās figūriņās, kā parādīts 17. zīm., ja
a) izgriezta stūra rūtiņa;
b) izgriezta centrālā rūtiņa?

2.1.3. Izsaki skaitli $\dfrac{1}{2006}$, izmantojot tieši četrus skaitļus 2005 un darbību zīmes +; -; ×; : (ne obligāti visas).

2.1.4. Skaitļu virkni 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (katrs nākamais skaitlis šajā virknē ir vienāds ar divu iepriekšējo skaitļu summu) sauc par Fibonači skaitļu virkni, skaitļus, kas sastopami šajā virknē, sauc par Fibonači skaitļiem. Parādiet, ka jebkuru naturālu skaitli no 1 līdz 20 var izteikt kā dažu (varbūt viena paša) Fibonači skaitļu summu. (Piem., 23 = 13 + 8 + 2 utml.)

2.1.5. Sasieniet piecas aukliņas tā, lai izveidotos tāda saistīta ķēdīte ar 5 posmiem, ka, pārgriežot jebkuru no šiem 5 posmiem, ķēdīte sadalās piecās atsevišķās daļās!

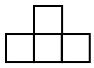
2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Uz sviras svaru viena kausa nosēdināja izsalkušu rudu kaķēnu, uz otra – ļoti izsalkušu baltu kaķēnu. Rudais kaķēns bija smagāks. Pēc tam kaķēniem iedeva desiņu, kuru viņi sāka ēst katrs no sava gala, pie tam baltais kaķēns ēda trīsreiz ātrāk nekā rudais. Kad desiņa bija apēsta, kaķēnus atkal uzlika uz svariem. Svari nostājās līdzsvarā. Par cik g rudais kaķēns bija smagāks nekā baltais, ja apēstā desiņa svēra 120 g?

2.2.2. Kvadrātā 4×4 rūtiņas ierakstiet dažādus naturālus skaitļus, katrā rūtiņā vienu skaitli, tā, lai visās rindiņās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas būtu 50 un nekādu divu ierakstīto skaitļu starpība nepārsniegtu 15. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

2.2.3. Vectētiņš ar zirgu devās uz tirgu pārdot ķirbjus. Kad vectētiņš bija ticis 18 km no mājām, mazdēls mājās atklāja, ka vectētiņš aizmirsis naudasmaku, un ar motociklu dzinās pakaļ vectētiņam, lai to aizvestu. Cik km nobrauks mazdēls, kamēr panāks vectētiņu, ja motocikla ātrums ir 10 reizes lielāks nekā zirga ātrums?

2.2.4. No vairākām 18. zīm. attēlotajām figūriņām salieciet lielāku figūru, kas līdzīga dotajai.



18. zīm.

2.2.5. Brīnumzemē puse iedzīvotāju ir pie pilna prāta, t.i., viss, ko viņi saka vai domā vienmēr ir patiess. Otra puse iedzīvotāju ir neprātīgi, t.i., viss, ko viņi saka vai domā vienmēr ir aplams.

Tārpiņš uzskata, ka gan viņš, gan Ķirzaka ir neprātīgi.

Noskaidrojiet, vai Tārpiņš ir pie pilna prāta vai neprātīgs. Un kā ir ar Ķirzaku? (Pamatojiet savus spriedumus!)

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Skaitlī **15**15** zvaigznīšu vietā ierakstiet pa vienam ciparam tā, lai iegūtais sešciparu skaitlis dalītos ar 99.

2.3.2. Krustmāte Agate uzcepa torti kvadrāta formā un izrotāja to ar 20 ķiršu ogām tā, ka gar katru malu bija tieši 5 ogas. Virtuvē ieskrēja Dudū un apēda 2 ogas, pie tam pārējās ogas izbīdīja tā, ka gar katru malu joprojām bija tieši 5 ogas. Pēc tam Pifs apēda vēl 2 ogas, un viņam arī izdevās atlikušās 16 ogas izbīdīt tā, ka gar katru malu bija tieši 5 ogas. Kā tas iespējams?

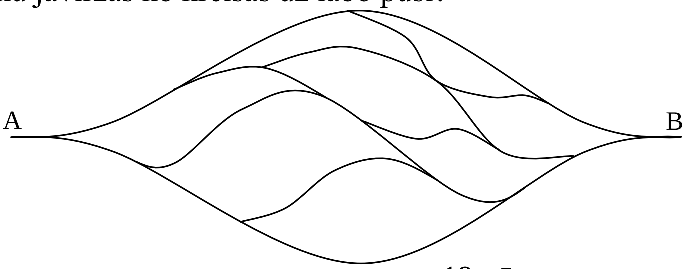
2.3.3. Vāzē stāvēja baltas un sarkanas krizantēmas; 90% no tām bija baltas. Pēc kāda laika daļa balto krizantēmu nokalta (sarkanie ziedi visi saglabājās); tagad balto krizantēmu bija tikai 80% no visām puķēm vāzē. Cik liela daļa balto krizantēmu nokalta?

2.3.4. Kvadrātā ar izmēriem 5×5 rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis; visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkurus 5 uzrakstītos skaitļus un katram no tiem pieskaitīt 1. Vai, vairākkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka visi kvadrātā ierakstītie skaitļi kļūst vienādi, ja zināms, ka sākumā uzrakstīto skaitļu summa bija

a) 325;

b) 327?

2.3.5. Pa cik dažādiem maršrutiem var aiziet no A uz B pa 19. zīm. attēlotajiem ceļiem, ja zīmējumā visu laiku jāvirzās no kreisās uz labo pusi?



19. zīm.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Ar burtiem a, b, c, d apzīmēti četri dažādi cipari. Kāda ir izteiksmes $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}$ lielākā iespējamā un mazākā iespējamā vērtība?

2.4.2. Šogad kādu dienu Antons secināja, ka viņa vecums pilnos gados ir vienāds ar viņa dzimšanas gada ciparu summu. Kurā gadā var būt dzimis Antons? (Piezīme: uzdevums uzdots 2006. gadā.)

2.4.3. Alises dzīvoklī ir vairākas istabas, un tās visas ir izvietotas vienā stāvā. Ir zināms, ka starp katrām divām istabām ir ne vairāk kā vienas durvis, kā arī no katras istabas ne vairāk kā vienas durvis ved ārā no dzīvokļa. Ir zināms, ka dzīvoklī pavisam ir 11 durvis. Kāds mazākais istabu skaits var būt Alises dzīvoklī?

2.4.4. Tumšajā mežā dzīvo 47 iemītnieki. Ziemassvētkos katrs iemītnieks nosūtīja apsveikumu vai nu 3, vai 6, vai 12 kaimiņiem. Katrs no viņiem saņēma tieši 5 apsveikumus. Pierādīt, ka kāds apsveikums nesasniedza adresātu.

2.4.5. Lielmežu rajonā ir 5 ciemi. Ir zināms, ka visi attālumi starp diviem ciemiem ir dažādi. No katra ciema uzbūvēts taisns ceļš līdz tam tuvākajam ciemam. Pierādīt, ka nekādi divi ceļi nekrustojas ārpus ciemiem.

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. Triju pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir divciparu skaitlis, bet to reizinājums ir četrciparu skaitlis, kura pirmais cipars sakrīt ar summas pirmo ciparu un pēdējais cipars sakrīt ar summas pēdējo ciparu. Atrodiet šos trīs skaitļus!

2.5.2. Jānim ir sarkans zīmulis, Pēterim – zaļš. Vienā gājienā katrs zēns var nokrāsot vienu rūtiņu kvadrātā 8×8 rūtiņas, gājienus viņi izdara pamīšus. Jānis drīkst nokrāsot sarkanu rūtiņu, kurai ir kopīga mala ar pēdējo sarkanā krāsā nokrāsoto rūtiņu un kura vēl nav nokrāsota ne sarkana, ne zaļa. Pēterim ir jākrāso zaļa tā rūtiņa, kas ir simetriska Jāņa nokrāsotajai attiecībā pret kvadrāta centru. Ja kāds no zēniem nevar izdarīt gājienu, krāsošanu beidz.

Pirmais sāk Jānis, nokrāsojot sarkanu augšējo kreiso rūtiņu. Vai Jānis savus gājienus var veikt tā, lai beigās visas rūtiņas būtu nokrāsotas tieši vienu reizi un Jānis savā pēdējā gājienā nokrāsotu rūtiņu, kas ir blakus apakšējai labajai stūra rūtiņai?

2.5.3. Ierakstiet aplīšos ciparus no 1 līdz 9, katrā aplītī citu ciparu, tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu vislielākā iespējamā.

$$\bigcirc+\bigcirc\cdot\bigcirc+\bigcirc:\bigcirc-\bigcirc:\bigcirc-\bigcirc\cdot\bigcirc$$

2.5.4. Uzzīmējiet plaknē 10 nogriežņus tā, lai būtu divi nogriežņi, kas krustojas ar 1 nogriezni, divi nogriežņi, kas krustojas ar 2 nogriežņiem, divi nogriežņi, kas krustojas ar 3 nogriežņiem, divi nogriežņi, kas krustojas ar 4 nogriežņiem, un divi nogriežņi, kas krustojas ar 5 nogriežņiem.

Vai plaknē var uzzīmēt 5 nogriežņus tā, lai uz tiem visiem būtu atšķirīgi daudzumi krustpunktu?

2.5.5. Meža parlamentā ir seši dzīvnieki – varde, pūce, dundurs, ezis, stirna un lācis. Dažādu jautājumu risināšanai viņi izveidoja darba grupas. Katrā darba grupā ietilpst tieši 3 parlamentārieši, pie tam katri divi parlamentārieši kopā darbojas ne vairāk kā vienā darba grupā. Cik darba grupas var izveidot?

3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A grupa

3.1.A1. Triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums ir 12144. Atrast šos skaitļus.

3.1.A2. Vai var plaknē atzīmēt 6 punktus tā, lai no katriem trim atzīmētajiem punktiem viens atrastos vienādos attālumos no abiem pārējiem?

3.1.A3. Rindā uzrakstīti 7 veseli skaitļi. Katrs nākošais ir lielāks par iepriekšējo, pie tam visas starpības starp blakus uzrakstītiem skaitļiem ir vienādas savā starpā. Zināms, ka 1., 3., 5. un 7. skaitļa summa vienāda ar 2., 4. un 6. skaitļa summu. Aprēķināt visu uzrakstīto skaitļu summu.

3.1.A4. Trijstūra katra mala ir vismaz 10 cm gara. Ar centru katrā trijstūra virsotnē uzzīmēts melns riņķis, kura laukums ir 1 cm^2. Kāds ir lielākais iespējamais melnā krāsā nokrāsotās trijstūra daļas laukums?

3.1.A5. Divi spēlētāji burtnīcas lapā pamīšus krāso pa vienai rūtiņai: pirmais – baltā krāsā, otrais – sarkanā. Spēles mērķis ir nokrāsot „savā” krāsā kvadrātu, kas sastāv no 2×2 rūtiņām. Vai šajā spēlē iespējams noteikti uzvarēt, kaut arī pretinieks cenšas traucēt?

3.1.A6. Piecos maisos katrā ir 10 monētas. Četros maisos visas monētas ir vienādas, bet piektajā maisā katra monēta ir par 1 gramu vieglāka nekā monētas pārējos maisos. Doti svari ar 2 svaru kausiem; iespējams nolasīt uz kausiem uzlikto smagumu starpību. Cik tieši sver katra monēta, nav zināms. Vai ar vienu svēršanu var uzzināt, kurā maisā ir vieglākās monētas?

B grupa

3.1.B1. Dots, ka a, b, c ir pirmskaitļi, $a + b + c = 38$ un $ab + ac + bc = 395$. Atrodiet šos pirmskaitļus.

3.1.B2. Trijstūra mediānu garumi ir 3 cm, 4 cm un 5 cm. Aprēķināt trijstūra laukumu.

3.1.B3. Dots, ka $xy + z = xz + y = yz + x$. Pierādīt, ka $(x - y)(x - z)(y - z) = 0$.

3.1.B4. Vai eksistē tāds izliekts 7-stūris, kuram katra diagonāle ir perpendikulāra kādai citai šī 7-stūra diagonālei?

3.1.B5. Desmit mucās ieliets attiecīgi 1*l*, 2*l*, ..., 10*l* ūdens. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties 2 mucas un ieliet no pirmās otrajā tik daudz ūdens, cik otrajā jau ir (protams, to var darīt tikai tad, ja pirmajā izvēlētajā mucā ūdens nav mazāk kā otrajā). Kāds lielākais ūdens daudzums var vienlaicīgi būt vienā mucā? Katra muca ir pietiekami liela, lai uzņemtu sevī 55 litrus.

3.1.B6. Garausīša krājkasītē ir 4 lati; viņam ir tikai 1s, 2s, 5s un 10s monētas. Vai Garausītis noteikti var nopirkt burkānu grozu, kas maksā 3 latus, ja pārdevējam nav naudas, ko izdot?

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

A grupa

3.2.A1. Vai kvadrātu var sagriezt trīs daļās tā, lai no tām varētu salikt šaurleņķu trijstūri ar trim dažāda garuma malām?

3.2.A2. Ja n – naturāls skaitlis, tad ar n! sapratīsim visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, 1! = 1; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka x! + y! beidzas ar cipariem …2005?

3.2.A3. Ezerā peld ābols; 1/4 no tā ir virs ūdens līmeņa, bet 3/4 – zem. Pie ābola vienlaicīgi pielido putniņš un piepeld zivtiņa un sāk to ēst. Putniņš ēd 2 reizes ātrāk nekā zivtiņa. Kādu daļu ābola apēdīs putniņš? (Putniņš ēd tikai to ābola daļu, kas ir virs ūdens, bet zivtiņa – tikai to ābola daļu, kas ir zem ūdens.)

3.2.A4. Dots, ka triju dažādu naturālu skaitļu summa ir 100. No šiem skaitļiem izveido visas trīs iespējamās starpības, katrā pārī no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Kāda ir lielākā iespējamā iegūto triju starpību summa?

3.2.A5. Sūnu ciemā dzīvo 12 rūķīši. Ražas svētkos katrs no viņiem uzdāvināja katram citam rūķītim tik daudz ķirbju, cik apdāvinātajam rūķītim bija gadu. Vai var gadīties, ka pavisam tika uzdāvināti 123456 ķirbji?

3.2.A6. Trijos vienāda tilpuma traukos ir trīs dažādas krāsas; katrs trauks piepildīts par divām trešdaļām. No viena trauka otrā var pārliet jebkuru šķidruma daudzumu (ja traukā, kurā lej, ir pietiekoši daudz vietas). Kā panākt, lai visos traukos būtu vienādi maisījumi? (Citu trauku nav; krāsu izliet nedrīkst.)

B grupa

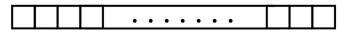
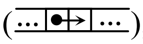
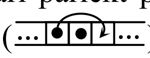
3.2.B1. Kubs sastāv no $3 \times 3 \times 3$ kubiņiem. Vai var tos nokrāsot dzeltenā, zaļā un sarkanā krāsā tā, lai katrā kuba daļā ar izmēriem $3 \times 1 \times 1$, kas sastāv no trim kubiņiem, būtu sastopamas visas krāsas?

3.2.B2. Ar S(x) sapratīsim naturāla skaitļa x ciparu summu.
Vai eksistē tāds x, ka x + S(x) + S(S(x)) = 2005? Vai eksistē tāds y, ka
y + S(y) + S(S(y)) + S(S(S(y))) = 2005?

3.2.B3. Zināms, ka skaitlis n ir izsakāms kā triju naturālu skaitļu kvadrātu summa. Pierādīt, ka arī skaitļa n kvadrāts ir izsakāms šādā veidā.

3.2.B4. Astrologs uzskata laika momentu par labu, ja pulksteņa stundu, minūšu un sekunžu rādītāji atrodas vienā pusē no kāda apaļas ciparnīcas diametra. (Rādītāji uzmontēti uz kopējas ass un kustas bez lēcieniem.) Vai diennaktī labā laika ir vairāk nekā sliktā?

3.2.B5. Kuba virsotnēs pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt: var atrast tādas divas pretējās kuba virsotnes un savienot tās ar lauztu līniju, kas sastāv no trim kuba šķautnēm, ka šīs lauztās līnijas četrās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 21.

3.2.B6. Lenta sastāv no n vienādiem kvadrātiņiem: . Kreisajos 9 kvadrātiņos ir pa vienai figūriņai. Ar vienu gājienu figūriņa var vai nu pārbīdīties uz blakus pa labi esošo rūtiņu, ja tā ir brīva (), vai arī pārlēkt pāri blakus pa labi esošai figūriņai uz aiznākošo rūtiņu pa labi, ja tā ir brīva (). Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība, pie kuras figūriņas kādreiz var nostāties kaut kādos 9 pēc kārtas esošos kvadrātiņos pretējā secībā nekā sākumā?

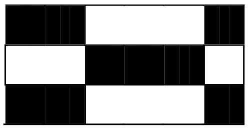
3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A grupa

3.3.A1. Ar vienu gājienu var pārkrāsot rūtiņas jebkurā kvadrātā, kas sastāv no 2×2 rūtiņām: melnas – par baltām, baltas – par melnām. Vai ar šādiem gājieniem var panākt, lai visas šaha galdiņa rūtiņas vienlaicīgi būtu baltas?

3.3.A2. Kaudzē esošos akmeņus var sadalīt gan trijās, gan četrās daļās ar vienādām kopējām masām (akmeņi netiek skaldīti). Kāds ir mazākais iespējamais akmeņu skaits šajā kaudzē?

3.3.A3. Taisnstūris sadalīts 9 mazākos taisnstūros. Vai melno un balto laukumu summas var būt vienādas (20. zīm.)?



20. zīm.

3.3.A4. Apskatām 18 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Zināms, ka sešu šo skaitļu summa ir pirmskaitlis. Vai 12 atlikušo skaitļu summa arī var būt pirmskaitlis?

3.3.A5. No skaitļiem 7; 10; 27; 35; 45; 63 četri skaitļi ir trīsciparu skaitļa n dalītāji, bet divi – nav. Atrast n.

3.3.A6. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota balta, zaļa vai sarkana. Pierādīt: var pārkrāsot ne vairāk kā 9 rūtiņas tā, lai kvadrātu varētu pārlocīt pa kādu diagonāli vai pa kādu viduslīniju, un nevienā vietā nesaskartos dažādi nokrāsotas daļas.

B grupa

3.3.B1. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai katrā rūtiņā var ierakstīt vienu no skaitļiem 0; 1; 2 tā, lai rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas?

3.3.B2. Simts maisos kopā ir 100 kg cukura. Maisu x sauc par vieglu, ja ir vismaz 50 citi maisi, katrs no kuriem ir vismaz 4 reizes smagāks par maisu x. Cik kopā var svērt visi vieglie maisi?

3.3.B3. Kāds ir lielākais daudzums dažādu naturālu skaitļu, no kuriem katri trīs summā dod pirmskaitli?

3.3.B4. Punkti A, B, C, D atrodas uz vienas taisnes šādā secībā, E atrodas ārpus šīs taisnes. Visi 6 trijstūri, kam virsotnes ir 3 no minētajiem punktiem, ir vienādsānu. Aprēķināt trijstūra AED leņķus.

3.3.B5. Nepāra naturālu skaitli n dalīja ar 2; 3; 4; …; 2006. Tieši vienā gadījumā dalīšana notika bez atlikuma, un visi citās dalīšanās iegūtie atlikumi bija dažādi. Pierādīt: n izdalījās bez atlikuma ar skaitli, kas lielāks par 1003.

3.3.B6. Rindā stāv 10 bērni. Brīdi pa brīdim divi blakus esoši bērni mainās vietām. Katri divi bērni drīkst savstarpēji mainīties vietām tikai vienreiz. Pierādīt: neatkarīgi no tā, kā šis process ticis organizēts sākumā, to iespējams pabeigt tā, ka notikušas maiņas starp visiem 45 bērnu pāriem.

3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A grupa

3.4.A1. Tabula sastāv no 20 rindiņām un 30 kolonnām. Katrā no 600 rūtiņām ierakstīts naturāls skaitlis. Visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrā rindiņā ierakstīti vismaz 15 pāra skaitļi. Pierādīt: ir tāda kolonna, kurā ierakstīti vismaz 10 pāra skaitļi.

3.4.A2. Trijstūra ABC malu viduspunkti ir M, N un K. Kuram punktam attālumu summa līdz sešiem punktiem A, B, C, M, N, K ir vismazākā?

3.4.A3. Rindā augošā secībā uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 10000. Pēc tam izsvītroja visus tos skaitļus, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7.

a) cik skaitļu palika neizsvītroti?

b) kāds ir 2006.-ais neizsvītrotais skaitlis?

3.4.A4. Pieci punkti atrodas izliekta piecstūra virsotnēs. Trīs pēc kārtas ņemtās virsotnēs ir pa figūriņai; divas virsotnes ir tukšas. Ar vienu gājienu var izvēlēties vienu figūriņu un pārbīdīt to pa diagonāli uz tukšu virsotni. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka viena no figūriņām atrodas sākotnējā vietā, bet abas pārējās ir apmainījušās vietām?

3.4.A5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 2006 ieskaitot var sadalīt trīs daļās tā, lai visu daļu summas savā starpā būtu vienādas?

3.4.A6. Dots: kādā 36-ciparu skaitlī katrs cipars no 1 līdz 9 sastopams tieši 4 reizes. Turklāt katrs cipars, izņemot 9, ir mazāks par nākošo ciparu (ja vien nav pēdējais apskatāmā skaitļa cipars). Ar kādu ciparu beidzas apskatāmais skaitlis?

B grupa

3.4.B1. Olimpiādē bija jārisina daži viegli un daži grūti uzdevumi. Par atrisinātu vieglu uzdevumu piešķīra 3 punktus, par atrisinātu grūtu uzdevumu piešķīra 4 punktus. Par neatrisinātu vieglu uzdevumu dalībniekam atskaitīja 1 punktu. Jānītis atrisināja 12 uzdevumus un ieguva 18 punktus. Cik pavisam bija vieglu uzdevumu?

3.4.B2. Vai var pa apli uzrakstīt pa vienai reizei visus naturālos skaitļus a) no1 līdz 12 ieskaitot, b) no 1 līdz 13 ieskaitot tā, lai katru tādu divu skaitļu summa, starp kuriem uzrakstīti tieši 2 citi skaitļi, dalītos ar 3?

3.4.B3. Plaknē novilktas 5 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. a) cik pavisam izveidojas trijstūru? (Uzskaitām arī trijstūrus, kas sastāv no vairākām daļām.) b) pierādīt, ka ne vairāk kā 5 trijstūri ir šaurleņķu.

3.4.B4. Naturāla skaitļa n četru naturālu dalītāju summa ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka šo dalītāju reizinājums nav lielāks par n^3.

3.4.B5. Doti 23 taisnstūri, kuru malu garumi ir veseli skaitļi un no kuriem neviens nav kvadrāts. Ir zināms, ka no šiem taisnstūriem var vienlaicīgi salikt 6 kvadrātus ar izmēriem 8×8 (bez caurumiem un bez pārklāšanās).

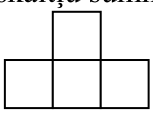
Pierādīt, ka no šiem pašiem 23 taisnstūriem var vienlaicīgi salikt 2 taisnstūrus, kuru laukumu starpība nav lielāka par 48.

3.4.B6. Paralelogramiem ABCD un AMNK ir kopīga virsotne A. Virsotne B atrodas uz malas MN, bet virsotne K – uz malas CD. Pierādīt, ka abu paralelogramu laukumi ir vienādi savā starpā.

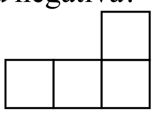
3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A grupa

3.5.A1. Vai var katrā rūtiņu lapas rūtiņā ierakstīt pa veselam skaitlim tā, lai katrā tādā figūrā, kāda redzama 21a. zīm., ierakstīto skaitļu summa būtu pozitīva, bet katrā tādā figūrā, kāda redzama 21b. zīm., ierakstīto skaitļu summa būtu negatīva?



21a. zīm.



21b. zīm.

3.5.A2. Plaknē novilktas 10 taisnes. Tās sadala plakni apgabalos, no kuriem daži ir galīgi (trijstūri, četrstūri utt.), bet citi – bezgalīgi. Kāds ir lielākais iespējamais bezgalīgo apgabalu skaits?

3.5.A3. Kādu divu naturālu skaitļu reizinājums vienāds ar to summu?

3.5.A4. Četrciparu naturālā skaitlī A neviens cipars nav 0 un visi cipari ir dažādi. Zināms, ka A dalās gan ar savu divu pirmo ciparu veidoto skaitli, gan ar savu divu pēdējo ciparu veidoto skaitli. Pierādīt, ka A dalās vai nu ar 7, vai ar 13, vai ar 17.

3.5.A5. Regulārs 7-stūris sadalīts 5 trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka vismaz 3 no šiem trijstūriem ir vienādsānu.

3.5.A6. Četras pēc ārējā izskata vienādas monētas sver attiecīgi 1g, 2g, 3g un 4g. Kā ar 4 svēršanām uz vienas sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, cik sver katra monēta?

B grupa

3.5.B1. Ar [x] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $\left[4\frac{1}{3}\right]=4$; [5] = 5.
Pierādīt, ka katram a pastāv vienādība

$$[4a]=[a]+\left[a+\frac{1}{4}\right]+\left[a+\frac{1}{2}\right]+\left[a+\frac{3}{4}\right].$$

3.5.B2. Kāds ir lielākais skaits visu apgabalu, kas var rasties A grupas 2. uzdevumā?

3.5.B3. Dots, ka a, b, c, d ir dažādi naturāli skaitļi. Uz vienas lapas uzrakstīti reizinājumi ab un cd, uz otras lapas summas a + b un c + d. Izrādās, ka uz abām lapām uzrakstīti vieni un tie paši skaitļi. Kādas ir a, b, c, d vērtības?

3.5.B4. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi x, y un z, ka x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 104, y un z lielākais kopīgais dalītājs ir 106 un x un z lielākais kopīgais dalītājs ir 108?

3.5.B5. Regulārs 25-stūris sadalīts 23 trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka vismaz 3 no šiem trijstūriem ir vienādsānu.

3.5.B6. Pieņemsim, ka A grupas 6. uzdevumā par vienu monētu papildus zināms, ka tā nesver ne 1g, ne 4g. Vai ar 3 svēršanām var noskaidrot, cik sver katra monēta?

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

A grupa

3.6.A1. Neviens no diviem pēc kārtas ņemtiem gadiem nav garais gads. Pirmajā no tiem sestdienu ir vairāk nekā ceturtdienu. Kuru nedēļas dienu ir visvairāk otrajā no šiem gadiem?

3.6.A2. Viens no 11 skaitļiem ir 0, otrs 1, pārējie atrodas starp 0 un 1. Pierādīt: šos skaitļus var sadalīt divās daļās tā, ka abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi atšķiras viens no otra ne vairāk kā par $\frac{11}{20}$.

3.6.A3. Vai eksistē izliekts daudzstūris, kam nav ne simetrijas ass, ne simetrijas centra, bet kuru var pagriezt ap kādu punktu par leņķi, kas mazāks par 180°, tā, lai iegūtais daudzstūris sakristu ar sākotnējo?

3.6.A4. Rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu var vienam no tiem pieskaitīt vai nu 3, vai 5. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

3.6.A5. Klasē ir 9 skolēni. Vai var izveidot 13 komisijas, kas katra sastāv no 3 skolēniem, tā, lai nekādi divi skolēni nebūtu kopā vairāk kā vienā komisijā?

3.6.A6. Jānim ir daži 8g smagi atsvari un daži 9g smagi atsvari (ir gan viena, gan otra veida atsvari). Visu atsvaru kopējā masa ir 1728g. Pierādīt, ka tos var sadalīt 24 kaudzītēs ar vienādām masām.

B grupa

3.6.B1. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi a, b un c, kas visi lielāki par 1, kuru summa lielāka par 2006 un kas apmierina sakarību: $a^2 - 1$ dalās ar b, $b^2 - 1$ dalās ar c un $c^2 - 1$ dalās ar a?

3.6.B2. Vai A grupas 2. uzdevumā skaitli $\frac{11}{20}$ var aizstāt ar mazāku, lai uzdevuma apgalvojums paliktu spēkā?

3.6.B3. Vai eksistē izliekts 2006 – stūris, kam visu leņķu lielumi izsakās ar veselu skaitu grādu?

3.6.B4. Dotas 2006 konfekšu kaudzītes, kurās ir attiecīgi 1; 2; 3; ...; 2005; 2006 konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties dažas (varbūt vienu pašu) kaudzītes un apēst no tām vienādus konfekšu daudzumus. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var apēst visas konfektes?

3.6.B5. Atrisināt A grupas 5. uzdevumu, ja jāveido 12 komisijas.

3.6.B6. Kādu lielāko daudzumu trīsciparu skaitļu var izveidot, ja nedrīkst izmantot ciparu 0 un katriem diviem skaitļiem jāatšķiras vienam no otra vismaz divās šķirās?

4. LATVIJAS 19. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

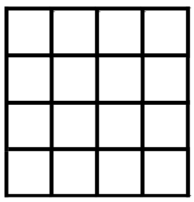
4.5. PIEKTĀ KLASE

4.5.1. Rindā uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 1000 ieskaitot, katrs tieši vienu reizi. Vai vairāk uzrakstīts pāra ciparu vai nepāra ciparu?

4.5.2. Naturālam trīsciparu skaitlim pirmo ciparu palielināja par 3, otro - par 2, trešo - par 1. Ieguva trīsciparu skaitli, kas 4 reizes lielāks par sākotnējo. Atrast sākotnējo skaitli.

4.5.3. Naturālā desmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem; ieguva pierakstu KRIZANTĒMA. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Kāds cipars aizstāts ar burtu A?

4.5.4. Kvadrātisks režģis sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; rūtiņas malas garums ir 1 (skat. 22. zīm.). Šis režģis jāpārkrāso sarkans, krāsojot vai nu rūtiņu kontūras, vai "kāsīšus" (skat. 23. zīm.): kāsītis sastāv no 2 nogriežņiem ar garumu 1 un var būt arī pagriezts citādi. Krāsas pietiek, lai nokrāsotu līnijas ar kopējo garumu 40. Pierādīt, ka jākrāso vismaz 8 kāsīši.



22. zīm.

23. zīm.

4.5.5. Kuba virsotnēs jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 8, katrs tieši vienu reizi. Pie tam nepieciešams, lai visās skaldnēs ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas savā starpā.

a) Pierādīt, ka šīs summas var būt 18.

b) Vai tās var būt citādas?

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Vai kvadrātu, kas sastāv no 7×7 rūtiņām, var sagriezt kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas un 3×3 rūtiņas?

4.6.2. Krūzē ir tīra kafija un piens vienādās daļās. Profesors Cipariņš nodzēra no tās vienu malku un piepildīja krūzi atkal pilnu, pielejot pienu. Pēc tam viņš nodzēra vēl vienu malku un piepildīja krūzi atkal pilnu, pielejot tīru kafiju. Vai tagad krūzē ir vairāk kafijas vai piena? (Abi malki saturēja vienādus daudzumus dzēriena.)

4.6.3. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Tajās jāieraksta naturāli nepāra skaitļi 1; 3; 5; …; 29; 31 (katrs tieši vienu reizi) tā, lai visos kvadrātos, kas sastāv no 3×3 rūtiņām, ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi. Vai to var izdarīt?

4.6.4. Kādā klasē katrs zēns vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Visi zēni ir dažāda auguma. Šorīt katrs no viņiem izteica divus apgalvojumus:

"Neviens zēns klasē nav īsāks par mani.",

"Klasē ir vairāk nekā 10 zēnu, kas garāki par mani."

Cik klasē ir zēnu, un cik no viņiem ir meļi?

4.6.5. Klasē ir 34 skolēni. Visi sēž 17 divvietīgos solos. Ir zināms, ka tieši puse meiteņu sēž kopā ar zēniem. Pierādīt, ka skolēnus nevar pārsēdināt tā, lai tieši puse zēnu sēdētu kopā ar meitenēm.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Dots, ka a, b, c – dažādi pozitīvi skaitļi. Vai var eksistēt tāds skaitlis x, ka vienlaicīgi pastāv vienādības $ax+b=c$, $bx+c=a$ un $cx+a=b$?

4.7.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs tieši vienu reizi.

a) Vai to var izdarīt tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

b) Vai to var izdarīt tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis?

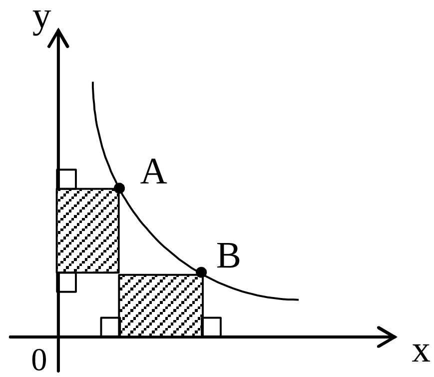
4.7.3. Andris uzrakstīja piecciparu skaitli, izsvītroja no tā vienu ciparu un iegūto četrciparu skaitli saskaitīja ar sākotnējo. Rezultātā viņš ieguva summu 38207. Kādu skaitli Andris uzrakstīja sākumā?

4.7.4. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām. Tajā atzīmētas 9 rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā atzīmēta tieši viena rūtiņa. Pierādīt: katrā 5×5 rūtiņu kvadrātā ir vismaz viena atzīmēta rūtiņa.

4.7.5. Plaknē uzzīmēti 6 nogriežņi. Nekādi divi no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādiem diviem nav kopēja galapunkta. Dzintars atzīmēja visus nogriežņu krustpunktus; izrādījās, ka katrs atzīmētais punkts pieder tieši 2 nogriežņiem. Uz viena nogriežņa atzīmēti 3 punkti, uz otra – 4 punkti, uz trim citiem – pa 5 punktiem. Cik punktu atzīmēti uz sestā nogriežņa?

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Uz sakarības $y=\frac{1}{x}$ grafika ņemti 2 punkti A un B un no tiem novilkti perpendikuli pret koordinātu asīm (sk. 24. zīm.) Pierādīt, ka iesvītroto četrstūru laukumi ir vienādi.



24. zīm.

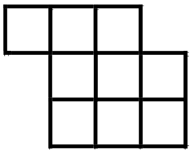
4.8.2. Vai eksistē 100 dažādi veseli skaitļi, kuru summa vienāda ar to reizinājumu?

4.8.3. Trijstūra MNK malas vienādas ar trijstūra ABC mediānām (katra mala – ar citu mediānu). Vai trijstūri MNK un ABC var būt vienādi savā starpā?

4.8.4. Ar LKD (x,y) apzīmēsim divu naturālu skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju. Vai var vienlaicīgi pastāvēt sakarības

LKD(x, y) = 52; LKD (x, z) = 54; LKD (y, z) = 56?

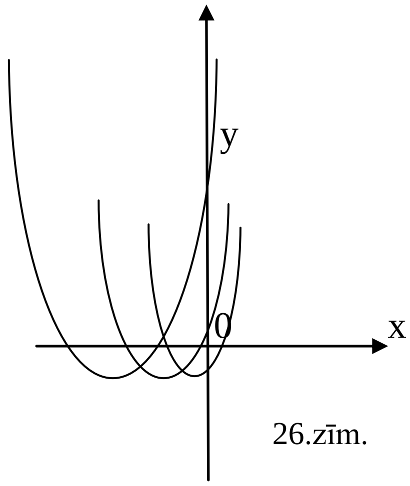
4.8.5. Kvadrāts sastāv no 11×11 rūtiņām. Tajā iezīmētas 28 tādas figūras, kāda parādīta 25. zīm. (figūras var būt arī pagrieztas vai apgrieztas otrādi). Pierādīt: ir tāda rūtiņa, kas pieder vismaz a) trim, b) četrām iezīmētajām figūrām.



25. zīm.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Uz koordinātu asīm nav uzrādīti mērogi. Vai var gadīties, ka 26. zīm. attēloti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



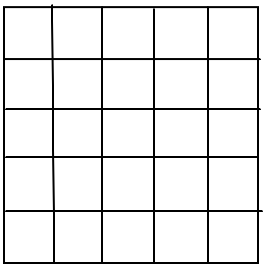
26.zīm.

4.9.2. Pierādīt: trijstūra ABC tā ārējā leņķa bisektrise, kas atrodas pie virsotnes B, krusto apvilkto riņķa līniju loka $\cup ABC$ viduspunktā (zināms, ka $AB \neq BC$).

4.9.3. Dots, ka p – pirmskaitlis. Pierādīt, ka p^4-1 dalās vai nu ar 15, vai ar 16.

4.9.4. Riņķa līnija ar rādiusu R pieskaras ΔABC malām AB un BC, bet tās centrs atrodas uz malas AC. Pierādīt, ka R < 2r, kur r – ΔABC ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

4.9.5. Kvadrātisks režģis sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām (skat. 27. zīm.). Ar vienu gājienu var nokrāsot sarkanā krāsā jebkura viena kvadrāta kontūru. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var nokrāsot sarkanas visas režģa līnijas?



27.zīm.

5. LATVIJAS 56. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. No četrciparu skaitļa A atņemot trīsciparu skaitli B, iegūst 8002. Šos pašus skaitļus A un B saskaitot, iegūst piecciparu skaitli. Atrast A un B.

5.5.2. Uz tāfeles uzrakstīta burtu virkne **ababababab**. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru daudzumu pēc kārtas uzrakstītu burtu, nodzēst tos un atbrīvotajā vietā uzrakstīt šos pašus burtus apgrieztā secībā (piemēram, abb var aizstāt ar bba).

Ar kādu mazāko daudzumu gājienu, izpildot tos vienu pēc otra, var uz tāfeles iegūt virkni **aaaaaabbbbb**?

5.5.3. Parādīt, ka trijstūri var sagriezt **a)** četros, **b)** sešos trijstūros tā, ka neviena griežot iegūtā trijstūra mala pilnībā nesakrīt ne ar vienu citu griežot iegūtā trijstūra malu.

5.5.4. Uz katras no n kartiņām uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

- starp uzrakstītajiem skaitļiem ir vismaz 5 dažādi,
- katrām divām kartiņām (apzīmēsim tās ar A un B) var atrast divas citas kartiņas (apzīmēsim tās ar C un D) tā, ka to skaitļu summa, kas uzrakstīti uz A un B, vienāda ar to skaitļu summu, kas uzrakstīti uz C un D.

Pierādiet, ka mazākā iespējamā n vērtība ir 13.

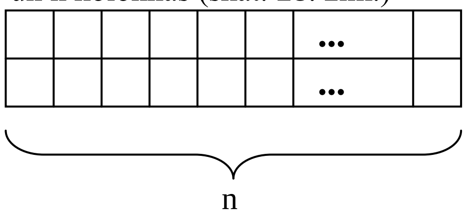
5.5.5. Kādā kolbā atrodas pa 10 baltām, sarkanām un zaļām amēbām. Ja satiekas tieši divas dažādu krāsu amēbas, tad tās saplūst un no tām izveidojas viena trešās krāsas amēba. Vai var gadīties, ka traukā paliek tikai viena amēba?

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Vai var uz taisnes izvietot 5 punktus A, B, C, D, E (varbūt citādā kārtībā) tā, ka AB = 1, BC = 3, CD = 5, DE = 7, EA = 9?

5.6.2. Ap galdu sēž 7 cilvēki. Katriem trim pie galda sēdošiem cilvēkiem var atrast tādu pie galda sēdošu cilvēku, kurš pazīst tos visus trīs. Pierādīt: pie galda ir tāds cilvēks, kurš pazīst visus pārējos ap galdu sēdošos.
(Piezīme: ja A pazīst B, tad arī B pazīst A.)

5.6.3. Tabulā ir divas rindas un n kolonnas (skat. 28. zīm.)



28. zīm.

Katrā rindā jāieraksta visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot (katrs vienu reizi) tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu kaut kāda naturāla skaitļa reizinājums pašam ar sevi. Vai to var izdarīt, ja
a) n = 11,
b) n = 13 ?

5.6.4. Kādā valstī lieto 1; 2; 3; 5; 8; 10; 15; 20; 25; 29; 43; 50; 60; 68; 75; 100 santīmu monētas. Naudas automāts samaina jebkuru vienu monētu pret jebkurām 4 monētām (pēc mūsu izvēles) ar tādu pašu kopējo vērtību kā maināmajai monētai. Vai var ar šī automāta palīdzību samainīt vienu 100 santīmu monētu 100 viena santīma monētās?

5.6.5. No 9 dažādiem nenulles cipariem, katru izmantojot tieši vienu reizi, izveidoti 5 naturāli skaitļi. Mazākais no tiem ir visu četru pārējo skaitļu dalītājs. Kāds var būt šis mazākais skaitlis?

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Plaknē atzīmēti 5 punkti. Cik var būt trijstūru, kam visas virsotnes atrodas šajos punktos?

5.7.2. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka vai nu visām tām masas ir vienādas, vai arī 4 monētām ir viena masa, bet 4 monētām – cita masa. Kā ar 3 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot, kura no iespējām pastāv īstenībā?

5.7.3. Apskatām visus naturālos skaitļus no 1 līdz 200 ieskaitot.

a) vai no tiem var izvēlēties 101 skaitli tā, lai neviens izvēlētais skaitlis nebūtu divu citu izvēlēto skaitļu starpība?

b) vai tā var izvēlēties 102 skaitļus?

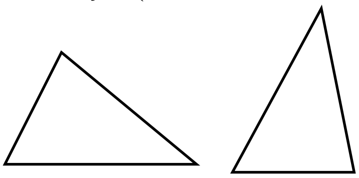
5.7.4. Kuri naturālie skaitļi ir vienādi ar trīs savu dažādu pozitīvu dalītāju summu ?

5.7.5. Kādā ciemā dzīvo n pļāpas; katrai mājās ir telefons. Šodien katra pļāpa piezvanīja vismaz vienai citai. Starp katrām divām pļāpām notika tieši viena saruna. Pierādīt: var atrast trīs tādas pļāpas A, B un C, ka A piezvanīja B, B piezvanīja C un C piezvanīja A.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Ir zināms, ka visiem x pastāv vienādība $x^4+64=\left(x^2-4x+8\right)\cdot A$, kur A ir izteiksme, kas izveidota no x un naturāliem skaitļiem ar saskaitīšanas, atņemšanas un reizināšanas operāciju palīdzību. Atrast A.

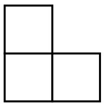
5.8.2. Jānis sadala a metrus garu nogriezni 3 mazākos nogriežņos; pēc tam Pēteris sadala b metrus garu nogriezni 3 mazākos nogriežņos. Pēteris grib, lai no iegūtajiem 6 nogriežņiem varētu vienlaicīgi salikt divu trijstūru kontūras, skat. 29. zīm.; Jānis cenšas to nepieļaut. Kurš no zēniem var sasniegt savu mērķi? (Atbilde varbūt ir atkarīga no a un b vērtībām.)



29. zīm.

5.8.3. Vai var izrakstīt rindā visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2006 ieskaitot katru vienu reizi tā, lai katru 3 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa dalītos ar 4?

5.8.4. Par stūrīti sauc no 3 vienādiem kvadrātiem sastāvošu figūru, kas redzama 30. zīm. Kvadrāta malas garums ir 1.



30. zīm.

Vai taisnstūri ar izmēriem

a) 8×8,

b) 12×12,

c) 5×9

var sagriezt stūrīšos?

5.8.5. Uz katras no 100 kartiņām ir pa naturālam skaitlim no 1 līdz 100 ieskaitot (visi skaitļi uz kartiņām ir dažādi). Daļa kartiņu ir Juliatai, pārējās – Maijai. Zināms: ja paņem pa vienai kartiņai no katras meitenes, tad uz tām uzrakstīto skaitļu summa nav ne uz vienas Juliatas kartiņas, bet uz tām uzrakstīto skaitļu reizinājums nav ne uz vienas Maijas kartiņas. Maijai nav kartiņas ar skaitli 13. Cik kartiņu ir Maijai?

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Kādā kolektīvā katram cilvēkam ir tieši 3 draugi (ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs). Nav tādu triju cilvēku, kas visi savā starpā draudzētos. Kāds ir mazākais iespējamais cilvēku skaits šajā kolektīvā?

5.9.2. Dots, ka ABCD – paralelograms. Taisne t ir paralēla diagonālei BD un krusto malu AB punktā M, bet malu AD – punktā K. Pierādīt, ka trijstūru BMC un KCD laukumi ir vienādi.

Ja nevarat atrisināt uzdevumu vispārīgajā gadījumā, apskatiet gadījumu, kad ABCD – kvadrāts (protams, iegūto punktu skaits tad būs mazāks).

5.9.3. Ja a - reāls skaitlis, tad ar [a] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a (skaitļa a veselo daļu). Piemēram, [4,8] = 4; [-3, 3] = –4; [5] = 5.

Savukārt pēc definīcijas $\{a\} = a - [a]$ (skaitļa a daļveida daļa). Piemēram, {4,8} = 0,8; {-3,3} = 0,7; $\{5\} = 0$.

Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = z \\ [y] + \{z\} = x \\ [z] + \{x\} = y \end{cases}$$

5.9.4. Kuri naturālie skaitļi x apmierina vienlaicīgi visas sekojošās prasības:

- $x \le 2006$,
- x dalās ar 5,
- x + 1 dalās ar 7,
- x + 2 dalās ar 9,
- x + 3 dalās ar 11?

5.9.5. Gunārs un Dzintars pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 1000. Sāk Dzintars, uzrakstot skaitli 1. Neviens jau uzrakstīts skaitlis netiek nodzēsts; nevienu skaitli nedrīkst rakstīt otrreiz.

Ja kaut kāds skaitlis x jau ir uz tāfeles, tad ar kārtējo gājienu drīkst uzrakstīt vai nu x + 1, vai 2x (ja izvēlētais rakstāmais skaitlis nepārsniedz 1000). Tas, kurš uzraksta 1000, uzvar. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

6. LATVIJAS 56. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Atrisināt vienādojumu x + y = 1025, ja x un y ir naturāli skaitļi – skaitļa 640000 dalītāji.

6.9.2. Apzīmējam $f(x) = x^2 + px + q$. Zināms, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, no kurām viena atrodas starp 0 un 1, bet otra – nē. Pierādīt, ka $f(q) \le 0$.

6.9.3. Trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Uz taisnes AB atrasti tādi divi dažādi punkti C_1 un C_2, ka $IC_1 = IC_2 = IC$; uz taisnes AC atrasti tādi divi dažādi punkti B_1 un B_2, ka $IB_1 = IB_2 = IB$; uz taisnes BC atrasti tādi divi dažādi punkti A_1 un A_2, ka $IA_1 = IA_2 = IA$.

Pierādīt, ka $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + CA$.

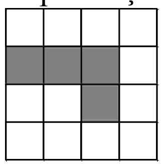
6.9.4. Eksāmenam tika sagatavoti 8 uzdevumi. Katram skolēnam iedeva 3 no tiem. Nav tādu divu skolēnu, kas būtu saņēmuši vairāk nekā vienu kopīgu uzdevumu. Kāds ir lielākais iespējamais skolēnu skaits?

6.9.5. Deviņos traukos pavisam kopā ir 36 litri ūdens. Ūdeni, kas ir 1. traukā, sadalīja 8 vienādās daļās un šīs daļas ielēja pārējos 8 traukos (pa vienai daļai katrā traukā). Pēc tam to pašu izdarīja ar ūdeni, kas bija 2. traukā, 3. traukā, ..., 8. traukā, 9. traukā. Izrādījās, ka tagad katrā traukā ir tikpat ūdens, cik tur bija sākumā. Cik litru ūdens sākumā bija katrā traukā?

7. LATVIJAS 33. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; četras no tām iekrāsotas (skat. 31. zīm.). Parādīt, ka kvadrātu var sagriezt 4 vienādās daļās tā, lai katra daļa saturētu vienu iekrāsoto rūtiņu. (Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.)



31. zīm.

Vai šādu sagriešanu var izdarīt divos dažādos veidos tā, lai vienā sagriešanā iegūtās daļas pēc formas atšķirtos no otrā sagriešanā iegūtajām daļām?

7.5.2. Uz galda atrodas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir un, ja tā ir, tad vai tā vieglāka vai smagāka par citām?

7.5.3. Pa apli stāv Andris, Dzintars, Gunārs, Juliata, Maija un Skaidrīte. Visi attālumi starp bērniem ir dažādi. Katrs bērns nosauc sev vistuvāk stāvošā bērna vārdu. Cik vārdi var tikt nosaukti divreiz? (Attālumus starp bērniem mēra „pa apli".)

7.5.4. Istabā atrodas 3 rūķīši: Alfa, Beta un Gamma. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo, un katrs zina visu par abiem pārējiem. Uz jautājumu: „Cik starp jums trijiem ir meļu?" viņi atbildēja šādi:

Alfa: „Viens."
Beta: „Divi."
Gamma: „Trīs"

Kuri no rūķīšiem melo, kuri – runā patiesību?

7.5.5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 14 ieskaitot var sadalīt trīs daļās tā, lai visu daļu summas būtu vienādas?

Vai to var izdarīt ar skaitļiem no 1 līdz 13 ieskaitot?

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Trīsciparu skaitļa x simtu cipars ir a, desmitu cipars ir b un vienu cipars ir c. Pierādīt: ar 7 dalās visi tie un tikai tie skaitļi x, kuriem izteiksme $2a+3b+c$ dalās ar 7.

7.6.2. Doti 4 atsvari. Katram no tiem masa ir 10 g vai 11g. Doti arī svari, kas rāda uz tiem uzlikto atsvaru kopējo masu. Vai ar 3 svēršanām var noteikt katra atsvara masu?

7.6.3. Katrā no 3 groziem ir gan āboli, gan bumbieri. Pierādīt: Andris var paņemt 2 grozus tā, lai tajos kopā būtu vairāk nekā puse ābolu un vairāk nekā puse bumbieru.

7.6.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu rūtiņu malu var nokrāsot, lai katrai rūtiņai būtu nokrāsotas vismaz 2 malas?

7.6.5. Kvadrāts sadalīts 10×10 vienādās kvadrātiskās rūtiņās un izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Trīsdesmit trijās baltajās rūtiņās atrodas pa dukātam. Sprīdītis staigā pa kvadrātu, ar katru soli šķērsojot divu rūtiņu kopējo malu. (Sprīdītis neiet caur rūtiņu stūri un neieiet rūtiņā, kurā jau ir bijis.) Ieraugot dukātu, viņš to paņem.

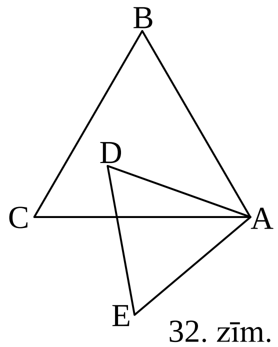
Pierādīt: ja Sprīdītis pavisam pabūs vismaz 54 rūtiņās, tad viņam būs vismaz 10 dukāti.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Vilcienā Rīga-Mehiko vietas numurētas ar naturāliem skaitļiem, sākot ar 1 (numerācija ir vienota visam vilcienam, t.i., ir tikai viena vieta ar numuru 1, viena vieta ar numuru 2 utt; numuri piešķirti virzienā no lokomotīves uz vilciena „asti"). Visos vagonos ir vienāds vietu skaits. Vietas ar numuriem 1996 un 2015 ir vienā vagonā, bet vietas ar numuriem 630 un 652 – dažādos vagonos, kas pie tam nav blakus viens otram. Cik vietu ir katrā vagonā?

7.7.2. Triju veselu pozitīvu skaitļu summa ir 407. Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties šo skaitļu reizinājums?

7.7.3. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir 60º lieli (skat. 32. zīm.). Pierādīt, ka BD = CE.



32. zīm.

7.7.4. Radījuši Trio salu, dievi tajā nometināja 2005 princeses, 2006 bruņiniekus un 2007 pūķus. Pūķi ēd princeses; bruņinieki nogalina pūķus; princeses noved līdz bojāejai bruņiniekus. Saskaņā ar dievu ieviesto kārtību nav iespējams iznīcināt to, kurš pats iznīcinājis nepāra skaitu citu būtņu. Pašreiz Trio salā palikusi tikai viena dzīva būtne. Kas tā ir?

7.7.5. Pa apli izvietoti 24 trauki; katrā ir pa vienai konfektei. Ar vienu gājienu var paņemt vienu konfekti no jebkura trauka. Ja abos blakus esošajos traukos arī ir pa vienai konfektei, tad paņemto konfekti drīkst apēst; pretējā gadījumā tā jāieliek tajā blakus esošajā traukā, kurā konfekšu nav (jebkurā no tiem, ja tie abi ir tukši). Kādu lielāko konfekšu daudzumu var apēst?

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt a un b ar p un q palīdzību.

7.8.2. Matemātikas pulciņā piedalās Andris, Dzintars, Gunārs, Juliata, Liene un Maija. Uzdevumus viņi risina grupās pa trim. Kāds mazākais skaits uzdevumu tika risināts, ja katri divi bērni kopā risināja vismaz vienu no tiem?

7.8.3. Naturāla skaitļa x ciparu summu apzīmēsim ar S(x). Pieņemsim, ka n – tāds naturāls skaitlis, kam vienlaicīgi izpildās īpašības S(n) = 10 un S($5n$) = 5.

a) atrodiet kaut vienu tādu skaitli,

b) vai tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz?

c) vai kāds no tādiem skaitļiem ir nepāra?

7.8.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC uz malām AC un AB izvēlēti attiecīgi tādi punkti K un L, ka KL||BC un KL = KC. Uz malas BC izvēlēts tāds punkts M, ka $\angle KMB = \angle BAC$. Pierādīt, ka KM = AL.

7.8.5. Kvadrāts sastāv no 33×33 kvadrātiskām rūtiņām. No šīm rūtiņām 32 ir nokrāsotas melnas, pārējās baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties baltu rūtiņu, no kuras kaimiņu rūtiņām vismaz divas jau ir melnas, un nokrāsot arī šo rūtiņu melnu. (Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala).

Vai var gadīties, ka izdodas nokrāsot melnu visu kvadrātu?

Vai tas var gadīties, ja sākotnēji melnas ir 33 rūtiņas?

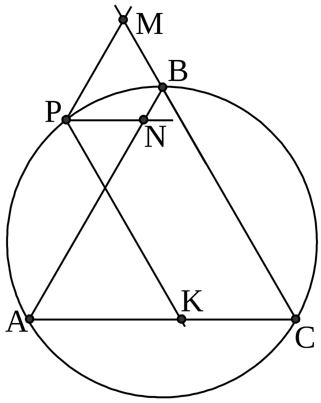
7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

7.9.2. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n + 1$ rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.

Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

7.9.3. Dots, ka ΔABC ir regulārs. Punkts P atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas (skat. 33. zīm.) Taisnes, kas caur P vilktas paralēli AB, BC un CA, krusto atbilstoši taisnes BC, AC un AB attiecīgi punktos M, K un N. Pierādīt, ka $\angle BMN = \angle BMK$.



33. zīm.

7.9.4. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Ir dots, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, kas atšķiras viena no otras vismaz par 5. Pierādīt, ka vienādojumam $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0$ arī ir divas saknes.

7.9.5. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var izvēlēties tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nedalītos viens ar otru un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks par 1?

ATBILDES UN ATRISINĀJUMI

1. KONKURS 4. KLASĒM „TIK VAI CIK”

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. **B**.

1.1.2. **E**; šajā skaitlī ir 6 cipari, pārējos – tikai 5 cipari

1.1.3. **C**; tievā svece degs 7 stundas, resnā – 8 stundas. Tā kā abas sveces tika iedegtas vienlaicīgi, tad tievā svece izdegs ātrāk, un istabā būs gaisma tik ilgi, kamēr degs resnā svece.

1.1.4. **A**; skaidrs, ka vēl varēs uzzīmēt tikpat garu līniju, cik ir jau uzzīmēto līniju kopgarums.

1.1.5. **C**.

1.1.6. **C**.

1.1.7. **D**.

1.1.8. **E**.

1.1.9. **A**; augšējā lampiņa var būt vai nu sarkana, vai dzeltenie, vai zaļa. Izvēloties vienu augšējo lampiņu, par vidējo varam ņemt jebkuru no 2 atlikušajām, un apakšējā būs trešā atlikusī, tātad kopā var iegūt $3 \cdot 2 = 6$ dažādus luksoforus.

1.1.10. **B**; audzinātāja katrā trijstūrī nogāja 1 malu, bet bērni – tikpat garas 2 malas, tātad kopā bērni nogāja divreiz garāku ceļu.

1.1.11. **E**; pavisam lielajā trijstūrī ir 32 mazie trijstūrīši, no tiem iekrāsoti ir 4, kas ir 1/8.

1.1.12. **C**; jāievēro, ka lodziņš ir durvīm no kreisās puses, tāpēc neder A, B, D varianti; savukārt E variantā durvis ir šaurajā sienā.

1.1.13. **C**.

1.1.14. **E**.

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. **C**.

1.2.2. **B**. 30min. + 38 min. +5 min. 30s = 73 min. 30s.

1.2.3. **D**. Ja tikai dalāmo palielinātu 2 reizes, tad dalījums arī palielinātos 2 reizes; ja tikai dalītāju samazinātu 4 reizes, tad dalījums palielinātos 4 reizes. Tātad šajā gadījumā dalījums palielināsies $2 \cdot 4 = 8$ reizes.

1.2.4. **C**. 12 l ir 24 puslitra pudelēs. 10 pudeles jau ir ielietas, vēl jāielej 14 pudeles.

1.2.5. **B**.

1.2.6. **E**.

1.2.7. **C.** Šādos uzdevumos jāapskata sliktākais iespējamais gadījums, t.i., ja lācim būtu lielākais iespējamais svars, bet gorillam un strausiem – mazākais iespējamais svars. Ja lācis sver 500 kg, gorilla sver 250 kg un viens strauss sver 80 kg, tad ar 3 strausiem vēl nepietiek ($250 + 3 \cdot 80 = 490 < 500$), bet viens gorilla un 4 strausi noteikti būs smagāki par jebkuru lāci.

1.2.8. **a)** $x < y$;

b) $x > y$ (x ir par 2 lielāks nekā y);

c) $x = y$;

d) ja $x + y > 2x$, tad ja $x + y > x + x$ jeb $y > x$, tātad $x < y$;

e) $5x - 12y = 0$, tātad $5x = 12y$, tātad $x > y$.

1.2.9. Beigās bija 5 zīlītes. Tā kā klāt bija pielidojusi 1 zīlīte un neviena zīlīte nebija lidojusi prom, tad zīlīšu skaits sākumā bija 5 – 1 = 4 (zīlītes).

Brīdī, kad zvirbuļu bija 2 reizes mazāk nekā zīlīšu, bija 4 zīlītes, tātad tobrīd barotavā atradās 2 zvirbuļi. Viens no zvirbuļiem bija tikko atlidojis, tātad pašā sākumā barotavā bija 1 zvirbulis.

1.2.10. Ievērojam, ka katrā rindā ir par vienu kubiņu mazāk nekā iepriekšējā (skaitot no apakšas; kubiņi zīmējumā ir iekrāsotie kvadrātiņi). Tā kā augšējā rindā ir 1 kubiņš, tad pavisam ir tik rindu, cik kubiņu ir apakšējā rindā, tātad piramīda sastāv no 8 rindām. Katras rindas augstums ir 5 cm, visas piramīdas augstums ir $5\text{cm}\cdot 8 = 40\text{cm}$.

1.2.11. Pārgriežot kvadrātu pa taisnu līniju, iegūstam divus daudzstūrus, kuru perimetru summā ietilpst visu četru kvadrāta malu garums (pa vienai reizei) un divreiz – griezuma līnijas garums. Tātad abu perimetru summa būs vislielākā iespējamā, ja griezuma līnija būs visgarākā iespējamā. Līdz ar to uzdevums īstenībā ir novilkt kvadrāta iekšpusē garāko iespējamo nogriezni; tā ir kvadrāta diagonāle.

1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1. 5050.

1.3.2. 1450m + 50m = 1500m un 3000 m:2 = 1500 m, tātad 1450 m + 500 dm=3 km : 2; 10000 g-100 g = 9900 g, bet $3330\text{g}\cdot 3 = 9990\text{g}$, tātad $10\text{kg} - 100\text{g} < 3330\text{g}\cdot 3$.

1.3.3. Pavisam bija 2 + 1 + 1 + 16 = 20 cepumi, kurus izdalot vienādās daļās pieciem ēdējiem (tētis, mamma, vecmāmiņa, Andrītis un žurka), katram tiek 4 cepumi.

1.3.4. **a)** x=0

b) x var būt jebkurš skaitlis.

c) x var būt jebkurš skaitlis, izņemot 0.

d) nav nevienas tādas x vērtības (skaitli, kas nav 0, dalot pašu ar sevi, iegūst 1).

e) Tā kā x : x = 1, tad x : x – 1 = 0, bet $x\cdot 0 = 0$ visām x vērtībām, tātad arī šajā gadījumā nav nevienas tādas x vērtības.

1.3.5. Jānītis skolā pavadīja no 8:30 līdz 12:50, tas ir 4 h 20 min. = 260 min. Mācību stundas kopā ilga $5\cdot 40\text{min} = 200\text{min}$, tātad visi starpbrīži kopā ilga 260 min. - 200 min. = 60 min. = 1h. 1 stundu skrienot ar ātrumu 8 km/h, Jānītis noskrēja 8 km.

1.3.6. To var izdarīt 6 dažādos veidos: AEHG, AEFG, ADHG, ADCG, ABCG, ABFG.

1.3.7. Novelkot kvadrāta ABCD malas, redzam, ka katra mala sastāv no divu pusriņķu diametriem. Tā kā pusriņķa rādiuss ir 4 cm, tā diametrs ir $2\cdot 4\text{cm} = 8\text{cm}$ un vienas malas garums ir $8\text{cm}\cdot 2 = 16\text{cm}$. Tātad kvadrāta perimetrs ir $4\cdot 16cm = 64cm$.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1.

<	>
1450m+5m=1455m	10000g-9g=9991g
3000m:2=1500m	3300g·3=9900g
1455m<1500m	9991g>9900g

1.4.2. Risinājumi:

=30303-20202+3030=	=9999:9+123=
=10101+3030=	=1111+123=
=13131	=1234

1.4.3. **Atbilde:** Starpība samazināsies par 10.

1.4.4. Riņķa diametrs ir $2cm\cdot 2 = 4cm$. AB = CE = 4 *cm* (vienāds ar riņķa diametru) $AE = BC = 3\cdot 4cm = 12cm$ (satur 3 riņķu diametrus). $S_{ABCD} = 4cm\cdot 12cm = 48cm^2$.

1.4.5. 1) $\frac{2}{5}$ no 10 *l* ir 4 *l* (ūdens)

2) $4\cdot 1\,kg = 4\,kg$ (ūdens, tik svēra sniegavīrs)

3) 4 kg 300 g-4 kg=300 g (tik sver spainis)

1.4.6. 1) $15m \cdot 20m = 300m^2$ (tāds laukums jāapsēj)

2) 300 m^2:3 m^2=100 (tik daļas pa 3 m^2 ietilps lielajā laukā)

3) $100 \cdot 40g = 4000g = 4kg$ (tik sēklu būs nepieciešams).

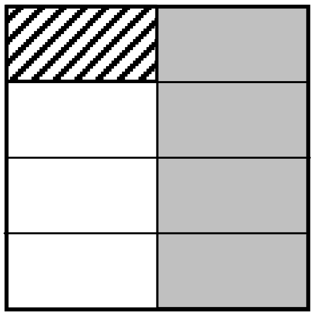
1.4.7. 1) $\frac{3}{5}$ kg = 600 g; 2) $\frac{1}{2}$ kg = 500 g;

3) 600 g-500 g=100 g

1.4.8. Mazākajā riņķī: 7 rādiusi un 3 diametri. Vidējā riņķī: 5 rādiusi un 2 diametri. Lielākajā riņķī: 3 rādiusi un 1 diametrs.

1.4.9. 1) $\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ (tāda daļa kvadrāta iekrāsota vai iesvītrota)

2) $\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ (tāda daļa kvadrāta palika balta)



A1. zīm.

1.4.10. Jāsaskaita, cik vietiņās saskaras 2 skaldnes, kas jāsalīmē. Skaitīsim to atsevišķi aizmugurējā „slānī”, priekšējā „slānī” un atsevišķi – cik vietās priekšējā „slāņa” skaldnes saskaras ar aizmugurējo „slāni” (skat. A2. zīm.).

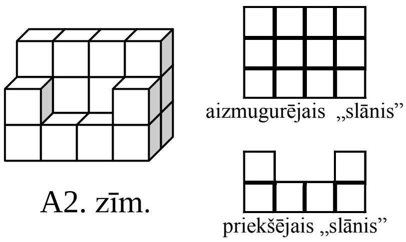
Aizmugurējā slānī: $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$ vietas.

Priekšējā slānī: 5 vietas.

Visiem 6 priekšējā „slāņa” kubiņiem aizmugurējā skaldne pieskaras aizmugurējam „slānim”.

Tātad pavisam ir 17 + 5 + 6 = 28 saskaršanās vietas.

To salīmēšanai nepieciešams $28 \cdot 1g = 28g$ līmes.

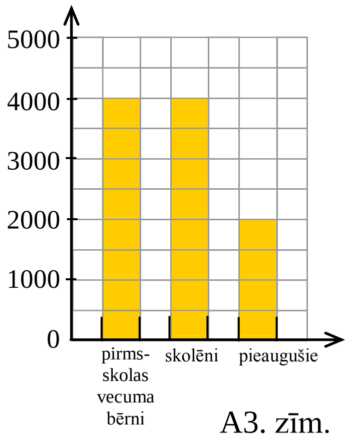


A2. zīm.

1.4.11. 1) $\frac{2}{5}$ no 10000 ir 4000 (skolēni)

2) $\frac{1}{2}$ no 4000 ir 2000 (pieaugušie)

3) 10000-4000-2000=4000 (pirmsskolas vecuma bērni)

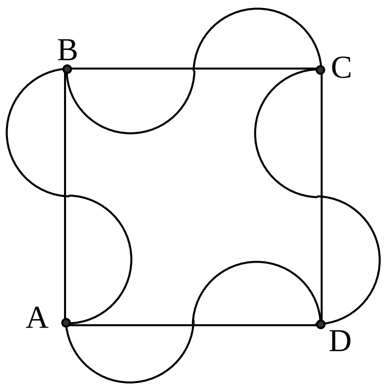


A3. zīm.

1.4.12. Kvadrāta mala sastāv no 2 pusriņķu diametriem jeb no 4 pusriņķu rādiusiem (skat. A4. zīm.).

Tātad $AB = 4 \cdot 4cm = 16cm$.

$P_{ABCD} = 4 \cdot 16cm = 64cm$

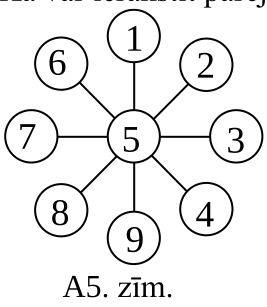


A4. zīm.

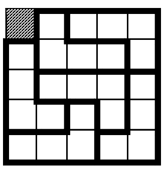
2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

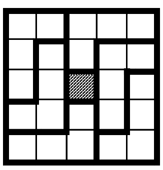
2.1.1. Pavisam ir 4 taisnas līnijas, kas savieno 3 aplīšus. Uz šīm līnijām ierakstīto skaitļu kopējā summa ir $15 \cdot 4 = 60$. Šajā summā tiek četras reizes ieskaitīts skaitlis *x*, kas ierakstīts vidējā aplītī, un vienreiz ieskaitīti pārējie 8 skaitļi. Tāpēc 60 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 3x jeb 3x = 15 un x = 5. Tātad vidējā aplītī jāieraksta cipars 5. Kā var ierakstīt pārējos ciparus, skat., piem., A5. zīm.



A5. zīm.



a)



b)

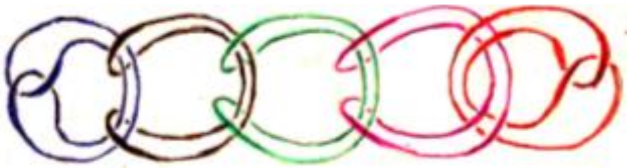
A6. zīm.

2.1.2. Jā, var. Skat., piem., A6.a) un b) zīm.

2.1.3. Piem., $2005 : (2005 + 2005 \times 2005)$.

2.1.4. Apzīmēsim Fibonači virknes skaitļus pēc kārtas ar $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$ utt.
Tad $1 = F_1$, $2 = F_2 = F_0 + F_1$, $3 = F_3 = F_1 + F_2$, $4 = F_3 + F_1$, $5 = F_4 = F_3 + F_2$, $6 = F_4 + F_1$, $7 = F_4 + F_2$, $8 = F_5 = F_4 + F_3$, $9 = F_5 + F_1$, $10 = F_5 + F_2$, $11 = F_5 + F_3$, $12 = F_5 + F_3 + F_1$, $13 = F_6 = F_5 + F_4$, $14 = F_6 + F_1$, $15 = F_6 + F_2$, $16 = F_6 + F_3$, $17 = F_6 + F_3 + F_1$, $18 = F_6 + F_4$, $19 = F_6 + F_4 + F_1$, $20 = F_6 + F_4 + F_2$.

2.1.5. Skat. A7. zīm.



A7. zīm.

2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Tā kā baltais kaķēns ēda 3 reizes ātrāk nekā rudais kaķēns, baltais kaķēns apēda 3 reizes vairāk desiņas nekā rudais. Tātad rudais kaķēns apēda 1 daļu, kamēr baltais kaķēns 3 tādas daļas desiņas, jeb rudais kaķēns pavisam apēda $\frac{1}{4}$ jeb 120 : 4 = 30 (g) desiņas un baltais kaķēns apēda $\frac{3}{4}$ jeb $30 \cdot 3 = 90(g)$ desiņas. Pieņemot, ka kaķēnu svara izmaiņu ietekmēja tikai apēstās desiņas daudzums, viegli aprēķināt, ka baltais kaķēns sākumā bija par 60 g vieglāks, jo viņš apēda par 90 g - 30 g = 60 g desiņas vairāk.

2.2.2. Tādu kvadrātisku tabulu, kurā ierakstīto skaitļu summas pa rindiņām, kolonnām un diagonālēm ir vienādas, sauc par maģisko kvadrātu. A8. zīm. parādīts, kā izveidot maģisko kvadrātu, ja tajā jāieraksta skaitļi no 1 līdz 16; rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir 34.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

A8. zīm.

5	19	18	8
16	10	11	13
12	14	15	9
17	7	6	20

A9. zīm.

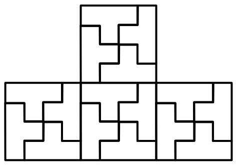
Tā kā tabulā jāieraksta 16 dažādus naturālus skaitļus, pie tam nekādu divu no tiem starpība nav lielāka par 15, tad visi ierakstītie skaitļi ir 16 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Palielinot katru tabulā ierakstīto skaitli par 1, vienā rindiņā (kolonnā, diagonālē) ierakstīto skaitļu summa palielinās par 4 (rindiņā (kolonnā, diagonālē) ir 4 skaitļi, katrs no kuriem ir palielināts par 1). Tā kā $50 = 34 + 16 = 34 + 4 \cdot 4$, tad uzdevumā prasīto maģisko kvadrātu varam izveidot, katram A8. zīm kvadrātā ierakstītajam skaitlim pieskaitot 4; iegūstam A9. zīm. attēloto kvadrātu. Pārbaudot redzam, ka tas apmierina visus uzdevuma nosacījumus.

2.2.3. Pieņemsim, ka no brīža, kad mazdēls atklāja vectētiņa aizmāršību un sāka braukt pakaļ vectētiņam, līdz brīdim, kad viņš panāca vectētiņu, vecaistēvs paspēja nobraukt x km, savukārt mazdēls brauca 10 reizes ātrāk, tātad nobrauca 10x km. Tikšanās brīdī viņi atradās (18 + x) km jeb 10x km attālumā no mājām.

$$10x = 18 + x$$
$$9x = 18$$
$$x = 2 \text{ (km)}.$$

Tātad mazdēls nobrauca $10 \cdot 2 = 20\,\text{km}$.

2.2.4. Skat., piem., A10. zīm.



A10. zīm.

2.2.5. Ja Tārpiņš būtu pie pilna prāta, tad viņa uzskats, ka viņš ir neprātīgs, būtu aplams (bet visiem viņa uzskatiem jābūt patiesiem). Tātad Tārpiņš nav pie pilna prāta un ir neprātīgs. Tādā gadījumā neviens viņa uzskats nevar būt patiess; arī tas, ka gan viņš pats ir neprātīgs (kas tā tiešām ir), gan Ķirzaka ir neprātīga. Tātad Ķirzaka ir pie pilna prāta.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Lai skaitlis dalītos ar 99, tam jādalās gan ar 9, gan ar 11. Ar 9 dalās tādi skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 9. Ar 11 dalās tādi skaitļi, kuriem pāra pozīcijās esošo ciparu summas un nepāra pozīcijās esošo ciparu summas starpība dalās ar 11.

Apzīmēsim nezināmos ciparus ar x un y: 15xy15. Tad summai $1 + 5 + x + y + 1 + 5 = 12 + x + y$ jādalās ar 9, bet izteiksmes $(5 + y + 5) - (1 + x + 1) = 8 + y - x$ vērtībai jādalās ar 11. Tā kā x un y ir cipari, tad $0 \le x + y \le 18$ un $-9 \le y - x \le 9$.

Tātad jābūt $12 + x + y = 18$ ($x + y = 6$) vai $12 + x + y = 27$ ($x + y = 15$); $8 + y - x = 0$ ($x - y = 8$) vai $8 + y - x = 11$ ($y - x = 3$). Iegūstam četras vienādojumu sistēmas, kuru atrisinājumi ir meklētie cipari x un y.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 7; y = -1 \text{ (nav cipars)}$$

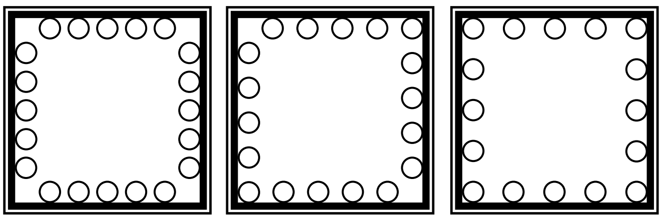
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y - x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}5; y = 4{,}5 \text{ (nav cipari)}$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 11{,}5; y = 3{,}5 \text{ (nav cipari)}$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ y - x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = 9$$

Tātad uzdevuma atbilde ir skaitlis 156915.

2.3.2. A11.a) zīmējumā parādīts, kā visas 20 ogas bija izvietotas sākumā, A11.b) zīmējumā parādīts, kā bija izvietotas 18 ogas un A11.c) zīmējumā parādīts, kā Pifs izbīdīja atlikušās 16 ogas.



a) b) c)

A11. zīm.

2.3.3. Sākumā sarkano krizantēmu bija 9 reizes mazāk nekā balto krizantēmu; apzīmēsim sarkano krizantēmu skaitu ar x, tad balto krizantēmu skaits sākumā bija 9x. Kad daļa balto krizantēmu nokalta, x sarkanās krizantēmas sastādīja 20% no visiem ziediem, tātad pavisam bija palikuši 5x ziedi, no kuriem 4x bija balti. Nokalta 9x - 4x = 5x baltie ziedi jeb $\frac{5}{9}$ balto krizantēmu vai $\frac{1}{2}$ no visiem ziediem.

2.3.4. Ar katru gājienu visu ierakstīto skaitļu summa palielinās par 5; beigās iegūstamajā situācijā visu ierakstīto skaitļu summa ir 25X, kur X – skaitlis, kas ierakstīts katrā rūtiņā, tātad dalās ar 5. Tāpēc iegūt situāciju, kad visi tabulā ierakstītie skaitļi ir vienādi, **varbūt** varēs tikai tādā gadījumā, ja visu sākumā ierakstīto skaitļu summa dalās ar 5. Tāpēc **b)** gadījumā atbilde ir „nē".

a) Ievērosim, ka 25 mazāko dažādo naturālo skaitļu summa 1 + 2 + ... + 25 = 325, tātad sākumā tabulā bija ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 25. Tā kā ar vienu gājienus var izvēlēties jebkurus 5 uzrakstītos skaitļus, nav svarīgi, kā šie skaitļi bija izvietoti tabulā. Pieņemsim, ka tie bija uzrakstīti pēc kārtas (skat. A12. zīm.).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

A12. zīm.

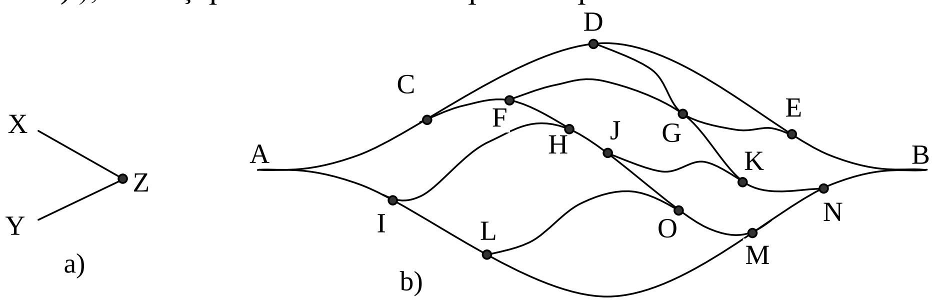
Izpildīsim 4 reizes atļauto gājienu pirmajai kolonnai, 3 reizes – otrajai kolonnai, 2 reizes – trešajai kolonnai un 1 reizi ceturtajai kolonnai. Iegūsim A13. zīm. attēloto situāciju.

5	5	5	5	5
10	10	10	10	10
15	15	15	15	15
20	20	20	20	20
25	25	25	25	25

A13. zīm.

20 reizes izpildot gājienu pirmajai rindiņai, 15 reizes – otrajai rindiņai, 10 reizes – trešajai rindiņai un 5 reizes – ceturtajai rindiņai, visās rūtiņās iegūsim skaitli 25.

2.3.5. Aplūkosim divus ceļus, kas iziet no punktiem X un Y un „sastopas" punktā Z (A14. zīm. A)); citi ceļi punktā Z no kreisās puses nepienāk.



A14. zīm.

Acīmredzot, ja uz X saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var nokļūt pa x dažādiem maršrutiem, bet uz Y – pa y dažādiem maršrutiem, tad uz Z var nokļūt pa x + y dažādiem maršrutiem.

Apzīmējot maršrutu skaitu, pa kuriem no A var nokļūt punktā P, ar W(P), saskaņā ar augšminēto pakāpeniski iegūstam (skat. A14. zīm. b)):
W(C) = 1; W(D) = W(C) = 1; W(I) = 1; W(F) = W(C) = 1; W(H) = W(I) + W(F) = 2;
W(J) = W(H) = 2; W(G) = W(F) + W(D) = 2; W(K) = W(J) + W(G) = 4;
W(L) = W(I) = 1; W(O) = W(L) + W(J) = 3; W(M) = W(L) + W(O) = 4;
W(N) = W(K) + W(M) = 8; W(E) = W(D) + W(G) = 3; W(B) = W(E) + W(N) = 11.
Tātad uz B var nokļūt pa 11 dažādiem maršrutiem.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. Vienādojot saucējus, iegūstam $\frac{12a+6b+4c+3d}{12}$. Ja a samazinātu par 1, pārējos mainīgos atstājot nemainīgus, skaitītāja izteiksme samazinātos par 12. Savukārt, ja kādu citu mainīgo palielinātu par 1, pārējos atstājot nemainīgus, skaitītāja izteiksme palielinātos vislielākais par 6. Tātad lielākajā izteiksmē noteikti jābūt a > b. Spriežot līdzīgi, iegūstam: lai skaitītāja izteiksme un līdz ar to visas daļas vērtība būtu vislielākā, mainīgiem ar lielākajiem koeficientiem jāpiešķir lielākās vērtības: a = 9, b = 8, c = 7, d = 6. Tātad vislielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir $\frac{12\cdot 9+6\cdot 8+4\cdot 7+3\cdot 6}{12}=16\frac{5}{6}$.
Lai iegūtu vismazāko izteiksmes vērtību, mainīgajiem ar lielākajiem koeficientiem jāpiešķir pēc iespējas mazākas vērtības, tātad a = 0, b = 1, c = 2, d = 3 un vismazākā izteiksmes vērtība ir $\frac{12\cdot 0+6\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot 3}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$.

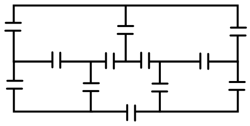
2.4.2. Līdz 2006.gadam lielākā iespējamā gada ciparu summa ir 1 + 9 + 9 + 9 = 28,tātad Antonam nav vairāk par 28 gadiem. Lai atrisinātu šo uzdevumu, jāņem vērā, vai Antonam 2006.gadā dzimšanas diena jau ir bijusi vai vēl tikai gaidāma.
Sastādīsim sekojošu tabulu, kurā apkoposim gadskaitļus, to ciparu summas un Antona vecumu, ja viņš dzimis šajā gadā.

Dzimšanas gads	gadskaitļa ciparu summa	Antona vecums gados	
		ja dzimšanas diena šogad jau bijusi	ja dzimšanas diena šogad vēl nav bijusi
2006.	8	0	--
2005.	7	1	0
2004.	6	2	1
2003.	5	3	2
2002.	**4**	**4**	3
2001.	3	5	4
2000.	2	6	5
1999.	28	7	6
1998.	27	8	7
1997.	26	9	8
1996.	25	10	9
1995.	24	11	10
1994.	23	12	11
1993.	22	13	12
1992.	21	14	13
1991.	20	15	14

1990.	19	16	15
1989.	27	17	16
1988.	26	18	17
1987.	25	19	18
1986.	24	20	19
1985.	23	21	20
1984.	**22**	**22**	21
1983.	21	23	22
1982.	20	24	23
1981.	19	25	24
1980.	18	26	25
1979.	**26**	27	**26**
1978.	25	28	27

No tabulas redzams, ka Antons var būt dzimis 1979.gadā (un šogad dzimšanas diena viņam vēl nav bijusi), 1984. gadā vai 2002.gadā (un šogad viņš jau nosvinējis kārtējo dzimšanas dienu).

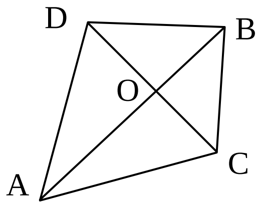
2.4.3. Ja dzīvoklī būtu tikai 4 istabas, tad tajā būtu ne vairāk kā $(4\cdot 3):2+4=10$ durvis (no katras istabas vienas durvis uz katru citu un no katras istabas 1 durvis uz ārpusi). Tātad dzīvoklī ir vismaz 5 istabas. Piemēru ar 5 istabām skat. A15. zīm.



A15. zīm.

2.4.4. Tā kā katrs iemītnieks nosūtīja vai nu 3, vai $6=3\cdot 2$, vai $12=3\cdot 4$ apsveikumus, tad visu nosūtīto apsveikumu skaitam jādalās ar 3. Taču saņemto apsveikumu kopskaits $47\cdot 5=235$ ar 3 nedalās. Tātad kāds apsveikums savu mērķi nav sasniedzis.

2.4.5. Pieņemsim, ka ir divi ceļi AB un CD, kas krustojas punktā O. Pieņemsim, ka ciemam A tuvākais ciems ir B un ciemam C tuvākais ir ciems D. Tad spēkā sakarības AB < AC un AB < AD, CD < CA un CD<CB. (skat. A16. zīm.)



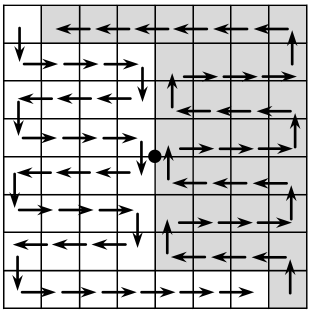
A16. zīm.

Tad no trijstūra nevienādības ΔCBO seko CB < CO + OB **(1)**;
no ΔADO seko AD < AO + OD **(2)**. Saskaitot nevienādības (1) un (2), iegūstam
AD + CB < AB + CD.
Taču AB < AD un CD < CB, tātad AB + CD < AD + CB. Iegūstam pretrunu ar izcelto nevienādību, tātad sākotnējais pieņēmums bija aplams – nav tādu divu ceļu, kas krustojas ārpus ciemiem.

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. Tā kā 9·10·11=990<1000 un 21·22·23=10626>9999, tad mazākais no meklējamajiem skaitļiem ir ne mazāks kā 10 un ne lielāks kā 20. Pārbaudot visas iespējas, atrod, ka uzdevuma prasības apmierina skaitļi **17**, **18** un **19** (17+18+19=54 un 17·18·19=5814).

2.5.2. Jā, var. Skat., piem., A17. zīm.



A17. zīm.

2.5.3. Apzīmēsim aplīšos ierakstāmos ciparus ar burtiem tā, ka apskatāmā izteiksme ir

$$S = a + b \cdot c + \frac{d}{e} - \frac{f}{g} - h \cdot i .$$

Viegli pārbaudīt, ka $7 + 8 \cdot 9 + \frac{6}{3} - \frac{4}{5} - 1 \cdot 2 = 78{,}2$.

Parādīsim, ka lielāka S vērtība nav sasniedzama, un atradīsim visus ceļus, kā sasniegt vērtību 78,2.

I Acīmredzot, lielākās iespējamās $b \cdot c$ vērtības ir $9 \cdot 8 = 72$ un $9 \cdot 7 = 63$. Visos citos gadījumos $b \cdot c \le 7 \cdot 8 = 56$. Tā kā $a \le 9$ un $\frac{d}{e} \le 9$, tad šajos citos gadījumos $S < 56 + 18 < 78{,}2$.

Ja $b \cdot c = 9 \cdot 7 = 63$, tad $a + \frac{d}{e} \le 8 + \frac{6}{1} = 6 + \frac{8}{1}$, tāpēc $S < 63 + 14 < 78{,}2$.

Secinām: ja $S \ge 78{,}2$, tad noteikti $b \cdot c = 8 \cdot 9$ un skaitļi *a*; *d*; *e*; *f*; *g*; *h*; *i* ir no 1 līdz 7 ieskaitot.

II Tālāk šķirojam divus gadījumus atkarībā no tā, vai *e* = 1 vai $e \ne 1$.

II1 Pieņemam, ka *e* = 1. Tad $S = 72 + a + d - \frac{f}{g} - h \cdot i$, kur *a*; *d*; *f*; *g*; *h*; *i* ir no 2 līdz 7 ieskaitot. Izvēloties lielākos *a* un *d* un mazākos *h* un *i*, iegūstam $S = 72 + 7 + 6 - \frac{f}{g} - 2 \cdot 3 = 79 - \frac{f}{g}$, kur *f* un *g* ir 4 un 5; lai iegūtu lielāko S, jāņem *f* = 4 un *g* = 5, un tad *S* = 78,2. Ņemot citādas *a*; *d*; *h*; *i* vērtības, *S* samazinās vismaz par 1, un to nevar kompensēt $\frac{f}{g}$ izmaiņas, jo maksimālajā *S* izteiksmē noteikti $0 < \frac{f}{g} < 1$.

Tātad II1 gadījumā $S \le 78{,}2$, un šī vērtība iegūstama 8 veidos:
par *b* un *c* ņemam 8 un 9 (vienalga, kādā secībā);
par *a* un *d* ņemam 7 un 6 (vienalga, kādā secībā);
par *h* un *i* ņemam 2 un 3 (vienalga, kādā secībā);
***e* = 1; *f* = 4; *g* = 5.**

II2 Pieņemam, ka $e \ne 1$. Tad ir divi apakšgadījumi.

A. Ja $e = 2$, tad, izvēloties lielākos *a* un *d* un mazākos *h* un *i*, iegūstam vai nu $S = 72 + 7 + \frac{6}{2} - \frac{f}{g} - 1 \cdot 3 = 79 - \frac{f}{g} \le 78{,}2$, vai arī

$S = 72 + 6 + \frac{7}{2} - \frac{f}{g} - 1 \cdot 3 = 78{,}5 - \frac{f}{g} < 78{,}2$ (jo f un g ir 4 un 5). Ņemot citas burtu vērtības, $h \cdot i$ aug vismaz par 1, un šo pieaugumu nevar kompensēt ar $\frac{f}{g}$ iespējamu samazinājumu, jo maksimālajā S izteiksmē noteikti $0 < \frac{f}{g} < 1$.

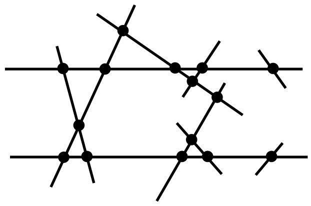
Tātad šajā apakšgadījumā $S \leq 78{,}2$, un šī vērtība ir iegūstama 4 veidos, izvēloties *a* = 7; *d* = 6; *e* = 2; *f* = 4; *g* = 5 un par b un c ņemot 8 un 9 (vienalga, kādā secībā), bet par *h* un *i* ņemot 1 un 3 (vienalga, kādā secībā).

B. Ja $e \neq 2$, tad $e \geq 3$. Vērtību 78,2 varam iegūt, $S = a + 72 + \frac{d}{e} - \frac{f}{g} - h \cdot i$ konkretizējot kā $S = 7 + 72 + \frac{6}{3} - \frac{4}{5} - 1 \cdot 2$ ($1 \cdot 2$ vietā var rakstīt arī $2 \cdot 1$). Izvēloties citas burtu vērtības, $\frac{d}{e}$ var palielināties augstākais par $\frac{1}{3}$, bet $\frac{f}{g}$ var samazināties ne tālāk kā līdz $\frac{1}{7}$, t.i., ne vairāk kā par $\frac{4}{5} - \frac{1}{7} = \frac{23}{35} < \frac{2}{3}$. Tātad tās izmaiņas, kas palielina S, kopā to palielina **par mazāk nekā 1.** Ja tā rezultātā mainās arī *a* vai $h \cdot i$ vērtības ,tad šī iemesla dēļ S samazinās vismaz par 1, tātad kopumā samazinās. Tāpēc vienīgā iespēja, kā **varbūt** varētu palielināt S, ir nemainīt *a* un $h \cdot i$ vērtības un apskatīt izteiksmi $S_1 = 77 + \frac{d}{e} - \frac{f}{g}$, kur *d*; *e*; *f*; *g* pieņem dažādas vērtības no 3 līdz 6 ieskaitot. Lai iegūtu maksimālu *S*, jāņem $d > e$ un $f < g$. Ja $\frac{d}{e} = \frac{6}{3}$, iegūstam augšminētos piemērus, kuros *S* = 78,2.
Citi gadījumi atspoguļoti tabulā:

$\frac{d}{e}$	$\frac{f}{g}$	$S_1 = 77 + \frac{d}{e} - \frac{f}{g}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{3}{5}$	77,9
$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{4}$	77,45
$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{6}$	78
$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{6}$	77,75
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	77,5

Kā redzam, vērtība 78,2 netiek ne sasniegta, ne pārsniegta. Tātad lielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir 78,2, un tā sasniedzama 14 dažādos veidos.

2.5.4. **a)** Skat., piem., A18. zīm.



A18. zīm.

b) Pieņemsim, ka izdevies uzzīmēt 5 nogriežņus, uz kuriem visiem ir dažādi daudzumi krustpunktu ar citiem nogriežņiem. Viens no dotajiem nogriežņiem var krustoties ar augstākais 4 citiem nogriežņiem, tāpēc uz viena nogriežņa var būt ne vairāk kā 4 krustpunkti. Tātad krustpunktu skaits uz dotajiem nogriežņiem ir 4, 3, 2, 1, 0. Taču tādā gadījumā jābūt **gan** nogrieznim, kas nekrustojas ne ar vienu no pārējiem 4, **gan** nogrieznim, kas krustojas ar visiem četriem pārējiem nogriežņiem. Bet tas vienlaicīgi nav iespējams, tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

2.5.5. Katrā parlamentāriešu grupā XYZ ietilps 3 pāri: XY, XZ, YZ, pie tam katrs pāris drīkst darboties tikai vienā grupā. Pavisam no 6 parlamentāriešiem var izveidot $(6\cdot 5):2=15$ dažādus pārus. Tā kā katrā grupā ietilpst tieši 3 pāri un katrs pāris darbojas tikai vienā grupā, tad grupu nav vairāk par 15 : 3 = 5 (bet tādā gadījumā katram pārim ir jādarbojas kādā grupā). Katrs parlamentārietis X ietilpst 5 pāros, vienā grupā ir vai nu 2 vai 0 pāri, kuros ietilpst parlamentārietis X, pie tam dažādās grupās ietilpstošie pāri ir atšķirīgi. Tātad visās darba grupās kopumā ir sastopami ne vairāk kā 4 pāri ar parlamentārieti X un vismaz viens pāris nedarbojas nevienā darba grupā. Tāpēc darba grupu skaits **ir mazāks** nekā 5.

Četras darba grupas var izveidot, piemēram, šādi:

1) varde, pūce, dundurs;
2) varde, ezis, stirna;
3) pūce, ezis, lācis;
4)dundurs, stirna, lācis.

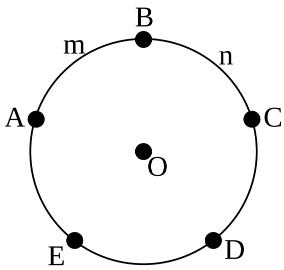
3. PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

A grupa

3.1.A1. Viegli pārbaudīt, ka $22\cdot 23\cdot 24=12144$. Tātad meklējamie skaitļi var būt 22; 23; 24. Pierādīsim, ka tie nevar būt citādi. Tiešām, izvēloties mazākus pēc kārtas ņemtus skaitļus, to reizinājums būs mazāks par 12144, bet, izvēloties lielākus pēc kārtas ņemtus reizinātājus (naturālus skaitļus), to reizinājums būs lielāks par 12144. Tātad reizinājums 12144 iegūstams tikai vienā gadījumā.

3.1.A2. Jā, var. Uzzīmēsim riņķa līniju, atzīmēsim 5 punktus, kas to dala 5 vienādās daļās, un atzīmēsim arī centru (skat. A19. zīm.). Pierādīsim, ka šī 6 punktu sistēma apmierina uzdevuma nosacījumus.



A19. zīm.

Trīs punktus no atzīmētajiem sešiem var izvēlēties 3 būtiski dažādos veidos.

1. Viens no izvēlētajiem punktiem ir O. Tad abi pārējie atrodas no tā vienādos attālumos (jo visi riņķa līnijas punkti atrodas vienādos attālumos no tās centra saskaņā ar riņķa līnijas definīciju).

2. Visi trīs izvēlētie punkti atrodas uz riņķa līnijas cits aiz cita (piemēram, A; B; C). Tad vidējais no tiem ir vienādos attālumos no abiem pārējiem (piemēram, BA = BC), jo vienādiem riņķa līnijas lokiem (mūsu gadījumā lokiem AmB un BnC) atbilst vienādas hordas.

3. Visi trīs izvēlētie punkti atrodas uz riņķa līnijas, bet ne pēc kārtas (piemēram, A; B; D). Tad tie divi punkti, kas ir blakus, atrodas vienādos attālumos no trešā (piemēram, AD = BD), jo vienādiem riņķa līnijas lokiem (mūsu gadījumā lokiem AED un BCD) atbilst vienādas hordas.

Visi gadījumi apskatīti, uzdevums atrisināts.

3.1.A3. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas secībā ar a; b; c; d; e; f; g. Atradīsim tādu skaitli x, ka $b = a + x$. Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $c = b + x = (a + x) + x = a + 2x$; $d = c + x = (a + 2x) + x = a + 3x$; $e = a + 4x$; $f = a + 5x$; $g = a + 6x$. Saskaņā ar doto arī $a + c + e + g = b + d + e$, tātad

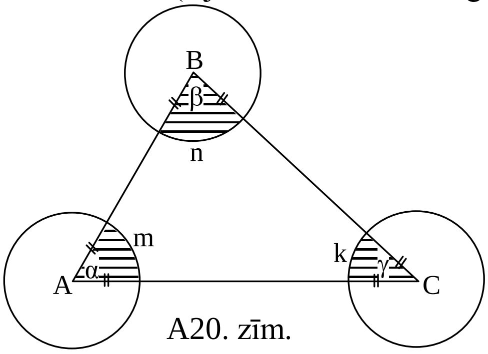
$$a + (a + 2x) + (a + 4x) + (a + 6x) =$$
$$= (a + x) + (a + 3x) + (a + 5x)$$
$$4a + 12x = 3a + 9x$$

No tā seko $a + 3x = 0$. Tāpēc

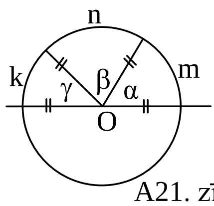
$$a + b + c + d + e + f + g =$$
$$= a + (a + x) + (a + 2x) + (a + 3x) + (a + 4x) + (a + 5x) + (a + 6x) =$$
$$= 7a + 21x = 7(a + 3x) = 7 \cdot 0 = 0,$$

ko arī vajadzēja aprēķināt.

3.1.A4. Aplūkosim A20. zīm. (tajā nav ievērots mērogs).



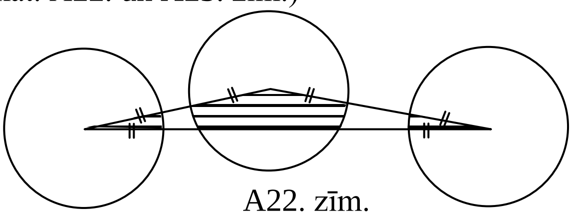
A20. zīm.



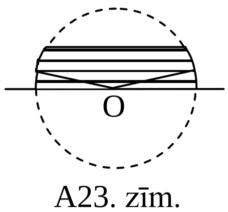
A21. zīm.

Atcerēsimies, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180º. Tā kā visu riņķu laukumi ir vienādi, tad arī to rādiusi ir vienādi. Tāpēc, saliekot iesvītrotos sektorus vienu otram blakus ar kopīgu virsotni O, iegūsim pusriņķi (skat. A21. zīm.). Tā kā pilna riņķa laukums ir 1 cm^2, tad šī pusriņķa laukums ir ½ cm^2.

Ja riņķi daļēji iziet ārpus trijstūra robežām, tad trijstūra iekrāsotās daļas laukums būtu vēl mazāks (skat. A22. un A23. zīm.)



A22. zīm.



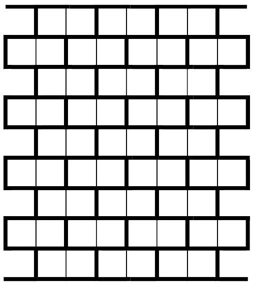
A23. zīm.

<u>Piezīme.</u> Skaidrs, ka trim melnajiem riņķiem nav kopīgu punktu. Tomēr, pat ja tādi būtu, trijstūra nokrāsotās daļas laukums no tā tikai samazinātos.

3.1.A5. Atbilde: ja abi pretinieki spēlē pareizi, tad neviens nevar uzvarēt.

Parādīsim, kā otrais spēlētājs var panākt, lai pirmais neuzvarētu.

Otrais spēlētājs domās sadala visu lapu „ķieģelīšos” tā, kā parādīts A24. zīm. (pie lapas malas daži ķieģelīši varbūt ir nepilni). Ja pirmais spēlētājs nokrāso baltu kādu rūtiņu x, tad otrais spēlētājs ar savu atbildes gājienu nokrāso sarkanu to rūtiņu y, kura kopā ar x veido vienu ķieģelīti.



A24. zīm.

Skaidrs, ka katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā viens ķieģelītis ietilpst pilnībā. Tāpēc otrais spēlētājs ar šādu stratēģiju panāk, ka katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā ir vismaz viena sarkana rūtiņa. Tātad pirmais spēlētājs uzvarēt nevar.

Tā kā pirmais spēlētājs var lietot līdzīgu stratēģiju, tad uzvarēt nevar arī otrais spēlētājs. (Pirmā spēlētāja stratēģija: viņš iedomājas lapas sadalījumu ķieģelīšos. Pirmo rūtiņu viņš nokrāso baltu vienalga kurā vietā. Ja otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu krāso sarkanu rūtiņu u „jaunā” ķieģelītī, tad pirmais spēlētājs ar nākošo gājienu krāso baltu rūtiņu v, kura kopā ar u veido ķieģelīti; ja otrais spēlētājs krāso rūtiņu ķieģelītī, kurā viena rūtiņa jau nokrāsota (tad tā noteikti ir balta), tad pirmais spēlētājs ar nākošo gājienu krāso baltu rūtiņu vienalga kurā jaunā ķieģelītī.)

3.1.A6. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Uz kausa A uzliksim 10 monētas no pirmā maisa. Uz kausa B liksim 1 monētu no otrā maisa, 2 monētas no trešā maisa, 3 monētas no ceturtā maisa un 4 monētas no piektā maisa; ievērosim, ka 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

Atzīmēsim visas iespējas.

Ja vieglākās monētas ir 1.maisā, tad kauss A ir vieglāks nekā kauss B.

Ja vieglākās monētas ir 2.maisā, tad kauss A ir par 1 g smagāks nekā B.

Ja vieglākās monētas ir 3.maisā, tad kauss A ir par 2 g smagāks nekā B.

Ja vieglākās monētas ir 4.maisā, tad kauss A ir par 3 g smagāks nekā B.

Ja vieglākās monētas ir 5.maisā, tad kauss A ir par 4 g smagāks nekā B.

Atkarībā no tā, kuru no minētajiem rezultātiem novērojam, secinām ,kurā maisā ir vieglākās monētas.

B grupa

3.1.B1. Ja visi pirmskaitļi a, b, c būtu nepāra, tad nevarētu būt a + b + c = 38. Tāpēc vismaz viens no tiem ir 2.

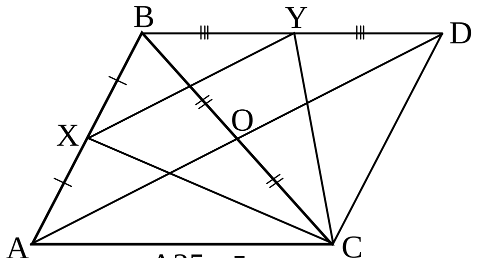
Skaidrs, ka nevar būt a = b = c = 2 vai a = b = 2 (b = c = 2, a = c = 2). Tāpēc tieši viens no skaitļiem a, b, c ir 2. Pieņemsim, ka a = 2. Tad iegūstam **b + c = 36** un 2(b + c) + bc = 395, no kurienes **bc = 323**. No abām izceltajām vienādībām dažādos veidos (skat. tālāk) iegūstam, ka vai nu b = 17, c = 19, vai arī b = 19, c = 17. Tā kā 17 un 19 ir pirmskaitļi (par to noteikti jāpārliecinās), tad iegūtā atbilde 2; 17; 19 der. Gadījumus, kad b = 2 vai c = 2 apskata līdzīgi.

Parādīsim dažādus paņēmienus, kā no b + c = 36 un bc = 323 varēja atrast b un c vērtības.

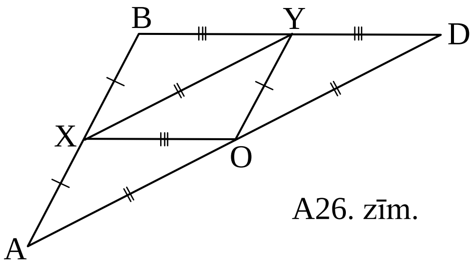
1. Sadalot 323 pirmskaitļu reizinājumā, iegūstam $323 = 17\cdot 19$. Tāpēc vienīgās iespējas ir abas augšminētās.

2. Sadalot 36 divu pirmskaitļu summā, iegūstam iespējas 5 + 31; 7 + 29; 13 + 23; 17 + 19. Tikai pēdējā gadījumā abu saskaitāmo reizinājums ir 323.
Abos šādos risinājumos pārbaude, vai 17 un 19 ir pirmskaitļi, vairs nav nepieciešama, jo šīs b un c vērtības jau tika atrastas kā pirmskaitļi.
3. Izsakot $b = 36 - c$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $c(36 - c) = 323$, $c^2 - 36c + 323 = 0$, $c = 18 \mp \sqrt{18^2 - 323} = 18 \mp \sqrt{1}$, $c_1 = 17$, $c_2 = 19$; atbilstoši $b_1 = 36 - 17 = 19$, $b_2 = 36 - 19 = 17$.
Šajā risinājumā jāpārbauda, vai iegūtās vērtības ir pirmskaitļi, jo tās tika atrastas, par šo faktu nerūpējoties.
Tātad meklējamie pirmskaitļi ir 2; 17; 19.

3.1.B2. Pieņemsim, ka ABC ir trijstūris, par kuru runā uzdevumā. Papildināsim to līdz paralelogramam ABDC.
Apzīmēsim ΔABC mediānu garumus no virsotnēm A, B, C attiecīgi ar m_a, m_b, m_c. Paralelograma diagonāles krustojoties dalās uz pusēm; tāpēc, ja šo diagonāļu krustpunktu apzīmē ar O, tad $AO = m_a$ un $AD = 2 \cdot AO = 2m_a$. Ja X un Y ir attiecīgi malu AB un BD viduspunkti, tad XY ir ΔABD viduslīnija; tāpēc $XY = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 2m_a = m_a$. Labi zināms, ka $\Delta ABC = \Delta DCB$ (to viegli pierādīt pēc pazīmes mmm vai mlm, vai lml). Vienādos trijstūros visi atbilstošie elementi ir vienādi, tāpēc $CY = m_b$. Redzam, ka trijstūrī CXY malu garumi $XY = m_a$, $YC = m_b$, $CX = m_c$; tātad ΔCXY malu garumi ir 3; 4; 5. Tā kā $3^2 + 4^2 = 5^2$, tad ΔCXY ir taisnleņķa un tā katetes ir 3 un 4; tāpēc tā laukums ir $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\ (cm^2)$.



A25. zīm.



A26. zīm.

Ja F – kaut kāda figūra, tad turpmākajā risinājuma gaitā L(F) apzīmēs figūras F laukumu. Mēs tagad atradīsim sakarību starp L(XYC) un L(ABDC) patvaļīgam paralelogramam, ne tikai tādam, kuram CY, CX un XY ir ar skaitliskajām vērtībām 3; 4; 5.
Ievērosim, ka

$$L(ACX) = \frac{1}{2}AX \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB)\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB \cdot h\right) = = \frac{1}{2}L(ABC) = \frac{1}{4}L(ABCD);$$

šeit h – augstums, kas ΔACB (un arī ΔACX) no virsotnes C vilkts pret malu AB (un arī AX). Līdzīgi iegūstam $L(DCY) = \frac{1}{4}L(ABCD)$. Tā kā O ir AD viduspunkts, tad (A26. zīm.) OY un OX arī, tāpat kā XY, ir ΔABD viduslīnijas; tāpēc $OY = AX = XB$, $OX = BY = YD$ un $XY = AO = OD$. Tātad visi trijstūri AXO, XBY, YOX, OYD ir vienādi savā starpā pēc pazīmes mmm. Tāpēc to visu laukumi ir $\frac{1}{4}L(ABD) = \frac{1}{8}L(ABDC)$.

Ņemot to visu vērā,

$$L(CXY) = L(ABDC) - L(ACX) - L(DCY) - L(BXY) = \frac{3}{8}L(ABDC) = \frac{3}{8}\cdot 2L(ABC) =$$

$= \frac{3}{4}L(ABC)$. Tā kā $L(CXY) = 6\ cm^2$, tad no šejienes seko, ka $L(ABC) = 6\ cm^2 \cdot \frac{4}{3} = 8\ cm^2$.

3.1.B3. No vienādības xy + z = xz + y pakāpeniski iegūstam

xy – xz = y – z

x(y - z) = y – z, tāpēc y = z vai x = 1.

Ja y = z, tad skaidrs, ka $(x-y)(x-z)(y-z) = (x-y)(x-z)\cdot 0 = 0$

Ja x = 1, tad dotās vienādības pārvēršas par y + z = z + y = yz + 1

Pakāpeniski iegūstam

z + y = yz + 1

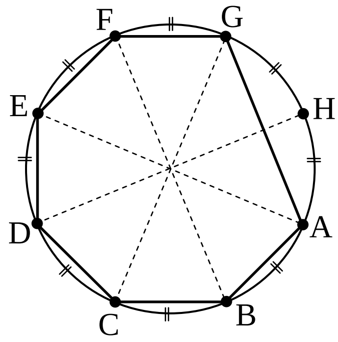
yz – z – y + 1 = 0

(y – 1)(z – 1) = 0, tāpēc y = 1 vai z = 1.

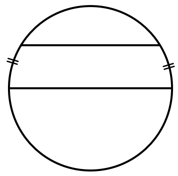
Atceroties, ka x = 1, iegūstam vajadzīgo.

3.1.B4. **Atbilde:** jā, eksistē.

Aplūkosim izliektu septiņstūri, kura virsotnes ir 7 no astoņiem punktiem, kas dala riņķa līniju astoņās vienādās daļās (skat. A27. zīm.).



A27. zīm.



A28. zīm.

Sekojošā tabulā redzams, ka uzdevums prasības izpildītas.

Savstarpēji paralēlas diagonāles	Tām perpendikulāras savstarpēji paralēlas diagonāles
AE, BD	FD, GC
AD	BG, FC
GE, AC	FB, EC
GD	FA, EB

Viegli redzēt, ka katra diagonāle sastopama šajā tabulā.

Par tabulas pareizību pārliecināmies, pamatojoties uz sekojošiem labi pazīstamiem ģeometrijas faktiem:

(1) Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir taisns

(2) Ja loku MN un KL lielumi ir vienādi, tad NK||ML (skat. A28. zīm.)

Parādīsim ar piemēru, kā tas tiek darīts.

Saskaņā ar (2) GD||FE. Saskaņā ar (1) $FE \perp EB$. Tāpēc $GD \perp EB$.

Lasītājs pats var pārbaudīt visas citas norādītās perpendikularitātes.

<u>Piezīme.</u> Iespējami arī citi pamatojumi, piemēram tādi, kas izmanto faktu: ja punkti X un X_1 ir simetriski viens otram attiecībā pret taisni t, tad $XX_1 \perp t$.

3.1.B5. Skaidrs, ka katrā mucā vienmēr ir vesels skaits litru ūdens. Ievērosim, ka $1 + 2 + ... + 10 = 55$. Ja viss ūdens tiktu saliets vienā mucā, tad pirms pēdējās liešanas katrā mucā būtu bijis $27\frac{1}{2}$; skaidrs, ka tas nav iespējams. Tātad vienā mucā nevar būt vairāk par 54 litriem. Parādīsim, kā panākt, lai vienā mucā būtu 54 litri ūdens.
Vispirms panāksim, lai ūdens būtu tikai 3 mucās: 3l, 32l un 20l. Sekojošā tabulā parādītas secīgās pārliešanas. Ar aplīšiem attēlotas tās mucas, kuras izmanto attiecīgā pārliešanā.

Mucas numurs ➔

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	4	5	6	7	8	9	10
4	2	2	4	3	6	7	8	9	10
4	4	2	4	3	4	7	8	9	10
4	4	4	4	3	4	5	8	9	10
4	4	4	4	3	4	10	8	4	10
4	4	4	4	3	4	20	8	4	0
0	4	4	4	3	8	20	8	4	0
0	0	4	8	3	8	20	8	4	0
0	0	0	8	3	8	20	8	8	0
0	0	0	0	3	8	20	16	8	0
0	0	0	0	3	16	20	16	0	0
0	0	0	0	3	32	20	0	0	0

Tālāk darbosimies tikai ar tām mucām, kurās vēl ir ūdens.

3	32	20
3	12	40
3	24	28
6	24	25
12	24	19
24	24	7
0	48	7
0	41	14
0	27	28
0	54	1

Lasītājs var patstāvīgi mēģināt sasniegt mērķi ar mazāku pārliešanu skaitu.

3.1.B6. Atbilde: jā, noteikti.
Risinājums. Garausītis liek kaudzītē 10 s monētas. Ja viņš ar tām spēj izveidot summā 3 latus, viss kārtībā. Ja 10 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā sasniegta summa Ls 3,00, Garausītis sāk pievienot kaudzītei pa vienai 5 s monētai. Ja viņš ar tām spēj sasniegt summā 3 latus, viss kārtībā. Pieņemsim, ka garausītim 5 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā summā sasniegti Ls 3,00. Tad pastāv 2 iespējas.
1. Garausītis kaudzītē salicis naudu pāra skaita santīmu vērtībā (tā notiks tad, ja viņam bijis pāra skaits 5 s monētu). Tad Garausītis sāk kaudzītei pievienot pa vienai 2 s monētai. Ja ar tām tiek sasniegta summa Ls 3,00, viss kārtībā. Ja Garausītim 2 s monētas izbeidzas

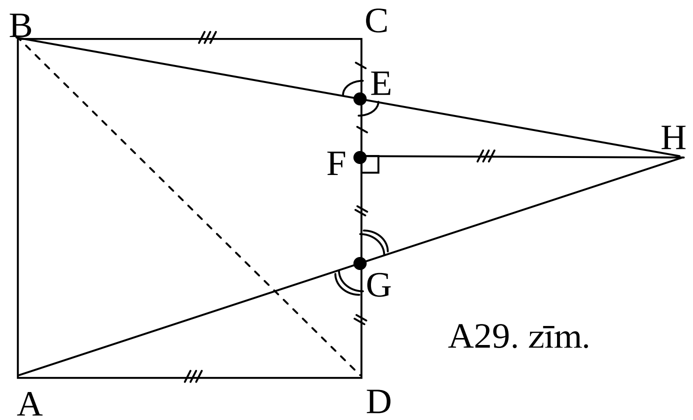
ātrāk, nekā summā sasniegti 3 lati, tad atlikusī nauda (līdz 4 latiem) Garausītim ir 1 s monētās. Skaidrs, ka viņš var papildināt kaudzīti tā, lai tajā būtu tieši 3 lati.

2. Garausītis kaudzītē salicis naudu nepāra santīmu vērtībā (tā notiks tad, ja viņam bijis nepāra skaits 5 s monētu). Tā kā Garausītim kopā 400 santīmu, tad starp atlikušajām monētām (kas var būt tikai 1 s un 2 s monētas) vismaz viena ir 1 s monēta. Pievienojot to kaudzītei, tajā ir nauda pāra skaita santīmu vērtībā. Tagad Garausītis mērķi sasniedz tāpat kā 1.gadījumā (vispirms pievienojot pa vienai 2 s monētai un tālāk, ja nepieciešams, pa vienai 1 s monētai).

3.2. OTRĀ NODARBĪBA

A grupa

3.2.A1. Skat. A29. zīm.



A29. zīm.

Izvēlamies uz kvadrāta ABCD malas CD punktus E, F un G tā, ka $CE = EF \neq FG = GD$ un atliekam ārpus kvadrāta tādu punktu H, ka $FH \perp CD$ un FH = CD. Tad arī FH = CB un FH = DA. Tāpēc $\Delta EFH = \Delta ECB$ un $\Delta GFH = \Delta GDA$ (pazīme kk). Tāpēc $\angle BEC = \angle HEF$, tātad punkti B,E,H atrodas uz vienas taisnes; līdzīgi pierāda, ka punkti A,G,H atrodas uz vienas taisnes. Tāpēc, novietojot ΔBCE stāvoklī HFE un ΔADG – stāvoklī HFG, iegūstam trijstūri AHB. Pārbaudīsim, vai tas apmierina uzdevuma prasības.

1) tā kā $\angle EBA$ atrodas $\angle CBA$ iekšpusē, tad $\angle HBA = \angle EBA$ ir šaurs; līdzīgi pierāda, ka $\angle HAB = \angle GAB$ ir šaurs. Tā kā $\angle HBA > \angle DBA = 45^o$ un līdzīgi $\angle HAB > 45^o$, tad $\angle AHB = 180^o - \angle HBA - \angle HAB < \ < 180^o - 45^o - 45^o = 90^o$; tātad ΔHAB ir šaurleņķu trijstūris.
2) BH > BE > BC = AB, tātad $BH \neq AB$; līdzīgi pierāda, ka $AH \neq AB$.

Pieņemsim uz brīdi, ka AH = BH. No augstāk minētajiem trijstūru vienādībām seko, ka AH = 2AG un BH = 2BE, tātad AG = BE. Tad $\Delta BCE = \Delta ADG$ (hk) , tāpēc EC = DG. Bet tā ir pretruna ar punktu E,F,G izvēli. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un $AH \neq BH$. Tāpēc ΔAHB visas malas ir dažāda garuma.

3.2.A2. <u>Atbilde:</u> nē, neeksistē.

<u>Risinājums.</u> Aprēķināsim dažas pirmās n! vērtības: 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720. Skaidrs, ka arī visas tālākās n! vērtības beigsies ar ciparu 0. Aplūkojot iespējamos n! pēdējos ciparus 0;1;2;4;6, redzam, ka x! + y! var beigties ar ciparu 5 tad un tikai tad, ja viens saskaitāmais beidzas ar ciparu 1, bet otrs- ar ciparu 4. Bet tad šiem saskaitāmiem jābūt 1 un 24; to summa ir 25, un tā neapmierina uzdevuma nosacījumus.

3.2.A3. Lai cik arī no ābola būtu apēsts, no palikušās daļas vienmēr $\frac{1}{4}$ atradīsies virs ūdens un būs pieejama putniņam; savukārt $\frac{3}{4}$ atlikušā ābola atradīsies zem ūdens un būs pieejama zivtiņai. Tātad, kamēr vien viss ābols vēl nebūs apēsts, ko ēst būs gan vienam, gan otram. Tāpēc putniņš apēdīs 2 reizes vairāk nekā zivtiņa, t.i., putniņš apēdīs $\frac{2}{3}$ no ābola.

3.2.A4. Apzīmēsim uzdevumā minētos skaitļus augošā secībā ar x, y un z. Tad $x + y + z = 100$ un apskatāmās starpības ir $y - x$, $z - y$ un $z - x$, bet to summa ir $(y - x) + (z - y) + (z - x) = 2(z - x)$. Tā kā $x \geq 1$ un $y > x$, tad $y \geq 2$; tāpēc $z = 100 - (x + y) \leq \leq 100 - (1 + 2) = 97$. No sakarībām $x \geq 1$ un $z \leq 97$ iegūstam, ka apskatāmā summa $2(z - x)$ nevar būt lielāka par $2(97 - 1) = 2 \cdot 96 = 192$. Ja $x = 1$; $y = 2$; $z = 97$, tad tā <u>ir</u> 192.
Tātad meklējamā vērtība ir 192.

3.2.A5. Nē, tā nevar gadīties. Pieņemsim pretējo. Ja kādam rūķītim ir x gadu, tad viņš saņem 11x ķirbjus, tāpēc viņa saņemto ķirbju skaits dalās ar 11. Bet 123456 ar 11 nedalās: 123456:11 = 11223 atl.3. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

3.2.A6. Apzīmēsim traukus ar A, B, C, bet krāsas- ar a, b, c. Vispirms pārliesim krāsu a traukos B un C, piepildot tos līdz malām. Rodas situācija:
A- tukšs
B- $\frac{2}{3}$ krāsa b, $\frac{1}{3}$ krāsa a
C- $\frac{2}{3}$ krāsa c, $\frac{1}{3}$ krāsa a.
Traukos B un C krāsas sajaucam vienmērīgi un no katra no tiem pusi pārlejam traukā A. Tagad traukā A ir $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}a$ krāsas, tātad tur visu krāsu ir vienāds daudzums. Salejot visu atlikušo krāsu traukā B, arī tur iegūstam vienādus krāsu a, b, c daudzumus. Šo maisījumu patvaļīgi sadalot starp traukiem B un C, iegūstam vajadzīgo.

b grupa

3.2.B1. Skat. A30. zīm., kur parādīti 3 kuba slāņi.

z	**s**	**d**
d	**z**	**s**
s	**d**	**z**

Apakšējais

s	**d**	**z**
z	**s**	**d**
d	**z**	**s**

Vidējais

d	**z**	**s**
s	**d**	**z**
z	**s**	**d**

Augšējais

A30. zīm.

3.2.B2. <u>Atbilde:</u> a) nē, b) jā.
<u>Risinājums.</u> Atgādināsim svarīgu aritmētikas faktu: naturāls skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 3. Tiešām, ja naturāla skaitļa S cipari, sākot no kreisās puses, ir a_0, a_1, a_2, ..., a_n, tad

$$S = \overline{a_0 a_1 \ldots a_n} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots +$$

$$+ a_{n-1} \cdot 10 + a_n = a_0\left(\underbrace{99\ldots9}_{n} + 1\right) + a_1\left(\underbrace{99\ldots9}_{n-1} + 1\right) +$$

$$+ \ldots + a_{n-1}(9 + 1) + a_n =$$

$$= \left(a_0 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n} + a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + \ldots + a_n \cdot 9 \right) +$$
$$+ (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$$

Pirmajās iekavās katrs saskaitāmais dalās ar 3, tātad arī visa iekavas vērtība dalās ar 3. Tātad skaitļa S atlikums, dalot S ar 3, ir tāds, kāds rodas, dalot ar 3 otro iekavu, t.i., skaitļa S ciparu summu.

Tātad x, S(x) un S(S(x)) dod vienādus atlikumus, dalot ar 3; tāpēc to summa dalās ar 3 un nevar būt 2005.

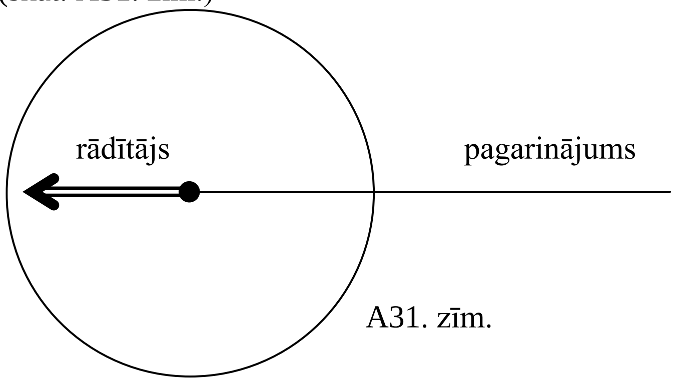
Viegli pārbaudīt, ka y = 1975 apmierina uzdevuma prasības.

3.2.B3. Pieņemsim, ka $n = x^2 + y^2 + z^2$, kur x, y, z – naturāli skaitļi, pie tam $x \geq y \geq z$. Tad

$$n^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$= ((x^2 + y^2 - z^2) + 2z^2)((x^2 + y^2 - z^2) + 2z^2) =$$
$$= (x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - z^2) + (x^2 + y^2 - z^2) \cdot 2z^2 +$$
$$+ 2z^2(x^2 + y^2 - z^2) + (2z^2) \cdot (2z^2) = (x^2 + y^2 - z^2)^2 +$$
$$+ 2z^2(x^2 + y^2 - z^2 + x^2 + y^2 - z^2 + 2z^2) =$$
$$= (x^2 + y^2 - z^2)^2 + 2z^2(2x^2 + 2y^2) =$$
$$= (x^2 + y^2 - z^2)^2 + (2xz)^2 + (2yz)^2.$$

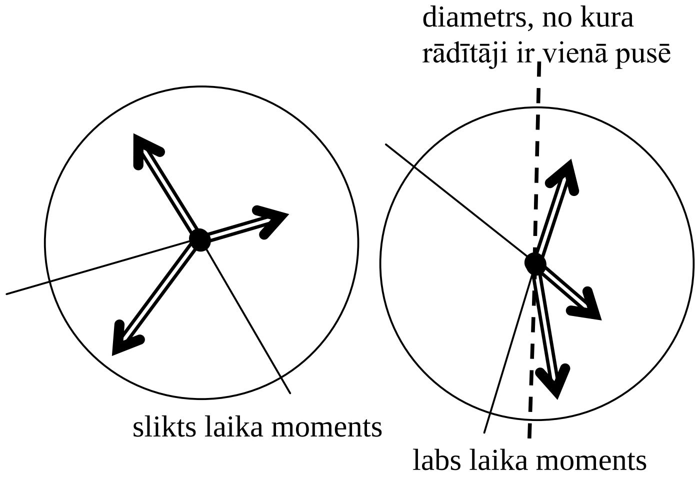
Ja x, y, z – naturāli skaitļi, tad 2xz un 2yz arī ir naturāli skaitļi, bet $x^2 + y^2 - z^2$ ir vesels skaitlis; ja pie tam $x \geq y \geq z$, tad $x^2 + y^2 - z^2 > 0$, tātad ir naturāls skaitlis. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

3.2.B4. Sauksim par rādītāja pagarinājumu staru, kas iziet no ciparnīcas centra <u>pretēji</u> rādītāja virzienam (skat. A31. zīm.)



A31. zīm.

Viegli saprast: laika moments ir slikts tad un tikai tad, ja kāds rādītājs atrodas leņķī (mazākā par 180°), ko veido abu pārējo rādītāju pagarinājumi (skat. A32. zīm.)

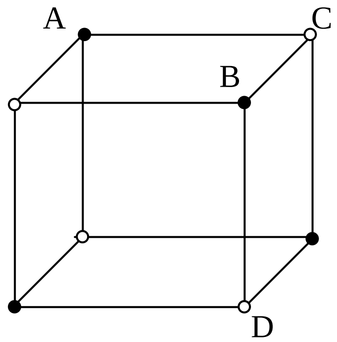


A32. zīm.

Ievērosim: ik pēc 6 stundām minūšu un sekunžu rādītāju atkārtojas, bet stundu rādītāja virziens mainās uz pretējo. Tāpēc 6 stundas pēc slikta momenta noteikti ir labs moments. Bet ir arī labi momenti, 6 stundas pēc kuriem ir labs moments, piem., laika intervāls no 3 st. 0 min. 0 sek. līdz 3 st. 0 min. 15 sek. un tam atbilstošais intervāls no 9 st. 0 min. 0 sek. līdz 9 st. 0 min. 15 sek. No tā seko, ka diennaktī labā laika ir vairāk nekā sliktā.

3.2.B5. Principā uzdevumu varētu atrisināt, pārbaudot visas iespējas, kā skaitļi uzrakstāmi kuba virsotnēs. Tomēr šādu iespēju ir ļoti daudz, un tāds risināšanas ceļš aizņemtu daudz laika. Tālāk dotajā risinājumā visi daudzi gadījumi apvienoti dažos „tipiskajos", tādējādi samazinot veicamā darba apjomu.

Izkrāsojam kuba virsotnes baltā un melnā krāsā, kā parādīts A33. zīm. Katra šķautne savieno vienu baltu un vienu melnu virsotni.



A33. zīm.

Lauztu līniju, kas savieno kuba divas pretējas virsotnes un sastāv no 3 šķautnēm, sauksim par ceļu. Skaidrs, ka katrs ceļš satur 2 melnas un 2 baltas virsotnes. Tālākajam svarīgs būs šāds apgalvojums:

* ja mēs izvēlamies 3 virsotnes, kas visas nav vienā krāsā, tad eksistē 2 ceļi, katrs no kuriem satur šīs 3 virsotnes.

Apgalvojumu (*) viegli pārbaudīt, ja 3 tajā minētās virsotnes ir A, B, C vai A, B, D; visi citi gadījumi ir līdzvērtīgi vienam no šiem diviem.

Tagad apskatīsim dažādus „lielo skaitļu" izvietojumus.

a) 6;7;8 nav vienā un tai pašā krāsā. Saskaņā ar (*) tie ietilpst vienā ceļā. Šis ceļš der par minēto, jo 6 + 7 + 8 = 21.

b) 5;7;8 nav vienā krāsā. Saskaņā ar (*) tie ietilpst vienā ceļā. Šī ceļa ceturtajā virsotnē ir skaitlis x, kur $x \geq 1$. Tāpēc šajā ceļā skaitļu summa ir $5+7+8+x=20+x \geq 21$.

c) ja neizpildās ne a), ne b), tad visi „lielie" skaitļi 5;6;7;8 ir vienā krāsā (varam pieņemt, ka melnā). Tad 4 ir baltā krāsā. Apskatīsim tos 2 ceļus, kas satur 4;7;8. Vienā no tiem ceturto skaitli apzīmēsim ar x, otrā – ar y. Tad šajos ceļos skaitļu summas ir $19 + x$ un $19 + y$. Vai nu x, vai y ir lielāks par 1, tātad vismaz 2. Atbilstošais ceļš der par meklēto.

3.2.B6. Sanumurēsim figūriņas sākuma pozīcijā no kreisās uz labo pusi ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 9 (skat. A34. zīm.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

A34. zīm.

Pieņemsim, ka figūriņas nostājušas tā, kā prasīts uzdevumā. Pastāv divas iespējas:

a) figūriņa Nr.9 nav pārbīdījusies,

b) figūriņa Nr.9 ir pārbīdījusies.

Parādīsim, ka iespēja a) patiesībā nevar būt. Tiešām, ja figūriņa Nr.9 palikusi uz vietas, tad vienīgais sākuma pozīcijā iespējamais gājiens ir lēciens ar figūriņu Nr.8, iegūstot A35. zīm. parādīto situāciju.

1	2	3	4	5	6	7		9	8	...

A35. zīm.

Tā kā beigās figūriņām jāstāv pēc kārtas, tad gan Nr.9, gan Nr.8 atrodas savās beigu pozīcijās. Tāpēc tās vairs nepārvietosies; ja tās pārvietotos, tad vairs nevarētu atgriezties šajās pozīcijās, jo kustība notiek tikai vienā virzienā.

Bet tādā gadījumā Nr.9 un Nr.8 veido „mūri”, kuram pāri nevar tikt citas figūriņas, un tātad beigās figūriņas nevar novietoties vajadzīgajā secībā. Tātad a) tiešām nav iespējama.

Tāpēc realizējas b), un Nr.9 ir pārbīdījusies vismaz 1 vietu pa labi. Pa labi no Nr.9 beigu pozīcijas jābūt vietai pārējām 8 figūriņām; tāpēc kopīgais rūtiņu skaits uz lentas ir vismaz $n = 9 + 1 + 8 = 18$.

Parādīsim, ka pie $n = 18$ uzdevuma prasības ir izpildāmas. Izdarām šādus pārvietojumus:

1) pārbīdām Nr.9 vienu vietu pa labi; iegūstam A36. zīm. attēloto stāvokli.

1	2	3	4	5	6	7	8		9								

A36. zīm.

2) ar 2 lēcieniem un 1 pārbīdīšanu novietojam īstajā vietā Nr.7; iegūstam A37. zīm. attēloto stāvokli.

1	2	3	4	5	6		8		9		7						

A37. zīm.

3) līdzīgā ceļā pēc kārtas novietojam beigu pozīcijās Nr.5, Nr.3, Nr.1, iegūstot A38. zīm. attēloto situāciju.

	2		4		6		8		9		7		5		3		1

A38. zīm.

4) ar vienu pārbīdīšanu un 7 lēcieniem nogādājam īstajā vietā Nr.2, iegūstot A39. zīm. attēloto situāciju.

			4		6		8		9		7		5		3	2	1

A39. zīm.

5) līdzīgā ceļā pēc kārtas nogādājam īstajās vietās Nr.4, Nr.6, Nr.8.

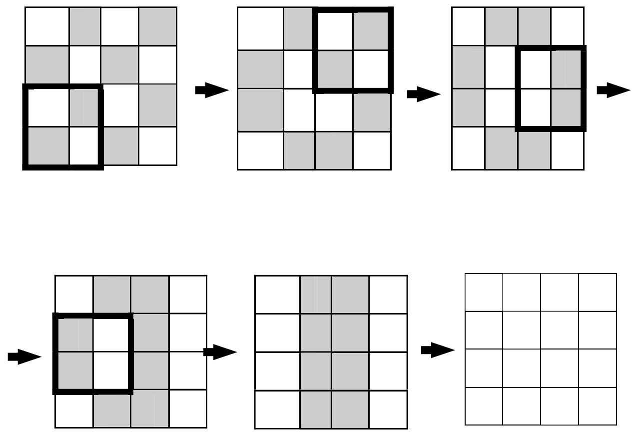
Tātad uzdevuma atbilde ir „18”.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

A grupa

3.3.A1. Atbilde: jā, var.

Vispirms parādīsim, kā var panākt, lai kvadrātā ar izmēriem 4×4 rūtiņas visas rūtiņas būtu baltas (skat. A40. zīm.)



A40. zīm.

Sadalot šaha galdiņu četros kvadrātos ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrs un katru no tiem pārkrāsojot atsevišķi, iegūstam vajadzīgo.

3.3.A2. <u>Atbilde:</u> 6 akmeņi.

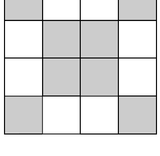
Skaidrs, ka akmeņus, kuru masas ir 30 kg; 30 kg; 30 kg; 10 kg; 10 kg; 10 kg, var sadalīt prasītajā veidā, jo 30 + 10 = 30 + 10 = 30 + 10 un 30 = 30 = 30 = 10 + 10 + 10.

Parādīsim, ka mazāk par 6 akmeņiem nevar būt.

Paņemsim, ka kaudzē ir ne vairāk kā 5 akmeņi. Dalot tos 3 daļās, vismaz vienā kaudzē būs viens akmens (ja katrā kaudzē būtu vismaz 2 akmeņi, tad akmeņu kopīgais skaits būtu vismaz $3\cdot2=6$ – pretruna). Tātad šī akmens masa ir $\frac{1}{3}M$, kur M – kopējā kaudzes masa.

Bet tādā gadījumā, dalot kaudzi 4 daļās, vismaz vienas daļas masa būs ne mazāka par $\frac{1}{3}M$ (tās daļas masa, kas satur iepriekš minēto akmeni). Tā nevar būt, jo, dalot kaudzi 4 daļās, katrai daļas masai jābūt $\frac{1}{4}M$, un $\frac{1}{4}M<\frac{1}{3}M$. Iegūta pretruna.

3.3.A3. Jā, var. Skat. A41. zīm., kur „lielais" kvadrāts sadalīts 4×4 vienādās kvadrātiskās rūtiņās.



A41. zīm.

3.3.A4. Naturālo skaitļu virknē nepāra un pāra skaitļi izvietoti pamīšus. Tāpēc no 18 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem 9 ir pāra skaitļi, bet 9 – nepāra skaitļi. Skaidrs, ka to visu summa ir nepāra skaitlis. Sešu skaitļu summa, kas ir pirmskaitlis, ir lielāka par 2; tāpēc tā ir nepāra skaitlis. Tātad atlikušo 12 skaitļu summa ir pāra skaitlis (nepāra sk. mīnus pāra sk. = nepāra sk.). Tā kā tā ir lielāka par 2, tad tā nevar būt pirmskaitlis.

3.3.A5. Uzrakstīsim dotos iespējamos skaitļa n dalītājus sekojošā formā :

7; 2·5; 3·9; 5·7; 5·9; 7·9.

Ja n nedalītos ar 5, tad tikai trīs no tiem būtu n dalītāji; tā būtu pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad n dalās ar 5. Līdzīgi iegūstam, ka n dalās ar 7 un ar 9. Tā kā skaitļiem 5, 7 un 9 pa pāriem nav lielāka kopīga dalītāja kā 1, tad no tā, ka n dalās ar 5, 7 un 9, seko: n dalās ar $5\cdot7\cdot9=315$. Vienīgie trīsciparu skaitļi, kas dalās ar 315, ir 315;

630; 945. Skaitlis 315 dalās ar 7; $5\cdot7$; $5\cdot9$ un $7\cdot9$, bet nedalās ar $2\cdot5$ un ar $3\cdot9$; tātad tas apmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitlis 630 dalās ar 5 skaitļiem 7; $2\cdot5$; $5\cdot7$; $5\cdot9$; $7\cdot9$, tātad neapmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitlis 945 dalās ar 5 skaitļiem 7; $3\cdot9$; $5\cdot7$; $5\cdot9$; $7\cdot9$, tātad neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad uzdevuma atbilde ir n = 315.

3.3.A6. Apskatām kvadrāta četras stūra rūtiņas. Tā kā krāsošanā izmantotas tikai trīs krāsas, tad divas no šīm stūra rūtiņām nokrāsotas vienādi. Apskatām divas iespējas:

a) vienādi nokrāsotās stūra rūtiņas atrodas pie vienas kvadrāta malas (piem., x un y A42. zīm.) Novelkam kvadrāta viduslīniju, kas dala šo malu uz pusēm (pārtrauktā līnija A42. zīm.).

x	1		1	y
9	2		2	9
8	3		3	8
7	4		4	7
6	5		5	6

A42. zīm.

Pārlokot kvadrātu pa šo viduslīniju, vienādi nokrāsotās rūtiņas x un y sakritīs; sakritīs arī vienādi nokrāsotās to rūtiņu puses, kuras šī viduslīnija krusto. Pat ja katrā ar vienādiem numuriem apzīmēto rūtiņu pārī abu rūtiņu krāsas ir dažādas, katrā pārī pietiek pārkrāsot vienu rūtiņu tā, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos. Tātad nav jāpārkrāso vairāk par 9 rūtiņām.

b) vienādi nokrāsotās stūra rūtiņas atrodas vienas kvadrāta diagonāles galos (piem., u un v A43. zīm.).

u	3	2	1	
4	9	8		1
5	7		8	2
6		7	9	3
	6	5	4	v

A43. zīm.

Pārlokām kvadrātu pa diagonāli, kas neskar šīs rūtiņas. To, ka uzdevuma nosacījumi izpildīti, izspriež tāpat kā a) gadījumā.

b grupa

3.3.B1. Atbilde: nē, to izdarīt nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Apzīmēsim rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas, kā parādīts A44. zīm.

r_1			
r_2			
r_3			
	k_1	k_2	k_3

A44. zīm.

Katrs no skaitļiem k_1; k_2; k_3; r_1; r_2; r_3 var pieņemt vērtības 0;1;2;3;4;5;6. Ievērosim, ka gan summa $k_1 + k_2 + k_3$, gan summa $r_1 + r_2 + r_3$ ir vienāda ar visu tabulā ierakstīto skaitļu summu; tāpēc $r_1 + r_2 + r_3 + k_1 + k_2 + k_3$ ir pāra skaitlis (divkāršota visu tabulā ierakstīto skaitļu summa). Ievērosim, ka $0+1+2+3+4+5+6=21$ – nepāra skaitlis. Tā kā summa $k_1+k_2+k_3+r_1+r_2+r_3$ satur sešus no saskaitāmajiem 0;1;2;3;4;5;6, tad iztrūkstošais saskaitāmais ir nepāra skaitlis. Tātad starp skaitļiem r_1; r_2; r_3; k_1; k_2; k_3 sastopami visi skaitļi 0;2;4;6 un divi no skaitļiem 1;3;5.

Ievērosim, ka summa 0 var rasties tikai kā $0+0+0$, bet summa 6 – tikai kā $2+2+2$. Nevar būt reizē rindiņa, kas sastāv tikai no nullēm, un kolonna, kas sastāv tikai no divniekiem (kas ierakstīts to kopējā rūtiņā?), vai otrādi – rindiņa, kas sastāv tikai no divniekiem, un kolonna, kas sastāv tikai no nullēm. Tāpēc varam pieņemt, ka ir kolonna, kas sastāv tikai no nullēm, un cita kolonna, kas sastāv tikai no divniekiem (otrs gadījums ir analoģisks). Lai visās rindiņās skaitļu summas būtu atšķirīgas, trešajā kolonnā visiem skaitļiem jābūt dažādiem; tātad tie ir 0;1;2, un šīs kolonnas skaitļu summa ir 3. Bet tad tā ir vienāda ar tās rindas skaitļu summu, kurā atrodas „apvilktais" vieninieks. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

3.3.B2. Vieglajos maisos var būt 20kg cukura. Tāda situācija rodas, ja, piemēram, 50 maisos ir pa 400g cukura, bet 50 maisos – pa 1600g cukura. Tad visi maisi, kas satur 400g cukura, ir vieglie, un tajos kopā ir $50\cdot 0{,}4\,\text{kg}=20\,\text{kg}$ cukura.

Samazinot šajā piemērā vieglajos maisos esošā cukura daudzumus un attiecīgi palielinot smagajos maisos esošā cukura daudzumus, redzam, ka vieglajos maisos var būt arī jebkurš (pozitīvs) cukura daudzums, kas mazāks par 20kg.

Tagad pierādīsim, ka vieglajos maisos nevar būt vairāk cukura kā 20kg.

Skaidrs, ka vieglo maisu nav vairāk kā 50 (pretējā gadījumā nebūtu tādu 50 maisu, kas ir smagāki par smagāko no vieglajiem). Apzīmēsim vieglo maisu skaitu ar x. Pieņemsim no pretējā, ka vieglajos maisos kopā ir vairāk par 20kg cukura. Tad smagākajā no vieglajiem maisiem (apzīmēsim to ar S) ir vismaz $\frac{20}{x}$ kg cukura. Katrā no 50 maisiem, kas smagāki par S, ir vairāk nekā $\frac{20}{x}\cdot 4=\frac{80}{x}$ kg cukura. Šajos 50 maisos kopā tāpēc ir vairāk nekā $50\cdot\frac{80}{x}$ kg cukura.

Tā kā $x\le 50$, tad šis daudzums nav mazāks par 80kg. Tā ir pretruna: mēs pieņēmām, ka vieglajos maisos ir vairāk nekā 20kg cukura, tātad kopā ir vairāk nekā 80 kg + 20 kg = 100 kg cukura, bet tā nevar būt.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un vieglajos maisos nevar būt vairāk par 20kg cukura.

3.3.B3. Atbilde: 4.

Risinājums. Jebkuri trīs no skaitļiem 1; 3; 7; 9 summā dod pirmskaitli: $1+3+7=11$, $1+3+9=13$, $1+7+9=17$, $3+7+9=19$.

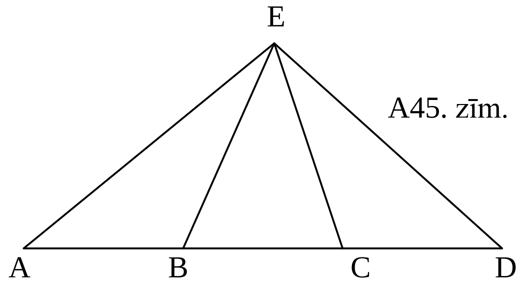
Pieņemsim, ka mums ir 5 dažādi naturāli skaitļi, un parādīsim, ka no tiem noteikti var izvēlēties tādus trīs skaitļus, kuru summa dalās ar 3. Tā kā šo trīs skaitļu summa noteikti nav mazāka par $1+2+3=6$, tad tā nav pirmskaitlis.

Apskatīsim minēto 5 skaitļu atlikumus, kādus tie dod, dalot ar 3. Katrs atlikums var būt vai nu 0, vai 1, vai 2. Ja sastopami visi trīs atlikumi, tad ņemam vienu skaitli ar atlikumu 0, vienu skaitli ar atlikumu 1 un vienu skaitli ar atlikumu 2. Atbilstošo skaitļu summa dalās ar 3, jo $0+1+2=3$ dalās ar 3.

Ja turpretī sastopami tikai divi dažādi atlikumi vai arī visi 5 atlikumi ir vienādi, tad var atrast 3 skaitļus ar vienādiem atlikumiem. Šo skaitļu summa dalās ar 3, jo gan $0+0+0=0$, gan $1+1+1=3$, gan $2+2+2=6$ dalās ar 3.

Skaidrs: ja dažādo naturālo skaitļu ir vairāk nekā 5, tad no tiem vispirms var izvēlēties piecus un tālāk no tiem – trīs, kuru summa dalās ar 3. Tātad 4 tiešām ir lielākā vērtība, kas apmierina uzdevuma prasības.

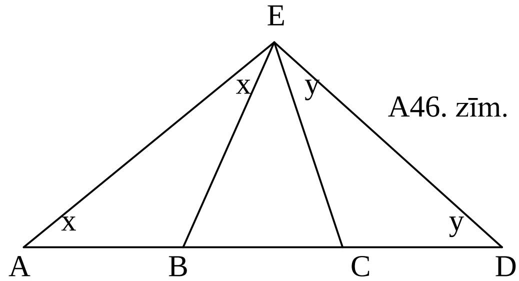
3.3.B4. Uzdevumā galvenās grūtības rada vēlēšanās noskaidrot, kuri divi no leņķiem katrā vienādsānu trijstūrī var būt vienādie.



A45. zīm.

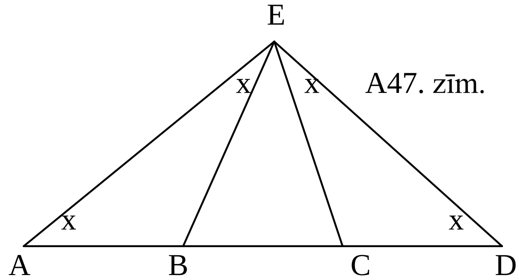
Ievērosim, ka vismaz viens no leņķiem $\angle EBC$ un $\angle ECB$ ir šaurs (jo ΔBEC nevar būt divi plati / taisni leņķi).

Pieņemsim, ka $\angle EBC$ ir šaurs (otru gadījumu analizē līdzīgi). Tad $\angle ABE$ ir plats; tāpēc ΔABE vienādi leņķi ir pie virsotnēm A un E. Apzīmēsim to lielumus ar x. Ja $\angle ACE$ būtu plats, tad ΔACE vienādi būtu leņķi pie virsotnēm A un E, bet tā nevar būt, jo $\angle EAC = \angle AEB < \angle AEC$. Tāpēc $\angle ACE$ ir šaurs; tad $\angle ECD$ ir plats un ΔECD vienādie leņķi ir pie virsotnēm E un D. Apzīmēsim to lielumu ar y (A46. zīm.).



A46. zīm.

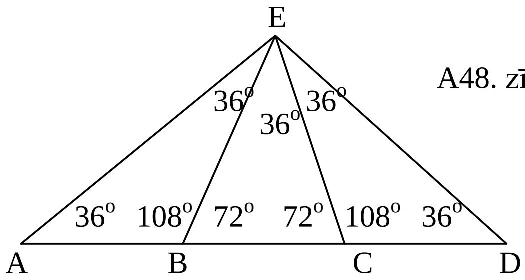
Acīmredzami, ka $\angle AED > \angle EAD$ un $\angle AED > \angle EDA$. Tāpēc vienādsānu trijstūrī AED vienādie leņķi ir pie virsotnēm A un D, t.i., x = y (A47. zīm.).



A47. zīm.

Tagad pakāpeniski iegūstam $\angle ECD = 180^{\circ} - 2x$ (no ΔECD), $\angle ECD = 180^{\circ} - (180^{\circ} - 2x) = 2x$. Tā kā $\angle ECA = 2x > x = \angle EAC$ un $\angle AEC > \angle EAC$, tad ΔACE vienādie leņķi ir $2x = \angle ACE = \angle AEC$. Tāpēc $\angle BEC = 2x - x = x$ un $\angle AED = 3x$. Tagad no ΔAED iekšējo leņķu summas iegūstam $x + 3x + x = 180^{\circ}$, $5x = 180^{\circ}$, $x = 36^{\circ}$. Tātad ΔAED leņķu lielumi ir 36°; 36°; 108°.

Vēl jāpārbauda, vai atrastā punktu sistēma apmierina uzdevuma nosacījumus, t.i., vai visi trijstūri ir vienādsānu. Par to viegli pārliecināties A48. zīm.



A48. zīm.

3.3.B5. Aplūkosim atlikumus, kādus ieguva, dalot doto **nepāra** skaitli n ar pāra skaitļiem 2; 4; 6; ... ; 2006. (Šo skaitļu skaits ir 1003.) Atlikumiem jābūt nepāra skaitļiem, un neviens no tiem nevar būt lielāks par 2006. Tātad iespējami nepāra atlikumi ir 1; 3; 5; ... ; 2005 (to skaits ir 1003). Tā kā visi iegūtie 1003 atlikumi ir dažādi, tad visām minētajām 1003 vērtībām jāparādās kā atlikumiem. Dalot ar 2, no tām iespējams tikai atlikums 1. Dalot ar 4, iespējami atlikumi 1 un 3; tā kā 1 jau ir „aizņemts”, tad, dalot ar 4, iegūst atlikumu 3. Līdzīgi, dalot ar 6, iegūst atlikumu 5; dalot ar 8, iegūst atlikumu 7; ... ; dalot ar 2006, iegūst atlikumu 2005.

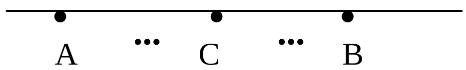
Pieņemsim, ka n izdalās bez atlikuma ar k un $k \le 1003$. Tad $n = k \cdot m_1$, m_1 – kaut kāds vesels skaitlis. Tā kā $k \le 1003$, tad $2k \le 2006$. No augstāk pierādītā seko, ka, dalot n ar 2k, iegūst atlikumu 2k-1. Tad $n = 2k \cdot m_2 + (2k-1)$. No vienādībām $n = k \cdot m_1$ un $n = 2k \cdot m_2 + (2k-1)$ pakāpeniski iegūstam

$$k \cdot m_1 = 2k \cdot m_2 + 2k - 1$$

$$k \cdot (m_1 - 2m_2) = 2k - 1k$$

Kreisā puse šajā vienādībā dalās ar k, bet labā – nedalās. Tātad iegūta pretruna, un mūsu izdarītais pieņēmums ir nepareizs.

3.3.B6. Pieņemsim, ka izveidojusies situācija, kurā maiņas vairs nav iespējams izdarīt. Tas nozīmē, ka visi blakus stāvošo bērnu pāri jau ir mainījušies vietām. Ja tomēr ir kādi bērni, kas vēl nav mainījušies vietām, tad tie nestāvēs blakus. Atradīsim divus šādus vistuvāk stāvošos bērnus (t.i., tādus, starp kuriem stāv vismazākais daudzums citu bērnu). Pieņemsim, ka tie ir A un B. Izvēlēsimies vienu no bērniem, kas stāv starp A un B, un apzīmēsim to ar C.



A49. zīm.

Varam pieņemt, ka A, C, B stāv virzienā no kreisās uz labo pusi (skat. A49. zīm.). Tā kā C un A ir tuvāk viens otram nekā C un B, tad C un A jau ir mainījušies; līdzīgi iegūstam, ka C un B ir jau mainījušies.

Tā kā A un B nav mainījušies, tad A arī sākumā stāvēja pa kreisi no B. Tā kā A un C ir mainījušies, tad A sākumā stāvēja pa labi no C. Tā kā B un C ir mainījušies, tad B sākumā stāvēja pa kreisi no C. Esam ieguvuši, ka sākumā

- C stāvēja pa kreisi no A
- A stāvēja pa kreisi no B
- B stāvēja pa kreisi no C.

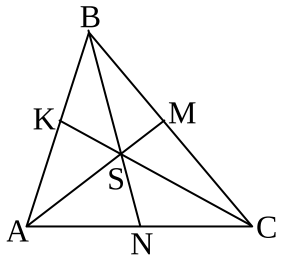
Tas vienlaicīgi nevar notikt. Tātad mūsu pieņēmums ir bijis nepareizs.

3.4. CETURTĀ NODARBĪBA

A grupa

3.4.A1. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tātad mēs pieņemam, ka katrā kolonnā ir mazāk par 10 pāra skaitļiem. Tad visā tabulā ir mazāk par $30 \cdot 10 = 300$ pāra skaitļiem, jo tabulā ir 30 kolonnas. Bet no uzdevumā dotā seko, ka tabulā ir vismaz $20 \cdot 15 = 300$ pāra skaitli (jo tajā ir 20 rindiņas un katrā no tām – vismaz 15 pāra skaitļi). Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.4.A2. Kā zināms, trijstūra mediānas krustojas vienā punktā. Apzīmēsim ΔABC mediānu krustpunktu ar S.



A50. zīm.

Ja X – patvaļīgs punkts, tad no trijstūra nevienādības seko, ka $AX + XM \geq AM$, $BX + XN \geq BN$ un $CX + XK \geq CK$, turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, kad X atrodas uz nogriežņa AM (resp. uz BN vai CK). Tātad

AX + BX + CX + MX + NX + KX = (AX + XM) +
+ (BX + XN) + (CX + XK) $\geq$ AM + BN + CK,

un vērtība AM + BN + CK tiek sasniegta tad un tikai tad, ja X vienlaicīgi pieder visiem nogriežņiem AM, BN, CK, resp., ja X ir ΔABC mediānu krustpunkts.

3.4.A3. Tā kā 10000 : 5 = 2000 un 10000 : 7 = 1428 atl. 4, tad no 1 līdz 10000 ieskaitot ir 2000 skaitļi, kas dalās ar 5, un 1428 skaitļi, kas dalās ar 7. Tā kā $5 \cdot 7 = 35$ un $10000 : 35 = 285$ atl. 25, tad 285 no šiem skaitļiem dalās gan ar 5, gan ar 7. Tāpēc neizsvītroti paliek 2000 + 1428 – 285 = 3143 skaitļi.

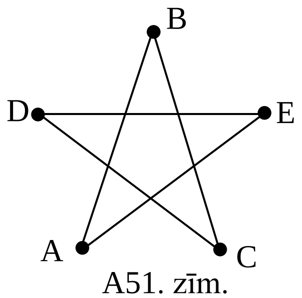
Lai atrastu, kurš skaitlis no neizsvītrotajiem atrodas 2006-ajā vietā, lietosim mēģinājumu un kļūdu metodi. Acīmredzot izsvītrotie skaitļi sadalās vairāk vai mazāk vienmērīgi. Tā kā $2006 : 3143 = 0{,}638...$, tad mūsu meklējamais skaitlis varētu būt apmēram $10000 \cdot 0{,}638 = 6380$. Atradīsim, cik neizsvītrotu skaitļu paliek robežās no 1 līdz 6380:

6380 : 5 = 1276;
6380 : 7 = 911 atl. 3;
6380 : 35 = 182 atl. 10,

tātad no 1 līdz 6380 ieskaitot paliek neizsvītroti 1276 + 911 – 182 = 2005 skaitļi. Tātad mums jāatrod nākošais neizsvītrotais skaitlis aiz 6380. Viegli pārbaudīt, ka 6381; 6382; 6383 tiks izsvītroti, bet 6384 – nē, jo dalās ar 7.

Atbilde: 3143 skaitļi; 6384.

3.4.A4. Tā kā pārbīdīšana notiek tikai pa diagonālēm, apskatīsim diagonāļu veidoto noslēgto maršrutu ABCDEA (A51.zīm.).



A51. zīm.

Pieņemsim, ka sākumā monētas m_1, m_2, m_3 novietotas attiecīgi virsotnēs A, D, B; tad to secība minētajā maršrutā, neņemot vērā tukšās vietas starp monētām, vienmēr paliks $<m_1; m_3; m_2>$ vai, līdzvērtīgi, $<m_3; m_2; m_1>$ resp. $<m_2; m_1; m_3>$. Ja vairāku pārbīžu rezultātā samainītos vietām m_1 un m_3, tad monētu secība minētajā maršrutā būtu kļuvusi par $<m_3; m_1; m_2>$. Kā redzam, neviena no šīm secībām nav starp tām, kuras mēs atzīmējām kā saglabājošās. Tāpēc uzdevumā minētā monētu pārkārtošana nav iespējama.

3.4.A5. Jā, var.

Vispirms sadalām 3 daļās ar vienādām summām skaitļus no 1 līdz 8 ieskaitot:

A: 4; 8

B: 5; 7

C: 1; 2; 3; 6

Atliek 2006 – 8 = 1998 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi (no 9 līdz 2006 ieskaitot). Tā kā 1998:6 = 333, tad tos var sadalīt 333 grupās, katrā no kurām ietilpst 6 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.

Ņemam jebkuru no šīm grupām un apzīmējam tajā ietilpstošos skaitļus ar n; n + 1; n + 2; n + 3; n + 4; n + 5. Pievienojam daļai A skaitļus n un n + 5, daļai B – skaitļus n + 1 un n + 4, daļai C – skaitļus n + 2 un n + 3. Tā rezultātā A, B, C ietilpstošo skaitļu summas visas palielinājušās par 2n + 5, tātad joprojām ir vienādas. Pēc tam, kad esam šādu operāciju veikuši ar visām 333 grupām, uzdevuma prasības ir izpildītas.

3.4.A6. Atbilde: skaitlis var beigties ar jebkuru ciparu no 1 līdz 9 ieskaitot.

Tiešām, piemērs

123456789123456789123456789123456789

parāda, ka skaitlis var beigties ar ciparu 9. Pārceļot pēdējo devītnieku uz skaitļa sākumu, iegūstam skaitli

912345678912345678912345678912345678,

kas beidzas ar 8 un arī apmierina uzdevuma prasības. Pakāpeniski šajā skaitlī pārceļot uz sākumu pēdējo astotnieku, pēdējo septītnieku, ..., pēdējo divnieku, iegūstam skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un beidzas ar 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1.

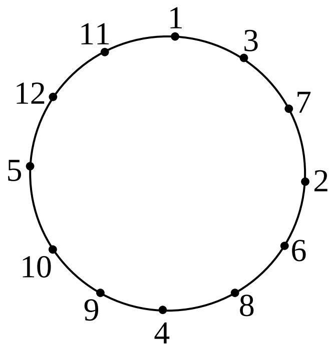
B grupa

3.4.B1. Olimpiādē pieņemtā punktu piešķiršanas sistēma ir līdzvērtīga sekojošai:

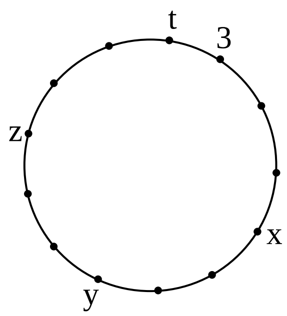
- par katru atrisinātu uzdevumu (vienalga, grūtu vai vieglu) piešķir 4 punktus;
- par katru vieglu uzdevumu (vienalga, atrisinātu vai neatrisinātu) atskaita 1 punktu.

Pēc šīs sistēmas Jānītis ir saņēmis $12 \cdot 4 = 48$ punktus, un viņam atskaitīti 48 – 18 = 30 punkti. Tātad vieglo uzdevumu olimpiādē bija 30.

3.4.B2. **a)** jā var. Skat., piem., A52. zīm.



A52. zīm.



A53. zīm.

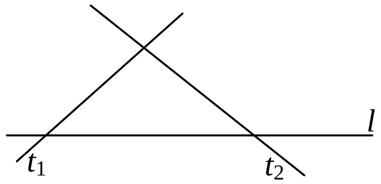
b) nē, nevar. Pieņemsim, ka izdevies to izdarīt. Kaut kur jābūt uzrakstītam skaitlim 3. Pakāpeniski iegūstam, ka ar 3 jādalās arī skaitļiem x; y; z; t (skat. A53. zīm.). Bet no 1 līdz 13 ieskaitot ir tikai 4 skaitļi, kas dalās ar 3. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.4.B3. **a)** acīmredzot, katras trīs taisnes veido trijstūri. Ja taisnes apzīmēsim ar a; b; c; d; e, tad trīs no tām var izvēlēties 10 veidos:

abc; abd; abe; acd; ace; ade;

bcd; bce; bde;

cde
Tātad pavisam būs 10 trijstūri.
b) pieņemsim, ka mums ir kāda 5 taišņu sistēma, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Pieņemsim vispirms, ka tajā ir 2 savstarpēji perpendikulāras taisnes l_1 un l_2. „Mazliet" pagriezīsim taisni l_2, citas taisnes nekustinot. Pagriešanas leņķi izvēlamies tik mazu, lai
1) neviens šaurs leņķis starp taisnēm nekļūst taisns vai plats,
2) ne griešanas procesā, ne rezultātā nekādas trīs taisnes nevienu brīdi neiet caur vienu punktu un nekļūst paralēlas vai perpendikulāras.
Atkārtojot šādas pagriešanas vairākkārt (ja nepieciešamas), „likvidējam" visus savstarpēji perpendikulāro taišņu pārus. rezultātā esam ieguvuši jaunu 5 taišņu sistēmu, kas joprojām apmierina visus uzdevuma nosacījumus, kurā nekādas trīs taisnes neveido taisnleņķa trijstūri un kurā šaurleņķu trijstūru ir tikpat, cik sākotnējā sistēmā; pārējie trijstūri tātad ir platleņķa.
Apzīmēsim šaurleņķa trijstūru skaitu ar x, bet platleņķa trijstūru skaitu ar y. No iepriekšējā zināms, ka x + y = 10.
Skaidrs, ka katrs šaurleņķu trijstūris pieskaras trim taisnēm ar diviem šauriem leņķiem, bet katrs platleņķa trijstūris šādi pieskaras tikai vienai taisnei. Tātad šādu pieskāršanos pavisam ir 3x + y.



A54. zīm.

Noskaidrosim, cik šādu pieskāršanos var būt vienai taisnei l. Pārējās četras taisnes attiecībā pret l noliektas vai nu pa labi (kā t_1 A54. zīm.), vai pa kreisi (kā t_2 A54. zīm.). Acīmredzot, l; t_1; t_2 veido trijstūri, kas pieskaras l ar diviem šauriem leņķiem, tad un tikai tad, ja viena no taisnēm t_1; t_2 attiecībā pret l noliekta pa kreisi, bet otra – pa labi.
Apskatām visas iespējas, kā attiecībā pret l var būt noliektas pārējās 4 taisnes:

pa kreisi	pa labi	meklējamo trijstūru skaits
0	4	$0 \cdot 4 = 0$
1	3	$1 \cdot 3 = 3$
2	2	$2 \cdot 2 = 4$
3	1	$3 \cdot 1 = 3$
4	0	$4 \cdot 0 = 0$

Redzam, ka nevienai no 5 taisnēm apskatāmajā veidā nepieskaras vairāk par 4 trijstūriem. Tāpēc šādu pieskāršanos nav vairāk par 20, un iegūstam $3x + y \le 20$
Ievietojot $y = 10 - x$, iegūstam $3x + (10 - x) \le 20$, $2x \le 10$ un $x \le 5$, ko arī vajadzēja pierādīt.
3.4.B4. Apzīmēsim ar p jebkuru pirmskaitli, ar kuru dalās n. Pieņemsim, ka, sadalot n pirmskaitļu reizinājumā, pirmskaitlis p parādās a reizes; tad, sadalot n^3 pirmskaitļu reizinājumā, pirmskaitlis p tur parādīsies 3a reizes.
Apzīmēsim ar d_1, d_2, d_3, d_4 tos skaitļa n dalītājus, par kuriem runā uzdevumā. Iedomāsimies uz brīdi, ka mēs protam pierādīt: **reizinājums $d_1d_2d_3d_4$ satur pirmskaitli p ne vairāk kā 3a reizes**. No tā sekotu, ka n^3 jebkuru pirmskaitli satur vismaz tikpat daudz reižu, cik to satur reizinājums $d_1d_2d_3d_4$; tātad n^3 dalās ar $d_1d_2d_3d_4$ un tātad $n^3 \ge d_1d_2d_3d_4$.
Atliek pierādīt izcelto apgalvojumu.
Tā kā d_1 ir n dalītājs, tad d_1 nevar saturēt pirmskaitli p vairāk nekā a reizes. Tas pats attiecas arī uz d_2; d_3; d_4. Turklāt vismaz viens no skaitļiem vispār nedalās ar p; pretējā

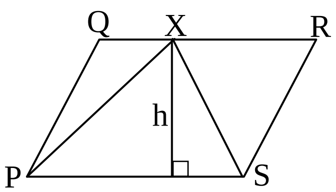
gadījumā summa $d_1 + d_2 + d_3 + d_4$ dalītos ar p un nevarētu būt pirmskaitlis. Tātad p satur ne vairāk kā 3 no dalītajiem d_1; d_2; d_3; d_4, un neviens to nesatur vairāk nekā a reizes. No tā seko izceltais apgalvojums.

3.4.B5. No kvadrātiem 8×8 varam salikt 2 taisnstūrus ar izmēriem 8×24; to laukumu starpība ir 0, tātad tie apmierina uzdevuma nosacījumus.

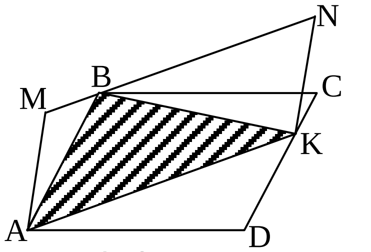
3.4.B6. Uzdevuma risinājums balstīts uz šādu vienkāršu lemmu.

Lemma. Ja PQRS – paralelograms un punkts X atrodas uz malas QR, tad ΔPXS laukums ir divas reizes mazāks par paralelograma PQRS laukumu.

Lemmas pierādījums: $L(PQRS) = PS\cdot h$ un $L(PXS) = \frac{1}{2}PS\cdot h$, tāpēc $L(PXS) = \frac{1}{2}L(PQRS)$.



A55. zīm.



A56. zīm.

Tagad atrisināsim doto uzdevumu. Saskaņā ar lemmu $L(ABK) = \frac{1}{2}L(ABCD)$ un $L(ABK) = \frac{1}{2}L(AMNK)$, tāpēc $\frac{1}{2}L(ABCD) = \frac{1}{2}L(AMNK)$, tātad L(ABCD) = L(AMNK).

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A grupa

3.5.A1. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Aplūkosim A57. zīm. rūtiņās ierakstītos skaitļus.

	e	f	i	j	k	...
a	b	c	d	x	y	

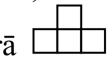
A57. zīm.

Saskaņā ar pieņēmumu jāizpildās sakarībām

$a + b + c + e > 0$

$a + b + c + f < 0$

No tām seko, ka $e > f$. Līdzīgi iegūstam, ka $e > f > i > j > k > ...$ un $a > b > c > d > x > y > ...$.

Tā kā visi ierakstītie skaitļi ir veseli, tad, virzoties uz labo pusi, nonāksim apgabalā, kurā abās apskatāmajās horizontālēs ir tikai negatīvi skaitļi. Bet šajā apgabalā figūrā  ierakstīto skaitļu summa nevar būt pozitīva. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un prasītā ierakstīšana nav iespējama.

3.5.A2. Uzzīmēsim tik lielu riņķi, lai tā iekšpusē atrastos visi novilkto 10 taišņu krustpunkti. Tad katram bezgalīgajam apgabalam ir daļa ārpus riņķa, bet visi galīgie apgabali atrodas riņķa iekšpusē (tur atrodas arī bezgalīgo apgabalu daļas). Tāpēc bezgalīgo apgabalu ir tikpat, cik ir plaknes daļu ārpus riņķa. Ārpus riņķa ir 20 stari (pa diviem uz katras taisnes), kas savā starpā nekrustojas; tātad ārpus riņķa ir 20 plaknes daļas. Tas arī ir bezgalīgo apgabalu skaits.

3.5.A3. Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar x un y. Tad

$xy = x + y$

$xy - x - y = 0$

$xy - x - y + 1 = 1$

$(x-1)(y-1) = 1$

Tā kā x un y – naturāli skaitļi, tad $x-1 \geq 0$ un $y-1 \geq 0$. Skaitli 1 var sadalīt divu nenegatīvu veselu skaitļu reizinājumā tikai vienā veidā: $1 = 1 \cdot 1$.

Tāpēc $x - 1 = 1$ un $y - 1 = 1$, no kurienes $x = 2$ un $y = 2$.

3.5.A4. Apzīmēsim apskatāmā skaitļa A pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar x, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli – ar y. Tad $A = 100 \cdot x + y$. Tā kā A dalās ar x, tad arī y dalās ar x. Varam apzīmēt $y = x \cdot n$, n – naturāls skaitlis; tā kā $y \neq x$ (jo skaitlī A visi cipari ir dažādi), tad $n > 1$. Tā kā $A = 100x + y$ dalās ar y, tad iegūstam, ka

$$\frac{A}{y} = \frac{100 \cdot x + y}{y} = \frac{100 \cdot x}{n \cdot x} + 1 = \frac{100}{n} + 1$$ – vesels skaitlis;

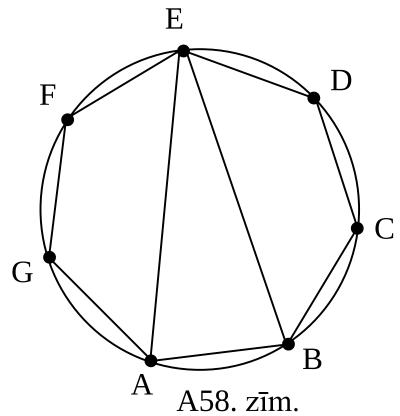
tātad 100 dalās ar n. Tā kā neviens no skaitļa A cipariem nav 0, tad $x > 10$; tāpēc $n < 10$ (ja būtu $n \geq 10$, tad $y = x \cdot n > 100$ – pretruna ar to, ka y – divciparu skaitlis). No trim izceltajiem apgalvojumiem seko, ka $n = 2$, $n = 4$ vai $n = 5$.

- Ja $n = 2$, tad $y = 2x$ un $A = 102x = 17 \cdot 6 \cdot x$ dalās ar 17.
- Ja $n = 4$, tad $y = 4x$ un $A = 104x = 13 \cdot 8 \cdot x$ dalās ar 13.
- Ja $n = 5$, tad $y = 5x$ un $A = 105x = 7 \cdot 15 \cdot x$.

3.5.A5. Apskatīsim risinājumu, kas pārbauda visus iespējamos sadalījumus. Cits ceļš aplūkots 7.5.B5. uzdevuma atrisinājumā.

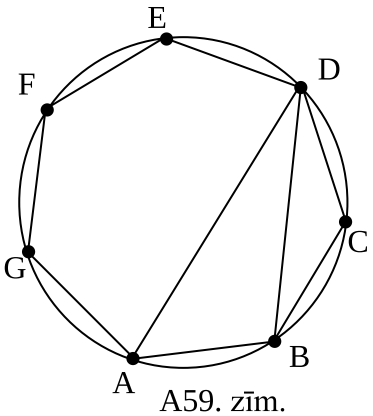
Apzīmēsim regulāro septiņstūri ar ABCDEFG. Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kuram trijstūrim pieder mala AB.

I. Mala AB ietilpst trijstūrī ABE (skat. A58.zīm.). Tad pats trijstūris ABE ir vienādsānu (AE = BE). Neatkarīgi no tā, kura diagonāle novilkta 4-stūrī AEFG resp. BEDC, viens no radušamies trijstūriem ir vienādsānu.

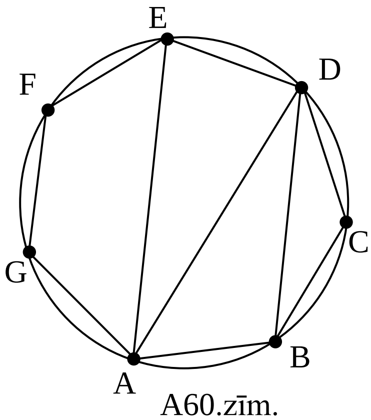


A58. zīm.

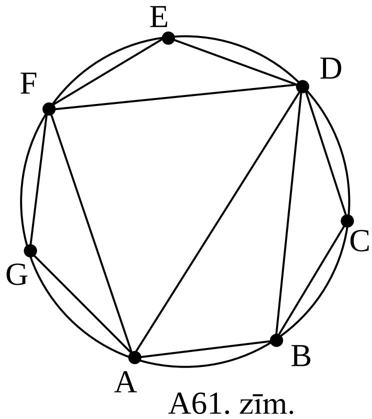
II. Mala AB ietilpst trijstūrī ABD (skat. A59. zīm.) Tad ΔBCD ir vienādsānu (CB = CD). Domājam, kā sadalīts piecstūris ADEFG. Šķirojam gadījumus atkarībā no tā, kurā trijstūrī ietilpst AD.



A59. zīm.

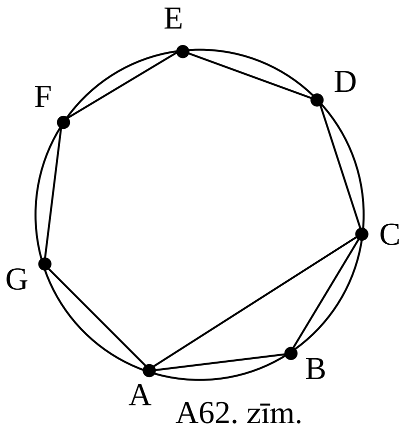


A60.zīm.



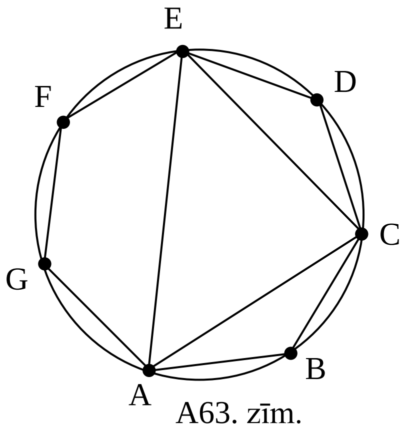
A61. zīm.

II$_1$. AD ietilpst trijstūrī AED; tas ir vienādsānu (AE = AD, skat. A60. zīm.). Lai kuru diagonāli novilktu četrstūrī AGFE, viens no radušamies trijstūriem būs vienādsānu.
II$_2$. AD ietilpst trijstūrī AFD (skat. A61. zīm.). Tad visi trijstūri AFD, AGF, DEF ir vienādsānu (AF = FD, AG = GF, FE = ED).
II$_3$. AD ietilpst trijstūrī AGD; spriežam analogi II$_1$ apakšgadījumam.
Gadījumu, kad mala AB ietilpst trijstūrī ABF, apskata analogi nupat aplūkotajam.
III. Mala AB ietilpst trijstūrī ABC (skat. A62. zīm.). Ievērosim, ka ΔABC ir vienādsānu (AB = BC). Tālāk šķirojam apakšgadījumus.



A62. zīm.

III$_1$. AC ietilpst trijstūrī ACD. Izveidojas A59. zīm. attēlotajai līdzīga aina, kas jau izanalizēta II gadījumā.
III$_2$. AC ietilpst trijstūrī AEC (A63. zīm.). Tad ΔEDC ir vienādsānu (ED = DC). Lai kuru diagonāli novilktu četrstūrī AEFG, viens no radušamies trijstūriem būs vienādsānu.
Apakšgadījumi, kad AC ietilpst trijstūrī AFC resp. AGC, līdzīgi apskatītajiem apakšgadījumiem III$_2$ resp. III$_1$.



A63. zīm.

IV. Gadījums, kad mala AB ietilpst trijstūrī ABG, līdzīgs apskatītajam III gadījumam.

3.5.A6. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām. Ir 2 iespējas:

1) svari atrodas līdzsvarā. Tādu stāvokli uz svaru kausiem izsaka tikai vienādība $1 + 4 = 2 + 3$. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Salīdzinot tās savā starpā 4.svēršanā, noskaidrojam, kura no monētām ir 3g, kura – 4g monēta. Tad monēta, kas atradās uz viena kausa ar 4g smago monētu, sver 1g, bet tā monēta, kas atradās uz viena svaru kausa ar 3g smago monētu, attiecīgi sver 2g;
2) svari nav līdzsvarā. Ir divas iespējas: a) $1 + 2 < 3 + 4$ un b) $1 + 3 < 2 + 4$. Otrajā svēršanā salīdzina abas monētas no smagākā pāra. Smagākā no tām sver 4g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas. Vieglākā no tām ir 1g monēta. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas vēl „neidentificētās” monētas: vieglākā no tām ir 2g smagā monēta, bet smagākā, attiecīgi, ir 3g smagā monēta.

b grupa

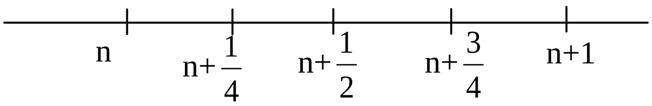
3.5.B1. Ja a ir vesels skaitlis, tad arī 4a ir vesels skaitlis. Tad

$$[4a] = 4a,\ [a] = \left[a + \frac{1}{4}\right] = \left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[a + \frac{3}{4}\right] = a$$

un vienādība ir pareiza, jo $4a = a + a + a + a$.

Ja a nav vesels skaitlis, tad a atrodas starp diviem viens otram sekojošiem veseliem skaitļiem n un n + 1, t.i., $n < a < n + 1$.

Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kurai intervāla $[n; n+1)$ ceturtdaļai pieder a (A64. zīm.):



A64. zīm.

- Skaitlis a pieder intervāla pirmajai ceturtdaļai, t.i., $n < a < n + \frac{1}{4}$. Tad $4n < 4a < 4n + 1$, $n + \frac{1}{4} < a + \frac{1}{4} < n + \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2} < n + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{4} \Rightarrow$
  $\Rightarrow n + \frac{3}{4} < a + \frac{3}{4} < n + 1$.
  Tāpēc $[4a]=4n$, $[a]=n$, $\left[a + \frac{1}{4}\right] = n$, $\left[a + \frac{1}{2}\right] = n$, $\left[a + \frac{3}{4}\right] = n$ un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n = n + n + n + n$.
- Skaitlis a pieder intervāla otrajai ceturtdaļai, t.i., $n + \frac{1}{4} \le a < n + \frac{1}{2}$.
  Tad $4n + 1 \le 4a < 4n + 2$, $n + \frac{1}{2} \le a + \frac{1}{4} < n + \frac{3}{4}$, $n + \frac{3}{4} \le a + \frac{1}{2} < n + 1$, $n + 1 \le a + \frac{3}{4} < n + 1\frac{1}{4}$. Tāpēc $[4a] = 4n + 1$, $[a] = \left[a + \frac{1}{4}\right] = \left[a + \frac{1}{2}\right] = n$ un $\left[a + \frac{3}{4}\right] = n + 1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n + 1 = n + n + n + (n + 1)$.
- Skaitlis a pieder intervāla trešajai ceturtdaļai, t.i., $n + \frac{1}{2} \le a < n + \frac{3}{4}$. Tad

$4n+2 \le 4a < 4n+3$, $n+\frac{3}{4} \le a+\frac{1}{4} < n+1$, $n+1 \le a+\frac{1}{2} < n+1\frac{1}{4}$,

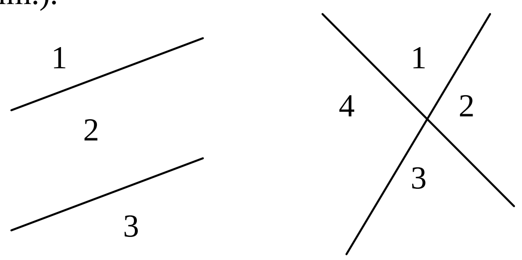
$n+1\frac{1}{4} \le a+\frac{3}{4} < n+1\frac{1}{2}$. Tāpēc [4a] = 4n + 2, $[a]=\left[a+\frac{1}{4}\right]=n$ un $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[a+\frac{3}{4}\right]=n+1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka 4n + 2 = n + n + (n + 1) + (n + 1).

- Skaitlis a pieder intervāla ceturtajai ceturtdaļai, t.i., $n+\frac{3}{4} \le a < n+1$. Tad

  $4n+3 \le 4a < 4n+4$, $n+1 \le a+\frac{1}{4} < n+1\frac{1}{4}$, $n+1\frac{1}{4} \le a+\frac{1}{2} < n+1\frac{1}{2}$,

  $n+1\frac{1}{2} \le a+\frac{3}{4} < n+1\frac{3}{4}$. Tāpēc [4a] = 4n + 3, [a] = n un $\left[a+\frac{1}{4}\right]=\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[a+\frac{3}{4}\right]=n+1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka 4n + 3 = n + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1).

3.5.B2. Acīmredzot, viena taisne sadala plakni 2 apgabalos, bet divas taisnes – ne vairāk kā 4 apgabalos (skat. A65.zīm.).



A65. zīm.

Novelkot trešo taisni, uz tās rodas augstākais divi krustpunkti ar jau novilktajām. Šie jaunie krustpunkti sadala trešo taisni augstākais 3 daļās. Katra jaunās taisnes daļa sadala vienu no jau esošajiem apgabaliem divos, tāpēc apgabalu skaits pieaug par ne vairāk kā 3. Tāpēc triju taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 4 + 3 = 7 apgabali.

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam:
četru taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 7 + 4 = 11 apgabali
piecu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 11 + 5 = 16 apgabali
sešu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 16 + 6 = 22 apgabali
septiņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 22 + 7 = 29 apgabali
astoņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 29 + 8 = 37 apgabali
deviņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 37 + 9 = 46 apgabali
desmit taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 46 + 10 = 56 apgabali.
Skaidrs, ka 56 apgabali radīsies tad, ja katras divas taisnes krustosies un visi krustpunkti būs dažādi. Lasītājs var patstāvīgi mēģināt pierādīt: ja n taisnēm pavisam ir x krustpunkti, tad radušos plaknes apgabalu skaits ir n + x + 1.

3.5.B3. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka vai nu ab = a + b un cd = c + d, vai arī ab = c + d un cd = a + b. No 7.5.A2. uzdevuma risinājuma seko, ka pirmajā gadījumā a = b = 2 un c = d = 2; tas ir pretrunā ar doto, ka a, b, c, d – dažādi skaitļi. Tātad ab = c + d un cd = a + b.

No 7.5.A2. uzdevuma risinājuma izriet arī: ja $x \ge 2$ un $y \ge 2$ - naturāli skaitļi, tad $xy \ge x+y$ (tiešām, $xy-(x+y)=(x-1)(y-1)-1 \ge 0$). Tāpēc, ja mēs pieņemtu, ka visi

skaitļi a, b, c, d ir vismaz 2, tad būtu $ab \ge a + b = cd \ge c + d = ab$. Skaidrs, ka abās vietās „$\ge$” zīmes vietā jābūt „=”, un tāpēc ab = a + b, no kurienes seko a = b = 2 (kā 7.5.A2. uzdevumā); tā ir pretruna. Tātad viens no skaitļiem a; b; c; d ir 1; varam pieņemt, ka a = 1. Iegūstam b = c + d un cd = b + 1. Tāpēc cd = c + d + 1 un (c-1)(d-1)=2. Tā kā c un d – naturāli skaitļi, tad vai nu c – 1 = 1 un d – 1 = 2, vai arī c – 1 = 2 un d-1=1. Tāpēc vai nu c = 2; d = 3, vai c = 3; d = 2. Abos gadījumos iznāk b = c + d = 5.
Līdzīgi apskata gadījumus, kad vērtība „1” ir kādam no skaitļiem b; c; d.
Tātad viens no komplektiem {a; b} un {c; d} ir {2; 3}, bet otrs – {1; 5}.

3.5.B4. Nē, tādu skaitļu nav.
Pieņemsim no pretējā, ka tādi skaitļi eksistē. No LKD(x;y) = 104 seko, ka gan x, gan y dalās ar 104; tā kā $104 = 4 \cdot 26$, tad gan x, gan y dalās ar 4. Līdzīgi no LKD(x;z) = 108 seko, ka gan x, gan z dalās ar 4. Tātad y un z abi dalās ar 4. Bet uzdevumā dots, ka $LKD(y, z) = 106 = 2 \cdot 53$. Tā ir pretruna, jo LKD(y,z) jādalās ar 4, ja gan y, gan z dalās ar 4.

3.5.B5. Skaidrs, ka neviens no trijstūriem nesatur trīs 25-stūra malas. Tātad katrs trijstūris satur nevienu, vienu vai divas 25-stūra malas. Tā kā šādu malu ir 25, bet trijstūru ir 23, tad ir vismaz 2 trijstūri, kas katrs satur divas 25-stūra malas. Tie abi ir vienādsānu. Ja ir vēl kāds šāds trijstūris, viss kārtībā. Pieņemsim, ka ir tikai divi trijstūri, kas katrs satur divas 25-stūra malas. Tad katrs no pārējiem trijstūriem satur tieši vienu 25-stūra malu, bet divas šī „pārējā” trijstūra malas ir 25-stūra diagonāles.
Apskatīsim abus tos trijstūrus, kas satur pa divām 25-stūra malām; sauksim tos par bāzes trijstūriem. Pārvietosimies no viena bāzes trijstūra uz otru, ar katru gājienu pārejot no iepriekšējā trijstūra uz tādu jaunu, kuram ar iepriekšējo ir kopēja mala (tā ir 25-stūra diagonāle). Saskaņā ar pieņēmumu, ka citu trijstūru, kas satur divas 25-stūra malas, bez bāzes trijstūriem nav, katrs gājiens noteikts viennozīmīgi. Pēc pirmā gājiena vienā pusē no trijstūra, kurā atrodamies, ir divas 25-stūra malas (tās, kas ietilpst pirmajā bāzes trijstūrī); ar katru gājienu šajā pusē esošo malu skaits aug par 1, ar priekšpēdējo gājienu kļūstot 23 (ar pēdējo mēs nonāksim otrā bāzes trijstūrī). Tāpēc būs tāds brīdis, kad šis skaits būs 12. Šai brīdī mēs atrodamies trijstūrī T, kam viena mala ir 25-stūra mala, bet 25-stūra pārējās 24 malas atrodas pa 12 uz katru pusi no trijstūra T. Tāpēc trijstūra T abas pārējās malas (tās, kas nav 25-stūra mala) ir vienādas, un T ir vienādsānu trijstūris.

3.5.B6. Sauksim to monētu, kas nav ne 1g, ne 4g smaga, par A, bet pārējās – par B; C; D. Ar pirmo svēršanu salīdzinām B un C. Varam pieņemt, ka B > C.
Otrajā svēršanā uz viena svaru kausa novietojam A un D, bet uz otra B un C. Šķirojam trīs gadījumus.
1) A + D = B + C. Tas var būt tikai tad, ja A un D masas ir 1g un 4g, bet B un C masas ir 2g un 3g, vai otrādi: B un C masas – 1g un 4g, bet A un D masas – 2g un 3g. Tā kā A nesver ne 1g, ne 4g, tad B un C ir masas 1g un 4g; tā kā B>C, tad B sver 4g, bet C sver 1g. Ar trešo svēršanu noskaidrojam, kura no monētām A un D ir smagāka; tā sver 3g, bet otra – 2g.
2) A + D > B + C. Viegli pārbaudīt, ka vai nu A, vai D jābūt 4g smagai. Tā kā A nesver 4g, tad D sver 4g. Nevar būt, ka A sver 1g; tāpēc 1g sver vai nu B, vai C. Tā kā B > C, tad C sver 1g. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un B; smagākā no tām sver 3g, vieglākā – 2g.
3) A + D < B + C. Viegli pārbaudīt, ka vai nu B, vai C jābūt 4g smagai. Tā kā B>C, tad B sver 4g. Nevar būt, ka C sver 1g; tāpēc vai nu A, vai D sver 1g. Tā kā A nesver 1g, tad D sver 1g. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un C; smagākā no tām sver 3g, bet vieglākā sver 2g.

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

A grupa

3.6.A1. Abos apskatāmajos gados ir 365 dienas. Ievērojam, ka $365 = 52 \cdot 7 + 1$. Katrās 7 pēc kārtas ņemtās dienās ir viena pirmdiena, viena otrdiena, ..., viena svētdiena, tātad 364 pēc kārtas ņemtās dienās visu nedēļas dienu ir vienādi daudzumi. Tātad pirmā apskatāmā gada pēdējā diena ir sestdiena. Tāpēc otrais apskatāmais gads sākas un arī beidzas ar svētdienu, un svētdienu tajā ir visvairāk.

3.6.A2. Apzīmēsim apskatāmos skaitļus ar

$$0 = x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_{10} \le x_{11} = 1.$$

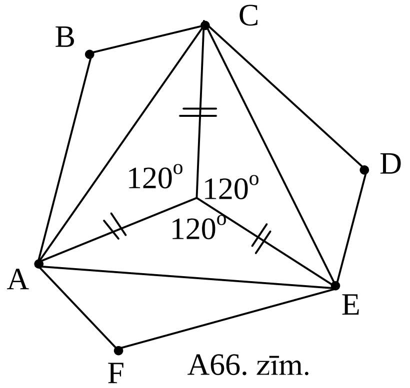
Apzīmēsim to vidējo aritmētisko lielumu ar a:

tātad $a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{11}}{11}$. Šķirosim divus gadījumus:

1) $a \le \frac{1}{2}$. Vienā daļā iekļaujam $x_1=0$, otrā daļā – visus citus skaitļus. Tad abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi ir 0 un $\frac{11a}{10}$, un to starpība ir $\frac{11}{10}a \le \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$.

2) $a \ge \frac{1}{2}$. Vienā daļā iekļaujam $x_{11}=1$, otrā daļā – visus citus skaitļus. Tad abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi ir 1 un $\frac{11a-1}{10}$, un to starpība ir $1 - \frac{11a-1}{10} = \frac{11(1-a)}{10} \le \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$.

3.6.A3. Atbilde: jā, eksistē. Skat., piem., A66. zīm., kur ΔACE ir regulārs, bet ΔABC, ΔCDE un ΔEFA ir savā starpā vienādi dažādmalu trijstūri. Uzdevumā minēto pagriešanu var izdarīt ap ΔABC centru O par 120^o.



A66. zīm.

3.6.A4. Mazākie skaitļi, kurus var iegūt no 10, ir 13; 15; 16; 18; 19; 20; ... . Visus nākošos skaitļus no 10 var iegūt pēc sekojošas shēmas:

$18 \to 21 \to 24 \to 27 \to \ldots$

$19 \to 22 \to 25 \to 28 \to \ldots$

$20 \to 23 \to 26 \to 29 \to \ldots$

Viegli pārbaudīt, ka 13 un 16 nevar iegūt no 9, bet 15 nevar iegūt no 8. Tātad mazākā uzdevumā sasniedzamā 10 skaitļu kopējā vērtība varētu būt 18. To tiešām var sasniegt ar 33 gājieniem (sekojošā shēmā katram skaitlim no 1 līdz 10 uzrādīts „īsākais ceļš" līdz 18):

$1 \to 6 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18$

$2 \to 7 \to 12 \to 15 \to 18$

$3 \to 8 \to 13 \to 18$

$4 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18$

$5 \to 10 \to 15 \to 18$

$6 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18$

$7 \to 12 \to 15 \to 18$

$8 \to 13 \to 18$

$9 \to 12 \to 15 \to 18$

$10 \to 15 \to 18$

Katram skaitam izmantots maksimāli iespējamais gājienu „+5” skaits, ar kuru vispār var nokļūt līdz 18.
Tātad mazākais gājienu skaits, ar ko var visus skaitļus pārveidot par 18, ir 33.
Tomēr mēs vēl nevaram būt pārliecināti, ka uzdevuma atbilde ir „33 gājieni”. Kā redzams no augstāk minētā, dažreiz lielākus skaitļus var sasniegt ar mazāku gājienu skaitu nekā mazākus. Varbūt kādu no kopīgām vērtībām 19; 20; 21; ... var sasniegt ar mazāk nekā 33 gājieniem?
Pieņemsim, ka a≥21. Tad a-1>15, a-2>15, ..., a-5>15. Tāpēc, lai sasniegtu vērtību a no 1; 2; 3; 4; 5, vajag vismaz 4 gājienus. Līdzīgi, lai sasniegtu vērtību a no 6; 7; 8; 8; 10, vajag vismaz 3 gājienus; tātad pavisam vajag vismaz 4·5+3·5=35 gājienus.
Tā kā 35>33, mums jāpārbauda vēl tikai skaitļu 19 un 20 sasniegšanas iespējas.
Lai sasniegtu 19, īsākās gājienu sērijas ir šādas:

1→6→11→16→19
2→7→10→13→16→19
3→8→13→16→19
4→9→14→19
5→10→13→16→19
6→11→16→19
7→10→13→16
8→13→16→19
9→14→19
10→13→16→19.

Kopā izmantoti 34 gājieni.
Lai sasniegtu 20, īsākās gājienu sērijas ir šādas:

1→6→11→14→17→20
2→7→12→17→20
3→8→11→14→17→20
4→9→14→17→20
5→10→15→20
6→11→14→17→20
7→12→17→20
8→11→14→17→20
9→14→17→20
10→15→20

Kopā izmantoti 37 gājieni. Tātad uzdevuma atbilde ir „ar 33 gājieniem”.

3.6.A5. Atbilde: nē, nevar.
Risinājums. No 9 skolniekiem pavisam var izveidot 36 pārus, ja skolnieku kārtība pārī nav svarīga. (Attēlosim skolniekus ar punktiem un katrus divus punktus savienosim ar līnijām.

No katra punkta iziet 8 līniju gali. Tātad līniju galu ir $9 \cdot 8 = 72$. Tā kā katrai līnijai ir 2 gali, tad līniju ir 72:2 = 36.) Katrā komisijā ir 3 skolēnu pāri, tāpēc pavisam 13 komisijās būtu $13 \cdot 3 = 39$ pāri. Tā kā 39 > 36, tad kāds pāris noteikti atkārtotos.

3.6.A6. Apzīmēsim 8g un 9g smago atsvaru daudzumus ar x resp. y. Tad 8x + 9y = 1728. Ievērosim, ka 1728 dalās ar 8, tāpēc 9y = 1728 - 8x dalās ar 8. No tā seko, ka y dalās ar 8. Tā kā 1728 dalās arī ar 9, līdzīgi iegūstam, ka x dalās ar 9. Sadalām 8 gramus smagos atsvarus grupās pa 9 un 9 gramus smagos atsvarus – grupās pa 8. Tad katras grupas svars ir 72g. Tā kā 1728:72 = 24, uzdevuma prasības ir izpildītas.

B grupa

3.6.B1. Atbilde: jā, eksistē.

Risinājums. Ja a = 4n, b = 4n - 1 un c = 2n - 1, kur n- naturāls skaitlis, tad

$a^2 - 1 = 16n^2 - 1 = (4n+1)(4n-1) = (4n+1) \cdot b$,

$b^2 - 1 = 16n^2 - 8n + 1 - 1 = 16n^2 - 8n = 8n(2n-1) = 8n \cdot c$,

$c^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = (n-1) \cdot 4n = (n-1) \cdot a$. Ņemot, piemēram, n = 1000, iegūstam vajadzīgo.

3.6.B2. Jā, var. Skaitļu 0 un 1 vidējā aritmētiskā vērtība ir $\frac{1}{2}$. Pārējo 9 skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība v ir starp 0 un 1, jo visi skaitļi ir šajās robežās. Tāpēc tā atšķiras no $\frac{1}{2}$ ne vairāk kā par $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{2} < \frac{11}{20}$.

7.6.B3. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Šādam 2006-stūrim leņķu summa nevar būt lielāka par $2006 \cdot 179^\circ = 359074^\circ$. No otras puses, tā leņķu summa ir $180^\circ \cdot (2006-2) = 180^\circ \cdot 2004 = 360720^\circ$. Tā kā 359074<360720, tad tāds daudzstūris nevar eksistēt.

3.6.B4. Atbilde: ar 11 gājieniem.

Risinājums. Vispirms parādīsim, kā ar 11 gājieniem mērķi var sasniegt.

Pirmajā gājienā apēdam pa 1 konfektei no visām kaudzītēm, kurās konfekšu ir nepāra daudzums. Tad visās kaudzītēs paliek pāra skaits konfekšu.

Otrajā gājienā apēdam pa 2 konfektēm no visām kaudzītēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 4. Tad pēc otrā gājiena konfekšu skaits visās kaudzītēs dalās ar 4.

Līdzīgi turpinot, trešajā gājienā ēdīsim pa 4 konfektēm no visām kaudzītēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 8, utt. Tad pēc 11. gājiena konfekšu skaits visās kaudzītēs dalīsies ar 2^{11}=2048. Tā kā 2048>2006, tad šis skaits var būt tikai 0.

Tagad parādīsim, ka ar 10 gājieniem nepietiek.

Sākumā visās kastēs ir atšķirīgi konfekšu daudzumi. Viena gājiena rezultātā dažādo konfekšu daudzumu skaits var samazināties ne vairāk kā 2 reizes. Tiešām, ja pirms gājiena izdarīšanas bija y dažādi konfekšu daudzumi, pēc tā izdarīšanas – x dažādi konfekšu daudzumi un y>2x, tad eksistē trīs dažādi konfekšu daudzumi (no y daudzumiem), kas gājiena rezultātā visi kļuvuši par vienu un to pašu no x daudzumiem; skaidrs, ka tas nav iespējams.

Tātad pēc 10 gājieniem būs vismaz $n = \frac{2006}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{10\ \text{reizes}}}$ dažādi konfekšu daudzumi. Tā kā $2006 > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10\ \text{reizes}}$, tad n>1, tātad n≥2. Tātad visi konfekšu daudzumi kaudzēs nav vienādi, tātad, starp citu, tie nevar visi būt 0.

3.6.B5. Tādas 12 komisijas izveidot var. Ja skolniekus apzīmēsim ar A, B, C, D, E, F, G, H, I, tad varam izveidot komisijas ABC, DEF, GHI, ADG, BEH, CFI, AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG..

3.6.B6. Atbilde: 81 skaitli.

Risinājums. Vispirms parādīsim, ka vairāk par 81 skaitli izvēlēties nevar. Pieņemsim pretējo. Tad, tā kā 81>9·9, būtu jābūt vismaz 10 skaitļiem, kam ir viens un tas pats pirmais cipars (pirmajam ciparam ir tikai 9 dažādas vērtības). No šiem 10 skaitļiem atrastos divi, kam ir viens un tas pats otrais cipars (jo arī otrajam ciparam ir tikai 9 dažādas vērtības). Minētie skaitļi atšķiras ne vairāk kā vienā (trešajā) šķirā. Iegūta pretruna.

Tagad parādīsim, ka 81 skaitli saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izvēlēties var. Uzrakstām vispirms visus 81 dažādos divciparu skaitļus, kas izveidojami no cipariem 1; 2; 3; ...; 9. Katram šādam skaitlim $\overline{ab}$ galā pierakstām tādu ciparu c, $1 \le c \le 9$, ka a + b + c dalās ar 9.

Skaidrs, ka tāds cipars c noteikti eksistē: ja a + b dod atlikumu r, dalot ar 9, tad jāņem c = 9-r. Pierādīsim, ka iegūtajā 81 trīsciparu skaitļa sistēmā katri divi skaitļi atšķiras vismaz divās šķirās.

Apskatām divus skaitļus $\overline{a_1b_1c_1}$ un $\overline{a_2b_2c_2}$. Ja $\overline{a_1b_1}$ un $\overline{a_2b_2}$ atšķiras gan pirmajā, gan otrajā šķirā, viss kārtībā. Ja vai nu $a_1 = a_2$, vai $b_1 = b_2$ (var izpildīties tikai viena no šīm vienādībām; pieņemsim, ka $a_1 = a_2$ un $b_1 \ne b_2$, otrs gadījums ir analoģisks) un ja papildus vēl būtu $c_1 = c_2$, tad no tā, ka $a_1 + b_1 + c_1$ dalās ar 9 un $a_2 + b_2 + c_2$ dalās ar 9, sekotu, ka arī starpība $(a_1 + b_1 + c_1) - (a_2 + b_2 + c_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = b_1 - b_2$ dalās ar 9.

Bet b_1 un b_2 abi ir no kopas {1; 2; 3; ...; 9}, tāpēc to starpība var dalīties ar 9 vienīgi tad, ja $b_1 = b_2$. Bet mēs jau zinām, ka $b_1 \ne b_2$. Iegūta pretruna. Tātad pieņēmums, ka $c_1 = c_2$, ir nepareizs.

4. LATVIJAS 19. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

4.5. PIEKTĀ KLASE

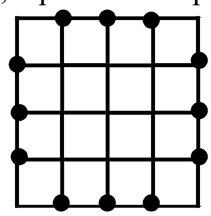
4.5.1. Ciparu virknēs no 000 līdz 999 pāra un nepāra ciparu ir vienāds daudzums („simetrijas pēc”). Tā kā 000 vispār nav jāapskata un nulles skaitļa priekšā netiek rakstītas, tad starp „īstajiem” cipariem nepāra ciparu ir vairāk nekā par 100 vairāk nekā pāra ciparu. Šo faktu negroza arī skaitlis 1000, kurā pāra ciparu ir par 2 vairāk nekā nepāra ciparu.

4.5.2. Sākotnējam skaitlim x pieskaitīja 321, tātad 3x=321 un x=107 . Pārbaude (obligāta!) 107x4=428 parāda, ka šī atbilde der.

4.5.3. Vārdā KRIZANTĒMA ir pavisam 10 burti, no tiem 9 dažādi. Apzīmēsim skaitlī iztrūkstošo ciparu ar X. Tad **K+R+I+Z+A+N+T+Ē+M+X = 0+1+...+9=45**.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem A ir pāra cipars un **K+R+I+Z+A+N+T+Ē+M+A dalās ar 9**. No abiem izceltajiem faktiem seko, ka X-A dalās ar 9. Tā kā X-A≠0, tad |X-A|≥9, un |X-A|=9 iespējams tikai tad, ja X un A ir 0 un 9. Tā kā A - pāra cipars, tad A=0.

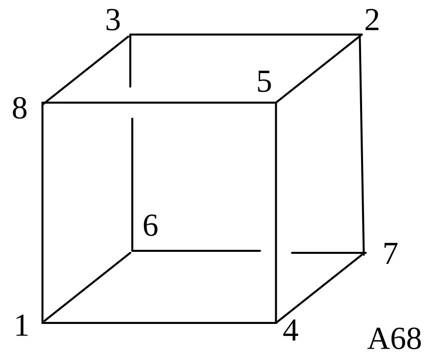
4.5.4. Režģa līniju kopgarums ir 40, tāpēc katrs tā posms jākrāso tieši vienu reizi.



A67. zīm.

Apskatām A67. zīm. izceltos punktus; to ir 12, un no katra no tiem iziet 3 krāsojami nogriežņi. Rūtiņas kontūrs, kas satur izcelto punktu, vai kāsītis, kura viduspunkts ir šajā punktā, satur divus no tiem; tāpēc katrā izceltajā punktā jābeidzas vienam kāsītim. Tikai 4 no kāsīšiem (stūros) var beigties divos izceltos punktos katrs; tāpēc vajag vismaz 4+(12-4·2)=8 kāsīšus. (Lasītājs var viegli pārbaudīt, ka ar 8 kāsīšiem var iztikt, lai gan uzdevums to neprasa.)

4.5.5. **a)** skat. A68. zīm.



A68.zīm.

b) apzīmēsim vienas skaldnes skaitļu summu ar S. Tad 6S = 3 (1+2+3+4+5+6+7+8) (katra virsotne pieder 3 skaldnēm), tāpēc S = 18.

4.6. SESTĀ KLASE

4.6.1. Apzīmēsim 2×2 kvadrātu skaitu ar x, bet 3×3 kvadrātu skaitu ar y. Tad 4x + 9y = 49, $x \geq 0$, $y \geq 0$, x un y – veseli skaitļi. Pārbaudot x = 0; 1; ...; 12 (lielākas x vērtības nav jāpārbauda, jo tad y iznāk negatīvs), redzam, ka varētu derēt tikai x = 1; y = 5 un x = 10; y = 1. Pirmajā gadījumā ir ≥ 2 lielā kvadrāta malas, kas nesatur nevienu 2×2 kvadrāta malu – pretruna, jo 7 nedalās ar 3. Otro gadījumu apskata līdzīgi.
Tātad minētā sagriešana nav iespējama.

4.6.2. Kafijas krūzē ir vairāk.
Cipariņš kopā izmanto vienādus daudzumus kafijas un piena. Pirmajā izdzertajā malkā kafijas ir tikpat, cik piena, bet otrajā – mazāk. Tāpēc pēc otrā malka izdzeršanas atlikušās kafijas ir vairāk nekā atlikušā piena.

4.6.3. Nē, nevar.
Starp ierakstāmajiem skaitļiem ir arī pirmskaitļi 17; 19; 23; 29; 31. Ar tiem nedalās neviens cits ierakstāmais skaitlis. Tāpēc tiem jāietilpst visos apskatāmajos reizinājumos. Bet ir tikai 4 (centrālās) rūtiņas, kas pieder visiem apskatāmajiem 3×3 rūtiņu kvadrātiem.

4.6.4. Pirmais apgalvojums ir patiess tikai visīsākā zēna mutē. Tāpēc klasē ir tikai viens patiess zēns, bet visi citi ir meļi, un patiesais zēns X ir visīsākais. Tāpēc citu zēnu tiešām ir ≥ 11. Ja to būtu ≥ 12, tad otrā īsākā zēna otrais apgalvojums būtu patiess; tā nevar būt. Tāpēc citu zēnu ir tieši 11, un pavisam klasē ir 12 zēnu. (Pārbaude parāda, ka iegūtā situācija apmierina uzdevuma nosacījumus.)

4.6.5. Ja puse meiteņu sēž ar zēniem, tad otrā puse meiteņu sēž ar meitenēm; tātad šī „otrā puse” sastāv no pāra skaita meiteņu. Tāpēc meiteņu kopējais skaits dalās ar 4. Ja uzdevumā minētā pārsēdināšana būtu iespējama, tad arī zēnu skaits dalītos ar 4; tad arī kopējais skolēnu skaits dalītos ar 4. Bet 34 ar 4 nedalās – pretruna.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Ja tāds skaitlis x būtu, tad vienlaicīgi jāpastāv sakarībām $x = \frac{c-b}{a}, x = \frac{a-c}{b}, x = \frac{b-a}{c}$. Tā kā (c - b) + (a - c) + (b - a) = 0 un neviens no skaitļiem c-b; a-c; b-a nav 0, tad kāds no tiem ir negatīvs, bet kāds cits – pozitīvs. Tāpēc arī kāda no iegūtajām izteiksmēm pieņem pozitīvu vērtību, bet kāda cita – negatīvu; tas nav iespējams.

4.7.2. **a)** jā; skat., piem., A69. zīm.

5	7	9
3	4	6
1	2	8

A69. zīm.

b) nē. Ja tā notiktu, tad visu triju rindiņu summu summai būtu jābūt pāra skaitlim. Bet 1+2+...+9=45 – pretruna.

4.7.3. Ja Andris būtu izsvītrojis citu ciparu, nevis pēdējo, tad summai būtu jābūt pāra skaitlim. Tātad Andris izsvītrojis pēdējo ciparu. Apzīmēsim sākotnējo skaitli ar $\overline{abcde}$; tātad $\overline{abcde} + \overline{abcd} = 38207$. Tā kā $\overline{abcde} = 10 \cdot \overline{abcd} + e$, iegūstam $11 \cdot \overline{abcd} + e = 38207$. Tā kā $0 \le e \le 9$, tad e ir atlikums, kuru iegūst, 38207 dalot ar 11; tātad e = 4; $\overline{abcd} = (38207 - 4) : 11 = 3473$ un Andra sākotnēji uzrakstītais skaitlis ir 34734.

4.7.4. Pieņemsim pretējo: ir tāds 5×5 rūtiņu kvadrāts, kurā nav nevienas atzīmētās rūtiņas. Tad visas 9 atzīmētās rūtiņas katra pieder rindai vai kolonnai, kas neiet caur šo kvadrātu; tādu kopā ir 8. Tāpēc divas atzīmētās rūtiņas pieder vai nu vienai rindai, vai vienai kolonnai – pretruna.

4.7.5. Katrs nogrieznis var krustot augstākais 5 citus un katru no tiem – tikai vienā punktā. Nodzēsīsim tos 3 nogriežņus, kas katrs krusto visus piecus citus; līdz ar to pazudīs arī attiecīgie krustpunkti. Paliks 3 nogriežņi; uz viena no tiem būs palicis 1 krustpunkts, uz otra – neviens. Tāpēc uz trešā palikušā nogriežņa būs palicis 1 krustpunkts. Tātad sākotnēji uz tā bija 1+3=4 krustpunkti.

4.8. ASTOTĀ KLASE

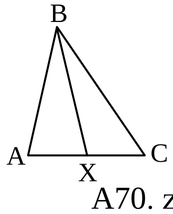
4.8.1. Taisnstūriem, kam diagonāles ir OA un OB, katram laukums ir 1 saskaņā ar A un B izvēli. Atņemot to kopīgās daļas laukumu, iegūstam vajadzīgo.

4.8.2. Jā. Piemēram:

0; 4; -1; -3; ±5; ±6; ±7; ...; ±52.

Gan summa, gan reizinājums ir 0.

4.8.3. Pieņemsim, ka X ir ΔABC malas AC ir viduspunkts (A70. zīm.)



A70. zīm.

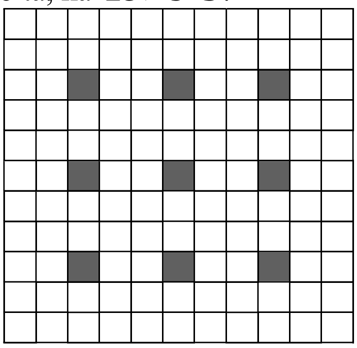
Tā kā $\angle AXB + \angle CXB = 180^{o}$, tad vai nu $\angle AXB \geq 90^{o}$; vai $\angle CXB \geq 90^{o}$; varam pieņemt, ka $\angle CXB \geq 90^{o}$. Tāpēc $\angle CXB$ ir lielākais leņķis trijstūrī CXB; tātad BC ir lielākā mala šajā trijstūrī, un BC > BX. Secinām, ka ΔABC **garākā** mala ir garāka par visām ΔABC mediānām; tāpēc ΔABC garākā mala ir garāka par visām ΔMNK malām, un tāpēc šie trijstūri nav vienādi.

4.8.4. **Atbilde:** nē, nevar

Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē. Tā kā x un y dalās ar 52, tad x un y dalās ar 4; tā kā y un z dalās ar 56, tad y un z dalās ar 4. Tātad x un z abi dalās ar 4. Bet tad nevar būt LKD(x,z) = 54, jo 54 nedalās ar 4.

4.8.5. **a)** apgalvojums seko no tā, ka $28 \cdot 9 = 252$ un $252 > 121 \cdot 2$.

b) ievērosim, ka jebkura figūra satur vienu no 9 iekrāsotām rūtiņām (A71. zīm.). Uzdevuma apgalvojums seko no tā, ka $28 > 9 \cdot 3$.

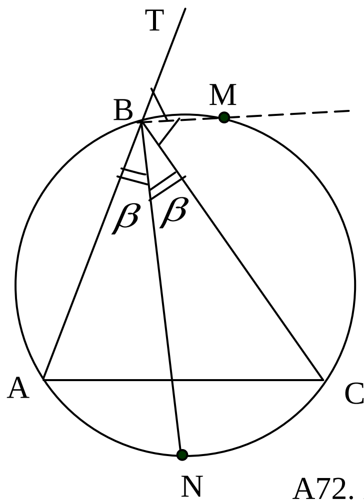


A71. zīm.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. Nē. Tā kā visām parabolām zari vērsti „”uz augšu”, tad a > 0, b > 0, c > 0. Bet tad neviena no parabolām nevar krustot ordinātu asi (kur x = 0) punktā, kurā y < 0.

4.9.2. Novelkam arī iekšējā leņķa bisektrisi, kas krusto riņķa līniju punktā N. Tā kā $\cup AN = 2\beta = \cup NC$, tad N ir $\cup AC$ viduspunkts.



A72. zīm.

Tā kā

$$\angle MBN = \angle MBC + \angle CBN = \frac{1}{2}\angle TBC + \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}\left(\angle TBC + \angle CBA\right) = \frac{1}{2} \cdot 180^{o} = 90^{o},$$

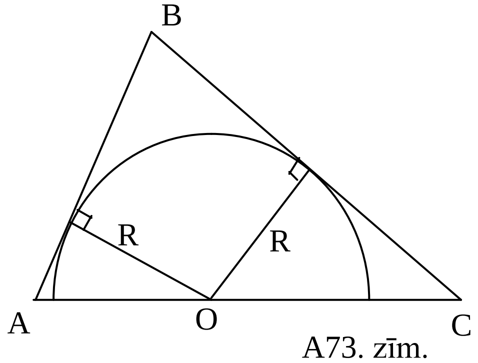
tad M un N ir diametrāli pretēji punkti. Tātad $\cup NAM = \cup NCM$. Atņemot no šīs vienādības vienādību $\cup AN = \cup NC$, iegūstam $\cup AM = \cup CM$, k.b.j.

4.9.3. Ja p = 2, tad $p^4 - 1 = 15$. Ja p > 2, tad p – nepāra skaitlis. Ievērojam, ka

$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 - 1)$.
Skaitļi p - 1 un p + 1 ir divi viens otram sekojoši pāra skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 2, bet otrs ar 4; $p^2 + 1$ ir pāra skaitlis. Tāpēc p^4-1 dalās ar $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

4.9.4. Ievērosim, ka $L(ABC) = L(ABO) + L(CBO) = \frac{1}{2}AB \cdot R + \frac{1}{2}BC \cdot R =$

$$= \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot R \text{ un } L(ABC) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \cdot r.$$

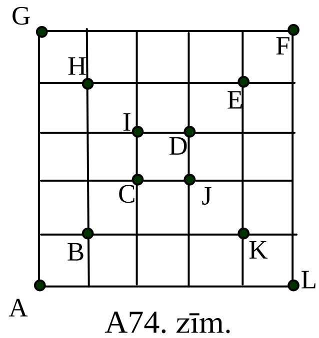


A73. zīm.

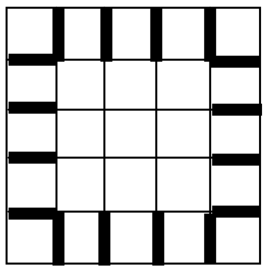
No abu laukuma izteiksmju vienādības seko, ka

$$\frac{r}{R} = \frac{AB + BC}{AB + BC + CA} > \frac{AB + BC}{(AB + BC) + (AB + BC)} = \frac{1}{2} \text{ , k.b.j.}$$

4.9.5. **Atbilde**: Ar 8 gājieniem.
Risinājums. Viegli redzēt, ka prasītais sasniedzams, nokrāsojot kvadrātus, kuru diagonāles ir AE; AD; CF; BF; HL; IL; JG; KG (skat. A74. zīm.).



A74. zīm.


A75. zīm.

Tāpat viegli saprast, ka ar vienu gājienu var nokrāsot augstākais divus no A75. zīm. izceltajiem 16 nogriežņiem. Tāpēc nepieciešami vismaz $\frac{16}{2} = 8$ gājieni.

5. LATVIJAS 56. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. (RAJONA) KĀRTA

5.5. PIEKTĀ KLASE

5.5.1. No uzdevuma nosacījumiem seko: pieskaitot skaitlim 8002 skaitli B divas reizes, iegūst vismaz 10 000. Tas ir iespējams tikai, ja B = 999 (ja B < 999, tad 8002 + B + B < 10 000). Tāpēc B = 999 un A = 8002 + 999 = 9001.

5.5.2. Atbilde: Ar 5 gājieniem.

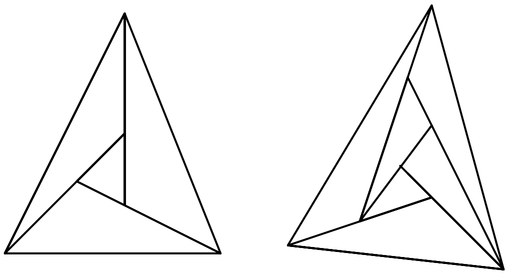
- Var izdarīt, piemēram, šādus pārveidojumus:

abab**ab**ababa
aba**bbaa**baba

ab**aaabbb**aba
a**bbbbaaaa**ba
aaaaa**bbbbba**
aaaaaabbbbb

- Sākumā ir 10 vietas, kur blakus stāv dažādi burti, beigās – tikai viena tāda vieta. Ar katru gājienu tādu vietu skaits samazinās ne vairāk kā par 2, tāpēc vajag vismaz 5 gājienus.

5.5.3. Skat.A76. zīm.



A76. zīm.

5.5.4. Var ņemt, piemēram, 13 kartiņas ar skaitļiem

1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5.

Parādīsim, ka 13 ir mazākais iespējamais kartiņu skaits. Pieņemsim, ka a un b – divi mazākie dažādi skaitļi, a < b. Tā kā summai a + b jāizsakās vēl citādi, jābūt vēl pa vienam eksemplāram gan a, gan b. Lai summu a + a varētu izsacīt ar citām kartiņām, jābūt vēl diviem a eksemplāriem. Līdzīgi konstatē, ka lielākajai vērtībai d jābūt vismaz uz 4 kartiņām un otrai lielākajai vērtībai c – vismaz uz 2 kartiņām. Tā kā jābūt vismaz 5 dažādiem skaitļiem ,tad nepieciešama vēl 13. kartiņa.

5.5.5. Ar katru pārvēršanos katras krāsas amēbu skaits mainās par 1. Tāpēc pēc 1. pārvēršanās katras krāsas amēbu daudzums būs nepāra skaitlis, pēc 2. pārvēršanās – pāra skaitlis, pēc 3. pārvēršanās – nepāra skaitlis utt. Tāpēc nevar iestāties situācija, kad divu krāsu amēbu skaits ir 0, bet trešās krāsas amēbu skaits ir 1.

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Nē, nevar, Ejot no A uz B, no B uz C, no C uz D, no D uz E un no E uz A, katru nostaigāto taisnes gabalu nostaigā pāra skaitu reižu (cik reizes pa labi, tik reizes pa kreisi). Tāpēc kopējam nostaigātajam ceļam jāizsakās ar pāra skaitli. Bet 1 + 3 +5 + 7 + 9 = 25.

5.6.2. Eksistē divi cilvēki x un y, kuri pazīst viens otru. Ja u – patvaļīgs cilvēks, tad eksistē tāds z, kas pazīst x, y un u; tātad x, y, z visi pazīst viens otru. Eksistē tāds t, kas pazīst x, y un z; tātad x, y, z, t visi pazīst cits citu. Atlikušajiem 3 cilvēkiem eksistē kāds, kas pazīst tos visus (šis „kāds" ir viens no x, y, z, t); tas der par meklējamo cilvēku.

5.6.3. **a)** Nē. Vienā kolonnā ar 4 var atrasties tikai 5, un vienā kolonā ar 11 arī var atrasties tikai 5. Bet 5 nevar reizē atrasties 2 kolonnās.

b) jā, skat. A77. zīm.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

A77. zīm.

5.6.4. Nē. Pēdējā maiņā būtu jāiegūst četras 1 santīma monētas, samainot vienu 4 santīmu monētu; bet tādas vispār nav.

5.6.5. Atbilde**:** 1; 3; 9.

Apzīmēsim mazāko izveidoto skaitli ar x; skaidrs, ka x ir viencipara skaitlis. Skaitlis x nevar būt pāra, jo tādā gadījumā augstākais 3 no pārējiem skaitļiem ir pāra, un ceturtais nedalās ar x. Skaidrs, ka $x \neq 5$, jo tad neviens no pārējiem skaitļiem nedalās ar x.

Pieņemsim, ka x = 7. Ja kādam no pārējiem skaitļiem būtu 3 vai vairāk cipari, tad kāds cits no tiem būtu viencipara, un tas nedalītos ar 7. Tātad pārējie skaitļi var būt tikai 14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 84; 91; 98. Ciparus 3; 5; 6 satur tikai skaitļi 35; 56; 63. Noteikti jāņem divi no tiem, bet tad viens cipars atkārtojas; pretruna, tātad $x \neq 7$.
Paliek iespējas A = 1 (pārējos skaitļus sastāda patvaļīgi), A = 3 (var ņemt, piemēram ,3; 9; 18; 27; 645) un A = 9 (var ņemt, piemēram, 9; 18; 27; 36; 45).

5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Ja visi 5 punkti ir uz vienas taisnes, ir 0 trijstūru.
Ja uz vienas taisnes ir tikai četri punkti, tad ir 6 trijstūri.
Ja nekādi 3 punkti nav uz vienas taisnes, tad ir 10 trijstūri.
Ja 3 punkti (teiksim, A; B; C) ir uz vienas taisnes, bet citu uz vienas taisnes esošu punktu trijnieku nav, tad ir 9 trijstūri.
Ja ir 2 punktu trijnieki, kas katrs ir uz vienas taisnes (piemēram, A; B; C un A; D; E), tad ir 8 trijstūri.
Atbilde**:** 0; 6; 8; 9; 10.

5.7.2. Uzliekam monētas uz kausiem pa 4. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, otrajā svēršanā uzliekam uz kausiem pa 2 monētām no tām 4, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, uzliekam uz kausiem pa 1 monētai no tām, kas otrajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, visām monētām ir vienādas masas.

5.7.3. **a)** jā; piemēram, izvēlamies skaitļus no 100 līdz 200 ieskaitot.
b) nē. Apzīmēsim izvēlētos skaitļus ar $x_1 < x_2 < \ldots < x_{102}$. Apskatīsim arī skaitļus $x_1 + x_2; x_1 + x_3; \ldots; x_1 + x_{102}$; pavisam mums ir 203 skaitļi. Tie visi nav mazāki par x_1 un nav lielāki par $x_1 + x_{102}$; šajā intervālā ir $(x_1 + x_{102}) - x_1 + 1 = x_{102} + 1 \leq 201$ skaitlis. Tā kā 203 > 201, tad divi no apskatāmajiem skaitļiem ir vienādi savā starpā. Skaidrs, ka var būt tikai $x_i = x_1 + x_j$, no kurienes seko $x_1 = x_i - x_j$.

5.7.4. Meklējamo skaitli apzīmēsim ar n. Tā iespējami pozitīvie dalītāji (dilstošā secībā) ir $n; \frac{n}{2}; \frac{n}{3}; \frac{n}{4}; \ldots$.
Skaidrs, ka neviens no apskatāmajiem 3 dažādajiem dalītājiem nevar būt n. Ja lielākais no tiem nav $\frac{n}{2}$, tad to summa nepārsniedz $\frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} < n$, un tā nevar būt. Tāpēc viens no 3 dalītājiem ir $\frac{n}{2}$, un abu pārējo summa ir $\frac{n}{2}$. Ja lielākais no šiem abiem pārējiem ir $\frac{n}{3}$, tad trešais ir $\frac{n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{6}$. Ja lielākais no šiem abiem pārējiem ir mazāks par $\frac{n}{3}$, tad to summa nepārsniedz $\frac{n}{4} + \frac{n}{5} < \frac{n}{2}$, un tā nevar būt.
Tāpēc vienīgā iespēja ir, ka šie dalītāji ir $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ un $\frac{n}{6}$. Lai tādi dalītāji eksistētu, nepieciešams un pietiekams, lai n dalītos ar 6.

5.7.5. Katra pļāpa zvanījusi vismaz 1 reizi un ne vairāk kā (n – 1) reizes; dažādu iespējamu zvanīšanu daudzumu tātad ir n – 1. Pļāpu ir n; ievērojam, ka n > n – 1. Tāpēc ir 2 pļāpas (apzīmēsim tās ar A un B), kas zvanījušas vienādu daudzumu reižu. Viena no tām zvanījusi otrai; pieņemsim, ka pļāpa A zvanījusi pļāpai B. Tad pļāpa B nav zvanījusi pļāpai A. Lai pļāpas A un B būtu veikušas vienādu daudzumu zvanu, ir jābūt tādai pļāpai – apzīmēsim to ar C – kam B ir zvanījusi, bet A nav zvanījusi (citādi A veikto zvanu būtu vismaz par 1 vairāk nekā B veikto zvanu). Ja A nav zvanījusi C, tad C ir zvanījusi A. Vajadzīgās 3 pļāpas ir atrastas.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. $x^4+64=(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$.

5.8.2. Ja $a>b$, uzvar Jānis. Apzīmēsim $a=b+c$, $c>0$. Jānis sadala savu nogriezni gabalos $b+\frac{2c}{3}$, $\frac{c}{6}$, $\frac{c}{6}$. Tad daļa ar garumu $b+\frac{2c}{3}$ ir garāka par visām 5 citām daļām kopā, tāpēc tā nevar būt trijstūra mala.

Ja $a\le b$, uzvar Pēteris. Pieņemsim, ka Jāņa daļas ir $x\ge y\ge z$, $x+y+z=a$. Pēteris izveido daļas ar garumiem x, $\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$. Tad var salikt vienādsānu trijstūri (x, x, y) un vienādsānu trijstūri ($\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$, z) : ievērojam, ka $x\ge y$ un $\frac{b-x}{2}\ge z \Leftrightarrow b-x\ge 2z$.

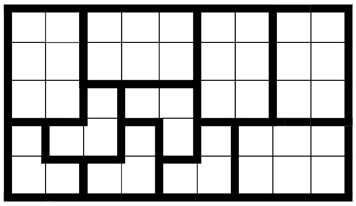
Pēdējā nevienādība ir pareiza, jo $b-x\ge a-x=y+z\ge 2z$.

5.8.3. Nē. Apskatām 4 pēc kārtas uzrakstītus skaitļus a, b, c, d. Tā kā a + b + c un b + c + d abi dalās ar 4, tad a un d jādod vienādi atlikumi, dalot ar 4. Tātad skaitļiem, kas rindā atrodas 1., 4., 7., 11., ..., 2005. vietā, jādod vienādi atlikumi, dalot ar 4; šo vietu ir 668. Bet skaitļiem no 1 līdz 2006 ieskaitot, dalot tos ar 4, atlikumi 1 un 2 ir 502 reizes, bet atlikumi 3 un 0 – 501 reizi.

5.8.4. **a)** Nē, jo 64 nedalās ar 3

b) jā, jo kvadrātu 12×12 viegli sadalīt taisnstūros 2×3, bet katru šādu taisnstūri – divos stūrīšos.

c) jā, skat. A78. zīm.



A78. zīm.

5.8.5. To, ka kartiņa ar skaitli x ir Juliatai resp. Maijai, pierakstīsim kā x ~ j resp. x ~ m. Pēc dotā 13 ~ j. Apskatīsim jebkuru x, kur x ~ m. Ja 1 ~ j, tad $1\cdot x \sim m$ dod pretrunu. Tāpēc 1 ~ m.

Ja 12 ~ j, tad $1+12=13\sim j$ dod pretrunu. Tāpēc 12 ~ m.

Tā kā $6+7\sim j$, tad 6 un 7 ir vienai un tai pašai meitenei. Ja būtu 6 ~ j un 7 ~ j, tad 1 + 6 ~ j dotu pretrunu. Tāpēc 6 ~ m un 7 ~ m.

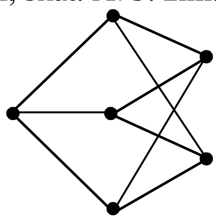
Līdzīgi secinām, ka 3 ~ m un 10 ~ m; 5 ~ m un 8 ~ m; 4 ~ m un 9 ~ m; 2 ~ m un 11 ~ m.

Tātad skaitļi no 1 līdz 12 ir Maijai. Tā kā 13 ~ j, tad skaitļi $13\cdot k$ (k = 1; 2; 3; ...; 7) nav Maijai, tāpēc tie ir Juliatai. Savukārt šo skaitļu summas ar 1; 2; ...; 12 nav Juliatai, tāpēc tās ir Maijai. Tātad Juliatai ir 7 kartiņas ar skaitļiem, kuri dalās ar 13, bet Maijai ir 93 pārējās kartiņas.

(Viegli pārbaudīt, ka šis sadalījums apmierina uzdevuma prasības; pārbaude nepieciešama. Pietiek ievērot: ja viens no reizinātājiem dalās ar 13, tad arī reizinājums dalās ar 13, un, ja **tieši** viens no diviem saskaitāmajiem dalās ar 13, tad summa nedalās ar 13.)

5.9. DEVĪTĀ KLASE

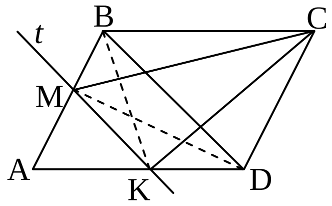
5.9.1. To, ka var būt 6 cilvēki, skat. A79. zīm.



A79. zīm.

Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais skaits. Apzīmēsim ar A vienu cilvēku, ar B, C, D – viņa draugus. Tā kā B nevar draudzēties ne ar C, ne D, tad ir vismaz vēl divi citi cilvēki – B draugi, no kurienes seko vajadzīgais.

5.9.2. Tā kā ΔKDC un ΔKDB ir kopīgs pamats KD un vienādi augstumi pret šo pamatu, tad L(KDC) = L(KDB). Līdzīgi L(BMC) = L(BMD).



A80. zīm.

Bet ΔKDB un ΔBMD ir kopīgs pamats BD un vienādi augstumi pret šo pamatu, tāpēc L(KDB) = L(BMD). No šīm vienādībām seko vajadzīgais.

(Speciālajā kvadrāta gadījumā vajadzīgais seko arī, piemēram, no simetrijas dēļ spēkā esošās vienādības $\Delta BMC = \Delta DKC$.)

5.9.3. Pārrakstām sistēmu formā

$$\begin{cases} [x]+\{y\}=[z]+\{z\} \\ [y]+\{z\}=[x]+\{x\} \\ [z]+\{x\}=[y]+\{y\} \end{cases}$$

Tā kā skaitlis viennozīmīgi nosaka savu veselo daļu un daļveida daļu, tad no šejienes seko [x] = [y] = [z] un {x} = {y} = {z}, tātad x = y = z. No otras puses, skaidrs, ka jebkurš vienādu skaitļu trijnieks (a;a;a) der par atrisinājumu.

5.9.4. No uzdevumā dotajām pēdējām 4 prasībām seko, ka 2x-5 dalās ar 5; ar 7; ar 9; ar 11 (piemēram, 2x – 5 = 2(x + 1) – 7 dalās ar 7 utml.). Tā kā 5; 7; 9; 11 pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi, tad 2x – 5 dalās ar $5\cdot7\cdot9\cdot11=3465$. Tā kā $1\le x\le 2006$, tad $-3\le 2x-5\le 4007$. Šajās robežās ar 3465 dalās tikai 0 un 3465. Bet 2x – 5 = 0 naturālam x nav iespējams, tāpēc 2x – 5 = 3465 un x = 1735.

5.9.5. Uzvar Gunārs.

Tā kā pēdējais (uzvarošais) gājiens tiek izdarīts vai nu no pozīcijas 500, vai no pozīcijas 999, tad zaudē tas, kurš uzraksta vienu no šiem skaitļiem. Pieņemsim, ka zaudētājs uzraksta 500. Tas tiek darīts tāpēc, ka citu iespēju (izņemot varbūt rakstīt 999) viņam nav. Tas nozīmē, ka visi skaitļi 1; 2; 3; ...; 499 jau ir uzrakstīti (citādi varētu rakstīt mazāko vēl neuzrakstīto no tiem) un tātad arī divas reizes lielākie skaitļi 502; 504; ... 998 ir uzrakstīti; no tā savukārt seko, ka arī 503; 505; ...; 997 ir jau uzrakstīti. Savukārt 999 vēl nav uzrakstīts (citādi spēle būtu beigusies jau ātrāk) un arī 501 vēl nav uzrakstīts (citādi jau iepriekš būtu uzrakstīts 500, un spēle būtu beigusies ātrāk). Tātad brīdī, kad zaudētājs uzrakstījis 500, uz tāfeles atrodas 997 skaitļi (ieskaitot 500). Tāpēc skaitli 500 uzraksta sācējs, proti, Dzintars. Tāpēc viņš zaudē.

Gadījumu, ja „zaudējošais gājiens" ir 999 uzrakstīšana, analizē līdzīgi.

6. LATVIJAS 56. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. (REPUBLIKAS) KĀRTA

6.9. DEVĪTĀ KLASE

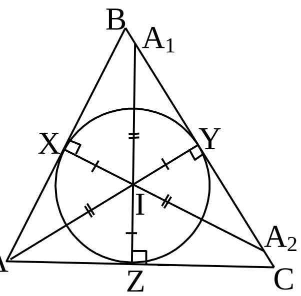
6.9.1. Viens no skaitļiem x un y ir pāra, otrs – nepāra. Skaitļa 640000 nepāra dalītāji ir 1; 5; 25; 125; 625. Ievērojam, ka $640000 = 5^4 \cdot 2^{10}$. Tāpēc $1025-1=1024=2^{10}$, 1025 – 25 = 1000 un $1025-625=400$ ir skaitļa 640000 dalītāji, bet $1025-5=520=13\cdot 5\cdot 8$ un $1025-125=900$ - nav.

<u>Atbilde.</u> (1; 1024), (25; 1000), (400; 625), (625; 400), (1000; 25), (1024; 1).

6.9.2. <u>Pirmais atrisinājums.</u> Tā kā intervālā (0; 1) atrodas tikai viena no kvadrātvienādojuma $f(x)=0$ saknēm, tad abas vērtības $f(0)$ un $f(1)$ reizē nevar būt pozitīvas. Tāpēc $f(0)\cdot f(1)\le 0$. Iegūstam $q(p+q+1)\le 0$ jeb $q^2+pq+q\le 0$, jeb $f(q)\le 0$.

<u>Otrais atrisinājums.</u> Pieņemsim, ka vienādojuma $f(x)=0$ saknes ir x_1 un x_2. Saskaņā ar Vjeta teorēmu $f(q)=q^2+pq+q=x_1^2x_2^2-x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=$ $=x_1x_2(x_1x_2-x_1-x_2+1)=[x_1(1-x_1)]\cdot[x_2(1-x_2)]$. Saskaņā ar uzdevumā doto tieši viena no kvadrātiekavām ir negatīva, tāpēc to reizinājums ir ≤ 0.

6.9.3. Apzīmējam ievilktās riņķa līnijas pieskaršanās punktus ΔABC malām ar X; Y; Z (skat. A81. zīm.) Taisnleņķa trijstūri AXI, AZI, A_1YI un A_2YI ir vienādi savā starpā (hk), tāpēc $A_1A_2 = AX + AZ$. Līdzīgi $B_1B_2 = BX + BY$ un $C_1C_2 = CY + CZ$. Saskaitot šīs vienādības, iegūstam vajadzīgo.



A81. zīm.

6.9.4. Ja uzdevumus apzīmējam ar A; B; C; D; E; F; G; H, tad 8 skolēniem var iedot komplektus ABC; ADE; AFG; BDG; BFH, CDH, CEF, EGH. Tātad var būt 8 skolēni.

Ja kādu uzdevumu iedalītu ≥ 4 skolēniem, tad katram no tiem jāsaņem vēl 2 citi uzdevumi, un pavisam būtu vismaz $1+4\cdot 2=9$ uzdevumi – pretruna. Tātad katru uzdevumu iedeva augstākais 3 skolēniem, un pavisam tika iedoti augstākais $8\cdot 3=24$ uzdevumu teksti. Tā kā katrs skolēns saņēma trīs tekstus, tad skolēnu nav vairāk par 24 : 3 = 8.

6.9.5. <u>Atbilde:</u> 8*l*; 7*l*; 6*l*; 5*l*; 4*l*; 3*l*; 2*l*; 1*l*; 0*l*.

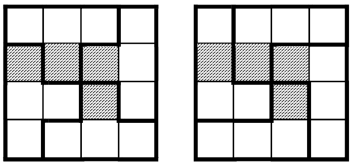
<u>Risinājums.</u> To, ka minētā atbilde apmierina uzdevuma nosacījumus, pārbauda tieši. Pierādīsim, ka tā ir vienīgā. Tā kā pēc viena „cikla" ūdens sadalījums ir sākotnējais, mēs varam iztēloties, ka process notiek bezgalīgi un ir periodisks. Apskatīsim šajā bezgalīgajā periodiskajā procesā deviņu vienu otrai sekojošu pārliešanu virkni, kas sākas ar ūdens izliešanu no tā trauka T, kurā ir vismazākais procesa gaitā no trauka izlejamais ūdens daudzums; apzīmēsim šo daudzumu ar 8x. Saskaņā ar šo izvēli traukā T astoņās nākošajās liešanās tiks ieliets vismaz ūdens daudzums x katrā reizē.

Tā kā traukā T astoņās nākošajās liešanās kopā ielies ūdens daudzumu 8x, tad katrā no šīm 8 liešanām traukā T ielies ūdens daudzumu x. Tātad katrā traukā tai brīdī, kad no tā izlej ūdeni, ir ūdens daudzums 8x. No tā iegūstam, ka ūdens daudzums sākotnēji ir 8x; 7x; 6x; 5x; 4x; 3x; 2x; x; 0. Tā kā $8x+7x+\ldots+x+0=36$, iegūstam x = 1, no kā seko uzdevuma atbilde.

7. LATVIJAS 33. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE

7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. Skat. A82. zīm.



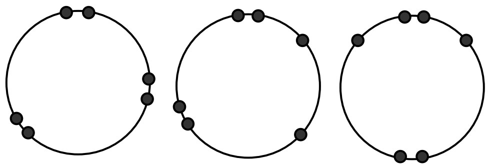
A82. zīm.

7.5.2. Ar pirmo svēršanu salīdzinām A, B pret C, D. Ja svari **nav** līdzsvarā, tad pašreiz uz tiem ir atšķirīgā monēta. Ar otro svēršanu salīdzinām A, B pret E ,F (E, F ir „īstās"). Ja ir līdzsvars, tad atšķirīgās monētas attiecības ar īstajām noskaidro no 1. svēršanas rezultātiem (atšķirīgā ir viena no C, D). Ja līdzsvara nav, tad atšķirīgā ir viena no A, B; gan 1. ,gan 2. svēršana rāda, vai tā smagāka vai vieglāka par īsto.

Ja pirmajā svēršanā ir līdzsvars, tad otrajā salīdzinām A, B, C (tās visas ir „īstas") ar E, F, G. Ja atkal ir līdzsvars, tad atšķirīgās monētas nav. Ja nav līdzsvara, tad vajadzīgo uzzinām no otrās svēršanas (atšķirīgā monēta ir E, F vai G).

7.5.3. **Atbilde:** 0, 1 vai 2.

Risinājums. Piemērus skat. A83. zīm.



A83. zīm.

Tā kā 4 vai vairāk vārdus divas reizes nosaukt nevar, atliek pamatot, kāpēc 2 reizes nevar nosaukt 3 vārdus. Pieņemam, ka tas noticis. Tad trīs citi vārdi vispār nav nosaukti. Pieņemsim, ka vārds X nosaukts 2 reizes; tad to nosaukuši abi X kaimiņi Y un Z. Bērns X nosauks vai nu Y, vai Z; varam pieņemt, ka X nosauks Y. Tad vārdu Y nosaucis vēl kāds bērns. Tāpēc blakus stāvošie X un Y nosaukti divas reizes, pie tam abi nosaukuši viens otru. Līdzīgi spriežot, trešajam divreiz nosauktajam bērnam E jābūt kaimiņam F, kas arī nosaukts divas reizes, pie tam E un F nosaukuši viens otru – pretruna.

7.5.4. Patieso rūķīšu nav vairāk kā viens, jo visas atbildes ir dažādas. Tā kā vismaz viena atbilde ir patiesa (meļu skaits nav 0), tad viens rūķītis runā patiesību, bet divi melo. Tātad Beta runā patiesību, bet Alfa un Gamma melo.

7.5.5. **a)** jā, var, piemēram:

$\{14;13;8\}$, $\{12;11;10;2\}$, $\{1;3;4;5;6;7;9\}$

b) nē, nevar; summa $1+2+\ldots+13=91$ nedalās ar 3.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Ievērojam, ka $\overline{abc}=100a+10b+c=$

$(98a+7b)+(2a+3b+c)=7(14a+b)+(2a+3b+c)$.

7.6.2. Sveram A + B. Ja A + B = 20 vai A + B = 22, A un B masas jau zināmas. Tālāk ar 2 svēršanām atrodam atsevišķi C un D.

Ja A + B = 21, sveram A + C. Gadījumus A + C = 20 un A + C = 22 analizē kā iepriekš.

Ja A + C = 21 ,tad no A + B = A + C seko B = C.

Trešajā reizē sveram B + C + D. Ievērosim, ka B + C – pāra skaitlis (20 vai 22). Iegūstam tabulu:

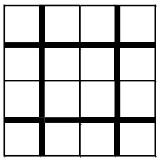
B + C + D	B + C	D	B	C	A
30	20	10	10	10	11
31	20	11	10	10	11
32	22	10	11	11	10
33	22	11	11	11	10

7.6.3. Andris paņem to grozu, kurā ir **visvairāk** ābolu (vai vienu no tādiem, ja to ir vairāki) un to grozu, kurā ir visvairāk bumbieru (vai vienu no tādiem, ja to ir vairāki).

Ja tas ir viens un tas pats grozs, tad kā otro Andris ņem jebkuru grozu.

Skaidrs, ka **lielākais** ābolu daudzums kopā ar jebkuru no abiem pārējiem ābolu daudzumiem ir vairāk nekā otrais no abiem pārējiem ābolu daudzumiem. Līdzīgi spriežam par bumbieriem.

7.6.4. Pavisam jābūt nokrāsotām $16 \cdot 2 = 32$ malām. Viena nogriežņa nokrāsošana dod vienas vai divu malu krāsojumu (atkarībā no tā, vai šis nogrieznis ir uz kvadrāta kontūra vai tā iekšpusē). Tātad jākrāso vismaz 32 : 2 = 16 nogriežņi. To, ka ar 16 nogrieznīšu nokrāsošanu pietiek, skat. A84. zīm.



A84. zīm.

7.6.5. Ievērosim, ka Sprīdītis ir pamīšus baltās un melnās rūtiņās, tāpēc viņš apmeklējis 54 : 2 = 27 baltas rūtiņas. Pavisam balto rūtiņu ir $10 \times 10 : 2 = 50$. Tāpēc neapmeklētas paliek 50 – 27 = 23 baltas rūtiņas. Pat ja visās neapmeklētajās baltajās rūtiņās ir pa dukātam, Sprīdītis ir savācis 33 – 23 = 10 dukātus; pretējā gadījumā viņam dukātu ir vairāk.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. No 1996 līdz 2015 (ieskaitot) ir 20 naturāli skaitļi, tātad vagonā **ir vismaz 20 vietas**. **Starp** tiem vagoniem, kuros ir 630. un 652. vieta, nav citu vietu kā vien varbūt 631., 632., ..., 650., 651. vieta; to skaits ir 21. Tātad vagonā **nav vairāk par 21 vietu**. No izceltajiem apgalvojumiem seko, ka vagonā ir 20 vai 21 vieta.

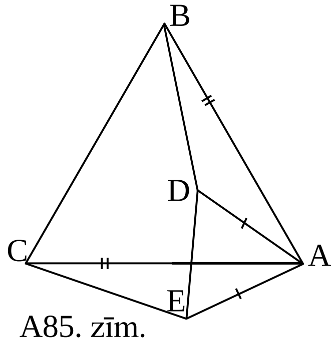
Ja tur būtu 20 vietas, rastos pretruna ar uzdevuma nosacījumiem (1996. vieta būtu simtajā vagonā ,bet 2015. vieta – simt pirmajā vagonā). Atbilde „21” apmierina abus uzdevuma nosacījumus: 1996. un 2015. vietas ir 96. vagonā, 630. vieta – 30. vagonā, bet 652. vieta – 32. vagonā (jo $31 \cdot 21 = 651$).

7.7.2. Piemērs 407 = 250 + 125 + 32 parāda, ka 6 nulles var būt.

Tiešām, $250 \cdot 125 \cdot 32 = 2 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 2^5 = 1\,000\,000$.

Parādīsim, ka vairāk par 6 nullēm nevar būt. Visi saskaitāmie ir mazāki par $5^4 = 625$; tātad augstākā piecinieka pakāpe, ar kādu tie var dalīties, ir 5^3. Turklāt vismaz viens saskaitāmais ar 5 vispār nedalās, jo visu saskaitāmo summa nedalās ar 5. Tāpēc visi 3 saskaitāmie kopā satur ne vairāk kā 3 + 3 = 6 pirmreizinātājus 5. Tāpēc arī vairāk par 6 nullēm nevar būt.

7.7.3. Tā kā trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad AE = AD un AC = AB. Bez tam $\angle EAC = 60^\circ - \angle CAD = \angle DAB$.
Tāpēc $\Delta EAC = \Delta DAB$ pēc pazīmes **mlm**, un no tā seko, ka EC = DB.



A85. zīm.

7.7.4. **Atbilde:** pūķis.
Pieņemsim, ka dzīvs palicis bruņinieks. Tad pūķi kopā apēduši nepāra skaitu princešu, tātad **kāds** pūķis apēdis nepāra skaitu princešu, un šo pūķi neviens bruņinieks nevarēja nogalināt. Iegūta pretruna.
Pieņemsim, ka dzīva palikusi princese. Tad bruņinieki kopā nogalinājuši nepāra skaitu pūķu, tāpēc **kāds** bruņinieks nogalinājis nepāra skaitu pūķu, un vismaz **šo** bruņinieku neviena no princesēm nomocīt līdz nāvei nevarēja. Iegūta pretruna.
Atliek parādīt, ka kāds pūķis tiešām var palikt dzīvs saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Tas var notikt šādi:
a) vispirms viens bruņinieks nogalina 2006 pūķus,
b) pēc tam viena princese nomoka līdz nāvei 2006 bruņiniekus,
c) pēc tam atlikušais pūķis, noskaities uz nepateicīgajām princesēm, apēd tās visas.

7.7.5. Skaidrs, ka brīdī, kad būtu palikušas 2 konfektes, nevienu no tām apēst vairs nevarēs. Tāpēc apēsto konfekšu skaits nepārsniedz 22. Parādīsim, kā apēst 22 konfektes. Sanumurēsim traukus pēc kārtas ar numuriem 1., 2., ..., 23., 24. Pirmajā gājienā ēdam konfekti no 1. trauka. Pieņemsim, ka jau iztukšoti 1., 2., 3., ..., k-ais trauki ($k \le 21$), bet (k + 1)-ā, (k + 2)-ā, ..., 24-ā traukā ir pa konfektei (konfektes ir vismaz 3 traukos). Parādīsim, kā iztukšot vēl (k + 1)-o trauku:
a) apēdam konfekti no (k + 2)-ā trauka,
b) paņemam konfekti no (k + 1)-ā trauka un ieliekam to (k + 2)-ā traukā.
Tā rīkojamies, kamēr iztukšoti 1., 2., 3., ..., 21., 22. trauki.

7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. No Vjeta teorēmas seko

$b = x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = q^2$ un

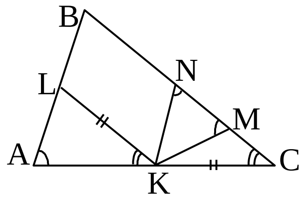
$a = -(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 2q - p^2$.

7.8.2. Katram bērnam jāpiedalās uzdevumu risināšanā kopā ar 5 citiem. Tā kā vienā grupā katrs bērns ir kopā 2 citiem, tad katram bērnam jārisina vismaz 3 uzdevumi (jo $2 \cdot 2 = 4 < 5$). Tātad notiek vismaz $6 \cdot 3 = 18$ risināšanas (par risināšanu **šeit** saucam procesu, kad **viens** bērns piedalās darbā ar **vienu** uzdevumu). Tā kā katras grupas darbā notiek trīs risināšanas, tad vajadzīgs, lai būtu vismaz $\frac{18}{3} = 6$ grupas. Ar 6 grupām mērķi var sasniegt, piemēram, šādi: ADJ, AGM, ALM, DGL, DJM, GJL.

7.8.3. **a)** piemēram, n = 64;
b) piemēram, visi skaitļi $64\underbrace{0\ldots0}_{\text{x nulles}}$;

c) nē, nav. Ja n – **nepāra** naturāls skaitlis, tad 5n ir nepāra skaitlis, kas beidzas ar ciparu 5. Ja piedevām $S(5n)=5$, tad skaitlim 5n nav citu ciparu kā pēdējais cipars, tātad 5n = 5 un n = 1, bet n = 1 neapmierina uzdevuma nosacījumus.

7.8.4. Atliekam uz BC tādu punktu N, ka $\angle KNC = \angle KMB$ (tā kā ΔABC - šaurleņķu, tad N nesakrīt ar M). Pēc dotā $\angle C = \angle LKA$. No ΔAKL un ΔNCK seko, ka $\angle ALK = \angle NKC$. Tāpēc $\Delta ALK = \Delta NKC$ (**lml**) un tāpēc AL = NK. Tā kā ΔNKM - vienādsānu, tad no tā seko AL = KM, k.b.j.



A86. zīm.

7.8.5. Ja nokrāsotas 32 rūtiņas, visu kvadrātu melnu nokrāsot neizdosies. Pieņemsim, ka tas izdevies. Sākumā melni nokrāsotā apgabala robežas kopgarums nav lielāks par $32 \cdot 4 = 128$. Beigās tam jākļūst $33 \cdot 4 = 132$.

Ja mēs parādīsim, ka šis kopgarums nevar augt, mūsu apgalvojums būs pierādīts. Bet, nokrāsojot melnā krāsā sākotnēji baltu rūtiņu, kurai ir ≥ 2 melni kaimiņi, malas ar šiem kaimiņiem **vairs nav** „melni – balti" robežas fragmenti, un no jauna rodas **ne vairāk** kā divas šādas malas (jo nokrāsotajai rūtiņai pavisam ir 4 malas). Līdz ar to mūsu apgalvojums ir pierādīts.

Ja sākotnēji melnā krāsā nokrāsotas 33 vienas diagonāles rūtiņas, tad, krāsojot baltās rūtiņas „pa diagonālēm", var visu kvadrātu nokrāsot melnu.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Septiņciparu naturāls skaitlis dalās ar 8 tad un tikai tad, ja tā pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8 (jo $\overline{...abc} = ...000 + \overline{abc} = ... \cdot 10^3 + \overline{abc}$).

Ja pirmie 4 cipari ir 9 un $\overline{abc} = 888$, ciparu summa ir $4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 60$. Pierādīsim, ka $\overline{abc}$ ciparu summa nevar būt lielāka par 24. Lai tā būtu lielāka par 24, pastāv šādas iespējas:

1) viens no cipariem *a, b, c* ir 9, bet divi - 8,
2) divi no cipariem *a, b, c* ir 9, bet viens – 8,
3) visi cipari *a, b, c* ir 9,
4) divi no cipariem *a, b, c* ir 9, bet viens – 7.

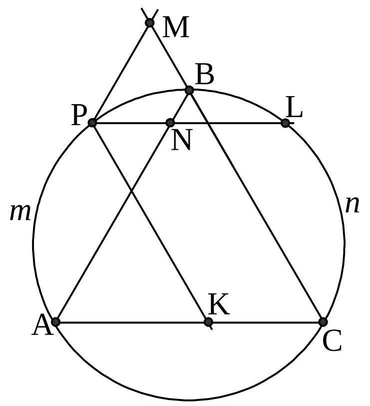
Viegli pārbaudīt, ka neviens no šādiem skaitļiem nedalās ar 8.

7.9.2. Pieņemsim, ka pēdējais atnāca rūķītis A, bet pirmais aizgāja rūķītis B. Ja A = B, tas ir meklējamais rūķītis. Ja $A \neq B$, tad ar K_A apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no paša A un viņa satiktajiem rūķīšiem; līdzīgi ieviešam K_B. Gan K_A, gan K_B katrā ir vismaz $n+1$ rūķītis. Tā kā (n + 1) + (n + 1) > 2n + 1, tad eksistē tāds rūķītis, kas pieder gan K_A, gan K_B; apzīmēsim to ar R. Ja kāds rūķītis X aizietu agrāk, nekā atnāca R, tad arī B būtu aizgājis agrāk, nekā atnāca R; bet tad B nebūtu saticis R – pretruna. Ja kāds rūķītis Y atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, tad arī A atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, un A nebūtu saticis R – pretruna.

No minētā seko, ka R satika visus rūķīšus.

7.9.3. No konstrukcijas seko, ka PMBN ir trapece, pie tam vienādsānu (leņķi pie pamata PM abi ir 60^o). Tāpēc $\angle BMN = \angle BPN$.

Līdzīgi PMCK ir vienādsānu trapece, tāpēc $\angle BMK = \angle BCP$, un mums pietiek pierādīt, ka $\angle BPN = \angle BCP$. Tā kā tie abi ir ievilkti leņķi, tad pietiek pierādīt, ka B ir loka PBL viduspunkts. Bet tas seko no vienādībām $\cup APB = \cup CLB = 120^o$ un $\cup AmP = \cup CnL$ (loki starp paralēlām hordām), atņemot tās vienu no otras.



A87. zīm.

Piezīme. No pierādītā seko, ka M, N, K atrodas uz vienas taisnes.

7.9.4. Apzīmējam vienādojuma $f(x)=0$ saknes x_1 un x_2, $x_1<x_2$. Tad pie $x_1<x<x_2$ pastāv nevienādība $f(x)<0$, bet pie $x>x_2$ un pie $x<x_1$ pastāv nevienādība $f(x)>0$. Tāpēc pie $x_3 = x_1 + 0{,}1$ pastāv nevienādības $f(x_3)<0$, $f(x_3+1)<0$ un $f(x_3+2)<0$; pie $x_4 = x_1 - 10$ pastāv nevienādības $f(x_4)>0$, $f(x_4+1)>0$ un $f(x_4+2)>0$; pie $x_5>x_2$ pastāv nevienādības $f(x_5)>0$, $f(x_5+1)>0$ un $f(x_5+2)>0$. Tātad funkcija $F(x)=f(x)+f(x+1)+f(x+2)$ maina zīmi starp x_5 un x_3, kā arī starp x_3 un x_4, no kurienes seko vajadzīgais.

7.9.5. **Atbilde:** 25 skaitļus.

Risinājums. Apskatīsim skaitļus 52; 54; 56; ...; 96; 98; 100. Tie visi dalās ar 2 un neviens nedalās ar otru, jo pat lielākā skaitļa dalījums ar mazāko ir $\frac{100}{52}<2$, tātad nekādu divu apskatāmo skaitļu dalījums nav naturāls skaitlis.

Pierādīsim, ka vairāk par 25 skaitļiem, kas apmierina uzdevuma prasības, izvēlēties nevar. Pieņemsim, ka kopa M ir kopa ar maksimālo skaitļu skaitu tajā. Ja eksistē tāds $x \in M$, ka $x \le 50$, tad $2x \notin M$; mazāko no šādiem x var aizstāt ar $2x$. (Viegli pārbaudīt, ka kopai M izvirzāmās prasības saglabājas.) Ar galīgu skaitu gājienu M varam pārveidot par M_1, kurā visi skaitļi ir lielāki par 50, bet elementu ir tikpat, cik kopā M. Ja M_1 būtu **vairāk nekā 25** elementi, tad vismaz divi no tiem atrastos vienā no 25 pāriem (51; 52), (53; 54), (55; 56), ..., (97; 98), (99; 100). Bet tā ir pretruna, jo diviem skaitļiem, kas atšķiras viens no otra par 1, lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 9. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēnu vecuma un tajā brīdī viņiem pieejamām zināšanām.

Algebra

Algebriski pārveidojumi un izteiksmes – 1.1.8., 1.4.3., 3.1.A3., 3.1.B3., 3.2.B3., 3.6.B1., 4.8.1., 5.8.1.

vienādojumi – 1.1.5., 1.1.7., 1.2.5., 1.3.4., 2.1.1., 2.2.3., 3.1.A1., 3.1.B1., 3.5.A3., 3.5.B1., 3.5.B3., 4.7.1., 6.9.2., 7.8.1., 7.9.4.

nevienādības – 1.1.14., 1.2.7., 1.2.8., 1.3.2., 1.4.1., 2.4.1., 2.5.1., 2.5.3., 3.2.A4., 3.3.B1., 3.3.B2., 3.6.A2., 3.6.B2., 7.6.3.

vienādojumu sistēmas – 5.9.3.

funkcijas – 4.8.1., 4.9.1., 7.9.4.

ĢEOMETRIJA

KLASISKĀ ĢEOMETRIJA – 1.1.4., 1.1.10., 1.1.11., 1.2.11., 1.3.7., 1.4.4., 1.4.6., 1.4.9., 1.4.12., 2.4.5., 3.1.A4., 3.1.B2., 3.3.A6., 3.3.B4., 3.4.A2., 3.4.B6., 3.6.B3., 4.8.3., 4.9.2., 4.9.4., 5.8.2., 5.9.2., 6.9.3., 7.7.3., 7.8.4., 7.9.3.

FIGŪRU *sistēmas*, PIEMĒRI – 1.1.12., 1.2.6., 1.2.10., 1.4.8., 1.4.10., 2.1.5., 2.3.2., 2.4.3., 2.5.2., 2.5.4., 3.1.A2., 3.1.B4., 3.2.B1., 3.3.A3., 3.4.B3., 3.4.B5., 3.5.A2., 3.5.B2., 3.6.A3., 4.7.5., 4.9.5., 5.7.1., 7.5.3., 7.6.4.

FIGŪRU SAGRIEŠANA UN SALIKŠANA – 2.1.2., 2.2.4., 3.2.A1., 3.5.A5., 4.6.1., 5.5.3., 5.8.4., 7.5.1.

INVARIANTU METODE, KRĀSOŠANA – 3.6.B3., 5.6.1., 7.6.5., 7.8.5.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 3.5.B5., 4.7.4., 4.8.5., 4.9.5., 7.6.4.

SKAITĻU TEORIJA

DALĀMĪBA, DALĪŠANA AR ATLIKUMU – 2.3.1., 3.2.A2., 3.3.A4., 3.3.B3., 3.3.B5., 3.4.A3., 3.4.B2., 3.5.A4., 3.5.B4., 4.5.3., 4.9.3., 5.6.5., 5.7.4., 5.8.3., 7.5.5., 7.6.1., 7.9.5.

SKAITĻA SADALĪJUMS PIRMSKAITĻU REIZINĀJUMĀ – 3.3.A5., 3.4.B4., 4.6.3., 4.8.4., 4.9.3., 5.9.4., 6.9.1., 7.7.2.

SKAITĻA PIERAKSTS, ARITMĒTISKO DARBĪBU IZPILDE – 1.1.1., 1.1.2., 1.1.6., 1.1.13., 1.2.1., 1.2.2., 1.2.3., 1.3.1., 1.4.2., 1.4.7., 1.4.11., 2.1.3., 3.2.B2., 4.5.1., 4.5.2., 4.7.3., 5.5.1., 5.8.5., 7.6.1., 7.8.3., 7.9.1.

GRUPĒŠANA – 2.1.1., 2.2.2., 4.7.2., 4.8.2., 5.6.3., 5.7.3., 5.8.5., 7.5.5.

DIRIHLĒ PRINCIPS – 5.7.3., 7.9.5.

INVARIANTU METODE – 2.3.4., 2.4.4., 3.2.A5., 4.7.2.

KOMBINATORIKA

ALGORITMIKA

LITERATŪRA

Vairāki uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Olimpiāde „Baltijas Ceļš” ....3.1.A5.
A. Savina piemiņas turnīrs ....3.1.B5.
Maskavas matemātikas olimpiāde....................3.1.B4., 3.2.B4.
Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde ....3.3.A6., 3.5.B3., 3.6.B1., 4.6.5., 6.9.2., 7.7.2., 7.8.4.
Baltkrievijas matemātikas olimpiāde ....3.5.B6.
Sorosa olimpiāde..3.6.A3.
Bulgārijas matemātikas olimpiāde ....5.6.5., 7.5.3.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome:	A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja	L. Kalniņa

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Andžāns, L. Egle, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
5. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
7. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
8. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
12. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
13. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
14. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
17. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
18. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
19. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.