UDK 51(079)
Bo 510

D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. ***Jauno matemātiķu konkurss 2000. – 2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.***
Rīga: Latvijas Universitāte, 2011. – 104 lpp.

Grāmatā apkopoti „Jauno matemātiķu konkursa” uzdevumi no 2000./2001. līdz 2004./2005. mācību gadam ieskaitot un šo uzdevumu atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija, īss ieskats konkursa vēsturē un dažās matemātikas nozarēs („Kombinatorika”, „Skaitļu teorija”), kas ļoti plaši tiek pārstāvētas matemātikas konkursu uzdevumu tematikā. Tāpat ir apskatītas galvenās vispārīgās kombinatoriskās metodes – spriedumi, kas plaši pielietojami visdažādākajās jomās.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Darbu izdošanai sagatavojusi un ilustrējusi Agnese Šuste.

ISBN 978-9984-45-310-1

SATURS

PAR JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSU

Jauno Matemātiķu konkurss (JMK) ir matemātikas uzdevumu risināšanas neklātienes sacensības jaunāko klašu skolēniem (līdz 7. klasei ieskaitot). Mācību gada laikā parasti notiek 5 konkursa kārtas, katrā kārtā skolēniem patstāvīgai risināšanai tiek piedāvāti 5 uzdevumi. Konkursa uzdevumi tiek publicēti dažos Latgales novada laikrakstos, bet kopš 1999. gada – arī internetā LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas mājas lapā http://nms.lu.lv. Piedāvātos uzdevumus skolēni var risināt gan individuāli, gan kolektīvi. Katra mācību gada beigās konkursa uzvarētāji saņem balvas, ko sarūpējis Latviešu Nacionālais Fonds Zviedrijā.

Ideja par šādu konkursu 90.-to gadu sākumā radās Mārītei Seilei – toreizējai Preiļu 1. vidusskolas skolotājai.

Tajā laikā Latvijā jau bija populārs „Profesora Cipariņa klubs" (PCK), kura uzdevumus publicēja laikrakstā „Pionieris", vēlāk avīzē „LaBA". Latgale vienmēr ir bijusi ekonomiski vājāk attīstīta nekā pārējie Latvijas novadi. Tas saistīts gan ar tās ģeogrāfiski ne pārāk izdevīgo novietojumu, gan ar to, ka vēsturiski tai nācies atrasties vairāku kungu varā un nav bijis iespēju attīstīties patstāvīgi. Kad 90.-to gadu sākumā Latvija atguva neatkarību un sākās ekonomiskā krīze, tā īpaši smagi skāra tieši Latgali. Prese kļuva dārgāka, un arī "LaBA" vairs nebija pieejama daudziem skolēniem. Laukos parasti abonēja vienīgi rajona laikrakstus. Šis bija viens no iemesliem, kāpēc radās ideja par JMK.

Ļoti būtisks šī konkursa tapšanas apstāklis bija arī skolēnu psiholoģiskā attieksme pret PCK nodarbībām. Daudziem skolēniem, it sevišķi jaunākiem, PCK uzdevumi ir par grūtiem. Viņi nespēj tikt galā pat ne ar vienu uzdevumu, nonākot diskomfortā paši ar sevi. Tādējādi skolēnam vispār var zust interese par matemātiku un ne tikai par to, viņam var rasties mazvērtības komplekss.

Preiļu 1. vidusskolas organizētā "Jauno matemātiķu konkursa" mērķis bija ne tik daudz celt matemātisko kultūru, bet attīstīt skolēnu pašapziņu. JMK ir paredzēts 4. – 7. klašu skolēniem, taču dažreiz savus risinājumus atsūta arī daudz jaunāki bērni. Šī konkursa uzdevumu komplektā ir vismaz 1 – 2 pavisam vienkārši uzdevumi, ar kuriem var tikt galā katrs skolēns. Skolēnam ir ļoti svarīgi, ka viņš spēj atrisināt uzdevumu, tātad viņš kaut ko var. Un vēl lielāks stimuls tālākajai darbībai ir skolēna uzvārda publicēšana laureātu sarakstā. Tas ne tikai ceļ skolēna pašapziņu, tas ir liels pagodinājums un prieks arī bērna vecākiem un skolotājiem.

JMK 1. kārtas uzdevumi tika publicēti 1993. gada 7. janvārī. Sākumā konkurss notika tikai Preiļu rajonā. 1994./95. mācību gadā tam pievienojās arī Krāslavas, Daugavpils, Ludzas un Balvu rajoni. Bet 1996./97. mācību gadā konkurss aptvēra Preiļu, Ludzas, Krāslavas, Daugavpils un Rēzeknes rajonus. Pateicoties uzdevumu izplatīšanai caur INTERNET, tagad konkursa uzdevumu risinātāji ir ne tikai no Latgales, bet arī no citiem Latvijas novadiem.

Pašreiz par konkursa uzdevumu izplatīšanu un skolēnu darbu labošanu rūpējas LU A. Liepas NMS līdzstrādnieces Dace Bonka, Agnese Šuste un Rudzātu vidusskolas matemātikas skolotāja Veneranda Spriņģe. Lielu darbu konkursa organizēšanā savulaik ieguldījušas arī Sandra Krauze, Kristīne Kiršteina, Inese Bērziņa, Zane Kaibe un Laila Zinberga. Tagad konkursa uzdevumi, atrisinājumi un laureātu vārdi tiek publicēti Latgales novada laikrakstā "Vietējā", kā arī LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas mājas lapā http://nms.lu.lv.

Šajā grāmatā ir apkopoti visi Jauno Matemātiķu konkursa uzdevumi ar atrisinājumiem no 2000./2001. līdz 2004./2005. mācību gadam ieskaitot. Sākot ar 2005./06. mācību gadu tiek izdota uzdevumu krājumu sērija "Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi", kuros tiek apkopoti visi uzdevumi ar atrisinājumiem, kas viena mācību gada laikā tika piedāvāti matemātikas olimpiādēs un konkursos Latvijā 4. – 9. klašu skolēniem. Šajās grāmatās atrodami arī turpmāko mācību gadu JMK uzdevumi ar atrisinājumiem.

Uzdevumi grāmatā sakārtoti hronoloģiskā secībā. To numurs norāda konkursa publicēšanas gadu pēc kārtas, konkursa kārtu un uzdevuma numuru (1992./93. m.g. bija 1. publicēšanas gads, un, piemēram, numurs 9.1.1. nozīmē, ka šis uzdevums bija 2000./2001. m.g. 1. kārtas 1. uzdevums).

Nodaļā „Īsa pamācība uzdevumu risināšanā" dots īss ieskats dažās matemātikas nozarēs („Kombinatorika", „Skaitļu teorija"), kas ļoti plaši tiek pārstāvētas matemātikas konkursu uzdevumu tematikā. Tāpat ir apskatītas galvenās vispārīgās kombinatoriskās metodes – spriedumi, kas plaši pielietojami visdažādākajās jomās. Vairāku uzdevumu risinājumos ir dotas atsauces uz šīs nodaļas materiālu.

Grāmatas sākumā ir dots arī visu uzdevumu sadalījums pa tēmām (galvenokārt – pēc risināšanas metodēm) un īsas norādes par atšķirībām *skolas* un *olimpiāžu* uzdevumu risināšanā.

Iesakām šo darbu izmantot gan skolēniem patstāvīgai risināšanai (vispirms pamēģiniet paši tikt galā ar uzdevumu un tikai tad ieskatieties risinājumā!), gan skolotājiem kā ārpusstundu darbā ar spējīgākiem skolēniem, tā arī tekošās mācību vielas apguvē uzdevumu dažādošanai. Lai prieks risināt!

Autores

ĪSA PAMĀCĪBA UZDEVUMU RISINĀŠANĀ

Matemātikas konkursu un olimpiāžu uzdevumi parasti būtiski atšķiras no skolas tipveida uzdevumiem. Lai gan to atrisināšanai nepieciešamās matemātisko faktu zināšanas nepārsniedz skolas kursā apgūstamās, tomēr šo uzdevumu risināšanā bieži vien jāpielieto tādi spriešanas paņēmieni, kas skolas kursā netiek īpaši akcentēti. Tāpēc šajā nodaļā apkopotas dažas biežāk lietotās metodes, kā arī dotas vispārīgas norādes par konkursu uzdevumu risināšanu un biežāk pieļautās skolēnu kļūdas.

Būtiskākais aizrādījums, it īpaši jaunāku klašu skolēniem, ir tas, ka bieži vien tiek uzrakstīta tikai uzdevuma atbilde. Taču ar to ir par maz, lai labotājs spētu saprast, vai risinātājs ir sapratis uzdevumu un atrisinājis to pareizi.

Uzdevumu veidi

Pirms ķerties pie risināšanas, **rūpīgi jāizlasa** uzdevums, pievēršot vērību katram vārdam. Apskatīsim divus vienkāršus uzdevumiņus:

A „Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 3 **un** kura pēdējais cipars ir 0.” un

B „Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 3 **vai** kura pēdējais cipars ir 0.”

Doto uzdevumu tekstos atšķiras tikai ar viens vārdiņš, taču tas būtiski maina uzdevuma atbildi. **A** piemērā mums jāatrod tāds mazākais skaitlis, kurš gan beidzas ar 0, gan dalās ar 3; tāds ir skaitlis **30**. Savukārt **B** uzdevumā jāatrod mazākais skaitlis, kuram izpildās vismaz viena no šīm īpašībām: mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 3, ir 3; mazākais naturālais skaitlis, kas beidzas ar 0, ir 10, tātad uzdevuma atbilde ir mazākais no skaitļiem 3 un 10, t.i., skaitlis **3**.

Apkoposim iegūtos secinājumus par saikļu lietojumu:

- ✓ saiklis ***un*** nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām/nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- ✓ saiklis ***vai*** nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai/nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības/nosacījumi)
- ✓ saiklis ***vai nu ..., vai*** nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai/nosacījumam.

Tālāk aplūkosim biežāk sastopamos uzdevumu veidus.

„Atrast vismazāko/vislielāko vērtību” – šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām: **1) atrast** šo vismazāko/vislielāko vērtību **un uzrādīt piemēru**, **2) pierādīt**, ka mazāka/lielāka vērtība nevar būt. Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2) daļu.

„Vai var ...?” – uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā”**, vai nu atbilde **„nē”**. Ja atbilde ir **„jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas. Savukārt, ja uzdevuma atbilde ir **„nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

„Kāds var būt...?” – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības un **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

Vispārīgās matemātikas metodes

Matemātikā ir izstrādātas metodes un paņēmieni, kas der kāda noteikta veida uzdevumu vai problēmu risināšanai, bet ir arī tādas metodes, plaši pielietojamas daudzās dzīves jomās. Šīs metodes balstās uz vispāratzītām, cilvēces daudzu gadu simtu laikā gūtām atziņām. Tālāk īsumā apskatīsim šīs metodes.

1. Invariantu metode

Vārds ***invariants*** cēlies no latīņu valodas un nozīmē ***nemainīgs***. Tāpēc par ***invariantiem lielumiem/īpašībām*** sauc lielumus/īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.

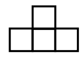
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi u.tml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt NAV iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

atrodam īpašību, kura PIEMĪT sākumā dotajiem lielumiem, SAGLABĀJAS, veicot pieļaujamās operācijas, bet NEPIEMĪT lielumiem, kuri būtu jāiegūst galarezultātā. (To sauc par *invarianto* īpašību.)

<u>1. piemērs.</u> *Ar skaitli atļauts izpildīt šādas darbības: 1) pareizināt ar 3 vai 2) atņemt 9. Vai, pakāpeniski izpildot šīs darbības vairākas reizes, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 1?*

<u>Atbilde:</u> *nē, nevar. Sākotnējais skaitlis 30 dalās ar 3; arī izpildot atļautās darbības, rezultātā iegūtie skaitļi dalīsies ar 3. Savukārt beigās iegūstamais skaitlis 1 ar 3 nedalās. Tāpēc uzdevuma prasības nav izpildāmas. Šajā piemērā invariants ir dalīšanās ar 3.*

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., u.tml. Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – ***krāsošana***, un invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

<u>2. piemērs.</u> *Vai taisnstūri 5×4 rūtiņas var noklāt ar figūriņām*  *tā, lai nekādas divas figūriņas nepārklātos, taisnstūrī nepaliktu nenoklātas vietas un nekādas figūriņu daļas neizietu ārpus taisnstūra?*

<u>Atbilde:</u> *nē, nevar. Taisnstūris sastāv no 20 rūtiņām, bet viena figūriņa – no 4 rūtiņām. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 5 figūriņām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā; pavisam melnā krāsā tiks nokrāsotas 10 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūriņa, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas, tātad nepāra skaitu melnu rūtiņu. Tāpēc arī 5 šādas figūriņas kopā var noklāt tikai nepāra skaitu melno rūtiņu. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams. Šajā piemērā invariants ir melno rūtiņu skaits – neatkarīgi no skaitīšanas secības (skaitot tās taisnstūrī vai figūriņās), vienu un to pašu objektu skaitam jābūt nemainīgam.*

Vairāk par **invariantu metodi** skat., piemēram, [1].

Šajā grāmatā **invariantu metode** ir lietota 9.4.3., 11.2.5., 12.5.3., 13.2.3. uzdevumu risinājumos.

2. Vidējās vērtības metode

Vidējās vērtības metode idejiski balstās uz šādu principu: ***„Lai paveiktu lielas lietas, vismaz vienā virzienā jāsakoncentrē pietiekami lieli līdzekļi”.***

Uzdevumu risināšanā balstīsimies uz konkrētāk formulētām teorēmām. Minēsim dažas no tām.

1. Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.

2. Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.

3. Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Vidējās vērtības metodes speciālgadījums ir ***Dirihlē princips***:

ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.

Ir patiess arī vispārīgāks apgalvojums (*vispārinātais Dirihlē princips*):

ja vairāk nekā m·n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz m+1 trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

3. piemērs. Pierādīt, ka no jebkuriem 14 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus, kuru starpība dalās ar 13.

Risinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 13, var dot 13 dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 vai 12. Dotos 14 skaitļus uzskatīsim par „trušiem”, savukārt vienā „būrī” ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13, tātad ir 13 „būri”. Saskaņā ar Dirihlē principu, 14 „trušus” izvietojot pa 13 „būriem”, vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši”; t.i., vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 13. Bet šo skaitļu starpība dalās ar 13 (skat. „Dalāmības īpašības”, Nr. 5, 11. lpp.); prasītais pierādīts.

Vairāk par **vidējās vērtības metodi** skat., piemēram, [L2], [L3].

Šajā grāmatā **Dirihlē princips** izmantots 9.2.4., 11.4.3., 13.3.5. uzdevumos.

3. Ekstremālā elementa metode

Šīs metodes būtība balstās uz atziņu, ka ***cilvēka patiesās īpašības un raksturs vislabāk atklājas ekstremālos apstākļos***.

Matemātiski tas nozīmē, ka pētot parādības vai īpašības kādā kopā (skaitļu, figūru, cilvēku u.tml. grupā), tās visspilgtāk izpaužas robežgadījumos; tam elementam, kurš kaut kādā veidā ir īpašs starp citiem pētāmās kopas elementiem.

Ekstremālā elementa metodi matemātikā visizdevīgāk ir lietot tad, kad jāpierāda, vai dotā īpašība ir vai nav spēkā visiem kopas elementiem, citiem vārdiem sakot, kad jāpierāda tādas kopas, kurai piemīt vai nepiemīt konkrētā īpašība, eksistence.

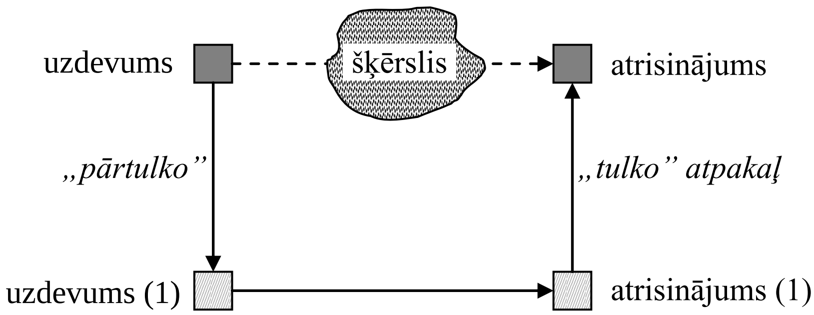
4. piemērs. Vai var gadīties, ka 15 dažādi skaitļi ir izrakstīti pa apli tā, ka katrs skaitlis vienāds ar savu kaimiņu vidējo aritmētisko?

Atbilde: nē, nevar. Apskatīsim vismazāko no uzrakstītajiem skaitļiem M. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi M kaimiņi A un B ir lielāki nekā M: A>M un B>M. Tātad arī skaitļu A un B vidējais aritmētiskais lielāks nekā M: $\frac{A+B}{2} > \frac{M+M}{2} = M$. *Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar piemeklēt kaimiņus, nevar gadīties, ka 15 skaitļi uzrakstīti atbilstoši uzdevuma prasībām.*

4. Interpretāciju metode

Šīs metodes būtība slēpjas šādā cilvēces dzīves pieredzē gūtā secinājumā „***ja ceļā ir šķērslis, jāmēģina apiet tam apkārt***” jeb uzdevumu risināšanā tas izpaužas šādi:

ja doto uzdevumu ar šajā nozarē pieejamiem līdzekļiem atrisināt ir sarežģīti vai neiespējami, tad doto uzdevumu aizstāj ar atbilstošu uzdevumu citā nozarē, kur atrisinājums iegūstams daudz vienkāršāk vai ir triviāls, atrisina jauno uzdevumu un rezultātu “tulko” atpakaļ uz sākotnējo “valodu”



Risinot uzdevumu ar interpretāciju metodes palīdzību, rīkojas pēc šāda plāna:

1. izvēlas atbilstošu interpretāciju (tas parasti ir vissarežģītākais etaps visā risinājumā);

2. “pārtulko” visus dotos lielumus un sakarības;

3. pārliecinās, ka interpretācija ir korekta;

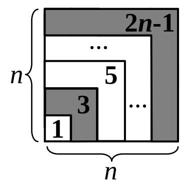
4. atrisina jauno uzdevumu;

5. rezultātu “tulko” atpakaļ.

Kā redzam, lai uzdevumu risināšanā veiksmīgi lietotu interpretāciju metodi, nepieciešamas labas zināšanas daudzās matemātikas (un ne tikai) nozarēs, kā arī labi jāizprot saistība starp lielumiem dažādās nozarēs. Tāpēc interpretāciju metode vairāk ir izmantojama vecākās klasēs.

5. piemērs. Pierādīt, ka $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Pierādījums. Skaties zīmējumu!



Šajā grāmatā **interpretāciju metode** ir lietota 13.2.5., 13.5.5. uzdevumu risinājumos.

Jaunāko klašu skolēniem uztverami un lietojami interpretāciju piemēri ir teksta uzdevumu risināšana, izmantojot *grafus*, algebrisku izteiksmju aprēķināšana vai pārveidošana, izmantojot laukumus.

Par ***grafu*** sauc *zīmējumu, kas sastāv no punktiem, no kuriem daži pa pāriem ir savienoti ar līnijām*. Gandrīz vienmēr ir izdevīgi zīmēt grafu, ja uzdevumā ir runa par, piemēram, cilvēkiem, kas savā starpā draudzējas, ir pazīstami u.tml., par ceļu vai avioreisu sistēmu starp vairākām pilsētām u.tml. – t.i., gadījumos, kad var pastāvēt vai nepastāvēt sakarības starp diviem *objektiem*. Zīmējot atbilstošo grafu, parasti *objektus* attēlo ar punktiem – tos sauc par *grafa virsotnēm*, un ja starp diviem *objektiem* pastāv uzdevumā minētās attiecības, tad atbilstošos punktus (*virsotnes*) savieno ar līniju – to sauc par *grafa šķautni*. Bieži vien, domājot par uzskatāmo zīmējumu, vieglāk nekā citā ceļā var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai atbilstošā grafa neiespējamību.

Šajā grāmatā **uzdevumi, kas reducējas uz grafiem,** ir 10.1.1., 12.2.4., 12.4.4., 13.1.5.

5. Matemātiskā indukcija

Matemātiskās indukcijas metode ļauj izdarīt spriedumus no atsevišķu elementu īpašībām par visu kopu.

Lietojot matemātisko indukciju uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*induktīvā bāze*);

pieņem, ka šī īpašība ir spēkā arī pirmajiem k elementiem (*induktīvā hipotēze*) un

pierāda, ka tad tā ir patiesa arī (k+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).

Matemātiskās indukcijas metode pamatā ir lietojama pierādījuma uzdevumos, un tās prasmīga lietošana prasa labi attīstītas spriešanas spējas un diezgan lielu matemātisko zināšanu bagāžu. Tāpēc jaunāko klašu skolēniem paredzēto uzdevumu risināšanā matemātiskā indukcija praktiski netiek izmantota.

Šajā grāmatā **matemātiskās indukcijas metode** ir lietota 13.3.3. uzdevuma risinājumā.

Mazliet no skaitļu teorijas

Skaitļu teorija ir matemātikas nozare, kas pēta **veselo** skaitļu dalāmību. Saka, ka skaitlis a dalās ar skaitli b (apzīmē $a \vdots b$), ja eksistē tāds vesels skaitlis c, ka $a = b \cdot c$.

Apzīmējums $\overline{...dcba}$ izsaka naturālu skaitli, kas satur a vienus, b desmitus c simtus, d tūkstošus utt. (a, b, c, d, ... var būt tikai cipari – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Tātad, piemēram, skaitlis $\overline{dcba} = 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$.

Atcerieties! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par **veseliem** skaitļiem. 0 ir vesels skaitlis, bet nav naturāls skaitlis.

Dalāmības īpašības

Visi tālāk pieminētie skaitļi ir veseli.

1. Ja a dalās ar c un b dalās ar c, tad arī skaitļu a un b summa un starpība dalās ar c.

$$\boxed{a \vdots c \text{ un } b \vdots c \quad \Rightarrow \quad a \pm b \vdots c}$$

2. Ja a dalās ar b, tad arī skaitļa a reizinājums ar jebkuru veselu skaitli k dalās ar b.

$$\boxed{a \vdots b \quad \Rightarrow \quad a \cdot k \vdots b}$$

3. Ja *a* dalās ar *b* un *b* dalās ar *c*, tad *a* dalās ar *c*.

$$\boxed{a \vdots b \text{ un } b \vdots c \quad \Rightarrow \quad a \vdots c}$$

4. Ja *a* dalās ar *c* un *b* dalās ar *d*, tad $a \cdot b$ dalās ar $c \cdot d$.

$$\boxed{a \vdots c \text{ un } b \vdots d \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \vdots c \cdot d}$$

5. Ja divi skaitļi *a* un *b* dod vienādus atlikumus, dalot ar *c*, tad šo skaitļu starpība $a-b$ dalās ar *c*.
6. Ja vienādības labā puse dalās ar *n*, tad arī vienādības kreisā puse dalās ar *n* (un otrādi).

Dalāmības pazīmes

Risinot praktiskus uzdevumus, bieži ir nepieciešams novērtēt, vai dotie skaitļi dalās viens ar otru. Tālāk tiks norādītas pazīmes dalāmībai ar dažiem skaitļiem.

1. Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars dalās ar 2 (t.i., ir pāra cipars: 0, 2, 4, 6 vai 8).
2. Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.
3. Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējie divi cipari veido skaitli, kas dalās ar 4. (Piemēram, 756**48** dalās ar 4, jo 48 dalās ar 4.)
4. Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējie trīs cipari veido skaitli, kas dalās ar 8. (Piemēram, 5627**104** dalās ar 8, jo 104 dalās ar 8.)
5. Skaitlis dalās ar 3, jā tā ciparu summa dalās ar 3. (Piemēram, 143568 dalās ar 3, jo 1+4+3+5+6+8 = 27 dalās ar 3.)

   Līdzīga pazīme arī dalāmībai ar 9:

6. Skaitlis dalās ar 9, jā tā ciparu summa dalās ar 9. (Piemēram, 143568 dalās arī ar 9, jo 1+4+3+5+6+8 = 27 dalās ar 9.)
7. Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu, kas atrodas pāra pozīcijās, summas un ciparu, kas atrodas nepāra pozīcijās, summas starpība dalās ar 11. (Piemēram, 1**2**3**6**4**7**5**9** dalās ar 11, jo (2+6+7+9) – (1+3+4+5) = 24–13 = 11 dalās ar 11.)

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par *pirmskaitli* sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis. Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.

Aritmētikas pamatteorēma. *Katru naturālu skaitli var vienā vienīgā veidā izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu.*

Piemēram, $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Iegūto pirmskaitļu reizinājumu sauc par skaitļa *sadalījumu pirmreizinātājos*.

Vairāk par skaitļu teorijas jautājumiem skat., piemēram, [L1].

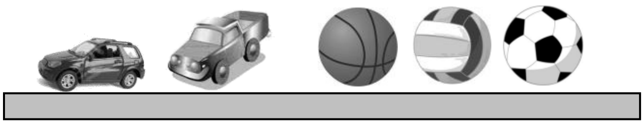
Mazliet no kombinatorikas

Bieži nākas aprēķināt, cik ir kāda veida objektu, vai arī noskaidrot, cik dažādos veidos kaut ko no kaut kā var izvēlēties. Risinot šos uzdevumus būtu jāņem vērā tālāk minētie kombinatorikas pamatlikumi.

Kombinatorikas saskaitīšanas likums

<u>6. piemērs.</u> *Veikala plauktā ir 2 dažādas mašīnas un 3 dažādas bumbas (skat. P1. zīm.). Ja Kristaps drīkst izvēlēties tikai vienu no šīm rotaļlietām, tad viņš var izvēlēties* ***<u>vai nu</u>*** *tikai*

džipu ***vai*** *tikai pikapu,* ***vai*** *tikai basketbola bumbu,* ***vai*** *tikai volejbola bumbu,* ***vai*** *tikai futbola bumbu. Tātad Kristaps sev vienu rotaļlietu var izvēlēties* $2+3=5$ *dažādos veidos.*

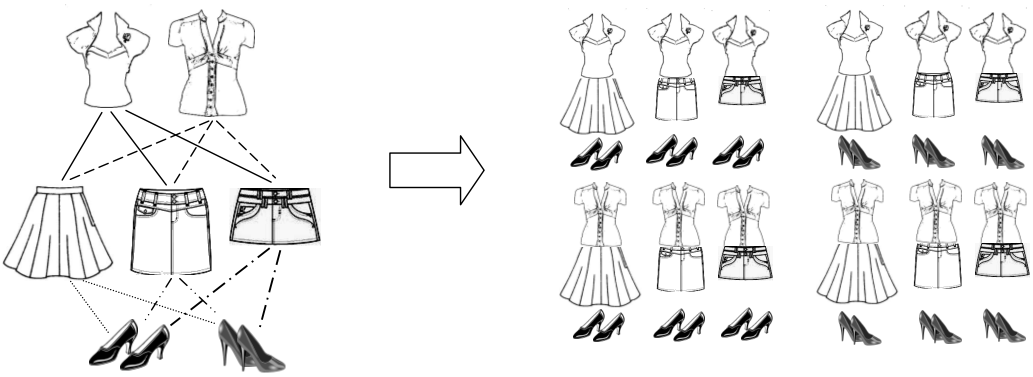


P1. zīm.

Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1, n_2, n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas vai nu viena, vai otra, vai trešā utt. Veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $\boxed{M = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}$ veidos.

Kombinatorikas reizināšanas likums

7. piemērs. *Kristīne sev apģērbu no* 2 *dažādām blūzītēm* ***un*** 3 *dažādiem svārkiem,* ***un*** 2 *dažādiem kurpju pāriem var izvēlēties* $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ *dažādos veidos (skat. P2. zīm.).*



P2. zīm.

Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties $n_1, n_2, n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida un otrā veida, un trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $\boxed{N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots}$ veidos.

Ievērojiet! Ja ir vārdiņš „***vai***” – lietojam saskaitīšanas likumu, vārdiņš „***un***” – reizināšanas likumu!

Permutācijas, variācijas, kombinācijas

Par ***permutāciju*** sauc visu doto elementu sakārtojumu rindā.

8. piemērs. *Ja ir doti trīs elementi ☺, 😐, ☹, tad no tiem var izveidot šādas permutācijas: ☺😐☹, ☺☹😐, 😐☹☺, 😐☺☹, ☹😐☺, ☹☺😐.*

Ja ir dots noteikts skaits dažādu elementu, tad, izvēloties no tiem noteiktu skaitu elementu, varam izveidot dažādas šo atšķirīgo elementu izlases.

9. piemērs. *No trim dažādiem simboliem ☺, 😐, ☹, izvēloties divus no tiem, var izveidot izlases ☺😐, ☺☹, 😐☹.*

Šādas izlases sauc par ***kombinācijām*** (iepriekšējā piemērā veidojām kombinācijas no 3 elementiem pa 2 elementiem katrā). Turklāt kombinācijās **nav** svarīga elementu secība (iepriekšējā piemērā ☺😐 un 😐☺ ir viena un tā pati kombinācija).

Kombinācijas ir izlases no *n* elementiem pa *k* elementiem katrā, kas atšķiras cita no citas kaut ar vienu elementu.

Izlases, kurās ir svarīga arī elementu secība, sauc par ***variācijām***. Ja apskatām 9. piemērā dotos 3 simbolus ☺, 😐, ☹, tad variācijas no šiem trim elementiem ir ☺😐, 😐☺, ☺☹, ☹☺, 😐☹, ☹😐. Variācijas vienmēr ir lielākā skaitā nekā kombinācijas no vieniem un tiem pašiem elementiem.

Variācijas ir izlases no *n* elementiem pa *k* elementiem katrā, kas atšķiras cita no citas ar kaut vienu elementu **vai** to secību.

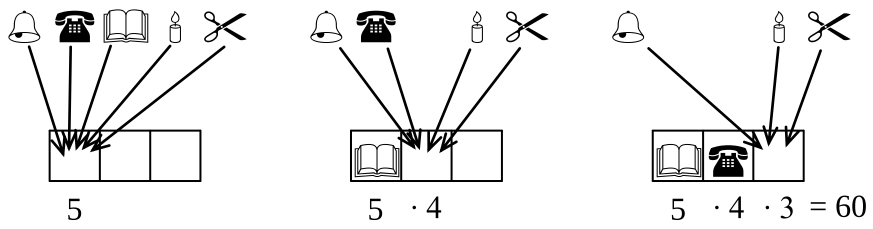
Kā aprēķināt permutāciju, variāciju un kombināciju skaitu?

Visu ***permutāciju skaitu*** aprēķina $\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}$, t.i., ja n dažādi elementi jāsakārto rindā, tad to var izdarīt pavisam P_n veidos. (Reizinājumu $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ apzīmē ar $n!$ un lasa „*n faktoriāls*”.)

Tātad 8. piemērā visu permutāciju skaits tiešām ir $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.

Lai aprēķinātu ***variāciju skaitu*** no *n* dažādiem elementiem pa *k* elementiem, ir jāaprēķina, cik veidos šos *k* elementus var sakārtot rindā.

<u>*10. piemērs.*</u> *Veidosim visas variācijas no* 5 *elementiem pa* 3 *elementiem katrā. P3. zīmējumā redzams, ka pirmajā rūtiņā var ievietot jebkuru no* 5 *elementiem, ja viens elements jau ir ievietots (piem., grāmata), tad otrajā rūtiņā var ievietot jebkuru no atlikušajiem* 4 *elementiem (skat. P4. zīm.) un, ja ir jau ievietoti pirmie divi elementi (piem., grāmata un telefons), tad pēdējā rūtiņā var ievietot jebkuru no atlikušajiem* 3 *elementiem (skat. P5. zīm.). Tātad no šiem elementiem pavisam var izveidot* $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ *variācijas. (Ievērojiet! Tika pielietots kombinatorikas reizināšanas likums.)*



P3. zīm. P4. zīm. P5. zīm.

Visu variāciju skaitu no *n* elementiem pa *k* elementiem apzīmē ar simbolu A_n^k. No piemēra viegli secināt, ka variāciju skaita aprēķināšanas formula vispārīgā gadījumā ir $\boxed{A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$.

Lai aprēķinātu ***kombināciju skaitu*** no *n* elementiem pa *k* elementiem, variāciju skaits ir jādala ar to, cik veidos rindā var sakārtot *k* elementus.

<u>*11. piemērs.*</u> *Ja ir jāizveido variācijas no* 3 *elementiem ☺, 😐, ☹ pa* 2 *elementiem, tad to var izdarīt* $3\cdot 2 = 6$ *veidos (* <u>☺😐, 😐☺</u>, <u>☺☹, ☹☺</u>, <u>😐☹, ☹😐</u> *). Tā kā kombinācijās* <u>*nav*</u> *svarīga elementu secība, visas šīs variācijas var apvienot grupās (šoreiz – pāros), kurās ietilpst vieni un tie paši elementi, t.i., katra grupa atbilst vienai kombinācijai. Pie tam visās grupās ir vienāds skaits variāciju – tik, cik veidos var sakārtot šos visus elementus. (Šoreiz* $2\cdot 1 = 2$ *veidos (piem., ☺☹, ☹☺).) Tāpēc mūsu piemērā visu kombināciju skaits ir* $\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$.

Kombināciju skaitu no *n* dažādiem elementiem pa *k* elementiem apzīmē ar simbolu C_n^k.

Kombināciju skaita aprēķināšanas formula ir $\boxed{C_n^k = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}}$.

Savukārt, ja kopā ir arī vienādi elementi, vai arī izlasē elementi var atkārtoties, tad visu izlašu skaita aprēķināšanai jālieto citas formulas.

Variācijas ar atkārtojumiem

Ja no n dažādiem elementiem jāizveido visas iespējamās virknes, kas sastāv no m elementiem (virknē elementi var atkārtoties!), tad kā pirmo virknes locekli var izvēlēties jebkuru no dotajiem n elementiem, un kā otro virknes locekli arī var izvēlēties jebkuru no dotajiem n elementiem, utt., tātad pavisam šādu virkņu ir $\boxed{\overline{A}_n^m = n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = n^m}$ (ar $\overline{A}_n^m$ tiek apzīmēts visu variāciju no n elementiem garumā m ar atkārtojumiem skaits).

<u>12. piemērs.</u> *Ja ir jāizveido variācijas ar atkārtojumiem no* 3 *elementiem* ☺, 😐, ☹ *pa* 2 *elementiem, tad to var izdarīt* $3\cdot3=3^2=9$ *veidos* (☺☺, 😐😐, ☹☹, ☺😐, 😐☺, ☺☹, ☹☺, 😐☹, ☹😐).

Kombinācijas ar atkārtojumiem

Apskatīsim piemērus, kā noteikt visu iespējamo kombināciju skaitu, ja no n dažādiem elementiem jāizveido m elementu izlases, kurās var būt arī vienādi elementi.

<u>13. piemērs.</u> *Ja ir jāizveido kombinācijas ar atkārtojumiem no* 3 *elementiem* ☺, 😐, ☹ *pa* 2 *elementiem, tad to var izdarīt* 6 *veidos* (☺☺, 😐😐, ☹☹, ☺😐, ☺☹, 😐☹).

<u>14. piemērs.</u> *Seši ceļotāji iegriežas ēdnīcā, kur katram pieejams viens no šādiem ēdieniem:*

1) amerikāniskais hot dog („karstais suns");
2) lietuviešu un krievu iecienītais antrekots („otrais kaķis") un
3) latviešu iecienītais eskalops.

Apzīmē šos ēdienus ar H, A un E. Trīs ceļotāji izvēlas H, divi – A, bet viens – ēdienu E. Apkalpotāja, kas pieņem pasūtījumu, pieraksta to savā blociņā šādi: xxx|xx|x. *Divas vertikālās svītras nodala trīs pasūtītos ēdienus H, A, E vienu no otra. Katru no pasūtītajiem ēdieniem apzīmē ar simbolu* x. *Piemēram, ja divi tūristi pasūta H, bet pārējie četri – ēdienu E, to pieraksta šādi:* xx||xxxx. *Ja visi* 6 *ceļotāji vēlas eskalopu, tad pieraksts iznāk šāds:* ||xxxxxx. *Turpretī, ja visi dod priekšroku karstajam sunim, tad pasūtījuma pieņēmēja raksta:* xxxxxx||. *Tātad* 6 *apmeklētāji pavisam var pasūtīt ēdienus* $\frac{(6+2)!}{6!\cdot 2!}$ *veidos.* $(6+2)!$ *izsaka, cik veidos var sakārtot* 6 „x" *un* 2 „|", *ja tie visi būtu dažādi;* 6! – *cik veidos var sakārtoties* 6 „x"; 2! – *cik veidos var sakārtoties* 2 „|".

Tātad vispārīgā gadījumā kombināciju ar atkārtojumiem skaits ir $\boxed{\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m}$.

Permutācijas ar atkārtojumiem

Ja n elementu virknē ir vairāki vienādi elementi, kas atkārtojas attiecīgi $n_1, n_2, n_3, \ldots$ reizes, tad šādu virkni var sakārtot pavisam $\boxed{\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots}}$ veidos.

<u>15. piemērs.</u> *No burtiem* MATEMATIKA *pavisam var izveidot*

$$\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(1\cdot2\cdot3)(1\cdot2)(1\cdot2)} = 151200$$

dažādas virknes, kur 10! *izsaka, cik veidos var sakārtot visus burtus, ja tie visi būtu dažādi,* 3! – *cik veidos var sakārtot burtus „*A*",* 2! – *cik veidos var sakārtot burtus „*M*",* 2! – *cik veidos var sakārtot burtus „*T*".*

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie ir sadalīti 5 grupās pa tēmām: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām ir sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 7. klašu skolēniem, tad metodes izvēle ir atkarīga no skolēnu vecuma un tajā brīdī viņiem pieejamām zināšanām.

ALGEBRA	
Algebriskie pārveidojumi, darbības ar skaitļiem:	9.2.3., 9.3.3., 9.4.5., 12.3.1., 12.4.3., 13.4.1., 13.5.1.
Vienādojumi:	9.4.2., 12.3.2., 13.3.2.
Vienādojumu vai nevienādību sistēmas:	10.3.2., 11.2.3., 11.3.4., 12.1.3., 13.4.4.
Uzdevumi par kopīgo darbu:	10.4.2.
Attiecības, daļas, daļskaitļi:	10.5.1., 11.2.1., 13.1.3.
Skaitļu, ciparu virknes:	9.5.1., 9.5.3., 10.2.2., 10.2.4., 10.4.3., 12.5.1., 13.5.4.
Teksta uzdevumi par kustību:	9.5.5., 12.3.5., 13.2.2., 13.4.5.
Dažādi teksta uzdevumi:	9.1.1., 9.1.4., 10.1.2., 11.5.2.
Skaitļu rēbusi:	9.2.5., 9.4.1., 10.3.1., 11.1.1., 11.3.1.,11.5.1., 12.1.1.
ĢEOMETRIJA	
Klasiskā ģeometrija:	9.1.3., 11.4.4., 12.2.5., 12.3.3., 13.3.4.
Ģeometriskie objekti telpā:	10.3.5., 10.5.5., 11.3.3., 12.2.2., 13.5.2.
Objektu novietojums plaknē:	9.4.4., 11.1.4., 12.1.2., 12.5.2., 13.2.4., 13.3.3., 13.4.2.
Objekti rūtiņu plaknē:	10.5.4.
Uzdevumi par figūru sagriešanu/salikšanu:	9.2.2., 9.3.2., 9.4.4., 9.5.4., 10.1.5., 10.2.3., 10.3.5., 10.5.5., 11.2.4., 11.3.3., 11.3.5., 11.4.5., 11.5.4., 12.2.2., 12.4.2., 13.1.2., 13.5.2.
Simetrija:	11.4.5., 13.4.3.
SKAITĻU TEORIJA	
Skaitļu dalāmība, atlikumi:	9.1.4., 10.2.4., 12.2.3., 12.4.1., 13.2.1.
Skaitļa sadalījums reizinātājos, pakāpju īpašības:	9.3.3., 11.3.2.
Skaitļa decimālais pieraksts:	11.2.2., 11.4.1., 12.2.3., 13.1.1., 13.1.4., 13.3.5.
Dirihlē princips:	13.3.5.
Invarianti (dalāmības):	9.4.3., 11.2.5., 13.2.3.
Gadījumu pārlase:	9.1.2., 9.2.1., 11.4.2., 11.5.5.

KOMBINATORIKA	
Objektu skaitīšana:	9.3.5., 10.1.4., 10.2.5., 10.4.1., 10.4.4., 11.1.2., 11.3.2., 11.4.1., 12.3.4., 12.4.5.
Uzdevumi, kas reducējas uz grafiem:	10.1.1., 12.2.4., 12.4.4., 13.1.5.
Loģiska satura uzdevumi:	9.1.5., 9.3.4., 10.2.1., 10.5.2.
Invariantu metode:	12.5.3.
Dirihlē princips:	9.2.4., 11.4.3.
Kombinatoriskās struktūras, Eilera riņķi:	9.5.2., 10.1.3., 10.5.3., 11.1.3., 11.1.5., 12.1.4., 12.2.1., 13.3.1.
Interpretāciju metode:	13.2.5., 13.5.5.
Matemātiskā indukcija:	13.3.3.
Varbūtības:	9.4.5., 10.3.3.
Dažādi uzdevumi:	13.5.3.
ALGORITMIKA	
Spēles:	10.4.5.
Kombinatorisko algoritmu atšifrēšana:	9.3.1., 9.5.3., 10.3.4., 12.5.5.
Kombinatorisko algoritmu analīze:	12.5.4.
Turnīri, svēršanas:	11.5.3., 12.1.5.

UZDEVUMI

2000./2001. mācību gads

1. kārta

9.1.1. Vienu gadu februārī bija piecas otrdienas. Kurā nedēļas dienā tajā gadā bija 13. februāris?

9.1.2. Ar skaitli atļauts veikt tikai šādas darbības:

a) pareizināt ar 6;
b) izdalīt ar 3;
c) pierakstīt skaitlim labajā pusē 1.

Vai ar šādām darbībām, veicot tās patvaļīgā secībā cik patīk daudz reizes, no skaitļa 1 var iegūt visus skaitļus no 1 līdz 10? (Ja skaitli var iegūt, parādi kā; ja nevar – pamato kāpēc!)

9.1.3. Uzzīmē 130° lielu leņķi *ABC*. Tā iekšpusē novelc divus starus *BK* un *BL*, tā lai leņķis *ABK* būtu 90° liels, bet leņķis *LBC* būtu 60° liels. Nosaki, cik liels ir leņķis *KBL*!

9.1.4. Vienā klasē 40% skolēnu dzimuši vasarā, $\frac{1}{5}$ skolēnu dzimuši rudenī, $\frac{1}{7}$ skolēnu dzimuši ziemā, bet pārējiem dzimšanas diena ir pavasarī. Cik skolēnu ir šajā klasē, ja zināms, ka to skaits nepārsniedz 40 un ir vismaz 15?

9.1.5. Četri zēni – Aldis, Pēcis, Didzis un Mārcis – sacentās skriešanā. Nākamajā dienā uz jautājumu, kurš ieņēmis kādu vietu, zēni sniedza atbildes, kā parādīts 1. zīmējumā.

1. zīm.

Ir zināms, ka trīs zēni runāja taisnību, bet viens zēns meloja. Kurš zēns meloja? Kurš uzvarēja sacensībās, ja zināms, ka nekādi divi zēni finišu nesasniedza vienlaicīgi?

2. kārta

9.2.1. Uzraksti vienu četrciparu skaitli, kas ar katru no skaitļiem 6972, 4512 un 6813 vienā šķirā sakrīt, bet trijās citās atšķiras. Cik pavisam tādus skaitļus var uzrakstīt?

9.2.2. Ir dotas visas iespējamās figūriņas, kas sastāv no piecām rūtiņām (vienā figūrā katrai rūtiņai ir vismaz viena kopīga mala ar kādu citu rūtiņu). Katru no šīm figūriņām izmantojot tieši vienu reizi, saliec taisnstūri 6×10 rūtiņas!

9.2.3. Izteiksmē

$$20 : 19 : 18 : 17 : 16 : 15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10$$

saliec iekavas tā, lai

a) rezultāts būtu vislielākais iespējamais;

b) rezultāts būtu vismazākais iespējamais!

9.2.4. Viesnīcā satikās četri tūristi. Katrs no viņiem zina tieši divas no trim valodām – latviešu, krievu vai angļu. Vai viņi visi varēs uzzināt no biedriem visu informāciju? (Ja kādu ziņu A izstāsta B, bet B izstāsta C, tad uzskata, ka šo ziņu tagad zina gan A, gan B, gan C.)

9.2.5. Dotajā piemērā vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem (skat. 2. zīm.). Noskaidrojiet, kāds cipars atbilst katram burtam un atjaunojiet doto reizināšanas piemēru!

```
     S U L A
   × A L U S
   ---------
     S U L A
   U A Z E
 L O T U
A K L Z
-------------
I L L U S S A
```

2. zīm.

3. kārta

9.3.1. Ezītis var iet ciemos tikai tad, ja Zaķītis viņu pavada. Zaķītis var iet ciemos tikai tad, ja viņu pavada Pūce vai Lācis, bet Pūce – ja viņu pavada Lācis. Vai visi minētie dzīvnieki varēs aiziet pie Vardes uz vārda dienu, ja zināms, ka Lācim pavadonis nav nepieciešams?

9.3.2. Sagriezt 3. zīmējumā redzamo kvadrātu četrās vienādās daļās tā, lai katrā no tām būtu gan ×, gan Δ, gan **O**! Atrodi vismaz divus atšķirīgus veidus.

			O				
			O				
Δ			×	×			Δ
Δ			×	×			Δ
				O			
				O			

3. zīm.

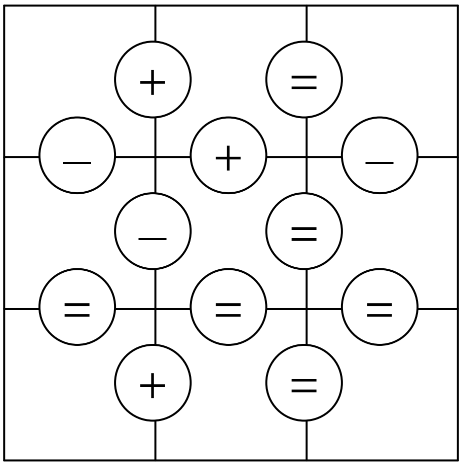
9.3.3. Sakārtot skaitļus $a = 2^{35}, b = 3^{28}, c = 4^{21}, d = 5^{14}$ augošā secībā. ($a = 2^5$ nozīmē $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ u.tml.).

9.3.4. 16 rūķīši sastājušies 4 rindās, pa 4 rūķīšiem katrā rindā (izveidojas kvadrāts). Daži vienmēr saka taisnību, daži vienmēr melo. Katrs rūķītis apgalvo: "Man kaimiņos ir vismaz 2 meļi." Cik ir meļu? (Par kaimiņiem sauc rūķīšus, kas stāv blakus vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā.)

9.3.5. Klasē mācās 30 skolēni, 12 no tiem ir zēni. Ziemassvētku eglītē viņi spēlēja ludziņu. Cik dažādos veidos viņi varēja sadalīt lomas, ja lugā darbojās Ziemassvētku vecītis, Sniegbaltīte, Ļaunā pamāte, Princis un 7 rūķīši. Ziemassvētku vecīša un Prinča lomas spēlē zēni, Sniegbaltītes un Ļaunās pamātes lomas spēlē meitenes, bet rūķīši var būt gan zēni, gan meitenes.

4. kārta

9.4.1. 4. zīmējumā dotajā kvadrātā katrā tukšajā rūtiņā ierakstīt vienu veselu skaitli (katrā rūtiņā – citu), kas nav mazāks par 1 un nav lielāks par 10, tā, lai norādītās darbības gan pa horizontālēm, gan pa vertikālēm būtu pareizas!



4. zīm.

9.4.2. Mauglis palūdza saviem draugiem – pērtiķiem – atnest viņam riekstus. Pērtiķi savāca katrs vienādu skaitu riekstu un nesa tos Mauglim. Ceļā pērtiķi sastrīdējās, un katrs pērtiķis katram citam meta ar vienu riekstu. Rezultātā Mauglis dabūja tikai 33 riekstus. Cik riekstu savāca katrs pērtiķis pirms ķīviņa? (Pie tam pērtiķis nevar panest vairāk nekā 20 riekstus.)

9.4.3. Debesskrāpim ir 100 stāvi. Tajā darbojas divi lifti: ar vienu liftu var uzbraukt tieši 4 stāvus augstāk, ar otru - nobraukt tieši 6 stāvus zemāk. Neviens lifts nevar uzbraukt augstāk par simto stāvu un nobraukt zemāk par pirmo stāvu. Abus liftus var lietot vairākas reizes pēc kārtas un katru liftu var izsaukt uz jebkuru stāvu. Jānītis sākumā atrodas pirmajā stāvā. Vai izmantojot abus liftus pēc nepieciešamības daudz reižu, Jānītis var nokļūt **a)** 17. stāvā; **b)** 27. stāvā; **c)** 99. stāvā; **d)** 100. stāvā; **e)** 50. stāvā? Ja to var izdarīt, paskaidrojiet, kā Jānītim ir jārīkojas, ja nevar – pamatojiet, kāpēc!

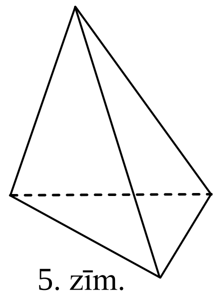
9.4.4. Vai var uzzīmēt trijstūri, kuru var sadalīt 13 vienādos trijstūros?

9.4.5. Anniņa un Pēterītis piedalījās divās loterijās – ZOROLOTO un LOTOMORO. Loterijā ZOROLOTO pavisam ir izdotas 1 000 000 biļetes, no kurām pilnas lozes ir 200 biļetēs; loterijā LOTOMORO pavisam ir izdotas 2 000 000, no kurām laimīgas ir 500 biļetes. Anniņa nopirka 3 biļetes ZOROLOTO, bet Pēterītis nopirka 2 biļetes LOTOMORO. Kuram bērnam ir lielākas izredzes kaut ko vinnēt?

5. kārta

9.5.1. Skaitli $\frac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 31. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

9.5.2. Dota trijstūra piramīda (skat. 5. zīm.).



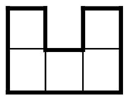
5. zīm.

a) Katrā piramīdas virsotnē un uz katras tās skaldnes uzrakstīt pa vienam ciparam (katru ciparu drīkst rakstīt ne vairāk kā vienu reizi) tā, lai uz skaldnes uzrakstītais cipars būtu vienāds ar to trīs ciparu summu, kas ierakstīti šīs skaldnes virsotnēs.

b) Katrā piramīdas virsotnē un uz katras tās šķautnes uzrakstīt pa vienam ciparam (katru ciparu drīkst rakstīt ne vairāk kā vienu reizi) tā, lai uz šķautnes uzrakstītais cipars būtu vienāds ar to divu ciparu summu, kas ierakstīti šīs šķautnes galapunktos.

9.5.3. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 0; 101; 2001. Ja uz tāfeles jau atrodas 2 skaitļi, atļauts tur vēl uzrakstīt to abu vidējo aritmētisko; no tāfeles nekas netiek nodzēsts. Vai uz tāfeles var iegūt skaitļus 1; 1001; 29. Ja var, parādiet, kā to izdarīt!

9.5.4. Parādiet, kā ar tādām figūrām, kāda parādīta 6. zīm., var pārklāt kvadrātu ar izmēriem 10×10 rūtiņas? Figūras savā starpā nedrīkst pārklāties, bet tās drīkst pagriezt un tās drīkst iziet ārpus kvadrāta robežām.



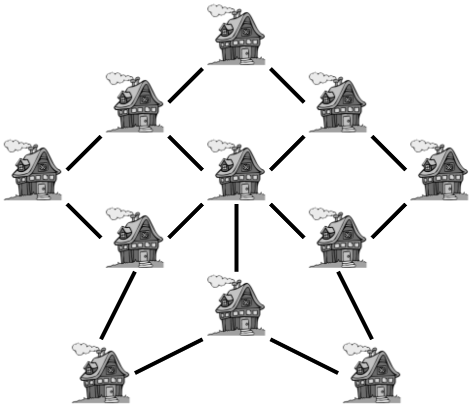
6. zīm.

9.5.5. Kuģis pa Dižupi no Eglaines līdz Bērzainei brauc 3 diennaktis, bet atpakaļ no Bērzaines līdz Eglainei – 5 diennaktis. Cik ilgi pa šo upi no Eglaines līdz Bērzainei brauks plosts? (Piezīme: kuģis savu ātrumu braukšanas laikā nemaina; plostam nekāds dzinējs nav, tas pārvietojas tikai ar upes straumes ātrumu.)

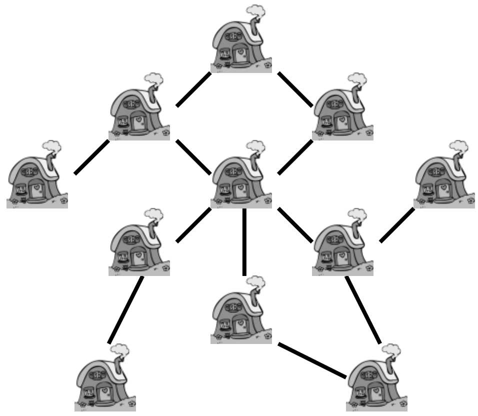
2001./2002. mācību gads

1. kārta

10.1.1. Pastniekam pūķītim Mopsim katru rītu divos trollīšu ciemos jāpiegādā pasts. Trollīšu-čaklīšu ciemā mājiņas savieno daudzi ceļi (skat. 7. zīm.), bet trollīšu-sliņķīšu ciemā vairāki ceļi nav uzbūvēti (skat. 8. zīm.). Mopsis pārvietojas tikai pa ceļiem, turklāt pa katru ceļu tikai vienu reizi. Vai viņš spēs katrā ciemā apstaigāt visas trollīšu mājiņas? Pasta iznēsāšana jāsāk ar kādu ciema malā mītošu trollīti.



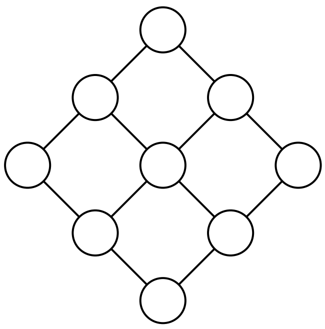
7. zīm.



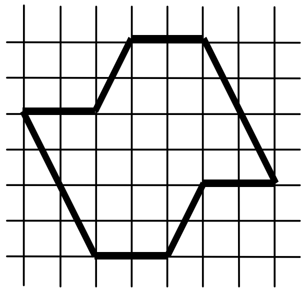
8. zīm.

10.1.2. Trim meitenēm kopā ir 90 sant., turklāt vienai ir tikai 2 sant. monētas, otrai – tikai 5 sant. monētas, bet trešajai – tikai 10 sant. monētas. Cik santīmu ir katrai meitenei, ja zināms, ka vienai no viņām ir tik monētu, cik abām pārējām kopā?

10.1.3. Vai vari ierakstīt aplīšos (skat. 9.zīm.) ciparus no 1 līdz 9 tā, lai katros 3 aplīšos, kas savienoti ar taisnu līniju, ierakstīto ciparu summas būtu vienādas savā starpā?



9. zīm.



10. zīm.

10.1.4. Meža skolā mācās 12 laumiņas un 12 rūķīši. Kā vieni, tā otri ir palaidnīgi, tāpēc Meža vecītis tos nemitīgi pārsēdina. Cik veidos viņš to var izdarīt, ja ir tieši 12 soli un katrā solā ir jāsēž 1 laumiņai un 1 rūķītim?

10.1.5. Ir atļauts griezt tikai pa taisnu līniju no figūras vienas malas līdz otrai (ne obligāti pa rūtiņu malām). Vai šādi griežot (iespējams, vairākas reizes) gan 10. zīmējumā redzamo figūru, gan, iespējams, kādu no griešanas rezultātā iegūtajām figūrām, var iegūt

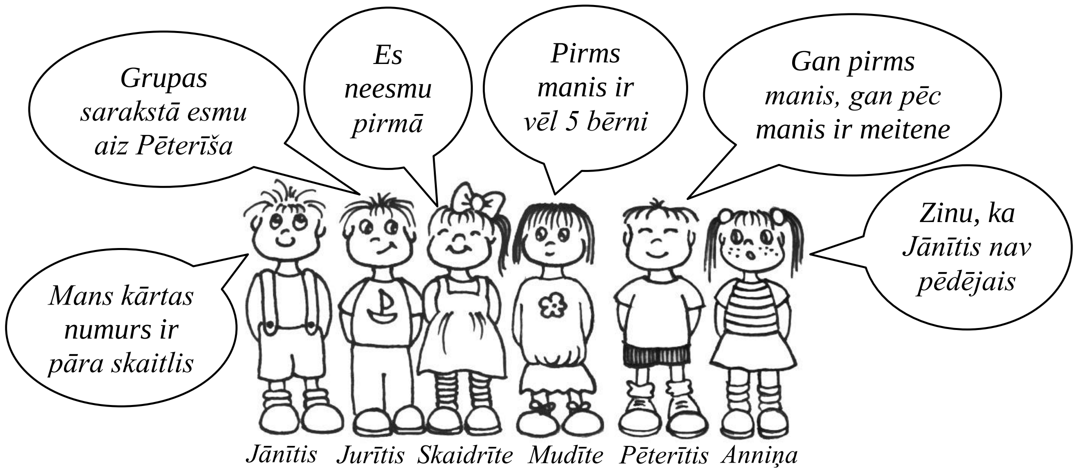
a) 2;

b) 4 jaunas, savā starpā vienādas figūras.

Katrai figūrai jāsastāv no viena gabala, nekas no dotās figūras nedrīkst palikt neizmantots.

2. kārta

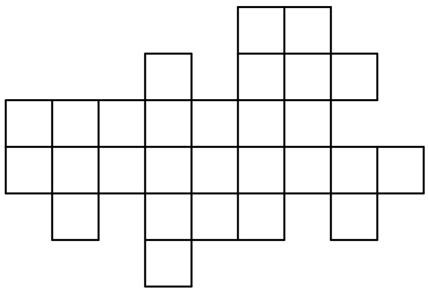
10.2.1. Bērnudārza grupiņas bērni: Jānītis, Jurītis, Skaidrīte, Mudīte, Pēterītis un Anniņa nevar atcerēties kādā kārtībā viņi ir grupas sarakstā, taču katrs no viņiem atceras vienu lietu, kā tas redzams 11. zīmējumā. Palīdzi apjukušajiem bērniem atrast katram savu vietu grupas sarakstā!



11. zīm.

10.2.2. Skaitļu virkne 1; 5; 17; 53;... tiek veidota pēc noteikta likuma. Vai vari pateikt, kāds ir šis likums un vai skaitlis 2001 pieder šai virknei?

10.2.3. Sadali 12. zīmējumā redzamo figūru 2 vienādās daļās!



12. zīm.

10.2.4. Anniņa un Maijiņa sastrīdējās. Anniņa domā, ka viņai izdevies uzrakstīt pa apli ciparus no 1 līdz 9, katru tieši vienu reizi, tā, lai katru 2 ciparu veidotais skaitlis dalās ar 13 vai 17, bet Maijiņa saka, ka var izveidot rindu ar šādu īpašību. Vai kādai no meitenēm ir taisnība?

10.2.5. Māsiņai Lapsiņai ļoti garšo olas, tāpēc viņa 2 reizes dienā apciemo vistu kūtiņu. Vienā reizē lapsa spēj nozagt ne mazāk kā vienu un ne vairāk kā 3 olas. Viņas midzenī atrodas 8 olas. Cik veidos lapsa varēja sanest šīs olas, ja tās sanestas 2 dienu laikā?

3. kārta

10.3.1. Jānītis un Pēterītis ir aizšifrējuši Anniņas telefona numuru, pie tam katrs ar citu šifru. Šifrā katrs cipars ir aizstāts ar vienu burtu, vienādi cipari ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Pie tam abi zēni ir sastādījuši arī vienu pareizu aritmētisku piemēru, ko arī aizšifrējuši ar savu šifru (tādā pašā veidā, kā telefona numuru). Noskaidro Anniņas telefona numuru un abu zēnu aizšifrētos piemērus, ja

Jānīša šifrā Anniņas telefons ir PUBLIKA un pareizs ir piemērs BULK+ILPA=PUAL, bet Pēterītis ieguva numuru SAULITE un piemēru:

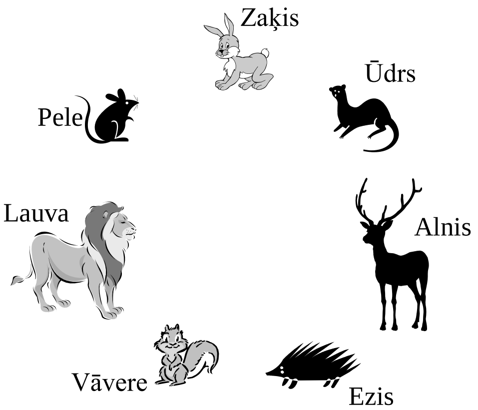
$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{T} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{I} & : \mathrm{A} = \mathrm{U\ U\ S}\\
\underline{\mathrm{I}} & \underline{\mathrm{E}} & & & \\
 & \mathrm{T} & \mathrm{L} & & \\
 & \underline{\mathrm{I}} & \underline{\mathrm{E}} & & \\
 & & \mathrm{T} & \mathrm{I} & \\
 & & \underline{\mathrm{T}} & \underline{\mathrm{I}} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

10.3.2. Zane savā dzimšanas dienā uz skolu atnesa konfektes „Vāverīte” un „Lācītis”, lai pacienātu savus klasesbiedrus. Ja klasesbiedri no tūtas ņemtu tikai konfektes „Lācītis”, tad šo konfekšu pietrūktu 6 bērniem. Ja puse no klases ņemtu konfektes „Vāverīte” un otra puse – „Lācītis”, tad 4 konfektes „Lācītis” paliktu pāri, bet 2 konfektes „Vāverīte” pietrūktu. Toties, ja visi bērni paņemtu pa vienai konfektei, tad tūtā vēl atliktu 2 konfektes. Cik klasē ir bērnu un cik abu veidu konfekšu atnesa Zane?

10.3.3. Baibai patīk krāt laimes akmentiņus, un viņas kolekcijā ir jau 11 dažādi akmentiņi. Katru dienu viņa izvēlas vienu akmentiņu, ko nēsāt līdzi. Kāda iespējamība, ka Baiba paņems tieši to akmentiņu, kuru viņa savā kolekcijā ieguva pirmo? Cik veidos Baiba varētu izvēlēties 3 no saviem akmeņiem? (Tā viņa dara, ja paredzama īpaši grūta diena.)

10.3.4. Meža karalis Lauva veic meža dzīvnieku reģistrāciju. Lai to izdarītu viņam jāapstaigā katrs zvērs (skat. 13. zīm.). (Visu dzīvnieku mitekļi izvietoti pa apli tā, ka attālumi starp blakus mitekļiem ir vienādi.) Bet diemžēl Lauva nevar iet pie dzīvniekiem pēc kārtas, bet gan tā: no dzīvnieka, kura vārds sākas ar patskani, pie dzīvnieka, kura vārds sākas ar līdzskani, attiecīgi no dzīvnieka, kura vārds sākas ar līdzskani, pie dzīvnieka, kura vārds sākas ar patskani utt.

Uzzīmējiet īsāko Lauvas noieto ceļu meža reģistrācijas apgaitā, ja pirmais jāapmeklē dzīvnieks, kura vārds sākas ar patskani, un beigās jāatgriežas mājās.



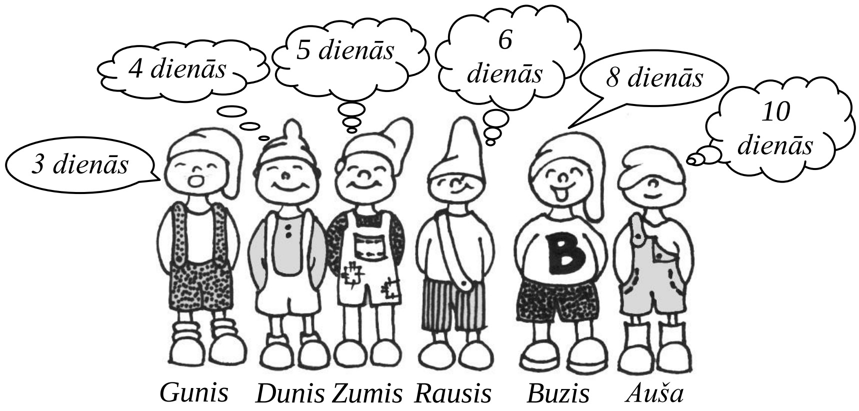
13. zīm.

10.3.5. Kāds ir mazākais spēļu kauliņu daudzums, no kuriem var salīmēt lielāka izmēra spēļu kauliņu, tas ir, kauliņu, uz kura skaldnēm uzrakstīti 6 dažādi skaitļi? Atceries, ka uz spēļu kauliņa skaitļu pierakstam izmanto vajadzīgo daudzumu punktu.

4. kārta

10.4.1. Plaknē novilktas 15 taisnes tā, ka katra taisne ir paralēla tieši četrām citām taisnēm. Cik trijstūrus veido šīs taisnes?

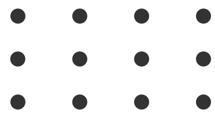
10.4.2. Meža rūķim ir 6 palīgi: Gunis, Dunis, Zumis, Rausis, Buzis un Auša. Viņiem ir jāpabaro visi meža zvēri. Strādājot viens pats, Gunis to var izdarīt 3 dienās, Dunis – 4 dienās, Zumis – 5 dienās, Rausis – 6 dienās, Buzis – 8 dienās un Auša – 10 dienās. Cik ilgā laikā rūķīši padarīs visu darbu, ja strādās kopīgi? (Dienā viņi strādā 10 stundas.). Kāds ir mazākais skaits rūķīšu, kam jāķeras pie darba, lai tiktu galā vienas dienas laikā?



14. zīm.

10.4.3. Skaitli $\frac{1}{23}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un izsvītroja tajā 2002. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

10.4.4. Firma "Spuldzīte" izveidoja sev gaismas reklāmu karoga veidā, kas sastāv no 12 lampiņām: pirmajā rindā 4 zilas, otrajā – 4 dzeltenas, trešajā – 4 sarkanas lampiņas (skat. 15. zīm.). Firmas darbinieki nolēma, ka katru dienu tiks mainīts krāsaino lampiņu izvietojums ievērojot šādu nosacījumu: katrā rindā ir jābūt vismaz trim vienas krāsas lampiņām. Cik dienas ir vajadzīgas, lai parādītu visas iespējamās gaismas reklāmas, ja rezervē ir vēl viena zila un divas sarkanas lampiņas?



15. zīm.

10.4.5. Dotas divas riekstu kaudzes. Pirmajā kaudzē ir 2002 rieksti, bet otrajā ir 2222 rieksti. Vienā gājienā drīkst paņemt jebkuru riekstu daudzumu no vienas kaudzes. Divi spēlētāji gājienus izdara pārmaiņus. Zaudē tas, kam nav ko ņemt. Kurš no diviem spēlētājiem uzvar, pareizi spēlējot: tas, kurš izdara pirmo vai tas, kurš izdara otro gājienu?

5. kārta

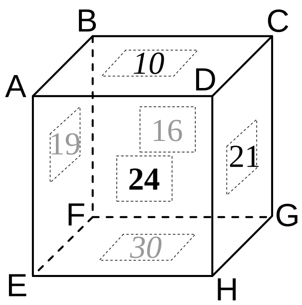
10.5.1. Izmantojot ciparus, katru tieši vienu reizi, uzraksti tādu īstu daļu, kas ir saīsināma: **a)** ar 2; **b)** ar 3; **c)** ar 4; **d)** ar 5 **e)** ar 6; **f)** ar 7; **g)** ar 8; **h)** ar 9.

10.5.2. Noskaidro atbilstību starp draudzeņu vārdiem, uzvārdiem, profesijām un krāsām, ja zināms, ka

1) Kristīnes uzvārds nav Kalniņa;
2) Sandrai patīk sarkanā krāsa un viņa nemāca informātiku;
3) Lāsmai Strautiņai zaļā krāsa liek šķaudīt;
4) Fiziķes laboratorija ir ieturēta dzeltenos toņos.

10.5.3. Kuba virsotnēs tika ierakstīts pa vienam nenulles ciparam – katrā virsotnē cits cipars. Pēc tam kuba skaldnēs ierakstīja to četru ciparu summu, kas atrodas šīs skaldnes virsotnēs un sākumā ierakstītos ciparus nodzēsa. Ieguva 16. zīmējumu (A+B+C+D=10, A+B+E+F=19, B+C+F+G=16, D+C+G+H=21, A+D+E+H=24, E+F+G+H=30).

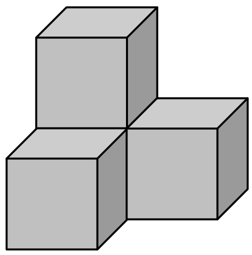
Kurš cipars nebija ierakstīts nevienā virsotnē? Parādi vienu veidu, kā varēja būt izvietoti cipari virsotnēs sākumā! Vai tas ir vienīgais veids?



16. zīm.

10.5.4. Rūtiņu lapā uzzīmēt slēgtu lauztu līniju, kuras visi posmi iet pa rūtiņu malām, posmi viens otru nekrusto, katrs posms ir dažāda garuma un visu posmu kopējais garums ir 44 vienības (1 vienība ir vienas rūtiņas malas garums). Vai uzdevumu var izpildīt, ja posmu kopējais garums ir 51 vienība?

10.5.5. Figūrai, kas redzama 17. zīmējumā, ārpuse ir nokrāsota. Figūriņa tika sagriezta 4 vienādos kubiņos. Cik daudzas dažādas figūras var salikt, ja katrā figūrā jāizmanto visi 4 kubiņi, turklāt tie drīkst saskarties tikai ar nokrāsotajām skaldnēm. (Figūras, kas atšķiras tikai ar nenokrāsoto lauciņu izvietojumu to ārpusē, uzskata par vienādām.)

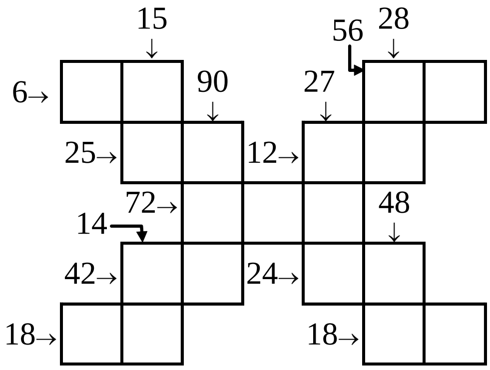


17. zīm.

2002./2003. mācību gads

1. kārta

11.1.1. Ierakstiet 18.zīm. redzamajās rūtiņās katrā pa vienam ciparam tā, lai bultiņu virzienā ierakstīto ciparu reizinājums būtu vienāds ar sākumā norādīto skaitli! Var izmantot visus ciparus, izņemot ciparu 1; cipari var atkārtoties.



18. zīm.

11.1.2. Brencis pazīst tikai ciparus 1, 2, 3, kā arī visus skaitļus, kuru pierakstā izmantoti tikai šie cipari, pie tam visiem cipariem jābūt dažādiem. Cik skaitļus pazīst Brencis? Kāda ir visu šo skaitļu summa?

11.1.3. Limpopo salas visi iedzīvotāji runā vismaz vienā no trim valodām – *burbur, tamtam* vai *cipcip* (ir arī iedzīvotāji, kas prot 2 vai 3 no minētajām valodām). Ir zināms, ka *tamtam* valodā nerunā 200 iedzīvotāji, *burbur* valodā nerunā 210 iedzīvotāji, bet *cipcip* valodā nerunā 220 iedzīvotāji. Vēl ir zināms, ka visas trīs valodas pārvalda 40 salas iemītnieki, bet tikai vienu valodu zina 180 iedzīvotāji. Noskaidrojiet, cik cilvēku dzīvo Limpopo salā!

11.1.4. Attēlojiet plaknē 5 punktus un savienojiet tos ar nogriežņiem tā, lai nekādi divi nogriežņi nekrustotos. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto nogriežņu skaits? Pamatojiet savu spriedumu, ka vairāk nogriežņu novilkt nevar!

11.1.5. Arnis, Baiba, Didzis, Emma un Guntis skatījās televizoru. Katrā reklāmas pauzē tieši divi bērni apēda pa vienai šokolādītei. Vēlāk izrādījās, ka visi ir apēduši dažādu skaitu šokolādīšu. Kāds ir mazākais iespējamais kopā apēsto šokolādīšu skaits? Atrisiniet uzdevumu, ja

a) kāds bērns nav apēdis nevienu šokolādīti;

b) katrs ir apēdis vismaz 1 šokolādīti.

2. kārta

11.2.1. Divi dārgumu meklētāji atrada lādi ar zelta dālderiem. Viens dārgumu meklētājs ieteica tos sadalīt attiecībā 6:5, taču otrs uzstāja, ka dālderi jāsadala attiecībā 9:7, tādējādi viņš ieguva par 30 dālderiem vairāk nekā bija paredzēts sakumā. Noskaidrojiet, cik dālderus ieguva katrs dārgumu meklētājs.

11.2.2. Skaitli sauksim par īpašu, ja tam ir vismaz 2 cipari, pie tam tie ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi (piem., skaitlis 5678 ir īpašs, bet 134 nav īpašs). Vai eksistē 2 dažādi īpaši skaitļi, kuru summa arī ir īpašs skaitlis? Ja šādi īpaši skaitļi eksistē, tad atrodiet visus tādus skaitļus! Atrisināt uzdevumu, ja apskatām

a) divciparu skaitļus;

b) trīsciparu skaitļus (summā var būt arī vairāk ciparu).

11.2.3. Pēteris nopirka 1 saldējumu, 1 bulciņu un 1 limonādi un par pirkumu samaksāja 93 santīmus. Noskaidrojiet, cik maksāja saldējums, cik – bulciņa un cik – limonāde, ja zināms, ka limonāde maksā tikpat, cik 2 bulciņas un 1 saldējums kopā, un ka 1 limonāde maksā vairāk nekā 4 bulciņas, bet mazāk nekā 2 saldējumi. Pie tam zināms, ka saldējums maksā mazāk nekā 30 santīmu.

11.2.4. Parādiet, kā patvaļīgu trijstūri sagriezt 3 daļās, lai no tām varētu salikt taisnstūri!

11.2.5. Uz 100 kartītēm uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100, uz katras kartītes viens skaitlis. Pēc tam uz labu laimi izvēlējās 50 kartītes un nokrāsoja sarkanas, atlikušās 50 nokrāsoja zilas. Vai noteikti iespējams izvēlēties 3 sarkanas un 3 zilas kartītes tā, lai uz sarkanām kartītēm uzrakstīto skaitļu reizinājums būtu vienāds ar uz zilajām kartītēm uzrakstīto skaitļu reizinājumu?

3. kārta

11.3.1. Reizināšanas piemērā (skat. 19.zīm.) vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Atjauno reizināšanas piemēru!

$$\begin{array}{r} ABC \\ \cdot \quad DE \\ \hline AKVA \\ EKD \\ \hline KODDA \end{array}$$

19. zīm.

11.3.2. Cik ir tādu skaitļu, kuru ciparu reizinājums ir 36 un kas ir mazāki par 2003?

11.3.3. Koka kubu ar izmēriem 3×3×3 *cm* nokrāsoja zaļā krāsā, bet pēc tam sagrieza mazākos kubiņos 1×1×1 *cm*.

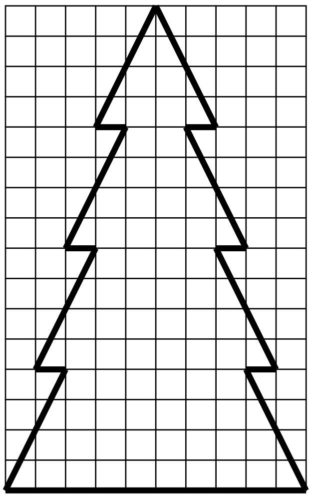
a) Vai no iegūtajiem kubiņiem var vienlaicīgi salikt 3 kubus ar izmēriem 2×2×2 *cm* tā, lai vienam kubam visa virsma būtu zaļa, otram kubam katrā skaldnē tieši 3 cm^2 būtu nokrāsoti zaļā krāsā, trešajam kubam katrā skaldnē tieši 2 cm^2 būtu zaļā krāsā?

b) Vai var vienlaicīgi salikt 3 kubus 2×2×2 *cm* tā, lai visiem kubiem virsma būtu nekrāsota?

11.3.4. Ziemassvētku vecītim palīdz vairāki rūķi. Katram rūķim galvā ir vienkrāsaina cepure. Noskaidro, cik rūķi palīdz Ziemassvētku vecītim, ja zināms, ka

1) 2 rūķiem ir zaļas cepures;
2) 7 rūķiem galvā nav dzeltena cepure;
3) rūķu, kam ir dzeltena cepure, ir par 2 mazāk nekā to, kam ir sarkana cepure;
4) rūķu, kam galvā ir sarkanas cepures ir tik pat, cik rūķu, kuriem ir citas krāsas cepure.

11.3.5. Rūtiņu lapā uzzīmēta eglīte (skat. 20.zīm.). Sagriez to vairākās daļās, no kurām var salikt kvadrātu!



20. zīm.

4. kārta

11.4.1. Aprēķiniet summu visiem naturāliem skaitļiem, kuri mazāki par 1000 un kuru pierakstā izmantoti tikai cipari 1, 2, 3!

11.4.2. Skaitļi *a, b* un *c* ir naturāli skaitļi. Noskaidrojiet, cik var būt pāra skaitļu starp skaitļiem $a+b$, $a+c$, $b+c$, $a \cdot b$, $a \cdot c$, $b \cdot c$. Apskatiet visas iespējas!

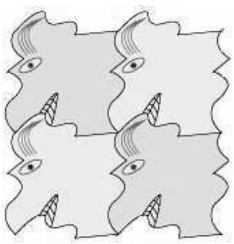
11.4.3. Akmeņkalis Vizlis dabas parkam izgatavoja 17 skulptūras, kuru masa ir 600 *kg*, 610 *kg*, 620 *kg*, ..., 760 *kg* (katra nākamā skulptūra ir par 10 *kg* smagāka nekā iepriekšējā). Lai tās aizvestu uz parku, Vizlis pasūtīja 4 kravas mašīnas, kurās katrā var iekraut ne vairāk kā 3 tonnas. Vai vienā reizē varēs aizvest visas skulptūras?

11.4.4. Taisnstūris sadalīts 4 mazākos taisnstūros un trim no tiem zināms laukums (skat. 21. zīm.). Nosakiet ceturtā taisnstūrīša laukumu!

18	21
30	?

21. zīm.

11.4.5. 22. zīmējumā parādīts, kā plakni var noklāt ar vienādām 23. zīmējumā attēlotām figūriņām. Izdomājiet un uzzīmējiet kādu citu figūriņu, ar kuru līdzīgā veidā var noklāt visu plakni!

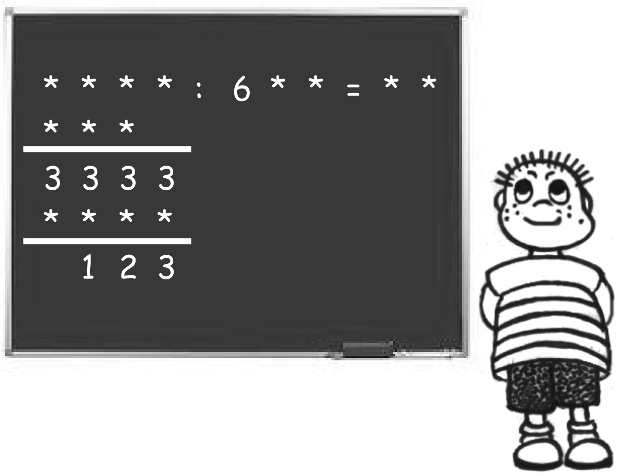


22. zīm.

23. zīm.

5. kārta

11.5.1. Uz tāfeles bija uzrakstīts pareizs dalīšanas piemērs. Palaidnis Pēcis tajā dažus ciparus nodzēsa. Palīdzi atjaunot šo piemēru (skat. 24. zīm., nodzēstie cipari aizstāti ar zvaigznītēm – viens cipars – ar vienu zvaigznīti)!

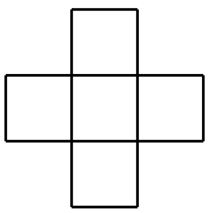


24. zīm.

11.5.2. Viendien Pūks pamanīja, ka viņa vienīgais pulkstenis apstājies un tobrīd rāda 7:00. Tā kā tas ir liels sienas pulkstenis, kuru nevar pārnēsāt, tad Pūks nolēma doties ciemos pie Trusīša, lai uzzinātu, cik ir pareizs laiks. Izejot no mājas, Pūks uzvilka savu pulksteni. Aizejot ciemos, Pūks ievēroja, ka pulkstenis tobrīd rāda 12:00, un Trusītim pašlaik ir pusdienlaiks. Tāpēc Pūks palika arī uz pusdienām. Kad Pūks devās mājās, Trusīša pulkstenis rādīja 12:30. Atgriezies mājās, Pūks ievēroja, ka viņa pulkstenis rāda 7:55. Palīdzi Pūkam aprēķināt, cik tagad īsti ir pareizs laiks, ja zināms, ka viņš ceļu līdz Trusīša mājām ar tukšu vēderu noiet 1,5 reizes ātrāk nekā paēdis.

11.5.3. Alibaba atrada maisiņu ar 243 vienādām zelta monētām. Taču gaišreģis viņam pateica, ka viena monēta nav no zelta, tāpēc ir vieglāka par pārējām. Ar cik svēršanām Alibaba var atrast viltoto monētu, ja viņam ir sviras svari bez atsvariem?

11.5.4. Cik 25. zīm. attēlotās figūras var izgriezt no kvadrāta 6×6 rūtiņas? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



25. zīm.

11.5.5. Vienā ģimenē ir 4 bērni. Reiz kaimiņš jautāja, cik veci ir bērni, uz ko vecāki atbildēja: "Bērnu gadu summa ir vienāda ar mūsu dzīvokļa numuru, bet viņu gadu reizinājums ir 40." Taču kaimiņam ar šo informāciju nepietika, tāpēc bērnu vecāki vēl pateica, ka jaunākie puikas ir dvīņi. Nu kaimiņš varēja pateikt, cik gadu ir katram bērnam. Bet vai Tu to vari?

2003./2004. mācību gads

1. kārta

12.1.1. 26. zīm. katru zvaigznīti aizstāj ar vienu ciparu tā, lai iegūtu pareizu reizināšanas piemēru! Vai šim uzdevumam ir tikai viens vienīgs atrisinājums?

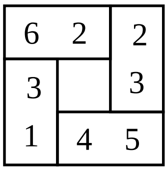
$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & * & * \\
 & \cdot & & * & * \\ \hline
 & & 4 & * & * \\
 & * & * & 8 & \\ \hline
* & 0 & * & 7 & 4
\end{array}$$

26. zīm.

12.1.2. Atzīmējiet plaknē 6 punktus tā, lai, novelkot visas iespējamās taisnes, kas satur vismaz divus no atzīmētajiem punktiem, iegūtu tieši 9 dažādas taisnes!

12.1.3. Vāzē stāv baltas, sarkanas, dzeltenas un violetas puķes, pavisam 19 ziedi. Sarkanie un violetie ziedi kopā ir 5, bet dzeltenie un violetie kopā ir 8. Noskaidrojiet, cik ir balto ziedu, ja zināms, ka balto ziedu ir visvairāk, bet violeto – vismazāk!

12.1.4. No viena komplekta visiem domino kauliņiem (Domino kauliņu komplekts sastāv no 28 kauliņiem. Katrs kauliņš sastāv no divām kvadrātveida pusēm, uz kurām attēloti punkti – uz katras puses attēloto punktu skaits ir no 0 līdz 6. Katram iespējamam punktu daudzumu pārim komplektā ir tieši viens kauliņš.) izveidojiet četrus kvadrātveida rāmjus tā, lai visu kvadrātu malu garumi būtu atšķirīgi, pie tam uz viena kvadrāta visām malām esošo skaitļu (punktu) summas būtu vienādas ar 13, otram kvadrātam – 14, trešajam kvadrātam – 15 un ceturtajam kvadrātam – 16. (Piemēram, 27. zīm. attēlotajam rāmim malas garums ir 3, bet uz katras malas esošo skaitļu summa ir 10.)



27. zīm.

12.1.5. Šaha turnīrā piedalījās 5 dalībnieki. Katrs spēlēja ar katru tieši vienu reizi. Par uzvaru spēlē piešķir 2 punktus, par neizšķirtu 1 punktu, par zaudējumu 0 punktus. Pēc turnīra izrādījās, ka visi dalībnieki savākuši vienādu punktu skaitu, pie tam spēļu, kuras beidzās neizšķirti, skaits vienāds ar visu turnīrā izcīnīto uzvaru skaitu. Kā tas ir iespējams?

2. kārta

12.2.1. Ierakstiet kvadrātā 4×4 rūtiņas skaitļus no 1 līdz 16, katru tieši vienu reizi, tā, lai visas četru skaitļu summas pa rindiņām, kolonnām un abām diagonālēm būtu dažādi pāra skaitļi.

12.2.2. Jānītim ir 10 vienādmalu trijstūrīši, kurus var salīmēt ar maliņām kopā. No tiem Jānītis grib izveidot lukturīšus telpisku ķermeņu formā, kuriem visas skaldnes ir dotie vienādmalu trijstūri. Cik un kādus lukturīšus Jānītis var izgatavot?

12.2.3. Vai var atrast tādu skaitli, kuru reizinot ar tā ciparu summu, iegūst 2004?

12.2.4. Ciematā daži bērni draudzējas savā starpā, citi – nē (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A). Katram bērnam ir vismaz viens draugs. Brīvdienās katram bērnam ir iespēja doties vai nu uz Cirku, vai uz Leļļu teātri. Pierādiet, ka daļa bērnu var doties uz Cirku, bet pārējie – uz Leļļu teātri tā, ka katrs bērns varēs uzzināt informāciju par pasākumu, uz kuru nav bijis, no kāda sava drauga, kurš uz to bija aizbraucis.

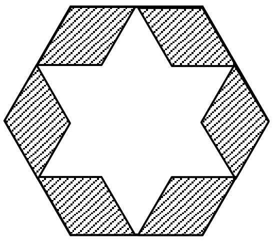
12.2.5. Jūrā atrodas kvadrātveida sala ar malas garumu 6 *km*. Vai ir iespējams šajā salā izrakt vairākus kvadrātveida dīķus un līčus ar malas garumu 1 *km* tā, lai sala joprojām paliek “viengabalaina” un tās krasta līnijas garums ir 54 *km*? (Krasta līnija ir sauszemes robeža gan ar izraktajiem dīķiem, gan ar jūru.)

3. kārta

12.3.1. Ciparu virknē 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ievietojiet aritmētiskās darbību zīmes („+”, „–”, „·”, „:”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 99.

12.3.2. Kādus naturālus skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu pareizu vienādību $5x+2y=30$. Atrodiet visas iespējamās atbildes!

12.3.3. Regulāram sešstūrim katrā stūrī izgrieza pa vienam rombam, kura malas garums ir puse no sešstūra malas garuma (skat. 28. zīm.). Aprēķiniet, kura daļa no sešstūra laukuma ir iegūtās zvaigznes laukums?



28. zīm.

12.3.4. Skudriņa Tipa atrodas rūtiņu lapas augšējā kreisajā stūrī. Viņa var pārvietoties tikai pa rūtiņu malām, pie tam tikai virzienā uz leju vai pa labi. Katrai rūtiņas virsotnei aprēķināts, cik dažādos veidos Tipa var nokļūt šajā punktā. Kurās rūtiņu virsotnēs skudriņa var nokļūt ne vairāk kā 50 dažādos veidos? (Parādiet to zīmējumā!)

12.3.5. Attālums starp divām pilsētām A un B ir 100 *km*. No tām vienlaicīgi ar vienādu ātrumu viens otram pretī izbrauca divi velosipēdisti. Tāpat no pilsētas A reizē ar velosipēdistu izlidoja putniņš. Putniņš lidoja līdz sastapa otru velosipēdistu, tad apgriezās un lidoja atpakaļ līdz sastapa pirmo velosipēdistu, atkal apgriezās utt., līdz abi velosipēdisti satikās. Cik *km* nolidoja putniņš, ja zināms, ka tā ātrums ir 2 reizes lielāks nekā velosipēdistu ātrums?

4. kārta

12.4.1. Atrodiet kaut vienu skaitli, kurš izdalās ar 11 bez atlikuma, bet kuru dalot ar 2, atlikums ir 1; dalot ar 3, atlikums ir 2; dalot ar 4, atlikums ir 3; dalot ar 5, atlikums ir 4; dalot ar 6, atlikums ir 5; dalot ar 7, atlikums ir 6; dalot ar 8, atlikums ir 7; dalot ar 9, atlikums ir 8 un dalot ar 10, atlikums ir 9.

12.4.2. Vai vienādmalu trijstūri var sagriezt 3; 4; 8; 9 vienādos trijstūrīšos? Ja var, parādi, kā, ja nevar, pamato, kāpēc!

12.4.3. Aprēķināt izteiksmes $\dfrac{20032003\cdot 20032004\cdot 20032005+20032004}{20032002\cdot 20032006+4}$ vērtību.

12.4.4. Konferencē satikās 6 zinātnieki. Vai var gadīties, ka katrs no šiem zinātniekiem draudzējas tieši ar diviem citiem zinātniekiem no šīs grupas?

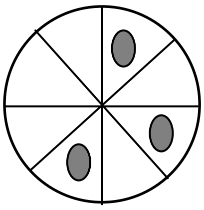
12.4.5. Pie pils vārtiem ir divas pogas – zila un sarkana. Lai vārti atvērtos, jāievada kods – jānospiež šīs pogas pareizā secībā kopā 4 reizes (kods varētu būt, piemēram, **zszz** vai **ssss** u.tml.). Sprīdītis nezina pareizo kodu, tāpēc viņš spiež abas pogas vairākas reizes, līdz durvis atveras. Cik reizes vismaz un kādā secībā šīs pogas Sprīdītim jānospiež, lai viņš noteikti tiktu pilī? (Vārti atveras tiklīdz pēc kārtas tiek nospiests pareizs kods, neatkarīgi no tā, kas ir bijis nospiests iepriekš.)

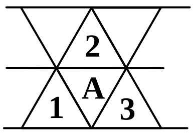
5. kārta

12.5.1. Rindā augošā secībā viens aiz otra uzrakstīti visi naturālie nepāra skaitļi, skaitļus vienu no otra nekādi neatdalot (t.i., iegūstam nepārtrauktu ciparu virknīti 135791113... utt.). Kāds cipars šajā virknē atradīsies 2004. vietā?

12.5.2. No papīra izgrieza divus izliektus piecstūrus un kaut kā uzlika vienu otram virsū. Kāda figūra var būt abu piecstūru kopīgā daļa? Apskatiet visas iespējas un pamatojiet, ka citu nav!

12.5.3. Vinnijs Pūks apaļu galdu sadalīja 8 sektoros un izvietoja tajos 3 medus podus tā, kā parādīts 29. zīmējumā. Ciemos ieradās Sivēntiņš un turpināja spēlēties ar medus podiņiem: viņš lika uz galda klāt jaunus medus podiņus sekojoši: ar vienu gājienu divos blakus sektoros ielika katrā vēl tieši 1 medus podu. Vai Sivēntiņš varēs panākt, lai pēc vairākiem gājieniem visos sektoros būtu vienāds skaits medus podu?


29. zīm.

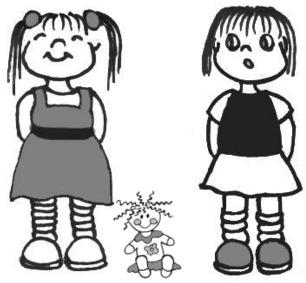


30. zīm.

12.5.4. Plakne sadalīta vienādos vienādmalu trijstūrīšos. Vienā no tiem novietota regulāra trijstūra piramīda, kuras visas skaldnes vienādas ar režģa trijstūrīšiem. Ar vienu gājienu atļauts pārvelt piramīdu pār vienu pamata šķautni, to neslidinot. (t.i., ja piramīda atradās plaknes trijstūrītī A, tad pēc viena gājiena tā var atrasties trijstūrītī 1, 2 vai 3; skat. 30. zīm.).

Kāds ir mazākais gājienu skaits, lai piramīda, pārvēlusies pār katru savu šķautni vismaz vienu reizi, atgrieztos sākotnējā trijstūrītī?

12.5.5. Anniņai ir 13 kārbas, vienā no tām ir paslēpta lelle. (Anniņa zina, kurā kārbā ir lelle, bet Līzīte – nē.). Līzītei ir 6 konfektes un viņa grib iegūt lelli. Tāpēc meitenes spēlē šādu spēli: Līzīte norāda uz vienu vai vairākām kārbām un jautā Anniņai, vai lelle ir kādā no šīm kārbām. Ja Anniņa atbild „jā”, Līzīte viņai dod 2 konfektes, ja atbilde ir „nē” – 1 konfekti (Anniņa nemānās!). Ja Līzīte atmin, kurā kārbā ir lelle, viņa to iegūst. Vai Līzīte noteikti var iegūt lelli? Pastāstiet, kā viņai jārīkojas!

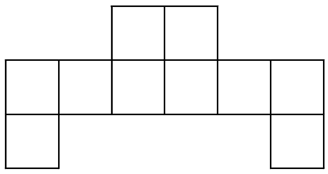


2004./2005. mācību gads

1. kārta

13.1.1. Elektrības skaitītāja rādījumi šobrīd ir **067859** *kWh*. Jānītis ievēroja, ka visi cipari tajā ir dažādi. Pēc cik dienām nākošo reizi atkal visi rādījuma cipari būs dažādi, ja dienā tiek notērētas 2 *kWh* elektrības.

13.1.2. Sagrieziet 31. zīmējumā attēloto figūru četrās daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu (bez caurumiem un pārklāšanās).



31. zīm.

13.1.3. Annai bija pilna tasīte melnas kafijas. Viņa izdzēra ceturto daļu kafijas un tās vietā ielēja pienu (līdz tasīte atkal bija pilna). Tad Anna izdzēra trešdaļu sava dzēriena un atkal papildināja to pilnu ar pienu. Pēc tam viņa izdzēra vēl pus tasīti un atkal to piepildīja, pielejot pienu. Beidzot viņa izdzēra visu tasīti. Ko Anna ir izdzērusi vairāk – pienu vai melnu kafiju? Par cik?
(Baltu kafiju uztveram kā piena un melnas kafijas maisījumu; piemēram, ja balta kafija iegūta, pus tasītei melnas kafijas pielejot pus tasīti piena, tad, izdzerot visu šo dzērienu, Anna būs izdzērusi pus tasīti melnas kafijas un pus tasīti piena.)

13.1.4. Noskaidrojiet skaitļa $A = \underbrace{1111...11}_{2004 \text{vieninieki}} \times 2005$ ciparu summu!

13.1.5. Mēness ciemā ir 7 mājas. Kāds lielākais skaits taciņu var būt iemīts šajā ciemā, ja viena taciņa savieno tieši divas ciema mājas un nekādas divas taciņas savā starpā nekrustojas? Starp divām mājām var būt iemīta augstākais viena taciņa.

2. kārta

13.2.1. Ievieto skaitlī **2004*2005*** katras zvaigznītes vietā vienu ciparu tā, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 99.

13.2.2. Skolēnu grupa devās ekskursijā. Sākumā 3 stundas viņi brauca ar velosipēdiem, pēc tam 1 stundu brauca autobusā un beigās vēl 10 *km* nogāja pa mežu. Aprēķiniet, cik garš bija viss ceļojuma maršruts un cik ātri viņi brauca ar velosipēdiem, ja zināms, ka visu maršrutu ar velosipēdu var nobraukt 7 stundās, bet ar autobusu – 2 stundās.

13.2.3. Ar akmens skaldāmo mašīnu var 1 akmens gabalu sašķelt tieši 5 daļās. Vai ar šo mašīnu var no 1 akmens bluķa iegūt 22 akmens gabalus, ja šo mašīnu var pielietot nepieciešami daudz reizes?

13.2.4. Vai var plaknē uzzīmēt slēgtu lauztu līniju ar 7 posmiem, kas pati sevi krusto tieši

a) 8 punktos;

b) 7 punktos?

13.2.5. Izdomājiet, kā varētu aprakstīt vai ilustratīvi attēlot sekojošo vienādību (piem., skaitīt rūtiņas, klucīšus u.c. dažādos veidos u.tml.) :

$$2 \cdot 1 \cdot n + 2 \cdot 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot 3 \cdot (n-2) + ... + 2 \cdot (n-1) \cdot 2 + 2 \cdot n \cdot 1 =$$
$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-2)(n-1) + (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1)$$

3. kārta

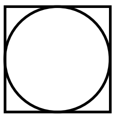
13.3.1. Kvadrātā 4×4 rūtiņas ierakstiet 16 dažādus naturālus skaitļus, katrā rūtiņā vienu skaitli, tā, lai katrā rindiņā, katrā kolonnā un katrā lielajā diagonālē ierakstīto skaitļu summa būtu 50.

13.3.2. Ar $[a]$ apzīmē skaitļa a veselo daļu, t.i. lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a (piem., $[3]=3; [5{,}9]=5; [-2{,}1]=-3$).

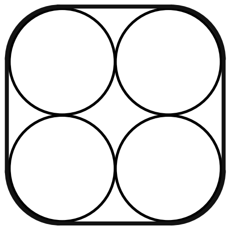
Noskaidrojiet visus skaitļus x, kuriem ir pareiza vienādība $[2-x]\cdot[2+x]=2$.

13.3.3. Plaknē novilktas n dažādas taisnes sadala šo plakni apgabalos. Pierādīt, ka, krāsojot katru apgabalu vienā no divām krāsām – melnu vai baltu, var tā nokrāsot visu plakni, ka nekādi divi apgabali ar kopēju malu nav vienā krāsā.

13.3.4. 32. zīmējumā attēlotā kvadrāta laukums ir a cm^2, bet riņķa laukums b cm^2. 4 tādi paši riņķi novietoti tā kā parādīts 33. zīmējumā un ap tiem nostiepta gumija. Cik cm^2 lielu laukumu tā ierobežo?



32. zīm.



33. zīm.

13.3.5. Pierādiet, ka eksistē tāds naturāls skaitlis, kura decimālais pieraksts sastāv tikai no cipariem „5” un kurš dalās 53.

4. kārta

13.4.1. Ievietojiet starp dažiem cipariem aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „·”, „:”) un/vai iekavas tā, lai iegūtu pareizu vienādību:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 10$$

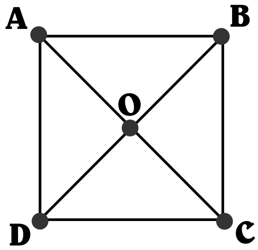
13.4.2. Vai kuba virsmu var aplīmēt ar 6 taisnstūriem, kas nav kvadrāti (bez brīvām vietām un pārklāšanās)?

13.4.3. Uz elektroniskā pulksteņa displeja cipari attēlojas tā kā parādīts 34.zīmējumā. Pulkstenis rāda stundas un minūtes, kas atdalītas ar „:”.

Lauriņas pulkstenis stāv uz galdiņa pie spoguļa, tāpēc spogulī redzams pulksteņa rādījuma spoguļattēls. Cik minūtes diennaktī spoguļattēlā arī redzams „pareizs” laiks (tas var nesakrist ar pulksteņa pašreizējo rādījumu, taču diennaktī ir tāds brīdis, kad pulkstenis rāda tādu laiku; piem., plkst. 01:00 | (*spoguļatt.*) 00:10 apmierina uzdevuma prasības, bet plkst. 00:08 | (*spoguļatt.*) 80:00 neder).

34. zīm.

13.4.4. Vai var 35. zīmējumā attēlotos nogriežņus **AB**, **BC**, **CD**, **DA**, **AO**, **BO**, **CO** un **DO** sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 8 (katram nogrieznim – cits numurs) tā, lai visiem astoņiem 35. zīmējumā redzamiem trijstūriem malu nogriežņiem piekārtoto skaitļu summas būtu vienādas? (Piem., Δ**ABC** atbilstošo summu veido nogriežņiem **AB**, **BC**, **AO** un **OC** piekārtoto numuru summa.)



35. zīm.

13.4.5. Divi velosipēdisti ar nemainīgiem ātrumiem (ne obligāti vienādiem) vienlaikus izbrauca viens otram pretī no ciematiem A un B. Viņi satikās 6 *km* attālumā no ciemata A un turpināja iesākto ceļu. Sasniedzot otru ciemu, velosipēdisti apgriezās un brauca atpakaļ uz savu ciemu. Otrreiz viņi satikās 5 *km* attālumā no ciema B. Noskaidrojiet, cik *km* ir starp ciemiem A un B?

5. kārta

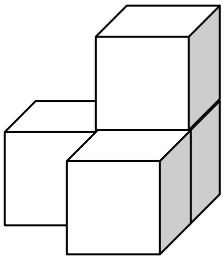
13.5.1. Aprēķināt

$$\mathbf{19992005 \cdot 19992003 - 19992006 \cdot 19992002.}$$

13.5.2. Vai no vairākām 36. zīm. parādītajām figūriņām (tā sastāv no 4 kubiņiem ar izmēriem $1\times1\times1$) var salikt

a) kubu $3\times3\times3$;

b) kubu $4\times4\times4$?



36. zīm.

13.5.3. Ēzelītim Iā bija 3 kastītes un 6 sarkanas, 4 dzeltenas un 2 zilas pogas. Viņš ielika katrā kastītē 4 pogas. Vienā kastītē bija visu trīs krāsu pogas. Vai var gadīties, ka pārējās kastītēs bija vienādi pogu komplekti (t.i., vienādi daudz vienas un tās pašas krāsas pogu)? Atbildi pamatojiet!

13.5.4. Vai virknē **2*******5** zvaigznīšu vietā var ierakstīt kaut kādus skaitļus tā, lai katru četru blakus uzrakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?

13.5.5. Uz riņķa līnijas atzīmēti 2005 punkti, kas sadala riņķa līniju 2005 vienādos lokos. 999 no šiem punktiem nokrāsoti sarkani, bet pārējie – zaļi. Katram no iegūtajiem 2005 lokiem tiek pierakstīts skaitlis pēc šāda likuma:

I) ja loka abi gali ir sarkani, tad pieraksta -1,

II) ja loka abi gali ir zaļi, tad pieraksta 1,

III) ja loka viens gals ir zaļš, bet otrs sarkans, tad pieraksta 0.

Kāda ir visu pierakstīto skaitļu summa?

ATRISINĀJUMI

2000./2001. mācību gads

9.1.1. ***Atbilde:*** 13. februāris bija svētdienā.

Risinājums. Februārī var būt 28 vai 29 dienas. Ja kādā mēnesī ir 28 dienas, tad šajā mēnesī ir tieši četras pilnas nedēļas, t.i., jebkurā nedēļas dienā ir tieši četri datumi. Tātad uzdevumā runāts par garo gadu, kad februārī ir 29 dienas. Tajā ir viena nedēļas diena, kurā ir pieci datumi (uzdevumā tā ir otrdiena), bet visās pārējās nedēļas dienās ir tieši četri datumi. Tātad otrdienās bija mēneša 1. un pēdējais datums, t.i., otrdienās bija 1., 8., 15., 22. un 29. februāris. Tālāk viegli izskaitīt, ka 13.februāris bija svētdien. (Skat. A1. zīm.)

P	O	T	C	P	S	Sv
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29					

A1. zīm.

9.1.2. ***Atbilde:*** skaitļus 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 var iegūt, bet skaitļus 5 un 10 iegūt nevar.

Risinājums. Tālāk parādīts, kā no skaitļa 1 var iegūt skaitļus 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

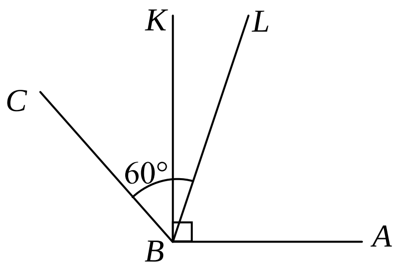
$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8\to81\to27\to9\to3\to1$
$1\to6\to2$
$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8\to81\to27\to9\to3$
$1\to6\to2\to12\to4$
$1\to6$
$1\to6\to2\to21\to7$
$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8$
$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8\to81\to27\to9$

Skaitļus 5 un 10 no skaitļa 1 uzdevumā aprakstītajā veidā iegūt nevar. Tā kā 1 nedalās ar 3, tad vispirms jāveic operācija, kas doto skaitli palielina, t.i., jāpareizina ar 6 (operācija a) vai jāpieraksta labajā pusē 1 (operācija c). Izpildot operāciju c) iegūstam skaitli, kura pēdējais cipars ir 1. Ja veicam tikai a) operāciju, tad no 1 varam iegūt skaitli, kura pēdējais cipars ir 6. Veicot pēc kārtas a) un b) operācijas, īstenībā doto skaitli pareizina ar 2 ($x\cdot6:3=x\cdot2$). Tātad veicot pēc kārtas pamīšus a) un b) operācijas no skaitļa 1 varam iegūt skaitļus, kuru pēdējie cipari ir 2, 4, 8, 6. Tātad skaitli 1 palielinot ar atļautajām operācijām, varam iegūt skaitļus, kuru pēdējie cipari ir 1, 2, 4, 6, 8.

sākotnējā skaitļa (a) pēdējais cipars	1	7	9	3	2	4	8	6	0	5
skaitļa a:3 pēdējais cipars (ja dalījums ir vesels skaitlis)	7	9	3	1	4	8	6	2	0	5

No tabulas redzams, ka, veicot dalīšanu ar 3, skaitļus, kuru pēdējais cipars ir 0 vai 5, var iegūt tikai no skaitļiem, kuru pēdējais cipars arī ir atbilstoši 0 vai 5. Tā kā izpildot operācijas a) vai c), tādus skaitļus no skaitļa 1 iegūt nevar, tad arī pielietojot operāciju b), tādus skaitļus iegūt nevarēs.

9.1.3. ***Atbilde:*** $\angle KBL = 20°$.



A2. zīm.

Risinājums. Tā kā $\angle LBC + \angle ABK = 90° + 60° = 150° > \angle ABC$, tad leņķiem *ABK* un *LBC* ir kopīga daļa – $\angle KBL$ (skat. A2. zīm.).

Tātad $\angle KBL = (\angle LBC + \angle ABK) - \angle ABC = 150° - 130° = 20°$.

9.1.4. ***Atbilde:*** 35 skolēni.

Risinājums. Vasarā dzimuši $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ no klases skolēniem, ziemā – $\frac{1}{7}$ no klases skolēniem, rudenī – $\frac{1}{5}$ no klases skolēniem. Tā kā visu skolēnu skaits un katrā gadalaikā dzimušo skolēnu skaits ir naturāli skaitļi, tad visu skolēnu skaitam jādalās gan ar 5, gan ar 7 (pretējā gadījumā $\frac{1}{7}$ vai $\frac{1}{5}$ nebūs vesels skaitlis). Starp skaitļiem, kas nav mazāki par 15 un nav lielāki par 40, ir tikai viens tāds skaitlis – 35. Tātad klasē pavisam ir 35 skolēni, no kuriem $\frac{1}{5} \cdot 35 = 7$ skolēni dzimuši rudenī, $\frac{1}{7} \cdot 35 = 5$ skolēni dzimuši ziemā, $\frac{2}{5} \cdot 35 = 14$ skolēni dzimuši vasarā un $35 - (7 + 5 + 14) = 9$ skolēni dzimuši pavasarī.

9.1.5. ***Atbilde:*** meloja Didzis, bet sacensībās uzvarēja Pēcis.

Risinājums. Par katru zēnu pēc kārtas pieņemsim, ka viņš meloja.

1) Pieņemsim, ka meloja Aldis, bet pārējie zēni teica taisnību. Tad no zēnu teiktā seko, ka Aldis bija pirmais vai pēdējais, Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais, Didzis bija pirmais un Mārcis bija pēdējais. Taču nevar būt, ka Aldis bija pirmais vai pēdējais, jo pirmais bija Didzis un pēdējais bija Mārcis. Tātad Aldis tomēr nav melojis.

2) Pieņemsim, ka meloja Pēcis, bet pārējie zēni teica taisnību. Tad no zēnu teiktā seko, ka Aldis bija otrais vai trešais, Pēcis bija pēdējais (viņš meloja), Didzis bija pirmais un Mārcis bija pēdējais. Taču nevar būt, ka gan Pēcis, gan Mārcis sacensībās abi bija pēdējie, jo pēdējais bija tikai viens no zēniem.

3) Pieņemsim, ka meloja Didzis, bet pārējie zēni teica taisnību. Tad no zēnu teiktā seko, ka Aldis bija otrais vai trešais, Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais, Didzis bija otrais, trešais vai pēdējais un Mārcis bija pēdējais. Šajā gadījumā nekādas pretrunas nerodas un sacensību rezultāts varēja būt sekojošs: Pēcis bija pirmais, Mārcis bija pēdējais, bet Aldis un Didzis viens finišēja otrais un otrs – trešais.

4) Pieņemsim, ka meloja Mārcis, bet pārējie zēni teica taisnību. Tad no zēnu teiktā seko, ka Aldis bija otrais vai trešais, Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais, Didzis bija pirmais un Mārcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš meloja, teikdams, ka ir pēdējais). Taču tagad sanāk, ka neviens nav bijis pēdējais, tātad arī šis gadījums nav iespējams.

Esam izskatījuši visus gadījumus, un vienīgā iespēja, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ka viens zēns ir melojis un pārējie teikuši patiesību, ir tāda, ka melojis ir Didzis.

9.2.1. ***Atbilde:*** piemēram, 1573; pavisam ir 206 tādi skaitļi.

Risinājums. Saskaitīsim, cik pavisam ir minētā veida skaitļu $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – cipari) (skat. „Mazliet no skaitļu teorijas” 10. lpp.).

Vispirms saskaitīsim, cik ir tādu skaitļu, kuru pirmais cipars ir 6 (t.i., ***a*=6**). Tāds skaitlis jau vienā šķirā sakrīt ar skaitļiem 6972 un 6813, tātad $b\neq9$, $b\neq8$, $c\neq7$, $c\neq1$, $d\neq2$, $d\neq3$ (skat. A3. zīmējuma tabulā). Bet šim skaitlim vismaz vienā šķirā ir jāsakrīt arī ar skaitli 4512. Tā kā $a\neq4$ (jo mēs skaitām skaitļus, kas sāksies ar ciparu 6), $c\neq1$ un $d\neq2$, tad jābūt $b=5$. Bet c var būt jebkurš cipars, izņemot 1 un 7, tātad pavisam 8 iespējas, d var būt jebkurš cipars izņemot 2 un 3, tātad arī 8 iespējas un pavisam ir 8·8=**64** (izmantots kombinatorikas reizināšanas likums, skat. 12. lpp.) derīgie skaitļi, kuru pirmais cipars ir 6.

a	*b*	*c*	*d*	
6	9	7	2	
4	**5**	1	2	
6	8	1	3	
6	~~9; 8~~ **5**	~~7; 1~~	~~2; 3~~	$8\cdot8=64$ skaitļi

A3. zīm.

Līdzīgā veidā saskaitīsim skaitļus, kuru pirmais cipars ir 4 (***a*=4**). Tā kā tas vienā šķirā jau sakrīt ar skaitli 4512, tad $b\neq5$, $c\neq1$, $d\neq2$ (skat. A4. zīm.) Tālāk šķirosim 2 gadījumus, kad šis skaitlis vienā šķirā sakristu ar skaitli 6972.

I Pieņemsim, ka $b=9$ (skat. A4. zīm.). Tad vēl papildus augstākminētajiem nosacījumiem $c\neq7$. Tā kā $a\neq6$, $b\neq8$ un $c\neq1$, tad $d=3$ (lai vienā šķirā sakristu ar skaitli 6813). Tātad c var būt jebkurš cipars, izņemot 1 un 7, pavisam 8 iespējas.

a	*b*	*c*	*d*	
6	**9**	7	2	
4	5	1	2	
6	8	1	**3**	
4	~~5~~ **9**	~~1~~ ~~7~~	~~2~~ **3**	8 skaitļi

A4. zīm.

II Pieņemsim, ka $c=7$, tad $b\neq9$, $d\neq2$, kā arī $b\neq5$, $c\neq1$ un $a=4$. Lai vienā šķirā šis skaitlis sakristu ar skaitli 6813, ir divas iespējas:

1. $b=8$ un $d\neq3$; tad d var būt jebkurš cipars, izņemot 2 un 3, pavisam 8 iespējas (skat. A5. zīm.).

a	*b*	*c*	*d*	
6	9	**7**	2	
4	5	1	2	
6	8	1	3	
4	~~5~~ ~~9~~ **8**	~~1~~ **7**	~~2~~ ~~3~~	8 skaitļi

A5. zīm.

2. $d=3$ un $b\neq8$; tad b var būt jebkurš cipars, izņemot 5, 8 un 9, pavisam 7 iespējas (skat. A6. zīm.).

a	*b*	*c*	*d*	
6	9	**7**	2	
4	5	1	2	
6	8	1	3	
4	~~5~~ ~~9~~ ~~8~~	~~1~~ **7**	~~2~~ **3**	7 skaitļi

A6. zīm.

Tātad pavisam derīgo skaitļu, kam pirmais cipars ir 4, ir 8+8+7=**23**.

Tagad saskaitīsim cik ir tādu skaitļu, kuros ***a*≠6** un ***a*≠4**. Tad *a* var būt jebkurš cipars, izņemot 4, 6 un 0 (četrciparu skaitļa pirmais cipars nevar būt 0).

Tālāk šķirosim 3 gadījumus, kad šis skaitlis vienā šķirā sakristu ar skaitli 4512.

I $b=5$. Tad *c*≠1 un *d*≠2. Lai vienā šķirā šis skaitlis sakristu ar skaitli 6972, jābūt $c=7$, bet lai vienā šķirā būtu kopīgs cipars arī ar skaitli 6813, jābūt $d=3$. Tad pavisam varam izveidot **7** derīgus skaitļus, kur *a* var būt jebkurš cipars, izņemot ciparus 0, 4, 6 (skat. A7. zīm.).

a	*b*	*c*	*d*	
6	9	7	2	
4	5	1	2	
6	8	1	3	
~~4; 6; 0~~	**5**	~~1~~ **7**	~~2~~ **3**	7 skaitļi

A7. zīm.

II $c=1$. Tad *b*≠5, *d*≠2 (no skaitļa 4512), *b*≠8 un *d*≠3 (no skaitļa 6813). Tātad $b=9$ (lai vienā šķirā būtu kopīgs cipars arī ar skaitli 6972), bet *d* var būt jebkurš cipars, izņemot 2 un 3. Šajā gadījumā var izveidot 7·8=**56** (izmantots kombinatorikas reizināšanas likums, skat. 12. lpp.) derīgus skaitļus (skat. A8. zīm.).

a	*b*	*c*	*d*	
6	9	7	2	
4	5	1	2	
6	8	1	3	
~~4; 6; 0~~	~~5~~ ~~8~~ **9**	**1**	~~2~~ ~~3~~	$7\cdot 8=56$ skaitļi

A8. zīm.

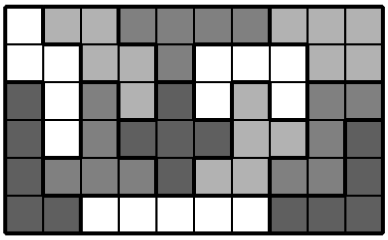
III $d=2$. Tad *b*≠5 un *c*≠1 (no skaitļa 4512), *b*≠9 un *c*≠7 (no skaitļa 6972). Tātad $b=8$ (lai vienā šķirā būtu kopīgs cipars arī ar skaitli 6813), bet *c* var būt jebkurš cipars, izņemot 1 un 7. Arī šajā gadījumā var izveidot 7·8=**56** (izmantots kombinatorikas reizināšanas likums, skat. 12. lpp.) derīgus skaitļus (skat. A9. zīm.).

a	*b*	*c*	*d*	
6	9	7	2	
4	5	1	2	
6	8	1	3	
~~4; 6; 0~~	~~5~~ ~~9~~ **8**	~~1~~ ~~7~~	**2**	$7\cdot 8=56$ skaitļi

A9. zīm.

Tātad, pavisam ir $64+23+7+56+56=206$ minētā veida skaitļi.

9.2.2. ***Atbilde.*** Viens veids, kā no prasītā veida figūriņām salikt taisnstūri 6×10 rūtiņas, parādīts A10. zīmējumā. Pavisam šim uzdevumam ir 2339 atrisinājumi (skat. [5., 38. lpp.]).

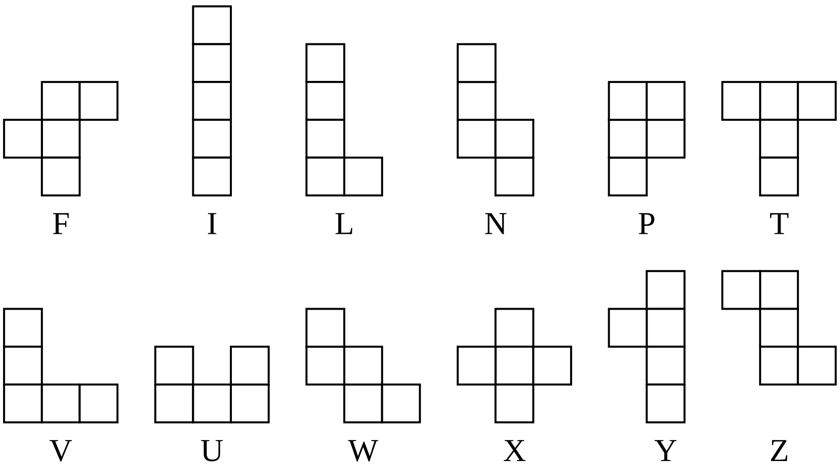


A10. zīm.

Risinājums. Taisnstūrim kopā ir $6 \cdot 10 = 60$ rūtiņas. Tā kā katra figūriņa sastāv no 5 rūtiņām, tad kopā vajadzēs $\frac{60}{5} = 12$ figūriņas.

Šāda veida figūriņas, kas sastāv no 5 vienādām rūtiņām, kur katrai rūtiņai ir vismaz viena kopīga mala ar kādu citu rūtiņu, sauc par *pentamino figūrām.*

Pavisam ir tieši 12 dažādas pentamino figūras (skat. A11. zīm.). Pentamino netiek uzskatīti par dažādiem, ja tie iegūstami viens no otra ar pagriešanu vai „apgāšanu” (spoguļattēlošanu).



A11. zīm.

9.2.3. ***Risinājums.*** Izteiksmi, kas satur tikai dalīšanas darbības, var pārveidot par parasto daļu. Ar iekavu palīdzību varam dažus skaitļus "nonest" saucējā vai "uzcelt" skaitītājā. Ievērosim, ka skaitlis 20 dotajā piemērā, lai arī kā būtu saliktas iekavas, būs skaitītājā, bet skaitlis 19 vienmēr būs saucējā.

a) Daļai vislielākā vērtība būs tad, ja saucējs būs iespējami mazs, bet skaitītājs – iespējami liels. Tā kā iepriekš secinājām, ka 19 vienmēr būs saucējā, tad izteiksmei būs vislielākā vērtība, ja to varēs pārveidot par daļu

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{19} =$$
$$= 20 : ((((((((19 : 18) : 17) : 16) : 15) : 14) : 13) : 12) : 11) : 10)$$

To pašu var iegūt, ja iekavas saliek šādi un visas dalīšanas darbības izpilda pēc kārtas:

$$20:(19:18:17:16:15:14:13:12:11:10)=$$

$$=20:\frac{19}{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}=\frac{20\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{19}$$

b) Daļai vismazākā vērtība būs tad, ja saucējs būs iespējami liels, bet skaitītājs – iespējami mazs. Tā kā iepriekš secinājām, ka 20 vienmēr būs skaitītājā, tad izteiksmei būs vismazākā vērtība, ja to varēs pārveidot par daļu

$$\frac{20}{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}=$$
$$=\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\big(20:19\big):18\Big):17\Big):16\Big):15\Big):14\Big):13\Big):12\Big):11\Big):10\Big)$$

To pašu daļas vērtību varam iegūt, ja iekavas neliekam vispār un visas dalīšanas darbības izpildām pēc kārtas.

9.2.4. ***Atbilde.*** Jā, viņi visi varēs uzzināt no biedriem visu informāciju.

Risinājums. Uzdevumā minētie tūristi zina tieši divas no trim valodām (*l* – latviešu, *k* – krievu vai *a* – angļu). Trīs objektus pa divi var sadalīt trīs dažādos veidos: *lk*, *la*, *ka* (skat. „Permutācijas, variācijas, kombinācijas” 12. lpp.). Tas nozīmē, ka starp minētajiem četriem tūristiem A, B, C un D ir vismaz divi (varbūt trīs vai arī visi četri), kas prot vienas un tās pašas valodas (skat. „Dirihlē princips” 8. lpp.). Pieņemsim, ka tādi ir tūristi A un B un viņi abi prot tieši latviešu un krievu valodu. Tā kā arī tūristi C un D prot tieši divas no dotajām valodām – latviešu, krievu vai angļu, tad katrs no viņiem prot vai nu latviešu, vai krievu valodu (pretējā gadījumā viņi abi prastu tikai vienu valodu – angļu). Tātad gan C, gan D var sarunāties ar A un B, un līdz ar to visi četri tūristi var uzzināt visu informāciju viens no otra.

9.2.5. ***Atbilde.*** Dotais reizināšanas piemērs (skat. A12. zīm.) izskatījās tā, kā tas redzams A13. zīmējumā.

$$\begin{array}{r}
\mathsf{SULA}\\
\times\ \mathsf{ALUS}\\
\hline
\mathsf{SULA}\\
\mathsf{UAZE}\\
\mathsf{LOTU}\\
\mathsf{AKLZ}\\
\hline
\mathsf{ILLUSSA}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1234\\
\times\ 4321\\
\hline
1234\\
2468\\
3702\\
4936\\
\hline
5332114
\end{array}$$

A12. zīm. A13. zīm.

Risinājums. Tā kā S·SULA=SULA, tad S=1. Tā kā starpreizinājumu **U**·SULA=**U**AZE, **L**·SULA=**L**OTU un **A**·SULA=**A**KLZ pirmais cipars vienāds ar reizinātāju, tātad reizinot attiecīgi U·U, L·U un A·U nerodas šķiru pāreja, t.i., šie reizinājumi ir mazāki nekā 10. Neviens no cipariem U, L un A nav 1 (jo S=1), tad tie var būt tikai cipari 2, 3, 4 (jo jau 2·5=10). Pie tam U=2 (ja būtu U=3, tad būtu 3·4=12>10 un nepastāvētu uzdevumā dotās vienādības). Esam jau ieguvuši tiktāl atjaunotu piemēru, kā tas redzams A14. zīmējumā.

```
    1 2 L A          1 2 L 4          1 2 L 4          1 2 3 4
  × A L 2 1        × 4 L 2 1        × 4 L 2 1        × 4 3 2 1
    1 2 L A          1 2 L 4          1 2 L 4          1 2 3 4
  2 A Z E          2 4 Z E          2 4 Z 8          2 4 Z 8
L O T 2          L O T 2          L O T 2          3 O T 2
A K L Z          4 K L Z          4 K L Z          4 K 3 Z
I L L 2 1 1 A    I L L 2 1 1 4    I L L 2 1 1 4    I 3 3 2 1 1 4
```

A14. zīm. A15. zīm. A16. zīm. A17. zīm.

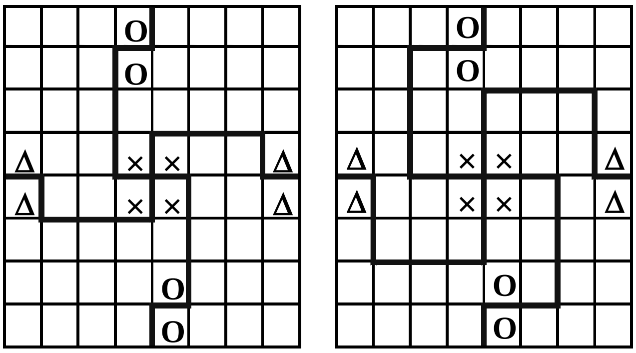
Tālāk A14. zīmējumā redzam, ka $2\cdot 2 = \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{A} = 4$, un iegūstam A15. zīmējumā redzamo piemēru. Šinī pašā zīmējumā redzams, ka $2\cdot 4 = \mathsf{E} \Rightarrow \mathsf{E} = 8$, un līdz ar to iegūstam A16. zīmējumā redzamo piemēru. Apskatām vienādību L+8=11 (nevar būt L+8=1, jo L>1), tātad no tā seko, ka L=3. Esam ieguvuši A17. zīmējumā redzamo piemēru.

Tālāk jau viegli varam atjaunot arī pārējos nezināmos ciparus, proti, $2\cdot 3 = \mathsf{Z} \Rightarrow \mathsf{Z} = 6$; T=0; O=7 un K=9.

9.3.1. ***Atbilde:*** jā, var.

Risinājums. Vispirms Lācis aiziet pie Pūces, tad abi kopā viņi iegriežas pie Zaķīša, tālāk visi trīs iet pie Eža un visbeidzot viss bariņš dodas ciemos pie Vardītes. Kā redzam, visi uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

9.3.2. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A18. zīm.



A18. zīm.

Risinājums. Tā kā katrā no četrām iegūstamajām daļām ir jābūt vismaz vienai katra veida figūriņai, un katra veida figūriņas ir tieši četras, tad katrā daļā jābūt tieši vienai katra veida figūriņai. Tāpēc vispirms novelkam dalījuma līnijas, kas atdala divas vienādas figūriņas. Tālāko dalījumu veicam, novilktās līnijas attēlojot „pagrieztas" par 90° ap kvadrāta centru.

9.3.3. ***Atbilde:*** $d<a<c<b$.

Risinājums. Vispirms ievērosim šādu pakāpju īpašību:

$$\left(a^k\right)^n = \underbrace{a^k\cdot a^k\cdot\ldots\cdot a^k}_{n\text{ reizes}} = \underbrace{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ reizes}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ reizes}}}_{n\text{ reizes}} = a^{k\cdot n}$$

pie tam tā ir spēkā abos virzienos.

Tad iegūstam, ka $2^{35} = (2^5)^7 = 32^7$; $3^{28} = (3^4)^7 = 81^7$; $4^{21} = (4^3)^7 = 64^7$; $5^{14} = (5^2)^7 = 25^7$. Salīdzinot divas pakāpes, kurām kāpinātāji ir vienādi (un ir pozitīvi skaitļi), lielāka būs pakāpe ar lielāko bāzi. Tā kā 25<32<64<81, tad arī $5^{14}<2^{35}<4^{21}<3^{28}$.

9.3.4. *Atbilde:* 8 meļi.

Risinājums. Ja rūķītis atrodas stūra rūtiņā, tad viņam ir 2 kaimiņi, ja rūtiņā pie malas, kas nesakrīt ar stūra rūtiņām, tad viņam ir 3 kaimiņi, ja rūķītis atrodas kādā no iekšējām rūtiņām, tad viņam ir 4 kaimiņi (A19. zīm. katrā rūtiņā ierakstīts kaimiņu skaits). Vēl ievērosim, ka, ja patiesību runājošais rūķītis saka, ka viņam kaimiņos ir vismaz divi meļi, tad tā arī ir, bet ja melis saka, ka viņam kaimiņos ir vismaz divi meļi, tad īstenībā viņam kaimiņos ir vai nu viens, vai neviens melis.

2	3	3	2
3	4	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

A19. zīm.

*	

A20. zīm.

m	t		
t	t	m	
m_1	m_2	t	
	t		

A21. zīm.

t	m	m	t
m	t	t	m
m	t	t	m
t	m	m	t

A22. zīm.

Sadalām kvadrātu četros mazākos kvadrātiņos (skat. A19.zīm.). Ja meļu skaits ir 9 un vairāk, tad vismaz vienā kvadrātiņā būs vismaz trīs meļi (ja katrā kvadrātiņā būtu ne vairāk kā 2 meļi, tad kopā būtu ne vairāk kā $2 \cdot 4 = 8$ meļi). Bet tad tie veidos "stūrīti" (skat. A20. zīm.) un rūķītim "*" būs divi kaimiņi meļi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad 9 vai vairāk meļi būt nevar.

Ja meļu skaits būs 7 un mazāk, tad rūķīši, kas saka taisnību, būs vismaz $16-7=9$, tātad šoreiz būs vismaz viens mazais kvadrātiņš, kurā patiesību runājošo rūķīšu skaits ir vismaz trīs. Mēģināsim izvietot rūķīšus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, sākot ar kreiso augšējo kvadrātiņu. Skaidrs, ka stūra rūtiņā jābūt melim: stūra rūtiņas rūķītim ir tikai 2 kaimiņi, abi no tā paša 2×2 kvadrātiņa, un ja tas būtu patiesību runājošais rūķītis, tad bez viņa šajā kvadrātiņā būtu vismaz 2 meļi, taču tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka šajā kvadrātiņā ir vismaz 3 patiesību runājošie rūķīši un ne vairāk kā $4-3=1$ melis. Turpinot rūķīšu izvietošanu, redzam, ka iekrāsotajā rūtiņā (skat. A21. zīm.) jābūt patiesību runājošajam rūķītim (jo m_1 jau ir viens kaimiņš melis), bet tad šim rūķītim tikai viens kaimiņš būs melis, tātad atkal nonākam pie pretrunas.

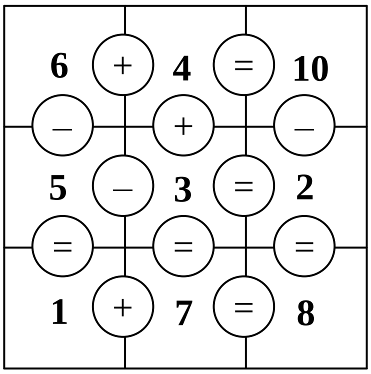
Tas, ka var būt 8 meļi, ir redzams A22. zīmējumā.

9.3.5. *Atbilde:* 26569857600 veidos.

Risinājums. Tā kā klasē ir 30 skolēni un 12 no tiem ir zēni, tad meitenes ir 18. Vispirms aprēķināsim, cik veidos var sadalīt Ziemassvētku vecīša un Prinča lomas: Ziemassvētku vecītis var būt jebkurš no 12 zēniem, tad princis var būt jebkurš no atlikušajiem 11 zēniem – pavisam 12·11=132 veidi. (Šajā uzdevumā izmantosim vairākas sadaļā „Mazliet no kombinatorikas" dotas formulas, skat. 11. lpp.) Līdzīgi noskaidrojam, cik veidos var sadalīt Ļaunās pamātes un Sniegbaltītes lomas: 18·17=306 dažādos veidos. Tātad šīs četras lomas var sadalīt 132·306=40392 veidos (katram zēnu pārim varam "pievienot" jebkuru meiteņu pāri). Tagad jāaprēķina, cik dažādos veidos atlikušajiem 26 skolēniem var iedalīt 7 rūķīšu lomas. Visi rūķīši ir „vienādi", t.i., jānoskaidro, cik dažādos veidos var izvēlēties 7 bērnu pulciņu, kas šīs lomas spēlēs, bet nav svarīgi, kādā secībā šie bērni izkārtosies. Lai to aprēķinātu, vispirms tomēr pieņemsim, ka visi rūķīši ir atšķirīgi (piemēram, svarīgi, kuram bērnam tiek tieši 1. rūķīša loma, kuram 2. rūķīša loma u.tml.). Tādā gadījumā rūķu lomas varētu sadalīt 26·25·24·23·22·21·20 dažādos veidos. Taču šajos veidos viens un tas pats 7 bērnu pulciņš ir ieskaitīts 1·2·3·4·5·6·7 reizes (t.i., tik reizes, cik veidos rindā var sakārtot 7

bērnus). Tāpēc rūķīšu lomas pavisam var iedalīt $\dfrac{26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=657800$ veidos,
Bet visas lomas skolēni var sadalīt $40392\cdot657800=26569857600$ veidos.

9.4.1. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A23. zīmējumu.



A23. zīm.

9.4.2. ***Atbilde:*** 13 riekstus.
Risinājums. No uzdevumā dotā seko, ka pērtiķu skaitam jābūt skaitļa 33 dalītājam. Tātad šis skaits varētu būt 3, 11 vai 33 (nevar būt 1 pērtiķis, jo tad nevarētu notikt strīds). Aplūkosim visas trīs iespējas. Ar x apzīmēsim riekstu skaitu, ko savāca katrs pērtiķis pirms ķīviņa.

a) Ja Mauglim riekstus nesa 3 pērtiķi, tad pēc ķīviņa viņiem palika $3(x-2)$ rieksti. Tātad $3(x-2)=33$. Seko, ka $x=13$.

b) Līdzīgi 11 pērtiķu gadījumā iegūstam vienādojumu $11(x-10)=33$, no kura atkal seko, ka x=13.

c) Ja pērtiķu skaits ir 33, tad attiecīgais vienādojums ir $33(x-31)=33$ un $x=32$. Bet šī atbilde neder, jo katrs pērtiķis var panest ne vairāk kā 20 riekstus.

Tātad uzdevumam ir tieši viena atbilde: katrs pērtiķis salasīja 13 riekstus.

9.4.3. ***Atbilde:*** **a)**, **b)**, **c)** var; **d)**, **e)** nevar.
Risinājums. Viegli ievērot, ka jebkādā secībā izmantojot abus liftus var pārvietoties tikai par pāra skaitu stāvu uz augšu vai uz leju. Tā kā Jānītis sākumā atrodas 1.stāvā (1 – nepāra skaitlis), tad viņš var nokļūt uz nepāra stāviem, bet nevar nokļūt ne uz vienu pāra stāvu.

a) uz 17. stāvu Jānītis nokļūs, četras reizes lietojot augšupejošo liftu;

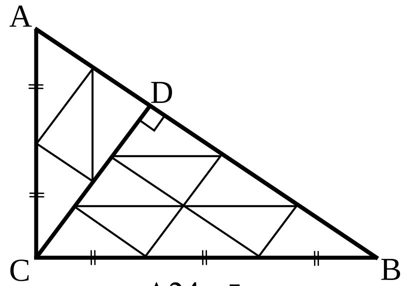
b) 27. stāvā Jānītis nokļūs, vispirms uzbraucot 33.stāvā (astoņas reizes 4 stāvus uz augšu) un tad nobraucot sešus stāvus uz leju;

c) var rīkoties, piemēram, sekojoši: vispirms uzbrauc 9.stāvā (2×4 stāvi), tad nobrauc 6 stāvus zemāk, nokļūstot 3. stāvā, un tad uzbrauc 96 (24×4 stāvi) stāvus augstāk 99. stāvā.

d) un **e)** kā tika minēts sākumā, stāvā ar pāra numuru Jānītis nokļūt nevar, tātad nevar nokļūt 50. un 100. stāvā.

Skat. „Invariantu metode” 7. lpp.

9.4.4. ***Atbilde:*** jā, var; skat., piemēram, A24. zīmējumu.



A24. zīm.

Risinājums. Apskatīsim taisnleņķa trijstūri ar katešu garumiem AC=2 un BC=3. Novelkot augstumu CD no taisnā leņķa virsotnes, dotais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos taisnleņķa trijstūros ACD un CBD, kuru hipotenūzas ir attiecīgi AC=2 un BC=3.

Sadalām iegūto trijstūru hipotenūzas attiecīgi 2 un 3 vienādos nogriežņos, to garums ir 1. Caur dalījuma punktiem novilksim taisnes paralēli attiecīgi trijstūru ACD un CBD malām. Tādējādi trijstūris ACD tiek sadalīts 4 mazākos vienādos trijstūrīšos, kas līdzīgi trijstūrim ACD (novilktās taisnes tam ir viduslīnijas, un viduslīnijas trijstūri sadala 4 vienādos, dotajam trijstūrim līdzīgos trijstūros). Savukārt trijstūris CBD ir sadalīts 9 mazākos trijstūrīšos. Tā kā novilktās taisnes ir paralēlas trijstūra CBD malām, visi iegūtie trijstūrīši ir līdzīgi trijstūrim CBD (leņķi ar atbilstoši paralēlām malām ir vienādi).

Tā kā trijstūri ACD un CBD ir līdzīgi trijstūrim ABC, tad arī $4+9=13$ mazie trijstūrīši ir līdzīgi trijstūrim ABC, tātad līdzīgi savā starpā. Tā kā tiem visiem hipotenūzas garums ir 1, tie ir vienādi.

9.4.5. ***Atbilde:*** lielākas izredzes laimēt ir Anniņai.

Risinājums. Notikuma varbūtību (iespēju, ka tas izpildīsies) aprēķina, dalot notikumam *labvēlīgo gadījumu* skaitu ar kopējo gadījumu skaitu. (Piemēram, varbūtība laimēt ZOROLOTO loterijā, nopērkot 1 biļeti ir $200:1000000=\frac{1}{5000}$, jo 1 laimīgo biļeti var izvilkt 200 veidos (jebkuru no pilnajām lozēm), bet vispār 1 biļete var būt jebkura no 1 000 000 izdotajām biļetēm.)

Saka, ka notikums "izvilkt vismaz vienu laimīgo biļeti" ir notikumam "neizvilkt nevienu laimīgo biļeti" *pretējs* notikums (izvelkot loterijas biļetes, noteikti būs tieši viens no šiem gadījumiem – vai nu būs kāda laimīgā loze, vai arī nebūs neviena laimīgā biļete). **Pretējo notikumu varbūtību summa ir 1** (katram no tiem, jo abiem kopā tiem ir atšķirīgi *labvēlīgie gadījumi*, savukārt pa abiem kopā *labvēlīgie gadījumi* sastāda visus iespējamos gadījumus).

Aprēķināsim, kāda ir varbūtība, ka Anniņas nenopirks nevienu laimīgo biļeti loterijā ZOROLOTO. No visām 1 000 000 biļetēm 3 var izvēlēties $(1000000\cdot999999\cdot999998):6$ veidos, tukšās lozes pavisam ir $1000000-200=999800$ un 3 biļetes no tām var izvēlēties $(999800\cdot999799\cdot999798):6$ veidos. Tātad varbūtība, ka Anniņa nenopirka nevienu laimīgo ZOROLOTO biļeti ir

$$\frac{(999800\cdot999799\cdot999798):6}{(1000000\cdot999999\cdot999998):6}=\frac{9998\cdot999799\cdot999798}{10000\cdot999999\cdot999998},$$

bet varbūtība, ka Anniņai tika vismaz viena laimīgā biļete, ir

$$1-\frac{9998\cdot999799\cdot999798}{10000\cdot999999\cdot999998}.$$

Līdzīgi noskaidrojam, kāda varbūtība laimēt ir Pēterītim. Varbūtība nenopirkt nevienu laimīgo LOTOMORO biļeti ir

$$\frac{(1999500\cdot 1999499):2}{(2000000\cdot 1999999):2}=\frac{19995\cdot 1999499}{20000\cdot 1999999}.$$

Tātad varbūtība, ka Pēterītis nopirks vismaz vienu laimīgo biļeti, ir

$$1-\frac{19995\cdot 1999499}{20000\cdot 1999999}.$$

Tagad jānoskaidro, kurš no šiem skaitļiem lielāks. Apskatīsim šo skaitļu starpību, un noteiksim, vai tā ir pozitīva (tad mazināmais ir lielāks nekā mazinātājs), negatīva (tad mazināmais ir mazāks nekā mazinātājs) vai vienāda ar nulli (tad abu bērnu izredzes laimēt ir vienādas). Pieņemsim, ka Anniņas izredzes laimēt ir lielākas un pierādīsim, ka mūsu pieņēmums ir patiess.

$$\left(1-\frac{9998\cdot 999799\cdot 999798}{10000\cdot 999999\cdot 999998}\right)-\left(1-\frac{19995\cdot 1999499}{20000\cdot 1999999}\right)=$$

$$=\frac{19995\cdot 1999499}{20000\cdot 1999999}-\frac{9998\cdot 999799\cdot 999798}{10000\cdot 999999\cdot 999998}\overset{?}{>}0$$

Apzīmējam $a=1000000$, tad

$$19995=\frac{2a}{100}-5=\frac{1}{100}(2a-500),\ 1999499=2a-501,$$

$$20000=\frac{1}{100}\cdot 2a,\ 1999999=2a-1,$$

$$9998=\frac{a}{100}-2=\frac{1}{100}(a-200),\ 999799=a-201,\ 999798=a-202,$$

$10000=\frac{1}{100}\cdot a$, $999999=a-1$, $999998=a-2$, un pierādāmā nevienādība ir

$$\frac{\frac{1}{100}\cdot(2a-500)\cdot(2a-501)}{\frac{1}{100}\cdot 2a\cdot(2a-1)}-\frac{\frac{1}{100}\cdot(a-200)\cdot(a-201)\cdot(a-202)}{\frac{1}{100}\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}\overset{?}{>}0$$

$$\frac{(2a-500)\cdot(2a-501)}{2a\cdot(2a-1)}-\frac{(a-200)\cdot(a-201)\cdot(a-202)}{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}\overset{?}{>}0$$

Tā kā $2a\cdot(2a-1)\cdot(a-1)\cdot(a-2)>0$, ja $a=1000000$, tad var abas nevienādības puses var pareizināt ar kopsaucēju, tādējādi iegūstam

$$(2a-500)(2a-501)(a-1)(a-2)-(a-200)(a-201)(a-202)(2a-1)\cdot 2\overset{?}{>}0$$

$$\left(4a^2-2002a+250500\right)\left(a^2-3a+2\right)-\left(a^2-401a+40200\right)\left(2a^2-405a+202\right)\cdot 2\overset{?}{>}0 \quad |:2$$

$$\left(2a^2-1001a+125250\right)\left(a^2-3a+2\right)-\left(a^2-401a+40200\right)\left(2a^2-405a+202\right)\overset{?}{>}0$$

$$\left(2a^4-1007a^3+128257a^2-377752a+250500\right)-$$

$$-\left(2a^4-1207a^3+243007a^2-16362002a+8120400\right)\overset{?}{>}0$$

$$200a^3-114750a^2+15984250a-7869900\overset{?}{>}0 \quad |:50$$

$$4a^3-2295a^2+319685a-157398\overset{?}{>}0$$

$$\left(4a^3+319685a\right)-\left(2295a^2+157398\right)\overset{?}{>}0$$

Ja $a = 1000000 = 10^6$, tad $a^3 = \left(10^6\right)^3 = 10^{18}$, un $4a^3 + 319685a > 4 \cdot 10^{18}$, bet $a^2 = \left(10^6\right)^2 = 10^{12}$ un $2295a^2 + 157398 < 3000 \cdot 10^{12} = 3 \cdot 10^{15}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \left(4a^3 + 319685a\right) - \left(2295a^2 + 157398\right) > 0$, tātad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa un Anniņas izredzes laimēt ir lielākas.

Piezīme. Izskaitļojot pierādāmās nevienādības vērtību skaitliski, iegūstam $\dfrac{19995 \cdot 1999499}{20000 \cdot 1999999} - \dfrac{9998 \cdot 999799 \cdot 999798}{10000 \cdot 999999 \cdot 999998} \approx 0{,}9995 - 0{,}9994 = 0{,}0001 > 0$. Tā kā starpība ir tik maza (mazināmais no mazinātāja atšķiras par apmēram vienu desmittūkstošdaļu), algebriskais pierādījums ir tik komplicēts.

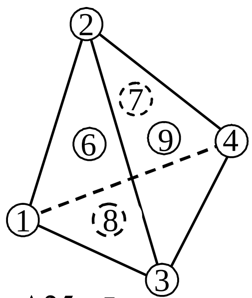
9.5.1. ***Atbilde:*** iegūtais skaitlis ir lielāks nekā sākotnējais.

Risinājums. Pārveidojot skaitli $\dfrac{1}{13}$ decimāldaļā (t.i., dalot 1 ar 13), iegūstam

```
1 : 1 3 = 0, 0 7 6 9 2 3 0 ...
1 0 0
  9 1
    9 0
    7 8
    1 2 0
    1 1 7
        3 0
        2 6
          4 0
          3 9
            1 0
             ...
```

Kā redzam, daļa $\dfrac{1}{13} = 0{,}(076923)$ ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu 6 cipari. Tātad 31. vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā 1. vietā aiz komata, jo 31=6·5+1. Tas ir cipars 0. Ja mēs šo ciparu izsvītrojam, tad jauniegūtajā skaitlī 31. cipars aiz komata būs cipars 7 (nākamais, kas seko aiz 0). Skaitlim $\dfrac{1}{13}$ un iegūtajam skaitlim ir 0 veseli un pirmie 30 cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas skaitlim, kuram lielāks 31. cipars aiz komata. Tā kā 7>0, tad iegūtais skaitlis ir lielāks nekā $\dfrac{1}{13}$.

9.5.2. ***Atbilde:*** **a)** skat., piem., A25. zīm.; **b)** to izdarīt nav iespējams.



A25. zīm.

Risinājums. **b)** Piramīdai ir 4 virsotnes un 6 šķautnes, tātad kopā būtu jāieraksta 4+6=10 dažādi cipari. Tā kā pavisam ir tikai 10 dažādi cipari (0; 1; 2; ...; 9), tad tiem visiem, arī 0, jābūt izmantotiem tieši vienu reizi. Cipars 0 var tikt ierakstīts tikai kādā no virsotnēm, jo visi ierakstāmie skaitļi ir nenegatīvi, un divu dažādu nenegatīvu skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis. Ja kādā virsotnē ir ierakstīts cipars 0, tad uz šķautnes, kuras vienā galapunktā uzrakstīts cipars 0, bet otrā galapunktā – kāds cipars *a*, uzrakstītajam ciparam jābūt 0+*a*=*a*. Bet tas ir pretrunā uzdevuma nosacījumiem, ka visiem uzrakstītajiem cipariem jābūt dažādiem.

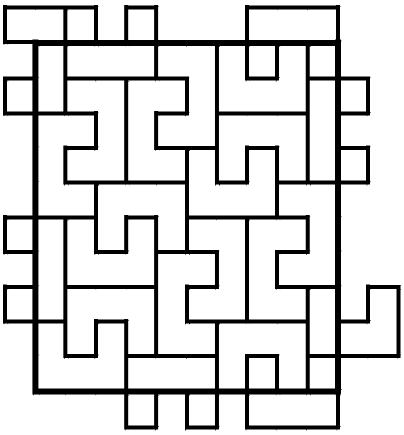
9.5.3. ***Atbilde:*** visus prasītos skaitļus var iegūt.

Risinājums. Veidosim skaitļu virknīti atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Pieraksts "101(1), 51" nozīmē, ka skaitli 51 iegūstam kā skaitļu 101 un 1 vidējo aritmētisko.

0, 101, 2001(101), 1051(101), 576(0), 288(0), 144(0), 72(0), 36(0), 18(0), 9(101), 55(101), 78(0), 39(9), 24(0), 12(0), 6(0), 3(55), <u>29</u>(3), 16(0), 8(0), 4(0), 2(0), <u>1</u>(2001), <u>1001</u>

Kā redzam, visus prasītos skaitļus aprakstītajā veidā tiešām var iegūt.

9.5.4. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A26. zīmējumu.



A26. zīm.

9.5.5. ***Atbilde:*** 15 diennaktis.

Risinājums. Pieņemsim, ka stāvošā ūdenī kuģis vienā dienā nobrauc attālumu *x*, bet plosts vienā dienā pa upi nopeld attālumu *y* (tāds ir arī straumes ātrums). Tad kuģis pa straumi (no Eglaines līdz Bērzainei) vienā dienā veic attālumu *x*+*y* jeb $\frac{1}{3}$ no visa ceļa starp Eglaini un Bērzaini, bet pret straumi vienā dienā kuģis nobrauc attālumu *x*–*y* jeb $\frac{1}{5}$ no visa ceļa.

Tātad $x+y=\frac{1}{3}$ un $x-y=\frac{1}{5}$. Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam:

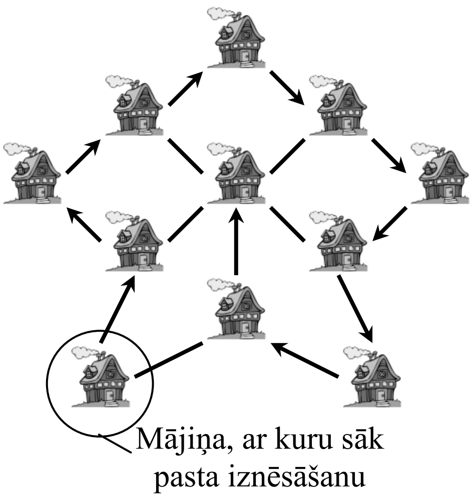
$$(x+y)-(x-y)=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$$2y=\frac{2}{15} \text{ jeb } y=\frac{1}{15}.$$

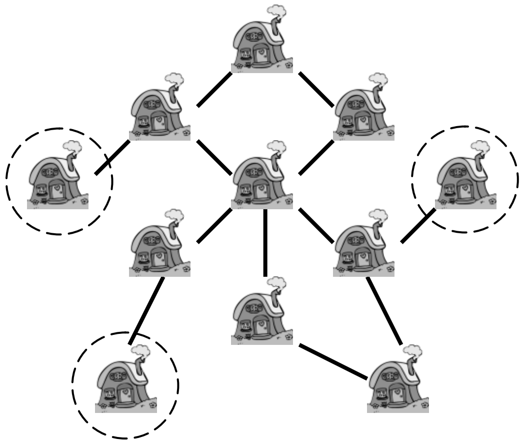
Tas nozīmē, ka plosts vienā dienā nopeld $\frac{1}{15}$ no attāluma starp Eglaini un Bērzaini, tātad pavisam ceļā plosts pavadīs 15 diennaktis.

2001./2002. mācību gads

10.1.1. ***Atbilde:*** trollīšu-čaklīšu ciemā to var izdarīt, bet trollīšu-sliņķīšu ciemā tas nav iespējams.



A27. zīm.



A28. zīm.

Risinājums. Pūķītis Mopsis spēs to izdarīt trollīšu-čaklīšu ciemā, ja pasta iznēsāšanu veiks, piemēram, tā kā tas ir parādīts A27. zīm.

Lai visi trollīši saņemtu pastu, pie tam pa katru taciņu pūķis pārvietotos tikai vienu reizi, tad trollītis, no kura mājiņas iziet tikai viena taciņa var būt vai nu pirmais, kas saņem pastu, vai pēdējais, kas saņem pastu. Tātad, lai pūķis varētu apciemot visus trollīšus, ievērojot noteikumus, ciematā nevar būt vairāk nekā divi rūķīši, no kuru mājiņām iziet tikai viena taciņa. Taču trollīšu-sliņķīšu ciemā ir trīs tādi trollīši, no kuru mājiņas iziet tikai viena taciņa (skat. A28. zīm.). Tātad vismaz viens no viņiem pastu nesaņems.

10.1.2. ***Atbilde.*** Iespējami 2 varianti:

1) piecas 2-santīmu monētas, divas 5-santīmu monētas un septiņas 10-santīmu monētas (skat. A29. zīm.);

2) desmit 2-santīmu monētas, sešas 5-santīmu monētas un četras 10-santīmu monētas (skat. A30. zīm.).

1. variants:

5 gb. 2 gb. 7 gb.

A29. zīm.

2. variants:

10 gb. 6 gb. 4 gb.

A30. zīm.

Risinājums. Visu monētu vērtība ir 90 santīmi – skaitlis, kas dalās ar 10. Ja no šīs summas atņemsim vienu vai vairākas 10 santīmu monētas, atlikusī summa arī dalīsies ar 10. Tātad no 2-santīmu un 5-santīmu monētām jāsastāda summa, kas dalās ar 10. Skaitļiem 2 un 5 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tāpēc lai summā iegūtu skaitli, kas dalās ar 10 ($=2\cdot 5$), gan 2-santīmu monētu, gan 5-santīmu veidotajai summai jādalās ar 10, t.i., 2-santīmu monētu skaitam jādalās ar 5, bet 5-santīmu monētu skaitam jādalās ar 2. Visus iespējamos gadījumus, apkoposim tabulā:

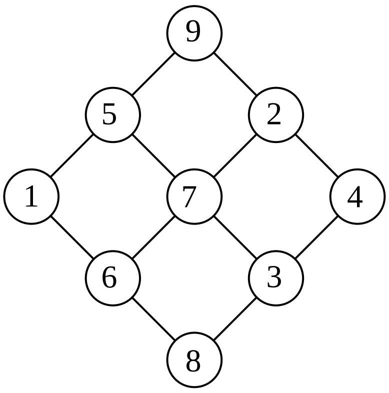
2-sant. monētas		. . . .		. . . .		. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
5	**10**	**2**	**10**	**7**	**70**	**90**
5	10	4	20	6	60	90
5	10	6	30	5	50	90
5	10	8	40	4	40	90
5	10	10	50	3	30	90
5	10	12	60	2	20	90
5	10	14	70	1	10	90
10	20	2	10	6	60	90
10	20	4	20	5	50	90
10	**20**	**6**	**30**	**4**	**40**	**90**
10	20	8	40	3	30	90
10	20	10	50	2	20	90
10	20	12	60	1	10	90

A31. zīm.

Ja 2-santīmu monētu būtu 15 vai vairāk (tātad vismaz 30 sant.), tad atlikušo summu (ne vairāk kā $90-30=60$ sant.) sastāda ne vairāk kā $60:5=12$ 5-santīmu un 10-santīmu monētas kopā, tātad nebūs spēkā nosacījums, ka vienai meitenei ir tik monētu, cik abām pārējām kopā.

Vienīgie varianti, kas apmierina visus uzdevuma nosacījumus, A31. zīm. tabulā izcelti trekniem burtiem.

10.1.3. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A32. zīmējumu.



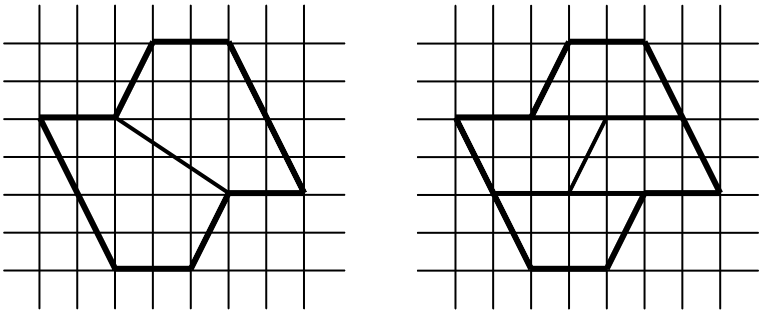
A32. zīm.

10.1.4. ***Risinājums.*** Pirmajā solā varam apsēdināt jebkuru no 12 lauminām un jebkuru no 12 rūķīšiem, turklāt viņus abus šajā solā varam sēdināt divos atšķirīgos veidos (vai nu laumiņa sēž sola labajā pusē, vai nu rūķītis) tas nozīmē, ka pirmo solu var aizpildīt pavisam $12\cdot12\cdot2$ veidos (izmantots kombinatorikas reizināšanas likums, skat. 12. lpp.). Otrajā solā var sēdēt jebkura no 11 atlikušajām laumiņām un jebkurš no 11 atlikušajiem rūķīšiem (atkal divos atšķirīgos veidos) $-$ $11\cdot11\cdot2$ veidi, tātad pirmos divus solus varam aizpildīt $12\cdot12\cdot11\cdot11\cdot4$ atšķirīgos veidos, utt. Nonākot pie pēdējā, 12. sola, būsim ieguvuši, ka kopā ir

$$12\cdot12\cdot11\cdot11\cdot10\cdot10\cdot9\cdot9\cdot8\cdot8\cdot7\cdot7\cdot6\cdot6\cdot5\cdot5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot4096$$

veidi kā var sasēdināt šos rūķīšus un laumiņas.

10.1.5. ***Atbilde:*** skat. A33. zīm.



A33. zīm.

10.2.1. ***Atbilde.*** Sarakstā bērni atrodas šādā kārtībā:

1) Anniņa
2) Pēterītis
3) Skaidrīte
4) Jānītis
5) Jurītis
6) Mudīte

Risinājums. Tā kā pirms Mudītes sarakstā ir vēl 5 bērni (t.i., visi pārējie), tad Mudīte sarakstā ir pēdējā ar numuru 6. Tagad izspriedīsim, kurš bērns sarakstā ir pirmais: Jānītis tas nav, jo 1 nav pāra skaitlis; Jurītis tas nav, jo viņš sarakstā ir aiz Pēterīša; Skaidrīte arī nav, jo viņa tā arī pateica; Mudīte ir 6.; Pēterītis arī nevar būt 1., jo tad pirms viņa nebūs neviena meitene. Tātad sarakstā 1. ir Anniņa. Pēterītim abās pusēs jābūt pa meitenei, tātad Pēterītim jābūt vai nu 2., vai 5., bet 5. Pēterītis nevar būt, jo tad Jurītis sarakstā nebūs aiz Pēterīša. Atliek iespēja, ka Pēterītis ir 2., bet Skaidrīte ir 3. Jānītim ir pāra numurs, tātad Jānītis ir 4., bet Jurītis sarakstā ir 5.

10.2.2. ***Risinājums.*** Nākamo skaitli iegūst, iepriekšējo pareizinot ar 3 un rezultātam pieskaitot 2.

1

$5 = 1 \cdot 3 + 2$

$17 = 5 \cdot 3 + 2$

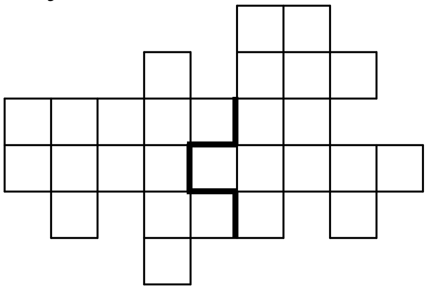
$53 = 17 \cdot 3 + 2$

$\dots$

Tas nozīmē, ka katrs šīs virknes skaitlis, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (izņēmums ir skaitlis 1). Tā kā 2001 dalās ar 3 bez atlikuma, tad šis skaitlis dotajai virknei nepieder.

Piezīme. Šāda tipa uzdevumos atbilde principā varētu būt jebkāda: virknes sastādītājs varētu būt iedomājies, ka virknes sākotnējo locekļu vērtības veidojas pēc viena noteikta likuma, bet sākot ar kādu vietu – pēc cita likuma, v.tml.

10.2.3. ***Atbilde:*** skat. A34. zīmējumu.



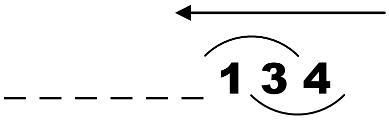
A34. zīm.

10.2.4. ***Atbilde:*** abas meitenes kļūdās.

Risinājums. Anniņa nevarēja izveidot šādu apli. Ar ciparu 4 ir iespējams izveidot tikai vienu divciparu skaitli, kas dalās ar 13 vai 17 (skat. tabulā), tas ir 34, bet apļa izveidošanai ir nepieciešami vismaz 2 šādi skaitļi.

Divciparu skaitļi, kas dalās ar 13	13; 26; 39; 52; 65; 78; 91
Divciparu skaitļi, kas dalās ar 17	17; 34; 51; 68; 85

Acīmredzami, ka Maijiņas izveidotajai rindai ir jābeidzas ar 34. Rakstot rindu no beigām uz sākumu, nākamais cipars būs jāraksta 1 tāpēc, ka cipars 3 var veidot trīs divciparu skaitļus (13, 39 un 34) (skat. tabulā), kas dalās ar 13 vai 17, bet cipari 3 un 4 jau vienreiz ir ierakstīti šajā rindā, tāpēc 34 neder un neder arī skaitlis 39, jo ciparam 3 ir jāatrodas divciparu skaitļa vienu pozīcijā. (skat. A35. zīm.)

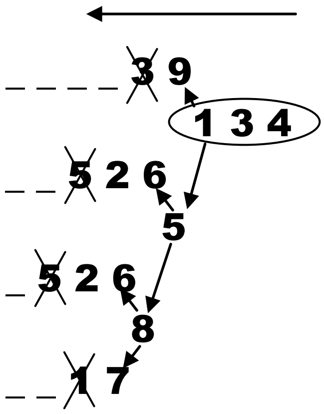


A35. zīm.

Turpinot rindu, jāmeklē divciparu skaitlis, kam vienu pozīcijā ir 1. Šādi skaitļi ir divi – 91 un 51. (skat. tabulā) Tātad tālāk jāapskata 2 gadījumi – kad nākamais cipars būs 9 vai 5 (skat. A36. zīm.).

1) Ierakstot ciparu 9, vienīgais divciparu skaitlis, kam cipars 9 ir vienu pozīcijā, ir 39, taču cipars 3 jau vienreiz ir ierakstīts, tāpēc šis variants neder.

2) Ierakstot ciparu 5, atkal ir jāapskata divi gadījumi, jo cipars 5 vienu pozīcijā ir gan skaitlim 65, gan – 85 (skat. A36. zīm.).



A36. zīm.

2.1) Vienīgais divciparu skaitlis, kam vienu pozīcijā ir cipars 6, ir 26. Tātad nākamais cipars būtu jāraksta cipars 5 no skaitļa 52 (citiem skaitļiem cipars 2 nav vienu pozīcijā), taču šis gadījums neder, jo cipars 5 jau vienreiz ir izmantots (skat. A36. zīm.).

2.2) Ierakstot ciparu 8, nākamais būtu jāraksta cipars 6 vai cipars 7.

2.2.1) Ierakstot ciparu 6, nākamais jāraksta cipars 2, un aiz tā – cipars 5, bet tas neder, jo cipars pieci jau vienreiz ir ierakstīts (skat. A36. zīm.).

2.2.2) Ierakstot ciparu 7, nākamais jāraksta cipars 1, bet arī tas jau vienreiz ir ierakstīts (skat. A36. zīm.).

Līdz ar to visi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, un arī Maijiņa kļūdās.

10.2.5. ***Atbilde.*** Māsiņa Lapsiņa olas var sanest 19 veidos.

Risinājums. Māsiņa Lapsiņa vistu kūtiņu 2 dienu laikā apciemoja 4 reizes, katrā reizē paņemot 1, 2 vai 3 olas. Neņemot vērā saskaitāmo secību, summā 8 olas, atnesot tās 4 gājienos, var iegūt tikai

1) 1+1+3+3;
2) 1+2+2+3;
3) 2+2+2+2.

Bet, tā kā ir svarīga secība, kādā lapsa nesa olas, piemēram, pirmās dienas rītā lapsa nozog 1 olu, vakarā – arī 1 olu, bet nākamās dienas rītā – 3 olas, un arī vakarā – 3 olas $(1+1+3+3)$, vai tikpat labi lapsa var pirmās dienas rītā nozagt 3 olas, pirmās dienas vakarā – 1 olu, otrās dienas rītā – 1 olu un vakarā – 3 olas $(3+1+1+3)$, kas ir divi dažādi veidi, kā sanest olas, tad ir jāizdomā, cik veidos var sakārtot katru no iepriekš aplūkotajiem 3 gadījumiem, ņemot vērā saskaitāmo secību.

Četrus dažādus skaitļus rindā var sakārtot 4·3·2·1=24 veidos (tā aprēķina permutāciju skaitu, skat. 13. lpp.), taču ja daži skaitļi atkārtojas, tad 24 jādala ar skaitu, cik veidos var rindā sakārtot vienādos skaitļus (skat. „Permutācijas ar atkārtojumiem" 14. lpp.).

Tad 1) gadījumā iegūstam $\frac{24}{2\cdot 2}=6$ veidi, kā lapsa varēja sanest 8 olas savā midzenī, divas reizes nesot pa vienai olai un divas reizes – pa 3 olām.

2) gadījumā iegūsim $\frac{24}{2}=12$ veidi, kā lapsa varēja sanest 8 olas savā midzenī, vienu reizi nesot 1 olu, divas reizes – 2 olas un vienu reizi – 3 olas.

3) gadījumā ir tikai 1 veids, kā sanest 8 olas, katru reizi nesot pa 2 olām.

Tātad kopā Māsiņa Lapsiņa olas var sanest $6+12+1=19$ dažādos veidos.

10.3.1. ***Atbilde.*** Anniņas telefona numurs ir 7360128. Jānīša aizšifrētais piemērs ir $6302+1078=7380$, bet Pēterīša piemērs ir

```
2 0 0 1 : 3 = 6 6 7
1 8
---
  2 0
  1 8
  ---
    2 1
    2 1
    ---
      0
```

Risinājums. Sāksim ar to, ka Jānīša aizšifrēto pareizo piemēru pāršifrēsim Pēterīša šifrā. Līdz ar to iegūsim divus pareizus piemērus, kas abi ir vienā šifrā, skat. A37. zīmējuma tabulā.

Jānīša šifrs	P	U	B	L	I	K	A		B	U	L	K	+	I	L	P	A	=	P	U	A	L
Pēterīša šifrs	S	A	U	L	I	T	E		U	A	L	T	+	I	L	S	E	=	S	A	E	L

A37. zīm.

Tālāk darbosimies tikai ar abiem piemēriem, kas aizšifrēti Pēterīša šifrā, skat. A38. zīm. un A39. zīm.

$$\begin{array}{lllllllllll}
\boxed{\dot{T}\ L} & L & I & : & A & = & U & U & S \\
I\ E & & & & & & & & \\
\quad \boxed{T}\ L & & & & & & & & \\
\quad I\ E & & & & & & & & \\
\qquad T\ I & & & & & & & & \\
\qquad T\ I & & & & & & & & \\
\qquad\quad 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

A38. zīm.

$$\begin{array}{ccccc}
 & U & \boxed{A} & L & T \\
+ & I & \boxed{L} & S & E \\
\hline
 & S & \boxed{A} & E & L
\end{array}$$

A39. zīm.

Apskatot abus piemērus, redzam, ka neviens no burtiem *T*, *I*, *A*, *U* un *S* nevar būt cipars 0, jo ar nulli nevar sākties neviens skaitlis. Tāpat arī $E \neq 0$, jo A39. zīmējumā redzamajā piemērā $T + E = L$ un tā kā dažādi cipari ir aizstāti ar dažādiem burtiem, tad $L \neq T$ un *E* nevar būt 0.

No A38. zīmējumā redzamā piemēra seko, ka $A \neq 1$.

Tālāk apskatām A39. zīm. apvilkto izteiksmi $A + L = A$. Vienīgā iespēja, kad šī vienādība būs patiesa ir tad, ja $L = 0$ vai arī, ja iepriekšējā šķirā ir radies pārnesums, tad $1 + A + L = 10 + A \;\Rightarrow\; L = 9$. Taču $L \neq 9$, jo no A38. zīmējumā apvilktās izteiksmes redzams, ka $L < E$, bet, ja $L = 9$, tad tā nevar būt. Tātad esam noskaidrojuši, ka $L = 0$. Abos piemēros aizstājam burtu *L* ar ciparu 0, skat. A40. zīm. un A41. zīm.

$$\begin{array}{lllllllllll}
\dot{T}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & : & A & = & U & U & S \\
I\ E & & & & & & & & \\
\hline
\quad T\ \mathbf{0} & & & & & & & & \\
\quad I\ E & & & & & & & & \\
\hline
\qquad T\ I & & & & & & & & \\
\qquad T\ I & & & & & & & & \\
\hline
\qquad\quad \mathbf{0} & & & & & & & &
\end{array}$$

A40. zīm.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & {\scriptstyle 1} & \\
 & U & A & \mathbf{0} & T \\
+ & I & \mathbf{0} & S & E \\
\hline
 & S & A & E & \mathbf{0}
\end{array}$$

A41. zīm.

A40. zīm. piemērā redzams, ka $10 - E = T$ un $T - 1 - I = 0$. A41. zīm. redzams, ka $1 + S = E$ (šeit nevar veidoties pārnesums, jo burta *S* lielākā vērtība var būt cipars 9, bet tādā gadījumā *E* vietā būtu 0, bet, tā kā $L = 0$, tad $E \neq 0$ un $S < 9$) un $U + I = S$.

Tātad vienlaicīgi ir jāizpildās šādām vienādībām:

$$\begin{cases}
T = I + 1 \\
E = 10 - T; \quad E = 10 - I - 1 = 9 - I \\
S = E - 1 \\
U = S - I; \quad U = E - 1 - I = 9 - I - 1 - I = 8 - 2I; \quad I = 1,2,3
\end{cases}$$

Tālāk mēģinājumu ceļā, vadoties pēc šīm vienādībām, ir jāatrod pārējo burtu vērtības. Piemēram, burta *I* vietā jāievieto visi cipari no 1 līdz 3 (*I* nevar būt 0, jo *L* jau ir 0,

$I \le 3$, jo $U = 8 - 2I$ ir jābūt pozitīvam skaitlim), un jāpārbauda, vai visas vienādības un abi sākumā dotie piemēri izpildās.

Pieņemam, ka $I = 1$, tad $\begin{cases} T = I + 1 = 1 + 1 = 2 \\ E = 10 - T = 10 - 2 = 8 \\ S = E - 1 = 8 - 1 = 7 \\ U = S - I = 7 - 1 = 6 \end{cases}$ un

$$\begin{array}{l}
\dot{2}\,0\,0\,1 : A = 6\,6\,7 \\
\underline{1\,8} \\
\,2\,0 \\
\,\underline{1\,8} \\
\,2\,1 \\
\,\underline{2\,1} \\
\,0
\end{array}$$

no kā varam secināt, ka $A = 3$. Atliek vien pārliecināties, ka izpildās arī $UALT + SAEL = PUAL$ jeb, kas ir tas pats, $BULK + ILPA = PUAL$. Tiešām, $6302 + 1078 = 7380$. Redzam, ka šādas burtu vērtības tiešām der.

Ievietojot I vietā pārējos ciparus (2 un 3), tad pārliecināmies, ka neviens no tiem neder un iepriekš iegūtās burtu vērtības ir vienīgās iespējamās. (Pārbaudiet to patstāvīgi!)

Tātad esam ieguvuši, ka Anniņas telefona numurs ir

Jānīša šifrs	P	U	B	L	I	K	A
Pēterīša šifrs	S	A	U	L	I	T	E
Anniņas telefona numurs	7	3	6	0	1	2	8

10.3.2. ***Atbilde:*** 20 bērni, 14 konfektes „Lācītis”, 8 konfektes „Vāverīte”.

Risinājums. Apzīmēsim klases bērnu skaitu ar *B*, konfekšu „Lācītis” skaitu – ar *L* un konfekšu „Vāverīte” skaitu – ar *V*.

No uzdevuma nosacījumiem seko, ka

1) bērnu ir par 6 vairāk nekā konfektes „Lācītis” jeb $B = L + 6$;

2) $\frac{1}{2}$ no klases bērniem ir par 2 vairāk nekā konfektes „Vāverīte” jeb $\frac{B}{2} = V + 2$;

3) $\frac{1}{2}$ no klases bērniem ir par 4 mazāk nekā konfektes „Lācītis” jeb $\frac{B}{2} = L - 4$.

Un ir jāatrisina vienādojumu sistēma:

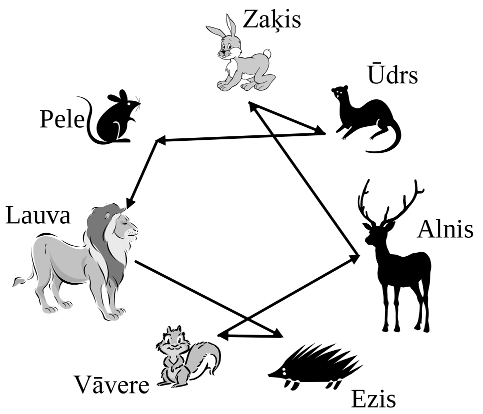
$$\begin{cases} B = L + 6 \\ \dfrac{B}{2} = L - 4 \quad \Big| \cdot 2 \\ \dfrac{B}{2} = V + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = L + 6 \\ B = 2L - 8 \\ \dfrac{B}{2} = V + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L + 6 = 2L - 8 \\ \dfrac{B}{2} - 2 = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 14 \\ B = L + 6 \Rightarrow B = 20 \\ V = \dfrac{B}{2} - 2 \Rightarrow V = \dfrac{20}{2} - 2 = 8 \end{cases}$$

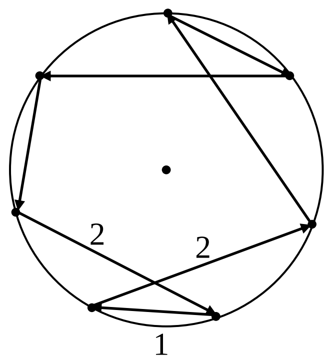
10.3.3. *Atbilde.* Iespējamība, ka Baiba paņems tieši to akmentiņu, kuru viņa savā kolekcijā ieguva pirmo, ir $\frac{1}{11}$. Baiba 3 no saviem akmeņiem var izvēlēties 165 veidos.

Risinājums. Iespējamība, ka Baiba paņems savu pirmo akmentiņu ir $\frac{1}{11}$, jo visu akmentiņu skaits ir 11, bet pirmais akmentiņš ir tikai 1.

Vienu savu akmentiņu Baiba var izvēlēties 11 veidos. Ja viens jau ir izvēlēts, tad otru viņa var izvēlēties vairs tikai 10 veidos, jo viens akmentiņš jau ir paņemts, bet trešo Baiba var izvēlēties vairs tikai 9 veidos, jo tad jau paņemti ir 2 akmentiņi. Tad kopā tie būtu $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ veidi (tā aprēķina variāciju skaitu, skat. 13. lpp.). Bet tā kā nav svarīgi, vai viņa izvelk pirmo zaļu akmentiņu un otro zilu, vai arī pirmo zilu un otro zaļu, tad mums visi iespējamie gadījumi jādala ar skaitli, cik veidos pavisam šos trīs akmentiņus var sakārtot. Trīs akmentiņus var sakārtot $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ dažādos veidos (tā aprēķina permutāciju skaitu, skat. 13. lpp.). Tātad no saviem 11 akmentiņiem 3 akmentiņus Baiba var izvēlēties $990 : 6 = 165$ veidos (tā aprēķina kombināciju skaitu, skat. 13. lpp.).

10.3.4. *Atbilde:* skat. A42. zīmējumu.

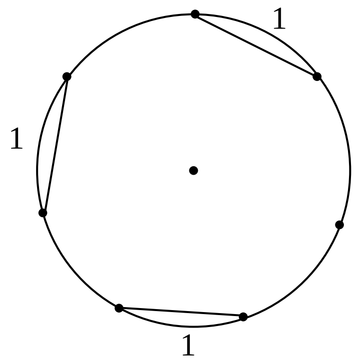


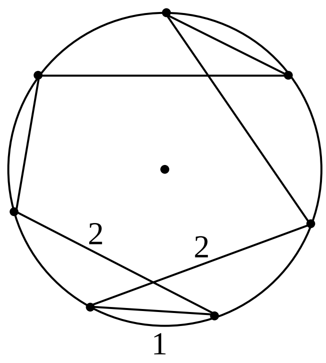


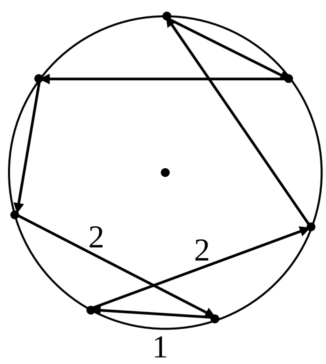
A42. zīm. A43. zīm.

Risinājums. Ar 1 apzīmēsim nogriežņa garumu, ja tas savelk vienu riņķa līnijas loku (savieno divas blakus esošas mājiņas), ar 2 – nogriežņa garumu, ja tas savelk divus riņķa līnijas lokus (savieno divas mājiņas, kam starpā ir vēl viena mājiņa), skat. A43. zīm.

Lai ceļš būtu īsākais, jāmēģina pēc iespējas vairāk salikt nogriežņus ar garumu 1. Tā kā zvēru mājiņas nav saliktas tā, lai lauva varētu pie visiem iet pēc kārtas, tad visas mājiņas ar nogriežņa garumu 1 nevarēs savienot. Šādus nogriežņus varēs iezīmēt tikai trīs, skat. A44. zīm.







A44. zīm. A45. zīm. A46. zīm.

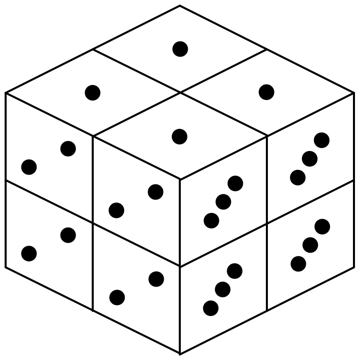
Nākamais īsākais nogrieznis ir ar garumu 2. Savelkam šos nogriežņus, skat. A45. zīm.

Redzam, ka visas mājiņas tagad ir savienotas ar nogriežņiem, atliek tikai katram nogrieznim norādīt virzienu, kādā Lauvam jāiet, skat. A46. zīm.

Tātad īsāko ceļu sastāda zvēru virkne: Lauva-Ezis-Vāvere-Alnis-Zaķis-Ūdrs-Pele-Lauva atgriežas mājās.

10.3.5. ***Atbilde.*** Mazākais spēļu kauliņu daudzums ir 8 kauliņi.

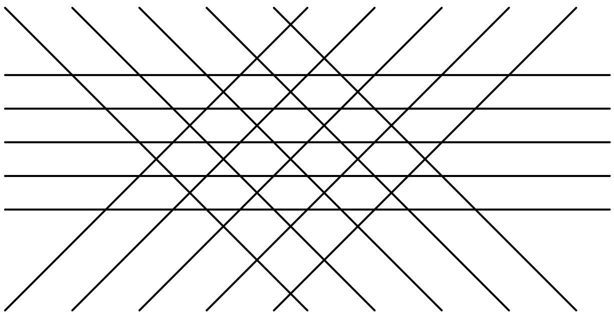
Risinājums. Ir nepieciešami vismaz 8 spēļu kauliņi. Pretējā gadījumā nebūs iespējams izveidot kubu. Kā no 8 kauliņiem salikt lielāku, skat. A47. zīm. (lielā kuba katru skaldni veido mazo kubiņu skaldnes ar vienādu punktu skaitu, tātad uz lielā kuba vienas skaldnes ir 4 punkti, uz otras – 8 punkti, uz trešās – 12 punkti, uz ceturtās – 16 punkti, uz piektās – 20 punkti un uz sestās skaldnes – 24 punkti.)



A47. zīm.

10.4.1. ***Atbilde.*** Taisnes veido 125 dažādus trijstūrus.

Risinājums. Apgalvojums "katra taisne ir paralēla tieši četrām citām taisnēm" izsaka 5 paralēlu taišņu kopu. Tā kā ir pavisam 15 taisnes, tad ir trīs dažādas paralēlu taišņu kopas (skat. A48. zīm.). Trijstūrī nekādas divas malas nav paralēlas, tāpēc viena mala jāņem no vienas paralēlo taišņu kopas (jebkuru no šīm 5 taisnēm), otra – no otras, trešā – no trešās. Tātad pavisam var izveidot $5{\cdot}5{\cdot}5=125$ (izmantots kombinatorikas reizināšanas likums, skat. 12. lpp.) dažādus trijstūrus.



A48. zīm.

10.4.2. ***Atbilde.*** Ja rūķīši strādās kopīgi, tad visu darbu padarīs apmēram 8 h 30 min. Pie darba jāķeras vismaz pieciem rūķīšiem, lai visu darbu padarītu vienas dienas laikā.

Risinājums. Ja Gunis visu darbu var izdarīt 3 dienās, tad vienā dienā viņš var padarīt $\frac{1}{3}$ visa darba. Līdzīgi vienā dienā Dunis padara $\frac{1}{4}$, Zumis – $\frac{1}{5}$, Rausis – $\frac{1}{6}$, Buzis – $\frac{1}{8}$ un

Auša – $\frac{1}{10}$ visa darba. Lai noskaidrotu, cik ilgā laikā rūķīši padarīs darbu, strādājot kopā, aprēķināsim, kādu daļu no visa darba tie var padarīt 1 dienā (strādājot kopā). (Ņemiet vērā: var saskaitīt padarīto darbu, bet ne dienas!)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{10}{40}+\frac{8}{40}+\frac{5}{40}+\frac{4}{40}\right)=\frac{47}{40}$$

no visa darba (tātad strādājot kopā, rūķīši vienā dienā var padarīt vairāk nekā visu uzdoto darbu). Lai noteiktu, cik ilgā laikā rūķīši to izdarīs, jāņem darba daļai apgrieztā daļa, tātad rūķīši strādās $\frac{40}{47}$ dienas. Tā kā zinām, ka dienā rūķīši strādā 10 stundas, tad kopā strādājot viņiem vajadzēs $10\cdot\frac{40}{47}=\frac{400}{47}=8\frac{24}{47}\text{ h}\approx 8\text{ h }30\text{ min}$.

Ievērosim, ka 4 čaklākie rūķīši, strādājot kopā, vienā dienā var padarīt $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}<1$ daļu no visa darba, tātad ar 4 rūķīšiem nepietiek, lai visu padarītu vienā dienā (jo, ja izvēlas citus 4 rūķīšus, tiem vajadzēs vēl vairāk laika). Vēl jāņem palīgos vismaz viens rūķītis, kurš dienā var izdarīt vismaz $1-\frac{57}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ daļu darba (t.i., tāds rūķītis, kurš viens pats strādātu ne vairāk kā 20 dienas). Šoreiz der gan Buzis, gan Auša. Tātad, lai visu darbu padarītu vienā dienā, pie darba jāķeras vismaz pieciem rūķīšiem.

10.4.3. *Atbilde.* Lielāks ir sākotnējais skaitlis.

Risinājums. Izpildot dalīšanu, iegūstam:

```
1   : 23=0,0434782608695652173913043
100
  80
  69
  110
   92
   180
   161
    190
    184
      60
      46
       40
       23
        7...
```

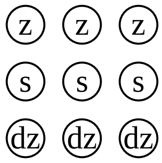
Katrs nākamais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī. Ja turpināsiet dalījumu redzēsiet, ka dalījumu atlikumi atkārtojas, tātad atkal un atkal parādīsies divdesmit divu ciparu grupa 0434782608695652173913.

Tā kā $2002=22\cdot 91$, tad izsvītrotais cipars ir perioda pēdējais cipars, t.i., cipars 3. Tātad sākotnējam un iegūtajam skaitlim pirmie 2001 cipari aiz komata sakrīt, bet nākamais cipars sākotnējam skaitlim 3 ir lielāks nekā iegūtajam skaitlim 0. Tāpēc sākotnējais skaitlis ir lielāks.

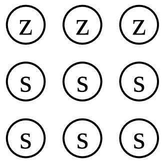
10.4.4. ***Atbilde:*** 4710 dienas.

Risinājums. Samazināsim katru karoga joslu par vienu spuldzīti, tagad tā izmēri ir 3×3. Tā kā firmas rīcībā ir 4 dzeltenas, 5 zilas un 6 sarkanas spuldzītes, tad karoga rindiņas ar trīs vienas krāsas spuldzītēm, varētu būt tikai šādās krāsās:

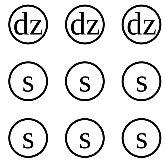
a) 1 zila, 1 sarkana, 1 dzeltena,
b) 1 zila, 2 sarkanas,
c) 1 dzeltena, 2 sarkanas. (Skat. A49. zīm., A50. zīm., A51. zīm.)



A49.zīm.

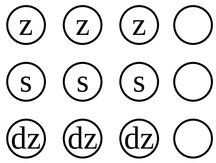


A50.zīm.

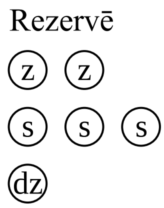


A51.zīm.

Saskaitīsim, cik dažādus spuldzīšu izvietojuma veidus varam iegūt, A52. zīm. redzamajam izvietojumam, katrā rindā pievienojot pa vienai spuldzītei.



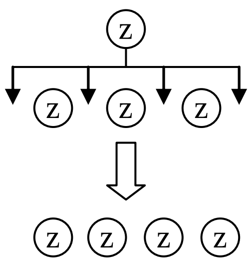
A52. zīm.



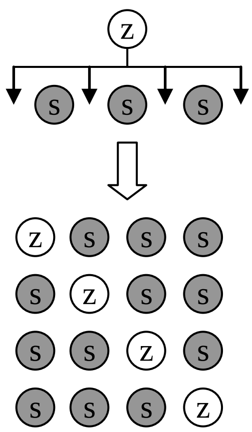
A53. zīm.

Šobrīd rezervē ir palikušas 2 zilas, 3 sarkanas un 1 dzeltena spuldzīte (skat. A53. zīm.) Tālāk apskatīsim iespējas, kā mēs varam izvēlēties ceturto spuldzīti augšējā rindā, un, ņemot vērā tās izvēli, kā var izvēlēties trūkstošo spuldzīti otrajā un apakšējā rindā. Spuldzīšu izvēles process parādīts A56. zīm., ja augšējā rindā ievietojam zilu spuldzīti, A57. zīm., ja augšējā rindā ievietojam sarkanu spuldzīti un A58. zīm., ja augšējā rindā ievietojam dzeltenu spuldzīti. Zīmējumos zilas spuldzītes apzīmētas ar „z”, sarkanas – ar „s” un dzeltenas – ar „dz”.

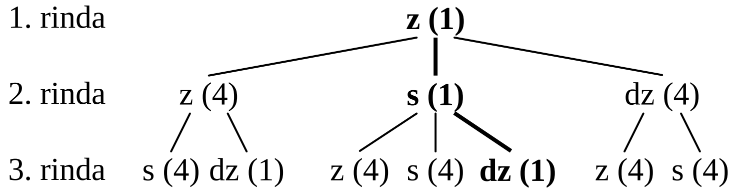
Skaitļi iekavās pie spuldzītes norāda, cik veidos šīs krāsas spuldzīti varam ievietot rindiņā – ja 3 spuldzīšu rindiņa jau sastāv no šīs krāsas spuldzītēm, tad ievietojot jebkurā vietā ceturto spuldzīti, iegūstam tikai vienu variantu, taču, ja ceturtā spuldzīte atšķiras no trim jau esošajām, tad šo spuldzīti varam ievietot 4 vietās, katrreiz iegūstot atšķirīgu spuldzīšu izvietojumu, piemēram, skat. A54. zīm. un A55. zīm.



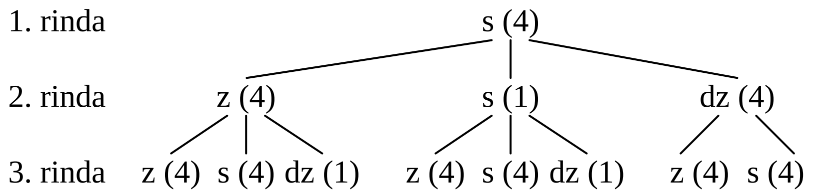
A54. zīm.

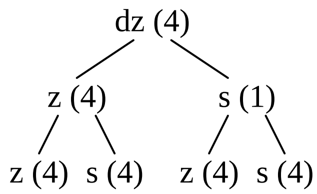


A55. zīm.



A56. zīm.

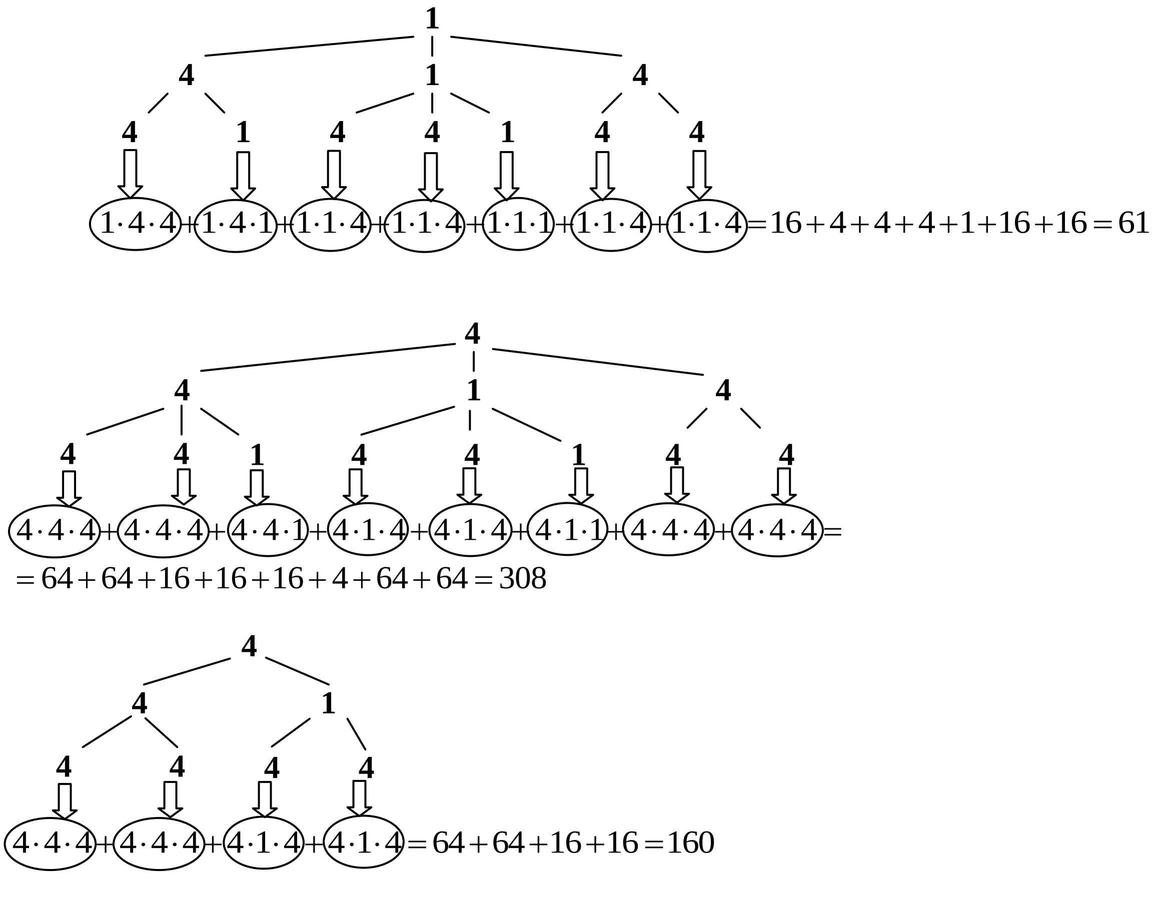




A57. zīm.

A58. zīm.

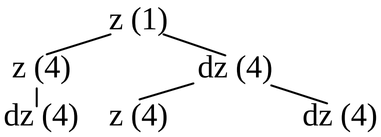
Esam ieguvuši grafu (skat. 10. lpp.), ko sauc par koku. Katru atšķirīgo variantu raksturo koka zari. Piemēram, viena iespēja ir A56. zīmējumā izceltais zars z—s—dz . Lai aprēķinātu visu atšķirīgo iespēju skaitu, uz viena zara esošos skaitļus sareizina (tādējādi iegūstot spuldzīšu izvietojumu skaitu katru trīs spuldzīšu izvēles gadījumā; minētajā piemērā tas ir $1{\cdot}1{\cdot}1=1$) un dažādo zaru rezultātus saskaita, skat. A59. zīm. Tātad, A52. zīm. attēlotajai spuldzīšu sistēmai, pievienojot 3 spuldzītes no pāri palikušajām, varam iegūt $61+308+160=529$ dažādus variantus, skat. A59. zīm.



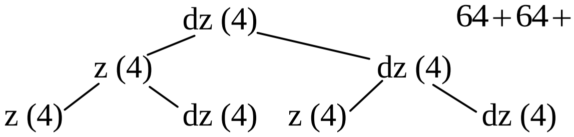
A59. zīm.

Bez tam iegūtās rindiņas katrā variantā varam mainīt vietām – 3 dažādas rindiņas var izvietot $3\cdot 2\cdot 1=6$ atšķirīgos veidos (skat., kā aprēķina permutāciju skaitu, 13. lpp.). Ievērosim, ka visi jauniegūtie varianti būs atšķirīgi viens no otra, kā arī no jau apskatītajiem variantiem. Tātad pavisam ir $6\cdot 529=3174$ gadījumi, kad vienā joslā ir 3 zilas spuldzītes, citā joslā – 3 sarkanas un trešajā joslā – 3 dzeltenas spuldzītes.

Līdzīgi izanalizējam arī gadījumu, kad vienā rindiņā ir 3 zilas spuldzītes un divās rindiņās pa 3 sarkanām spuldzītēm (skat. A50. zīm.), tad pāri palikušās spuldzītes varam pievienot $48+256=304$ veidos (skat. A60. zīm.) un rindiņas varam sakārtot $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}=3$ dažādos veidos (skat. „Permutācijas ar atkārtojumiem” 14. lpp.), kopā iegūstam $3\cdot 304=912$ dažādus izvietojumus.



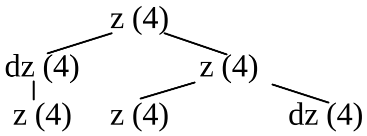
$16+16+16=48$



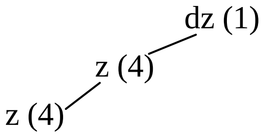
$64+64+64+64=256$

A60. zīm.

Tāpat apskatām gadījumu, kad vienā joslā ir 3 dzeltenas spuldzītes un divās pārējās joslās ir pa 3 sarkanām spuldzītēm (skat. A51. zīm.) – tad pāri palikušās spuldzītes varam pievienot $192+16=208$ veidos (skat. A61. zīm.), rindiņas varam sakārtot 3 dažādos veidos, tātad kopā iegūstam $3\cdot 208=624$ dažādus spuldzīšu izvietojumus.



$64+64+64=192$



16

A61. zīm.

Tātad, lai parādītu visas dažādās gaismas reklāmas, ir nepieciešamas $3174+912+624=4710$ dienas, t.i., apmēram 12 gadi un 11 mēneši.

10.4.5. ***Atbilde:*** uzvarēs pirmais spēlētājs.

Risinājums. Pirmajam spēlētājam jāspēlē tā: pirmajā gājienā viņam jāpaņem tieši 220 rieksti (tad abās kaudzēs paliks vienāds skaits riekstu – katrā pa 2002 riekstiem). Arī katrā nākošajā gājienā pirmais spēlētājs izlīdzina riekstu skaitu abās kaudzēs – viņš ņem riekstus no otras kaudzes, nevis no tās no kuras ņēma otrais spēlētājs (skaidrs, ka tā kaudze būs lielāka, jo no otras kaut ko jau paņēmis otrais spēlētājs), un tik pat daudz, cik paņēma otrais spēlētājs. Kā redzam, pirmais spēlētājs var panākt, ka pēc viņa gājiena abās kaudzēs paliek abās kaudzēs vienāds skaits riekstu un pēc otrā spēlētāja gājiena abās kaudzēs paliek atšķirīgi daudzumi riekstu (jo otrais spēlētājs drīkst ņemt riekstus tikai no vienas kaudzes, pie tam viņam ir jāpaņem vismaz viens rieksts; tā kā pirms viņa gājiena abās kaudzēs ir vienāds skaits riekstu, tad viņam šis „līdzsvars" gribot negribot jāizjauc).

Tā kā ar katru gājienu kopējais riekstu skaits samazinās, tad pienāks brīdis, kad abās kaudzēs nebūs neviena rieksta, t.i., abās kaudzēs būs palicis pa 0 riekstiem. Šāda situācija var iestāties pēc pirmā spēlētāja gājiena, tātad otrais spēlētājs vairs nevarēs izdarīt gājienu un zaudēs.

10.5.1. ***Atbilde.*** Piemēram:

a) $\frac{12354}{67098}$, b) $\frac{12354}{67809}$, c) $\frac{14352}{78096}$, d) $\frac{12345}{67890}$,

e) $\frac{14352}{78096}$, f) $\frac{42063}{84567}$, g) $\frac{37408}{91256}$, h) $\frac{12789}{63045}$.

Iespējami arī citi risinājumi. Skat. „Dalāmības pazīmes" 11. lpp.

10.5.2. ***Atbilde.*** Lāsma Strautiņa ir fiziķe un viņai patīk dzeltenā krāsa; Kristīne māca informātiku un viņai patīk zaļā krāsa; Sandrai Kalniņai patīk sarkanā krāsa.

Risinājums. Ierakstīsim tabulā visus datus, kas uzdevumā ir doti (skat. A62. zīmējuma tabulā).

Vārds	Uzvārds	Krāsa	Profesija
Kristīne	~~Kalniņa~~		
Sandra		sarkans	~~informātika~~
Lāsma	Strautiņa	~~zaļš~~	

dzeltens	fiziķe

A62. zīm.

Tā kā Kristīne nav Kalniņa un arī Lāsma nav Kalniņa (jo ir Strautiņa), tad Sandras uzvārds ir Kalniņa un viņai patīk sarkanā krāsa.

Tā kā Lāsmai nepatīk zaļā krāsa, un sarkanā krāsa ir Sandras mīļākā krāsa, tad Lāsmai Strautiņai patīk dzeltenā krāsa un viņa ir fiziķe.

Atliek vien secināt, ka Kristīnei patīk zaļā krāsa un viņa māca informātiku (jo zināms, ka Sandra nemāca informātiku un Lāsma ir fiziķe), skat. A63. zīmējuma tabulā.

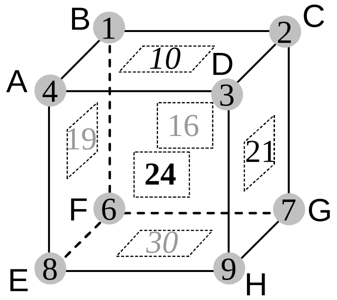
Vārds	Uzvārds	Krāsa	Profesija
Kristīne		zaļš	informātika
Sandra	Kalniņa	sarkans	
Lāsma	Strautiņa	dzeltens	fiziķe

A63. zīm.

10.5.3. ***Atbilde:*** Nevienā virsotnē nav ierakstīts cipars 5. Vienu no atrisinājumiem skat. A64. zīm., bet tas nav vienīgais atrisinājums.

Risinājums. Tā kā virsotnēs tika ierakstīti dažādi cipari un A+B+C+D=10, tad vienīgā iespēja ir A+B+C+D=1+2+3+4=10 (nav zināms, kurš cipars, kurā virsotnē, bet zināms, ka izmantoti tieši šie cipari). Tāpat arī E+F+G+H=30 var iegūt vienā veidā 6+7+8+9=30. Tātad nevienā virsotnē nav ierakstīts cipars 5.

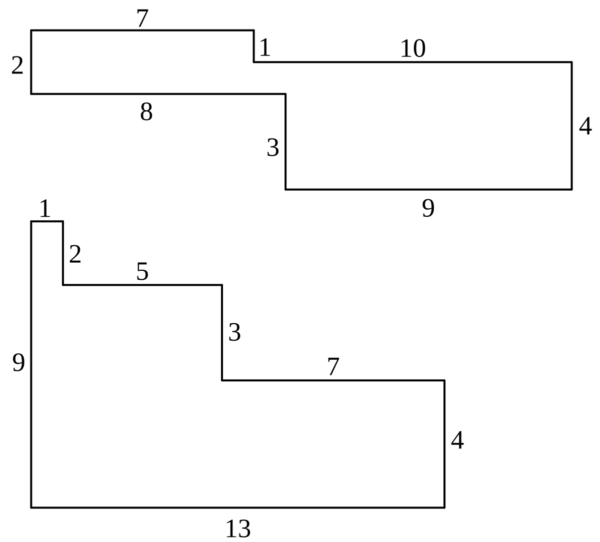
Viens piemērs, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir parādīts A64. zīmējumā: A=4, B=1, C=2, D=3, E=8, F=6, G=7, H=9.



A64. zīm.

Tas nav vienīgais atrisinājums, jo, piemēram, A+B=C+D=5, un samainot vietām A ar D un B ar C, atkal iegūsim pareizas vienādības. Vispār šajā uzdevumā ir 8 nezināmie un tikai 6 vienādības, un šādos gadījumos parasti nav viens vienīgs atrisinājums.

10.5.4. ***Atbilde.*** Piemērus lauztai līnijai ar kopējo garumu 44 rūtiņas skat. A65. zīmējumā (iespējami arī citi risinājumi). Ja posmu kopējais garums ir 51 vienība, tad uzdevumu izpildīt nevar.

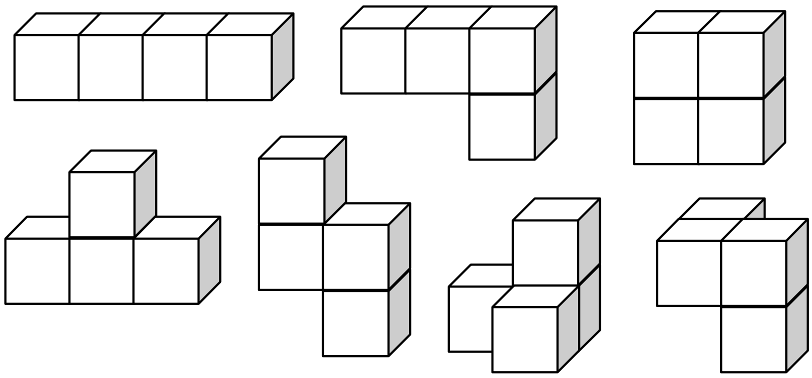


A65. zīm.

Risinājums. Uzdevumā dotajai lauztajai līnijai vertikālie un horizontālie posmi seko pamīšus; tā kā tā ir slēgta lauzta līnija, tad vertikālo posmu ir tikpat, cik horizontālo, pie tam, vertikālo posmu kopējais garums ir pāra skaits rūtiņu (uz augšu pārvietojas tikpat, cik uz leju); tāpat arī horizontālo posmu kopējais garums ir pāra skaits rūtiņu (pa labi pārvietojas tikpat, cik pa kreisi). Tātad kopējam garumam jābūt pāra skaitlim, bet 51 tāds nav.

10.5.5. ***Atbilde:*** var salikt 7 dažādas figūras.

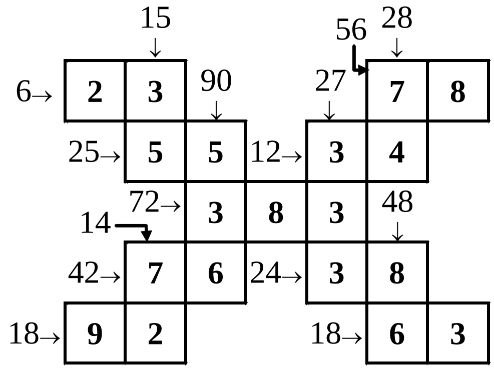
Risinājums. Sagriežot doto figūru, iegūstam 3 klucīšus, kuriem katram ir nokrāsotas 5 skaldnes un vienu klucīti, kuram ir nokrāsotas 3 skaldnes. Tātad uzdevuma nosacījumus apmierinās visas figūriņas, kuras var izveidot no 4 kubiņiem, jo nevienā figūriņā neviens kubiņš nesaskaras ar vairāk nekā 3 klucīšiem (vairāk klucīšu vispār nav). Visas iespējamās figūras parādītas A66. zīmējumā.



A66. zīm.

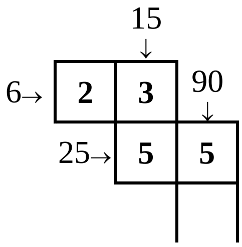
2002./2003. mācību gads

11.1.1. ***Atbilde:*** skat. A67. zīmējumu.

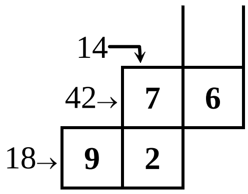


A67. zīm.

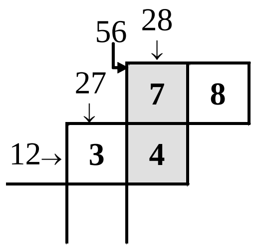
Risinājums. Sāksim tabulu aizpildīt ar otro rindiņu horizontāli, proti, skaitli 25 reizinājumā var iegūt tikai vienā vienīgā veidā $25=5\cdot 5$, līdz ar to varam aizpildīt arī augšējo kreiso stūri: $15=3\cdot 5$ un $6=2\cdot 3$ (skat. A68. zīm.).



A68. zīm.



A69. zīm.



A70. zīm.

Tālāk apskatām tabulas kreiso apakšējo stūri (skat. A69. zīm.). Skaitli 14 reizinājumā var iegūt vienā vienīgā veidā $14=2\cdot 7$, šoreiz tikai jāizdomā, kādā secībā tie būs – tā kā $18=9\cdot 2$, tad redzams, ka ciparam 2 jābūt zem cipara 7. Un varam aizpildīt arī, ka $42=7\cdot 6$.

Līdz ar to trešajā vertikālajā kolonnā varam ierakstīt $90=5\cdot\underline{\underline{3}}\cdot 6$.

Apskatām tabulas labo augšējo stūri (skat. A70. zīm.). Zināms, ka 56 kā divu ciparu reizinājums ir tikai $56=7\cdot 8$. Lai zinātu, kādā secībā jāraksta 7 un 8, apskatām A70. zīmējumā iekrāsoto vertikālo kolonnu. Skaitli 28 kā reizinājumu, izmantojot vienu no cipariem 7 vai 8, var iegūt tikai kā $28=7\cdot 4$, tātad cipars 7 ir pa kreisi no cipara 8. Pēc tam varam aizpildīt arī $12=3\cdot 4$.

Tagad varam aizpildīt vertikālo kolonnu, kurai reizinājumā jāiegūst 27 kā trīs skaitļu reizinājums. Vienīgais veids, kā to var izdarīt, ir $27=3\cdot 3\cdot 3$.

Līdz ar to redzam, ka $24=3\cdot 8$, $48=8\cdot 6$ un $18=6\cdot 3$. Tabula ir aizpildīta!

11.1.2. ***Atbilde.*** Brencis pazīst 15 skaitļus, kuru summa ir 1470.

Risinājums. Tā kā Brencis pazīst tikai 3 dažādus ciparus, tad viņš pazīst tikai 3 viencipara skaitļus 1; 2; 3. Brenča zināmajiem divciparu skaitļiem pirmais cipars var būt jebkurš no cipariem 1, 2 vai 3 – tātad 3 iespējas, bet otrais cipars – jebkurš no atlikušajiem diviem cipariem. Tātad Brencis pavisam pazīst $2\cdot 3=6$ divciparu skaitļus. (Tie ir 12; 13; 21; 23; 31; 32.) Līdzīgi noskaidrojam, ka Brencis pazīst $3\cdot 2\cdot 1=6$ trīsciparu skaitļus. (Tie ir 123; 132; 213; 231; 312; 321.) Skaidrs, ka Brencis nepazīst nevienu skaitli, kura pierakstā ir četri vai vairāk cipari, jo skaitlī visiem cipariem jābūt dažādiem un Brencis zina tikai trīs ciparus. Tātad pavisam Brencis pazīst 3+6+6=15 dažādus skaitļus.

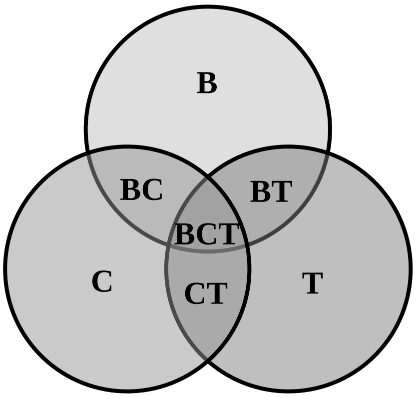
Vispirms noskaidrosim visu Brenča zināmo viencipara skaitļu summu: 1+2+3=6. Visos sešos zināmajos divciparu skaitļos katrs no dotajiem cipariem tieši divas reizes ir kā vienu cipars un tieši divas reizes ir desmitu cipars. Tāpēc visu Brenča divciparu skaitļu summu var aprēķināt sekojoši: $2\cdot(1+2+3)\cdot 10+2\cdot(1+2+3)=120+12=132$. Līdzīgi aprēķināsim Brencim zināmo trīsciparu skaitļu summu (visos šajos skaitļos katrs cipars tieši divas reizes ir kā vienu cipars, divas reizes kā desmitu cipars un divas reizes kā simtu cipars): $2\cdot(1+2+3)\cdot 100+2\cdot(1+2+3)\cdot 10+2\cdot(1+2+3)=1200+120+12=1332$.

Tātad visu Brencim zināmo skaitļu summa ir 6+132+1332=1470.

Piezīme: protams, konkrētajā uzdevumā viegli varēja aprēķināt summu, vienkārši saskaitot visus 15 skaitļus. Taču ir vērts iepazīties ar doto risinājumu, jo tajā parādīts vispārīgs paņēmiens līdzīgu uzdevumu risināšanai.

11.1.3. ***Atbilde.*** Limpopo dzīvo 490 iedzīvotāji.

Risinājums. Attēlosim visus salas iedzīvotājus ar *Eilera riņķiem* – viena riņķa iekšpusē atrodas visi cilvēki, kas runā, *burbur* valodā, otra riņķa iekšpusē – tie, kas runā *cipcip* valodā, trešajā riņķī – tie, kas runā *tamtam* valodā. Apgabalā, kas kopīgs diviem riņķiem, atrodas tie, kas prot abas divas valodas utt. (skat. A71. zīm.). Ieviesīsim iedzīvotāju skaita apzīmējumus: B – tik iedzīvotāji runā tikai *burbur* valodā; C – tikai *cipcip*; T – tikai *tamtam*; BC – tikai *burbur* un *cipcip*; BT – tikai *burbur* un *tamtam*; CT – tikai *cipcip* un *tamtam*; BCT – visas trīs valodas; S – visu Limpopo iedzīvotāju skaits.



A71. zīm.

Iedzīvotāji, kas nerunā kādā valodā, atrodas apgabalos ārpus konkrētā riņķa. (Piemēram, tie, kas nerunā *burbur* valodā, izvietojušies pa apgabaliem C, CT un T.) Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem iegūstam sekojošus vienādojumus:

$$B+C+BC=200 \qquad (1)$$
$$C+T+CT=210 \qquad (2)$$
$$B+T+BT=220 \qquad (3)$$

Saskaitot (1), (2) un (3) vienādojumus, iegūstam

$$2\cdot(B+C+T)+BC+BT+CT=630 \text{ jeb } BC+BT+CT=630-2\cdot(B+C+T)$$

Ņemot vērā to, ka tikai vienu valodu prot 180 cilvēki jeb B+C+T=180, iegūstam, ka tieši divas valodas zina

$$BC+BT+CT=630-2\cdot 180=270 \text{ iedzīvotāji.}$$

Tā kā Limpopo ir iedzīvotāji, kas zina tikai vienu valodu, vai tādi, kas zina tieši divas valodas, vai cilvēki, kas zina tieši trīs minētās valodas, un nekādi citi, tad kopējais iedzīvotāju skaits

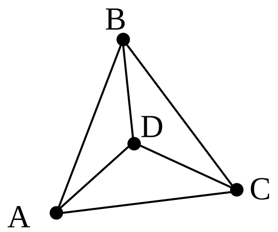
$$S=(B+C+T)+(BC+BT+CT)+BCT=180+270+40=490.$$

11.1.4. ***Atbilde:*** 9 nogriežņus.

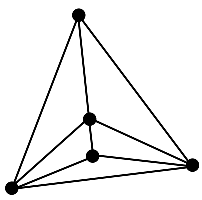
Risinājums. Vispirms apskatīsim, cik, visaugstākais, nogriežņus, lai tie nekrustotos, plaknē var novilkt starp 4 punktiem. Pavisam starp 4 punktiem var novilkt 6 nogriežņus. A72. zīmējumā parādīts piemērs, kad starp 4 punktiem novilkti 6 nogriežņi un nekādi divi no tiem nekrustojas. Pie tam ievērosim, ka šie četri punkti noteikti veido ieliektu četrstūri. Izliekta četrstūra gadījumā abas diagonāles atrodas četrstūra iekšpusē, tāpēc nevar novilkt abas diagonāles tā, lai tās nekrustotos. Tātad apskatāmajā četru punktu sistēmā, novelkot visus iespējamos nogriežņus, iegūstam trijstūri, kuram iekšpusē atzīmēts viens punkts.

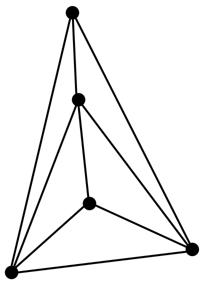
Tagad 4 punktu sistēmai pievienosim piekto punktu. To var ielikt vai nu vienā no mazajiem trijstūriem ABD, ACD vai BCD (skat. A73. zīm.) vai arī ārpus lielā trijstūra (skat. A74. zīm. un A75. zīm.). Pirmajā gadījumā vēl var novilkt 3 jaunus nogriežņus, kas nekrusto nevienu no jau novilktajiem nogriežņiem. Otrajā gadījumā, atkarībā no punkta izvēles, var novilkt vai nu 2 (A75. zīm.), vai 3 (A74. zīm.) jaunus nogriežņus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

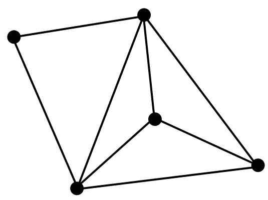
Tātad plaknē starp 5 punktiem augstākais var novilkt $6+3=9$ nogriežņus. Piemēru skat. A73. zīm. un A74. zīm.



A72. zīm.


A73. zīm.


A74. zīm.


A75. zīm.

11.1.5. ***Atbilde:*** **a)** vismaz 10 šokolādītes; **b)** vismaz 16 šokolādītes.

Risinājums. Uzdevumā prasīts noskaidrot mazāko iespējamo summu, tātad jāizvēlas vismazākie uzdevumam atbilstošie saskaitāmie un jāatrod to summa. Pēc tam noteikti ir jāuzrāda piemērs, kas apstiprina tāda gadījuma iespējamību.

a) Ja kāds bērns neēda šokolādes (tātad "apēda" 0 šokolādes) un visi pārējie apēda dažādu skaitu šokolādīšu, tad mazākā iespējamā summa ir $0+1+2+3+4=10$ šokolādītes. Tā kā katrā pauzē tika apēstas tieši 2 šokolādītes, tad pavisam bija 5 reklāmas pauzes. A76. zīmējuma piemērs parāda, ka šāds gadījums iespējams. (Zīmējumā ar burtiem apzīmēti bērni, ar cipariem reklāmas pauzes, bet zvaigznīte norāda kurā pauzē kurš bērns apēda vienu šokolādīti.)

pauzes	1.	2.	3.	4.	5.	kopā
A						0
B	*					1
D	*	*				2
E		*	*	*	*	4
G			*	*	*	3
kopā						**10**

A76. zīm

pauzes	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	kopā
A	*								1
B	*	*							2
D		*	*		*	*	*	*	6
E			*	*		*		*	4
G				*	*		*		3
kopā									**16**

A77. zīm.

b) Tā kā katrs bērns apēdis vismaz vienu šokolādīti, tad tagad mazākā iespējamā summa ir $1+2+3+4+5=15$. Taču katrā pauzē tika apēstas tieši 2 šokolādes, tātad kopējam apēsto šokolādīšu skaitam jādalās ar 2 jeb jābūt pāra skaitlim. Mazākais pāra skaitlis, kas nav mazāks par 15, ir 16. Tātad šajā gadījumā tika apēstas vismaz 16 šokolādītes un bērni redzēja $16:2=8$ reklāmas pauzes. Šī gadījuma piemēru skat. A77. zīm.

11.2.1. ***Atbilde:*** viens dārgumu meklētājs ieguva 990 dālderus, otrs – 770 dālderus.

Risinājums. Tā kā ir tikai divi dārgumu meklētāji, tad, ja viens dārgumu meklētājs ieguva par 30 dālderiem vairāk nekā bija plānots sākumā, tad otrs – par 30 dālderiem mazāk nekā plānots sākumā. Vispirms noskaidrosim kura daļa no visiem dālderiem ir šie 30 dālderi. Sākumā bija plānots, ka pirmais dārgumu meklētājs saņems $\frac{6}{5+6}=\frac{6}{11}$ no visiem dālderiem, bet faktiski viņš dabūja $\frac{9}{9+7}=\frac{9}{16}$ no visiem dālderiem. Aprēķinām starpību $\frac{9}{16}-\frac{6}{11}=\frac{3}{176}$, tātad $\frac{3}{176}$ no visiem dālderiem ir 30 dālderi un $\frac{1}{176}$ no visiem dālderiem ir 10 dālderi. Tātad pavisam bija 176 reizes vairāk jeb 10·176=1760 dālderi.

Tagad varam aprēķināt, ka pirmais dārgumu meklētājs saņēma $\frac{9}{16}\cdot 1760=990$ dālderus, bet otrs $\frac{7}{16}\cdot 1760=770$ (jeb $1760-990=770$) dālderus.

11.2.2. ***Atbilde:*** **a)** jā, eksistē, pavisam ir 3 šādu divciparu īpašo skaitļu pāri, kuru summa arī ir īpašs skaitlis (34 un 89; 45 un78; 56 un 67), **b)** nē, neeksistē.

Risinājums.

a) Pavisam ir 8 īpašie divciparu skaitļi – to pirmais cipars var būt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (0 nevar būt, jo tad nebūs divciparu skaitlis; 9 nevar būt, jo nākamajam ciparam jābūt $9+1=10$, bet tāda cipara nav), pie tam jebkuru īpašu divciparu skaitli varam uzrakstīt kā $10\cdot n+(n+1)=11n+1$, kur n ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 vai 8. Tātad divu īpašu skaitļu $11a+1$ un $11b+1$ (a un b – cipari, izņemot 0 un 9) summa ir $(11a+1)+(11b+1)=11a+11b+1+1=11(a+b)+2$. Tagad šķirosim šādus divus gadījumus:

1) ja $a+b<9$ (tātad ir skaitlis no 1 līdz 8), tad $11(a+b)+2$ ir divciparu skaitlis, bet nav īpašs skaitlis, jo īpaši skaitļi uzrakstāmi formā $11n+1$;

2) ja $a+b\geq 9$, tad $11(a+b)+2$ ir trīsciparu skaitlis, pie tam $11(a+b)+2\leq 11(8+8)+2=178$. Vienīgais trīsciparu īpašais skaitlis, kas mazāks par 178, ir 123.

Tātad $11(a+b)+2=123 \Rightarrow 11(a+b)=121 \Rightarrow a+b=11$. Lai divu skaitļu a un b summa būtu 11, turklāt ne a, ne b nav 0 un nav 9, tad iespējami trīs varianti:

1) $11=a+b=3+8 \quad \Rightarrow \quad 11a+1=33+1=34$ un $11b+1=88+1=89$ un varam pārliecināties, ka tiešām $34+89=123$;

2) $11=a+b=4+7 \quad \Rightarrow \quad 11a+1=44+1=45$ un $11b+1=77+1=78$ un varam pārliecināties, ka tiešām $45+78=123$

3) $11=a+b=5+6 \quad \Rightarrow \quad 11a+1=55+1=56$ un $11b+1=66+1=67$ un varam pārliecināties, ka tiešām $56+67=123$.

Tie arī ir vienīgie divciparu īpašo skaitļu pāri, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

b) Nē, tādus divus trīsciparu īpašos skaitļus atrast nevar. Īpašo trīsciparu skaitli var uzrakstīt formā $100n+10(n+1)+n+2=111n+12$, kur n ir cipars 1, 2, 3, 4, 5, 6 vai 7 (0, 8, 9 neder līdzīgi kā a) gadījumā). Divu trīsciparu īpašu skaitļu summu var uzrakstīt $(111a+12)+(111b+12)=111(a+b)+24$ (a un b ir 1, 2, ..., 7). Atkal šķirosim divus gadījumus:

1) ja $a+b<9$, tad $111(a+b)+24$ ir trīsciparu skaitlis, bet nav īpašs skaitlis;

2) ja $a+b\geq 9$, tad $111(a+b)+24$ ir četrciparu skaitlis, pie tam $111(a+b)+24\leq 111(7+7)+24=1578$. Mums varētu derēt vienīgi īpašais četrciparu skaitlis 1234. Tad $111(a+b)+24=1234 \Rightarrow 111(a+b)=1210$; tā kā $a+b$ ir naturāls skaitlis, tad 1210 ir jādalās gan ar 111, gan ar $a+b$, bet 1210 nedalās ar 111. Tātad prasītā veida trīsciparu skaitļi neeksistē.

Piezīme. Tā kā pavisam ir tikai 7 īpašie trīsciparu skaitļi, tad šo uzdevumu varēja arī atrisināt, tieši pārbaudot visu šo skaitļu summas pa divi; pavisam jāveic $(7\cdot 6):2=21$ (skat., kā aprēķina kombināciju skaitu, 13. lpp.) pārbaude.

11.2.3. ***Atbilde:*** bulciņa maksā 13 sant., saldējums 27 sant. un limonāde 53 sant.

Risinājums. Pieņemsim, ka bulciņa maksā b sant., limonāde – l sant. un saldējums – s santīmus. Pēc uzdevuma nosacījumiem varam uzrakstīt šādas sakarības:

$$b+s+l=93 \qquad (1);$$
$$s<30 \qquad (2);$$
$$l=2b+s \qquad (3);$$
$$4b<l<2s \qquad (4).$$

No (3) vienādības izteiksim $s=l-2b$ un ievietosim (1) vienādībā:

$$b+l-2b+l=93 \quad \Rightarrow \quad 2l-b=93 \quad (5)$$

Tā kā limonāde maksā vairāk nekā 4 bulciņas ($l>4b$), limonādes vietā ņemot 4 bulciņas, kopējā summa būs mazāka; vienādībā (5) aizstājot l ar $4b$, sākotnējā izteiksmes vērtība samazinās, tātad iegūstam $2\cdot 4b-b<93$. Tātad $7b<93$ un $b<\frac{93}{7}=13\frac{2}{7}$. Tā kā b ir bulciņas cena santīmos – vesels skaitlis, tad varam rakstīt, ka $b\leq 13$.

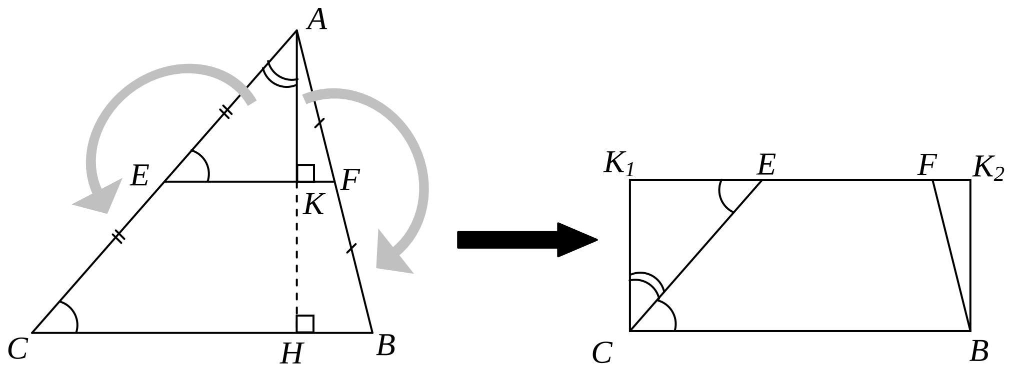
Aprēķināsim $l=(93+b):2$ (l izteikts no (5) izteiksmes) un $s=93-l-b$ (s izteikts no (1) izteiksmes), izmantojot visas iespējamās b vērtības. Skaidrs, ka b jābūt nepāra skaitlim, citādi l nesanāk naturāls skaitlis.

Ja $b=13$, tad $l=(93+13):2=53$ un $s=93-53-13=27$ (apmierina visus uzdevuma nosacījumus).

Ja $b\leq 11$, tad $l\leq(93+11):2=52$ un $s\geq 93-52-11=30$ – neapmierina nosacījumu (2).

Tātad uzdevumam ir viena atbilde: bulciņa maksā 13 sant., saldējums 27 sant. un limonāde 53 sant.

11.2.4. ***Atbilde.*** Skat. A78. zīm., kur griezuma līnijas ir AK – daļa no ΔABC augstuma un EF – ΔABC viduslīnija.



A78. zīm.

Risinājums. Jāpamato, ka CK_1K_2B ir taisnstūris, t.i., visi tā leņķi ir taisni.

Griežot iegūtas daļas EKA, AKF un $CEFB$ savietojam tā, ka nogrieznis EA sakrīt ar nogriezni EC un nogrieznis AF sakrīt ar nogriezni FB (šie nogriežņi tiešām sakrīt, jo E un F ir atbilstoši malu AC un AB viduspunkti, tātad sadala šos nogriežņus divās vienādās daļās), pie tam virsotne A sakrīt atbilstoši ar virsotnēm C un B.

EF ir ΔABC viduslīnija, tātad $EF \| CB$. Tā kā AH ir augstums, tad $AH \perp CB$ un $AH \perp EF$ (ja taisne ir perpendikulāra vienai no paralēlajām taisnēm, tad tā ir perpendikulāra arī otrai taisnei). Tātad $\angle EKA = \angle FKA = 90°$ un arī $\angle EK_1C = \angle FK_2B = 90°$.

$\angle ECB = \angle AEF$ (kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm CB un EF, kuras krusto taisne AC). Savukārt $\angle KEA + \angle EAK = 90°$ (kā taisnleņķa trijstūra EAK šaurie leņķi), Tātad arī $\angle ECB + \angle EAK = \angle ECB + \angle ECK_1 = \angle BCK_1 = 90°$.

Tā kā četrstūrī CK_1K_2B trīs leņķi ($\angle K_2K_1C$, $\angle K_1K_2B$, $\angle K_1CB$) ir taisni, tad arī ceturtais leņķis $\angle K_2BC = 360° - 3 \cdot 90° = 90°$ (četrstūra visu iekšējo leņķu summa ir $360°$), tātad četrstūris CK_1K_2B ir taisnstūris.

11.2.5. ***Atbilde:*** ne noteikti.

Risinājums. Iespējams, ka uz sarkanajām kartītēm ir uzrakstīti tikai pāra skaitļi, uz zilajām – tikai nepāra skaitļi (no 1 līdz 100 ir tieši 50 pāra un 50 nepāra skaitļi). Bet trīs pāra skaitļu reizinājums (dalās ar 2) nevar būt vienāds ar trīs nepāra skaitļu reizinājumu (ar 2 nedalās). Skat. „Invariantu metode” 7. lpp.

Iespējami arī citi “nelabvēlīgi” sadalījumi, taču šī uzdevuma atrisinājumā pietiek uzrādīt tikai vienu gadījumu, kad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

11.3.1. ***Atbilde:*** skat. A80. zīmējumu.

$$\begin{array}{cccccc} & & & A & B & C \\ \cdot & & & & D & E \\ \hline & & A & K & V & A \\ & & E & K & D & \\ \hline & K & O & D & D & A \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 6 \\ & & \cdot & & 2 & 9 \\ \hline & & 4 & 1 & 0 & 4 \\ & & 9 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

A79. zīm. A80. zīm.

Risinājums. Ievērosim, ka K ir summas A+E vai A+E+1 (ja saskaitot iepriekšējā šķirā rodas pārnesums), desmitu cipars (skat. A79. zīm.), pie tam A un E cipari (ne lielāki kā 9), tātad K=1.

Tā kā V+D=D (iepriekšējā šķirā pārnesums noteikti nerodas), tad V=0.

Saskaitot V+D pārnesums nerodas, tāpēc no vienādības K+K=D iegūstam D=1+1=2.

Reizinājuma D(=2)·C pēdējais cipars ir D(2), tātad C varētu būt 1 vai 6. Tā kā K=1, tad C=6.

D·C=12, tātad uz nākamo šķiru rodas pārnesums 1. Tad 2·B+1 pēdējais cipars ir 1 jeb reizinājuma 2·B pēdējais cipars ir 0. Tas iz iespējams, ja B ir 0 vai 5. Tā kā V=0, tad B=5.

2 reizinot ar skaitli ABC, reizinājumā iegūst trīsciparu skaitli, tātad A<5 (pretējā gadījumā 2·ABC>2·500=1000 – vismaz četrciparu skaitlis). Tā kā cipari 0, 1, 2 jau izmantoti, tad A var būt 3 vai 4. Vēl ievērosim, ka A ir arī reizinājuma 6·E pēdējais cipars, tātad pāra skaitlis. Tātad A=4.

ABC·D=EKD jeb 456·2=912, tātad E=9.

Tagad varam viennozīmīgi atjaunot reizināšanas piemēru un redzam, ka O=3.

11.3.2. ***Atbilde:*** 45 skaitļi.

Risinājums. Skaitli 36 reizinājumā dod cipari 1) 4·9; 2) 6·6; 3) 2·2·9; 4) 3·3·4; 5) 2·3·6; 6) 2·2·3·3, kā arī katram no šiem reizinājumiem var piereizināt vienu vai vairākus ciparus 1 (jo reizinot ar kādu skaitli, reizinājumā iegūst to pašu skaitli). Tā kā mūs interesējošie skaitļi ir mazāki nekā 2003, tad tie var būt divciparu vai trīsciparu skaitļi, vai arī četrciparu skaitļi, kuru tūkstošu cipars ir 1. Tagad apskatīsim atsevišķi visus minētos gadījumus.

1) No cipariem 4 un 9 var izveidot divus divciparu skaitļus 49 un 94. No cipariem 1, 4, 9 var izveidot 6 trīsciparu skaitļus (trīs dažādus ciparus var sakārtot 3·2·1=6 dažādos veidos (skat., kā aprēķina permutāciju skaitu, 13. lpp.)). Paņemot vēl vienu ciparu 1, tas meklējamajos četrciparu skaitļos būs kā pirmais cipars, tātad vēl varam izveidot 6 četrciparu skaitļus – katram trīsciparu skaitlim pierakstot priekšā “1”. Tātad pavisam ir 2+6+6=14 derīgie skaitļi (skat. A81. zīmējuma tabulā).

49	149	1149
94	194	1194
	419	1419
	914	1914
	491	1491
	941	1941

A81. zīm.

2) No cipariem 6, 6 var izveidot vienu divciparu skaitli 66. No cipariem 1, 6, 6 var izveidot 3 trīsciparu skaitļus (ciparu “1” var novietot vai nu pirms “66”, vai nu starp

cipariem “66”, vai nu beigās). Paņemot vēl vienu ciparu 1 (tas būs četrciparu skaitļu pirmais cipars), iegūstam vēl trīs četrciparu skaitļus. Tātad pavisam ir 1+3+3=7 skaitļi.

3) No cipariem 2, 2, 9 varam izveidot 3 trīsciparu skaitļus (spriežam līdzīgi kā 2) gadījumā par trīsciparu skaitļiem). No cipariem 1, 2, 2, 9 vēl varam izveidot 3 atbilstošus četrciparu skaitļus. Tātad pavisam ir 3+3=6 derīgie skaitļi.

4) Spriežot līdzīgi kā 3) gadījumā, iegūstam, ka arī šajā gadījumā ir 6 derīgie skaitļi.

5) Ciparus 2, 3, 6 var sakārtot 6 dažādos veidos, tātad ir 6 meklējamie trīsciparu skaitļi. Savukārt no cipariem 1, 2, 3, 6 varam izveidot vēl 6 derīgos četrciparu skaitļus. Tātad ir 6+6=12 derīgie skaitļi.

6) Mazākais skaitlis, ko var izveidot no cipariem 2, 2, 3, 3, ir 2233>2003, tātad šajā gadījumā nav skaitļu, kas apmierinātu visus uzdevuma nosacījumus.

Tātad pavisam uzdevuma nosacījumus apmierina 14+7+6+6+12=45 skaitļi.

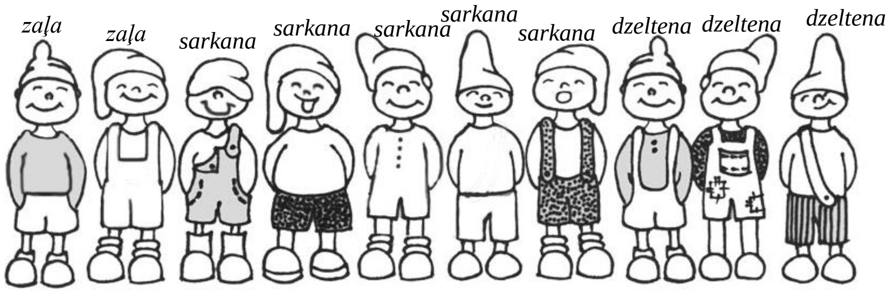
11.3.3. ***Atbilde:*** **a)** nevar; **b)** var.

Risinājums. Kubu 3×3×3 *cm* sadalot kubiņos 1×1×1 *cm*, iegūstam 27 mazos kubiņus, no kuriem 8 kubiņiem zaļā krāsā ir nokrāsotas 3 skaldnes, 12 kubiņiem ir nokrāsotas 2 skaldnes, 6 kubiņiem ir nokrāsota 1 skaldne un 1 kubiņam visas skaldnes ir nenokrāsotas; pavisam ir nokrāsoti 9·6=54 cm^2.

a) Ja saliktu trīs kubus 2×2×2 *cm* tā, lai vienam kubam būtu nokrāsotas visas skaldnes (tātad pavisam nokrāsoti ir 4·6=24 cm^2), otram kubam katrā skaldnē būtu nokrāsoti 3 cm^2 (kopā – 3·6=18 cm^2), trešajam kubam katrā skaldnē būtu nokrāsoti 2 cm^2 (kopā – 2·6=12 cm^2), tad būtu izmantoti 8·3=24 mazie kubiņi (katram no trīs 2×2×2 *cm* kubiem ir izmantoti 8 mazie kubiņi), kuriem kopā ir nokrāsoti 24+18+12=54 cm^2 – tikpat, cik pavisam ir nokrāsots. Tātad neizmantoti paliks 3 mazie kubiņi, taču jāizmanto visi kubiņi, kuriem vismaz viena skaldne ir nokrāsota. To izdarīt nav iespējams, jo tikai viens kubiņš ir pilnībā nenokrāsots.

b) Tā kā visiem mazajiem kubiņiem ir vismaz 3 nenokrāsotas skaldnes un tos var salikt kopā tā, ka nokrāsotās skaldnes paliek iekšpusē, tad varam izvēlēties jebkurus 24 mazos kubiņus un no tiem salikt trīs kubus 2×2×2 *cm*, kuriem visa virsma ir nenokrāsota.

11.3.4. ***Atbilde:*** 10 rūķi (skat. A82. zīm.).



A82. zīm.

Risinājums. Ievērosim, ka uzdevumā nav teikts, ka visiem rūķiem ir tikai zaļa, dzeltena vai sarkana cepure, var būt, ka kādam rūķim ir vēl kādas krāsas cepure, tāpēc risinājumā tas jāņem vērā. Apzīmēsim rūķu skaitu, kam ir zaļa cepure – ar *z*; kam ir dzeltena cepure – ar *dz*; kam ir sarkana cepure – ar *s*; kam ir vēl kādas krāsas cepure – ar *c*; visu rūķu skaitu – ar *k*.

Tad no uzdevuma nosacījumiem seko:

1) $z = 2$

2) a) $k = 7 + dz$;

b) $z + s + c = 7 \Rightarrow 2 + s + c = 7 \Rightarrow s + c = 5$

3) $dz = s - 2$

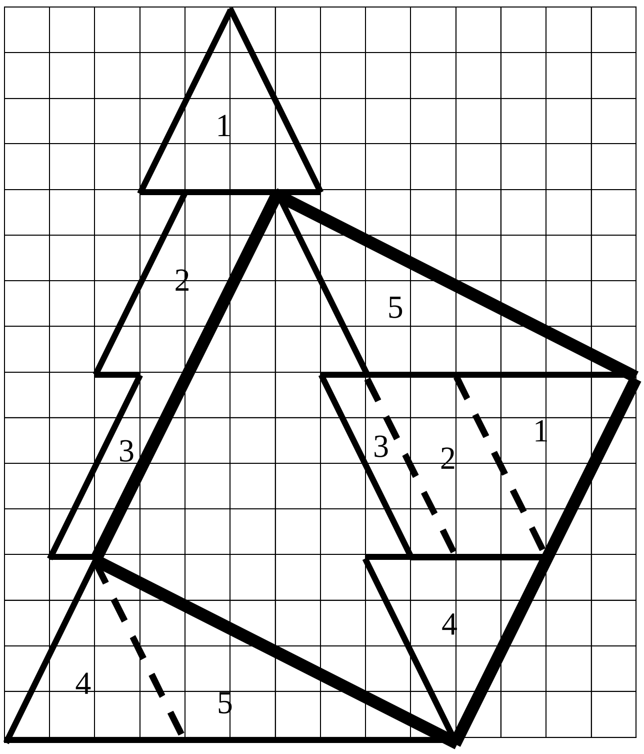
4) a) $s = z + dz + c \Rightarrow s = 2 + (s-2) + c = s + c$, no kurienes seko, ka $c = 0$ (tātad tomēr nav rūķu ar vēl kādas krāsas cepurēm).

b) $k = 2 \cdot s$ (jo rūķu ar sarkanām cepurēm ir tik pat cik rūķu ar citas krāsas cepurēm, tātad puse no visiem rūķiem).

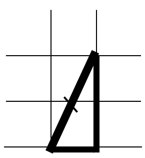
Tad no 2b) nosacījuma seko, ka $s = 5$ un pavisam Ziemassvētku vecītim palīdz $2 \cdot 5 = 10$ rūķi.

11.3.5. ***Atbilde:*** vienu piemēru skat. A83. zīm. Iespējami daudzi citi sadalījumi. Iegūstam kvadrātu ar malas garumu $4\sqrt{5}$ rūtiņas.

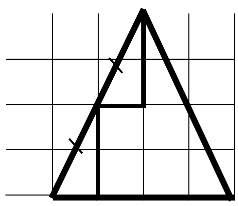
Risinājums. Eglīte satur 80 rūtiņas, tātad iegūstamā kvadrāta malas garums ir $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (kvadrāta laukumu aprēķina pēc formulas $S = a^2$, tātad malas garumu aprēķina $a = \sqrt{S}$) rūtiņas (tas nav vesels skaitlis!). Nogrieznis, kura garums ir $\sqrt{5}$, ir tāda taisnleņķa trijstūra, kura katetes ir 1 un 2, hipotenūzas garums (skat. A84. zīm.). Jo $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ (sakarību starp taisnleņķa trijstūra malu garumiem apraksta Pitagora teorēma: ja taisnleņķa trijstūra katešu garumi ir *a* un *b*, un hipotenūzas garums ir *c*, tad $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$). Redzam, ka dotās eglītes "slīpā" posma garums ir $2\sqrt{5}$ (skat. A85. zīm.), tātad iegūstamā kvadrāta malas garums būs vēl divreiz lielāks.



A83. zīm.



A84. zīm.



A85. zīm.

11.4.1. ***Atbilde:*** visu uzdevumā minēto skaitļu summa ir 6198.

Risinājums. Mūs interesē:

1) trīs viencipara skaitļi 1, 2, 3; to summa ir 6;

2) deviņi divciparu skaitļi (pirmais cipars var būt jebkurš no cipariem 1, 2, 3, tāpat arī otrais cipars, kopā $3 \cdot 3 = 9$ (skat. „Variācijas ar atkārtojumiem" 14. lpp.) dažādas iespējas); to summu var aprēķināt šādi $3 \cdot 6$ (vienu summa) + $3 \cdot 10 \cdot 6$ (desmitu summa) = 198 (skat. 11.1.2. uzdevuma atrisinājumu);

3) 27 trīsciparu skaitļi (katram divciparu skaitlim priekšā varam uzrakstīt ciparu 1, 2 vai 3, tātad pavisam iegūstam $3 \cdot 9 = 27$ jaunus skaitļus); to summu aprēķinām $3 \cdot 198$ (vienu un desmitu kopējā summa) + $9 \cdot 100 \cdot 6$ (simtu summa) = 5994.

Tātad visu apskatāmo skaitļu summa ir $6 + 198 + 5994 = 6198$.

11.4.2. ***Atbilde:*** starp šiem skaitļiem vienlaicīgi var būt 6, 4 vai 3 pāra skaitļi.

Risinājums. A86. zīm. tabulā apskatītas visas iespējas, kad starp skaitļiem a, b, c:

1) visi ir pāra skaitļi,
2) ir viens nepāra skaitlis,
3) ir 2 nepāra skaitļi,
4) visi ir nepāra skaitļi.

Kā redzam no tabulas, tad starp skaitļiem a+b, a+c, b+c, a·b, a·c, b·c vienlaicīgi var būt 6, 4 vai 3 pāra skaitļi.

a	***b***	***c***	***a+b***	***a+c***	***b+c***	***a·b***	***a·c***	***b·c***	pāra skaitļu skaits
p	p	p	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**	**6**
p	p	n	**p**	n	n	**p**	**p**	**p**	**4**
p	n	n	n	n	**p**	**p**	**p**	n	**3**
n	n	n	**p**	**p**	**p**	n	n	n	**3**

A86. zīm.

11.4.3. ***Atbilde:*** nevar.

Risinājums. Tā kā $4 \cdot 4 = 16 < 17$, tad vismaz vienā kravas mašīnā būs jāiekrauj vismaz 5 skulptūras (skat. „Dirihlē princips" 8. lpp.). Bet pat piecu vieglāko skulptūru kopējā masa ir $600 + 610 + 620 + 630 + 640 = 3100$ *kg*, kas ir vairāk nekā 3 tonnas. Tātad vienā reizē visas skulptūras aizvest nevarēs.

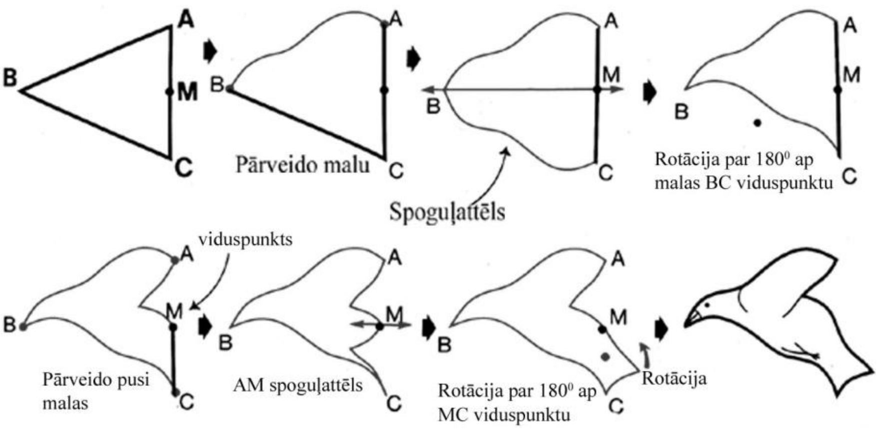
11.4.4. ***Atbilde:*** $x = 35$.

	a	*b*
c	18	21
d	30	*x*

A87. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim doto nogriežņu garumus kā parādīts A87. zīmējumā. Tad no taisnstūra laukuma aprēķināšanas formulas seko, ka $a \cdot c = 18$, $b \cdot c = 21$, $a \cdot d = 30$ un $b \cdot d = x$. Tagad izdalīsim pirmo vienādību ar otro un trešo ar ceturto, iegūstam $\frac{a}{b} = \frac{18}{21}$ un $\frac{a}{b} = \frac{30}{x}$. Tātad $\frac{18}{21} = \frac{30}{x}$, no kurienes $x = \frac{21 \cdot 30}{18} = 35$.

11.4.5. Šāda veida zīmējumus sauc par *Ešera tipa zīmējumiem*. To veidošanas tehnika balstās uz figūru transformācijām (paralēlo pārnesi, rotāciju, u.c.). Vispirms izvēlas kādu daudzstūri, ar kuru var noklāt plakni, piem., trijstūri, četrstūri, regulāru sešstūri, tad šī daudzstūra malas pārveido. A88. zīmējumā parādīts, kā no regulā trijstūra iegūstam putniņa figūru, ar kuru var noklāt plakni kā parādīts A89. zīmējumā (autors M. K. Ešers).



A88. zīm.

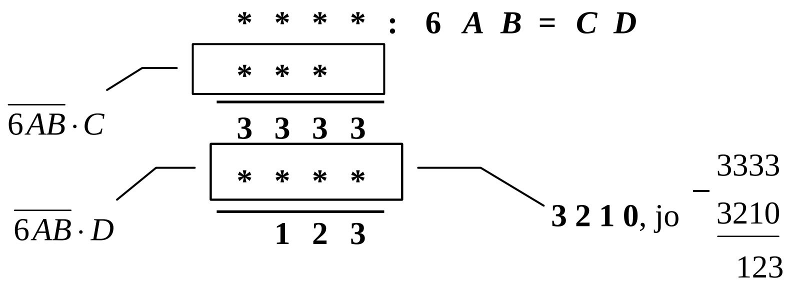
A89. zīm.

Sīkāk ar šādu mozaīku veidošanas tehniku varat iepazīties grāmatā [L11], no kuras arī ņemts šis piemērs.

11.5.1. ***Atbilde:*** skat. A91. zīm.

*** * * * : 6 A B = C D**	**9 7 5 3 : 6 4 2 = 1 5**
*** * ***	**6 4 2**
3 3 3 3	**3 3 3 3**
*** * * ***	**3 2 1 0**
1 2 3	**1 2 3**
A90. zīm.	A91. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim dalītāja nezināmos ciparus ar $\overline{AB}$ (skat. „Mazliet no skaitļu teorijas” 10. lpp.), bet dalījuma ciparus – ar $\overline{CD}$ (skat. A90. zīm.). Tad viegli ievērot, ka $C=1$; gadījumā, ja $C>1$, tad $\overline{6AB}\cdot C$ būtu lielāks nekā $600\cdot 2=1200$ – četrciparu skaitlis, bet jābūt trīsciparu skaitlim (skat. A92. zīm.).



A92. zīm.

Vēl ievērosim, ka $\overline{6AB}\cdot D = 3210$ (skat. A92. zīm.). Tā kā $\overline{6AB}\cdot 4 < 699\cdot 4 = 2796 < 3210$ un $\overline{6AB}\cdot 6 > 600\cdot 6 = 3600 > 3210$, tad vienīgā iespējamā D vērtība ir 5. Izdalot $3210 : 5 = 642$, iegūstam dalītāju ($A = 4$ un $B = 2$) un varam atjaunot doto piemēru (skat. A91. zīm.).

11.5.2. ***Atbilde:*** 12:45.

Risinājums. Tā kā Pūks pie Trusīša ciemojās 30 minūtes, bet pavisam prom bija 55 minūtes, tad ceļā viņš pavadīja 25 minūtes.

Tā kā ar tukšu vēderu Pūks iet 1,5 reizes ātrāk nekā paēdis, tad atpakaļceļā viņš pavadīs 1,5 reizes vairāk laika nekā ejot pie Trusīša. Pieņemsim, ka līdz Trusīša mājai (ar tukšu vēderu) Pūks gāja x minūtes, tad mājupceļā viņš pavadīja $1,5x$ minūtes. Iegūstam šādu vienādojumu:

$x + 1,5x = 25$

$2,5x = 25$

$x = 25 : 2,5 = 10$ (minūtes turpceļā) un

$1,5x = 1,5\cdot 10 = 15$ (minūtes atpakaļceļā).

Tātad brīdī, kad Pūks pārradās mājās, pareizs laiks bija 12:45 (12:30+0:15).

11.5.3. ***Atbilde:*** ar 5 svēršanām pietiek.

Risinājums.

<u>1. svēršana.</u> Sadala visas 243 monētas 3 kaudzītēs, katrā pa 81 monētai. Uz svaru kausiem uzliek pa vienai kaudzītei, viena kaudzīte paliek malā. Ja svari ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir trešajā kaudzītē; ja kāds no svaru kausiem ir vieglāks, tad viltotā monēta ir tajā kaudzītē, kas ir uz šī svaru kausa.

<u>2. svēršana.</u> Tagad ņem to kaudzīti (81 monētu), kurā ir viltotā monēta. Sadala šīs 81 monētu atkal 3 kaudzītēs, katrā pa 27 monētām, un rīkojas līdzīgi kā iepriekš. Tagad noskaidro, starp kurām 27 monētām ir viltotā.

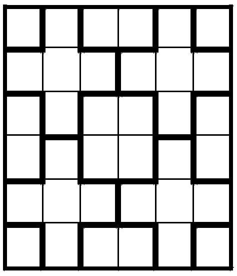
<u>3. svēršana.</u> Tagad trīs kaudzītēs dala tās 27 monētas, starp kurām ir viltotā monēta, katrā kaudzītē būs 9 monētas. Svēršanas rezultātā noskaidro, starp kurām 9 monētām ir viltotā.

<u>4. svēršana.</u> Rīkojoties līdzīgi kā iepriekš, atrod 3 monētas, starp kurām ir viltotā monēta.

<u>5. svēršana.</u> Uz svaru kausiem uzliek pa vienai monētai no tām trim monētām, starp kurām ir viltotā. Ja svari ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir trešā malā palikusī; ja kāds svaru kauss ir vieglāks, tad viltotā monēta ir uz tā.

Šādi rīkojoties noteikti varēs atrast viltoto monētu.

11.5.4. ***Atbilde:*** ja griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, tad nevar izgriezt vairāk par 4 figūrām, skat., piemēram, A93. zīmējumu.



A93. zīm.

Risinājums. Vairāk figūriņas tādā gadījumā izgriezt nevar, pierādīsim to. Skaidrs, ka kvadrāta stūra rūtiņas paliks brīvas – tajās nevar ievietoties nekāda daļa no dotās figūriņas. Kvadrāta 6×6 vienai malai var pieskarties ne vairāk kā 2 figūriņas, katra ar vienu rūtiņu. Tātad pie katras malas paliek neizmantotas vēl vismaz $6-2\,\text{(figūru aizņemtās rūtiņas)}-2\,\text{(stūru rūtiņas)}=2\,\text{rūtiņas}$. Kvadrātam ir četras malas, tātad kopā neizmantojamas ir vismaz $4+4\cdot 2=12$ rūtiņas. Kvadrātā 6×6 pavisam ir 36 rūtiņas, tad dotās figūriņas kopā var ievietoties $36-12=24$ rūtiņās. Bet tā kā $5\cdot 5=25>24$, tad no kvadrāta 6×6 var izgriezt ne vairāk kā 4 dotās figūriņas tā lai griezuma līnijas ietu pa rūtiņu malām.

11.5.5. ***Atbilde:*** bērnu vecumi ir 1 gads, 1 gads, 5 gadi, 8 gadi.

Risinājums. Apzīmēsim bērnu gadus ar a, b, c, d, pie tam pieņemsim, ka a≤b≤c≤d. Izveidosim tabulu (skat. A94. zīm.), kurā uzrakstīsim visas iespējamās a, b, c, d vērtības, lai to reizinājums būtu 40, un aprēķināsim summu a+b+c+d.

a	b	c	d	summa
1	1	1	40	43
1	1	2	20	24
1	1	4	10	16
1	1	5	8	15
1	2	2	10	15
1	2	4	5	12
2	2	2	5	11

A94. zīm.

Gadījumā, ja minētā ģimene dzīvotu dzīvoklī ar numuru 43, 24, 16, 12, vai 11, kaimiņš uzreiz varētu pateikt cik gadu ir katram bērnam (jo kaimiņš zina dzīvokļa numuru un katram no šiem numuriem atbilst tikai viena iespēja). Taču, tā kā kaimiņam ar šo informāciju nepietika, tad skaidrs, ka minētā ģimene dzīvo 15. dzīvoklī – šim gadījumam mūsu tabulā atbilst divas rindiņas, t.i., 1 gads,1 gads, 5 gadi, 8 gadi vai 1 gads, 2 gadi, 2 gadi, 10 gadi. Pēc papildus informācijas, ka jaunākie bērni ir dvīņi, tapa skaidrs, ka diviem mazākajiem skaitļiem jābūt vienādiem, tātad bērnu vecumi ir 1 gads, 1 gads, 5 gadi, 8 gadi.

2003./2004. mācību gads

12.1.1. ***Atbilde.*** Šim uzdevumam ir divi atrisinājumi, skat. A95. un A96. zīmējumā.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4 & 9 & 4 \\ & \cdot & & 2 & 1 \\ \hline & & 4 & 9 & 4 \\ & 9 & 8 & 8 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & 7 & 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrrr} & & 2 & 4 & 7 \\ & \cdot & & 4 & 2 \\ \hline & & 4 & 9 & 4 \\ & 9 & 8 & 8 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & 7 & 4 \end{array}$$

A95. zīm. A96. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim nezināmos ciparus ar burtiem tā kā parādīts A97. zīmējumā.

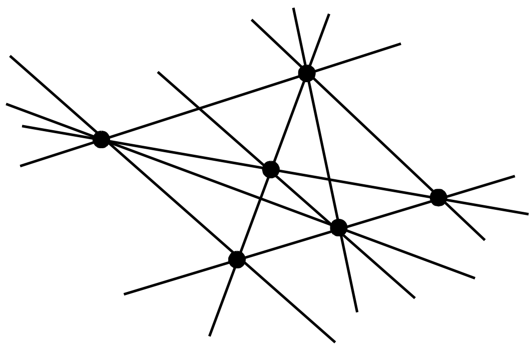
$$\begin{array}{ccccc} & & A & B & C \\ & \cdot & & D & E \\ \hline & & 4 & F & G \\ & H & I & 8 & \\ \hline K & 0 & L & 7 & 4 \end{array}$$

A97. zīm.

Skaidrs, ka G=4, F=9 (17 – 8), K=1. Acīmredzami, veicot saskaitīšanu tūkstošu šķirā, rodas pārnesums, kas nav lielāks par 1, tātad tieši 1; no tā seko, ka H=9.

Ņemot vērā minētos secinājumus, redzam, ka $ABC\cdot E=494$. Tātad gan cipars A, gan cipars E nevar būt lielāki par 4, t.i. var būt 1, 2, 3 vai 4 (pretējā gadījumā reizinājums būs lielāks par 494). Tā kā 494 no minētajiem skaitļiem dalās tikai ar 1 un 2, tātad E=1 vai E=2. Katrā no šiem gadījumiem iegūstam vienu atrisinājumu (skat. A95. zīm. un A96. zīm.).

12.1.2. ***Atbilde:*** skat., piem., A98. zīm..



A98.zīm.

Risinājums. Ja dotie 6 punkti būtu izvietoti tā, ka nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes un caur tiem noviltu visas iespējamās taisnes, kas katra satur tikai divus punktus, tad kopā varētu novilkt $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ dažādas taisnes (skat., kā aprēķina kombināciju skaitu, 13. lpp.). Bet tas ir par daudz, jo uzdevumā prasītas tieši 9 dažādas taisnes. Tātad būs taisnes, kas satur vairāk nekā 2 punktus.

12.1.3. ***Atbilde.*** Vāzē ir 8 baltie ziedi.

Risinājums. Apzīmējam balto, sarkano, dzelteno un violeto ziedu skaitu atbilstoši ar *b*, *s*, *dz*, un *v*. Zināms, ka violeto ziedu ir vismazāk. Pieņemsim, ka to ir 1. Tad sarkano ziedu ir $s=5-v=5-1=4$, dzelteno ziedu ir $dz=8-v=8-1=7$ un balto ziedu ir $b=19-v-s-dz=19-1-4-7=7$, tikpat cik dzelteno ziedu. Taču uzdevumā ir teikts, ka balto ziedu ir **visvairāk**, tātad šis gadījums neder.

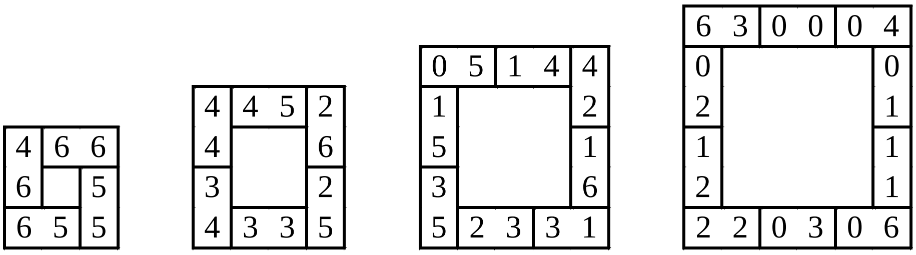
Pieņemsim, ka ir 2 violetie ziedi. Tad sarkani ir $5-2=3$, dzelteni ir $8-2=6$ un balti ir $19-2-3-6=8$ ziedi. šajā gadījumā tiešām violeto ziedu ir vismazāk un balto ir visvairāk, tātad šis gadījums der.

Apskatīsim gadījumus, kad violeto ziedu ir 3 vai vairāk. Tad sarkano ziedu ir ne vairāk kā $5-3=2$, tātad mazāk nekā violeto. Bet tā ir pretruna uzdevuma nosacījumiem.

Tātad ir 8 baltie ziedi.

12.1.4.

Risinājums. A99. zīmējumā parādīts, kā var izveidot četrus kvadrātveida rāmjus ar malu garumiem 3, 4, 5 un 6 rūtiņas un punktu summa uz katras malas tiem ir attiecīgi 16, 15, 14 un 13. Paši varat pārliecināties, ka ir izmantoti visi domino kauliņi – katrs vienu reizi.



A99. zīm.

12.1.5.

Risinājums. Pavisam turnīrā tika izspēlētas (5·4):2=10 spēles (skat., kā aprēķina kombināciju skaitu, 13. lpp.). Katrā spēlē, kas nebeidzās neizšķirti, tika izcīnīta uzvara, tātad puse spēļu (5 spēles) beidzās neizšķirti. Katrā spēlē tiek sadalīti 2 punkti (vai nu tos iegūst uzvarētājs, vai arī tie tiek sadalīti pa 1 katram spēlētājam neizšķirta gadījumā), tātad kopā turnīrā sadalīti 20 punkti. Tā kā visi dalībnieki izcīnīja vienādu punktu skaitu, tad katrs šahists ieguva 4 punktus. Piemērs, kad izpildās visi uzdevuma nosacījumi, parādīts A100. zīmējumā – katrs dalībnieks ir izcīnījis 1 uzvaru, vienu spēli zaudējis un 2 spēles beidzis neizšķirti.

	A	B	C	D	E	Kopā
A		1	2	0	1	4
B	1		1	2	0	4
C	0	1		1	2	4
D	2	0	1		1	4
E	1	2	0	1		4

A100. zīm.

12.2.1.

Risinājums. Skat., piem., 101. zīmējumu. Slīpiem cipariem norādītas skaitļu summas pa rindiņām (aiz katras rindiņas), summas pa kolonnām (zem katras kolonnas) un summas pa abām diagonālēm (augšējos stūros).

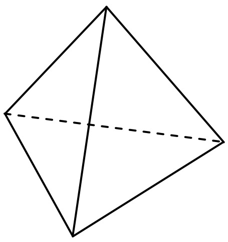
36				*28*
3	2	7	4	*16*
5	6	1	8	*20*
9	10	11	12	*42*
13	14	15	16	*58*
30	*32*	*34*	*40*	

A101.zīm.

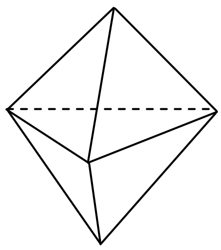
12.2.2. ***Atbilde:*** Jānītis no dotajiem trijstūrīšiem var izveidot vai nu **1)** abus A102. zīm. un A103. zīm. redzamos lukturīšus vai **2)** A104. zīm. redzamo lukturīti, vai **3)** A105. zīm. redzamo lukturīti.

Risinājums. Telpiskais ķermenis – daudzskaldnis, kuram ir vismazāk skaldņu, ir trijstūra piramīda – tai ir 4 skaldnes (skat. A102. zīm.). Saliekot divas šādas piramīdas kopā, iegūsim A103. zīmējumā redzamo ķermeni, kuram ir 6 skaldnes – vienādmalu trijstūri. Tātad no dotajiem 10 trijstūrīšiem Jānītis var izgatavot augstākais 2 lukturīšus (piem., A102. un A103. zīmējumā parādītos), jo trīs lukturīšiem būs nepieciešami vismaz $3{\cdot}4=12$ trijstūrīši.

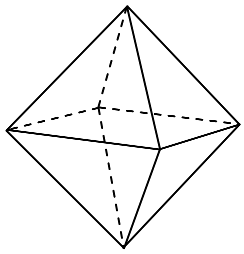
Vēl no pieejamajiem 10 vienādmalu trijstūrīšiem var izveidot A104. zīm. vai A105. zīmējumā attēlotos ķermeņus; tie iegūti divas četrstūra vai piecstūra piramīdas saliekot ar pamatiem kopā. A104. zīmējumā attēlotajam ķermenim ir 8 skaldnes, tātad tiks izmantoti tikai 8 trijstūri un 2 trijstūri paliks pāri, jo no tiem citu ķermeni izveidot nevar. A105. zīmējumā attēlotajam ķermenim ir 10 skaldnes, tātad tiks izmantoti visi trijstūri.



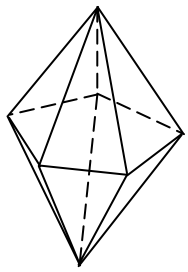
A102. zīm.



A103. zīm.



A104. zīm.



A105. zīm.

12.2.3. ***Atbilde:*** nē.

Risinājums. Uzdevuma prasības var apmierināt tikai skaitļa 2004 dalītāji. Skaitlim 2004 ir 12 dalītāji: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002 un 2004. Pārbaudot katru no šiem skaitļiem – pareizinot to ar tā ciparu summu, redzam, ka nevienā gadījumā reizinājums nav vienāds ar 2004 (skat. A106. zīmējuma tabulā).

Skaitlis	1	2	3	4	6	12	167	334	501	668	1002	2004
Skaitļa ciparu summa	1	2	3	4	6	3	14	10	6	20	3	6
Reizinājums	1	4	9	16	36	36	2338	3340	3006	13360	3006	12024

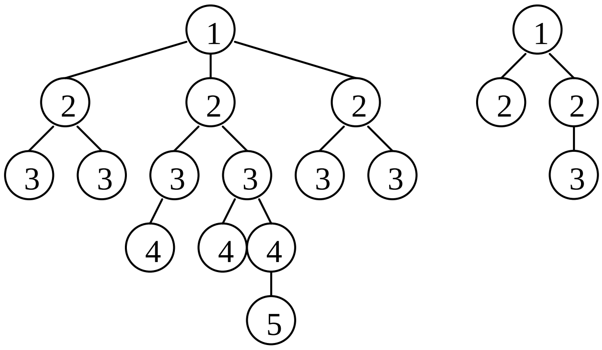
A106. zīm.

12.2.4.

Risinājums. Izvēlēsimies vienu bērnu un piešķirsim viņam numuru „1”. Visiem viņa draugiem piešķirsim katram numuru „2”. Visiem bērniem, kas draudzējas ar kādu, kuram ir numurs „2” un kuram vēl nav sava numura, piešķirsim numuru „3”, utt. Ja šim procesam beidzoties, paliek daži bērni, kuriem vēl nav numuru, izvēlamies vienu no tiem, piešķiram tam numuru „1”, utt., piemēram, skat. A107. zīmējumu.

Pēc tam uz Cirku nosūtām bērnus ar nepāra numuriem, uz Leļļu teātri – ar pāra numuriem.

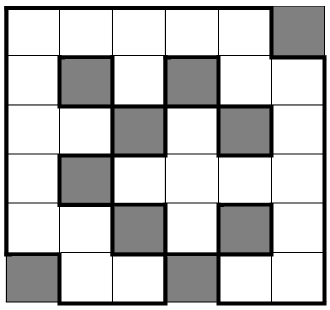
Šādā veidā nosūtot bērnus uz izklaides pasākumiem, katrs bērns varēs uzzināt informāciju par pasākumu, kurā nav piedalījies.



A107. zīm.

12.2.5. ***Atbilde:*** Jā, tas ir iespējams, skat., piemēram, A108. zīmējumu.

Risinājums. A108. zīmējumā 1 rūtiņas malas garums ir 1 *km*; iekrāsotie kvadrātiņi ir izraktie dīķi un līči. Atlikusī sauszeme tik tiešām ir „viengabalaina” – to visu var izstaigāt, nepārlecot nevienam dīķim vai dīķu „savienojumam”, un kopējās krasta līnijas garums ir 54 *km*.



A108. zīm.

12.3.1.

Risinājums. Piemēram,

$$(12\cdot 3:4-5+6-7+8)\cdot 9=99 \text{ vai } (1-2+3)\cdot 4\cdot 5+6\cdot 7+8+9=99.$$

Iespējami daudzi citi atrisinājumi.

12.3.2. ***Atbilde:*** $x=4,\ y=5$ un $x=2,\ y=10$.

Risinājums. Doto vienādojumu pārveidojam par $2y=30-5x$ jeb $2y=5(6-x)$. Tā kā skaitļi x un y ir naturāli skaitļi, tad reizinājumam $2y$ jādalās ar 5, jo vienādojuma labā puse dalās ar 5 (skat. „Dalāmības īpašības”, Nr. 6., 11. lpp.). 2 ar 5 nedalās, tātad y jādalās ar 5, t.i., y vērtības var būt 5, 10, 15, 20 utt. Ja $y=5$, tad $x=(30-2y):5=(30-2\cdot 5):5=4$; ja

$y = 10$, tad $x = (30 - 2y) : 5 = (30 - 2 \cdot 10) : 5 = 2$, ja $y \geq 15$, tad $x \leq 0$ un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Tātad par dotā vienādojuma atrisinājumu der vienīgi skaitļu pāri $x = 4,\ y = 5$ un $x = 2,\ y = 10$.

12.3.3. ***Atbilde:*** iegūtās zvaigznītes laukums ir puse no sešstūra laukuma.

Risinājums. Sadalām zvaigznīti tā kā parādīts A109. zīmējumā (O ir dotā sešstūra centrs).

Pierādīsim, ka iegūtie četrstūri ir rombi, kas vienādi ar izgrieztajiem rombiem.

Izgrieztajiem rombiem viens leņķis ir $120°$ (regulāra sešstūra leņķis), bet otrs leņķis ir $60°$ $(= 180° - 120°)$ (skat. A109. zīm.).

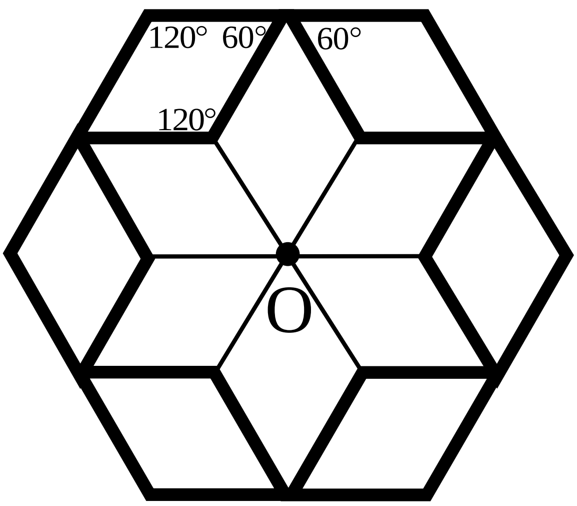
$\angle ZKR = \angle RLS = \angle SMT = \angle TNU = \angle UQV = \angle VPZ = 180° - 60° - 60° = 60°$ (skat. A110. zīm.).

$\Delta ZKR = \Delta RLS = \Delta SMT = \Delta TNU = \Delta UQV = \Delta VPZ$ (mlm) ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi $60°$, tātad tie ir vienādmalu trijstūri un $ZR = RS = ST = TU = UV = VZ = ZK = KR = RL = LS = SM = MT = TN = NU = UQ =$ $= QV = VP = PZ$ (skat. A110. zīm.).

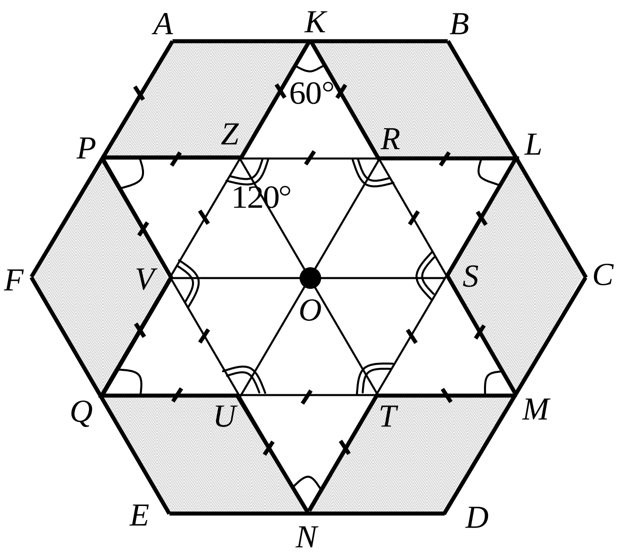
$\angle VZR = \angle ZRS = \angle RST = \angle STU = \angle TUV = \angle UVZ = 360° - 60° - 120° - 60° = 120°$ $\Rightarrow$ $ZRSTUV$ – regulārs sešstūris un $OU = OT = OS = OR = OZ = OV = ZR = RS = ST =$ $= TU = UV = VZ$, t.i., $\Delta ZOR = \Delta ROS = \Delta SOT = \Delta TOU = \Delta UOV = \Delta VOZ$ ir regulāri trijstūri, vienādi ar $\Delta ZKR = \Delta RLS = \Delta SMT = \Delta TNU = \Delta UQV = \Delta VPZ$ (skat. A110. zīm.).

Tātad $ZKRO$, $RLSO$, $SMTO$, $TNUO$, $UQVO$, $VPZO$ ir vienādi rombi (malas vienādas, šaurie leņķi $60°$), pie tam tie ir vienādi ar rombu $AKZP$ u.c. izgrieztajiem rombiem.

Tā kā gan zvaigznīte sastāv no 6 rombiem, gan sešstūra pārējā daļa ārpus zvaigznītes sastāv no 6 tādiem pašiem rombiem, tad šo daļu laukumi ir vienādi, bet tas nozīmē, ka zvaigznīte aizņem pusi no visa sešstūra laukuma.



A109. zīm.



A110. zīm.

12.3.4.

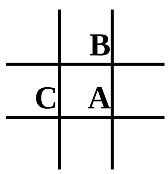
Risinājums. A111. zīmējumā katrai virsotnei pierakstīts skaitlis, cik veidos skudriņa Tipa var nokļūt līdz šai virsotnei, kā arī attēlotas gandrīz visas virsotnes, līdz kurām var nokļūt ne vairāk kā 50 veidos.

Ievērosim, ka līdz visām virsotnēm, kas atrodas uz pašas augšējās malas, skudriņa var nokļūt tikai vienā veidā – ejot tikai taisni pa labi. Tāpat līdz visām virsotnēm, kas atrodas uz pašas kreisās malas, viņa var nokļūt tikai vienā veidā – ejot tikai taisni uz leju.

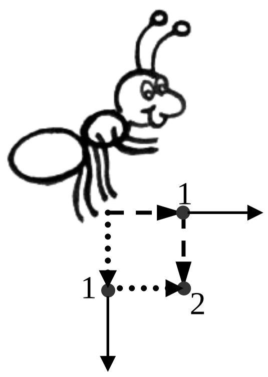
A113. zīm. parādīts, kā Tipa var nokļūt virsotnē, kas atrodas vienu rūtiņu uz leju un vienu pa labi no sākotnējās. Līdzīgi, lai aprēķinātu, cik veidos Tipa var nokļūt līdz kādai citai virsotnei A (skat. A112. zīm.), jāsaskaita, cik veidos viņa var nokļūt „iepriekšējās” virsotnēs B un C kopā (virsotnē A skudriņa var nonākt tikai ejot uz leju no virsotnes B vai ejot pa labi no virsotnes C).

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	50	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55			
1	4	10	20	35	56							
1	5	15	35	70								
1	6	21	56									
1	7	28										
1	8	36										
1	9	45										
1	10	55										
...	...											
1	50											
...												

A111. zīm.



A112. zīm.



A113. zīm.

12.3.5. ***Atbilde:*** putniņš nolidoja 100 km.

Risinājums. Putniņš lidoja tikpat ilgi, cik brauca velosipēdisti. Tā kā putna ātrums ir 2 reizes lielāks nekā velosipēdistiem, tad putniņš šajā laikā nolidos 2 reizes garāku ceļa gabalu nekā nobrauks velosipēdisti. Velosipēdisti nobrauca pusi no 100 km, t.i., 50 km, tad putniņš nolidoja 50·2=**100 km**.

12.4.1.

Risinājums. No uzdevuma nosacījumiem seko, ja N ir meklējamais skaitlis, tad $N+1$ dalās ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un 10. Mazākā iespējamā $N+1$ vērtība ir skaitļu 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un 10 mazākais kopīgais dalāmais. Lai atrastu mazāko kopīgo dalāmo, vispirms dotie skaitļi ir jāsadala pirmreizinātājos:

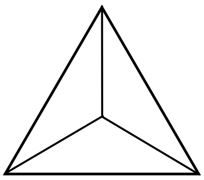
$$2 = 2$$
$$3 = 3$$
$$4 = 2 \cdot 2$$
$$5 = 5$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$7 = 7$$
$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$9 = 3 \cdot 3$$
$$10 = 2 \cdot 5$$

Pēc tam apskatām katra skaitļa pirmreizinātājus. Starp visu doto skaitļu pirmreizinātājiem ir tikai 4 dažādi pirmreizinātāji – 2, 3, 5 un 7.

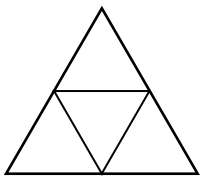
Lai aprēķinātu mazāko kopīgo dalāmo, ir jānoskaidro, kāds ir lielākais skaits divnieku, kas izmantoti kāda no doto skaitļu sadalījuma pirmreizinātājos (tie ir 3 divnieki skaitlim 8). Tāpat ir jānoskaidro, kāds ir lielākais skaits trijnieku (2 trijnieki skaitlim 9), piecinieku (1 piecinieks) un septiņnieku (1 septiņnieks). Sareizinām tos un iegūstam $MKD(2,3,4,5,6,7,8,9,10) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Atliek pārbaudīt, vai $N = 2520 - 1 = 2519$ dalās ar 11 (pārbaudi var veikt izmantojot dalāmības pazīmi ar 11, skat. 11. lpp.). Tiešām, $(9+5)-(1+2)=11$, kas dalās ar 11, tātad skaitlis 2519 dalās ar 11, un tas ir viens no skaitļiem, kas apmierina uzdevuma prasības, pie tam tas ir mazākais no meklējamajiem skaitļiem.

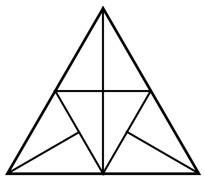
12.4.2. ***Atbilde.*** Jā, var, skat. A114., A115., A116., A117. zīm.



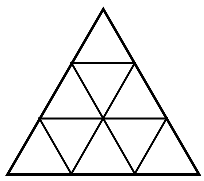
A114. zīm.



A115. zīm.



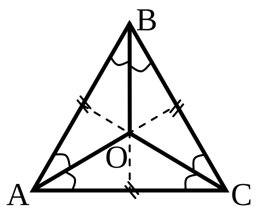
A116. zīm.



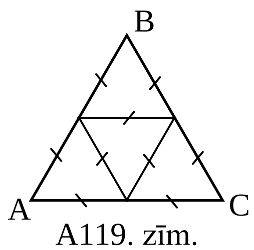
A117. zīm.

Risinājums. Pamatosim, ka šie trijstūrīši tiešām ir vienādi.

1) O ir trijstūra centrs (skat. A118. zīm.), tātad gan ievilktās, gan apvilktās riņķa līnijas centrs, tāpēc mazo trijstūrīšu malas atdodas uz dotā trijstūra bisektrisēm un no tā seko, ka $\angle ABO = \angle OBC = \angle BCO = \angle OCA = \angle CAO = \angle OAB$. Visi mazie trijstūrīši ir vienādi savā starpā pēc pazīmes *lml* (skat. A118. zīm.).



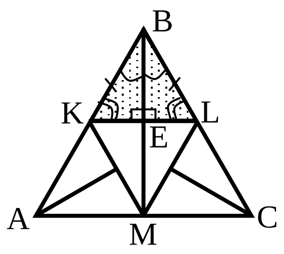
A118. zīm.



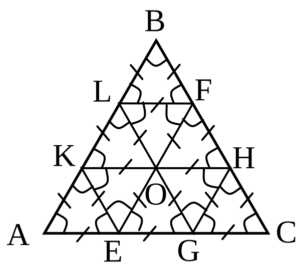
A119. zīm.

2) Novelkam visas trīs lielā trijstūra viduslīnijas. Katra trijstūra viduslīnija dala trijstūra malas uz pusēm, turklāt tā ir paralēla trijstūra pamatam un ir vienāda ar pusi no pamata. Tātad visi mazie trijstūrīši ir vienādi pēc pazīmes *mmm* (skat. A119. zīm.).

3) Šie 8 vienādie trijstūrīši ir iegūti, sadalot ar bisektrisēm (augstumiem, mediānām) 2) gadījumā redzamos 4 vienādos vienādmalu trijstūrīšus uz pusēm. Tāpēc pietiks, ja mēs parādīsim, ka vienu no šiem 4 trijstūrīšiem, pārgriežot uz pusēm, rodas 2 citi vienādi trijstūrīši. Trijstūris KBE ir vienāds ar trijstūri LBE pēc pazīmes *lml* (skat. A120. zīm.).



A120. zīm.



A121. zīm.

4) Šie 9 vienādie trijstūrīši ir iegūti, sadalot katru lielā trijstūra malu trīs vienādās daļās, un tad savienojot attiecīgos punktus (skat. A121. zīm.). Trijstūra ABC visi leņķi ir vienādi un tie ir 60° lieli. $AK = AE$ un $\angle KAE = 60°$ $\Rightarrow$ ΔAKE – regulārs. Līdzīgi $\Delta HGC = \Delta BLF = \Delta AKE$ – regulāri. Taisnes $KE \,||\, GL \,||\, BC$, $LF \,||\, KH \,||\, AC$, $HG \,||\, EF \,||\, AB \Rightarrow$ $\angle OEG = \angle KAE = 60°$ (kāpšļu leņķi) $\Rightarrow$ $\angle OGE = \angle HCG = 60°$, $EG = AE$ $\Rightarrow$ ΔEOG – regulārs un vienāds ar ΔAKE. Līdzīgi $\Delta HOF = \Delta LOK = \Delta EOG = \Delta AKE$ (regulāri). $\angle HGO = \angle KLO = 60°$ (šķērsleņķi), $HG = OG \Rightarrow \Delta HGO = \Delta HGC$ – regulārs. Līdzīgi $\Delta LFO = \Delta KOE = \Delta HOG = \Delta AKE$ – regulāri.

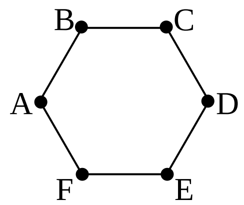
12.4.3. ***Atbilde.*** Izteiksmes vērtība ir 20032004.

Risinājums. Apzīmēsim skaitli 20032004 ar *n*. Tad $20032002 = n-2$, $20032003 = n-1$, $20032005 = n+1$, $20032006 = n+2$ un dotā izteiksme pārveidojas par $\frac{20032003 \cdot 20032004 \cdot 20032005 + 20032004}{20032002 \cdot 20032006 + 4} = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)+n}{(n-2)(n+2)+4}$. To vienkāršojot, iegūstam $\frac{n(n^2-1)+n}{(n^2-4)+4} = \frac{n(n^2-1+1)}{n^2} = \frac{n \cdot n^2}{n^2} = n$,

tātad $\frac{20032003 \cdot 20032004 \cdot 20032005 + 20032004}{20032002 \cdot 20032006 + 4} = 20032004$.

12.4.4. ***Atbilde.*** Jā, var.

Risinājums. Apzīmēsim zinātniekus ar punktiem A, B, C, D, E, F, un draudzību starp diviem zinātniekiem – ar nogriezni starp atbilstošajiem punktiem. Piemēru, kad izpildās uzdevuma prasība, skat. A122. zīm.



A122. zīm.

12.4.5. ***Atbilde.*** Sprīdītim šīs pogas jānospiež vismaz 19 reizes.

Risinājums. Pavisam iespējamas $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ (skat. „Variācijas ar atkārtojumiem”, 14. lpp.) dažādas virknītes, kas varētu derēt par kodu. Tātad nospiestu pogu virknītē ir jāparādās šīm visām 16 virknītēm. Tātad vismaz 4+15=19 reizes pogas ir jāspiež (pirmais „kods” un vēl vismaz 15 pogas, jo katras divas virknītes atšķiras vismaz vienā pozīcijā). Piemērs **ssssszzzzszsszszzsss** parāda, ka ar 19 pogu nospiešanām pietiek (skat. A123. zīm.).

	s	**s**	**s**	**s**	**z**	**z**	**z**	**z**	**s**	**z**	**s**	**s**	**z**	**s**	**z**	**z**	**s**	**s**	**s**
1.	s	s	s	s															
2.		s	s	s	z														
3.			s	s	z	z													
4.				s	z	z	z												
5.					z	z	z	z											
6.						z	z	z	s										
7.							z	z	s	z									
8.								z	s	z	s								
9.									s	z	z	s							
10.										z	z	s	z						
11.											z	s	z	s					
12.												s	z	s	z				
13.													z	s	z	z			
14.														s	z	z	s		
15.															z	z	s	s	
16.																z	s	s	s

A123. zīm.

12.5.1. ***Atbilde:*** Šajā virknē 2004. vietā atradīsies cipars 7 (skat. A124. zīm.).

1 3 5 7 9 1 1 1 3 1 5 . . . 1 2 **7** 9 . . .

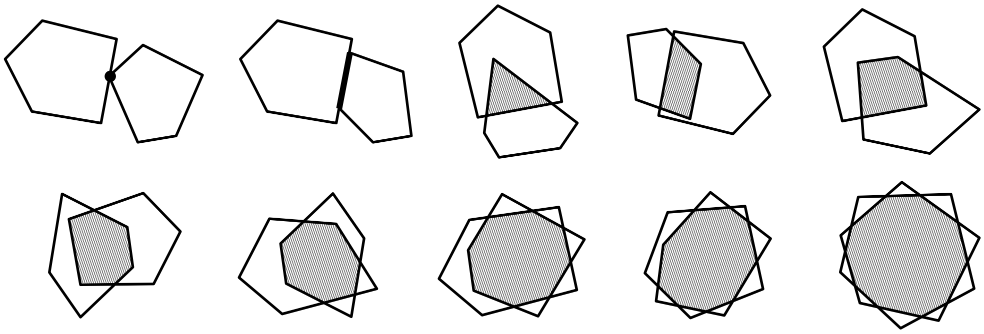
1. vieta 2. vieta 2004. vieta 2005. vieta

A124. zīm.

Risinājums. Ir 5 viencipara nepāra skaitļi, 45 divciparu nepāra skaitļi (no 1 līdz 99 pavisam kopā ir 99 skaitļi, no tiem 9 ir viencipara skaitļi, tātad $99 - 9 = 90$ divciparu skaitļi, no kuriem $90 : 2 = 45$ nepāra divciparu skaitļi), kopā tajos ir $2 \cdot 45 = 90$ cipari, 450 nepāra trīsciparu skaitļi (no 1 līdz 999 kopā ir 999 skaitļi, tātad trīsciparu skaitļi ir $999 - 9\,\text{viencip. sk.} - 90\,\text{divcip.sk.} = 900$ trīsciparu skaitļi, no kuriem $900 : 2 = 450$ nepāra trīsciparu skaitļi), kuros kopā ir $3 \cdot 450 = 1350$ cipari, kopā jau ir uzrakstīti $5 + 90 + 1350 = 1445$ cipari. No 1001 līdz 1279 (ieskaitot) ir 140 nepāra skaitļi, kopā $4 \cdot 140 = 560$ cipari. Tātad no 1 līdz 1279 ir uzrakstīti 1445+560=2005 cipari. 2005.vietā atrodas cipars 9, bet 2004. vietā – cipars **7**.

12.5.2.

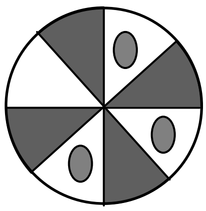
Risinājums. Tā kā abi piecstūri ir izliekti, viena piecstūra katra mala var krustot augstākais divas otra piecstūra malas, tātad uz vienas šī piecstūra malas var atrasties ne vairāk kā 2 kopīgā daudzstūra virsotnes. Tas nozīmē, ka kopīgajai daļai nevar būt vairāk kā $2 \cdot 5 = 10$ virsotnes. A125. zīmējumā parādīts, ka kopīgā daļa var būt punkts, nogrieznis, trijstūris, četrstūris, piecstūris, sešstūris, septiņstūris, astoņstūris, deviņstūris un desmitstūris.



A125. zīm.

12.5.3. ***Atbilde.*** Nē, Sivēntiņš to nevarēs panākt.

Risinājums. Izkrāsosim riņķa sektorus pamīšus balts, melns..., kā parādīts A126. zīm. Katra gājiena rezultātā starpība starp podu skaitu, kas atrodas baltos sektoros, un podu skaitu, kas atrodas melnos sektoros, nemainās (jo vienā gājienā medus podu skaits baltos sektoros tāpat kā melnos sektoros palielinās tieši par 1). Tā kā sākumā šī starpība ir 3, bet gadījumā, ja visos sektoros ir vienāds podu skaits, šī starpība ir 0, tad to panākt nav iespējams. (Skat. „Invariantu metode" 7. lpp.)

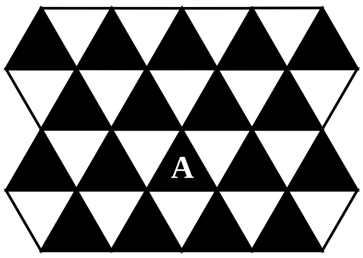


A126. zīm.

12.5.4. . ***Atbilde.*** Mazākais gājienu skaits ir 12.

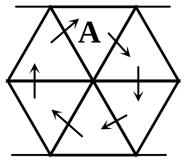
Risinājums. Vispirms ievērosim, ka, lai atgrieztos sākotnējā lauciņā, piramīda ir jāpārveļ pāra skaita reižu. Pamatosim to.

Izkrāsosim plakni ar baltiem un melniem lauciņiem tā, ka jebkuri divi lauciņi, kam ir kopīga mala, būtu dažādās krāsās (skat. A127. zīm.). Tā kā piramīdu var velt tikai pāri tās šķautnēm, tad tā no melna lauciņa var nonākt tikai uz balta, no balta – tikai uz melna, utt. Lai atgrieztos lauciņā, kurā viņa bija sākumā, tā būs jāveļ pāra skaita reižu.

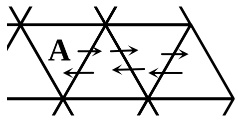


A127. zīm.

Skaidrs, ka jāizdara vismaz 6 gājieni, jo piramīdai ir 6 šķautnes. Taču pēc 6 gājienu izdarīšanas piramīda var atgriezties sākotnējā lauciņā, ja tā vēlusies ap vienu savu virsotni (skat. A128. zīm.) vai arī vēlusies uz priekšu un atpakaļ pār vienām un tām pašām skaldnēm (skat., piem., A129. zīm.). Jebkurā gadījumā piramīda būs pārvēlusies tikai pār 3 dažādām šķautnēm.

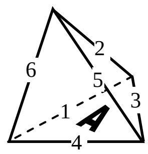


A128. zīm.

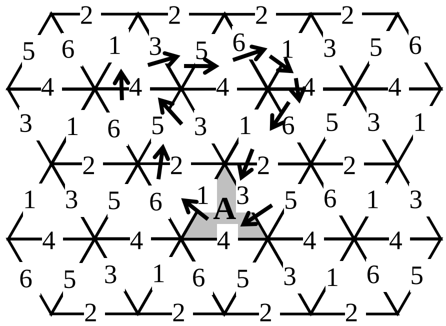


A129. zīm.

Ievērosim, ka lai kā arī piramīdu „ripinātu”, katra tās skaldne var nonākt tikai noteiktos lauciņos, atkarībā no tā, kā piramīda bijusi novietota sākumā. Tātad arī katra šķautne var nonākt tikai uz noteiktiem nogriežņiem. Piemēram, ja piramīdas šķautnes sanumurējam kā parādīts A130. zīm., tad cipari A131. zīm. norāda, kura šķautne var nonākt šajā nogrieznī.



A130. zīm.



A131. zīm.

Varam pārliecināties, ka ar mazāk nekā 12 gājieniem uzdevuma prasības izpildīt nevar. Kā to izdarīt ar 12 gājieniem, skat., piem., A131. zīm.

12.5.5. Atbilde. Jā, noteikti.

Risinājums. Līzītei jārīkojas šādi – Līzīte norāda uz 5 kārbām un jautā, vai lelle ir tur.

A Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), tad tālāk jautā par 2 no šīm kārbām (skat. A132. zīm.).

A1 Ja atbilde atkal ir „jā” (2 konf.), tad jautā, vai lelle ir vienā no šīm kārbām. Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), tad Līzīte iegūst lelli, samaksājot 6 konfektes; ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad lelle ir otrā kārbā un Līzīte to iegūst samaksājot 5 konfektes (skat. A132. zīm.).

A2 Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tātad lelle ir pārējās 3 kastēs no 5 apskatītajām. Līzīte jautā, vai lelle ir vienā no šīm 3 kastēm. Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), Līzīte lelli iegūst, atdodot 5 konfektes; ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad jautā, vai lelle ir vienā no atlikušajām divām. Ja atbilde ir „jā”, iegūst lelli samaksājot kopā 6 konfektes, ja atbilde ir „nē”, tad pietiek ar 5 konfektēm (skat. A132. zīm.).

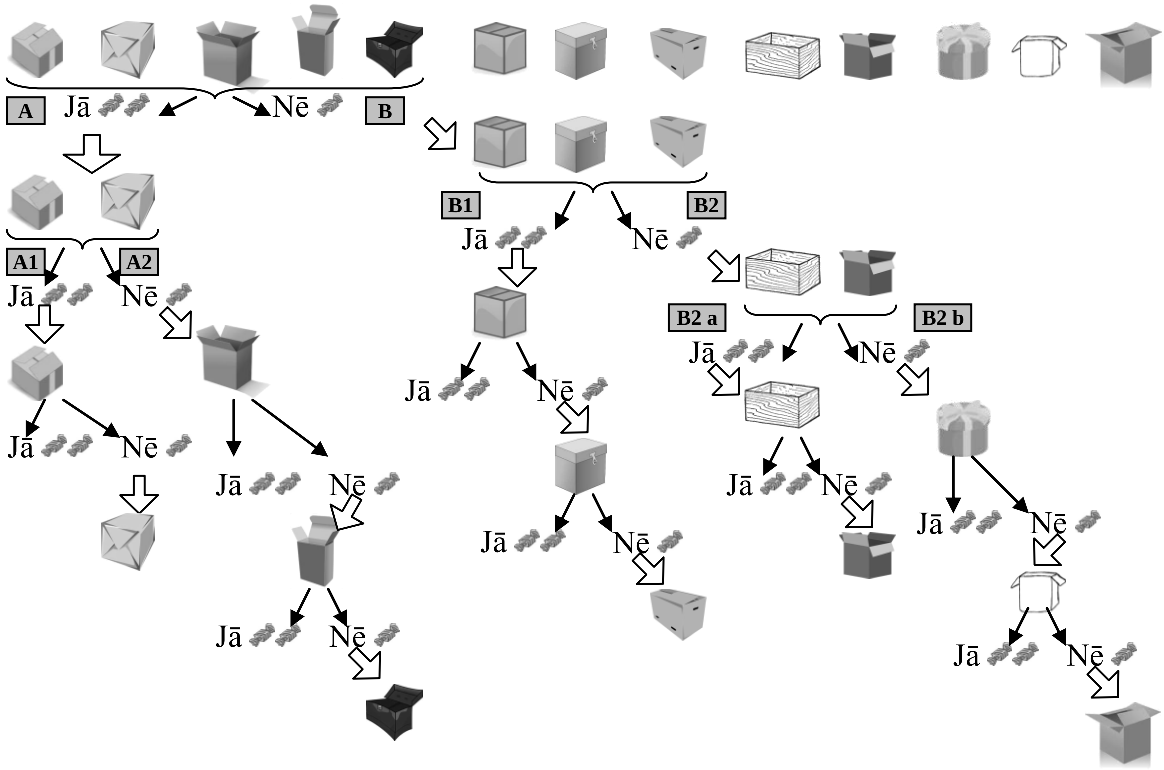
B Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad jautā par 3 no atlikušajām 8 kastēm (skat. A132. zīm.).

B1 Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), tālāk rīkojas līdzīgi kā A2 gadījumā. Starp 3 kastēm īsto var atrast samaksājot ne vairāk kā 3 konfektes, tātad kopā ar 6 konfektēm pietiks.

B2 Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tātad lelle ir 5 atlikušajās kastēs. Jautājam par 2 no tām (skat. A132. zīm.).

B2a Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), jautājot par vienu no tām, noskaidrojam, kurā kastē ir lelle, samaksājot kopā ne vairāk kā 6 konfektes (skat. A132. zīm.).

B2b Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad paliek 3 konfektes un zināms, ka lelle ir vienā no 3 kastēm. Rīkojas līdzīgi kā A2 gadījumā un iegūst lelli (skat. A132. zīm.).



A132. zīm.

2004./2005. mācību gads

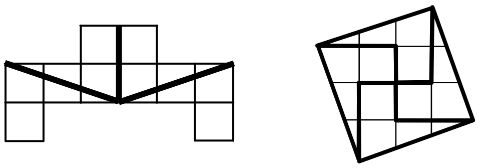
13.1.1. ***Atbilde.*** Visi rādījuma cipari atkal būs dažādi pēc 16 dienām.

Risinājums. Lai nākamreiz visi cipari būtu dažādi, tad nederēs, ja desmitu cipars šajā skaitītāja rādījuma skaitlī būs 6,7 vai 8, jo šie cipari jau ir desmit tūkstošu, tūkstošu vai simtu vietās. Tātad nākamais cipars, kas derētu desmitu vietā ir cipars 9, ja vien tas neatrodas vienu vietā. Vismazākais skaitlis, kas var būt vienu vietā, ir skaitlis 1 (tā nevar būt 0, jo 0 jau atrodas skaitītāja rādījuma pašā sākumā).

Tātad nākamais rādījums, kad visi cipari būs dažādi ir **067891**. Tas parādīsies pēc tam, kad būs notērētas 32 kWh elektrības, tātad pēc $32:2=16$ dienām.

13.1.2.

Risinājums. Dotā figūra satur 10 rūtiņas, tātad no tās nevar izveidot kvadrātu, kura malas iet pa rūtiņu malām. Taču uzdevuma nosacījumos nav šādas prasības. Kā iespējams sagriezt doto figūru 4 daļās un no tām izveidot kvadrātu, parādīts A133. zīm.



A133. zīm.

13.1.3. ***Atbilde.*** Anna pienu ir izdzērusi par $\frac{1}{12}$ daļu tasītes vairāk nekā kafiju.

Risinājums. Balta kafija ir melnas kafijas un piena maisījums; jānoskaidro, cik visā izdzertajā dzērienā bija kafijas un cik – piena. Pavisam Anna izdzēra 1 tasīti (sākumā doto) melnas kafijas un $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$ tasītes piena. Tātad tīru pienu viņa ir izdzērusi par $\frac{1}{12}$ tasītes vairāk nekā tīru kafiju.

13.1.4. ***Atbilde.*** Skaitļa A ciparu summa ir 14028.

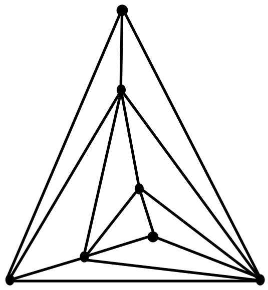
Risinājums. Sareizinot

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 1 & \overbrace{\dots}^{1998\,\text{vieninieki}} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \times & & & & 2 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
 & & & 5 & \dots & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & & & \\
\hline
2 & 2 & 2 & 7 & \underbrace{\dots}_{1998\,\text{septinnieki}} & 7 & 7 & 5 & 5 & 5
\end{array}$$

iegūstam, ka skaitlis $A=222\underbrace{77\dots77}_{2001\,\text{septinnieks}}555$, tātad tā ciparu summa ir

$$2\cdot3+7\cdot2001+5\cdot3=21+7\cdot2001=7(3+2001)=7\cdot2004=14028$$

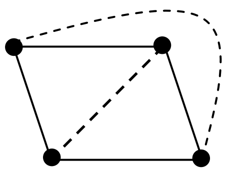
13.1.5. ***Atbilde:*** 15 taciņas, piem., skat. A134. zīm.



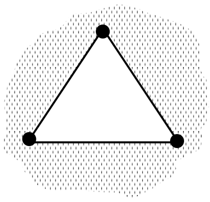
A134. zīm.

Risinājums. Šo uzdevumu var risināt divos dažādos veidos.

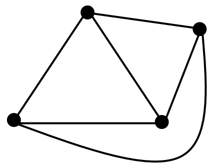
1. risinājuma veids. Kad būs iemīts lielākais skaits taciņu, kas savā starpā nekrustojas, visi iegūtie zemes apgabali būs norobežoti tieši ar 3 taciņām (arī ārējais, t.i., ciemu no ārpasaules norobežo tieši 3 taciņas), ja kāds apgabals būtu norobežots tikai ar 2 taciņām, tad tās savienotu vienas un tās pašas mājiņas – pretruna. Ja kādu apgabalu norobežotu 4 vai vairāk taciņas, noteikti varēs iemīt vēl kādu taciņu, kas nekrusto iepriekš iemītās, piemēram, skat. A135. zīm.



A135. zīm.



A136. zīm.



A137. zīm.

Tātad jānoskaidro, cik apgabalus ar 3 malām var iegūt, novelkot līnijas, kas savā starpā nekrustojas, starp 7 punktiem.

Ja būtu tikai 3 punkti, tad tiek iegūti 2 apgabali – trijstūris un ārējais apgabals (skat. A136. zīm.). Pievienojot vēl vienu punktu, vienmēr varēs novilkt vēl tieši 3 taciņas, kas rada 3 jaunus apgabalus, bet vienu „veco" apgabalu (to, kurā ielikts jaunais punkts) izjauc, tātad apgabalu skaits palielinās par $3-1=2$. Tātad pie 4 punktiem iegūti $2+2=4$ apgabali, katrs ar 3 malām (skat. A137. zīm.). Pie 5 punktiem ir $4+2=6$ apgabali, pie 6 punktiem – $6+2=8$ apgabali, pie 7 punktiem – $8+2=10$ apgabali.

Tātad visiem 10 apgabaliem kopā ir $10\cdot 3=30$ malas. Taču katra taciņa ir mala tieši 2 apgabaliem, tāpēc taciņu skaits ir $30:2=15$. Piemēram, skat. A134. zīm.

2. risinājuma veids. Dotās mājas varam attēlot kā punktus, bet atbilstošās taciņas – kā līnijas. Tādējādi iegūstam grafu (skat. 10. lpp). Tā kā nekādas divas taciņas (resp. grafa šķautnes) savā starpā nekrustojas, tad šis grafs ir planārs grafs un tam ir spēkā Eilera formula:

$$v + sk - šķ = 2,$$

kur v – virsotņu skaits grafā (šoreiz – māju skaits), sk – skaldņu skaits (cik daļās grafa līnijas sadala plakni), šķ – šķautņu skaits (šoreiz taciņu skaits).

No šīs formulas un no fakta, ka katrai skaldnei ir vismaz 3 malas, seko, ka šķ≤15, tātad vairāk taciņas Mēness ciemā nevar būt.

13.2.1. ***Atbilde:*** vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir $\mathbf{2004\underline{2}2005\underline{3}}$.

Risinājums. Lai skaitlis dalītos ar 99, tam jādalās ar 9 un ar 11. (Dalāmības pazīmes ar 9 un 11, skat. 11. lpp.)

Apzīmēsim ar zvaigznītēm aizstātos ciparus ar *a* un *b*: 2004*a*2005*b*. Lai šis skaitlis dalītos ar 99, summai $2+0+0+4+a+2+0+0+5+b=13+a+b$ jādalās ar 9 un starpībai $(0+4+2+0+b)-(2+0+a+0+5)=6+b-7-a=b-a-1$ jādalās ar 11. Tā kā *a* un *b* ir cipari, tad $0 \le a+b \le 18$, jo mazākā vērtība summai $a+b$ ir tad, ja gan *a*, gan *b* ir cipars 0, tātad $0+0=0$, bet lielākā summas $a+b$ vērtība ir tad, ja gan *a*, gan *b* ir cipars 9, tātad $9+9=18$. Starpības $b-a$ mazākā vērtība ir tad, ja *b* ir 0, bet *a* ir 9, tātad $b-a=0-9=-9$, savukārt šīs starpības lielākā vērtība ir tad, ja *b* ir 9, bet *a* ir 0, tātad $b-a=9-0=9$, tāpēc $-9 \le b-a \le 9$.

Tātad $13+a+b$ vienlaicīgi ir $13 \le 13+a+b \le 31$ un dalās ar 9. Vienīgie skaitļi, kas dalās ar 9 intervālā no 13 līdz 31, ir skaitļi 18 un 27. Tāpēc

1) $13+a+b=18$ vai
2) $13+a+b=27$.

Savukārt $b-a-1$ vienlaicīgi ir $-10 \le b-a-1 \le 8$ un dalās ar 11. Taču vienīgais skaitlis šajā intervālā, kas dalās ar 11, ir 0. Tāpēc $b-a-1=0$. Iegūstam, ka $b=1+a$.

Ievietojot $b=1+a$ izteiksmē 1), iegūstam $13+a+1+a=18 \Rightarrow 14+2a=18 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$, tātad $b=1+a=1+2=3$.

Ievietojot $b=1+a$ vienādojumā 2), iegūstam $13+a+1+a=27 \Rightarrow 14+2a=27 \Rightarrow 2a=13$, bet šo vienādojumu neapmierina neviena pieļaujamā *a* vērtība (*a* varēja būt jebkurš cipars).

Līdz ar to vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir $2004\underline{2}2005\underline{3}$.

13.2.2. ***Atbilde.*** Viss ceļojuma maršruts bija 140 km garš. Skolēnu grupa ar velosipēdiem brauca ar ātrumu 20 km/h.

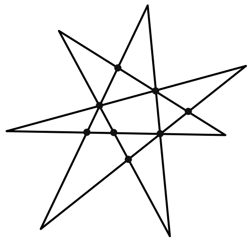
Risinājums. Tā kā visu maršrutu ar velosipēdu var nobraukt 7 stundās, tad 3 stundās skolēni nobrauca $\frac{3}{7}$ visa maršruta. Līdzīgi , ja visu maršrutu ar autobusu var nobraukt 2 stundās, tad 1 stundā var nobraukt $\frac{1}{2}$ no visa ceļa. Tātad kājām skolēni veica $1-\frac{3}{7}-\frac{1}{2}=1-\frac{6}{14}-\frac{7}{14}=\frac{1}{14}$ daļu no visa ceļa jeb 10 km. Tātad viss ekskursijas maršruts bija 10 km ·14=140 km garš.

Tā kā kustības ātrumu aprēķina, dalot veiktā ceļa garumu ar tajā pavadīto laiku un viss maršruts bija 140 km garš un to ar velosipēdu var nobraukt 7 h, tad ātrums, ar kādu brauca velosipēdisti, bija $\frac{140}{7}=20$ km/h.

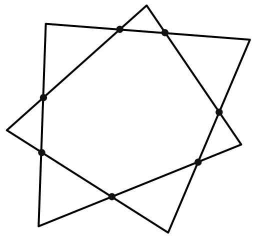
13.2.3. ***Atbilde.*** Nē, no viena akmens bluķa 22 akmens gabalus iegūt nevarēs.

Risinājums. Ar katru „skaldīšanas" reizi akmeņu skaits palielinās par $5-1=4$. Pieņemsim, ka pēc *k* „skaldīšanas" reizēm ir iegūti tieši 22 akmeņi. Tad $1+4\cdot k \overset{?}{=} 22 \Rightarrow 4\cdot k \overset{?}{=} 21$. Tad, tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 4, tad arī labajai pusei būtu jādalās ar 4 (skat. „Dalāmības īpašības", Nr. 6, 11. lpp.), bet $21 \not\vdots 4$. Līdz ar to tieši 22 akmeņus iegūt nevarēs. (Skat. „Invariantu metode" 7. lpp.)

13.2.4. ***Atbilde.*** Jā, var; skat., piemēram, A138. zīm. un A139. zīm.



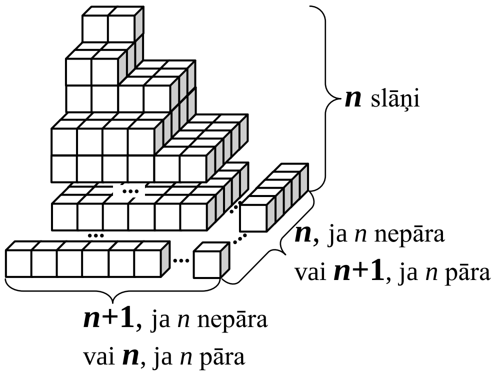
A138. zīm.



A139. zīm.

13.2.5. (Skat. „Interpretāciju metode” 9. lpp.)

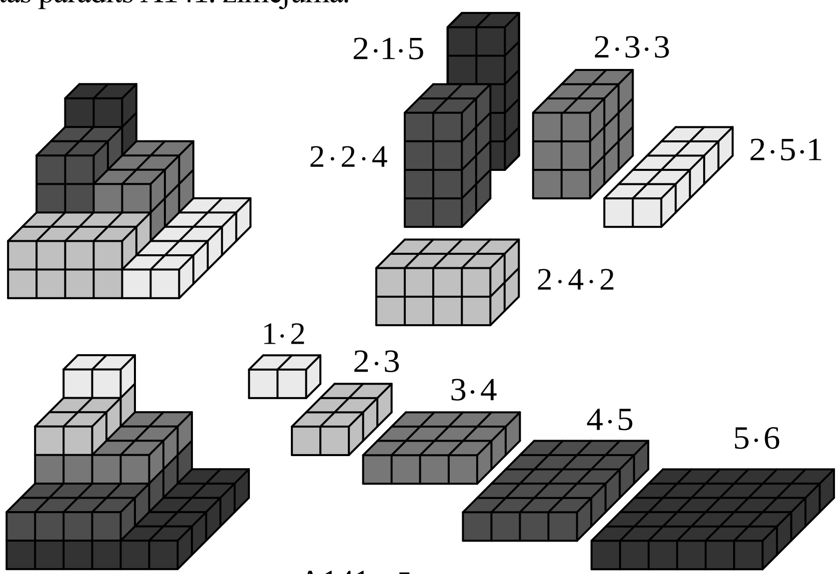
Risinājums. Doto vienādību var ilustrēt, piemēram, šādā veidā: no vienādiem klucīšiem saliksim tādu figūru, kā parādīts A140. zīmējumā.



A140. zīm.

Saskaitīsim visus klucīšus divējādi. Skaitot „pa stabiņiem”, iegūstam dotās vienādības kreiso pusi (garākā „stabiņa” augstums ir n klucīši, bet vienā slānītī ir $1\cdot2$ klucīši, stabiņā ar augstumu n-1 katrā slānītī ir $2\cdot2$ klucīši utt.). Skaitot šos pašus klucīšus pa slāņiem, iegūstam dotās vienādības labo pusi. Tā kā klucīšu kopējais skaits nav atkarīgs no skaitīšanas secības, dotā vienādība ir pareiza visām n vērtībām.

Lai labāk varētu iztēloties, kā notiek skaitīšana pa stabiņiem un slāņiem, apskatīsim vienu konkrētu gadījumu, kad, piemēram, n vietā izteiksmē liekam skaitli 5. Tad vienādība ir šāda $2\cdot1\cdot5+2\cdot2\cdot4+2\cdot3\cdot3+2\cdot4\cdot2+2\cdot5\cdot1=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6$, bet skaitīšana notiek tā, kā tas parādīts A141. zīmējumā.



A141. zīm.

13.3.1. *Atbilde:* skat., piem., A142. zīm.

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

A142. zīm.

13.3.2. *Atbilde:* der jebkura īsta daļa (gan pozitīva, gan negatīva), t.i., jebkurš skaitlis, kas lielāks par -1 un mazāks par 1, izņemot skaitli 0.

Risinājums. Skaitli 2 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var izteikt tikai divos veidos (ar precizitāti līdz reizinātāju secībai): $1\cdot 2$ vai $(-1)\cdot(-2)$. Tātad iegūstam četras sistēmas:

$$\begin{cases}[2-x]=2\\ [2+x]=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\le 2-x<3\\ 1\le 2+x<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le -x<1\\ -1\le x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<x\le 0\\ -1\le x<0\end{cases}\Rightarrow -1<x<0$$

$$\begin{cases}[2-x]=1\\ [2+x]=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le 2-x<2\\ 2\le 2+x<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le -x<0\\ 0\le x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x\le 1\\ 0\le x<1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$$

$$\begin{cases}[2-x]=-2\\ [2+x]=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le 2-x<-1\\ -1\le 2+x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\le -x<-3\\ -3\le x<-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3<x\le 4\\ -3\le x<-2\end{cases}\Rightarrow \text{nav atris.}$$

$$\begin{cases}[2-x]=-1\\ [2+x]=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le 2-x<0\\ -2\le 2+x<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le -x<-2\\ -4\le x<-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2<x\le 3\\ -4\le x<-3\end{cases}\Rightarrow \text{nav atris.}$$

Kā redzam, citu pieļaujamo x vērtību bez jau pieminētajām nav. Tātad, apvienojot pirmo divu vienādojumu sistēmu atrisinājumus, iegūstam, ka $x\in(-1;0)\cup(0;1)$

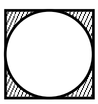
13.3.3.

Risinājums. Ja tiek novilkta tikai viena taisne, tad plakne ir sadalīta divās pusplaknēs. Nokrāsojot vienu no tām baltu, bet otru – melnu, iegūstam prasīto krāsojumu.

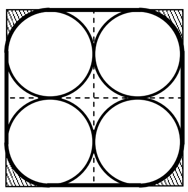
Pieņemsim, ka plaknē ir novilktas vairākas taisnes un visa plakne ir nokrāsota atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Novilksim vēl vienu taisni, un apgabaliem vienā pusē no tās krāsojumu neaiztiksim, bet otrā pusē mainīsim krāsas uz pretējo. Ja divu apgabalu kopējā mala atrodas uz šīs taisnes, tad apgabaliem ir dažādas krāsas saskaņā ar veikto pārkrāsošanu; ja apgabalu kopējā mala atrodas uz kādas no pārējām taisnēm, tad apgabali ir dažādās krāsās saskaņā ar pieņēmumu. Skat. „Matemātiskā indukcija” 10. lpp.

13.3.4. *Atbilde.* Gumija ierobežo $3a+b$ cm^2 lielu laukumu.

Risinājums. Ievērojam, ka gumijas norobežotais laukums ir vienāds ar četru A143. zīm. redzamā kvadrāta laukumu summu, atņemot no šīs summas četru iekrāsoto stūrīšu kopējo laukumu. Četru mazo stūrīšu kopējais laukums ir vienāds ar kvadrāta laukuma a un riņķa laukuma b starpību, tātad $a-b$. Tāpēc visas figūras laukums, ko ierobežo gumija, ir $4a-(a-b)=3a+b$ cm^2 (skat. A144. zīm.).



A143. zīm.



A144. zīm.

13.3.5. ***Atbilde:*** piemēram, skaitlis 5555555555555=53·104821802935

Risinājums. Vispārīgais pierādījums. Apskatām skaitļus

$$5$$
$$55$$
$$555$$
$$5555$$
$$55555$$
$$\ldots$$
$$\underbrace{5555555\ldots5}_{54\,\text{piecinieki}}$$

Dalām katru no šiem skaitļiem ar 53 ar atlikumu. Tā kā, dalot ar 53, iegūtajam atlikumam iespējamas tikai 53 dažādas vērtības (tās ir 0; 1; 2; ...; 52), bet apskatāmo skaitļu ir 54 un 54>53 (skat. „Dirihlē princips” 8. lpp.), tad kaut kādi divi apskatāmie skaitļi noteikti dos vienādus atlikumus, dalot ar 53. Tātad šo skaitļu starpība dalās ar 53 (skat. „Dalāmības īpašības” Nr. 5, 11. lpp.)

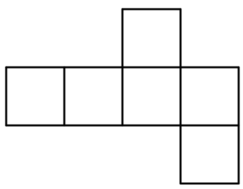
Ja abi minētie skaitļi ir $\underbrace{555\ldots5}_{i\,\text{piecinieki}}$ un $\underbrace{555\ldots5}_{j\,\text{piecinieki}}$, kur i>j, tad starpība (kas dalās ar 53) ir

$$S=\underbrace{555\ldots5}_{i-j\,\text{piecinieki}}\underbrace{00\ldots0}_{j\,\text{nulles}}$$

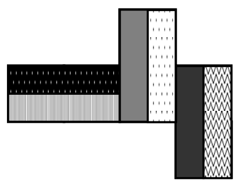
Ievērojam, ka $S=\underbrace{555\ldots5}_{i-j\,\text{piecinieki}}\cdot 10^j$. Tā kā 53 nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad 10^j nav nekādas nozīmes tai apstāklī, ka S dalās ar 53; ar 53 dalās reizinātājs $\underbrace{555\ldots5}_{i-j\,\text{piecinieki}}$. Bet šis reizinātājs sastāv tikai no cipariem 5.

13.4.1. Piemēram, $1\cdot2+3-4+56-7\cdot8+9=10$. Iespējami daudzi atrisinājumi.

13.4.2. ***Atbilde.*** Jā, kuba virsmu (kuba virsma izklājumā parādīta A145. zīm.) var aplīmēt pat ar 6 vienādiem taisnstūriem, kas nav kvadrāti, piemēram, kā parādīts A146. zīmējumā.



A145. zīm.



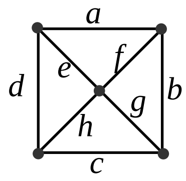
A146. zīm.

13.4.3. ***Atbilde:*** 121 minūti.

Risinājums. Tas ir brīžos, kad pulkstenis rāda
00:00; 00:01; 00:05; 00:10; 00:11; 00:15; 00:20; 00:21; 00:50; 00:51; 00:55; 01:00; 01:01; 01:05; 01:10; 01:11; 01:15; 01:20; 01:21; 01:50; 01:51; 01:55; 02:00; 02:01; 02:05; 02:10; 02:11; 02:15; 02:20; 02:21; 02:50; 02:51; 02:55; 05:00; 05:01; 05:05; 05:10; 05:11; 05:15; 05:20; 05:21; 05:50; 05:51; 05:55; 10:00; 10:01; 10:05; 10:10; 10:11; 10:15; 10:20; 10:21; 10:50; 10:51; 10:55; 11:00; 11:01; 11:05; 11:10; 11:11; 11:15; 11:20; 11:21; 11:50; 11:51; 11:55; 12:00; 12:01; 12:05; 12:10; 12:11; 12:15; 12:20; 12:21; 12:50; 12:51; 12:55; 15:00; 15:01; 15:05; 15:10; 15:11; 15:15; 15:20; 15:21; 15:50; 15:51; 15:55; 20:00; 20:01; 20:05; 20:10; 20:11; 20:15; 20:20; 20:21; 20:50; 20:51; 20:55; 21:00; 21:01; 21:05; 21:10; 21:11; 21:15; 21:20; 21:21; 21:50; 21:51; 21:55; 22:00; 22:01; 22:05; 22:10; 22:11; 22:15; 22:20; 22:21; 22:50; 22:51; 22:55.

13.4.4. ***Atbilde:*** nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka uzdevuma prasības izpildīt ir iespējams, t.i., katram minētajam nogrieznim var pierakstīt vienu skaitli atbilstoši uzdevuma prasībām. Apzīmēsim katram nogrieznim pierakstīto skaitli ar burtiem *a, b, c, d, e, f, g, h* tā kā parādīts A147. zīmējumā.



A147. zīm.

Tad ir spēkā šādas vienādības:

$$\begin{cases} a+e+f=a+e+g+b \\ f+g+b=f+h+b+c \\ h+g+c=g+e+c+d \\ e+h+d=h+f+d+a \end{cases}$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

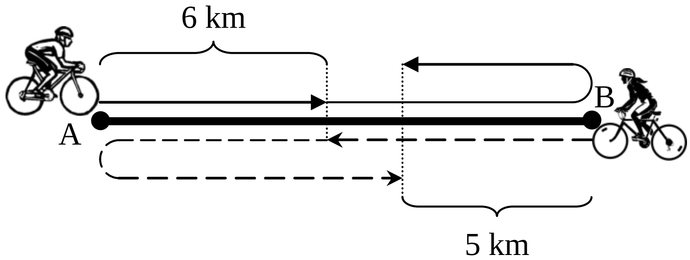
$$a+b+c+d+2e+2f+2g+2h=2a+2b+2c+2d+2e+2f+2g+2h \text{ jeb}$$

$$a+b+c+d=0,$$

bet tā būt nevar, jo *a*, *b*, *c* un *d* ir naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

13.4.5. ***Atbilde:*** 13 km.

Risinājums. Līdz pirmajam satikšanās punktam abi velosipēdisti kopā ir veikuši visu attālumu no A līdz B. Līdz otrajam satikšanās brīdim abi velosipēdisti kopā no kustības sākuma ir veikuši 3 attālumus no A līdz B (skat. A148. zīm.), tātad līdz otrajam tikšanās brīdim ir pagājis 3 reizes ilgāks laiks nekā līdz pirmajai tikšanās reizei. Tātad velosipēdists, kas izbrauca no punkta A, līdz otrajam tikšanās punktam pavisam bija nobraucis 3·6=18 km, t.i., visu attālumu no A līdz B un vēl 5 km atpakaļ (skat. A148. zīm.). Tātad attālums starp ciemiem ir 18 km - 5 km=13 km.



A148. zīm.

13.5.1. ***Atbilde:*** $19992005 \cdot 19992003 - 19992006 \cdot 19992002 = 3$

Risinājums. Apzīmēsim skaitli 19992004 ar a. Tad $19992005 = a+1$; $19992003 = a-1$; $19992006 = a+2$; $19992002 = a-2$. Ievietojot šos apzīmējumus dotajā izteiksmē, iegūstam

$$(a+1)(a-1)-(a+2)(a-2)=(a^2-1)-(a^2-4)=3,$$

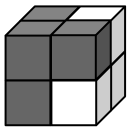
tātad $19992005 \cdot 19992003 - 19992006 \cdot 19992002 = 3$.

13.5.2. ***Atbilde:*** **a)** nē; **b)** jā.

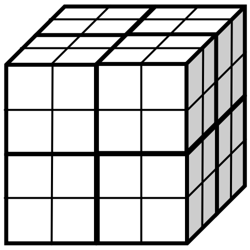
Risinājums.

a) Kubs sastāv 3x3x3 sastāv no 27 kubiņiem 1x1x1, bet dotā figūriņa – no 4 tādiem kubiņiem. Tā kā 27 nedalās ar 4, tad kubu 3x3x3 no šādām figūriņām salikt nevar.

b) No divām šādām figūriņām var salikt kubu 2x2x2 (skat. A149. zīm.), savukārt no 8 kubiņiem 2x2x2 var salikt kubu 4x4x4 (skat. A150. zīm.), tātad no 16 dotajām figūriņām var salikt kubu 4x4x4.



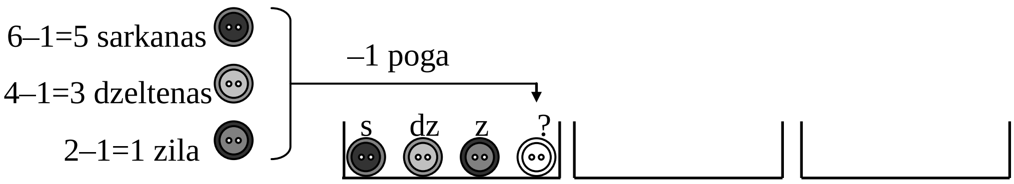
A149. zīm.



A150. zīm.

13.5.3. ***Atbilde.*** Nē, tā gadīties nevar.

Risinājums. Pirmajā kastītē ir ieliktas 4 pogas, pie tam tajā ir tieši 3 dažādu krāsu pogas. Tātad šajā kastītē ir tieši 2 vienas krāsas pogas (mēs nezinām – kuras) un pa vienai pārējo krāsu pogai (skat. A151. zīm.). Sākumā katrā krāsā bija pāra skaits pogu, tāpēc tagad ir atlikušas pāra skaits pogu vienā krāsā un nepāra skaits pogu divās citās krāsās. Bet nepāra skaitu nevar vienādi sadalīt pa divām kastītēm, tādēļ nevar gadīties tā, ka otrajā un trešajā kastītē ir vienādi pogu komplekti.



A151. zīm.

13.5.4. ***Atbilde.*** Nē, tādus skaitļus ierakstīt nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tādus skaitļus var atrast. Apzīmēsim zvaigznīšu vietā ierakstītos skaitļu ar burtiem šādā veidā:

$$2\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ 5.$$

Pirmo četru skaitļu summa ir $2+a+b+c$. Tāda pati ir arī nākamo četru skaitļu summa, t.i., $\underline{a+b+c}+d=2+\underline{a+b+c}$, tātad $d=2$. Arī summa $\underline{b+c+2}+e=\underline{2}+a+\underline{b+c}$, tātad $e=a$. Līdzīgā veidā turpinot, iegūstam, ka $\underline{c+2+e}+f=b+\underline{c+2+e}$, tātad $f=b$ un $\underline{2+e+f}+g=\underline{f}+c+\underline{2+e}$, tātad $g=c$ un skaitļu virkne ir $2abc2abc5$. Taču pēdējo četru skaitļu summa $a+b+c+5\neq a+b+c+2$.

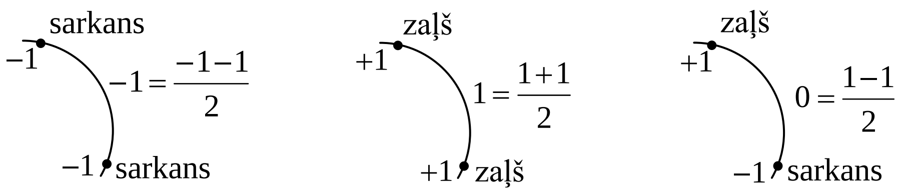
Tātad nav tādu skaitļu, ko varētu ierakstīt zvaigznīšu vietā, lai izpildītos uzdevuma prasības.

13.5.5. *Atbilde.* Visu pierakstīto skaitļu summa ir 7.

Risinājums. Pierakstīsim katram sarkanajam punktam -1, bet katram zaļajam punktam $+1$. (Skat. „Interpretāciju metode" 9. lpp.) Tādā gadījumā meklējamā summa ir vienāda ar visu punktiem pierakstīto skaitļu summu; tā ir

$$999\cdot(-1)+1006\cdot 1=7\,.$$

Pamatosim, ka tas tā tiešām ir. Katram lokam pierakstītais skaitlis ir vienāds ar abu tā galapunktiem pierakstīto skaitļu pussummu (tik tiešām, ja loka abi galapunkti ir sarkani, tad tam jāpieraksta $\big((-1)+(-1)\big):2=-1$; ja abi galapunkti zaļi, tad lokam jāpieraksta $(1+1):2=1$; ja galapunkti ir dažādās krāsās, tad lokam jāpieraksta $(-1+1):2=0$), skat. A152. zīm.



A152. zīm.

Katrs punkts ir galapunkts tieši diviem lokiem, katrā no šiem lokiem pierakstītajiem skaitļiem „ietilpst" puse no apskatāmajam punktam pierakstītā skaitļa. Tātad abiem lokiem pierakstīto skaitļu summā „ietilpst" viss punktam pierakstītais skaitlis. Tātad **visu lokiem pierakstīto skaitļu summā** ietilpst tieši divas reizes visu punktiem pierakstīto skaitļu puses jeb **tieši vienu reizi visi punktiem pierakstītie skaitļi**.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2.daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987.-2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1.daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26.-33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5.-9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1.daļa (2.izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4.-9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26.-33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9.-12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: LU, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm.** Rīga: LU, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: LU, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: LU, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: LU, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.

36. K. Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984.-1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: LU, 2009.

40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 2.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993.-2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

44. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. **Jauno matemātiķu konkurss 2000.-2005. gadā. Uzdevumi un to atrisinājumi.** Rīga: LU, 2011.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

L1. A. Bērziņš. **Praktikums elementārajā skaitļu teorijā.** Rīga: LU A.Liepas NMS, 1994.

L2. A. Andžāns, J. Čakste, T. Larfelds, L. Ramāna, M. Seile. **Vidējās vērtības metode.** Rīga: "Mācību grāmata", 1996.

L3. A. Andžāns u.c. **Dirihlē princips.** Rīga: "Mācību grāmata", 1994.

L4. A. Gailītis, A. Andžāns. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi**. Aizkraukle: Krauklītis, 1995.

L5. A. Andžāns, I. Markusa. **Vai vari atrisināt?** Algebra. Rīga: Zvaigzne ABC, 1996.

L6. A. Andžāns, A. Bērziņš. **Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi.** Rīga: Zvaigzne ABC, 1998.

L7. М. Б. Гельфанд, В. С. Павлович. **Внекласная работа по математике.** Просвещение, 1965.

L8. А. Я. Котов. **Вечера занимательной арифметики.** Просвещение, 1967.

L9. С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. **Ленинградские математические кружки.** Киров: АСА, 1994.

L10. Р. М. Смаллиан. **Алиса в стране смекалки.** Москва: Мир, 1987.

L11. E.R.Ranucci, J.L.Teeters. **Creating Escher – Type Drawings**. Creative Pubns, 1977.

PIEZĪMĒM