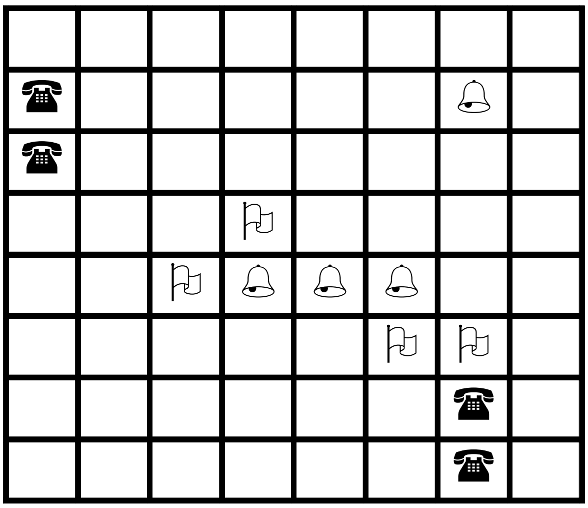
Dace Bonka, Sandra Krauze, Mārīte Seile

JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

1993. – 2000. gados

Uzdevumi un to atrisinājumi



Rīga, 2009

UDK 51(079)
Bo 510

D.Bonka, S.Krauze, M.Seile. Jauno matemātiķu konkurss 1993.-2000. gados.
Rīga: Latvijas Universitāte, 2009. – 113 lpp.

Šajā darbā apkopoti „Jauno matemātiķu konkursa” uzdevumi kopš konkursa pirmsākumiem līdz 1999./2000. m.g. ieskaitot un šo uzdevumu atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija, kā arī īss ieskats konkursa vēsturē.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Darbs izdots ar Latvijas Izglītības un Zinātnes ministrijas atbalstu.

Darbu izdošanai sagatavojusi Dace Bonka.

Grāmatu rediģēja Agnis Andžāns.

ISBN 978-9984-45-149-7

SATURS

PAR JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSU

Jauno Matemātiķu konkurss (JMK) ir matemātikas uzdevumu risināšanas neklātienes sacensības jaunāko klašu skolēniem (līdz 7.klasei ieskaitot). Mācību gada laikā parasti notiek 5 konkursa kārtas, katrā kārtā skolēniem patstāvīgai risināšanai tiek piedāvāti 5 uzdevumi. Konkursa uzdevumi tiek publicēti dažos Latgales novada laikrakstos, bet kopš 1999.gada – arī internetā LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas mājas lapā http://nms.lu.lv. Piedāvātos uzdevumus skolēni var risināt gan individuāli, gan kolektīvi. Katra mācību gada beigās konkursa uzvarētāji saņem balvas, ko sarūpējis Latviešu Nacionālais Fonds Zviedrijā.

Ideja par šādu konkursu 90.-to gadu sākumā radās Mārītei Seilei – toreizējai Preiļu 1.vidusskolas skolotājai.

Tajā laikā Latvijā jau bija populārs „Profesora Cipariņa klubs" (PCK), kura uzdevumus publicēja laikrakstā „Pionieris", vēlāk avīzē „LaBA". Latgale vienmēr ir bijusi ekonomiski vājāk attīstīta nekā pārējie Latvijas novadi. Tas saistīts gan ar tās ģeogrāfiski ne pārāk izdevīgo novietojumu, gan ar to, ka vēsturiski tai nācies atrasties vairāku kungu varā un nav bijis iespēju attīstīties patstāvīgi. Kad 90.-to gadu sākumā Latvija atguva neatkarību un sākās ekonomiskā krīze, tā īpaši smagi skāra tieši Latgali. Prese kļuva dārgāka, un arī "LaBA" vairs nebija pieejama daudziem skolēniem. Laukos parasti abonēja vienīgi rajona laikrakstus. Šis bija viens no iemesliem, kāpēc radās ideja par JMK.

Ļoti būtisks šī konkursa tapšanas apstāklis bija arī skolēnu psiholoģiskā attieksme pret PCK nodarbībām. Daudziem skolēniem, it sevišķi jaunākiem, PCK uzdevumi ir par grūtiem. Viņi nespēj tikt galā pat ne ar vienu uzdevumu, nonākot diskomfortā paši ar sevi. Tādējādi skolēnam vispār var zust interese par matemātiku un ne tikai par to, viņam var rasties mazvērtības komplekss.

Preiļu 1.vidusskolas organizētā "Jauno matemātiķu konkursa" mērķis bija ne tik daudz celt matemātisko kultūru, bet attīstīt skolēnu pašapziņu. JMK ir paredzēts 4. - 7. klašu skolēniem, taču citreiz savus risinājumus atsūta arī daudz jaunāki bērni. Šī konkursa uzdevumu komplektā ir vismaz 1 - 2 pavisam vienkārši uzdevumi, ar kuriem var tikt galā katrs skolēns. Skolēnam ir ļoti svarīgi, ka viņš spēj atrisināt uzdevumu, tātad viņš kaut ko var. Un vēl lielāks stimuls tālākajai darbībai ir skolēna uzvārda publicēšana laureātu sarakstā. Tas ne tikai ceļ skolēna pašapziņu, tas ir liels pagodinājums un prieks arī bērna vecākiem un skolotājiem.

JMK 1. kārtas uzdevumi tika publicēti 1993. gada 7. janvārī. Sākumā konkurss notika tikai Preiļu rajonā. 1994./95. mācību gadā tam pievienojās arī Krāslavas, Daugavpils, Ludzas un Balvu rajoni. Bet 1996./97. mācību gadā konkurss aptvēra Preiļu, Ludzas, Krāslavas, Daugavpils un Rēzeknes rajonus. Pateicoties uzdevumu izplatīšanai caur INTERNET, tagad konkursa uzdevumu risinātāji ir ne tikai no Latgales, bet arī no citiem Latvijas novadiem.

Pašreiz par konkursa uzdevumu izplatīšanu un skolēnu darbu labošanu rūpējas LU A. Liepas NMS līdzstrādnieces Dace Bonka un Agnese Šuste un Rudzātu vidusskolas matemātikas skolotāja Veneranda Spriņģe. Lielu darbu konkursa organizēšanā savulaik ieguldījušas arī Sandra Krauze, Kristīne Kiršteina, Inese Bērziņa, Laila Zinberga un Zane Kaibe. Tagad konkursa uzdevumi, atrisinājumi un laureātu vārdi tiek publicēti Latgales novada laikrakstā "Vietējā", kā arī LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas mājas lapā http://nms.lu.lv.

Šajā grāmatā ir apkopoti visi Jauno Matemātiķu konkursa uzdevumi ar atrisinājumiem no konkursa pirmsākumiem līdz 1999./2000. mācību gadam ieskaitot. Grāmatas sākumā ir dots arī visu uzdevumu sadalījums pa tēmām (galvenokārt – pēc risināšanas metodēm) un īsas norādes par atšķirībām *skolas* un *olimpiāžu* uzdevumu risināšanā.

Iesakām šo darbu izmantot gan skolēniem patstāvīgai risināšanai (vispirms pamēģiniet paši tikt galā ar uzdevumu un tikai tad ieskatieties risinājumā!), gan skolotājiem kā ārpusstundu darbā ar spējīgākiem skolēniem, tā arī tekošās mācību vielas apguvē uzdevumu dažādošanai.

ĪSA PAMĀCĪBA UZDEVUMU RISINĀŠANĀ

Matemātikas konkursu un olimpiāžu uzdevumi parasti būtiski atšķiras no skolas tipveida uzdevumiem. Lai gan to atrisināšanai nepieciešamās matemātisko faktu zināšanas nepārsniedz skolas kursā apgūstamās, tomēr šo uzdevumu risināšanā bieži vien jāpielieto tādi spriešanas paņēmieni, kas skolas kursā netiek īpaši akcentēti. Tāpēc šajā nodaļā apkopotas dažas biežāk lietotās metodes, kā arī dotas vispārīgas norādes par konkursu uzdevumu risināšanu un biežāk pieļautām skolēnu kļūdām.

Būtiskākais aizrādījums, it īpaši jaunāku klašu skolēniem, ir tas, ka bieži vien tiek uzrakstīta tikai uzdevuma atbilde. Taču ar to ir par maz, lai labotājs spētu saprast, vai risinātājs ir sapratis uzdevumu un atrisinājis to pareizi.

Uzdevumu veidi

Pirms ķerties pie risināšanas, **rūpīgi jāizlasa** uzdevums, pievēršot vērību katram vārdam. Apskatīsim divus vienkāršus uzdevumiņus:

A „Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 3 **un** kura pēdējais cipars ir 0” un

B „Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 3 **vai** kura pēdējais cipars ir 0”.

Doto uzdevumu teksti atšķiras tikai ar vienu vārdu, taču tas būtiski maina uzdevuma atbildi. **A** piemērā mums jāatrod tāds mazākais skaitlis, kurš **gan** beidzas ar 0, **gan** dalās ar 3; tāds ir skaitlis **30**. Savukārt **B** uzdevumā jāatrod mazākais skaitlis, kuram izpildās **vismaz viena** no šīm īpašībām: mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 3, ir 3; mazākais naturālais skaitlis, kas beidzas ar 0, ir 10. Tātad uzdevuma atbilde ir mazākais no skaitļiem 3 un 10, t.i., skaitlis **3**.

Apkoposim iegūtos secinājumus par saikļu lietojumu:

- ✓ saiklis ***un*** nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām/ nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- ✓ saiklis ***vai*** nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai/ nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības/ nosacījumi)
- ✓ saiklis ***vai nu ... ,vai*** nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** (ne vairāk un ne mazāk) minētajai īpašībai/ nosacījumam.

Tālāk aplūkosim dažus biežāk sastopamus uzdevumu veidus.

„Atrast vismazāko/ vislielāko vērtību” - šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām: **1) atrast** šo vismazāko/ vislielāko vērtību **un uzrādīt piemēru**, **2) pierādīt**, ka mazāka/ lielāka vērtība nevar būt. Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2) daļu.

„Vai var ...?” – Uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā”**, vai atbilde **„nē”**. Ja atbilde ir **„jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas. Savukārt, ja uzdevuma atbilde ir **„nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek. Nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

„Kāds var būt...?” – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi, jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības un **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

Vispārīgās matemātikas metodes

Matemātikā ir izstrādātas metodes un paņēmieni, kas der kāda noteikta veida uzdevumu vai problēmu risināšanai, bet ir arī tādas metodes, kas plaši pielietojamas daudzās dzīves jomās. Šīs metodes balstās uz vispāratzītām, cilvēces daudzu gadu simtu laikā gūtām atziņām. Tālāk īsumā apskatīsim šīs metodes.

Invariantu metode

Vārds ***invariants*** cēlies no latīņu valodas un nozīmē ***nemainīgs***. Tāpēc par ***invariantiem lielumiem/ īpašībām*** sauc lielumus/ īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.

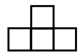
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi utml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt NAV iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

atrodam īpašību, kura PIEMĪT sākumā dotajiem lielumiem, SAGLABĀJAS, veicot pieļaujamās operācijas, bet NEPIEMĪT lielumiem, kuri būtu jāiegūst galarezultātā. (To sauc par *invarianto* īpašību.)

1. piemērs. Ar skaitli atļauts izpildīt šādas darbības: 1) pareizināt ar 3 vai 2) atņemt 9. Vai, pakāpeniski izpildot šīs darbības vairākas reizes, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 1?

Atbilde: *nē, nevar. Sākotnējais skaitlis 30 dalās ar 3; arī izpildot atļautās darbības, rezultātā iegūtie skaitļi dalīsies ar 3. Savukārt beigās iegūstamais skaitlis 1 ar 3 nedalās. Tāpēc uzdevuma prasības nav izpildāmas. Šajā piemērā* ***invariants*** *ir* ***dalīšanās ar 3****.*

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., utml. Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – ***krāsošana***, un invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

2. piemērs. Vai taisnstūri 5×4 rūtiņas var noklāt ar figūriņām  tā, lai nekādas divas figūriņas nepārklātos, taisnstūrī nepaliktu nenoklātas vietas un nekādas figūriņu daļas neizietu ārpus taisnstūra?

Atbilde: *nē, nevar. Taisnstūris sastāv no 20 rūtiņām, bet viena figūriņa – no 4 rūtiņām. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 5 figūriņām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā; pavisam melnā krāsā tiks nokrāsotas 10 (****pāra skaits****) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūriņa, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas, tātad nepāra skaitu melnu rūtiņu. Tāpēc arī 5 šādas figūriņas kopā var noklāt tikai* ***nepāra skaitu*** *melno rūtiņu. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams. Šajā piemērā* ***invariants*** *ir* ***melno rūtiņu skaits*** *– neatkarīgi no skaitīšanas secības (skaitot tās taisnstūrī vai figūriņās), vienu un to pašu objektu skaitam jābūt nemainīgam.*

Vairāk par **invariantu metodi** skat., piemēram, [1].

Šajā grāmatā **invariantu metode** ir lietota 1.1.1., 1.4.2., 1.4.3., 2.5.4., 3.1.5., 3.2.4., 4.3.1., 4.3.5., 4.4.2., 6.3.4., 7.5.4. uzdevumu risinājumos.

Vidējās vērtības metode

Vidējās vērtības metode idejiski balstās uz šādu principu: ***„Lai paveiktu lielas lietas, vismaz vienā virzienā jāsakoncentrē pietiekami lieli līdzekļi”***.

Uzdevumu risināšanā balstīsimies uz konkrētāk formulētām teorēmām. Minēsim dažas no tām.

1. Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.

2. Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.

3. Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Vidējās vērtības metodes speciālgadījums ir ***Dirihlē princips***:

ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.

Ir patiess arī vispārīgāks apgalvojums (*vispārinātais Dirihlē princips*):

ja vairāk nekā m·n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz m+1 truši.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** *būrī* un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

3. piemērs. Pierādīt, ka no jebkuriem 14 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus, kuru starpība dalās ar 13.

Risinājums. *Naturāls skaitlis, dalot ar 13, var dot 13 dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 vai 12. Dotos 14 skaitļus uzskatīsim par „trušiem”, savukārt vienā „būrī” ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13, tātad ir 13 „būri”. Saskaņā ar Dirihlē principu, 14 „trušus” izvietojot pa 13 „būriem”, vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši”; t.i., vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 13. Bet šo skaitļu starpība dalās ar 13; prasītais pierādīts.*

Vairāk par **vidējās vērtības metodi** skat., piemēram, [45], [46].

Šajā grāmatā **vidējās vērtības metode** ir lietota 3.2.2., 3.4.2., 3.4.3., 4.2.4., 6.1.3., 6.4.5., 7.5.2., 7.5.3. uzdevumu risinājumos, no tiem **Dirihlē princips** izmantots 3.2.2., 3.4.2., 3.4.3., 6.1.3., 7.5.2. uzdevumu risinājumos.

Ekstremālā elementa metode

Šīs metodes būtība balstās uz atziņu: ***kādas parādības vai cilvēka būtiskās īpašības / raksturs vislabāk atklājas ekstremālos apstākļos***.

Matemātiski tas nozīmē, ka pētot parādības vai īpašības kādā kopā (skaitļu, figūru, cilvēku utml. grupā), tās visspilgtāk izpaužas robežgadījumos: tam elementam, kurš kaut kādā veidā ir īpašs starp citiem pētāmās kopas elementiem.

Ekstremālā elementa metodi matemātikā bieži lieto neiespējamības pierādījumos. Par ekstremālo elementu var kalpot kopas lielākais/ mazākais elements, lielākā/ mazākā starpība, lielākais/ mazākais attālums starp kopas punktiem, punktu kopas izliektais apvalks utml.

4. piemērs. Vai var gadīties, ka 15 dažādi skaitļi ir izrakstīti pa apli tā, ka katrs skaitlis vienāds ar savu kaimiņu vidējo aritmētisko?

Atbilde: *nē, nevar. Apskatīsim* ***vismazāko*** *no uzrakstītajiem skaitļiem M. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi M kaimiņi A un B ir lielāki nekā M: A>M un B>M. Tātad arī skaitļu A un B vidējais aritmētiskais lielāks nekā M:* $\frac{A+B}{2} > \frac{M+M}{2} = M$. *Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar piemeklēt kaimiņus, nevar gadīties, ka 15 skaitļi uzrakstīti atbilstoši uzdevuma prasībām.*

Šajā grāmatā **ekstremālā elementa metode** visspilgtāk izpaužas 3.2.5. uzdevuma risinājumā.

Interpretāciju metode

Šīs metodes būtība slēpjas cilvēces dzīves pieredzē gūtā secinājumā: „***ja ceļā ir šķērslis, jāmēģina apiet tam apkārt***”. Uzdevumu risināšanā tas izpaužas šādi:

„***ja doto uzdevumu ar šajā nozarē pieejamiem līdzekļiem atrisināt ir sarežģīti vai neiespējami, tad doto uzdevumu aizstāj ar atbilstošu uzdevumu citā nozarē, kur atrisinājums iegūstams daudz vienkāršāk vai ir triviāls, atrisina jauno uzdevumu un rezultātu “tulko” atpakaļ uz sākotnējo “valodu”***”.

Risinot uzdevumu ar interpretāciju metodes palīdzību, rīkojas pēc šāda plāna:

1. izvēlas atbilstošu interpretāciju (tas parasti ir vissarežģītākais etaps visā risinājumā);

2. “pārtulko” visus dotos lielumus un sakarības;

3. pārliecinās, ka interpretācija ir korekta;

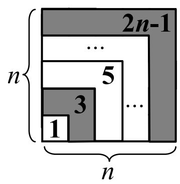
4. atrisina jauno uzdevumu;

5. rezultātu “tulko” atpakaļ.

Kā redzam, lai uzdevumu risināšanā veiksmīgi lietotu interpretāciju metodi, nepieciešamas labas zināšanas daudzās matemātikas (un ne tikai) nozarēs, kā arī labi jāizprot saistība starp lielumiem dažādās nozarēs. Tāpēc interpretāciju metode vairāk ir izmantojama vecākās klasēs.

5. piemērs. Pierādīt, ka $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Pierādījums. *Skaties zīmējumu!*



Jaunāko klašu skolēniem uztverami un lietojami interpretāciju piemēri ir teksta uzdevumu risināšana, izmantojot *grafus* (piemēram, 1.1.3., 3.3.5., 4.3.1., 8.5.4. uzdevumu risinājumos), algebrisku izteiksmju aprēķināšana vai pārveidošana, izmantojot laukumus, uzdevuma nosacījumu attēlošana *Eilera-Venna diagrammā* (piemēram, 7.2.5. uzdevuma risinājumā) u.c.

Par ***grafu*** sauc *zīmējumu, kas sastāv no punktiem, no kuriem daži pa pāriem ir savienoti ar līnijām*. Gandrīz vienmēr ir izdevīgi zīmēt grafu, ja uzdevumā ir runa par, piemēram, cilvēkiem, kas savā starpā draudzējas, ir pazīstami utml., par ceļu vai avioreisu sistēmu starp vairākām pilsētām utml. – t.i., gadījumos, kad var pastāvēt vai nepastāvēt attiecības starp diviem *objektiem*. Zīmējot atbilstošo grafu, parasti *objektus* attēlo ar punktiem – tos sauc par *grafa virsotnēm*, un ja starp diviem *objektiem* pastāv uzdevumā minētās attiecības, tad atbilstošos punktus (*virsotnes*) savieno ar līniju – to sauc par *grafa šķautni*. Bieži vien, domājot par uzskatāmo zīmējumu, vieglāk nekā citā ceļā var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai atbilstošā grafa neiespējamību.

Šajā grāmatā **interpretāciju metode** ir lietota 1.1.3., 3.1.5., 3.3.5., 4.3.1., 7.2.5., 8.5.4. uzdevumu risinājumos.

Matemātiskā indukcija

Matemātiskās indukcijas metode ļauj izdarīt spriedumus no atsevišķu elementu īpašībām par visu kopu.

Lietojot matemātisko indukciju uzdevumu risināšanā rīkojas pēc šāda plāna:

pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*induktīvā bāze*);

pieņem, ka šī īpašība ir spēkā arī pirmajiem k elementiem (*induktīvā hipotēze*) un

pierāda, ka tad tā ir patiesa arī (k+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).

Matemātiskās indukcijas metode pamatā ir lietojama pierādījuma uzdevumos, un tās prasmīga lietošana prasa labi attīstītas spriešanas spējas un diezgan lielu matemātisko zināšanu bagāžu. Tāpēc jaunāko klašu skolēniem paredzēto uzdevumu risināšanā matemātiskā indukcija tiek izmantota retāk nekā citas metodes.

Matemātiskās indukcijas metodes lietojuma piemērus skat. 1.1.5., 5.5.4. uzdevumu risinājumos.

Mazliet no skaitļu teorijas

Skaitļu teorija ir matemātikas nozare, kas pēta **veselo** skaitļu dalāmību. Saka, ka skaitlis *a* dalās ar skaitli *b* (apzīmē $a \vdots b$), ja $b \neq 0$ eksistē tāds vesels skaitlis *c*, ka $a = b \cdot c$.

Atcerieties! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par **veseliem** skaitļiem. Skaitlis 0 ir vesels skaitlis, bet nav naturāls skaitlis.

Dalāmības īpašības

Visi tālāk pieminētie skaitļi ir veseli.

1. Ja *a* dalās ar *c* un *b* dalās ar *c*, tad arī skaitļu *a* un *b* summa un starpība dalās ar *c*.
2. Ja *a* dalās ar *b*, tad arī skaitļa *a* reizinājums ar jebkuru veselu skaitli *k* dalās ar *b*.
3. Ja *a* dalās ar *b* un *b* dalās ar *c*, tad *a* dalās ar *c*.
4. Ja *a* dalās ar *c* un *b* dalās ar *d*, tad $a \cdot b$ dalās ar $c \cdot d$.

Dalāmības pazīmes

Risinot praktiskus uzdevumus, bieži ir nepieciešams novērtēt, vai dotie skaitļi dalās viens ar otru. Tālāk tiks norādītas pazīmes dalāmībai ar dažiem skaitļiem.

1. Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars dalās ar 2 (t.i., ir pāra cipars: 0, 2, 4, 6 vai 8).
2. Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.
3. Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējie divi cipari veido skaitli, kas dalās ar 4. (Piemēram, 756**48** dalās ar 4, jo 48 dalās ar 4.)

4. Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējie trīs cipari veido skaitli, kas dalās ar 8. (Piemēram, 5627**104** dalās ar 8, jo 104 dalās ar 8.)

5. Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3. (Piemēram, 143568 dalās ar 3, jo 1+4+3+5+6+8=27 dalās ar 3.)

   Līdzīga pazīme arī dalāmībai ar 9:

6. Skaitlis dalās ar 9, jā tā ciparu summa dalās ar 9. (Piemēram, 143568 dalās arī ar 9, jo 1+4+3+5+6+8=27 dalās ar 9.)

7. Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu, kas atrodas pāra pozīcijās, summas un ciparu, kas atrodas nepāra pozīcijās, summas starpība dalās ar 11. (Piemēram, 1**7**5**3**3**9**1**2** dalās ar 11, jo (7+3+9+2)-(1+5+3+1)=21-10=11 dalās ar 11.)

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par *pirmskaitli* sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis. Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.

Aritmētikas pamatteorēma. *Katru naturālu skaitli, kas lielāks par 1, var vienā vienīgā veidā izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu, ja neinteresējas par reizinātāju kārtību.*

Piemēram, $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Iegūto pirmskaitļu reizinājumu sauc par skaitļa *sadalījumu pirmreizinātājos*.

Vairāk par skaitļu teorijas jautājumiem skat., piemēram, [44].

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie ir sadalīti 4 grupās pa tēmām: skaitļu teorija, ģeometrija, algebra un kombinatorika.

Katra no šīm grupām ir sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 4. – 7. klašu skolēniem, tad metodes izvēle ir atkarīga no skolēnu vecuma un tajā brīdī viņiem pieejamām zināšanām.

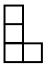
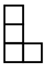
ALGEBRA	
Algebriskie pārveidojumi, darbības ar skaitļiem:	1.2.5., 1.3.1., 2.5.3., 2.6.3., 3.3.1., 5.4.2., 5.4.3., 6.4.1., 8.3.3., 8.4.1., 8.4.2.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas:	1.3.3., 2.1.1., 2.3.3., 2.6.1., 5.3.5., 6.5.2., 7.3.5., 7.4.5.,
Uzdevumi par kopīgo darbu:	2.6.4.
Attiecības, tiešā un apgrieztā proporcionalitāte:	6.1.4., 7.3.3., 7.4.3.
Skaitļu, ciparu virknes:	1.1.5., 2.3.2., 2.5.5., 3.4.1., 4.4.4., 8.1.1.
Procenti:	5.2.4., 5.3.5., 6.4.4., 7.1.2., 8.1.3., 8.5.5.
Grupēšana:	1.4.1., 2.1.4.
Sakarības starp lielumiem:	2.3.4., 3.1.4.
Dažādi teksta uzdevumi:	1.2.1., 2.2.1., 3.1.1., 3.2.1., 4.1.2., 5.1.3., 5.3.1., 5.4.5., 7.3.4., 8.2.1., 8.3.1., 8.3.5., 8.4.4.
ĢEOMETRIJA	
Ģeometriskās figūras, to elementi, perimetrs, laukums:	1.2.2., 2.2.4., 5.2.4., 5.3.4.
Trijstūra nevienādība:	6.4.2., 8.2.2.
Konstrukcijas uzdevumi, papīra locīšana:	3.3.2., 4.4.5., 6.5.5., 7.3.2.
Kombinatoriskā ģeometrija:	1.4.5., 2.5.1., 3.1.2., 3.4.4., 4.1.1., 4.2.1., 4.4.1., 5.2.1., 6.2.1., 6.3.2., 7.1.3., 7.2.4., 8.1.2.
Ekstremālā elementa metode:	3.2.5.
Uzdevumi par figūru sagriešanu un salikšanu:	1.1.1., 1.2.4., 1.3.2., 2.2.5., 2.3.1., 2.4.5., 2.6.2., 3.5.2., 3.5.4., 4.1.4., 4.1.5., 5.1.2., 5.4.4., 6.1.2., 6.3.4., 6.5.3., 7.2.2., 7.4.2., 7.5.5., 8.2.4., 8.3.2., 8.4.3.
Invarianti, krāsošana:	1.1.1., 2.4.4., 3.2.4., 4.3.5., 6.2.4., 6.3.4.
Matemātiskā indukcija:	5.4.4.

SKAITĻU TEORIJA	
Skaitļu dalāmība, atlikumi:	1.1.5., 1.2.3., 1.4.4., 2.2.3., 2.4.3., 5.1.4., 7.2.1., 7.3.1., 8.5.1.
Skaitļa sadalījums reizinātājos, pakāpju īpašības:	1.3.4., 2.1.5., 3.2.3., 3.3.3., 5.2.2., 6.3.1.
Skaitļa decimālais pieraksts:	2.1.2., 2.1.3., 8.2.5., 8.5.3.
Vienādojumi veselos skaitļos:	4.1.3., 5.2.3., 6.2.2.
Binārā skaitīšanas sistēma:	6.3.5.
Dirihlē princips:	3.4.2.
Invarianti:	1.4.2., 2.5.4., 3.1.5., 4.4.2.
Skaitļu rēbusi:	2.4.1., 4.2.2., 5.4.1., 6.2.3., 6.4.3., 6.5.1., 7.1.1., 7.4.1., 7.5.1.
Gadījumu pārlase:	1.1.2.
KOMBINATORIKA	
Objektu skaitīšana:	2.4.2., 3.1.3., 3.5.3., 5.1.5., 5.2.1., 5.2.2., 5.2.5., 5.3.3., 6.2.5., 6.5.4., 7.1.5., 7.4.4., 8.3.4., 8.5.2.
Uzdevumi, kas reducējas uz grafiem:	1.1.3., 3.3.5., 4.3.1., 8.5.4.
Kombinatoriskās sistēmas:	4.3.2., 5.3.2.
Invariantu metode:	1.4.3., 4.3.1., 7.5.4.
Vidējās vērtības metode:	4.2.4., 6.4.5., 7.5.3.
Dirihlē princips:	3.2.2., 3.4.3., 6.1.3., 7.5.2.
Interpretāciju metode:	3.1.5., 7.2.5.
Gadījumu pārlase:	5.1.1.
ALGORITMIKA	
Algoritma analīze:	4.2.3., 6.1.1., 7.1.4., 8.4.5.
Algoritma atšifrēšana:	3.5.5., 8.1.5., 8.2.3.
Algoritma izstrāde:	2.5.2., 4.2.5., 6.3.3.
Turnīri, svēršanas u.c.	2.3.5., 4.4.3., 6.1.5.
Spēles:	2.6.5., 3.3.4.
Loģiska satura uzdevumi:	1.3.5., 2.2.2., 3.4.5., 3.5.1., 4.3.3., 4.3.4., 7.2.3.

UZDEVUMI

1992./93. mācību gads

1. kārta

1.1.1. Vai šokolādes tāfelīti, kas sastāv no 8×8 vienādiem kvadrātiņiem, var salauzt **a)** 16 gabaliņos , **b)** 15 gabaliņos  un vienā gabaliņā ?

1.1.2. Divi paziņas, Jānis un Pēteris, nav redzējušies daudzus gadus. Satikušies viņi nevar vien beigt sarunu, un Jānis palielās Pēterim, ka viņam jau ir trīs bērni. "Cik tad viņiem gadu?" jautā Pēteris. "Viņu gadu skaitu reizinājums ir 36, bet gadu skaitu summa ir vienāda ar, lūk, šī autobusa numuru," atbild Jānis. Paskatījies uz garāmbraucošā autobusa numuru, Pēteris saka, ka ar šīm ziņām viņam nepietiek, lai noskaidrotu bērnu vecumu. "Bet vecākais bērns man ir zilacis," vēl piebilst Jānis. "Tad es zinu, cik gadu ir taviem bērniem!" iesaucas Pēteris un precīzi nosauc katra bērna vecumu pilnos gados. Cik veci ir Jāņa bērni?

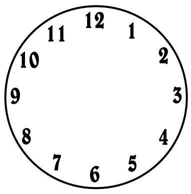
1.1.3. Kādā valstī ir 50 pilsētas, starp kurām izveidots aviolīniju tīkls tādā veidā, ka no katras pilsētas uz citu var nokļūt, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos. Pie tam, ja starp pilsētām A un B eksistē aviolīnija, tad tā izmantojama lidošanai abos virzienos, bet šīs aviolīnijas lidmašīnas pa ceļam nenolaižas nevienā citā pilsētā. Kāds mazākais skaits aviolīniju var būt šajā valstī?

1.1.4. Kādi ir reizinājuma $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot16\cdot17\cdot18$ trīs pēdējie cipari?

1.1.5. Virknē 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… katrs tās loceklis (sākot ar trešo) ir vienāds ar abu iepriekšējo summu. Pēc kāda likuma sastādīta virkne 3, 4, 7, 14, 29, 60, 123,…? Uzraksti vēl vismaz piecus virknes locekļus!

2. kārta

1.2.1. Sadali apļa pulksteņa ciparnīcu (skat. 1. zīm.) 3 daļās tā, lai katrā daļā ierakstīto skaitļu summa būtu 17! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

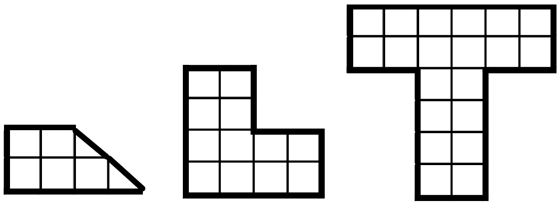


1. zīm.

1.2.2. Taisnstūra malu garumi ir izteikti ar naturāliem skaitļiem. Kādiem jābūt šiem skaitļiem, lai taisnstūra perimetrs būtu skaitliski vienāds ar laukumu? Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

1.2.3. Klasē mācās mazāk nekā 50 skolēnu. Par kontroldarbu $\frac{1}{7}$ skolēnu saņēma "9", $\frac{1}{3}$ skolēnu - "8", $\frac{1}{2}$ skolēnu - "7". Pārējo skolēnu darbi izrādījās neapmierinoši. Cik bija neapmierinošo darbu?

1.2.4. Sagriez katru no 2. zīm. parādītajām figūrām 4 vienādās daļās! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt. Griezumi var arī neiet pa rūtiņu līnijām.

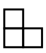


2. zīm.

1.2.5. Papīra lapu drīkst saplēst 8 vai 12 gabaliņos. Katru jauniegūto gabaliņu atkal drīkst saplēst 8 vai 12 gabaliņos vai atstāt nesaplēstu, utt. Vai, šādi darbojoties, var iegūt **a)** tieši 61 papīra gabaliņu, **b)** tieši 1993 papīra gabaliņus?

3. kārta

1.3.1. Cīņā devās Karaļdēls ar trīsgalvaino un trīsastaino Pūķi. "Lūk, tev zobens," teica ragana, "ar vienu cirtienu Tu vari Pūķim nocirst vai nu vienu galvu, vai divas galvas, vai vienu asti, vai divas astes. Atceries: nocirtīsi galvu - jauna izaugs, nocirtīsi asti - divas jaunas izaugs, nocirtīsi divas astes - galva izaugs, nocirtīsi divas galvas - nekas neizaugs!" Vai Karaļdēls var nocirst Pūķim visas galvas un visas astes?

1.3.2. Vai kvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas, no kura izgriezta vidējā rūtiņa, var sagriezt "stūrīšos" ?

1.3.3. Mauglis palūdza saviem draugiem - pērtiķiem -atrast viņam riekstus. Pērtiķi savāca katrs vienādu skaitu riekstu un nesa tos Mauglim. Ceļā pērtiķi sastrīdējās un katrs pērtiķis katram citam meta ar vienu riekstu. Rezultātā Mauglis dabūja tikai 33 riekstus. Cik riekstu savāca katrs pērtiķis pirms ķīviņa? (Pērtiķis nevar panest vairāk kā 20 riekstus.)

1.3.4. Divus skaitļus sauc par spoguļskaitļiem, ja vienu skaitli iegūst no otra, pārliekot ciparus pretējā kārtībā. (Piemēram, skaitļi 563 un 365 ir spoguļskaitļi.) Atrodi kaut vienu spoguļskaitļu pāri, kuru reizinājums ir 92565!

1.3.5. Uzdevuma darbība risinās uz salas, kuras iedzīvotāji ir godīgie, kas vienmēr runā taisnību, un meļi, kas vienmēr melo. Iedomājieties, ka salas valodā vārdi "*jā*" un "*nē*" skan kā "**tip**" un "**top**", bet nav zināms, kurš vārds ko nozīmē. Kā, uzdodot iezemietim vienu jautājumu, noskaidrot, vai viņš ir melis vai godīgais?

4. kārta

1.4.1. Aprēķini izteiksmes 1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+…+301+302 vērtību!

1.4.2. No grāmatas izplēsa vienu fragmentu, t.i., vairākas pēc kārtas ņemtas lappuses. Šī fragmenta pirmā lappuse ir 387., bet pēdējās lappuses numurs sastāv no tiem pašiem cipariem, tikai uzrakstītiem citā secībā. Cik lappušu ir izplēstajā fragmentā?

1.4.3. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt visus lauciņus, katrā nonākot tieši vienu reizi, un ar pēdējo gājienu atgriezties uz lauciņa, kur viņš atradās sākumā, ja galdiņa, pa kuru tas staigā, izmēri ir **a)** 7×9 lauciņi; **b)** 4×8 lauciņi?

1.4.4. Atrodi kaut vienu skaitli, kurš beidzas ar ciparu 8 un kurš ir divu vai vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums!

1.4.5. Visi riņķa līnijas punkti atrodas vienādā attālumā no tās centra. Vai eksistē noslēgta līnija, kura nav riņķa līnija, bet kuras visi punkti atrodas vienādā attālumā no kāda punkta P?

1993./94. mācību gads

1. kārta

2.1.1. Annas tante ļoti mīl dzīvniekus. Visi viņas dzīvnieki, izņemot divus, ir suņi; visi, izņemot divus, ir papagaiļi; visi, izņemot divus, ir kaķi. Visi dzīvnieki, kas nav ne suņi, ne kaķi, ne papagaiļi, ir tarakāni. Cik dzīvnieku ir Annas tantei?

2.1.2. Uzraksti rindā vienu aiz otra bez atstarpēm pirmos 10 pirmskaitļus augošā secībā. Iegūtajā skaitlī nosvītro pusi ciparu tā, lai iegūtu **a)** vislielāko iespējamo skaitli; **b)** vismazāko iespējamo skaitli.

2.1.3. Izdomā kaut vienu tādu desmitciparu skaitli, kura pirmais cipars rādītu, cik šajā skaitlī ir vieninieku, otrais – cik šajā skaitlī ir divnieku, trešais – cik šajā skaitlī ir trijnieku, …, devītais – cik šajā skaitlī ir devītnieku, desmitais – cik šajā skaitlī ir nuļļu!

2.1.4. No atsvaru komplekta 1 *g*, 2 *g*, …, 101 *g* pazuda atsvars ar masu 19 *g*. Vai atlikušos atsvarus var salikt divās kaudzītēs pa 50 atsvariem katrā tā, lai abu kaudzīšu masas būtu vienādas?

2.1.5. Sakārto skaitļus $a = 2^{45}, b = 3^{36}, c = 4^{27}, d = 5^{18}$ augošā secībā! ($a = 2^{45}$ nozīmē $a = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{45 \text{ divnieki}}$ u.tml.)

2. kārta

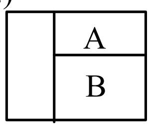
2.2.1. Zemniekam ir 12 *l* kanna, pilna ar pienu. Kā šo pienu sadalīt divās vienādās daļās, ja zemniekam vēl ir divi tukši trauki: 8 *l* spainis un 5 *l* kanniņa? (Nekādus citus traukus izmantot nedrīkst.)

2.2.2. Katrā no trijām atvilktnēm ir pa divām cepurēm: vienā - divas baltas, otrā - divas melnas, trešajā - viena balta un viena melna. Nav zināms, kādas cepures kurā atvilknē ir. Pie katras atvilktnes ir piestiprināts viens no zīmējumiem , ,  (pie katras atvilktnes cits). Ir zināms, ka nevienā atvilktnē cepuru krāsas neatbilst aplīšu krāsām, kuras attēlotas attiecīgās atvilktnes zīmējumā. Kā, izņemot tikai vienu cepuri no vienas atvilktnes, zīmējumus var samainīt tā, lai katra zīmējuma saturs atbilstu attiecīgās atvilktnes saturam?

2.2.3. Atrodi tādu pirmskaitli *p*, ka $2p+1$ un $4p+1$ arī ir pirmskaitļi, un pierādi, ka citu tādu pirmskaitļu nav!

2.2.4. Kāds lielākais daudzums divpadsmitstūra virsotņu var atrasties uz vienas taisnes?

2.2.5. Sagriez taisnstūri **a)** 5 taisnstūros, **b)** 1993 taisnstūros tā, lai nekādi divi taisnstūri abi kopā neveidotu taisnstūri! (Piemēram, nedrīkst izveidoties 3. zīm. attēlotā situācija, jo A un B abi kopā veido taisnstūri.)



3. zīm.

3. kārta

2.3.1. Vai baranku var sagriezt astoņos vienādos gabalos ar trim taisniem naža griezieniem? (Pēc katra grieziena gabaliņus nedrīkst izkustināt no vietas!)

2.3.2. Tabulā, kas attēlota 4. zīm., pirmajā rindiņā un pirmajā kolonnā ierakstīti pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Noskaidro, kā tiek iegūti pārējie skaitļi un kāds skaitlis jāieraksta "?" vietā!

1	2	3	4	5
2	5	10	17	26
3	10	25	52	95
4	17	52	129	276
5	26	95	276	?

4. zīm.

2.3.3. Cik sver zivs, ja ir zināms, ka tās aste sver 4 *kg*; galva sver tikpat, cik aste un puse no ķermeņa kopā; ķermenis sver tikpat, cik galva un aste kopā?

2.3.4. Rūķītis Saldumiņš un rūķītis Rūgtumiņš devās no Lielās egles uz savām kopējām mājām. Rūgtumiņš skrēja pusi no ceļa un otru pusi gāja soļiem. Saldumiņš pusi no laika, kas viņam vajadzīgs, lai nokļūtu no Lielās egles līdz mājām, skrēja, bet otru pusi laika gāja soļiem. Kas pirmais nokļuva mājās, ja zināms, ka Saldumiņš iet tikpat ātri kā Rūgtumiņš un arī viņu skriešanas ātrumi ir vienādi?

2.3.5. Vāvere salasīja 81 riekstus. Žagata viņai pačukstēja, ka 80 riekstiem ir vienāds svars, bet viens rieksts ir vieglāks par pārējiem. Vāverei ir sviras svari bez atsvariem. Palīdzi vāverei atrast vieglāko riekstu tikai ar 4 svēršanām!

4. kārta

2.4.1. Aizstāj zvaigznītes ar cipariem (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai iegūtu pareizu vienādību: $1994 \times * = *****$!

2.4.2. Skudriņa Tipa atrodas 7×7 rūtiņu kvadrātā augšējā kreisajā stūrī. Pa cik dažādiem ceļiem Tipa var aiziet uz apakšējo labo stūri, ja viņa drīkst iet tikai pa rūtiņu līnijām (pie tam divos virzienos - uz labo pusi vai uz leju, ejot par cik rūtiņām vēlas un mainot šos virzienus cik patīk bieži).

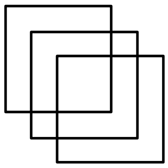
2.4.3. Trollīšu valstī visas preces maksā veselu skaitu tilleru, pie tam tās nav lētākas par 8 tilleriem. Pierādi, ka trollīši var nopirkt jebkuru preci, samaksājot precīzu tās vērtību un nesaņemot atlikumu, ja viņu rīcībā ir tikai 3-tilleru un 5-tilleru monētas neierobežotā daudzumā!

2.4.4. Ģeogrāfijas kartes parasti tiek drukātas vairākās krāsās. Katra valsts tiek krāsota kādā vienā krāsā. Pie tam valstis, kurām ir kopīga robeža, tiek krāsotas dažādās krāsās. Uzzīmē tādas kartes piemēru, kur nepietiek ar trijām krāsām, lai to izkrāsotu atbilstoši iepriekš nosauktajām prasībās! (Kopējo robežu kartē attēlo līnija; tikai vienu kopēju punktu par robežu neuzskata).

2.4.5. Vai kvadrātu var sagriezt piecos piecstūros?

5. kārta

2.5.1. Vai 5. zīm. parādīto figūru var uzzīmēt, neatraujot zīmuli no papīra, tā, lai uzvilktā līnija nekur nekrustotu pati sevi? Katru līnijas posmu drīkst vilkt tikai vienu reizi.



5. zīm.

2.5.2. Četri kungi un četras dāmas atrodas vienā upes krastā. Viņu rīcībā ir laiva, kurā drīkst braukt ne vairāk kā divi cilvēki. Vai viņi visi var nokļūt otrā krastā, ja 1) airēt prot tikai kungi, 2) dāma var palikt krastā vai nu viena pati, vai vēl vismaz vienas dāmas sabiedrībā (t.i., vairākas dāmas krastā ir ar mieru uzturēties kungu sabiedrībā, bet dāma viena pati kungu sabiedrībā nepaliek)?

2.5.3. Kā septiņus vienādus ābolus sadalīt 12 bērniem tā, lai viņi visi dabūtu vienādu daudzumu ābolu? Katru ābolu drīkst griezt ne vairāk kā četrās daļās. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

2.5.4. Atrodi m un n, ja zināms, ka tie ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi un to kvadrātu starpība ir 200!

2.5.5. Visi naturāli skaitļi pēc kārtas uzrakstīti rindā, neievērojot atstarpi starp tiem: 12345678910111213141516171819….. Iegūtās ciparu rindas piecpadsmitais cipars ir 2, divdesmitais cipars ir 1 u.tml. Kāds ir šīs virknes 1994-ais cipars?

6. kārta

2.6.1. *Arābu matemātiķa Beg-ed-Dina uzdevums.*
Atrodi naturālu skaitli, kuru pareizinot pašu ar sevi, pēc tam pieskaitot 2, pēc tam pareizinot ar 2, pēc tam pieskaitot 3, pēc tam izdalot ar 5 un visbeidzot pareizinot ar 10, iegūst 50!

2.6.2. Vai 5×6 rūtiņu taisnstūrī var sagriezt gabaliņos □□ tā, lai neviena taisna griezienа līnija neietu no vienas taisnstūra malas līdz otrai?

2.6.3. Septiņu dažādu naturālu skaitļu a, b, c, d, e, f, g vidējais aritmētiskais ir 7. Pieņemsim, ka g ir vislielākais no šiem skaitļiem. Kāda ir lielākā iespējamā šī skaitļa g vērtība?

2.6.4. Ja ūdens plūst pa pirmo cauruli, tad tas tvertni piepilda vienā dienā, ja pa otro cauruli, tad - divās dienās, ja pa trešo, tad - trijās dienās, ja pa ceturto, tad - četrās dienās. Cik ilgs laiks paies, piepildot baseinu, ja ir atvērtas visas četras caurules?

2.6.5. *Sena Ķīnas spēle "Cjan-šic-dzi".*
Spēlē piedalās divi spēlētāji, kuri gājienus izdara pēc kārtas. Izdarīt gājienus nozīmē ņemt akmeņus no divām kaudzēm. Akmeņi jāņem, ievērojot sekojošus likumus. Drīkst ņemt
a) vai nu vienalga cik akmeņus no 1. kaudzes (drīkst ņemt arī uzreiz visus akmeņus),
b) vai arī vienalga cik akmeņus no 2. kaudzes (varbūt visus),
c)vai arī no abām kaudzēm vienādu skaitu akmeņu (piemēram, no pirmās kaudzes četrus un no otrās arī četrus).
Tas, kuram vairs nav ko ņemt, zaudē.
Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt, pareizi spēlējot, ja sākumā bija:
a) 1. kaudzē -7 akmeņi; 2. kaudzē - 5 akmeņi,
b) 1. kaudzē - 10 akmeņi, otrajā kaudzē - 6 akmeņi?

1994./95. mācību gads

1. kārta

3.1.1. Kāds ir lielākais iespējamais svētdienu skaits gadā?

3.1.2. Vai uz papīra lapas var izvietot sešus punktus un savienot tos ar nogriežņiem, kuri nekrustojas, tā, lai katrs punkts būtu savienots tieši ar **a)** trijiem, **b)** četriem punktiem?

3.1.3. Zaļais Rūķis visus četrciparu skaitļus, kuru uzrakstīšanai izmantoti tikai cipari 2 vai 4 (var būt tikai viens no tiem), sauc par skaistiem. Cik ir skaisto skaitļu un kāda ir to summa?
Savukārt Rozā Rūķītis visus sešciparu skaitļus, kuru uzrakstīšanai izmantoti tikai cipari 2 vai 4, sauc par lieliskajiem. Cik ir lielisko skaitļu un kāda ir to summa?

3.1.4. No pilsētas A uz pilsētu B vienlaicīgi izbrauca motociklists un velosipēdists. Kad velosipēdists bija nobraucis trešo daļu ceļa, viņš apstājās un gaidīja, kamēr motociklistam līdz pilsētai B atliks trešā daļa ceļa. Šajā brīdī velosipēdists sāka braukt atpakaļ uz pilsētu A. Motociklists, aizbraucis līdz pilsētai B, uzreiz apgriezās un brauca atpakaļ uz A. Kurš pirmais nonāks pilsētā A?

3.1.5. Uz tāfeles uzzīmēti 6 kaķīši un 7 sunīši. Ar vienu gājienu drīkst vai nu nodzēst vienu sunīti, vai arī nodzēst divus kaķīšus un to vietā uzzīmēt vienu sunīti. Pierādīt: ja uz tāfeles paliks tikai viens dzīvnieciņš, tad tas noteikti būs sunītis.

2. kārta

3.2.1. Četras meitenes – Ieva, Santa, Aiga un Liene – piedalījās koncertā, kurā viņas dziedāja. Katru dziesmu dziedāja tieši trīs meitenes. Ieva nodziedāja 8 dziesmas – vairāk nekā citas meitenes, bet Santa – 5 dziesmas, mazāk nekā citas meitenes. Cik dziesmas tika nodziedātas koncertā?

3.2.2. Vairākas kastes kopā sver 10 t, pie tam neviena kaste nesver vairāk par 1 t. Cik kravas mašīnas var būt izmantojamas, lai vienlaicīgi aizvestu visu kravu, ja vienā mašīnā drīkst likt smagumu, kas nav lielāks par 3 t? (Kastu saturu aizliegts pārvietot no vienas kastes otrā.)

3.2.3. Vai skaitli **a)** 23, **b)** 203 var izteikt kā vairāku (vismaz divu) naturālu skaitļu summu tā, lai arī šo pašu skaitļu reizinājums būtu **a)** 23, **b)** 203?

3.2.4. Dotas 25 vienādas apaļas monētas. Vai tās ir iespējams salikt uz galda tā, lai tās negultos cita citai virsū un lai katra monēta pieskartos tieši 3 citām? (Monētas uz galda noliktas ar apaļo virsmu, nevis uz apkārtējās maliņas.)

3.2.5. Taisnstūrī, kura izmēri ir 11×7 rūtiņas, atzīmēti vairāki kvadrāti. Katra kvadrāta malas iet pa rūtiņu līnijām. Neviens no šiem kvadrātiem pilnīgi nepārklāj citu kvadrātu. Kāds ir lielākais iespējamais atzīmēto kvadrātu skaits?

3. kārta

3.3.1. Izsaki skaitli $\frac{1}{1995}$, izmantojot tieši četrus skaitļus 1994 un aritmētisko darbību zīmes +; -; ×; ÷ (ne obligāti visas)! Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

3.3.2. Kā, lokot papīra lapu, kuras izmēri ir $8\frac{1}{2}cm \times 11cm$, atlikt precīzi 3 cm? (Izmantot lineālu vai kādas citas palīgierīces nedrīkst.)

3.3.3. Kāds ir mazākais N, lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ dalītos ar 1995?

3.3.4. Dotas divas riekstu kaudzes. Pirmajā kaudzē ir 995 rieksti, bet otrajā - 1995 rieksti. Vienā gājienā drīkst paņemt jebkuru riekstu daudzumu no vienas kaudzes. Divi spēlētāji gājienus izdara pārmaiņus. Zaudē tas, kam nav ko ņemt. Kurš no diviem spēlētājiem uzvar pareizi spēlējot: tas, kurš izdara pirmo, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

3.3.5. Katram parlamenta loceklim starp pārējiem ir ne vairāk kā trīs ienaidnieki. Pierādi, ka parlamentu var sadalīt divās palātās tā, ka katram parlamentārietim savā palātā būs ne vairāk kā viens ienaidnieks. (Ja A ir ienaidnieks B, tad B ir ienaidnieks A.)

4. kārta

3.4.1. Viens meistars uz lentas izdara atzīmes ar zilu zīmuli ik pēc 36 *cm* (pirmo atzīmi viņš izdara, mērot no lentas sākuma). Otrais meistars līdzīgi ar sarkanu zīmuli izdara atzīmes ik pēc 25 *cm*. Vai var gadīties, ka kādā vietā uz lentas zilā atzīme būs 1 *cm* attālumā no kādas sarkanās atzīmes? Pieņemam, ka lenta ir cik patīk gara.

3.4.2. **a)** Pierādi, ka starp skaitļiem no 1 līdz 46 var atrast 10 tādus skaitļus, ka jebkuru divu starpība dalās ar 5!

b) Pierādi, ka starp patvaļīgiem 46 skaitļiem var atrast 10 tādus skaitļus, ka jebkuru divu skaitļu starpība dalās ar 5!

3.4.3. Pierādi, ka katrā kompānijā noteikti var atrast divus cilvēkus, kuriem šajā kompānijā ir vienāds paziņu skaits! (Ja A pazīst B, tad B pazīst A.)

3.4.4. Izkrāso plakni trijās krāsās tā (jāizmanto visas trīs krāsas), lai uz katras taisnes būtu ne vairāk kā divas krāsas!

3.4.5. Kastītē ir dažādu garumu un dažādu krāsu zīmuļi. Pierādi, ka starp šiem zīmuļiem noteikti var atrast divus zīmuļus, kuriem ir gan atšķirīga krāsa, gan atšķirīgs garums!

5. kārta

3.5.1. Četri zēni - Aldis, Pēcis, Didzis un Mārcis sacentās skriešanā. Nākamajā dienā uz jautājumu, kurš ieņēmis kādu vietu, sekoja šādas atbildes:

Aldis: ”Es nebiju ne pirmais, ne arīdzan pēdējais.”
Pēcis: “Es nebiju pēdējais.”
Didzis: "Es biju pirmais."
Mārcis: “Es biju pēdējais.”

Ir zināms, ka trīs zēni runāja taisnību, bet viens zēns meloja. Kurš zēns meloja? Kurš uzvarēja sacensībās?

3.5.2. Paklājā, kura izmēri ir 4×4 metri, kodes izgrauzušas 15 punktveida caurumus. Vai no šī paklāja noteikti varēs izgriezt mazāku paklāju ar izmēriem 1×1 metri, kurš nebūs bojāts? (Kvadrāts, kurā caurumiņi izgrauzti tikai uz malas, neskaitās bojāts.)

3.5.3. Cik ir tādu desmitciparu skaitļu, kuru pieraksts sastāv no cipariem 2 un 5, pie tam divi divnieki nevienā vietā neatrodas blakus?

3.5.4. Kāds mazākais taisnu griezienu skaits jāizdara, lai kubu 3×3×3 sagrieztu 27 mazākos kubiņos 1×1×1? (Pēc katra grieziena kuba daļas drīkst pārvietot.)

3.5.5. Plakne sadalīta kvadrātos tāpat kā rūtiņu lapa. Kvadrātiņa malas garums ir 1 metrs. Pa rūtiņu līnijām novilkta slēgta lauzta līnija, kura sevi nekrusto, un uz tās uzcelta augsta siena. Blakus sienai stāv rūķītis ar sarkanu cepuri. Viņa augums ir daudz mazāks par sienas augstumu. Rūķītis ir tuvredzīgs un redz tikai 1 m attālumā. Kā rūķītis var uzzināt, vai viņš atrodas ārpus sienas vai tās iekšpusē? Sienas forma un izmēri rūķītim nav zināmi. (Rūķītis prot skaitīt.)

1995./96. mācību gads

1. kārta

4.1.1. Vai var uzzīmēt 5 riņķa līnijas tā, lai tām būtu tieši 22 krustpunkti?

4.1.2. Pircējs izvēlējās preci par 3 Ls un iedeva pārdevējam 5 Ls. Pārdevējam nebija sīknaudas, ko izdot pircējam. Viņš paņēma pircēja 5 Ls un devās pie kaimiņa tos samainīt sīkākās naudas zīmes. Kad pārdevējs bija norēķinājies ar pircēju un pircējs bija aizgājis, pie pārdevēja atnāca kaimiņš ar ziņu, ka pārdevēja iedotie 5 Ls ir viltoti. Pārdevējs paņēma viltoto naudas zīmi un atdeva kaimiņam īstu 5 Ls naudas zīmi. Cik naudas pārdevējs zaudēja aprakstītajā situācijā?

4.1.3. Vai var atrast 1996 tādus naturālu skaitļu x un y pārus, lai vienādība $xy+1=x+y$ būtu pareiza? (Piemēram, pāris x=2 un y=3 neder, jo $2\cdot 3+1\neq 2+3$.)

4.1.4. Pierādi, ka taisnstūri, kura izmēri ir $n\times 2m$ rūtiņas (n un m - naturāli skaitļi, ne mazāki kā 2), var pārklāt ar diviem slāņiem domino kauliņu ar izmēriem 1×2 rūtiņas tā, ka

1) katrs slānis pilnībā pārklāj taisnstūri, neizejot ārpus tā robežām,

2) nekādi divi domino kauliņi no dažādiem slāņiem nesakrīt pilnībā!

4.1.5. Taisnstūrī, kura laukums ir 5 dm^2, izvietoti 9 taisnstūri, katram no kuriem laukums ir tieši 1 dm^2. Pierādi, ka starp šiem taisnstūriem var atrast tādus divus, ka to kopējās daļas laukums ir vismaz $\frac{1}{9}dm^2$!

2. kārta

4.2.1. Neatraujot roku no papīra lapas, savieno 5×5 punktus (tie izvietoti 4×4 rūtiņu režģa virsotnēs) ar lauztu līniju, kura sastāv no 8 posmiem! Līnija drīkst sākties un beigties atšķirīgos punktos.

4.2.2. Aizvieto vienādus burtus ar vienādiem cipariem un atšķirīgus burtus – ar atšķirīgiem cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību:

$$\begin{array}{r} \mathrm{MOO} \\ +\,\mathrm{MOO} \\ \hline \mathrm{COW} \end{array}$$

4.2.3. Pie ieejas pilī ir trīs pogas. Viena poga atbilst ciparam 1, otra - ciparam 2, trešā - ciparam 3. Lai iekļūtu pilī, ir jānospiež pēc kārtas un pareizā secībā trīs ciparu kods. Cik reižu jānospiež pogas, lai iekļūtu pilī? (Kods nav zināms.)

4.2.4. Skaitļi no 1 līdz 10 ir uzrakstīti apkārt riņķim patvaļīgā secībā, katrs vienu reizi. Pierādi, ka apkārt šim riņķim varēs atrast 3 blakus esošus skaitļus, kuru summa ir lielāka nekā 16!

4.2.5. Dotas divas rindas ar “+” un “-“ zīmēm. Katrā rindā ir tieši 1995 zīmes. Ir atļauts atkārtot šādu darbību: izvēlēties jebkuras 11 zīmes no pirmās rindas un pārveidot tās par pretējām zīmēm: “+” par “-”, “-” par “+”. Vai, atkārtojot šo darbību cik patīk reižu (bet ne bezgalīgi daudz reižu), var panākt, ka pirmā rinda ir tāda pati, kā otrā rinda? (Tas ir, abās rindās pirmajā vietā ir viena un tā pati zīme, otrajā vietā arī, …, 1995.vietā arī.)

3. kārta

4.3.1. Ziemeļblāzmu zemē ir 15 ciemi, un no katra ciema ir ceļš uz pieciem citiem ciemiem. (Ja ir ceļš no ciema A uz ciemu B un ja ir arī ceļš no ciema B uz ciemu A, tad tas ir viens ceļš starp ciemiem A un B un nevis divi dažādi ceļi; pie tam ceļi nekur ārpus ciemiem nesazarojas.) Cik ceļu ir Ziemeļblāzmu zemē?

4.3.2. Izvieto plaknē 11 tādus kvadrātus, kuri nepārklājas, tā, lai izpildītos sekojoši nosacījumi: lai kā arī mēs nenokrāsotu šos kvadrātus trijās krāsās (katru kvadrātu vienā krāsā), noteikti varēs atrast divus kvadrātus, kuri būs vienā un tai pašā krāsā un kuriem būs kopējs kontūras nogrieznis!

4.3.3. Ziemassvētku priekšvakarā tika nozagti pipari, kuri bija paredzēti piparkūku cepšanai. Vislielākās aizdomas krita uz pavāru. Tiesā pavārs pateica tikai vienu teikumu: “Es zinu, kas nozaga piparus!” Ir zināms, ka tie, kas zog piparus, vienmēr melo. Vai pavārs ir vainīgs vai ir nevainīgs?

4.3.4. Kādas valsts parlamentā ir 100 deputātu. Katrs deputāts ir vai nu godīgs, vai uzpirkts. Ir zināms, ka vismaz viens deputāts ir godīgs un ka jebkurā deputātu pārī vismaz viens ir uzpirkts. Cik parlamentā ir godīgo deputātu?

4.3.5. Salatētis dāvanas ir sasaiņojis kastītēs, kuru izmēri ir 10 *cm*×5 *cm*×15 *cm*. Vai viņš ar šīm dāvanām var piepildīt lielo kasti, kuras izmēri ir 125 *cm*×1996 *cm*×96 *cm*, tā, lai nekas “neiznāktu ārā” un lai nepaliktu tukšas vietas?

4. kārta

4.4.1. Vai var uzzīmēt divus kvadrātus un četrus taisnleņķa trijstūrus, novelkot ne vairāk kā astoņus nogriežņus?

4.4.2. Vai 5×5 rūtiņu kvadrātā var ierakstīt naturālus skaitļus tā (katrā rūtiņā vienu skaitli), lai katrā rindā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, bet katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

4.4.3. Vinnijam Pūkam ir pieci dažādi medus podi. Viņš tos grib sakārtot rindā, sākot ar vieglāko podu un beidzot ar smagāko. Pūka rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. (Tas nozīmē, ka ar vienu svēršanu viņš var noskaidrot, uz kura no diviem svaru kausiem ir uzlikts lielāks smagums; vai arī, ka šie smagumi ir vienādi.) Pierādi: lai paveiktu iecerēto, Pūkam nevajadzēs izdarīt vairāk kā septiņas svēršanas!

4.4.4. Biznesmenis regulāri pierakstīja savus ieņēmumus un izdevumus. Vai var gadīties tā, ka gada beigās viņa gada ieņēmumi pārsniedz izdevumus, bet jebkuru piecu pēc kārtas ņemtu mēnešu izdevumi ir lielāki par ieņēmumiem?

4.4.5. Kā no papīra strēmeles, kuras izmēri ir 3 *cm*×21 *cm*, var izlocīt kubu, kura izmēri ir 3 *cm*×3 *cm*×3 *cm*? (Strēmele drīkst pati ar sevi pārklāties.)

1996./97. mācību gads

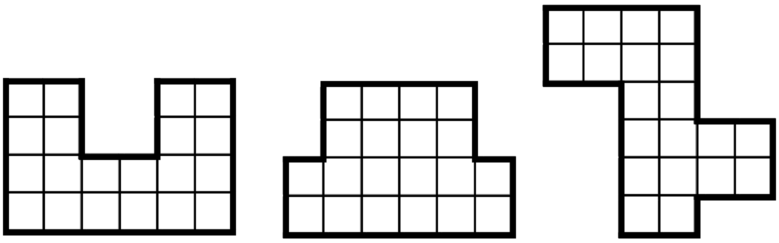
1. kārta

5.1.1. Jānītis no ciparu klucīšiem izveidoja šādu vienādību:

7	3	-	2	6	=	5	8

Apmaini vietām divus klucīšus ar cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību.

5.1.2. Sagriez 6. zīmējumā parādītās no kvadrātiskām rūtiņām izveidotās figūras katru tieši četrās vienādās daļās. Katrai figūrai pietiek uzrādīt vienu griešanas veidu. (Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.)



6. zīm.

5.1.3. Mamma nopirka bērniem augļus - banānus un apelsīnus. Pie tam izrādījās: ja katrs bērns paņemtu pa vienam apelsīnam, tad diviem bērniem apelsīnu pietrūktu; ja katrs bērns paņemtu pa vienam banānam, tad bez banāna paliktu viens bērns. Taču, ja katrs bērns paņemtu pa vienam auglim, tad trīs augļi paliktu neapēsti.

Cik bija bērnu, cik banānu un cik apelsīnu?

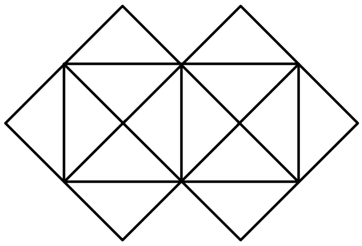
5.1.4. **a)** Zināms, ka divu naturālu skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Pierādi, ka šo divu skaitļu reizinājums ir pāra skaitlis.

b) Zināms, ka 1996 naturālu skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Pierādi, ka šo skaitļu reizinājums ir pāra skaitlis.

5.1.5. Cipcap mežā dzīvo ļoti kārtīgi rūķīši. Katram no viņiem ir 10 vienādas vestītes un trīs skapji, kuros tās sakārt - ozolkoka, riekstkoka un bērza. Katrs rūķītis katrā skapī glabā vismaz vienu vestīti. Izrādījās, ka katriem diviem rūķīšiem vestīšu daudzumi vai nu ozolkoka, vai riekstkoka, vai bērza skapjos atšķiras. Kāds lielākais daudzums rūķīšu var dzīvot Cipcap mežā?

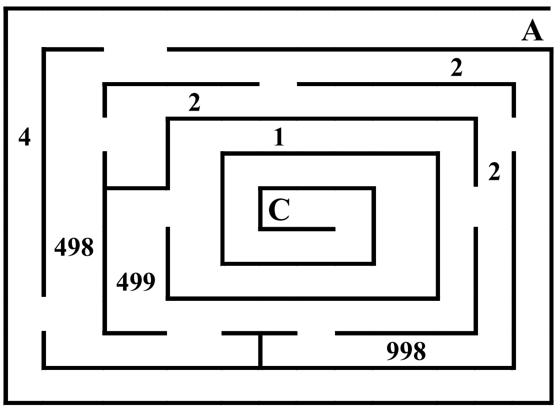
2. kārta

5.2.1. Saskaiti, cik kvadrātu un cik trijstūru ir 7. zīmējumā!



7. zīm.

5.2.2. Ceļojumā Alise nonāca pie ieejas teiksmainā labirintā (skat. 8. zīm.).



8. zīm.

Šis labirints ir īpašs ar to, ka laiku pa laikam tajā ceļu aizsprosto maisi ar dārgakmeņiem. Katrā maisā ir tik dārgakmeņu, cik norāda skaitlis zīmējumā. Paiet garām maisam, nepaņemot dārgakmeņus, aizliegts. Cik un kādos veidos Alise var iet pa labirintu no ieejas A līdz centram C tā, lai to skaitļu, kas uzrakstīti uz pa ceļam savāktajiem maisiem, reizinājums būtu 1996? Divreiz iet pa vienu un to pašu ceļa posmu nedrīkst.

5.2.3. Kādus veselus skaitļus var likt burta *a* vietā, lai iegūtu pareizu skaitlisku vienādību

$$5a^2 - 3 = 14a\,?$$

5.2.4. Jānītis un Pēterītis uzzīmēja katrs vienu kvadrātu. Pie tam izrādījās: samazinot Jānīša kvadrāta katru malu par 20%, bet Pēterīša kvadrāta laukumu samazinot par 21%, iegūst vienādus kvadrātus. Kurš bija uzzīmējis lielāku kvadrātu - Jānītis vai Pēterītis?

5.2.5. Lattelekom Tālo Runu zemē nomainīja telefonu numurus. Tagad Tālo Runu zemē katrs nomainītais telefona numurs ir piecciparu skaitlis, pie tam katrā numurā ir tieši trīs dažādi cipari. Izrādījās, ka katrs jaunais numurs ir simetrisks (t.i. pirmais cipars vienāds ar pēdējo, otrais - ar ceturto) . Cik telefonu numurus Lattelekom nomainīja Tālo Runu zemē, ja citu numuru bez minētajiem nav?

3. kārta

5.3.1. Gāja Anniņa pa ceļu,
Ieraudzīja kaudzi peļu.
Nabadzītes izbijās,
Puse peļu paslēpās.
$\frac{1}{6}$ kokā uzrāpās,
Tikpat zemē ierakās.
Palika tik viena pele
Uz tā platā zemes ceļa.
Tagad Anna galvu lauza-
Cik tad liela bij' tā kaudze?

5.3.2. Ilzīte atrada taisnstūri 7×8 rūtiņas ar tajā ierakstītiem cipariem, kā tas redzams 9. zīmējumā. Papētot to rūpīgāk, Ilzīte atklāja, ka to var noklāt ar domino kauliņiem tā, ka katrs cipars taisnstūrī sakrīt ar tam uzliktā kauliņa punktu skaitu (vienu kauliņu var uzlikt tieši divām rūtiņām un kauliņa malas iet pa rūtiņu malām; pārklājot taisnstūri, tiek izmantoti visi domino komplekta kauliņi).
Parādiet vismaz vienu veidu, kā šo taisnstūri noklāt ar domino kauliņiem.

3	6	3	0	0	0	4	6
6	4	3	6	0	0	2	0
4	3	6	5	0	2	2	2
4	3	6	0	1	1	1	3
4	6	3	5	1	1	1	4
6	1	2	5	5	5	5	5
2	2	4	4	2	1	5	3

9. zīm.

5.3.3. Štepseļu ģimenes dzīvoklī ir sešas rozetes, kas izvietotas taisnā rindā viena aiz otras. Ik dienu Štepseļu ģimenes locekļi tajās saslēdz televizoru, radio, gludekli, sildītāju, kafijas automātu un lampiņu, katru dienu citādā secībā. Cik dienas vajadzīgas, lai viņi saslēgtu šos priekšmetus visos iespējamos veidos?

5.3.4. Rūķīšu skolā notika šādas derības: rūķītis Strīpainā Zeķe paziņoja, ka viņš var jebkura piecstūra iekšpusē izvēlēties punktu A tā, ka no tā novelkot nogriežņus līdz piecstūra virsotnēm, izveidosies pieci taisnleņķa trijstūri, kuriem taisnā leņķa virsotne ir punkts A. Bet rūķītis Lielā Cepure iebilda - tas neesot iespējams.
Izšķiriet rūķīšu strīdu un pamatojiet savas domas.

5.3.5. Sūnu ciemā dzīvo trīs saimnieki Jānis, Pēteris un Andris. Jānim šogad bija padevusies varena graudaugu raža. Pētera lauks bija uz pusi mazāks nekā Jāņa sējumu platība, bet viņš ievāca 3 reizes mazāk labības nekā Jānis. Andris savukārt novāca tikpat daudz graudu cik Jānis, taču, tā kā viņa lauks bija lielāks, ražība bija 80% no Jāņa ražības. Cik *ha* lieli sējumi un kāda ražība bija katram saimniekam, ja pavisam kopā bija apsēti 44 *ha* un Pēteris novāca 272 *cnt* graudu? (Ražība ir no 1 *ha* novāktā raža.)

4. kārta

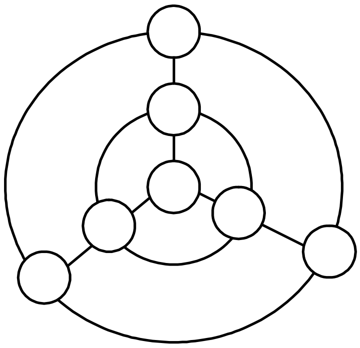
5.4.1. Jānītis izpildīja mājasdarbu, taču mazais brālītis tika klāt Jāņa burtnīcai un dažus ciparus aizkrāsoja. Palīdzi Jānītim atjaunot šos piemērus! (Skat. 10. zīm., aizkrāsoto ciparu vietā ir ✶.)

a)
$$\begin{array}{r} \ast\;6\;0\;\ast\;8\;7\;\ast \\ -\;\ast\;5\;1\;3\;\ast\;7 \\ \hline 7\;4\;\ast\;\ast\;4\;7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 6\;\ast \\ \ast\;\ast\;\ast \\ \hline \ast\;\ast \\ \ast\;\ast\;\;\; \\ \ast\;\ast\;\;\;\;\;\; \\ \hline \ast\;\ast\;\ast\;6 \end{array}$$

10. zīm.

5.4.2. Ieraksti aplīšos skaitļus no 1 līdz 7 (katru tieši vienu reizi) tā, lai uz katras taisnes un uz katras riņķa līnijas esošo skaitļu summa būtu 12 (skat.11. zīm.)! Pietiek parādīt vismaz vienu veidu, kā tas izdarāms.



11. zīm.

5.4.3. Centies izteikt pēc iespējas vairāk naturālu skaitļu, izmantojot tieši piecus piecniekus un varbūt – aritmētisko darbību zīmes un iekavas! (Piemēram, $25 = 55 - 5 \cdot 5 - 5$.)

5.4.4. Sadali trijstūri **a)** 2, **b)** 3, **c)** 4 un **d)** 5 trijstūros. Vai iespējams trijstūri sadalīt 10 trijstūros?

5.4.5. 9 cilvēku grupa apmaldījās kalnos. Viņiem līdzi bija pārtika 5 dienām. Kalnos viņi satika vēl vienu apmaldījušos grupu, kurai pārtikas nebija. Šie cilvēki sadalīja pārtiku savā starpā, pie kam visiem kopā ar to pietika 3 dienām. Cik cilvēku bija otrajā grupā?

1997./98. mācību gads

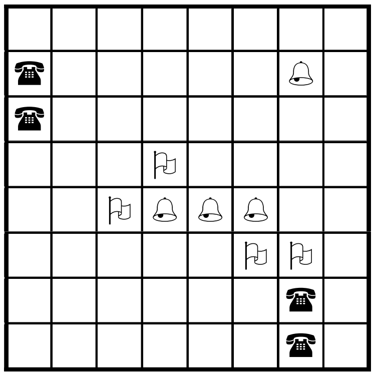
1. kārta

6.1.1. Ar skaitli atļauts veikt šādas divas operācijas:

1) skaitli izdalīt ar 2, ja tas ir pāra skaitlis;
2) apmainīt vietām skaitļa pirmo un pēdējo ciparu un jaunajam skaitlim pieskaitīt 1.

Vai, atkārtojot šīs darbības pietiekami daudz reizes, no skaitļa 1997 var iegūt **a)** skaitli 1000; **b)** skaitli 20?

6.1.2. Sadali doto kvadrātu (skat. 12. zīm.) četrās pēc formas un lieluma vienādās daļās tā, lai katrā daļā būtu tieši viens telefons, viens zvaniņš un viens karodziņš.



12. zīm.

6.1.3. Klasē ir 15 skolēni. Literatūras skolotāja bija uzdevusi izlasīt grāmatu, kurā ir 96 lappuses. Skolēni bija cits par citu slinkāki, tāpēc katrs no viņiem izlasīja visai maz lappušu, pie tam katrs citādu skaitu lappušu.
Pierādiet: nevar gadīties tā, ka viņi visi kopā ir izlasījuši visu grāmatu un nevienu lappusi nav lasījis vairāk nekā viens skolēns.

6.1.4. Arhitekts izgatavoja mājas modeli no tāda paša materiāla kā māja. Modeļa augstums ir 5 *cm*, svars ir 100 *g*. Noskaidro, cik sver māja, ja tās augstums ir 10 *m*!

6.1.5. Rūķītim Čipam ir 9 pēc izskata vienādi cepumi. Viņš zina, ka 8 cepumi ir labi un savā starpā vienādi, bet viens ir saindēts un smagāks par pārējiem. Vēl Čipam ir sviras svari bez atsvariem.
Palīdzi rūķītim atrast saindēto cepumu, izmantojot iespējami maz svēršanu. Apraksti rūķīša rīcību!

2. kārta

6.2.1. Parādi, kā ar trim dažādām taisnēm var sadalīt taisnstūrveida papīra lapu **a)** 4, **b)** 5, **c)** 6 un **d)** 7 daļās!
Vai šo lapu ar trim taisnēm var sadalīt 3 vai 8 daļās?

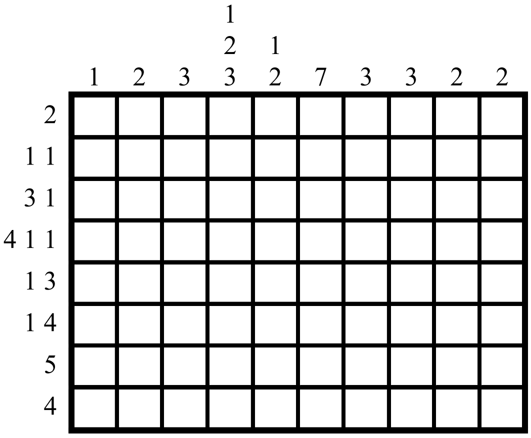
6.2.2. Atrodi visus veselos skaitļus *n*, kuri apmierina vienādojumu $n(n-1)=9$.

6.2.3. Dotajā reizināšanas piemērā (13. zīm.) aizstāj zvaigznītes ar cipariem tā, lai iegūtu pareizu piemēru!

$$\begin{array}{r} \ast\ \ast\ 1 \\ 5\ \ast \\ \hline \ast\ 6\ \ast \\ \ast\ \ast\ \ast\ \ \ \\ \hline \ast\ \ast\ \ast\ 3 \end{array}$$

13. zīm.

6.2.4. Atjauno šifrēto zīmējumu!
Lai Tev palīdzētu, līniju sākumā doti skaitļi. Skaitļi norāda, cik katrā līnijā ir aizkrāsoto kvadrātiņu grupu un cik kvadrātiņi ir aizkrāsoti katrā grupā.



14.zīm.

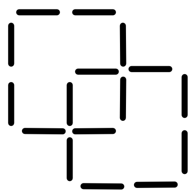
Piemēram, skaitļu virkne 231 nozīmē, ka šajā konkrētajā līnijā ir trīs grupas, kas satur attiecīgi 2, 3 un 1 aizkrāsotas rūtiņas. Grupas cita no citas atdalītas ar vismaz vienu brīvu rūtiņu. (Tukšās rūtiņas var būt arī līnijas pašā sākumā vai beigās.) Tavs uzdevums ir atklāt, cik tukšo lauciņu atrodas starp aizkrāsoto lauciņu grupām, tas ir, restaurēt sākotnējo zīmējumu. (Skat. 14. zīm.)

6.2.5. Zooloģiskā dārza kaķu mājā ir 2 panteras, 4 lauvas un 6 tīģeri. Cik dažādos veidos šos zvērus var izvietot pa apli 12 krātiņos tā, lai blakus krātiņos neatrastos vienas sugas zvēri?

3. kārta

6.3.1. Sareizinot piecus dažādus naturālus skaitļus, ieguva 1020. Atrodi šos piecus skaitļus! Cik ir dažādu atrisinājumu? Uzrādi tos!

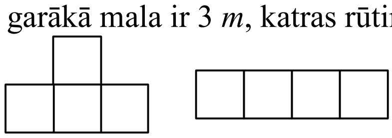
6.3.2. Patlaban 15. zīmējumā redzama no sērkociņiem salikta figūra. Tās vidū ir viens kvadrātiņš. Pārvieto ne vairāk kā 4 no dotajiem sērkociņiem tā, lai izveidotos tieši **a)** 2, **b)** 3, **c)** 4, **d)** 5 kvadrāti.



15.zīm.

6.3.3. Jānītim ir divi ar nātrija karbonātu pilni trauciņi, katrā no tiem ir 11 *g* šīs vielas. Jānīša rīcībā ir vēl divi tukši trauciņi, viena trauciņa ietilpība ir 3 *g*, bet otra – 9 *g* nātrija karbonāta. Kā Jānītis, izmantojot tikai šos četrus trauciņus, var panākt, lai vienā no tiem būtu tieši 7 *g* nātrija karbonāta?

6.3.4. Namdarim ir jāizklāj grīda istabā ar izmēriem 6 m×10 m. Šim nolūkam ir paredzēti dēlīši ar izmēriem 1 m×4 m (skat. 16.b) zīm.) un tādas formas dēlīši, kā parādīts 16.a) zīmējumā (šo dēlīšu garākā mala ir 3 m, katras rūtiņas malas garums ir 1 m).



a) b)

16. zīm.

Vai namdaris var izdarīt prasīto, ja viņam ir 5 16.a) zīm. attēlotie dēlīši un 10 16.b) zīm. attēlotie dēlīši?

6.3.5. Ziemassvētku vecītis gatavojās doties ciemos pie skolēniem uz meža skolu, kurā mācās ne vairāk kā 31 skolēns (cik īsti, to Ziemassvētku vecītis nezina). Tāpēc viņš nolēma sagatavot 5 dāvanu maisiņus, katrā maisiņā liekot citādu skaitu dāvanu. Ierodoties skolā un saskaitot, cik skolēnu ir pavisam, viņš varēs iedot skolai dažus sagatavotos dāvanu maisiņus (varbūt visus, varbūt tikai vienu) tā, lai katram skolēnam tiktu tieši viena dāvaniņa. Cik dāvaniņām jābūt katrā sagatavotajā maisiņā?

4. kārta

6.4.1. Sareizini dotos skaitļus racionāli, neizmantojot kalkulatoru un nereizinot "stabiņā". Parādi spriešanas gaitu!

a) $69 \cdot 99=$

b) $47 \cdot 101=$

6.4.2. Jānītis katru dienu iet uz skolu, pēc tam uz baseinu, un tad atgriežas mājās. Ejot mo vienas vietas uz otru, Jānītis iet pa taisni. Skola atrodas 5 *km* attālumā no mājām un baseins – 3 *km* attālumā no skolas.
Cik garu ceļu veic Jānītis katru dienu? Apraksti visas iespējas un ilustrē tās ar zīmējumu!

6.4.3. Anniņa izpildīja dalīšanas piemēru, bet Pēcītis saķēpāja Anniņas burtnīcu tā, ka palika redzami tikai divi cipari. Palīdzi atjaunot Anniņas piemēru (skat. 17. zīm., zvaigznītes apzīmē trūkstošos ciparus).

```
* * * * * * : * * * = * 8 *
* * * *
-------
    * * *
    * * *
    -------
    * * * *
    * * * *
    -------
          0
```

17. zīm.

6.4.4. Svaigos ābolos ir 80% ūdens, žāvētos ābolos ir 60% ūdens. Cik *kg* žāvētu ābolu iegūs no 1 *kg* svaigu ābolu?

6.4.5. Ramtam mežā dzīvo 11 trollīši. To kopējais garums ir 165 pēdas. Vai var gadīties, ka katra trollīša garums ir mazāks par 15 pēdām?

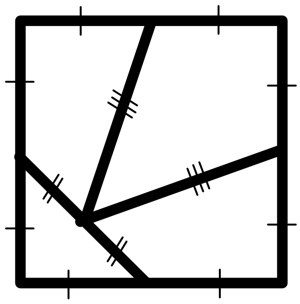
5. kārta

6.5.1. Dotajā piemērā ar vienādiem burtiem aizstāti vienādi cipari, ar dažādiem burtiem, dažādi cipari. Atrodi visus iespējamos atrisinājumus!

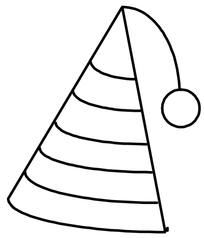
```
  A I L E
- K O L A
---------
    O L A
```

6.5.2. Jānītis krāj 5 santīmu monētas, bet Anniņa krāj 2 santīmu monētas. Zināms, ka abi ir sakrājuši vienādi daudz naudas. Cik naudas ir katra bērna krājkasītē, ja pa abiem kopā viņiem ir 28 monētas?

6.5.3. 18. zīmējumā redzams 4 daļās sagriezts kvadrāts. Saliec no šīm daļām vienādsānu trijstūri.



18. zīm.



19. zīm.

20. zīm.

6.5.4. Mildiņa ada rūķīšiem cepures. (Cepures forma parādīta 19. zīm.). Katrai cepurei ir 6 dažādu krāsu joslas. Cik dažādas rūķu cepures Mildiņa var noadīt, ja viņai ir 7 dažādu krāsu dzijas kamoliņi? (Ja cepures atšķiras ar joslu izkārtojumu, tās tiek uzskatītas par dažādām.)

6.5.5. Uz istabas sienas atrodas divas mušas Šarlote un Žanis (skat. 20. zīm.). Žanis grib nokļūt līdz Šarlote, pa ceļam pamielojoties pie medus "svītras". Palīdzi Žanim izdomāt, kurā vietā pie medus "svītras" ir jāpiestāj, lai viņa veiktais ceļš būtu visīsākais. (Šarlote pa šo laiku savu atrašanās vietu nemaina.)

1998./99. mācību gads

1. kārta

7.1.1. Dotajā reizināšanas piemērā vienādi cipari ir aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi - ar dažādiem (skat. 21. zīm.).

```
      A P S E
      O S I S
    ---------
    K S A I
O L A P
-------------
O L U P A I S
```

21. zīm.

Kāds cipars atbilst katram burtam?

7.1.2. Meža rūķu valsts veikalā "Birzes" bija pārdošanā ozolzīļu krelles par 5 Ls. Izpārdošanā krellēm cenu pazemināja par 20%. Vietējais biznesmenis Kurmis nopirka 100 krelles un citā ciemā pārdeva tās par 30% dārgāk nekā iepirka. Par cik latiem Kurmis pārdeva krelles un cik Ls ir Kurmīša „tīrā" peļņa?

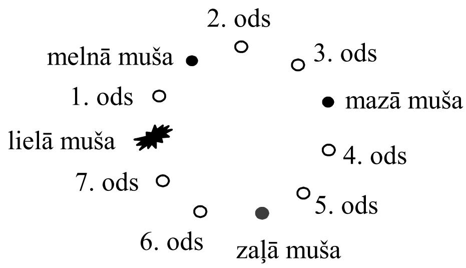
7.1.3. Uzzīmē plaknē

a) trīs taisnes tā, lai veidotos tieši trīs krustpunkti;

b) četras taisnes tā, lai veidotos tieši četri krustpunkti;

c) piecas taisnes tā, lai veidotos tieši pieci krustpunkti.

7.1.4. Radinieki Vardītes jaunkundzei kā dzimšanas dienas dāvanu pasniedza paplāti ar 7 odiem un 4 mušām (skat. 22. zīm.). Vardītes jaunkundze, būdama kaprīza, nolēma, ka ēdīs katru trešo kukaini (pulksteņrādītāja kustības virzienā), pie kam ēšanu sāks tā, lai pēdējā tiktu apēsta lielā muša. Ar kuru kukaini Vardītei ir jāsāk mieloties?



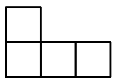
22. zīm.

7.1.5. Kāds juvelieris veido piespraudes 4-lapu puķītes izskatā (katra ziedlapiņa savā krāsā) ar dzintara gabaliņu viducī. Cik dažāda veida piespraudes juvelieris var izgatavot, ja lapiņām tiek izmantoti 6 dažādu krāsu akmentiņi, bet dzintara gabaliņam ir trīs dažādas nokrāsas? Piespraudes uzskatām par dažādām, ja nesakrīt krāsu secība pulksteņrādītāja kustības virzienā vai arī atšķiras ziediņu viduči.

2. kārta

7.2.1. Divu veselu skaitļu starpība ir 161. Vai šo skaitļu reizinājums var būt 567?

7.2.2. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām; centrālā rūtiņa ir izgriezta. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādos "stūrīšos", kādi ir parādīti 23. zīmējumā?


23. zīm.

7.2.3. Pa apli stāv 99 rūķīši, katrs no tiem vai nu vienmēr melo, vai vienmēr saka patiesību. Visi rūķīši apgalvo: "*tieši viens no man blakusstāvošajiem rūķīšiem ir melis*". Cik ir meļu?

7.2.4. Ķēniņš Dullums noslēdza derības ar burvi Gudrumu, ka uzcels sešus torņus tā, lai taisnie ceļi, kas savieno katrus divus torņus, veidotu tikai trīs krustojumus. Vai Dullums spēs realizēt savu ieceri?

7.2.5. Pasaku mežā dzīvo vairāki trollīši, katram no viņiem ir vismaz viena, bet ne vairāk kā trīs cepurītes, turklāt nevienam no trollīšiem nav divu vienas krāsas cepurīšu. Vai vari pateikt, cik trollīšu dzīvo pasaku mežā? Ir zināms, ka 666 trollīšiem ir sarkanas cepurītes, 666 trollīšiem ir zaļas cepurītes un 666 – dzeltenas cepurītes. Bez tam 220 trollīšiem ir **tikai** dzeltenās cepurītes, 96 trollīšiem ir gan dzeltenās, gan sarkanās cepurītes, bet nav zaļo cepurīšu, 176 trollīšiem ir sarkanās un zaļās, bet nav dzelteno cepurīšu, un 10 trollīšiem ir visu trīs krāsu cepurītes.

3. kārta

7.3.1. Sešciparu skaitļa pēdējais cipars ir 4. Šī skaitļa pēdējo ciparu pārceļot pārējiem cipariem priekšā, ieguva jaunu sešciparu skaitli, kas ir 4 reizes lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Kāds bija sākotnējais skaitlis?

7.3.2. Vai no 12 vienādiem stienīšiem var izveidot 6 vienādus kvadrātus? Kā to izdarīt? Kvadrāta malai jābūt vienādai ar stienīti.

7.3.3. Zināms, ka 10 cāļi 10 dienās apēd 1 *kg* graudu. Cik daudz graudu 100 dienās apēdīs 100 cāļi?

7.3.4. Kad Jānis paskatījās pulkstenī, līdz diennakts beigām bija palikusi piektā daļa tā laika, kas jau pagājis kopš diennakts sākuma. Cik īsti bija pulkstenis?

7.3.5. Skvērā aug daži koki. Te atlidoja dažas vārnas un dažas žagatas. Ja visas žagatas nosēdīsies katra savā kokā, tad 2 koki paliks pāri, savukārt, ja vārnas nolaistos katra savā kokā, tukšs paliktu viens koks. Bet, ja visi putni mēģinās nolaisties katrs savā kokā, tad trīs putni paliks bez koka. Cik ir vārnu, cik žagatu un cik koku?

4. kārta

7.4.1. Dotajās vienādībās cipari ir aizstāti ar burtiem: vienādi cipari – ar vienādiem burtiem, dažādi cipari – ar dažādiem burtiem. Atšifrē, kāds cipars paslēpies zem katra burta!

IM:I=DM

IM+I=II

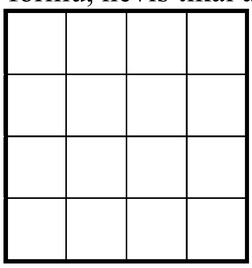
II·A=DDM

BE:A=CA

DC·C=CL

RAK-KR=BED

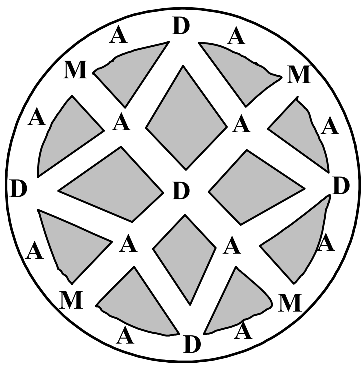
7.4.2. Sagriez 24. zīmējumā parādīto kvadrātu pa rūtiņu malām 4 vienādās daļās! Pamēģini to izdarīt četros dažādos veidos! (Sadalījumus uzskatām par dažādiem, ja tie atšķiras ar dalījumā iegūto daļu formu, nevis tikai ar izvietojumu.)



24. zīm.

7.4.3. Jānītis atgriezās no spēļu laukuma ar ļoti netīrām biksēm un zeķēm. Māte lika kārtīgi izmazgāt savas drēbes, ko Jānītis arī izdarīja. Piedevām viņš ievēroja sekojošo: 7 reizes mazgājot bikses ar kubveida ziepju gabaliņu, visi tā izmēri samazinājās 2 reizes, bet ar atlikušo ziepju gabaliņu 7 reizes mazgājot zeķes, visi tā izmēri atkal samazinājās 2 reizes. Cik reizes mazāks, salīdzinājumā ar sākotnējo, ir pēc mazgāšanas palikušais gabaliņš? (Salīdzinām gabaliņus pēc ziepju daudzuma tajos.)

7.4.4. Ar cik dažādiem paņēmieniem 25. zīmējumā var izlasīt vārdu MADAM? Lasīt drīkst visos virzienos pa jebkuru no "celiņiem", taču katram nākamajam burtam jāatrodas blakus iepriekšējam, t.i., nav pieļaujama "lēkšana" pār burtu.



25. zīm.

7.4.5. Pēterītis pajautāja savai vecmāmiņai un vectētiņam, cik viņiem gadu. Lūk, ko vectētiņš pastāstīja: "Vecmāmiņa ir divreiz vecāka, nekā es biju tad, kad man bija trīs reizes mazāk gadu, nekā vecmāmiņai būs tad, kad vecmāmiņa būs tikpat veca kā es tagad. Vēl varu piebilst, ka vecmāmiņa ir par 33 gadiem jaunāka nekā es." Palīdzi Pēterītim noskaidrot savu vecvecāku vecumu!

5. kārta

7.5.1. Dotais dalīšanas piemērs satur 28 ciparus, no tiem zināmi ir tikai 2, atrodi nezināmos ciparus (skat. 26. zīm.)!

```
* * * * * * * : * * = * * 8 * *
* * *
-----
      * *
      * *
      -----
        * * *
        * * *
        -----
            1
```

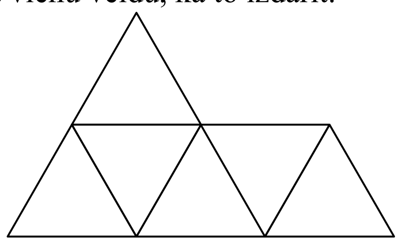
26. zīm.

7.5.2. Skolas bibliotēkā ir 1000 grāmatas. Zināms, ka nevienai no tām nav vairāk par 80 lappusēm. Pierādi, ka bibliotēkā ir vismaz 13 grāmatas ar vienādu lappušu skaitu.

7.5.3. Vinnijs Pūks, Pūce, Trusītis un Sivēns apēda 70 banānus, pie tam katram no viņiem tika vismaz viens banāns un katrs apēda veselu skaitu banānu. Vinnijs Pūks apēda vairāk nekā katrs no viņa biedriem; Pūce un Trusītis kopā apēda 45 banānus. Cik banānus apēda Sivēns?

7.5.4. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Karalis ar vienu gājienu var no rūtiņas, kurā tas atrodas, pāriet vai nu uz tādu rūtiņu, kam ar pašreizējo ir kopīga mala (sauksim tādu gājienu par taisnu), vai arī uz tādu rūtiņu, kam ar pašreizējo ir tikai viens kopīgs stūris (sauksim tādu gājienu par slīpu). Nevienā rūtiņā, kurā karalis jau ir bijis, viņš nedrīkst atgriezties vēlreiz. Vai karalis var apstaigāt visas rūtiņas tā, lai viņa maršrutā nebūtu ne divu pēc kārtas izdarītu taisnu, ne divu pēc kārtas izdarītu slīpu gājienu?

7.5.5. Figūra (skat. 27. zīm.) sastāv no 6 vienādmalu trijstūriem. Vai vari sagriezt to 4 vienādās daļās (par vienādām uzskatīsim daļas, kas ir vienādas gan pēc izskata, gan pēc laukuma)? Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



27. zīm.

1999./2000. mācību gads

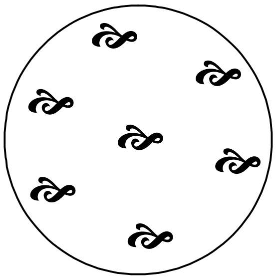
1. kārta

8.1.1. Dota skaitļu virkne:

1; 5; 13; 29; 61; 125; ...

Vai skaitlis 2000 pieder šai virknei? Vai vari pateikt, kā veidojas šī virkne?

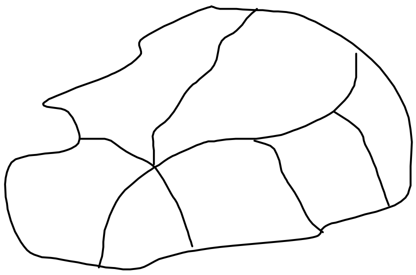
8.1.2. Pēterītim bija dzimšanas diena, uz kuru tas uzaicināja 6 savus draugus. Māmiņa uzcienāja bērnus ar torti, kurai virsū bija izvietotas 7 marcipāna puķītes tā, kā parādīts 28. zīmējumā. Palīdzi Pēterītim sagriezt torti ar 3 taisniem griezieniem 7 daļās tā, lai katrā daļā būtu tieši viena puķīte!



28. zīm.

8.1.3. Datorveikalā notika vecākas paaudzes datoru izpārdošana. Sākumā datora cenu pazemināja par 20%. Pēc kāda laika, kad to neviens nepirka, tā cenu atkal pazemināja par 20%. Taču arī tas nedeva gaidītos rezultātus, tāpēc veica vēl vienu cenas pazemināšanu par 20%. Ar cik % lielu atlaidi, salīdzinot ar sākotnējo cenu, tagad var nopirkt šo datoru?

8.1.4. Akvarelijā ir 7 novadi. Kartogrāfu birojs grib izdot šīs valsts karti (skat. 29. zīm.). Cik krāsas ir nepieciešamas, lai izkrāsotu šo karti tā, ka nekādi divi novadi, kuriem ir kopīga robežas daļa, nebūtu nokrāsoti vienādās krāsās (katrs novads ir nokrāsots vienā krāsā). Ja diviem novadiem ir kopīgs tikai viens punkts, tad tie var būt izkrāsoti arī vienādās krāsās. Parādi, kā ar šīm krāsām var izkrāsot minēto karti!



29. zīm.

8.1.5. Rūķis iedomājās vienu no skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Pūķis grib noskaidrot šo skaitli. Viņš var uzdot Rūķim jautājumu, vai iedomātais skaitlis ir kāds no nosauktajiem (un nosaukt tos), savukārt Rūķis var atbildēt tikai ar "jā" vai "nē". (Piemēram, Pūķis var jautāt: "Vai iedomātais skaitlis ir kāds no skaitļiem 4; 6 vai 8?". Ja tas tā ir, Rūķis atbild "jā", ja tā nav, tad Rūķis saka "nē".)
Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Pūķis noteikti var noskaidrot Rūķa iedomāto skaitli? Kādi ir šie jautājumi?

2. kārta

8.2.1. Kurš kociņš 30. zīm. ir jāpārvieto, lai iegūtu pareizu vienādību? Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

IV+XXV=XXX

30. zīm.

8.2.2. Četrstūra ABCD malu garumi ir AB=1 *cm*, BC=2 *cm*, CD=3 *cm* un AD=4 *cm*. Vai diagonāle AC var būt 5 *cm* gara?

8.2.3. Pūķis iedomājās vienu no skaitļiem 1; 2; 3; 4. Rūķis grib noskaidrot šo skaitli. Viņš var uzdot Pūķim jautājumu, vai iedomātais skaitlis ir kāds no nosauktajiem (un nosaukt tos), savukārt Pūķis var atbildēt tikai ar "jā" vai "nē". Turklāt vienu reizi Pūķis drīkst melot!
Parādi, kā ar pieciem jautājumiem Rūķis noteikti var noskaidrot Pūķa iedomāto skaitli!

8.2.4. Reiz Vinnijam Pūkam bija balta koka klucis ar izmēriem 4 *cm* × 4 *cm* × 4 *cm*. Kādā lietainā dienā tas izkrita pa logu. Kad Pūks savu klucīti vēlāk atrada, tas no ārpuses bija kļuvis brūns. Vai vari palīdzēt Vinnijam Pūkam sazāģēt klucīti daļās, lai, tās salīmējot kopā, Pūkam tāpat kā iepriekš būtu balts klucis ar izmēriem 4 *cm* × 4 *cm* × 4 *cm*?

8.2.5. Pēteris atrada divciparu skaitli ar šādām īpašībām:
1) skaitļa pirmais cipars ir vairākas reizes lielāks par skaitļa otro ciparu;
2) aprēķinot šī skaitļa ciparu summu, starpību, reizinājumu un dalījumu, iegūst četrus dažādus naturālus skaitļus, no kuriem neviens nav vienāds ar 1 un kuru reizinājums ir 972.
Vai vari pateikt, kādu skaitli ir atradis Pēteris?

3. kārta

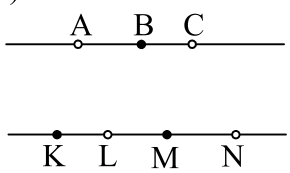
8.3.1. Cik otrajā tūkstošgadē bija tādu gada skaitļu, kuru ciparu summa ir 20?

8.3.2. Pēcītis nolēma dzīvoklī grīdu noklāt ar vienas krāsas vienādmalu trijstūra formas flīzītēm. Pacenties atrast un parādīt vairākus veidus, kā to var izdarīt (t.i., kādā veidā jāsaliek kopā flīzes, lai starp tām nepaliek brīva vieta un tās nepārklājas; situāciju, kas veidojas pie sienas, neapskata).

8.3.3. Parādi, kā racionāli (ātri un viegli) aprēķināt summu

$$\frac{1}{2000}+\frac{2}{2000}+\frac{3}{2000}+\ldots+\frac{1998}{2000}+\frac{1999}{2000}.$$

8.3.4. Uz vienas taisnes atlikti divi balti punkti A un C un viens melns punkts B, uz šai taisnei paralēlas taisnes atlikti divi balti punkti L un N un divi melni punkti K un M (skat. 31. zīm.). Cik dažādus trijstūrus var izveidot, kuru virsotnes ir dotie punkti un ne vairāk kā divas virsotnes ir vienā krāsā? (Trijstūrus uzskata par dažādiem, ja tiem atšķiras vismaz viena virsotne.)



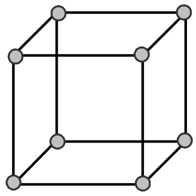
31. zīm.

8.3.5. Divi rūķīši Rūķelis un Rāķelis nopirka medus dzēriena podiņu un nolēma to kopīgi iztukšot, sagaidot Jauno gadu. Dzēriens maksāja 15 Ls, bet pirkšanas brīdī Rūķelis varēja iemaksāt tikai 6 Ls, pārējo samaksāja Rāķelis. Sagaidot Jauno gadu, abiem draugiem piebiedrojās vēl trešais rūķītis - Rīķelis, un medus dzērienu viņi izdzēra trijatā. Pēc tam Rīķelis samaksāja abiem draugiem 5 Ls - trešdaļu no kopējās summas. Cik Ls no šīs naudas pienākas Rūķelim un cik – Rāķelim? Paskaidro savu spriedumu!

4. kārta

8.4.1. Dota ciparu virknīte 123456789. Nemainot ciparu kārtību, starp tiem ievietojiet aritmētisko darbību zīmes ("+", "-", "·", ":") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 1. Ja nepieciešams, divus blakus stāvošus ciparus var uzskatīt arī par divciparu skaitli. Pietiek dot vienu atrisinājumu.

8.4.2. Ieraksti kuba virsotnēs skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, tā, lai katru četru skaitļu, kas atrodas vienas kuba skaldnes virsotnēs, summa būtu viena un tā pati (skat. 32. zīm.).



32. zīm.

8.4.3. Dots taisnstūris ar izmēriem 4×9 rūtiņas.

a) Sagriez to 3 taisnstūros tā, lai no tiem varētu salikt kvadrātu.

b) Ar vienu nepārtrauktu griezienu (tas var būt arī lauzta vai liekta līnija) sagriez doto divās daļās, no kurām var salikt kvadrātu.

8.4.4. Rūķītis nolēma izlīmēt savā istabā rakstainas tapetes (raksts atkārtojas ik pēc 30 *cm*). Palīdzi rūķītim aprēķināt, cik daudz tapešu ruļļu jānopērk, lai pietiktu visai istabai. Istabas garums ir 5 *m*, platums 3 *m*, augstums 2,5 *m*. Istabā ir 2,1 *m* plats un 1,9 *m* augsts logs un 0,9 *m* platas un 2 *m* augstas durvis, kur tapetes nav jālīmē. Tapešu rullis ir 50 *cm* plats un tajā ir 10 *m* gara tapešu loksne. No grīdas līdz griestiem jālīmē viena loksne visā garumā - tā nevar būt līmēta no divām daļām.

8.4.5. Ir zināms, ka burtu virknītes **ABER**, **SEAB**, **ROAS** ir aizšifrēti apzīmējumi burtu virknītēm **JITA**, **LVTJ**, **TAIL**, tikai nav zināms kura virknīte kurai atbilst. Atšifrējiet, kādi vārdi atbilst burtu virknītēm **BESB** un **RBAOESB**! (Šifrā katram burtam atbilst tieši viens burts; nekādi divi burti nav aizšifrēti ar vienu un to pašu burtu.)

5. kārta

8.5.1. Kādi ir pēdējie četri cipari reizinājumam $1998 \cdot 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2002$? Pamato savu atbildi!

8.5.2. Pelīte Pīka atrodas kvadrāta 6×6 rūtiņas augšējā kreisajā stūrī. Pa cik dažādiem ceļiem pelīte var nokļūt kvadrāta apakšējā labajā stūrī, ja Pīka drīkst iet tikai pa rūtiņu malām virzienos pa labi un uz leju, pie tam iešanas virzienu (no horizontāla uz vertikālu un otrādi) drīkst mainīt tieši 6 reizes?

8.5.3. Divus naturālus skaitļus sauksim par spoguļskaitļiem, ja viens skaitlis sastāv no tiem pašiem cipariem kā pirmais, tikai uzrakstītiem pretējā secībā (piem., spoguļskaitļu pāris ir skaitļi 1234 un 4321). Vai ir tāds divciparu spoguļskaitļu pāris, kurā viens skaitlis ir veselu skaitu reižu lielāks nekā otrs, pie tam abiem skaitļiem abi cipari ir dažādi?

8.5.4. Valstī Flandija ir 6 pilsētas. Par maģistrāli sauksim ceļu, kas savieno kādas 2 šīs valsts pilsētas. Kāds ir mazākais maģistrāļu skaits, kas jāierīko Flandijā, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu pilsētu, braucot pa ne vairāk kā divām maģistrālēm? (Ārpus pilsētām maģistrāles nekrustojas.) Parādi piemēru, kā to izdarīt!

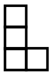
8.5.5. Leiputrijā dzīvo rūķi, kas runā tikai purpuļu valodā, rūķi, kas runā tikai murmuļu valodā, un rūķi, kas runā abās valodās. Zināms, ka 90% visu rūķu pārvalda purpuļu valodu, un $\frac{2}{5}$ visu rūķu runā murmuļu valodā. Kura daļa Leiputrijas iedzīvotāju runā abās valodās?

ATRISINĀJUMI

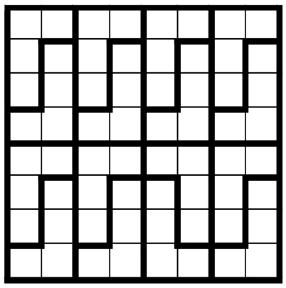
1992./93. mācību gads

1.1.1. ***Atbilde:*** **a)** jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums. **a)** Skat., piemēram, A1. zīm.

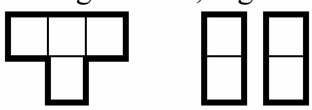
Figūriņu  sauksim par L-veida figūru, bet figūriņu  – par kvadrātu.

Ievērosim, ka divas L-veida figūras var novietot tā, ka tās veido 2×4 rūtiņu taisnstūri. Tā kā tāfelīti var sadalīt astoņos 2×4 rūtiņu taisnstūros, tad to var sadalīt 16 L-veida figūrās. Piemēram, tā, kā parādīts A1. zīmējumā. Iespējami arī citi sadalīšanas veidi, bet, lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek uzrādīt tikai vienu.



A1. zīm.

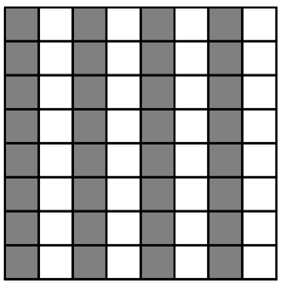
b) Šokolādes tāfelīte sastāv no 64 kvadrātiņiem. Arī kvadrātiņu skaits 15 L-veida figūrās un vienā 2×2 rūtiņu kvadrātā kopā ir 64. Varētu likties, ka uzdevuma prasība tāpat kā a) gadījumā būs izpildāma. Tomēr vairākkārtēji neveiksmīgi mēģinājumi liek domāt, ka atbilde uz uzdevumā prasīto varētu būt negatīva. (Šeit skaidri jāsaprot: ja rūtiņu skaits sākotnējā kvadrātā būtu citāds nekā visos iegūstamajos gabaliņos kopā, tad salaušanu **noteikti nevarētu** izdarīt; turpretī rūtiņu skaita vienādība salaušanas iespēju **vēl negarantē**. Skat., piem., A2. zīm., kur pa kreisi attēlotajā figūrā rūtiņu skaits ir tāds pats kā abās pa labi attēlotajās kopā, tomēr tādas daļas nav iegūstamas, sagriežot pa kreisi attēloto figūru.



A2. zīm.

Matemātiķi šādos gadījumos saka: rūtiņu skaitu vienādība ir ***nepieciešams, bet ne pietiekams*** nosacījums tam, lai sagriešanu varētu izdarīt.)

Pamatosim to, ka salaušana nav izdarāma (mūsu vairākkārtējie neveiksmīgie mēģinājumi vieni paši, protams, nav pietiekami, lai to apgalvotu; varbūt vēl pēc dažu stundu pūlēm mums izdotos iegūt vajadzīgo?)



A3. zīm.

Izkrāsosim šokolādes tāfelīti tā, kā parādīts A3. zīm.: pārmaiņus viena kolonna melna, otra balta, utt. Rezultātā 32 lauciņi ir melni un 32 – balti. Ievērosim: lai arī kā L-veida figūra nebūtu nolauzta no šokolādes tāfelītes, tā noteikti saturēs vai nu vienu, vai trīs melnus kvadrātiņus. Tātad tā saturēs nepāra skaitu melnu kvadrātiņu. Savukārt, lai kurā vietā arī nebūtu nolauzta 2×2 rūtiņu figūra, tā noteikti saturēs tieši divus melnus kvadrātiņus.

Pieņemsim, ka mums ir izdevies salauzt šokolādes tāfelīti atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Tad 15 L-veida figūrās kopā ir nepāra skaits melno kvadrātiņu, bet 2×2 rūtiņu figūrā ir divi melni kvadrātiņi. Seko, ka visās 16 laužot iegūtajās figūrās kopā ir nepāra skaits melno kvadrātiņu. Tas ir pretrunā ar mūsu izveidoto krāsojumu: melnā krāsā nokrāsoti 32 – pāra skaits – kvadrātiņu. Tātad mūsu pieņēmums par iespēju salauzt tāfelīti norādītajās daļās ir aplams un uzdevuma prasība nav izpildāma.

1.1.2. ***Atbilde:*** 2 gadi, 2gadi un 9 gadi.

Risinājums. Apskatīsim visas iespējamās trīs naturālu skaitļu kombinācijas, kuru elementu reizinājums ir 36 (secība nav svarīga). Šie trīs skaitļi **a**; **b**; **c** varētu būt iespējamie Jāņa bērnu vecumi (skat. A4. zīm.). Līdztekus aplūkosim arī skaitļu **a**, **b**, **c** summu. Skaidrs, ka autobusa numuram vajadzētu sakrist ar kādu no skaitļiem 38; 21; 16; 14; 13; 11; 10.

a	b	c	a+b+c
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

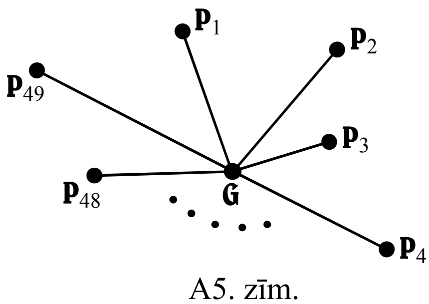
A4. zīm.

Padomāsim, kā veidotos saruna, ja garāmbraucošā autobusa numurs būtu 38. Tad Pēteris bez šaubīšanās varētu pateikt, ka Jāņa bērnu vecumi ir 1 gads, 1 gads un 36 gadi (diezgan neticams variants!), jo summa 38 atbilst tikai vienai reizinātāju a; b; c kombinācijai. Līdzīgi spriežam par gadījumiem, kad autobusa numurs būtu 21, 16, 14, 11 vai 10.

Vienīgi gadījumā, ja autobusa numurs ir 13, ir saprotama Pētera neziņa: viņš nevar izšķirties starp divām iespējām – “1 gads, 6 gadi, 6 gadi” un “2 gadi, 2 gadi, 9 gadi”. Jāņa piebilde: "Bet vecākais bērns man ir zilacis" šo jautājumu atrisina. Kļūst skaidrs, ka **ir** vecākais bērns, tātad Jāņa bērnu vecumi ir 2 gadi, 2 gadi un 9 gadi.

1.1.3. ***Atbilde:*** 49 aviolīnijas.

Risinājums. Kā redzams A5.. zīm., valstī varētu būt 49 aviolīnijas, kas savieno galvaspilsētu **G** ar pērējām 49 pilsētām $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_{49}$.



A5. zīm.

Tagad pierādīsim, ka vismaz 49 aviolīnijām noteikti jābūt. Valstī noteikti eksistē divas pilsētas $\mathbf{A}_1$ un $\mathbf{A}_2$, kas ir savā starpā savienotas ar aviolīniju. Tā kā no katras pilsētas var aizbraukt uz katru, šī divu pilsētu sistēma nevar būt izolēta no pērējām, tāpēc ir kāda pilsēta $\mathbf{A}_3$, kas ir savienota ar aviolīniju ar kādu no pilsētām $\mathbf{A}_1$ vai $\mathbf{A}_2$. (Tātad starp šīm trim pilsētām noteikti ir vismaz divas aviolīnijas.)

Arī šo trīs pilsētu sistēma nevar būt izolēta no pārējām, tāpēc eksistē kāda pilsēta $\mathbf{A}_4$, kas savienota ar kādu no pilsētām $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$. (Tātad starp šīm četrām pilsētām noteikti ir vismaz trīs aviolīnijas.)

Spriedumu analoģiski turpinot, iegūstam, ka valstī ir vismaz 49 aviolīnijas ("pievienojot" sistēmai vienu pilsētu, pievienojas arī vismaz viena aviolīnija.)

Ievērosim: to, ka nepieciešamas vismaz 49 aviolīnijas, nosaka prasība, lai no katras pilsētas vispār varētu aizbraukt uz katru citu, nevis tas, lai to varētu izdarīt uzdevuma nosacījumos aprakstītajā "ekonomiskajā" veidā.

1.1.4. ***Atbilde:*** 000.

Risinājums. Ievērosim, ka (2·5)·(4·15)·10=6000. Pareizinot skaitli 6000 ar pārējiem reizinātājiem, rezultātā pēdējie trīs cipari vienmēr paliks nulles.

Tātad apskatāmā reizinājuma trīs pēdējie cipari ir 000.

1.1.5. ***Atbilde:*** 250; 505; 1016; 2039; 4086.

Risinājums. Šāda tipa uzdevumos atbilde principā varētu būt jebkura. Tiešām, varētu taču gadīties, ka uzdevuma sastādītājs iedomājies, piemēram, šādu likumu:

> *"pirmie septiņi virknes locekļi ir 3; 4; 7; 14; 29; 60; 123, bet visi tālākie – vieninieki",*

vai kaut ko analoģisku.

Tāpēc šādus uzdevumus parasti nepiedāvā matemātikas olimpiādēs, kurās katrs risinājuma solis stingri jāpamato un risinājums precīzi jānovērtē punktu izteiksmē. Piedāvājot šādus uzdevumus konkursos, tiek ņemts vērā risinājuma skaistums, vienkāršība, risinātāja fantāzija – lietas, kuras novērtēt ar punktiem ir ļoti grūti, ja ne neiespējami.

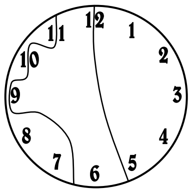
Atzīmēsim, ka parasti uzdevuma autora iedomātais likums atšķiras no pārējiem ar to, ka tas ir ievērojami vienkāršāks un neizmanto dažādas "izņēmuma vērtības" (kā augšminētajā piemērā, kur likums pirmajiem septiņiem virknes locekļiem darbojas pavisam citādi nekā pārējiem).

Šai gadījumā uzdevuma autori likumu veidojuši, pievēršot uzmanību virknē blakusesošo locekļu starpībām. Ievērosim: tās ir 1; 3; 7; 15; 31; 63 – par vienu mazākas nekā secīgas divnieka pakāpes 2; 4; 8; 16; 32; 64.

Tātad saskaņā ar autoru iedomāto likumu virknes nākošos locekļus varēs iegūt, iepriekšējam pēc kārtas pieskaitot 127; 255; 511; 1023; 2047 utt. Tāpēc pieci nākošie virknes locekļi, rīkojoties pēc šāda likuma, būtu 250; 505; 1016; 2039; 4086. Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt: pēc šāda (autoru iecerētā) likuma jebkuru virknes locekli ar numuru n (to varam apzīmēt ar a_n, lasa: "a ar indeksu *en*") var aprēķināt pēc formulas $a_n = 2^n + 2 - n$. Pierādījumā pamēģiniet pielietot *matemātiskās indukcijas metodi*, t.i., pārliecināties, vai, virknes loceklim ar indeksu n (loceklim a_n) pieskaitot $(2^n - 1)$, iegūstam virknes (n+1)-ā locekļa aprēķināšanas formulu.

1.2.1. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A6. zīm.

Risinājums. "Nesašķeļot" visus trīs divciparu skaitļus, uzdevums nav atrisināms. Visās daļās esošo skaitļu summai jābūt 17+17+17=51. Ja "nesašķeļam" nevienu no tiem, šī summa ir 1+2+3+...+12=78; sašķeļot vienu no tiem, summa ir 69 (*pārbaudiet!*); "sašķeļot" divus, tā ir 60 (*pārbaudiet!*).



A6. zīm.

Jautājums zinātkāram lasītājam: kā izskaidrot faktu, ka, "sašķeļot" vienu (vienalga, kuru), iegūto 13 skaitļu summa visos gadījumos ir viena un tā pati? Kā izskaidrot faktu, ka "sašķeļot" divus skaitļus, (vienalga, kurus), iegūto 14 skaitļu summa visos gadījumos ir viena un tā pati?

1.2.2. ***Atbilde:*** 3×6 vai 4×4.

Risinājums. Tiešām, taisnstūra 3×6 laukums ir 3·6=18 un perimetrs ir 3+6+3+6=18, bet kvadrāta (kas arī ir taisnstūris) 4×4 laukums ir 4·4=16 un perimetrs ir 4+4+4+4=16.

Kaut arī uzdevumā tas **nav** prasīts, noskaidrosim, vai tās ir vienīgās iespējas.

Apzīmēsim meklējamā taisnstūra malu garumus ar x un y.

Tad $x \cdot y = 2x + 2y$ jeb

$xy - 2x - 2y + 4 = 4$, jeb

$(x-2)(y-2) = 4$ **(1)**

Izmantosim vienādību **(1)**. Tā kā x un y ir naturāli skaitļi, tad $x-2$ un $y-2$ var būt tikai veseli skaitļi – skaitļa 4 dalītāji. Visas iespējas parādītas A7. zīm.

$x-2$	$y-2$	x	y
4	1	6	3
1	4	3	6
2	2	4	4
-4	-1	-2	1
-1	-4	1	-2
-2	-2	0	0

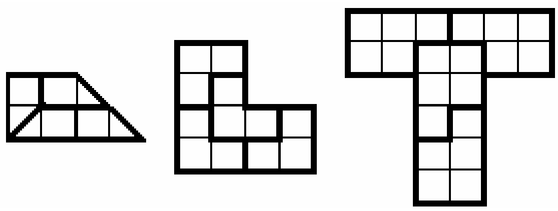
A7. zīm.

Redzam, ka uzdevuma prasības apmierina vienīgi taisnstūris ar izmēriem 3×6 un kvadrāts ar izmēriem 4×4, jo daudzstūra malu garumi nevar būt negatīvi skaitļi vai 0.

1.2.3. ***Atbilde:*** 1 neapmierinošs vērtējums.

Risinājums. Tā kā skolēnu skaitam jābūt veselam skaitlim, tad skaitlim, kas izsaka skolēnu skaitu klasē, noteikti jādalās ar 7, ar 3 un ar 2. Vienīgais skaitlis, kurš apmierina šo prasību un pie tam ir mazāks par 50, ir 42. Tātad atzīmi "9" saņēma seši skolēni, atzīmi "8" – 14 skolēni, atzīmi "7" – 21 skolēns. Tā kā 42–6–14–21=1, tad neapmierinošu vērtējumu saņēma viens skolēns.

1.2.4. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A8. zīm.



A8. zīm.

1.2.5. ***Atbilde:*** papīra lapu var saplēst gan 61, gan 1993 gabaliņos.

Risinājums. **a)** Lapu saplēš 8 gabalos. No tiem 6 gabalus saplēš katru 8 gabaliņos, 1 gabalu saplēš 12 gabaliņos, 1 gabalu atstāj veselu.

Kopējais gabalu skaits ir $6 \cdot 8+12+1=61$.

b) Vispirms lapu saplēš 8 daļās un katru no tām vēl 12 daļās. Iegūtas $8 \cdot 12= 96$ daļas.

No šīm 96 daļām septiņas saplēšam katru 8 gabalos, divas – katru 12 gabalos, 87 daļas atstājam nesaplēstas. Tagad mums ir $7 \cdot 8+2 \cdot 12+87=167$ gabali.

Vienu gabalu atstājot nesaplēstu, bet pārējos 166 saplēšot katru 12 gabaliņos, iegūstam $166 \cdot 12+1=1993$ gabaliņus.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pamatot, ka ar uzdevumā pieļautajām operācijām var iegūt jebkuru gabaliņu skaitu, kas nav mazāks par 61. Ievērojiet, ka katrā plēšanas reizē daļu skaits palielinās vai nu par 7, vai par 11.

1.3.1. ***Atbilde:*** jā, var.

Risinājums. Piemēram, Karaļdēls var pieveikt pūķi ar šādiem 9 cirtieniem (skat. A9. zīm.):

Nr.	Cik galvas nocērt	Cik astes nocērt	Cik galvas paliek	Cik astes paliek
1.	-	1	3	4
2.	-	1	3	5
3.	-	1	3	6
4.	-	2	4	4
5.	-	2	5	2
6.	-	2	6	0
7.	2	-	4	0
8.	2	-	2	0
9.	2	-	0	0

A9. zīm.

Uzdevuma risinājums atrasts sekojoši. Skaidrs, ka nocirst vienu galvu nav nozīmes, jo tā tūdaļ ataug. Zobena īpašības ļauj **a)** palielināt astu skaitu par 1, galvu skaitu nemainot, **b)** aizstāt divas astes ar vienu galvu, **c)** samazināt galvu skaitu par 2.

Uzstādām mērķi – panākt, lai pūķim nebūtu nevienas astes un būtu pāra skaits galvu, tad to varēs uzveikt ar **c)** tipa cirtieniem.

Panākt, lai Pūķim nebūtu nevienas astes, var, cērtot tās nost pa divām; tad vispirms astu skaits jāpadara par pāra skaitli. To var izdarīt, palielinot astu skaitu pakāpeniski par 1. Katrs astu pāris, to nocērtot, radīs vienu galvu. Mums vajag, lai brīdī, kad visas astes būs nocirstas, galvu daudzums būtu pāra skaitlis. Tā kā sākumā ir trīs galvas, tad vajag, lai astu pāru būtu nepāra skaits. Mazākais iegūstamais nepāra daudzums astu pāru ir 3.

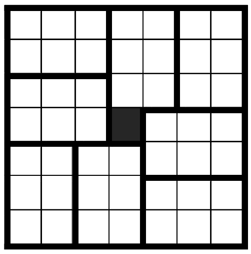
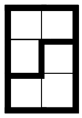
1\. – 3. cirtienos mēs iegūstam 3 astu pārus.

4\. – 5. cirtienos nocērtam visas astes, padarot galvu daudzumu par pāra skaitli.

7\. – 9. cirtienos nocērtam visas galvas.

1.3.2. ***Atbilde:*** jā, var.

Risinājums. Skat., piem., A10. zīm., kur katru no taisnstūriem ar izmēriem 2×3 var sagriezt 2 vienādos stūrīšos (skat. A11. zīm.).

A10. zīm. A11. zīm.

Iesakām lasītājam izpētīt citu figūriņu iespējamo sagriešanu stūrīšos. Piemēram, ir spēkā šāds rezultāts, ko astoņdesmito gadu beigās pierādīja LU studente Regīna Stadja:

ja $m \geq 7$, $n \geq 7$ *un no taisnstūra ar izmēriem* $m \times n$ *rūtiņas izgriezta viena rūtiņa, tad, ja* $m \cdot n - 1$ *dalās ar 3, atlikušo daļu var sagriezt stūrīšos.*

1.3.3. ***Atbilde:*** 13 riekstus.

Risinājums. No uzdevumā dotā seko, ka pērtiķu skaitam jābūt skaitļa 33 dalītājam. Tātad šis skaits varētu būt 3, 11 vai 33 (nevar būt 1 pērtiķis, jo tad nevarētu notikt strīds). Aplūkosim visas trīs iespējas. Ar x apzīmēsim riekstu skaitu, ko savāca katrs pērtiķis pirms ķīviņa.

a) Ja Mauglim riekstus nesa 3 pērtiķi, tad pēc ķīviņa viņiem palika $3(x-2)$ rieksti. Tātad $3(x-2)=33$. Seko, ka x=13.

b) Līdzīgi 11 pērtiķu gadījumā iegūstam vienādojumu $11(x-10)=33$, no kura atkal seko, ka x=13.

c) Ja pērtiķu skaits ir 33, tad attiecīgais vienādojums ir $33(x-31)=33$ un x=32. Bet šī atbilde neder, jo katrs pērtiķis var panest ne vairāk kā 20 riekstus.

Tātad uzdevumam ir tieši viena atbilde: katrs pērtiķis salasīja 13 riekstus.

1.3.4. ***Atbilde:*** 561 un 165.

Risinājums. Acīmredzami abiem spoguļskaitļiem jābūt trīsciparu; ja tie būtu divciparu, tad reizinājumā būtu ne vairāk kā 4 cipari, bet, ja tie būtu četrciparu, tad reizinājumā būtu vismaz 7 cipari.

Sadalīsim skaitli 92565 pirmreizinātājos: 92565=3·3·5·11·11·17. Abi spoguļskaitļi jāizveido no šiem reizinātājiem. Vienā no spoguļskaitļiem ietilpst 17; lai šis spoguļskaitlis būtu trīsciparu, 17 jāpareizina vismaz ar 6 (jo 5·17=85) un ne vairāk kā ar 58 (jo 59·17=1003). Tātad 17 varētu tikt pareizināts ar 11, 3·3=9, 3·5=15, 3·11=33, 5·11=55, 3·3·5=45.

Pārbaudot šīs iespējas, atrodam, ka der tikai skaitļu pāris (561,165): 561=3·11·17, 165=3·5·11.

1.3.5. ***Atbilde:*** piemēram, uzdodot jautājumu: "*Ko melis atbildēs uz jautājumu, uz kuru jāatbild "**top**"?*"

Risinājums. Uzdosim iezemietim jautājumu: "*Ko melis atbildēs uz jautājumu, uz kuru jāatbild "top"?*" *Pareizā* atbilde uz šo jautājumu ir „**tip**" (melis vienmēr melo, tāpēc „*jā*" vietā saka „*nē*" un „*nē*" vietā saka „*jā*").

Ja mēs runāsim ar godīgu iezemieti, tad viņš teiks "**tip**", bet ja mēs runāsim ar meli, tad viņš atkal samelos un atbildēs pretējo – tātad "**top**". Tātad pēc saņemtās atbildes mēs viennozīmīgi varēsim secināt, vai mūsu sarunu biedrs ir godīgs vai melis.

1.4.1. ***Atbilde:*** 303.

Risinājums. Sagrupējam ietilpstošos locekļus sekojoši:

$$1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+(10-11-12+13)+\ldots+(298-299-300+301)+302$$

(Tā kā katrās iekavās ievietoti četri izteiksmes locekļi un, dalot locekļu skaitu 302 ar 4, atlikumā iegūstam 2, tad grupās neievietoti paliek divi locekļi: pirmais – vieninieks un pēdējais – skaitlis 302).

Apzīmējot katras grupas pirmo locekli ar a, iegūstam, ka iekavu vērtība ir

$$a-(a+1)-(a+2)+(a+3)=0\,.$$

Tāpēc visas izteiksmes vērtība ir 1+302=303.

Iesakām lasītājam atrisināt uzdevumu, grupējot locekļus arī citādi, piemēram,

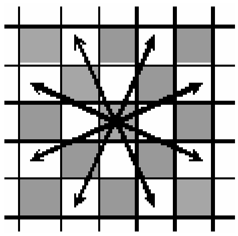
$$(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+(9+10-11-12)+\ldots.$$

1.4.2. ***Atbilde:*** 352 lpp.

Risinājums. Ja izplīsušā fragmenta pirmās lappuses numurs ir 387. – nepāra skaitlis, tad pēdējam numuram noteikti jābūt pāra skaitlim, kas pie tam lielāks par 387. Līdz ar to pēdējās izplēstās lappuses numurs var būt tikai 738. Tātad izplīsušajā fragmentā ir 738–387+1=352 lappuses.

1.4.3. ***Atbilde:*** prasītais zirdziņa maršruts neeksistē ne **a)**, ne **b)** gadījumā.

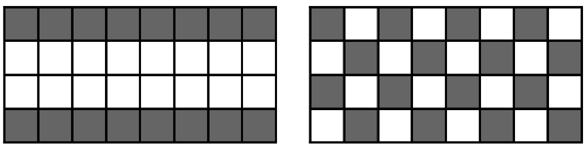
Risinājums. **a)** Izkrāsosim 7×9 lauciņu galdiņu parastā šaha galdiņa kārtībā, krāsojot lauciņus baltā un melnā krāsā. Uzdevumos par šaha zirdziņa gājieniem šī krāsojuma priekšrocības slēpjas faktā, ka šaha zirdziņš ar katru nākošo gājienu nokļūst pretējās krāsas lauciņā nekā tas, uz kura zirdziņš stāvēja pirms gājiena: no melnā uz balto un no baltā uz melno (skat. A12. zīm.).



A12. zīm.

Lai zirdziņš varētu apstaigāt galdiņu saskaņā ar uzdevumā prasīto, viņam jāizdara 63 gājieni – nepāra skaits. Viegli saprast, ka pēc 2., 4., 6., … – pēc jebkura pāra skaita gājienu zirdziņš atrodas tādas pašas krāsas lauciņā, kādā tas atradās kustības sākumā. Tāpēc pēc 63.gājiena tas atradīsies citas krāsas lauciņā nekā sākumā. Bet ar 63. gājienu zirdziņam vajadzētu atgriezties sākotnējā lauciņā. Saskaņā ar iepriekš sacīto tas nav izdarāms.

b) Lai noskaidrotu atbildi uz **b)** jautājumu, izkrāsosim 4×8 lauciņu galdiņu divos veidos (skat. A13. a) un b) zīm.).



a) b)

A13. zīm.

A13. a) zīm. iekrāsotos lauciņus nosauksim par *ārējiem*, bet neiekrāsotos par *iekšējiem*. Ievērosim, ka gadījumā, ja šaha zirdziņš atrodas uz *ārējā* lauciņa, tad ar savu nākošo gājienu tas var nonākt tikai *iekšējā* lauciņā. Un otrādi – zirdziņš var nokļūt *ārējā* lauciņā tikai no *iekšējā* lauciņa. Savukārt, ja zirdziņš atrodas *iekšējā* lauciņā, tad ar nākošo gājienu tas var nokļūt gan *iekšējā*, gan *ārējā* lauciņā.

Pierādīsim, ka patiesībā zirdziņam no *iekšējā* lauciņa noteikti jāiet uz *ārējo* lauciņu.

Kustības gaitā zirdziņam jāaiziet no visiem 16 ārējiem lauciņiem. Tā kā viņa "*piezemēšanās vietas*" šajos gadījumos var būt tikai *iekšējie* lauciņi un to skaits arī ir 16, tad katrs no tiem tiek izmantots kā "*piezemēšanās vieta*" vienu reizi, aizejot no kāda *ārējā* lauciņa (atceramies, ka katrā lauciņā drīkst nonākt tikai vienu reizi). Bet tad nevienu *iekšējo* lauciņu X nedrīkst izmantot kā "*piezemēšanās vietu*", aizejot no *iekšēja* lauciņa, jo tad lauciņā X zirdziņš nonāktu divas reizes, kas nav atļauts.

Secinām, ka *ārējie* un *iekšējie* lauciņi zirdziņa maršrutā var sakārtoties divējādi:

ie→ā→ie→ā→ie→ā→…→ie→ā→ie

(*) vai

ā→ie→ā→ie→ā→ie→…→ā→ie→ā

Aplūkojot A13. b) zīm., kur lauciņi krāsoti melnā un baltā krāsā, redzam, ka zirdziņa maršrutā krāsas mainās kā

b→m→b→m→b→m→…→b→m→b

(**) vai

m→b→m→b→m→b→…→m→b→m

No (*) un (**) seko, ka mūsu domājamā zirdziņa maršrutā visi apstaigātie ārējie lauciņi ir vienā un tai pašā krāsā. Tas nozīmē, ka otras krāsas ārējie lauciņi apstaigāti netiek. Tātad uzdevuma prasības netiek izpildītas.

Secinām, ka prasītā zirdziņa maršruta nav.

Piezīme: ja mēs būtu izmantojuši tikai A13. b) zīm. un mēģinājuši spriest tā kā **a)** uzdevuma risinājumā, mēs pie mērķa nenonāktu. Tiešām, mēs konstatētu, ka melno un balto lauciņu ir vienāds skaits, jāizdara pāra skaits gājienu un ar pēdējo gājienu jāatgriežas tās pašas krāsas lauciņā kā tas, no kura sākta kustība; tas it kā varētu būt iespējams. Situācija ir tāda pati kā 1.1.1. uzdevuma risinājumā: melno un balto rūtiņu skaitu vienādība ir ***nepieciešams***, bet ne ***pietiekams*** nosacījums tam, lai eksistētu slēgts šaha zirdziņa maršruts.

1.4.4. ***Atbilde:*** tādi skaitļi neeksistē.

Risinājums. Starp katriem diviem pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens ir pāra skaitlis; starp katriem pieciem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem viens dalās ar 5. Tāpēc katru piecu (vai vairāk) pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās gan ar 2, gan ar 5, tātad tas dalās ar 10, tātad beidzas ar ciparu 0.

Atliek noskaidrot, vai skaitlis, kas beidzas ar ciparu 8, var būt divu, triju vai četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums.

Risinājumā izmantosim faktu: *divu vai vairāku naturālu reizinātāju reizinājums beidzas ar tādu pašu ciparu, ar kādu beidzas reizinātāju pēdējo ciparu reizinājums*.

Aplūkosim, ar kādu ciparu var beigties divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums. Apzīmēsim mazāko no tiem ar **n**; tad lielākais ir **n+1**. Apskatām visas iespējas:

n beidzas ar	**n+1** beidzas ar	**n(n+1)** beidzas ar
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

Redzam, ka **n(n+1)** nevienam naturālam n nebeidzas ar ciparu 8.

Līdzīgi pārbaudām, ka **n(n+1)(n+2)** var beigties tikai ar cipariem 0; 4; 6:

n beidzas ar	**n+1** beidzas ar	**n+2** beidzas ar	**n(n+1)(n+2)** beidzas ar
0	1	2	0
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	0	0
9	0	1	0

Reizinājums **n(n+1)(n+2)(n+3)** var beigties tikai ar cipariem 0; 4 (**n** – naturāls):

n beidzas ar	**n+1** beidzas ar	**n+2** beidzas ar	**n+3** beidzas ar	**n(n+1)(n+2)(n+3)** beidzas ar
0	1	2	3	0
1	2	3	4	4
2	3	4	5	0
3	4	5	6	0
4	5	6	7	0
5	6	7	8	0
6	7	8	9	4
7	8	9	0	0
8	9	0	1	0
9	0	1	2	0

Tātad tādu skaitļu, par kādiem runāts uzdevumā, nemaz nav.

1.4.5. ***Atbilde.*** Par uzdevumā prasīto līniju der jebkura noslēgta līnija, kas uzzīmēta uz lodes virsmas. Visi šīs līnijas punkti atrodas vienādā attālumā no lodes centra P.
Plaknē bez riņķa līnijas citu līniju ar šādu īpašību nav.

1993./94. mācību gads

2.1.1. ***Atbilde:*** Annas tantei var būt divi vai trīs dzīvnieki.

Risinājums. Apzīmēsim suņu, kaķu, papagaiļu un tarakānu skaitu atbilstoši ar *s*, *k*, *p*, *t*. Iegūstam vienādības

$$\begin{aligned} &k+p+t=2 \\ &s+k+t=2 \qquad \textbf{(1)} \\ &s+p+t=2 \end{aligned}$$

Tās saskaitot, iegūstam

$$2(k+s+p)+3t=6 \qquad \textbf{(2)}$$

Ievērosim, ka $t\geq 0$ un t – vesels skaitlis. Ja $t>2$, tad no **(2)** seko, ka

$$2(k+s+p)=6-3t<0.$$

Tā nevar būt, jo $k\geq 0$, $s\geq 0$ un $p\geq 0$, tātad arī $k+s+p\geq 0$. Tāpēc t var pieņemt tikai vērtības 0; 1; 2. Apskatīsim šīs iespējas.

A. Ja $t=2$, no **(2)** seko $k+s+p=0$; tā kā *k*, *s*, *p* nav negatīvi, tad $k=s=p=0$. Iznāk, ka Annas tantei ir 2 tarakāni un nav citu dzīvnieku. Vai šāda iespēja apmierina uzdevuma nosacījumus? Vārdi "visi dzīvnieki, izņemot divus" šai gadījumā nozīmē "visi, izņemot abus tarakānus". No formālās loģikas viedokļa viss ir kārtībā: katrs dzīvnieks, kas ir Annas tantei, izņemot abus tarakānus, ir gan kaķis, gan suns, gan papagailis, jo šādu dzīvnieku nemaz nav! Tātad ir iespējams, ka Annas tantei ir 2 dzīvnieki – 2 tarakāni.

B. Ja $t=1$, tad no **(2)** iznāk $2(k+s+p)=3$. Tas nav iespējams, jo $2(k+s+p)$ ir pāra skaitlis, bet 3 – nepāra skaitlis.

C. Ja $t=0$, tad no **(2)** seko

$$k+s+p=3 \qquad \mathbf{(3)}$$

Atgriežoties pie sākotnējām vienādībām **(1)** un ievietojot $t=0$, iegūstam

$$\begin{aligned} &k+p=2 \\ &s+k=2 \qquad \mathbf{(4)} \\ &s+p=2 \end{aligned}$$

Atņemot no **(3)** pa vienai visas trīs vienādības **(4)**, iegūstam $s=1$, $k=1$, $p=1$, t.i., Annas tantei ir viens suns, viens kaķis un viens papagailis. Viegli pārbaudīt, ka arī šis gadījums apmierina uzdevuma prasības.

2.1.2. ***Atbilde:*** **a)** 77192329; **b)** 11111229

Risinājums. Uzrakstot rindā augošā secībā pirmos desmit pirmskaitļus, iegūstam skaitli

$$S=2357111317192329.$$

No tā jāizsvītro 8 cipari.

Uzdevuma risinājumā balstīsimies uz diviem faktiem.

A Ja diviem naturāliem skaitļiem ir vienāds ciparu skaits, tad lielāks ir tas skaitlis, kam lielāks pirmais cipars (vai lielāks n–tais cipars, ja abiem skaitļiem pirmie, otrie, trešie, …, $(n$-1)–ie cipari sakrīt).

B Pieņemsim, ka kādā ciparu virknē vairākās vietās sastopams cipars a. Ja, izsvītrojot vairākus ciparus, no virknes X var iegūt virkni Y, kas sākas ar ciparu a, tad virkni Y noteikti var iegūt šādas izsvītrošanas ceļā, atstājot neizsvītrotu pašu pirmo a eksemplāru virknē X.

(Piemēram, no 12020354 var iegūt virkni 234 sekojošā ceļā: ~~120~~2~~0~~3~~5~~4, bet to pašu var iegūt arī kā ~~1~~2~~020~~3~~5~~4).

Tiešām, ja virkne Y jau sākas ar cipara a pirmo eksemplāru, viss kārtībā. Ja virkne Y sākas ar cipara a kādu tālāku eksemplāru, tad tādu pašu Y varam iegūt, izsvītrojot šo tālāko a eksemplāru, neizsvītrojot pirmo a eksemplāru, bet pārējā daļā svītrošanu nemainot.

Pamatojoties uz **B**, varam secināt: ja mums kādu apsvērumu dēļ virknē jāatstāj cipars a, tad mēs to noteikti varam darīt, atstājot vistālāk pa kreisi esošo pieejamo a eksemplāru, un šāda rīcība mūsu tālākās iespējas nesašaurinās.

Tagad pārejam pie uzdevuma risinājuma.

a) Pēc svītrošanas iegūstamajā 8–ciparu skaitlī (apzīmēsim to ar $x=\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8}$) pirmo ciparu jācenšas atstāt iespējami lielu – atcerieties faktu **A**! Lielākie mums pieejamie cipari ir 9 un 7. Ja $x_1=9$, tad virknē x nevar būt 8 cipari, tāpēc $x_1=7$. Pamatojoties uz faktu **B**, svītrojam virknē S trīs pirmos ciparus; paliek virkne

$$S_1=7111317192329$$

Pamatojoties uz faktu **A**, otrais cipars jāizvēlas iespējami liels. Atkal redzam, ka nevaram izvēlēties ciparu 9 (tad skaitlī x nevarēs būt vairāk par 6 cipariem), tāpēc jābūt $x_2=7$; to varam izvēlēties tikai vienā veidā. Svītrojot ciparus starp abiem septītniekiem, iegūstam

$$S_2=77192329$$

Redzam, ka palikuši tikai 8 cipari, tātad tālāka svītrošana nav iespējama, un meklējamais skaitlis x jau ir iegūts.

b) Līdzīgi cenšoties pirmos ciparus atstāt iespējami mazus, iegūstam, ka meklējamo svītrošanu jārealizē kā

~~2357~~111~~3~~1~~7~~1~~9~~2~~3~~29,
iegūstot skaitli 11111229.

2.1.3. ***Atbilde:*** 2100010006.

Risinājums. Viegli pārliecināties, ka par uzdevumā prasīto skaitli der skaitlis 2100010006. To var atrast, piemēram, mēģinājumu ceļā.

Parādīsim, kā šo skaitli varēja atrast loģisku spriedumu ceļā, un vienlaikus parādīsim, ka citu šādu skaitļu nav.

Ciparus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sauksim par zīmīgiem cipariem. Tā kā mums jāatrod desmitciparu skaitlis, tad pirmajam ciparam noteikti jābūt zīmīgajam ciparam.

Mēģināsim noskaidrot, cik nuļļu var būt meklējamajā skaitlī.

Skaidrs, ka visi cipari nevar būt nulles, jo pēdējam ciparam jānorāda, cik nulles ir skaitlī, tātad tas nav nulle.

Šādā skaitlī nevar būt arī deviņas nulles jeb tikai viens zīmīgais cipars, jo zīmīgiem jābūt gan pirmajam ciparam, gan pēdējam (kas norāda nuļļu skaitu).

Tāpat meklējamajā skaitlī nevar būt tieši astoņas nulles, jo jābūt vismaz trīs zīmīgajiem cipariem: pirmajam, pēdējam (tas būtu 8) un astotajam (jo būs vismaz viens astotnieks – pēdējais cipars).

Neviens zīmīgais cipars šajā skaitlī nevar atkārtoties 6 vai vairāk reizes, t.i., šajā skaitlī neviens cipars (varbūt vienīgi izņemot pēdējo ciparu) nav 6, 7, 8 vai 9. Pierādīsim šo faktu. Pieņemsim, ka meklējamā skaitlī k–tais cipars (k=1, 2, …, 9) nav mazāks par 6. Tas nozīmē, ka meklējamā skaitlī ir vismaz 6 (cipars k, kurš atkārtojas vismaz 6 reizes) + $5 \cdot k$ ($k \neq 0$, tāpēc jābūt vismaz pieciem citiem dažādiem cipariem, katrs no kuriem atkārtojas tieši k reizes) ciparu. Bet k mazākā iespējamā vērtība ir 1, tāpēc $6+5k \geq 6+5 \cdot 1=11$. Tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka meklējamajā skaitlī ir desmit ciparu, tātad mūsu pieņēmums bija aplams un neviens zīmīgais cipars nevar atkārtoties vairāk kā piecas reizes.

Pieņemsim, ka meklējamā skaitlī k–tais cipars ir 5. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūstam, ka šajā skaitlī būs vismaz $5+4k$ cipari. Ja $k \geq 2$, tad $5+4k \geq 5+4 \cdot 2=13$, kas arī neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Ja $k=1$, tad $5+4k=5+4 \cdot 1=9$. Taču šis rezultāts vēl nenozīmē, ka šāds skaitlis, kura pirmais cipars ir 5 un vieninieks atkārtojas 5 reizes, patiešām eksistē. Mēģināsim izveidot šādu skaitli. Ja pirmais cipars ir 5, tad skaitlī vēl ir pieci vieninieki. Tas nozīmē, ka vēl vismaz 3 citi zīmīgie cipari a, b, c (izņemot 1 un 5) šajā skaitlī parādās vienu reizi. Bet tas savukārt nozīmē, ka šajā skaitlī ir vēl trīs citi no 1, 5, a, b, c atšķirīgi cipari p, m, n, katrs no kuriem skaitlī atkārtojas attiecīgi a, b, c reizes. Tātad šajā skaitlī pavisam kopā ir vismaz $1+5+p \cdot a+m \cdot b+p \cdot n$ cipari. Tā kā starp p, m, n vismaz divi ir zīmīgie cipari(t.i., nav nulle) un no cipariem a, b, c arī neviens nav 0 vai 1 (tātad tie visi ir lielāki nekā 1), tad $6+p \cdot a+m \cdot b+p \cdot n>6+2 \cdot 2+2 \cdot 2>10$. Atkal ieguvām pretrunu uzdevuma nosacījumiem, tātad neviens zīmīgais cipars šajā skaitlī nevar atkārtoties arī 5 reizes.

Līdzīgi pierāda, ka neviens zīmīgais cipars nevar atkārtoties arī 4 vai 3 reizes.

Mēģināsim izveidot skaitli, kurā kāds zīmīgais cipars atkārtojas 2 reizes. Šis cipars nevar būt 2 vai lielāks, jo tādā gadījumā meklējamā skaitlī būtu jābūt vairāk nekā 10 cipariem (izspriež līdzīgi kā iepriekšējā pierādījumā). Tātad veidosim skaitli, kurš atbilstu uzdevuma nosacījumiem un kurā cipars 1 atkārtojas 2 reizes. Tātad šī skaitļa pirmais cipars ir 2 un otrais cipars ir 1 (otrais cipars nevar būt 2 vai lielāks, tas seko no iepriekš pierādītā). Tātad šajā skaitlī vēl ir viens vieninieks, nulles un viens zīmīgais cipars, kas parāda nuļļu skaitu (nevar būt tikai viena nulle, jo tad skaitlī būtu jābūt vismaz 8 zīmīgiem cipariem, bet tad šis skaitlis neatbilstu uzdevuma prasībām). Tātad šajā skaitlī pavisam ir 4 zīmīgie cipari: abi vieninieki, divnieks un pēdējais cipars. Tātad pārējie seši cipari ir nulles un meklējamais skaitlis ir 2100010006.

Esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus, tātad neviena cita skaitļa, kas atbilstu uzdevuma nosacījumiem, nav.

2.1.4. ***Atbilde:*** jā, var, piemēram, vienā kaudzītē liekot atsvarus ar masām 10 *g*, 11 *g*, ..., 18 *g*, 20 *g*, 21 *g*, ..., 35 *g*, 68 *g*, 69 *g*, ..., 92 *g*, bet otrā kaudzītē visus pārējos atsvarus.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, vai vispār iespējams atlikušos atsvarus sadalīt divās kaudzēs tā, lai atsvaru masas abās kaudzēs būtu vienādas, t.i., vai atlikušo atsvaru kopējā masa ir pāra skaitlis.

Aprēķināsim, cik ir visu atsvaru kopējā masa. Atsvaru masas ir 1 *g*, 2 *g*, 3 *g*, …, 100 *g*, 101 *g*, t.i., katrs nākamais atsvars ir tieši par vienu gramu smagāks nekā iepriekšējais. Šādu skaitļu virkni, kur katrs nākamais skaitlis iegūstams iepriekšējam skaitlim pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par ***aritmētisko progresiju***. *Aritmētiskās progresijas* pirmo locekli apzīmē ar a_1, otro – ar a_2, …, n–to locekli – ar a_n, bet skaitli, kuru pieskaita (par kuru atšķiras katrs nākamais loceklis no iepriekšējā), sauc par diferenci un apzīmē ar d. Aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summu S_n aprēķina pēc formulas $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$. Tātad uzdevumā doto visu atsvaru kopējā masa ir $\dfrac{(1+101)\cdot 101}{2} = 51\cdot 101 = 5151\,(g)$. No šī komplekta izņemot atsvaru ar masu 19 *g*, atlikušo atsvaru masa ir 5151–19=5132 (*g*). Tas ir pāra skaitlis, tātad varētu būt iespējami sadalīt šos atsvarus divās kaudzēs ar vienādām masām, taču, kā saka matemātiķi, tas ir tikai *nepieciešamais* nosacījums un negarantē uzdevuma prasību izpildi.

Ja dotos atsvarus var sadalīt atbilstoši uzdevuma prasībām tad vienā kaudzē ievietoto atsvaru kopējai masai jābūt $5132:2=2566$ *g*.

Apvienosim atsvarus pa pāriem (1 *g*; 101 *g*), (2 *g*; 100 *g*), (3 *g*; 99 *g*), …, (17 *g*; 85 *g*), (18 *g*; 84 *g*) (18 pāri; katra pāra masa ir 102 *g*) un (20 *g*; 83 *g*), (21 *g*; 82 *g*), …, (50 *g*; 53 *g*), (51 *g*; 52 *g*) (32 pāri; katra pāra masa ir 103 grami). Vienā kaudzē izvēloties 9 pirmā veida pārus un 16 otrā veida pārus, bet pārējos atsvarus atstājot otrā kaudzē, būsim izpildījuši uzdevuma prasības.

Patiešām, katrā kaudzē ir 9+16=25 atsvaru pāri, tātad 25·2=50 atsvari, un katras kaudzes masa ir $9\cdot 102+16\cdot 103=2566$ (*g*).

2.1.5. ***Atbilde:*** $d<a<c<b$.

Risinājums. Pārveidosim dotos skaitļus:

$$a = 2^{45} = \underbrace{2\cdot 2\cdot ...\cdot 2\cdot 2}_{45\ reizes} = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot ...\cdot (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{9\ reizes} = \left(2^5\right)^9 = 32^9$$

$$b = 3^{36} = \underbrace{3\cdot 3\cdot ...\cdot 3\cdot 3}_{36\ reizes} = \underbrace{(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot ...\cdot (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)}_{9\ reizes} = \left(3^4\right)^9 = 81^9$$

$$c = 4^{27} = \underbrace{4\cdot 4\cdot ...\cdot 4\cdot 4}_{27\ reizes} = \underbrace{(4\cdot 4\cdot 4)\cdot ...\cdot (4\cdot 4\cdot 4)}_{9\ reizes} = \left(4^3\right)^9 = 64^9$$

$$d = 5^{18} = \underbrace{5\cdot 5\cdot ...\cdot 5\cdot 5}_{18\ reizes} = \underbrace{(5\cdot 5)\cdot ...\cdot (5\cdot 5)}_{9\ reizes} = \left(5^2\right)^9 = 25^9$$

Lai salīdzinātu skaitļus 32^9, 81^9, 64^9, 25^9, jāsalīdzina skaitļi 32, 81, 64, 25; rezultāts būs lielāks, ja lielāku skaitli reizinās pašu ar sevi 9 reizes. Tā kā 25<32<64<81, tad arī $25^9 < 32^9 < 64^9 < 81^9$ jeb $d<a<c<b$.

2.2.1. *Risinājums.* Tā kā zemniekam ir 12 *l* piena, tad, sadalot to divās vienādās daļās, jāiegūst divos traukos katrā pa 6 *l* piena. Kā zemnieks var rīkoties, parādīts sekojošā tabulā (skat. A14.zīm.):

	12*l* kannā	**8*l* spainī**	**5*l* kannā**	
Sākumā	12 *l*	0 *l*	0 *l*	piepilda 8*l* spaini
pēc 1.liešanas	4 *l*	8 *l*	0 *l*	no 8*l* spaiņa piepilda 5*l* kannu
pēc 2.liešanas	4 *l*	3 *l*	5 *l*	5*l* kannas saturu salej 12*l* kannā
pēc 3.liešanas	9 *l*	3 *l*	0 *l*	8*l* spaini iztukšo 5*l* kannā
pēc 4.liešanas	9 *l*	0 *l*	3 *l*	no 12*l* kannas piepilda 8*l* spaini
pēc 5.liešanas	1 *l*	8 *l*	3 *l*	no 8*l* spaiņa piepilda pilnu 5*l* kannu
pēc 6.liešanas	1 *l*	6 *l*	5 *l*	5*l* kannas saturu salej 12*l* kannā
pēc 7.liešanas	6 *l*	6 *l*	0 *l*	

A14. zīm.

2.2.2. *Atbilde:* jāizņem viena cepure no atvilktnes ar zīmīti [○●].

Risinājums. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, atvilktnē ar zīmīti [○○] var atrasties vai nu divas melnas cepures, vai viena balta un viena melna cepure; izvelkot tikai vienu cepuri no šīs atvilktnes, nevar viennozīmīgi pateikt, kādas cepures tur atrodas. Atvilktnē ar zīmīti [●●] var atrasties vai nu divas baltas cepures, vai viena balta un viena melna cepure; arī šajā gadījumā, izvelkot tikai vienu cepuri, nevar viennozīmīgi pateikt, kādas cepures atrodas šajā atvilknē. Atvilktnē ar zīmīti [○●] var atrasties vai nu divas baltas, vai divas melnas cepures; izvelkot vienu cepuri no šīs atvilktnes, varam viennozīmīgi pateikt, kādas cepures īstenībā atrodas šajā atvilktnē: ja izvilktā cepure ir balta, tad šajā atvilktnē ir divas baltas cepures, ja melna – tad divas melnas cepures. Tagad noskaidrosim, kā pareizi ir jāsaliek zīmītes uz pārējām atvilktnēm, kad esam noskaidrojuši atvilktnes [○●] saturu.

Ja sākumā uz atvilktnēm bija zīmītes šādā secībā [●●], [○●], [○○] un

1) no atvilktnes [○●] izņemtā cepure ir balta, tad patiesībā pie otrās atvilktnes jābūt zīmītei [○○]; tā kā nevienā atvilktnē cepuru krāsa neatbilst zīmītei, tad zīmītei [○●] jābūt pie pirmās atvilktnes un pie trešās atvilktnes jābūt zīmītei [●●].

Pareizā zīmīšu secība ir [○●], [○○], [●●].

2) no atvilktnes [○●] izņemtā cepure ir melna, tad patiesībā pie otrās atvilktnes jābūt zīmītei [●●]; tā kā nevienā atvilktnē cepuru krāsa neatbilst zīmītei, tad zīmītei [○●] jābūt pie trešās atvilktnes un pie pirmās atvilktnes jābūt zīmītei [○○].

Pareizā zīmīšu secība ir [○○], [●●], [○●].

2.2.3. *Atbilde:* 3.

Risinājums. Jebkurš naturāls skaitlis, tātad arī pirmskaitlis, var vai nu

1) dalīties ar 3; tad to var uzrakstīt formā $p=3k$, k – naturāls. Vienīgais pirmskaitlis, kas dalās ar 3, ir 3. Pārbaudīsim, vai pirmskaitlis p=3 atbilst uzdevuma prasībām:

$2p+1=2\cdot3+1=7$ ir pirmskaitlis un $4p+1=4\cdot3+1=13$ ir pirmskaitlis. Tātad pirmskaitlis $p=3$ apmierina uzdevuma prasības.

2) dot atlikumu 1, dalot ar 3; tad to var uzrakstīt formā $p=3k+1$, k – naturāls. Tā kā p ir pirmskaitlis un mazākais pirmskaitlis ir 2, tad $k\geq1$. Tad

$2p+1=2\cdot(3k+1)+1=6k+3=3\cdot(2k+1)\geq3\cdot(2\cdot1+1)=9$ un dalās ar 3, tātad $2p+1$ nav pirmskaitlis un uzdevuma prasības neapmierina neviens pirmskaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1.

3) dot atlikumu 2, dalot ar 3; tad to var uzrakstīt formā $p=3k+2$, k – naturāls vai 0. Tad

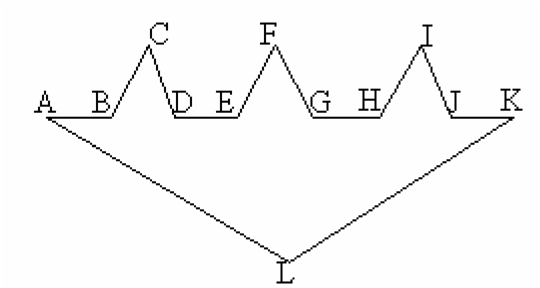
$4p+1=4\cdot(3k+2)+1=12k+9=3\cdot(4k+3)\geq9$ un dalās ar 3, tātad $4p+1$ nav pirmskaitlis. Tātad uzdevuma prasības neapmierina neviens pirmskaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2.

Esam aplūkojuši visas iespējas, un vienīgais pirmskaitlis, kas apmierina uzdevuma prasības, ir skaitlis 3.

2.2.4. ***Atbilde:*** 8 virsotnes.

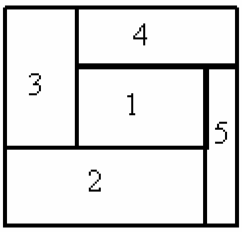
Risinājums. Pieņemsim, ka dots 12–stūris ABCDEFGHIJKI.

Sadalīsim šī daudzstūra virsotnes četrās grupās pa trim virsotnēm katrā: A, B, C; D, E, F; G, H, I; J, K, L. Katrā grupā apvienotas blakus virsotnes, t.i., uz vienas taisnes no šiem trīs punktiem var atrasties tikai divi punkti. Ja kādā grupā uz vienas taisnes atrastos visi trīs punkti no vienas grupas, tad daudzstūrim būtu mazāk nekā 12 virsotņu un tas nebūtu 12-stūris. Tātad 12-stūrī uz vienas taisnes var atrasties ne vairāk kā 2·4=8 virsotnes. A15. zīmējumā parādīts 12-stūris, kuram 8 virsotnes atrodas uz vienas taisnes.

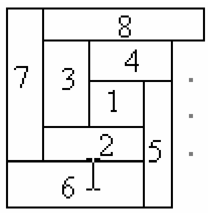


A15. zīm.

2.2.5. ***Atbilde:*** **a)** skat. A16. zīm., **b)** skat. A17. zīm.



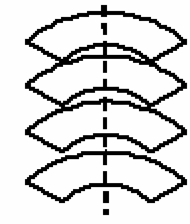
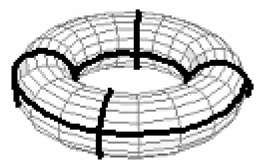
A16. zīm.



A17. zīm.

Risinājums. **b)** Tā kā 1993 ir pietiekami liels taisnstūru skaits, visus tos zīmējumā neparādīsim. Uzdevumu veiksim "*no otra gala*" – nevis sagriezīsim doto taisnstūri mazākās daļās, bet no mazākiem taisnstūriem liksim kopā doto taisnstūri. Tā kā nav nekādu nosacījumu par taisnstūru izmēriem, tad mazajiem taisnstūriem varam izvēlēties izmērus tā, lai beigās iegūtu doto taisnstūri. A17. zīmējumā parādīts dotā taisnstūra veidošanas (sagriešanas) princips – sākam ar vienu mazāku taisnstūri, un tam apkārt pa vienam liekam klāt citus taisnstūrus, atbilstoši uzdevuma prasībām, lai nekādi divi taisnstūri kopā neveidotu vienu taisnstūri; ar skaitļiem taisnstūros ir parādīta to pievienošanas secība.

2.3.1. ***Risinājums.*** Ja griešanas laikā gabalus būtu atļauts izkustināt, tad baranku varētu sagriezt 8 vienādos gabalos ar trīs taisniem naža griezieniem sekojoši: vispirms ar diviem griezieniem sagriež baranku 4 gabalos, bet tad iegūtos gabalus novieto tā kā parādīts A18. zīmējumā, un ar vienu naža griezienu pārgriež visus gabalus uz pusēm.

A18. zīm. A19. zīm.

Bet uzdevumā teikts, ka gabalus griešanas laikā izkustināt nedrīkst. Tad šādā veidā (griežot tikai vertikāli; sadalot vajadzīgā skaitā daļu barankas "augšu") uzdevuma prasības izpildīt nevar. Atcerēsimies, ka barankai ir arī biezums un baranku var griezt arī horizontāli. Tātad uzdevuma prasības ir izpildāmas sekojošā veidā: vispirms sagriežam baranku uz pusēm ar horizontālu griezienu, pēc tam ar diviem vertikāliem griezieniem sagriežam barankas "augšu" un "apakšu" 4 vienādās daļās; kopā ir iegūti 8 vienādi gabali (skat. A19. zīm.).

2.3.2. ***Atbilde:*** 681.

Risinājums. Varam ievērot, ka tabulā skaitļi tiek ierakstīti sekojoši: augšējā rindā un kreisajā kolonnā tiek ierakstīti naturālie skaitļi pēc kārtas; pārējās rūtiņās ierakstītos skaitļus iegūst šādi: rūtiņā A ierakstīta rūtiņās B, C un D ierakstīto skaitļu summa (skat. A20. zīm.). Tātad jautājuma zīmes vietā jāieraksta skaitlis 129+276+276=681 (skat. A21. zīm.)

B	C	
D	A	

A20. zīm.

1	2	3	4	5
2	5	10	17	26
3	10	25	52	95
4	17	52	129	276
5	26	95	276	

A21. zīm.

Piezīme. Šāda tipa uzdevumos atbilde principā varētu būt jebkāda: uzdevuma autors varētu būt iedomājies, ka tabulas sākuma daļa aizpildās pēc viena noteikta likuma, bet sākot ar kādu vietu – pēc cita likuma, vtml. (skat. skaidrojumus 1.1.5. uzdevuma risinājumā).

2.3.3. ***Atbilde:*** zivs sver 32 *kg*.

Risinājums. Apzīmēsim zivs ķermeņa masu ar x *kg* un galvas masu ar y *kg*, astes masa ir 4 *kg*. Pēc uzdevuma nosacījumiem varam sastādīt sekojošus vienādojumus:

$$y = 4 + \frac{1}{2}x \qquad \textbf{(1)}$$

$$x = y + 4 \qquad \textbf{(2)}$$

No šiem vienādojumiem seko

$$x = \left(4 + \frac{1}{2}x\right) + 4 \quad \text{jeb} \quad x - \frac{1}{2}x = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 8 \Rightarrow x = 16\ (kg)$$

$$y = 4 + \frac{1}{2}\cdot 16 = 4 + 8 = 12\ (kg).$$

Tātad zivs ķermenis sver 16 *kg*, galva sver 12 *kg* un visa zivs sver 16+12+4=32 (*kg*).

2.3.4. ***Atbilde:*** Saldumiņš mājās nokļuva ātrāk nekā Rūgtumiņš.

Risinājums. Rūķītis Rūgtumiņš noskrēja un nogāja vienādu ceļa gabalu, taču, tā kā skriešanas ātrums ir lielāks nekā iešanas ātrums, tad viņš skrēja mazāku laika sprīdi nekā gāja. Savukārt Saldumiņš skrēja un gāja vienādu laika sprīdi, tātad skrienot viņš veica lielāku ceļa gabalu nekā ejot, jo skriešanas ātrums ir lielāks par iešanas ātrumu. Sekojoši Saldumiņš noskrēja lielāku gabalu nekā Rūgtumiņš un gāja īsāku gabalu nekā Rūgtumiņš, tādējādi Saldumiņš mājās nokļuva ātrāk nekā Rūgtumiņš.

2.3.5. ***Risinājums.*** Sverot ar sviras svariem, varam salīdzināt divas kaudzītes, t.i., secināt, ka tās sver vienādi, vai arī noskaidrot, kura no kaudzītēm ir smagāka. Ja uz abiem svaru kausiem uzliksim vienādu skaitu riekstu, tad tā kaudzīte, kurā ir vieglākais rieksts, būs vieglāka par otro kaudzīti. Ja abas kaudzītes svērs vienādi, tad vieglākais rieksts nebūs uzlikts ne uz viena svaru kausa.

Vāverīte visus riekstus sadala 3 vienādās kaudzītēs, katrā pa 27 riekstiem. Pirmajā svēršanā salīdzina divas no šīm kaudzītēm. Ja viena kaudzīte ir vieglāka pa otru, tad šajā kaudzītē ir vieglākais rieksts; ja abas šīs kaudzītes ir vienādā svarā, tad vieglākais rieksts ir trešajā, nesvērtajā kaudzītē.

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir vieglākais rieksts (pārējos 54 riekstus atliekam malā). Sadalīsim šos 27 riekstus trīs kaudzītēs, katrā pa 9 riekstiem. Ar otro svēršanu noskaidrosim, kurā no šīm kaudzītēm ir vieglākais rieksts. (Spriežam līdzīgi kā pirmajā svēršanā.)

Pēc tam tos 9 riekstus, starp kuriem ir vieglākais rieksts, sadalām trīs kaudzītēs pa trīs riekstiem katrā, un trešajā svēršanā noskaidrojam, starp kuriem 3 riekstiem ir vieglākais.

Ceturtajā svēršanā noskaidrojam, kurš rieksts ir vieglāks par pārējiem: uz svaru kausiem liekam pa vienam riekstam no tiem 3, starp kuriem ir vieglākais rieksts. Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā ir vieglākais rieksts, ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad vieglākais rieksts ir tas, kas šoreiz palika nesvērts.

2.4.1. ***Atbilde:*** 1994·7=13958

Risinājums. Uzrakstīsim doto reizināšanas piemēru, viencipara reizinātāju apzīmējot ar burtu a: $1994 \cdot a = *****$.

Tā kā 1994·5=9970, t.i., reizinājums ir tikai četrciparu skaitlis, bet dotā piemēra reizinājums ir piecciparu skaitlis, tad $a>5$. Pārbaudīsim visas iespējas

a=6: 1994·6=11964, neder, jo ir divi cipari 1;

a=7: 1994·7=13958, apmierina uzdevuma prasības;

a=8: 1994·8=15952, neder, jo ir divi cipari 5;

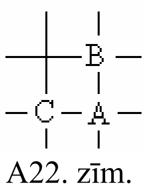
a=9: 1994·9=17946, neder, jo ir divi cipari 9.

Vienīgais gadījums, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 1994·7=13958.

2.4.2. ***Atbilde:*** pa 3432 dažādiem ceļiem.

Risinājums. Ievērosim, ka

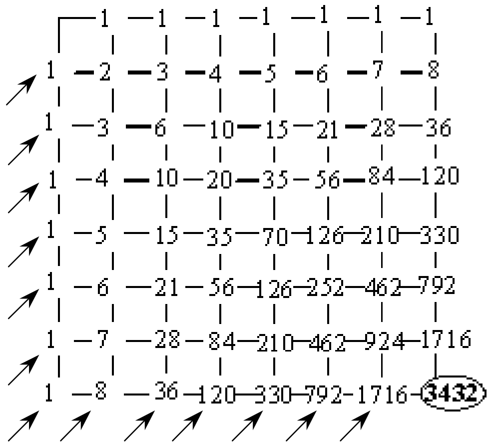
(*) skudriņa Tipa uz katru augšējās rindas virsotni var nokļūt tikai vienā veidā: ejot tikai pa labi; tāpat uz katru kreisās kolonnas virsotni var nokļūt tikai vienā veidā: ejot tikai uz leju.



A22. zīm.

(**) Tagad apskatīsim cik dažādos veidos Tipa var nokļūt uz virsotni A, ja zināms, ka uz virsotni B (kas atrodas vienu rūtiņu virs A) var nokļūt pa *b* dažādiem ceļiem, bet uz virsotni C (kas atrodas vienu rūtiņu pa kreisi no A) var nokļūt pa *c* dažādiem (skat. A22. zīm.). Uz virsotni A ar gājienu vienas rūtiņas garumā var nokļūt tikai no virsotnes B vai virsotnes C (citu iespēju nav, jo drīkst pārvietoties tikai pa kvadrāta rūtiņu līnijām). Tā kā no augšējā kreisā stūra uz virsotni B var nokļūt pa *b* dažādiem ceļiem, tad no augšējā kreisā stūra uz virsotni A caur virsotni B arī var nokļūt pa *b* dažādiem ceļiem, savukārt, uz virsotni C no augšējā kreisā stūra var nokļūt *c* dažādos veidos, tātad arī uz virsotni A caur virsotni C var nokļūt pa *c* dažādiem ceļiem. Pavisam no augšējā kreisā stūra uz virsotni A var nokļūt pa $b+c$ dažādiem ceļiem.

Izmantojot secinājumus **(*)** un **(**)**, izveidosim tabulu (A23. zīm.), katrā rūtiņu virsotnē ierakstot skaitli, pa cik dažādiem ceļiem skudriņa Tipa var nokļūt uz šo virsotni. Tabulā aizpildām vispirms kreiso kolonnu un augšējo rindu. Aizpildīšanu turpinām pa diagonālēm. Kā redzam, uz labo apakšējo stūri Tipa var nokļūt pa 3432 dažādiem ceļiem.



A23. zīm.

2.4.3. ***Risinājums.*** Ja preces cena ir 8 tilleri, tad par to var samaksāt ar vienu 3 tilleru monētu un vienu 5 tilleru monētu (3+5=8); ja prece maksā 9 tillerus, tad par to var samaksāt ar trijām 3 tilleru monētām (3+3+3=9); ja preces cena ir 10 tilleru, tad par to var samaksāt ar divām 5 tilleru monētām (5+5=10).

Jebkurš naturāls skaitlis, dalot to ar 3, var

I dot atlikumu 0 (izdalīties bez atlikuma),

II dot atlikumu 1 vai

III dot atlikumu 2.

Citu iespēju nav.

Apskatīsim katru gadījumu atsevišķi un ievērosim, ka skaitlis 8, dalot ar 3, dod atlikumu 2, skaitlis 9 dalās ar 3 bez atlikuma un skaitlis 10, dalot ar 3, dod atlikumu 1.

I Ja preces cena dalās ar 3, tad par to var samaksāt ar vajadzīgo skaitu 3 tilleru monētām.

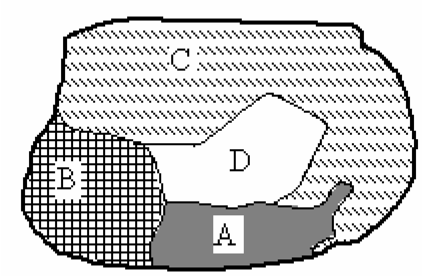
II Ja preces cena, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad par to var samaksāt, maksājot 10 tillerus (to var izdarīt, skat. augstāk) un vēl vajadzīgā skaitā 3 tilleru monētas; šādā veidā samaksātā summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo 10, dalot ar 3, dod atlikumu 1, un pieskaitot veselu skaitu 3 tilleru monētas, kopēja summa, dalot ar 3, dod to pašu atlikumu, t.i., 1.

III Ja preces cena, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad par to varam samaksāt maksājot 8 tillerus (iepriekš parādīts, ka to var izdarīt) un vēl vajadzīgā skaitā 3 tilleru monētas. Šādā veidā samaksātā summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2, jo šādu atlikumu dod skaitlis 8, dalot ar 3, bet summa, ko var samaksāt ar veselu skaitu 3 tilleru monētām, dalot ar 3, dod atlikumu 0.

Esam apskatījuši visas iespējas, līdz ar to parādījuši, kā ar pieejamajām monētām var samaksāt jebkuru summu, kas nav mazāka par 8 tilleriem.

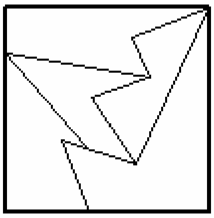
2.4.4. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A24. zīm.

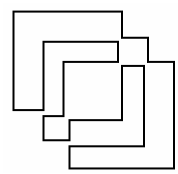
Risinājums. Katrām divām no valstīm A, B, C, D ir kopīgs robežas gabals, tāpēc katrai no tām vajadzīga cita krāsa.



A24. zīm.

2.4.5. ***Atbilde:*** jā var; skat., piem., A25. zīm.


A25. zīm.


A26. zīm.

2.5.1. ***Atbilde:*** jā, var; skat., piem., A26. zīm.

2.5.2. ***Atbilde:*** jā, var; skat. risinājumu.

Risinājums. Lai visi kungi un dāmas nokļūtu otrā upes krastā, ievērojot visus uzdevumā dotos nosacījumus, var rīkoties sekojoši.

Vispirms viens kungs pārved pāri upei vienu dāmu, atstāj to otrā upes krastā un pats atbrauc atpakaļ. (Laivā brauca ne vairāk kā divi cilvēki, un dāma viena pati var palikt upes krastā). Pēc tam kungs pārved vēl vienu dāmu uz otru krastu un pats atgriežas atpakaļ. Tagad otrā krastā jau ir divas dāmas, bet pirmajā krastā vēl ir divas dāmas un trīs kungi; tas arī nav pretrunā ar uzdevuma b) nosacījumu. Nākamajos trijos braucienos viens kungs pārved pāri upei visus trīs pārējos kungus (katrā braucienā vienu kungu un pats atgriežas atpakaļ). Tad otrā krastā jau ir divas dāmas un trīs kungi, bet pāri upei vēl jātiek divām dāmām. Tāpēc tagad kungs pārved pāri upei vienu dāmu, atgriežas atpakaļ un kopā ar pēdējo palikušo dāmu aizbrauc uz otru krastu. Tā visi 8 ceļotāji ir nokļuvuši upes otrā krastā, ievērojot visus noteikumus.

2.5.3. ***Atbilde:*** 3 ābolus sadala 4 daļās katru un 4 ābolus sadala 3 daļās katru; katram bērnam iedod vienu *ceturtdaļu* un vienu *trešdaļu* ābola.

Risinājums. Tā kā 7 āboli ir jāsadala 12 bērniem vienādās daļās, tad katram bērnam ir jāsaņem $7:12=\dfrac{7}{12}$ ābola. Vienkāršākais veids, kā to izdarīt, ir katru ābolu sadalīt 12 vienādās daļās un katram bērnam iedot 7 šādas daļas. Taču šāds risinājums neder, jo katru ābolu nedrīkst sagriezt vairāk kā 4 daļās.

Ievērosim, ka $\frac{7}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Tātad katram bērnam ir jāsaņem viena *trešdaļa* no ābola un viena *ceturtdaļa* no ābola jeb visi āboli ir jāsagriež tā, lai kopā iegūtu 12 *trešdaļas* un 12 *ceturtdaļas*. Lai iegūtu 12 *trešdaļas*, 4 ābolus var sagriezt katru 3 vienādās daļās (4·3=12), un, lai iegūtu 12 *ceturtdaļas*, atlikušos 3 ābolus var sagriezt katru 4 vienādās daļās (3·4=12). Patiešām, esam sagriezuši kopā visus 4+3=7 ābolus un ieguvuši 12 *trešdaļas* un 12 *ceturtdaļas* – katram bērnam pa vienai ābola *trešdaļai* un *ceturtdaļai*. Pie tam neviens ābols netika sagriezts vairāk kā četrās daļās.

2.5.4. ***Atbilde:*** šādu blakus esošu naturālu skaitļu *m* un *n* nav.

Risinājums. Starp diviem blakus esošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti ir pāra un otrs – nepāra skaitlis. Pāra skaitļa kvadrāts (reizinājums pašam ar sevi) arī ir pāra skaitlis, jo *pāra skaitlis×pāra skaitlis=pāra skaitlis*; nepāra skaitļa kvadrāts ir nepāra skaitlis: *nepāra skaitlis×nepāra skaitlis=nepāra skaitlis*. Tātad starp skaitļiem m^2 un n^2 viens noteikti ir pāra skaitlis un otrs – nepāra skaitlis. Taču pāra un nepāra skaitļu starpība (tāpat kā summa) ir nepāra skaitlis, t.i., m^2-n^2 noteikti ir nepāra skaitlis, ja *m* un *n* ir blakusesoši naturāli skaitļi. Bet 200 ir pāra skaitlis, tātad nav tādu divu blakusesošu naturālu skaitļu, kuru kvadrātu starpība ir 200.

2.5.5. ***Atbilde:*** cipars 0.

Risinājums. Ievērosim, ka ir 9 viencipara skaitļi no 1 līdz 9. Kad ir uzrakstīti rindā pēc kārtas visi šie skaitļi, tad ir uzrakstīti arī 9 cipari. No 10 līdz 99 pavisam ir 90 divciparu skaitļi, tātad šajos skaitļos kopā ir 90·2=180 ciparu, bet no 1 līdz 99 rindā ir uzrakstīti 9+180=189 cipari. No 100 līdz 199 ir 100 trīsciparu skaitļi, tātad tajos kopā ir 100·3=300 cipari. Līdzīgi skaitļos no 200 līdz 299 kopā ir 300 cipari, skaitļi no 300 līdz 399 arī satur 300 ciparus, …. Tātad no 1 līdz 699 pavisam ir uzrakstīti 9+180+6·300=1989 cipari, t.i., 1989. cipars šajā virknē ir cipars 9. Apskatīsim šīs virknes posmu no 699 līdz 701 un katram ciparam apakšā uzrakstīsim tā kārtas numuru šajā virknē, skaitot no sākuma:

$$\ldots\ \underset{1987.}{6}\ \underset{1988.}{9}\ \underset{1989.}{9}\ \underset{1990.}{7}\ \underset{1991.}{0}\ \underset{1992.}{0}\ \underset{1993.}{7}\ \underset{\mathbf{1994.}}{\mathbf{0}}\ \underset{1995.}{1}\ \ldots.$$

Kā redzam, mūs interesējošais 1994. cipars šajā virknē ir cipars 0 – otrais cipars skaitlī 701.

2.6.1. ***Atbilde:*** 3.

Risinājums. Risināsim šo uzdevumu “no otra gala”.

Pēdējā darbība bija reizināšana ar 10 un rezultātā ieguva 50, tātad pirms tam bija iegūts skaitlis 50:10=5. Šādu rezultātu ieguva pēc izdalīšanas ar 5, tātad pirms tam dalīšanas rezultāts bija 5·5=25. Savukārt tas tika iegūts, iepriekšējam rezultātam pieskaitot 3, tātad pirms tam bija iegūts skaitlis 25–3=22. Skaitlis tika iegūts pēc reizināšanas ar 2, tātad pirms tam bija iegūts skaitlis 22:2=11. 11 ir iegūts, meklējamo skaitli pareizinot pašam ar sevi un pieskaitot 2, tātad meklējamo skaitli reizinot pašu ar sevi iegūst 11–2=9. Vienīgais naturālais skaitlis, kuru reizinot pašu ar sevi iegūst 9, ir 3.

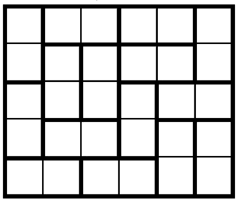
Šo uzdevumu varēja atrisināt arī, apzīmējot meklējamo skaitli ar *x* un sastādot vienādojumu.

$$(((x\cdot x+2)\cdot 2+3):5)\cdot 10=50$$
$$((x\cdot x+2)\cdot 2+3):5=50:10$$
$$(x\cdot x+2)\cdot 2+3=5\cdot 5$$
$$(x\cdot x+2)\cdot 2=25-3$$
$$x\cdot x+2=22:2$$

$x \cdot x = 11 - 2 = 9 = 3 \cdot 3$

$x=3$

2.6.2. ***Atbilde:*** jā, var. Skatīt, piemēram, A27. zīmējumu.



A27. zīm.

2.6.3. ***Atbilde:*** *g* lielākā iespējamā vērtība ir 28.

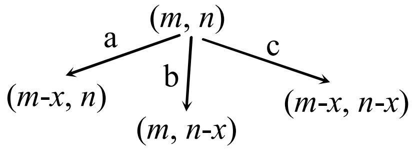
Risinājums. Ja skaitļu *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* vidējais aritmētiskais ir 7 jeb $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}=7$, tad $a+b+c+d+e+f+g=7\cdot 7=49$. No šīs vienādības izteiksim *g*: $g=49-(a+b+c+d+e+f)$. Skaitļa *g* lielākā vērtība būs tad, ja summas $a+b+c+d+e+f$ vērtība būs pēc iespējas mazāka. Tā kā visi skaitļi *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* ir atšķirīgi veseli pozitīvi skaitļi, tad summas $a+b+c+d+e+f$ mazākā iespējamā vērtība ir $a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21$. Tātad skaitļa *g* lielākā iespējamā vērtība ir 49–21=28.

2.6.4. ***Atbilde:*** 0,48 dienās jeb11 st. 31 min. 12 sek.

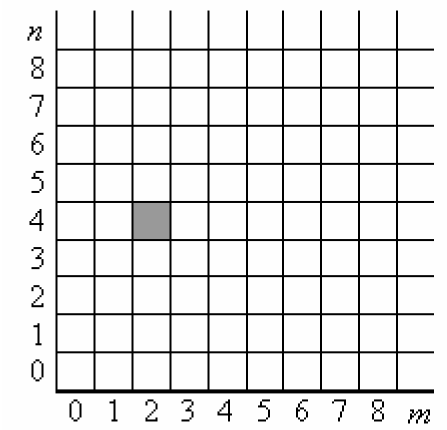
Risinājums. Ja ūdens plūst tikai pa pirmo cauruli, tad 1 dienā tiek piepildīts viss baseins. Ja ūdens plūst tikai pa otro cauruli, tad 1 dienā tiek piepildīta $\frac{1}{2}$ baseina, jo viss baseins būtu piepildīts 2 dienās, tātad 1 dienā tiek piepildīts divreiz mazāk (uzskatām, ka ūdens tecēšanas ātrums katrā caurulē ir nemainīgs visu laiku). Ja ūdens plūst tikai pa trešo cauruli, tad vienā dienā tiek piepildīta $\frac{1}{3}$ baseina, ja tikai pa ceturto cauruli, tad 1 dienā tiek piepildīta $\frac{1}{4}$ baseina. Tātad, ja ūdens plūst pa visām četrām caurulēm reizē, tad vienā dienā būtu piepildīts $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$ no baseina jeb 2 pilni šādi baseini un $\frac{1}{12}$ no šāda baseina. Tas nozīmē, ka, lai vienu šādu baseinu piepildītu visas četras caurules kopā, vajag mazāk nekā pusi dienas. Ja $2\frac{1}{12}$ baseinus var piepildīt 1 dienā, tad 1 baseinu var piepildīt $1:\frac{25}{12}=\frac{12}{25}$ dienās. Pieņemot, ka par dienu uzskatām visu diennakti – 24 stundas, lai piepildītu baseinu, ja ir atvērtas visas četras caurules, nepieciešams 11 stundas 31 minūte un 12 sekundes.

2.6.5. ***Atbilde:* a)** uzvarēs pirmais spēlētājs; **b)** uzvarēs otrais spēlētājs.

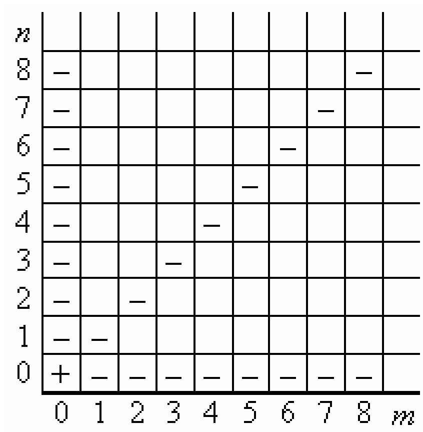
Risinājums. Akmentiņu skaitu vienā kaudzītē apzīmē ar *m*, otrā – ar *n*. Tagad situāciju var attēlot ar skaitļu pāriem. Pirmais skaitlis vienmēr būs akmentiņu skaits pirmajā kaudzītē (sākotnēji *m* akmentiņi), otrais – attiecīgi akmentiņu skaits otrajā kaudzītē (sākotnēji *n* akmentiņi). Spēles noteikumus shematiski var attēlot, kā parādīts A28. zīm.



A28. zīm.

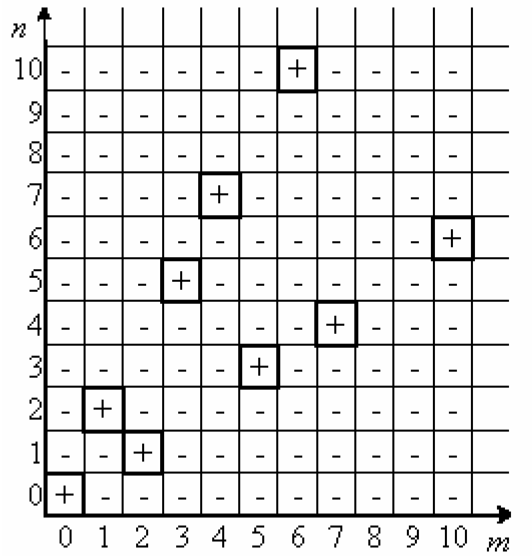

A29. zīm.

Aprakstīto spēles gaitu varam attēlot koordinātu plaknē. Rūtiņu plaknē novilksim divas pusasis. Uz Ox ass atliek pirmās kaudzītes akmeņu skaitu m, uz Oy – attiecīgi otrās kaudzītes akmeņu skaitu n. Tagad kārtējo spēles pozīciju raksturo rūtiņa (skat. A29. zīm.). Attēlā iekrāsotais vienības kvadrātiņš rāda, ka konkrētajā momentā pirmajā kaudzītē ir 2 akmentiņi, bet otrajā – 4 akmentiņi. Pozīciju raksturo skaitļu pāris (2,4).


A30. zīm.

Ir skaidrs, ka sākuma pozīcija ir (m,n), bet beigu pozīcija – (0,0). Spēles analīzi izdarīsim no beigām, tātad no pozīcijas (0,0). Ja pēc mūsu gājiena ir šāda pozīcija, tas nozīmē mūsu uzvaru. Tā ir uzvarošā pozīcija. Apzīmēsim to ar "+" koordinātu plaknē. Bet, ja pēc gājiena akmentiņu skaitu kaudzītēs nosaka skaitļu pāri (0,1), (0,2) utt. (0,n) vai (1,0), (2,0) utt. (m,0), tad visi uzvaras priekšnoteikumi ir pretiniekam. Gadījumos (0,1) un (1,0) pretinieka uzvara pat ir neizbēgama, jo spēlētāji nevar izlaist gājienu, pārējos gadījumos pretinieks var uzvarēt, paņemot visu kaudzīti. Vēlreiz pārskatot spēles noteikumus, ir skaidrs, ka mums zaudējošas ir arī pozīcijas (1,1), (2,2) utt. Visas iepriekš nosauktās pozīcijas ir mums sliktas pozīcijas, tās apzīmēsim ar "–" (skat. A30. zīm.).

Nākošā uzvarošā pozīcija ir (1,2).Tā ir simetriska pozīcijai (2,1). Lai kāds būtu pretinieka gājiens, viņš nespēs paņemt visus akmentiņus jeb nonākt pie pozīcijas (0,0). Iespējamās pozīcijas pēc pretinieka gājiena ir (0,2), (1,0), (1,1), (0,1), saskaņā ar to kādus gājienus var izdarīt spēlētājs (skat. A28. zīm.). Visas šīs pozīcijas ļauj mums uzvarēt. Tātad pozīcijas (2,1) un (1,2) jāatzīmē ar krustiņu. Visas pozīcijas (1,2+x), (1+x,2), kā arī tām simetriskās pozīcijas ir zaudējošās pozīcijas, jo, ja pēc mūsu gājiena paliek šāda pozīcija, pretinieks, ņemot no attiecīgās kaudzītes x akmentiņus, nonāks uzvarošajā pozīcijā (1,2) (vai (2,1)) un varēs uzvarēt spēli. Gluži tas pats attiecas uz pozīcijām (1+y,2+y) un tām simetriskajām pozīcijām (2+y,1+y). No šīm pozīcijām uzvarošo var iegūt, paņemot no abām kaudzēm y akmentiņus. Nākošā uzvarošā pozīcija būs (3,5) (un attiecīgi – (5,3)). Šo analīzi var turpināt un iegūt aizvien jaunas uzvarošās pozīcijas. Tādā veidā ir iegūti divi simetriski "labo" skaitļu pāru zari (skat. A31. zīm.).



A31. zīm.

Tātad uzvarēs tas spēlētājs, kurš panāks, ka pēc viņa gājiena kaudzītēs paliek attiecīgi vienā 1 un otrā 2 akmeņi, 3 un 5 akmeņi, 4 un 7 akmeņi, 6 un 10 akmeņi, utt. Tas spēlētājs, **pirms** kura gājiena jau ir šāds akmeņu skaits kaudzītēs, zaudēs, ja otrs spēlētājs spēlēs pareizi.

a) Ja sākumā vienā kaudzē ir 7 akmeņi, bet otrā – 5 akmeņi, tad pirmais spēlētājs ar pirmo gājienu no abām kaudzītēm paņem pa 2 akmeņiem, un pēc viņa gājiena paliek vienā kaudzē 5 akmeņi un otrā kaudzē 3 akmeņi, tātad, ņemot vērā iepriekš pamatoto, pirmais spēlētājs uzvarēs.

b) Ja sākumā vienā kaudzē ir 10 akmeņi, bet otrā – 6 akmeņi, kas jau ir spēles "uzvarošā pozīcija", tad pirmais spēlētājs, kuram ir jāsāk no šādas pozīcijas, zaudēs.

Piezīme: pirmais spēlētājs **a)** gadījumā var uzvarēt arī, ņemot vienu akmeni no 5 akmeņu kaudzes.

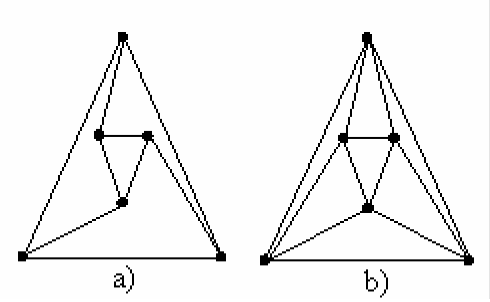
1994./95. mācību gads

3.1.1. ***Atbilde:*** 53 svētdienas.

Risinājums. Šajā risinājumā par pilnu nedēļu sauksim 7 pēc kārtas ņemtas dienas. Vienā gadā ir 365 vai 366 (garajā gadā) dienas, tātad ir pilnas 52 nedēļas un vēl 1 vai 2 dienas. Katrā nedēļā ir viena svētdiena, un vēl viena svētdiena var būt starp atlikušajām 1 vai 2 dienām (starp atlikušajām 2 dienām var būt tikai viena svētdiena, jo tās ir pēc kārtas sekojošas dienas). Tātad gadā kopā var būt ne vairāk par 53 svētdienām.

Piemēram, 2006.gada 1.janvāris bija svētdiena, un arī 31.decembris bija svētdiena, līdz ar to 2006.gadā pavisam bija 53 svētdienas.

3.1.2. ***Atbilde:*** jā var, skat., piemēram, A32. zīm. **a)** un **b)**.



A32. zīm.

3.1.3. ***Atbilde:*** ir 16 *skaistie skaitļi* un to summa ir 53328; ir 64 *lieliskie skaitļi* un to summa ir 21333312.

Risinājums. *Skaistie skaitļi* ir četrciparu skaitļi, pie tam to pierakstā var tikt izmantoti tikai divi cipari – 2 vai 4. Tātad *skaisto skaitļu* pirmais cipars var būt jebkurš no šiem diviem cipariem; katram izvēlētajam pirmajam ciparam otro ciparu varam izvēlēties arī divos veidos – 2 vai 4; kopā pirmo un otro ciparu varam izvēlēties 2·2=4 veidos. Līdzīgi, katram pirmo divu ciparu pārim trešo ciparu varam izvēlēties arī divos veidos, tātad pirmos trīs ciparus varam izvēlēties 4·2=8 veidos, un katram pirmo trīs ciparu trijniekam ceturto ciparu varam izvēlēties divos veidos – 2 vai 4. Tātad pavisam *skaisto skaitļu* ir 8·2=16.

Lai noskaidrotu to summu, sadalīsim visus šos skaitļus pāros tā, lai katra pāra summa būtu 6666. Katrs *skaistais skaitlis* ietilpst ne vairāk kā vienā pārī. Pieņemsim, ka tas tā nav, t.i., eksistē kāds skaistais skaitlis a, kas ietilpst divos pāros (a; b) un (a; c). Tad b=6666–a un c=6666–a jeb b=c, tātad skaisto skaitļu pāri (a; b) un (a; c) īstenībā ir viens un tas pats pāris. Visus *skaistos skaitļus* varam apvienot šādos 8 pāros, kur katra pāra summa ir 6666: (2222; 4444), (2224; 4442), (2242; 4424), (2244; 4422), (2422; 4244), (2424; 4242), (2442; 4224), (2444; 4222). Tātad visu *skaisto skaitļu* summa ir visu šo 8 skaitļu pāru summu summa, t.i., visu *skaisto skaitļu* summa ir 8·6666=53328.

Līdzīgi spriežot, varam secināt, ka *lielisko skaitļu* ir 2·2·2·2·2·2=64. Lai noskaidrotu visu *lielisko skaitļu* summu, visus šos skaitļus sadalām pāros, kur katra pāra summa ir 666666. Tātad visu *lielisko skaitļu* summa ir 32·666666=21333312.

3.1.4. ***Atbilde:*** velosipēdists.

Risinājums. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka velosipēdists $\frac{1}{3}$ ceļa starp pilsētām A un B veic ātrāk nekā motociklists veic $\frac{2}{3}$ no šī ceļa (tas seko no šādiem vārdiem uzdevuma tekstā: „*kad velosipēdists bija nobraucis trešo daļu ceļa, viņš apstājās un gaidīja, kamēr motociklistam līdz pilsētai B paliks trešā daļa ceļa*”, t.i., kamēr motociklists būs nobraucis divas trešdaļas ceļa). Pēc tam, kad velosipēdists atsāka ceļu, viņam atlika nobraukt tikai $\frac{1}{3}$ ceļa, jo viņš atradās šādā attālumā no pilsētas A un sāka braukt atpakaļ uz šo pilsētu. Taču motociklistam atlika nobraukt $\frac{1}{3}$ ceļa līdz pilsētai B un pēc tam vēl visu ceļu atpakaļ līdz pilsētai A, tātad pavisam $\frac{4}{3}$ ceļa. Tā kā velosipēdists $\frac{1}{3}$ ceļa veic ātrāk nekā motociklists $\frac{2}{3}$

no šī ceļa, tad, protams, $\frac{1}{3}$ ceļa velosipēdists veiks ātrāk nekā motociklists veiks $\frac{4}{3}$ ceļa, un velosipēdists pilsētā A nonāks ātrāk.

3.1.5. ***Risinājums.*** Katram uzzīmētajam kaķītim pierakstīsim skaitli 1, bet katram sunītim – skaitli 2. Tad sākumā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir $6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 6 + 14 = 20$.

Apskatīsimies, kā mainās šī summa, veicot atļautās darbības:

1) ja no tāfeles nodzēšam vienu sunīti, t.i., nodzēšam skaitli 2, tad uzrakstīto skaitļu summa samazinās par 2;

2) ja no tāfeles nodzēšam divus kaķīšus un uzzīmējam vietā vienu sunīti (t.i., nodzēšam divus skaitļus 1 un uzrakstām vietā vienu skaitli 2), tad uzrakstīto skaitļu summa nemainās ($-1-1+2=0$).

Tātad uzrakstīto skaitļu summa var vai nu nemainīties, vai samazināties par 2, t.i., par pāra skaitli. Tā kā sākumā uzrakstīto skaitļu summa ir 20 – pāra skaitlis, tad, veicot atļautās darbības, visu uzrakstīto skaitļu summa vienmēr būs pāra skaitlis. Tātad, ja uz tāfeles ir palicis nenodzēsts viens dzīvnieciņš (viens skaitlis), tas var būt tikai sunītis (skaitlis 2).

3.2.1. ***Atbilde:*** 9 dziesmas.

Risinājums. Tā kā Ieva nodziedāja 8 dziesmas – vairāk nekā pārējās, un Santa nodziedāja 5 dziesmas – mazāk ne pārējās meitenes, tad Aiga un Liene katra nodziedāja 6 vai 7 dziesmas. Tā kā zināms, ka katru dziesmu dziedāja tieši trīs meitenes, tad visu meiteņu kopējais uzstāšanos skaits dalās ar 3. Ievas un Santas kopējais uzstāšanos skaits ir $8+5=13$, Aigas un Lienes kopējais uzstāšanos skaits var būt $6+6=12$, $6+7=7+6=13$ vai $7+7=14$. Ja Aigas un Lienes kopējais uzstāšanos skaits ir 12, tad visu četru meiteņu kopējais uzstāšanos skaits ir $13+12=25$; 25 nedalās ar 3, tātad šāds gadījums neder. Ja Aigas un Lienes kopējais uzstāšanos skaits ir 13, tad visu meiteņu kopējais uzstāšanos skaits ir $13+13=26$, kas arī nedalās ar 3. Ja Aigas un Lienes uzstāšanos skaits ir 14, tad kopējais uzstāšanos skaits ir $13+14=27$, dalās ar 3. Tātad pavisam koncertā tika nodziedātas $27:3=9$ dziesmas, katru dziesmu dziedāja tieši trīs meitenes, Ieva nodziedāja 8 dziesmas, Aiga un Liene katra nodziedāja 7 dziesmas un Santa nodziedāja 5 dziesmas. Tas varēja notikt, piemēram, šādi:

Ieva nodziedāja 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. un 8.dziesmu, Santa nodziedāja 1., 2., 3., 4. un 9. dziesmu, Aiga nodziedāja 2., 3., 4., 5., 6. un 9. dziesmu, Liene nodziedāja 1., 5., 6., 7., 8. un 9. dziesmu.

3.2.2. ***Atbilde:*** var būt izmantojamas 4 vai 5 kravas mašīnas.

Risinājums. Mazāk kā ar 4 mašīnām visu kravu aizvest noteikti nevarēs, jo vienā mašīnā var iekraut ne vairāk kā 3 *t*, bet $3 \cdot 3\ t=9\ t<10\ t$. Taču arī ar 4 mašīnām var nebūt pietiekami. Piemēram, ja ir 13 kastes un katra kaste sver $\frac{10}{13}$ *t*, tad, lai visu kravu aizvestu ar 4 mašīnām, vismaz vienā kravas mašīnā būs jāiekrauj vismaz 4 kastes (jo $4 \cdot 3=12<13$; *Dirihlē princips*, skat. 8.lpp.). Bet $4 \cdot \frac{10}{13}\ t = \frac{40}{13}\ t = 3\frac{1}{13}\ t > 3\ t$, tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad ar četrām kravas mašīnām var nepietikt.

Pierādīsim, ka ar 5 kravas mašīnām noteikti pietiek. Patiešām, katrā mašīnā varam iekraut vismaz 2t kravas (ja kādā mašīnā būs iekrauts mazāk nekā 2t kravas, tad tur noteikti varēs iekraut vēl vienu kasti, jo kastes masa nepārsniedz 1 *t* un mašīnā pavisam var iekraut 3 *t*). Tātad 5 mašīnās var iekraut vismaz $5 \cdot 2\ t=10\ t$, t.i., piecās mašīnās noteikti var iekraut un uzreiz aizvest visu kravu.

3.2.3. ***Atbilde:*** **a)** nē, nevar; **b)** jā, var.

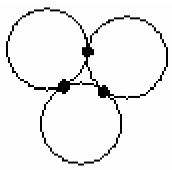
Risinājums. Risināsim šo uzdevumu sekojoši: mēģināsim noskaidrot, kādā veidā doto skaitli var sadalīt tādos reizinātājos, ka visu reizinātāju summa ir pats dotais skaitlis. Ja pamatosim, ka tas nav izdarāms, tad doto skaitli sadalīt atbilstoši uzdevuma prasībām nebūs iespējams.

a) Skaitlis 23 ir pirmskaitlis un vienīgais veids, kā šo skaitli var izteikt ar vairāku naturālu skaitļu reizinājumu, ir šo pašu skaitli 23 reizināt ar vienu vai vairākiem vieniniekiem. Taču uzdevumā prasīts, lai šo reizinātāju summa būtu 23. Jau gadījumā, ja 23 izsakām kā divu skaitļu reizinājumu $23\cdot 1$ (citā veidā skaitli 23 divu skaitļu reizinājumā izteikt nevar!), reizinātāju 23 un 1 summa ir $24>23$. Tātad skaitli 23 atbilstoši uzdevuma prasībām izteikt nevar.

b) Skaitlis 203 nav pirmskaitlis un ir izsakāms kā $203=7\cdot 29$, bet reizinātāju summa $7+29=36<203$. Tātad skaitlim $7\cdot 29$ vēl jāpiereizina vajadzīgais skaits vieninieku (reizinājums no tā nemainās). Ievērojam, ka $203-36=167$, tātad skaitli 203 atbilstoši uzdevuma prasībām varam izteikt sekojoši: $203 = 7\cdot 29\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{167\text{ vieninieki}}$ un $203 = 7+29+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{167\text{ vieninieki}}$.

3.2.4. ***Atbilde:*** nē, nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas tomēr ir iespējams un mums ir izdevies to izdarīt. Tad katru saskaršanās punktu uz abām monētām nokrāsosim sarkanu. Tātad pavisam ir nokrāsoti $3\cdot 25=75$ sarkani punkti (jo katra monēta pieskaras tieši 3 citām, tāpēc uz katras monētas nokrāsoti ir tieši 3 punkti). Taču katrā pieskaršanās punktā var saskarties tikai divas monētas (tas ir monētas apaļās formas dēļ, skat. A33. zīm.).



A33. zīm.

Tātad pavisam kopā nokrāsotiem jābūt pāra skaitam punktu (*invariants*). Skaitlis 75 nav pāra skaitlis, tātad esam ieguvuši pretrunu: skaitot vienus un tos pašus objektus divos dažādos veidos, katrreiz ieguvām citādu rezultātu, kas nevar būt. Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

3.2.5. ***Atbilde.*** Lielākais iespējamais šādu kvadrātu skaits ir 77. Šāds sadalījums ir, piemēram, dotā taisnstūra sadalījums rūtiņās.

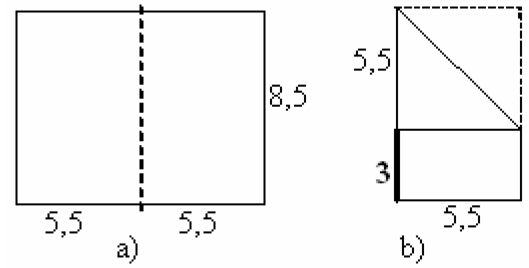
Risinājums. Apskatīsim katra uzzīmētā kvadrāta **augšējo kreiso rūtiņu**. Šī rūtiņa nevar būt kopīgā kreisā augšējā rūtiņa vairākiem atzīmētajiem kvadrātiem (pretējā gadījumā lielākais kvadrāts pilnībā pārklās mazāko vai arī abi kvadrāti sakritīs jeb būs viens un tas pats kvadrāts). Tā kā pavisam taisnstūrī 7×11 ir 77 rūtiņas, tad nevar būt atzīmēti vairāk kā 77 kvadrāti.

3.3.1. ***Atbilde:*** piemēram, $\frac{1}{1995}=1994:(1994\cdot 1994+1994)$

Risinājums. Ievērosim, ka $1995=1994+1$, tātad

$$\frac{1}{1995}=\frac{1}{1994+1}=\frac{1994}{1994(1994+1)}=\frac{1994}{1994\cdot 1994+1994}\text{ jeb }\frac{1}{1995}=1994:(1994\cdot 1994+1994).$$

3.3.2. *Risinājums.* Vispirms pārliecam papīra lapu, 11 *cm* garo malu pārlokot uz pusēm (A34. a) zīm.); iegūstam taisnstūri 8,5 *cm*×5,5 *cm*. Šim taisnstūrim atlokām vienu stūri tā, kā parādīts A34. b) zīm. Locījuma līnija ir kvadrāta 5,5 *cm*×5,5 *cm* diagonāle, tātad iezīmētās joslas platums ir 8,5 *cm*–5,5 *cm*=3 *cm*, kas arī bija jāatliek.



A34. zīm.

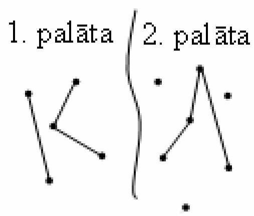
3.3.3. *Atbilde:* N=19.

Risinājums. Lai vairāku naturālu skaitļu reizinājums dalītos ar kādu naturālu skaitli A, starp reizinātājiem vismaz vienu reizi jābūt visiem skaitļa A pirmreizinātājiem vai skaitļiem, kas dalās ar skaitļa A pirmreizinātājiem. Skaitļa 1995 sadalījums pirmreizinātājos ir $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Tātad, lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N$ dalītos ar 1995, N ir jābūt vismaz 19. Ja N būs mazāks par 19, tad neviens no reizinātājiem nedalīsies ar 19 (tas ir pirmskaitlis, tātad vairāku citu skaitļu reizinājums arī nevar būt 19), līdz ar to viss reizinājums nedalīsies ar 1995. Ja N=19, tad reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 18 \cdot 19$ dalās ar 1995, jo $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 1995$ un doto reizinājumu varam pārrakstīt kā $1995 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 18$, kas acīmredzami dalās ar 1995.

3.3.4. *Atbilde:* spēlējot pareizi, vienmēr uzvarēs pirmais spēlētājs.

Risinājums. Pirmajam spēlētājam jārīkojas sekojoši: pirmajā gājienā no lielākās kaudzes ir jāpaņem 1000 rieksti; tad abās kaudzēs paliks pa 995 riekstiem. Turpmākajos gājienos pirmais spēlētājs izdara simetrisku gājienu otrā spēlētāja gājienam, t.i., ja otrais spēlētājs no vienas kaudzītes paņem n riekstus, tad pirmais spēlētājs no otras kaudzītes arī paņem n riekstus. To viņš noteikti izdarīt var, jo pirms šī gājiena abās kaudzītēs bija vienāds skaits riekstu un otrais spēlētājs drīkst ņemt riekstus tikai no vienas kaudzītes. Pēc pirmā spēlētāja gājiena abās kaudzītēs atkal ir vienāds riekstu skaits, tātad pirmais spēlētājs arī turpmākajos gājienos var pielietot šo pašu stratēģiju. Tikmēr, kamēr otrajam spēlētājam būs ko paņemt, būs ko paņemt arī pirmajam spēlētājam, bet, ja otrajam spēlētājam vairs nebūs ko paņemt, tas nozīmē, ka iepriekšējā gājienā viņš ir paņēmis visu no vienas kaudzītes un pirmais spēlētājs ir paņēmis visu no otras kaudzītes. Tātad otrais spēlētājs zaudē.

3.3.5. *Risinājums.* Vispirms visus parlamentāriešus patvaļīgi sadalīsim divās palātās. Attēlosim parlamentāriešus ar punktiem P_1, P_2, …, P_k; ja divi parlamentārieši ir ienaidnieki, tad atbilstošos savienosim ar nogriezni (skat., piem., A35. zīm.)



A35. zīm.

Saskaitīsim, cik ir savstarpējo ienaidnieku pāru, t.i., cik nogriežņi ir novilkti katrā palātā atsevišķi. Apzīmēsim šo skaitu pirmajā palātā ar N_1, bet otrajā palātā – ar N_2. Ar N apzīmēsim šo skaitļu summu $N=N_1+N_2$. Apskatīsim visus parlamentāriešus P_1, P_2, P_3, …, P_k (k – visu parlamentāriešu skaits). Ja parlamentārietim P_1 savā palātā (pieņemsim, pirmajā; ja P_1 ir otrajā palātā, spriedums analoģisks) ir 2 vai 3 ienaidnieki, tad, pārejot uz otru palātu, ienaidnieku skaits viņam tur būs ne vairāk kā 1 (jo pavisam kopā viņam ir ne vairāk kā 3 ienaidnieki, un pārējie parlamentārieši šajā brīdī savas palātas nemaina). Šāda gājiena rezultātā skaitlis N_1 samazinās vismaz par 2 (jo P_1 šajā palātā bija ienaidnieks vismaz diviem citiem parlamentāriešiem un bija savienots ar nogriezni ar vismaz diviem citiem parlamentāriešiem) jeb $N_1' \le N_1 - 2$ (ar N_1', N_2', N' apzīmēsim nogriežņu skaitu katrā no palātām un kopā pēc P_1 pāriešanas uz otru palātu). Pēc P_1 pāriešanas uz otro palātu nogriežņi, kas pirmajā palātā P_1 savienoja ar viņa ienaidniekiem, tiek izdzēsti, tātad to skaits samazinās vismaz par 2. Palātas ietvaros nekas cits nemainās, tātad pārējo nogriežņu skaits paliek nemainīgs. Savukārt otrajā palātā pēc P_1 pāriešanas uz to var rasties ne vairāk kā 1 jauns nogrieznis (jo parlamentārietim P_1 šajā palātā ir ne vairāk kā 1 ienaidnieks), tātad N_2 var palielināties ne vairāk kā par 1 jeb $N_2' \le N_2 + 1$. Tātad $N' = N_1' + N_2' \le N_1 - 2 + N_2 + 1 = (N_1 + N_2) - 1 = N - 1$ jeb $N' < N$, t.i., kopējais nogriežņu skaits pēc P_1 pāriešanas uz citu palātu noteikti samazinās vismaz par vienu.

Pēc tam līdzīgi rīkojamies ar pārējiem parlamentāriešiem P_2, P_3, P_4, …, P_k, līdz iegūsim vajadzīgā veida palātas. Šis process nevar turpināties bezgalīgi, jo N ir vesels nenegatīvs skaitlis un ar katru gājienu tas samazinās vismaz par 1, tātad kādreiz šo procesu vairs nevarēs turpināt. Šai brīdī nevienam parlamentārietim viņa palātā nav vairāk par 1 ienaidnieku.

3.4.1. ***Atbilde:*** jā, var. Piemēram, viena zilā atzīme būs pēc 324 *cm*, bet sarkanā – pēc 325 *cm*; starp tām attālums ir 1 *cm*.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, kādā attālumā no lentas sākuma ir izdarītas atzīmes ar zilu zīmuli : 36 *cm*, 72 *cm*, 108 *cm*, 144 *cm*, 180 *cm*, 216 *cm*, 252 *cm*, 288 *cm*, 324 *cm*, 360 *cm*, … un kādā attālumā no lentas sākuma ir izdarītas atzīmes ar sarkanu zīmuli: 25 *cm*, 50 *cm*, 75 *cm*, 100 *cm*, 125 *cm*, 150 *cm*, 175 *cm*, 200 *cm*, 225 *cm*, 250 *cm*, 275 *cm*, 300 *cm*, 325 *cm*, 350 *cm*, …. Redzam, ka pēc kārtas devītā zilā atzīme (324cm) un trīspadsmitā sarkanā atzīme (325cm) atrodas 1cm attālumā viena no otras.

3.4.2. ***Atbilde:*** **a)** piemēram, 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46; **b)** izvēlas 10 skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 5.

Risinājums. Divu naturālu skaitļu a un b starpība $a–b$ dalās ar kādu skaitli m, ja skaitļi a un b, dalot tos ar m, dod vienādus atlikumus. Ja skaitlis a, dalot ar m, dod atlikumu r, tad to var uzrakstīt $a = m \cdot k + r$ (k – vesels skaitlis), līdzīgi $b = m \cdot l + r$ (l – vesels skaitlis). Tad $a - b = (m \cdot k + r) - (m \cdot l + r) = mk - ml + r - r = m(k - l)$, tātad $a–b$ dalās ar m, ja a un b dalot ar m dod vienādus atlikumus.

a) Par meklētajiem skaitļiem der skaitļi 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46. Katru divu šo skaitļu starpība tiešām dalās ar 5, jo katrs no šiem skaitļiem, dalot to ar 5, dod atlikumu 1.

b) Lai pierādītu uzdevumā formulēto faktu, izmantosim *Dirihlē principu* (skat. 8.lpp.).

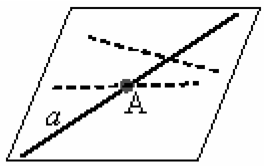
Naturāls skaitlis, dalot ar 5, var dot atlikumu 0, 1, 2, 3 vai 4 (pavisam 5 dažādas iespējas). Šos atlikumus iztēlosimies kā "*būrus*", kuros jāizvieto "*truši*" – dotie 46 skaitļi. Tātad mums ir 5 "*būri*" un $46=5\cdot9+1$ "*truši*". Pamatojoties uz *Dirihlē principu*, varam secināt, ka būs vismaz viens "*būris*", kurā būs vismaz 9+1=10 "*truši*", t.i., starp dotajiem skaitļiem ir vismaz 10 tādi, kurus dalot ar 5, iegūst vienādus atlikumus. Tātad katru divu šo skaitļu starpība dalās ar 5 un šie skaitļi der par meklētajiem 10 skaitļiem.

3.4.3. *Risinājums.* Arī šī uzdevuma risinājums balstās uz *Dirihlē principu*.

Ja kompānijā ir k cilvēki, tad šajā kompānijā var būt cilvēki, kuriem ir 0 paziņu (nav neviena paziņas), ir 1 paziņa, 2, paziņas, 3 paziņas, …, k–2 paziņas vai k–1 paziņas. (Nevienam cilvēkam nevar būt k paziņas, jo tad viņš būtu paziņa pats sev, bet pašu sev par paziņu neuzskata.) Tāpat ievērosim, ka, ja šajā kompānijā ir kāds cilvēks, kuram nav neviena paziņas, tad nevar būt neviens cilvēks, kuram būtu k–1 paziņa, un, ja kompānijā ir kāds cilvēks, kuram ir k–1 paziņa, tad nevar būt neviens cilvēks, kuram nebūtu neviena paziņas, t.i., ja šajā kompānijā kāds cilvēks A pazītu visus pārējos cilvēkus šajā kompānijā (viņam būtu k–1 paziņa), tad, tā kā pazīšanās ir abpusējas, katram šīs kompānijas loceklim būtu vismaz viens paziņa – cilvēks A.

Šajā uzdevumā par "*būriem*" uzskatīsim paziņu skaitu vienam cilvēkam. Tātad pavisam ir k–1 "būri" – 0, 1, 2, 3, …, k–3, k–2 paziņas vai 1, 2, 3, …, k–2, k–1 paziņa. Bet "*trušu*" – cilvēku – kompānijā ir k – par 1 vairāk nekā "*būru*". Tātad, izvietojot visus "*trušus*" pa "*būriem*", vismaz vienā "*būrī*" nonāks vismaz divi "*truši*", t.i., vismaz diviem cilvēkiem šajā kompānijā ir vienāds paziņu skaits, kas arī bija jāpierāda.

3.4.4. *Atbilde:* piemēram, plaknē vienu taisni a nokrāsojam melnu, vienu punktu A uz tās nokrāsojam zaļu, bet pārējo plakni atstājam baltu (skat. A36. zīm.).



A36. zīm.

Risinājums. Patiešām, katra taisne, kas atrodas šajā plaknē, nav nokrāsota vairāk kā divās krāsās: taisne a nokrāsota melnā un zaļā krāsā, taisnes, kas krustojas ar taisni a punktā A, ir nokrāsotas baltā un zaļā krāsā, taisnes, kas krustojas ar taisni a punktos, kas nesakrīt ar A, ir nokrāsotas baltā un melnā krāsā, taisnes, kas nekrusto taisni a ir nokrāsotas vienā krāsā – baltas. Lai kāda taisne šajā plaknē būtu nokrāsota vairāk nekā divās krāsās, tai būtu jākrusto taisne a gan punktā A, gan vēl kādā citā punktā. Taču, ja divas taisnes krustojas, tās var krustoties tikai vienā punktā; ja divām taisnēm ir vismaz divi kopīgi punkti, tad tās sakrīt, t.i., ir viena un tā pati taisne. Tātad tāds gadījums, ka kāda taisne būtu nokrāsota trīs dažādās krāsās, pie šāda krāsojuma nav iespējams.

3.4.5. *Risinājums.* Izņemsim no kastītes divus dažāda garuma zīmuļus Z_1 un Z_2; to var izdarīt, jo teikts, ka kastītē ir dažāda garuma zīmuļi. Ja to krāsas jau ir dažādas, tad Z_1 un Z_2 ir meklētie zīmuļi, taču, ja zīmuļi Z_1 un Z_2 ir vienā krāsā, tad izņemsim no kastītes vēl trešo zīmuli Z_3, kura krāsa ir atšķirīga no zīmuļu Z_1 un Z_2 krāsas; tādu zīmuli noteikti atrast var, jo teikts, ka kastītē ir dažādu krāsu zīmuļi. Ja Z_3 un Z_1 ir dažāda garuma, tad tie ir meklētie zīmuļi, taču, ja Z_3 ir vienāda garuma ar Z_1, tad Z_3 noteikti nav vienāda garuma ar Z_2 (jo Z_3=Z_1 un $Z_1 \neq Z_2$, tātad $Z_3 \neq Z_2$). Tā kā zīmuļi Z_1 un Z_2 ir vienādās krāsās, bet Z_3 ir no tiem atšķirīgā krāsā, tad Z_2 un Z_3 būs gan atšķirīgās krāsās, gan atšķirīga garuma.

3.5.1. *Atbilde:* meloja Didzis, sacensībās uzvarēja Pēcis.

Risinājums. Par katru zēnu pēc kārtas pieņemsim, ka viņš meloja.

1) Pieņemsim, ka meloja Aldis un pārējie zēni teica taisnību. Tad no zēnu teiktā seko, ka īstenībā Aldis bija pirmais vai pēdējais (jo viņš meloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Taču nevar būt, ka Aldis bija pirmais vai pēdējais, jo pirmais bija Didzis un pēdējais bija Mārcis. Tātad īstenībā Aldis nav melojis.

2) Pieņemsim, ka meloja Pēcis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pēdējais (viņš meloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Taču tagad sanāk, ka gan Pēcis, gan Mārcis skriešanās sacensībās bija pēdējie, taču tā nevar būt, jo pēdējais bija tikai viens no zēniem.

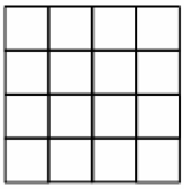
3) Pieņemsim, ka meloja Didzis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija otrais, trešais vai pēdējais (viņš meloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Šajā gadījumā nekādas pretrunas nerodas un sacensību rezultāts varēja būt sekojošs: Pēcis bija pirmais, Mārcis bija pēdējais (kā viņš pats to apgalvo), bet Aldis un Didzis viens finišēja otrais un otrs – trešais.

4) Pieņemsim, ka meloja Mārcis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš meloja, teikdams, ka ir pēdējais). Taču tagad sanāk, ka neviens nav bijis pēdējais, tātad šāds gadījums arī neder.

Esam izskatījuši visus gadījumus, un vienīgais gadījums, kas atbilst uzdevuma prasībām (ka viens zēns ir melojis un pārējie teikuši patiesību) ir 3), ir: meloja Didzis, teikdams, ka ir pirmais, bet patiesībā sacensībās uzvarēja Pēcis.

3.5.2. ***Atbilde:*** jā, varēs.

Risinājums. Domās sadalīsim visu 4×4 metrus lielo paklāju mazākos 1×1 metrus lielos kvadrātiņos (skat. A37. zīm.). Iegūsim 16 mazos kvadrātiņus. Tā kā kodes ir izgrauzušas 15 punktveida caurumiņus (viens caurumiņš atrodas augstākais vienā mazajā kvadrātiņā un nevar būt tā, ka viens caurumiņš būtu sabojājis uzreiz divus vai vairāk mazos kvadrātiņus), tad pavisam sabojāti var būt, augstākais, 15 mazie kvadrātiņi (katrs caurumiņš citā kvadrātiņā). Tātad vismaz viens kvadrātiņš ar izmēriem 1×1 metri palicis nesabojāts, kas arī bija jāpierāda.



A37. zīm.

3.5.3. ***Atbilde:*** 143 skaitļi.

Risinājums. Tā kā tiek apskatīti desmitciparu skaitļi, tad meklējamajos skaitļos katrā nevar būt vairāk par pieciem divniekiem. Ja desmitciparu skaitlī būtu seši divnieki, tad starp šiem divniekiem piecās vietās jābūt ierakstītam ciparam 5 (pretējā gadījumā blakus atradīsies divi cipari 2). Bet tad skaitlī kopā būs vismaz 6+5=11 cipari. Tālāk skaitīsim, cik ir vajadzīgo skaitļu, kuros ir 1 divnieks, 2 divnieki, 3 divnieki, 4 divnieki vai 5 divnieki (vajadzīgajā skaitlī ir vismaz viens divnieks, jo uzdevumā teikts, ka tie sastāv no cipariem 2 un 5).

1 divnieks: tā kā ir viens divnieks, tad nevienā vietā nevarēs būt blakus divi divnieki (jo otra divnieka vienkārši nav), tātad vienu divnieku varam ievietot jebkurā no desmit vietām (desmitciparu skaitlī ir 10 "vietiņas" vienam ciparam), pārējie cipari šādā skaitlī būs piecinieki. Tātad pavisam ir **10** desmitciparu skaitļi, kuros ir viens divnieks un 9 piecinieki, un visi šie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus.

2 divnieki: ja vajadzīgā skaitļa pirmais cipars ir 2, tad otrajam ciparam jābūt 5 (savādāk skaitlī divi divnieki būs blakus). Tad paliek 8 vietiņas, kur var būt ielikts otrs divnieks (nekādu citu ierobežojumu nav). Tātad vajadzīgo skaitļu, kas sākas ar cipariem 25.., un kuros ir 2 divnieki, ir 8. Līdzīgi varam saskaitīt, ka vajadzīgo skaitļu, kuros ir divi divnieki un: kuri sākas ar cipariem 525..., ir 7; kuri sākas ar cipariem 5525..., ir 6; kuri sākas ar cipariem 55525..., ir 5; kuri sākas ar cipariem 555525..., ir 4; kuri sākas ar cipariem 5555525..., ir 3; kuri sākas ar cipariem 55555525..., ir 2, un 1 vajadzīgais skaitlis sākas ar cipariem 555555525... Tātad kopā šādu skaitļu ir 8+7+6+5+4+3+2+1=**36**.

3 divnieki: skaitīsim līdzīgā veidā kā skaitļus, kas satur 2 divniekus. Ja šāds skaitlis sākas ar 2, tad otrais cipars noteikti ir 5. Atlikušajās 8 vietās ir jāizvieto 2 divnieki, to var izdarīt 6+5+4+3+2+1=21 veidos (skaitīšana notika pēc paņēmiena, kā tika skaitīti skaitļi ar 2 divniekiem). Līdzīgi, ja šāds skaitlis sākas ar 525..., tad vajadzīgo skaitļu ir 5+4+3+2+1=15, ja tas sākas ar 5525..., tad vajadzīgo skaitļu ir 4+3+2+1=10, ja šāds skaitlis sākas ar 55525..., tad vajadzīgo skaitļu ir 3+2+1=6, ja šāds skaitlis sākas ar 555525..., tad vajadzīgie skaitļi ir 2+1=3, un vēl ir 1 skaitlis 5555525252. Tātad vajadzīgo skaitļu, kas satur 3 divniekus, ir 21+15+10+6+3+1=**56**.

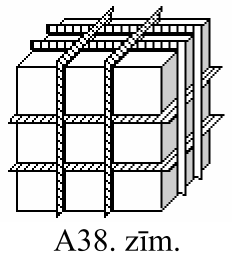
4 divnieki: skaitām līdzīgi: ja skaitlis satur 4 divniekus un sākas ar cipariem 25..., tad 8 vietās izvietot trīs divniekus var 10+6+3+1=20 veidos, ja šāds skaitlis sākas ar cipariem 525..., tad trīs divniekus atlikušajās 7 vietās var izvietot 6+3+1=10 veidos, ja skaitlis sākas ar 5525..., tad šādu skaitļu ir 3+1=4, un vēl ir 1 skaitlis 5552525252. Pavisam vajadzīgo skaitļu, kas satur 4 divniekus, ir 20+10+4+1=**35**.

5 divnieki: šādu skaitļu pavisam ir **6**: skaitlis 2525252525, skaitlis 5252525252 un četri skaitļi, kas sākas un beidzas ar 2 (četri tāpēc, ka starp pieciem divniekiem ir 4 vietas, kur kopā jāievieto pieci piecinieki, tātad vienā vietā divi piecinieki būs blakus un ir četras iespējas, kad divi piecinieki ir blakus – katrā vietiņā starp diviem divniekiem).

Tātad pavisam ir 10+36+56+35+6=143 desmitciparu skaitļi, kas sastāv no cipariem 2 un 5 un kuros divi cipari 2 neatrodas blakus.

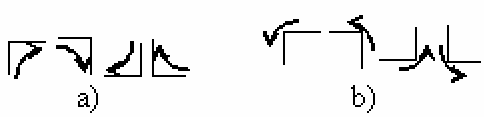
3.5.4. ***Atbilde:*** 6 griezieni.

Risinājums. Sagriežot kubu 3×3×3 mazākos kubiņos 1×1×1, iegūto kubiņu dažas skaldnes atradās uz lielā kuba virsmas, bet citas – kuba iekšpusē. Taču vienam kubiņam 1×1×1 visas sešas skaldnes atradās lielā kuba iekšpusē (tas ir "*vidējais*" kubiņš), tātad šim kubiņam katra skaldne bija kopīga ar cita iegūstamā kubiņa vienu skaldni un kādai griezuma plaknei ir jāiet caur šo skaldni. Tā kā kubam ir 6 skaldnes, tad, lai izgrieztu "*vidējo*" kubiņu, ir vajadzīgi vismaz 6 taisni griezieni, jo nekādas divas kuba skaldnes neatrodas vienā plaknē, tātad nekādas divas skaldnes nevar izgriezt ar vienu taisnu griezienu. Kubu 3×3×3 var sagriezt mazākos kubos 1×1×1 ar sešiem taisniem griezieniem, piemēram, tā, kā parādīts A38. zīm.. Pie tam sagrieztās daļas pārvietot nav nepieciešams.



A38. zīm.

3.5.5. ***Risinājums.*** Rūķītis var rīkoties sekojoši. Rūķītis nostājas pie sienas tā, lai siena būtu viņam kreisajā pusē, atstāj savā pašreizējā atrašanās vietā savu sarkano cepurīti un sāk iet gar sienu tā, lai siena visu laiku būtu viņam no kreisās puses. Ceļa laikā rūķītis saskaita, cik reizes viņam bija jāpagriežas pa labi (pulksteņrādītāja kustības virzienā, A39. zīm. a)) un cik reizes bija jāpagriežas pa kreisi (pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam, A39. zīm. b)).



A39. zīm.

Rūķītis turpina ceļu tik ilgi, kamēr atgriežas vietā, no kuras sāka ceļu (šajā vietā rūķītis atstāja savu sarkano cepuri). Šajā brīdī rūķītis kopā ir pagriezies pa kreisi vai pa labi par 360° (veicis vienu pilnu apgriezienu). Ja rūķītis atrodas sienas iekšpusē, tad, ejot gar sienu tā, ka siena visu laiku atrodas pa kreisi, pagriezienu pa labi būs tieši par 4 vairāk nekā pagriezienu pa kreisi, ja rūķītis atrodas sienas ārpusē, tad pagriezienu pa kreisi būs par 4 vairāk nekā pagriezienu pa labi. Ja rūķītis ir saskaitījis, cik visā ceļā bija viena un otra veida pagriezienu, tad, nosakot, kurš no šiem skaitļiem lielāks, rūķītis secina, kur viņš atrodas.

1995./96. mācību gads

4.1.1. *Atbilde:* nē, nevar.

Risinājums. Katra no 5 riņķa līnijām var krustot ne vairāk kā četras citas riņķa līnijas, katru augstākais divos punktos. Tātad uz visām piecām riņķa līnijām kopā var būt ne vairāk kā $5 \cdot 4 \cdot 2 = 20$ krustpunkti (šoreiz tiek skaitīti krustpunkti uz riņķa līnijām, t.i., katrs divu riņķa līniju krustpunkts tiek ieskaitīts divas reizes - pa vienai reizei uz katras riņķa līnijas), bet dažādo punktu, kuros krustojas šīs riņķa līnijas, kopā var būt ne vairāk kā $40 : 2 = 20$. Tātad uzdevumā prasīto piecu riņķa līniju novietojumu uzzīmēt nevar, jo 22>20.

4.1.2. ***Risinājums.*** Aprakstītajā notikumā pircējs par viltotu 5 Ls naudas zīmi (faktiski par velti) ieguva preci 3 Ls vērtībā un 2 Ls naudas, ko viņam izdeva, tātad kopā ieguva 5 Ls. Pārdevēja kaimiņš neko nezaudēja un neko neieguva, jo viņš viltoto 5 Ls, kurus viņš izmainīja, vietā ieguva īsto 5 Ls naudaszīmi. Šajā procesā ir iesaistītas tikai minētās trīs personas: pārdevējs, pircējs un pircēja kaimiņš, tātad no ārpuses nekāda nauda klāt nenāca un nekur nepazuda. Tāpēc visu dalībnieku ieguvumu un zaudējumu summai jābūt 0. Tā kā pircējs ieguva 5 Ls, kaimiņš neieguva un nezaudēja neko, t.i., 0 Ls, tad kopā kaimiņš un pircējs ieguva 5 Ls+0 Ls=5 Ls, bet pārdevējs zaudēja šo summu – 5 Ls.

4.1.3. ***Risinājums.*** Pārveidosim doto vienādību sekojoši:

$xy + 1 = x + y$ (pārnes x uz vienādības kreiso pusi, bet 1 uz labo pusi)

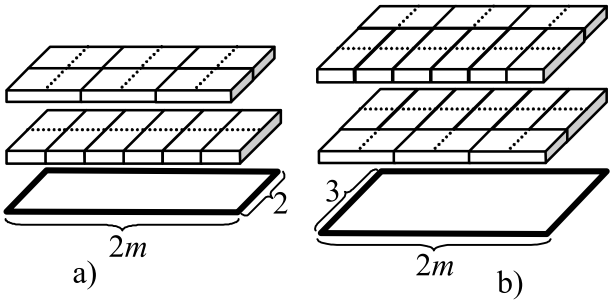
$xy - x = y - 1$ (vienādības kreisajā pusē x iznes pirms iekavām)

$x(y - 1) = y - 1$

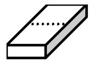
Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi, tātad skaitlis y-1 ir vesels skaitlis. Lai, naturālu skaitli x reizinot ar skaitli (y-1), iegūtu skaitli (y-1), jābūt vai nu x=1, vai y–1=0 jeb y=1 (ja $y - 1 \neq 0$, tad nav neviena cita naturāla skaitļa, izņemot 1, kuru pareizinot ar y–1, iegūtu y–1). Tas nozīmē, ka par meklējamajiem skaitļu pāriem der visi tādi naturālu skaitļu pāri, kuros viens skaitlis ir 1, bet otrs – jebkurš naturāls skaitlis. Patiešām, ja x=1 un y=n – kaut kāds naturāls skaitlis, tad dotā vienādība ir pareiza katrai naturālai n vērtībai: $1 \cdot n + 1 = 1 + n$.

Tā kā uzdevumā prasīts atrast 1996 naturālu skaitļu x un y pārus (x; y) – skaitļu pāri pierakstīsim, liekot abus skaitļus iekavās un pirmo rakstot x vērtību, otro – y vērtību – veidosim šos pārus sekojoši: izvēlēsimies x=1 (visos pāros), bet y – visus naturālos skaitļus no 1 līdz 1996 pēc kārtas, katru skaitli citā pārī. Tad kopā būsim uzrakstījuši 1996 vajadzīgos skaitļu pārus: (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), ..., (1;1995), (1;1996).

4.1.4. ***Risinājums.*** Vispirms apskatīsim, kā noklāt taisnstūrus ar izmēriem $2 \times 2m$ (ja n=2) (skat. A40. zīm. a)) un $3 \times 2m$ (ja n=3) (skat. A40. zīm.b)). Šādā veidā var noklāt jebkuru taisnstūri 2×2m vai 3×2m, jo 2m ir pāra skaitlis un gar šo taisnstūra malu var novietot m domino kauliņus stāvoklī .



A40. zīm.

Ja n ir pāra skaitlis, tad pārklāšanu veicam analoģiski, kā gadījumā n=2 – pirmajā slānī visus kauliņus novietojam stāvoklī  un otrajā slānī visus kauliņus novietojam stāvoklī . Acīmredzot nekādi divi kauliņi dažādos slāņos nesakritīs.

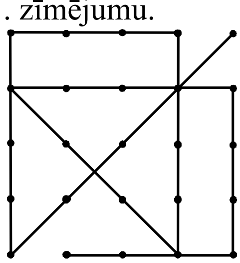
Ja n ir nepāra skaitlis, tad pārklāšanu veicam, kombinējot gadījumus n=3 un n=2. Ievērosim, ka nepāra skaitļus, kas lielāki par 3, var izteikt kā skaitļa 3 un kāda pāra skaitļa summu: n=3+2k (n – nepāra skaitlis, k – naturāls skaitlis) (piemēram, 5=3+2, 7=3+4=3+2·2, 13=3+10=3+2·5 utt.). Tātad, pārklājot taisnstūri n×2m rūtiņas (n – nepāra skaitlis), rīkojamies sekojoši: joslu 3×2m rūtiņas noklājam, kā parādīts A40. zīm. b), bet atlikušo joslu $(n-3)\times 2m$ varam sadalīt mazākās joslās 2×2m (ja n ir nepāra skaitlis, tad n-3 noteikti ir pāra skaitlis, un pāra skaitu rūtiņu var sadalīt pa 2 rūtiņām). Katru no joslām 2×2m noklājam, kā parādīts A40. zīm. a). Arī šajā gadījumā nekādi divi kauliņi dažādos slāņos pilnībā nesakritīs, jo nekādi divi kauliņi nesakrīt A40. zīm. ne a) vai b) gadījumā.

4.1.5. ***Risinājums.*** Pieņemsim, ka starp dotajiem 9 taisnstūriem nav divu tādu, kuru kopējās daļas laukums būtu vismaz $\frac{1}{9}$ dm^2 (t.i., pieņemsim, ka jebkuru divu taisnstūru kopējās daļas laukums ir mazāks par $\frac{1}{9}$ dm^2). Sanumurēsim taisnstūrus patvaļīgā secībā un sāksim tos iekrāsot: vispirms pirmo taisnstūri, tad – otro, trešo, utt. (ja kāda taisnstūra daļa jau ir nokrāsota, otrreiz to vairs nekrāsosim). Iekrāsojot pirmo taisnstūri, mēs iekrāsosim 1 dm^2 lielu laukumu – visu taisnstūri, jo pirms tam nekas nebija krāsots. Iekrāsojot otro taisnstūri, mēs no jauna iekrāsosim laukumu, kas ir lielāks nekā $\frac{8}{9}$ dm^2 – pirmajam un otrajam taisnstūrim var būt kopīga daļa, kas vienreiz jau ir iekrāsota, taču šīs daļas laukums pēc mūsu pieņēmuma ir mazāks $\frac{1}{9}$ dm^2. Iekrāsojot trešo taisnstūri, vēl tiks nokrāsots vairāk nekā $\frac{7}{9}$ dm^2, jo trešajam taisnstūrim var būt kopēja daļa ar pirmo un otro taisnstūri, kas jau ir nokrāsoti (ar katru taisnstūri var būt kopīga cita daļa), un katras kopīgās daļas laukums ir mazāks nekā $\frac{1}{9}$ dm^2, tāpēc no jauna tiks iekrāsots vairāk nekā $1-2\cdot\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$ (dm^2) liels laukums.

Līdzīgi secinām, ka krāsojot ceturto taisnstūri, no jauna tiks iekrāsots laukums vairāk nekā $1-3\cdot\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$ (dm^2); krāsojot piekto taisnstūri, no jauna iekrāsosim vairāk nekā

$1-4\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$ (dm^2); sesto taisnstūri – vairāk nekā $1-5\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$ (dm^2); septīto taisnstūri – vairāk nekā $1-6\cdot\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$ (dm^2); astoto taisnstūri – vairāk nekā $1-7\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$ (dm^2); devīto taisnstūri – vairāk nekā $1-8\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$ (dm^2). Tātad pavisam kopā vienu reizi **būs nokrāsots vairāk** nekā $1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\frac{6}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=5$ (dm^2). Taču dots, ka visi deviņi mazākie taisnstūri ir ievietoti taisnstūrī ar laukumu 5 dm2, tātad, krāsojot mazos taisnstūrus, **nevar nokrāsot vairāk** nekā 5 dm^2 lielu laukumu. Redzam, ka izceltie fakti ir pretrunīgi, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums bija aplams (jo no mūsu pieņēmuma izriet pirmais izceltais apgalvojums). Tas nozīmē, ka noteikti atradīsies vismaz divi tādi mazākie taisnstūri, kuru kopīgās daļas laukums ir vismaz $\frac{1}{9}$ dm^2, kas arī bija jāpierāda.

4.2.1. ***Atbilde:*** skat., piem., A41. zīmējumu.



A41. zīm.

4.2.2. ***Atbilde.*** Dotajam uzdevumam ir iespējami trīs atrisinājumi:

1) □=9, W=8, M=1, C=3;
2) □=9, W=8, M=2, C=5;
3) □=9, W=8, M=3, C=7.

Risinājums. Skatoties saskaitīšanas darbību vienu šķirā, ievērojam, ka □+□=W vai □+□=W+10, t.i., saskaitot ciparus □+□, iegūst vai nu viencipara skaitli W (□ un W ir cipari), vai divciparu skaitli 10+W (saskaitot divus ciparus, summā nevar iegūt vairāk kā 9+9=18). Taču desmitu šķirā atkal jāsaskaita cipari □+□ (un varbūt vēl jāpieskaita 1 desmits, kas varētu būt radies, saskaitot vienus), un šoreiz summas pēdējais cipars ir □. Ja, saskaitot vienu šķirā □+□, būtu iegūts viencipara skaitlis W (neviens lieks desmits nerodas), tad, saskaitot □+□, arī desmitu šķirā būtu jāiegūst cipars W. Tas nozīmē, ka □+□=W+10 (vienu šķirā) un □+□+1=□+10 (desmitu šķirā). No otra vienādojuma iegūstam 2□+1=□+10 jeb □=9. Tad 9+9=18=W+10 jeb W=8. Doto piemēru varam pārrakstīt sekojoši:

$$\begin{array}{r} M99 \\ +\ M99 \\ \hline C98 \end{array}$$

Tā kā, saskaitot 9+9+1=19=9+10, rodas viens pilns simts, tad simtu šķirā iegūstam M+M+1=C jeb 2M+1=C. Tas nozīmē, ka C noteikti ir nepāra cipars (jo C vispār ir cipars), pie tam C≠9, jo □=9. Tātad C var būt 7, 5, 3. Pie tam C≠1, jo M≠0, tā kā tas ir skaitļa pirmais cipars.

Ja C=7, tad M=(C-1):2=(7-1):2=3 un dotais piemērs ir sekojošs:

$$\begin{array}{r} 399 \\ +\underline{399} \\ 798 \end{array}$$

Ja C=5, tad M=(C-1):2=(5-1):2=2 un dotais piemērs ir sekojošs:

$$\begin{array}{r} 299 \\ +\underline{299} \\ 598 \end{array}$$

Ja C=3, tad M=(C-1):2=(3-1):2=1 un dotais piemērs ir sekojošs:

$$\begin{array}{r} 199 \\ +\underline{199} \\ 398 \end{array}$$

4.2.3. ***Risinājums.*** Tā kā šifrs sastāv no trīs cipariem 1, 2 vai 3 (šifrā cipari var arī atkārtoties), tad šifrā pirmais cipars var būt 1, 2 vai 3; katram no šiem gadījumiem otrais cipars arī var būt 1, 2 vai 3; arī trešo ciparu katram no iepriekšējiem gadījumiem var piemeklēt trīs veidos: 1, 2, vai 3, tātad pavisam ir 3·3·3=27 dažādi šifri, no kuriem tikai viens ir pareizs. Pirmajā brīdī liekas, ka sliktākajā gadījumā vajadzēs pārbaudīt katru no šiem 27 variantiem, tātad kopā nospiest 27·3=81 pogas. Taču varam iztikt ar mazāk pogu spiešanu. Uzdevumā teikts, ka ir pēc kārtas pareizā secībā jānospiež trīs cipari, tātad, ja, spiežot daudzas reizes pēc kārtas ciparu pogas, kādā brīdī pēc kārtas pēdējie trīs cipari veidos šifru, tad vārti atvērsies, neatkarīgi no tā, kas ticis spiests pirms tam. Tātad ir jāizveido ciparu 1, 2 un 3, virkne, kurā katri trīs pēc kārtas ņemti cipari veidotu dažādas virknītes (iespējamo šifru) un kopā būtu 27 dažādas trīs ciparu virknītes (visi iespējamie šifra veidi). Nospiežot pogas iegūtās virknes secībā, noteikti būs ievadīts arī pareizais šifrs un pils vārti atvērsies. Noskaidrosim, cik cipariem vismaz ir jābūt ievadāmajā virknē. Ievērosim, ka virknes pirmais un pēdējais cipars piedalās vienas trīsciparu virknītes (šifra) veidošanā, otrais un priekšpēdējais cipars piedalās divu trīsciparu virknīšu veidošanā, bet visi pārējie cipari - trīs minēto virknīšu veidošanā. Pavisam kopā ir 27 dažādas trīsciparu virknītes, tātad tajās visās kopā ir 27·3=81 cipars. Pieņemsim, ka ievadītajā virknē starp otro un priekšpēdējo ciparu vēl ir n cipari. Saskaitot visus ciparus, kas veido dažādās virknītes, iegūstam 1·2+2·2+3·n=81 jeb $3n$=81-6=75 un n=75:3=25. Tātad ievadāmajā virknē jābūt vismaz 25+4=29 cipariem (4 atsevišķi izdalītie cipari – pirmais, otrais, priekšpēdējais un pēdējais cipars). Tātad, lai ar garantiju iekļūtu pilī, pogas jānospiež 29 reizes. To var darīt sekojošā secībā (šajā virknē tiešām var atrast visas 27 dažādās trīsciparu virknītes, tātad arī īsto šifru):

11123222133313121223113233211.

4.2.4. ***Risinājums.*** Pieņemsim, ka apkārt riņķim uzrakstīti skaitļi šādā secībā: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} (visi šie skaitļi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 10). Apskatīsim visas summas, ko veido trīs pēc kārtas ņemti uzrakstītie skaitļi. Ieviesīsim apzīmējumus: $S_1=a_1+a_2+a_3$; $S_2=a_2+a_3+a_4$; $S_3=a_3+a_4+a_5$; $S_4=a_4+a_5+a_6$; $S_5=a_5+a_6+a_7$; $S_6=a_6+a_7+a_8$; $S_7=a_7+a_8+a_9$; $S_8=a_8+a_9+a_{10}$; $S_9=a_9+a_{10}+a_1$; $S_{10}=a_{10}+a_1+a_2$. Jāpierāda, ka vismaz viens no skaitļiem S_1, S_2, …, S_{10} ir lielāks nekā 16.

Saskaitot $S_1+S_2+\ldots+S_9+S_{10}$, katrs no skaitļiem a_1, a_2, a_3, …, a_9, a_{10} tiek ieskaitīts tieši trīs reizes, tātad

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}=3a_1+3a_2+3a_3+3a_4+3a_5+3a_6+3a_7+3a_8+3a_9+3a_{10}$$

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}=3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$$

Tā kā a_1, a_2, …, a_{10} ir visi skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi, tad

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

Tātad

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}=3\cdot 55=165$$

Ja katra no summām S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10} būtu ne lielāka par 16, tad būtu

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}\le 16\cdot 10=160.$$

Bet šīs summas vērtība ir 165>160, tātad pieņēmums, ka nekādu trīs pēc kārtas ņemtu skaitļu summa nav lielāka par 16, ir aplams, un noteikti varēs atrast trīs tādus skaitļus, kas pēc kārtas uzrakstīti apkārt riņķim un kuru summa ir lielāka nekā 16.

4.2.5. ***Risinājums.*** Sauksim atbilstošos vietu pārus, kur zīmes abās rindās sakrīt, par *labām* vietām, bet pārējās vietas - par *sliktām*. Ievērosim, ka, veicot atļauto darbību, *sliktā* vieta kļūst *laba,* bet *labā – slikta* (*sliktajā* vietā zīmes pirmajā un otrajā rindā atšķiras, taču pēc pārveidojuma zīme pirmajā rindā mainās uz pretējo, tātad kļūst tāda pati kā zīme otrajā rindā).

Pieņemsim, ka ir x *sliktās* vietas. Šķirosim sekojošus gadījumus:

(1) ja $x\ge 11$, tad ņemsim pēc kārtas pa 11 *sliktajām* vietām un mainīsim pirmajā rindā zīmes uz pretējām, tātad tās kļūs par *labajām* vietām; tā rīkojamies tik ilgi, līdz *slikto* vietu paliek ne vairāk par 10.

(2) ja $x=10$, tad ar vienu gājienu ņemsim 5 *sliktās* vietas un 6 *labās* vietas. Pārveidojot zīmes, *sliktās* vietas kļūst par *labām*, bet *labās* par – *sliktām*. Tātad tagad paliek 5 "vecās" *sliktās* vietas un 6 "jaunās" *sliktās* vietas jeb kopā 5+6=11 *sliktās* vietas. Ar otro gājienu tās visas pārvēršam par *labām* vietām.

(3) ja $x=9$, tad pirmajā gājienā mainām zīmes 5 *sliktajām* vietām un 6 *labajām* vietām. Pēc šīs darbības veikšanas paliek 6+(9-5)=10 *sliktās* vietas. Tālāk rīkojamies kā (2) gadījumā.

(4) ja $x=8$, tad vispirms mainām zīmes 4 *sliktajās* vietās un 7 *labajās* vietās; tad paliek 7+(8-4)=11 *sliktās* vietas, kuras nākamajā gājienā pārvēršam par *labām*.

Līdzīgi gadījumos, kad $1\le x\le 10$ un x ir pāra skaitlis, pirmajā gājienā maina zīmes $\frac{x}{2}$ *sliktajās* vietās un vēl vajadzīgo skaitu zīmju *labajās* vietās. Pēc šāda gājiena paliek tieši 11 *sliktās* zīmes, kuras nākamajā gājienā pārvērš par labām vietām.

Savukārt, ja $1\le x\le 10$ un x ir nepāra skaitlis, t.i., $x=2k+1=(k+1)+k$ (k - vesels skaitlis), tad pirmajā gājienā nomainām zīmes k+1 *sliktajās* vietās un 11-(k+1)=10-k *labajās* vietās. Pēc šī gājiena paliek k+(10-k)=10 sliktās vietas un tālāk rīkojamies kā aprakstīts (2) gadījumā.

Esam apskatījuši **visus iespējamos** *slikto* vietu skaitus, un katrā gadījumā esam parādījuši, kā uzdevuma prasības izpildīt, tātad esam pamatojuši: vienmēr varēs panākt, ka, izpildot atļautās darbības, abas rindas kļūs vienādas.

4.3.1. ***Atbilde:*** uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

Risinājums. Saskaitīsim divos dažādos veidos, cik **ceļu gali** pavisam ir Ziemeļblāzmas zemē. Skaidrs, ka to skaitam ir **jābūt vienam un tam pašam**, neatkarīgi no tā, kā tie tiek skaitīti.

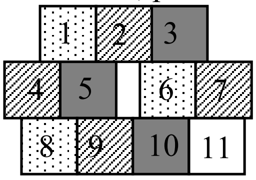
1) Tā kā Ziemeļblāzmu zemē ir 15 ciemi un no katra ciema ir ceļš tieši uz 5 citiem ciemiem, t.i., katrā ciemā ieiet vai iziet tieši 5 ceļu gali, tad pavisam kopā ir 5·15=**75 ceļu gali**.

2) Ir pašsaprotami, ka katram ceļam ir **tieši divi gali**, jo ceļš sākas vienā ciemā un beidzas otrā, pie tam tas nesazarojas. Tātad kopējam ceļu galu skaitam jābūt **pāra skaitlim**.

Bet 75 nav pāra skaitlis, t.i., skaitot vienus un tos pašus ceļa galus dažādos veidos, esam ieguvuši atšķirīgus rezultātus, kas nevar būt. Tāpēc uzdevumā aprakstītā Ziemeļblāzmu zeme nevar eksistēt.

Piezīme: uzdevumā lietoto spriešanas paņēmienu sauc par ***invariantu metodi*** (skat. 7. lpp.)

4.3.2. *Atbilde.* Kvadrātus var izvietot, piemēram, tā, kā parādīts A42. zīmējumā.



A42. zīm.

Risinājums. Mēģināsim šos kvadrātus izkrāsot trīs krāsās tā, lai nekādi divi kvadrāti, kam ir kopīgs malas nogrieznis, nebūtu izkrāsoti vienā krāsā (skat. A42. zīm.). Kvadrātu 1 nokrāsosim pēc izvēles vienā krāsā (zīmējumā tā attēlota ar punktiņiem), tad kvadrātam 2 jābūt citā krāsā (zīmējumā to attēlosim ar iesvītrojumu). Kvadrātam 5 ir kopīgi malas nogriežņi gan ar kvadrātu 1, gan ar kvadrātu 2, tātad tas ir jākrāso vēl citā krāsā (pieņemsim, pelēkā). Kvadrātam 4 ir kopīgs malas nogrieznis gan ar kvadrātu 1, gan ar kvadrātu 5, tātad tas nevar būt ne punktots, ne pelēks, tātad tam ir jābūt iesvītrotam. Savukārt kvadrāts 8 nedrīkst būt tādā krāsā kā 4 vai 5, tāpēc tam jābūt punktotam. Līdzīgi izspriežam, ka kvadrātam 9 jābūt iesvītrotam.

Tālāk kvadrātu 3 varam krāsot vai nu pelēku, vai punktotu. Vispirms pieņemsim, ka kvadrāts 3 nokrāsots pelēks. Tādā gadījumā kvadrātam 6 jābūt punktotam, kvadrātam 10 jābūt pelēkam un kvadrātam 7 jābūt iesvītrotam. Bet kvadrātam 11 ir kopīgs malas nogrieznis ar kvadrātiem 6, 7 un 10, katrs no kuriem ir nokrāsots citā krāsā. Tātad, lai arī kādā no izmantotajām trīs krāsām krāsotu kvadrātu, tas būs vienādā krāsā ar kādu citu kvadrātu (7, 6 vai 10), ar kuru tam ir kopīgs malas nogrieznis.

Līdzīgi izanalizējot gadījumu, kad kvadrātu 3 nokrāso punktotu (*šo analīzi atstājam lasītājam veikt patstāvīgi!*), secinām, ka arī šajā gadījumā kvadrātu 11 nevar nokrāsot nevienā no trijām izmantotajām krāsām, lai uzdevuma prasības izpildītos.

Tātad A42. zīm. attēlotais kvadrātu izvietojums der par uzdevuma atrisinājumu.

4.3.3. *Atbilde:* pavārs nav vainīgs.

Risinājums. Ja pavārs būtu nozadzis piparus, tad viņš to zinātu. Tā kā tie, kas zog piparus, vienmēr melo, tad pavāram-zaglim būtu jāmelo, t.i., jāsaka, ka viņš nezina, kurš nozaga piparus (īstenībā taču viņš zina, ka pats ir vainīgs!). Tātad pavārs nav nozadzis piparus, jo viņš atbildēja, ka zina, kurš to ir izdarījis.

Ja pavārs, sacīdams, ka zina, kurš ir zaglis, melo, tātad īstenībā viņš nezina, kurš ir zaglis, tātad pats nav zaglis (jo par sevi taču viņš visu zina).

Ja pavārs, sacīdams, ka zina, kurš ir zaglis, runā taisnību, tad viņš noteikti nav zaglis, jo zagļi taču vienmēr melo.

4.3.4. *Atbilde:* parlamentā ir tieši viens godīgs deputāts.

Risinājums. Vismaz viens godīgs deputāts ir saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem.

Ja parlamentā būtu vismaz divi godīgi deputāti, tad no šiem deputātiem varētu izveidot pāri, kurā abi deputāti ir godīgi. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka **jebkurā** deputātu pārī vismaz viens deputāts ir uzpirkts, tātad divi vai vairāk godīgi deputāti parlamentā būt nevar. Tāpēc parlamentā ir tieši viens godīgs deputāts.

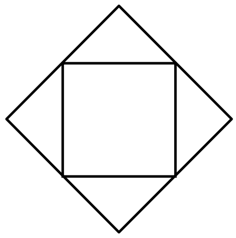
4.3.5. *Atbilde:* nē, nevar.

Risinājums. Pārbaudot *nepieciešamos nosacījumus* uzdevuma izpildei, tas ir, vai lielās kastes tilpums dalās ar mazās kastītes tilpumu, pretruna nerodas:

$\frac{125 \cdot 1996 \cdot 96}{10 \cdot 5 \cdot 5} = 1996 \cdot 48 = 95808$ ir vesels skaitlis. Bet ar to vēl nepietiek, lai apgalvotu, ka visas 95808 kastītes patiešām var salikt lielajā kastē, lai nekas neiziet ārpus tās.

Ja Salatētim būtu izdevies dāvanas sapakot tā, kā prasīts uzdevumā, tad lielās kastes visas skaldnes būtu noklātas ar mazo kastīšu skaldnēm, kuru izmēri ir vai nu 10cm×5cm, vai 10cm×15cm, vai arī 5cm×15cm. Visu šo skaldņu laukumi dalās ar 5, tāpēc saliekot vairākas mazās skaldnītes kopā (bez tukšumiem un pārklāšanās), iegūtais laukums arī dalās ar 5. Tātad arī lielās kastes katras skaldnes laukumam ir jādalās ar 5. Lielās kastes skaldnes ir ar izmēriem 96cm×125cm, 1996cm×125cm, 1996cm×96cm. Kā redzam, skaldnes 1996cm×96cm laukums ar 5 nedalās, tāpēc šī skaldne nevarēs būt precīzi noklāta ar mazo kastīšu skaldnēm. Tāpēc Salatētim neizdosies realizēt savas vēlmes.

4.4.1. ***Atbilde:*** jā, var; skat., piem., A43. zīmējumu.



A43. zīm.

4.4.2. ***Atbilde:*** nē, nevar.

Risinājums. Apzīmēsim pirmajā rindiņā ierakstīto skaitļu summu ar p_1, otrajā rindiņā – p_2, trešajā – p_3, ceturtajā – p_4, piektajā – p_5. Savukārt summas pa kolonnām apzīmēsim attiecīgi ar n_1, n_2, n_3, n_4 un n_5. Uzdevumā dots, ka visi skaitļi p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 ir pāra skaitļi, bet visi skaitļi n_1, n_2, n_3, n_4 un n_5 ir nepāra skaitļi.

Apzīmēsim ar S visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Summu S var aprēķināt dažādi:

- tieši saskaitot visus 25 skaitļus,
- vispirms aprēķinot summu katrā rindiņā un pēc tam saskaitot šīs summas
- vispirms aprēķinot summu katrā kolonnā un pēc tam saskaitot šīs summas.

Saskaņā ar *saskaitīšanas komutatīvo īpašību* summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības, tāpēc visos gadījumos iegūtajai S vērtībai jābūt vienai un tai pašai.

Aprēķināsim S, vispirms aprēķinot summu katrā rindiņā un pēc tam saskaitot šīs summas:

$$S=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5.$$

Tā kā p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 ir pāra skaitļi un vairāku pāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tad šajā gadījumā ***S* ir pāra skaitlis**.

Tagad aprēķināsim S, vispirms saskaitot skaitļus pa kolonnām un pēc tam saskaitot šīs summas:

$$S=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5.$$

Šajā gadījumā skaitļi n_1, n_2, n_3, n_4 un n_5 ir nepāra skaitļi un, saskaitot piecus (*nepāra skaits!*) nepāra skaitļus, arī summas ***S* vērtība ir nepāra skaitlis**.

Izceltie apgalvojumi ir pretrunīgi, jo neviens pāra skaitlis nav vienāds ne ar kādu nepāra skaitli (atceramies, ka S ir viens un tas pats skaitlis – visu tabulā ierakstīto skaitļu summa), tāpēc kvadrātā 5×5 nevar ierakstīt naturālus skaitļus tā, lai to summas pa rindiņām būtu pāra skaitļi, bet summas pa kolonnām – nepāra skaitļi.

4.4.3. ***Risinājums.*** Apzīmēsim Vinnija Pūka medus podus ar burtiem A, B, C, D un E. Lai sakārtotu šo podus rindā sākot ar vieglāko, Pūks var rīkoties sekojoši.

1. svēršana. Salīdzina podus A un B. Tā kā visi medus podi ir dažādi, tad var gadīties, ka A ir vieglāks par B ($A<B$) vai A ir smagāks par B ($A>B$). Pieņemsim, ka $A<B$; otrā gadījumā tālākās darbības un secinājumi ir līdzīgi (*izpēti to patstāvīgi!*).

2. svēršana. Salīdzina podus C un D. Atkal ir divas iespējās: $C<D$ vai $C>D$. Pieņemsim, ka $C<D$ (otru iespēju pēta līdzīgi).

3. svēršana. Salīdzina pirmajā un otrajā svēršanā noskaidrotos smagākos podus; mūsu gadījumā – B ar D.

a) Ja $B<D$, tad, ņemot vērā 1. svēršanu, varam sakārtot trīs podus $A<B<D$.

b) Ja $D<B$, tad, ņemot vērā 2. svēršanu, varam sakārtot šādus trīs podus $C<D<B$.

Pēc trešās svēršanas nav noskaidrotas divu podu – a) gadījumā E un C vai b) gadījumā E un A – atrašanās vietas sakārtotajā rindā.

4. un 5. svēršanas. Šajās svēršanās noskaidrosim poda E atrašanās vietu.

a) Ja jau ir iegūts sakārtojums $A<B<D$, tad podu E vispirms salīdzinām ar podu B. Pēc tam, atkarībā no šīs svēršanas rezultāta, podu E salīdzinām ar podu A (ja $E<B$) vai podu D (ja $E>B$). Pēc šīs svēršanas poda E vieta šajā rindā būs noteikta viennozīmīgi.

b) Ja jau ir iegūts sakārtojums $C<D<B$, tad podu E vispirms salīdzinām ar podu D. Pēc tam, atkarībā no šīs svēršanas rezultāta, podu E salīdzinām ar podu C (ja $E<D$) vai podu B (ja $E>D$). Arī šajā gadījumā poda E vieta rindā būs noteikta viennozīmīgi.

Pēc šīm svēršanām palicis "neiekārtots" viens pods:

a) gadījumā pods C vai

b) gadījumā pods A.

a) Ir zināms, ka $C<D$ (noskaidrojām 2. svēršanā), tātad pods C nav jāsalīdzina ar podiem, kas smagāki par D, un ar pašu podu D. Vieglāki par D ne vairāk kā 3 podi. Tātad pods C vispirms (6. svēršanā) ir jāsalīdzina ar podu, kurš sakārtotajā rindā ir otrais vieglākais, tad (7. svēršanā), atkarībā no iepriekšējās svēršanas rezultāta, ar visvieglāko vai trešo vieglāko jau sakārtotajā rindā. Pēc šīs svēršanas viennozīmīgi varēsim sakārtot visus piecus podus rindā pēc svara.

b) Lai noskaidrotu poda A atrašanās vietu, rīkojamies līdzīgi. Tā kā $A<B$, tad nav vajadzīgs podu A salīdzināt ar podu B un ar tiem podiem, kas smagāki par B. Tātad A būtu jāsalīdzina ar augstākais 3 citiem podiem. 6.svēršanā salīdzina podu A ar otro vieglāko jau sakārtotajā rindā, bet 7.svēršanā rīkojas līdzīgi kā a) gadījumā atkarībā no 6.svēršanas rezultāta. Arī šoreiz viennozīmīgi varēs noteikt poda A atrašanās vietu rindā.

Esam parādījuši, kā ar 7 svēršanām 5 podus vienmēr varēs sakārtot.

Piezīme. Var pierādīt, ka 7 svēršanas ir arī mazākais svēršanu skaits, lai **noteikti** varētu sakārtot 5 podus pēc svara augošā secībā.

4.4.4. ***Atbilde.*** Jā, uzdevumā aprakstītā situācija ir iespējama.

Risinājums. Piemēram, ja biznesmeņa ienākumi katru mēnesi bija 1000 Ls, bet izdevumi parādīti sekojošā tabulā:

	janvāris	februāris	marts	aprīlis	maijs	jūnijs	jūlijs	augusts	septembris	oktobris	novembris	decembris
Izdevumi, Ls	700	1050	1100	1100	1100	700	1100	1100	1100	1100	700	1100

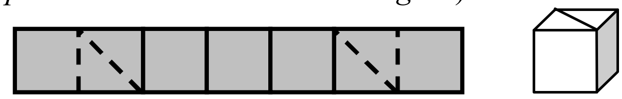
Ienākumi katrus piecus mēnešus pēc kārtas bija $5\cdot1000=5000$ Ls.

Izdevumi no janvāra līdz maijam un no februāra līdz jūnijam bija $700+1050+1100+1100+1100=5050$ Ls>5000 Ls. Citos piecos pēc kārtas ņemtos mēnešos izdevumi bija $700+1100+1100+1100+1100=5100$ Ls > 5000 Ls, tik tiešām, katrus piecus pēc kārtas ņemtus mēnešus biznesmeņa ienākumi bija mazāki nekā izdevumi.

Savukārt visa gada kopējie ienākumi bija $12\cdot1000=12000$ Ls, bet visa gada kopējie izdevumi bija $700\cdot3+1050+1100\cdot8=11950$ Ls < 12000 Ls. Tiešām, visa gada kopējie ienākumi pārsniedz visa gada kopējos izdevumus.

4.4.5. ***Risinājums***. Papīra strēmelīti 3×21 *cm* var sadalīt 7 kvadrātiņos 3×3 *cm*. Tā kā jāizloka kubs ar izmēriem 3 *cm*×3 *cm*×3 *cm*, katras tā skaldnes izmērs ir 3×3 *cm*. Kubam ir 6 skaldnes, bet dotajā strēmelītē ir 7 atbilstošā lieluma kvadrātiņi, tāpēc locīšanas gaitā drīkstam "*pazaudēt*" vienu kvadrātiņu.

Kā var veikt locīšanu, parādīts A44. a) zīmējumā. (*Nepārtrauktā līnija nozīmē ielocīšanu uz "iekšu", bet pārtrauktā - uzlocīšanu uz "augšu"*).



a) b)

A44. zīm.

Strēmelītes "redzamo" pusi nokrāsosim pelēku. A44. b) zīmējumā parādīts iegūtais kubs – tā augšējo skaldni veido abas a) zīmējumā pa diagonāli salocītās rūtiņas, priekšējo un aizmugurējo skaldni veido strēmelītes abas galējās rūtiņas, tām ir redzama nenokrāsotā puse, bet pārējās trīs skaldnes veido pārējās rūtiņas, tām ir redzama iekrāsotā puse.

1996./97. mācību gads

5.1.1. ***Atbilde:*** **83–26=57**.

Risinājums. Dotajā piemērā samainīt vietām divus klucīšus iespējams 15 dažādos veidos:

5 veidi tiks iegūti, pirmo klucīti „7” samainot ar jebkuru no 5 pārējiem klucīšiem,

4 citas izteiksmes tiks iegūtas otro klucīti „3” samainot ar 4 citiem klucīšiem „2”, „6”, „5” vai „8” (samainot „3” ar „7”, tiks iegūts tas pats variants, kas jau tika iegūts, mainot pirmo klucīti),

3 jaunus variantus iegūsim, „2” samainot ar „6”, „5” vai „8”,

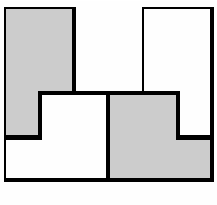
2 citas izteiksmes tiks iegūtas „6” samainot ar „5” vai „8” un

vēl 1 neapskatīta iespēja ir „5” samainīt ar „8”.

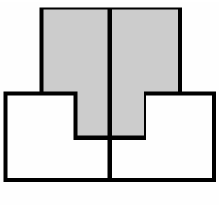
Apskatot visas šīs iespējas, redzam, ka pareiza vienādība tiek iegūta tikai vienā gadījumā.

1) 37–26≠58;	6) 72–36≠58;	10) 73–62≠58;	13) 73–25≠68;
2) 23–76≠58;	7) 76–23≠58;	11) 73–56≠28;	14) 73–28≠56;
3) 63–27≠58;	8) 75–26≠38	12) 73–86≠52;	
4) 53–26≠78;	9) 78–26≠53;		15) 73–26≠85.
5) **83–26=57**;			

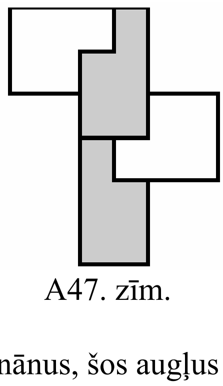
5.1.2. ***Atbilde:*** skat. A45., A46. un A47. zīm.



A45. zīm.



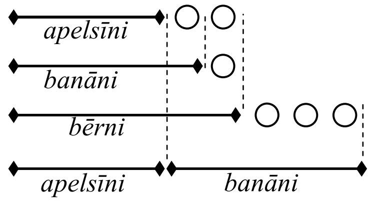
A46. zīm.



A47. zīm.

5.1.3. ***Atbilde:*** mamma nopirka 4 apelsīnus un 5 banānus, šos augļus ēda 6 bērni.

Risinājums. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka bērnu ir par 2 vairāk nekā apelsīnu un par 1 vairāk nekā banānu, un bērnu ir par 3 mazāk nekā augļu kopā; dotās sakarības shematiski attēlotas A48.zīm. Redzam, ka apelsīnu un banānu kopā ir tik pat, cik apelsīnu kopā ar vēl 2+3=5 augļiem, tātad ir 5 banāni. Tālāk varam izskaitļot, ka ir 5-1=4 apelsīni un 5+1=6 bērni.



A48. zīm.

5.1.4. *Risinājums.*

a) Apskatīsim, kāda ir divu naturālu skaitļu summa atkarībā no saskaitāmo paritātes. (Naturāls skaitlis ir pāra skaitlis, ja tas dalās ar 2, tātad vispārīgā veidā pāra skaitli var uzrakstīt formā $2k$, kur k ir naturāls skaitlis; k var būt gan pāra, gan nepāra. Savukārt nepāra skaitlis, dalot ar 2, dod atlikumu 1, tāpēc to var uzrakstīt formā $2k+1$, k ir naturāls skaitlis vai 0.)

- Ja abi saskaitāmie ir pāra skaitļi $2k$ un $2n$ (k un n naturāli skaitļi), tad to summa ir $2k+2n=2(k+n)$ – pāra skaitlis.
- Ja abi saskaitāmie ir nepāra skaitļi $2k+1$ un $2n+1$ (k un n naturāli skaitļi, n var būt arī 0), tad to summa $(2k+1)+(2n+1)=2k+2n+2=2(k+n+1)$ arī ir pāra skaitlis.
- Ja viens saskaitāmais ir pāra skaitlis $2k$ un otrs ir nepāra skaitlis $2n+1$ (k un n – naturāli skaitļi), tad to summa $2k+(2n+1)=2k+2n+1=2(k+n)+1$ ir nepāra skaitlis.

Redzam, ka divu naturālu skaitļu summa ir nepāra skaitlis tikai tādā gadījumā, ja viens no saskaitāmajiem ir pāra skaitlis un otrs – nepāra skaitlis, Tātad viens no šiem skaitļiem dalās ar 2, līdz ar to abu skaitļu reizinājums arī dalīsies ar 2 un būs pāra skaitlis.

b) Starp dotajiem 1996 skaitļiem vismaz viens skaitlis noteikti ir pāra skaitlis. Ja tā nebūtu, tad visi 1996 skaitļi būtu nepāra skaitļi. Tā kā jebkuru divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tad visu 1996 nepāra skaitļu summa arī būs pāra skaitlis – visus 1996 nepāra skaitļus var sadalīt 998 grupiņās pa 2 skaitļiem, katrā grupiņā skaitļu summa ir pāra skaitlis, un 998 pāra skaitļu summa ir pāra skaitlis.

Tā kā starp dotajiem skaitļiem ir **vismaz viens** pāra skaitlis, tad visu šo skaitļu reizinājums arī būs pāra skaitlis.

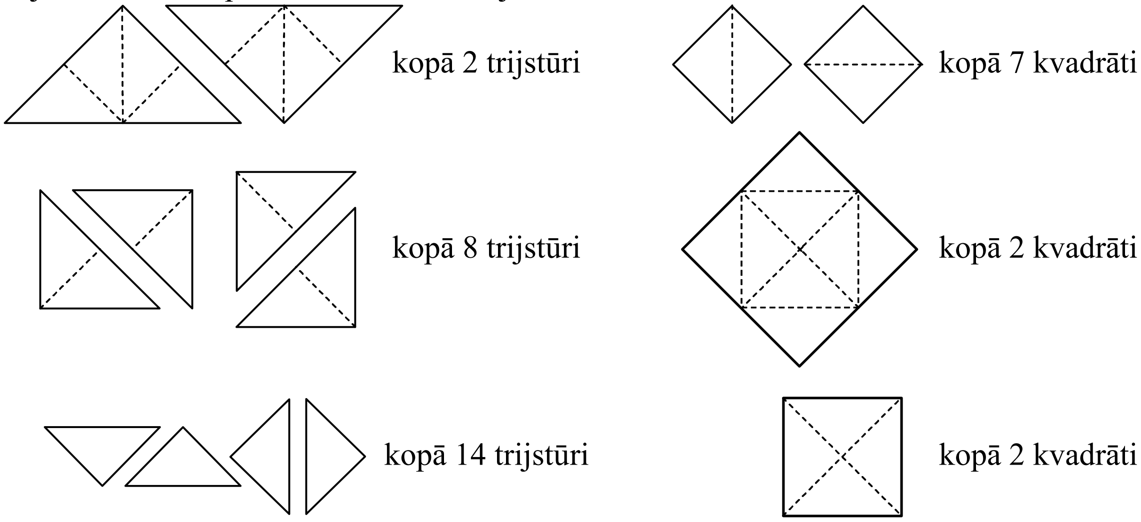
Piezīme. Šajā uzdevumā pamatoto faktu var vispārināt: *pāra skaita nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis*.

5.1.5. *Atbilde:* Cipcap mežā dzīvo ne vairāk kā 36 rūķīši.

Risinājums. Apzīmēsim viena rūķīša vestīšu skaitu ozolkoka skapī ar o, bērza skapī – ar b un riekstkoka skapī – ar r. Tā kā katram rūķītim ir tieši 10 vestītes, tad $o+b+r=10$. Riekstkoka skapī ir r vestītes, tāpēc abos pārējos skapjos ir $o+b=10-r$ vestītes. Tā kā katrā skapī ir vismaz 1 vestīte, tad ozolkoka skapī var būt 1, 2, …, $10-r-1=9-r$ vestītes. Bērza skapī glabāsies visas atlikušās vestītes, tātad ozola un bērza skapjos kopā esošo vestīšu skaitu o un b var izvēlēties 9-r veidos. Riekstkoka skapī var glabāties 1 vestīte (r=1), 2, 3, 4, 5, 6, 7 vai 8 vestītes. Vairāk nekā 8 vestītes riekstkoka skapī nevar glabāties, jo mazākais skaits vestīšu ozola un bērza skapjos var būt 1+1=2, un $10-2=8$ ir lielākais iespējamais vestīšu skaits riekstkoka skapī. Ja riekstkoka skapī ir 1 vestīte, tad pārējos skapjos esošo vestīšu skaitu var izvēlēties 9-1=8 veidos, t.i., ne vairāk kā 8 rūķīšiem riekstkoka skapī var būt tieši 1 vestīte, ja r=2, tad ne vairāk kā 9-2=7 rūķīšiem riekstkoka skapī var būt tieši 2 vestītes, …, ja r=8, tad ne vairāk kā 9-8=1 rūķītim riekstkoka skapī var būt 8 vestītes. Tātad mežā pavisam var dzīvot ne vairāk kā 1+2+3+4+5+6+7+8=36 rūķīši.

5.2.1. ***Atbilde:*** zīmējumā redzami 11 kvadrāti un 24 trijstūri.

Risinājums. A49. zīmējumā attēlots, kādi un cik kvadrāti un trijstūri redzami 7. zīmējumā. Tātad kopā ir $14+8+2=24$ trijstūri un $7+2+2=11$ kvadrāti.



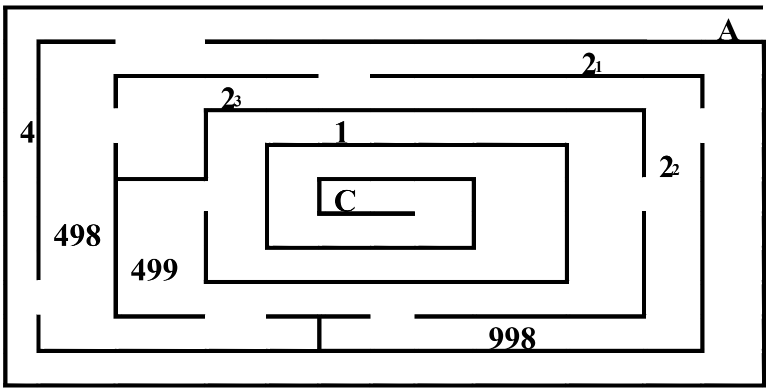
A49. zīm.

5.2.2. ***Atbilde:*** 7 veidos.

Risinājums. Skaitli 1996 kā doto skaitļu reizinājumu var izteikt sekojoši:

$$1996=4\cdot 499(\cdot 1)$$
$$1996=2\cdot 2\cdot 499(\cdot 1)$$
$$1996=2\cdot 998(\cdot 1).$$

Tā kā labirintā ir trīs maisi ar 2 dārgakmeņiem, apzīmēsim tos ar 2_1, 2_2 un 2_3 (skat. A50.zīm.).



A50. zīm.

Alise nedrīkst iet pa ceļa posmu, kurā atrodas maiss ar 498 dārgakmeņiem (jo 1996 nedalās ar 498 bez atlikuma).

Savākt tikai maisus ar 2 un 998 dārgakmeņiem un nokļūt C Alisei arī neizdosies, jo tad ir jāiet vēl vismaz gar maisu ar 499 vai gar maisu ar 1 dārgakmeni. Bet paiet maisiem garām, tos nesavācot, Alise nedrīkst.

Savākt maisus ar 1, 2 un 998 dārgakmeņiem Alise var 3 veidos (vienreiz ņemot maisu 2_1, otrreiz ejot caur 2_2, bet trešoreiz savācot maisu 2_3).

Labirintā ir 1 maiss ar 4 un viens maiss ar 499 dārgakmeņiem, tātad $1996=4\cdot 499$ Alise var realizēt tikai vienā veidā. Savākt maisus ar 4, 499 un 1 dārgakmeni Alisei neizdosies, jo, lai nokļūtu centrā, vēlreiz būs jāšķērso ceļa posms, kur ir maiss ar 499 dārgakmeņiem, bet tas nav atļauts.

Kā jau redzējām iepriekš, vienā gājienā savākt maisus ar 499 un 1 dārgakmeni Alisei neizdosies, tātad nevarēs arī savākt reizē maisus ar 2, 499 un 1 dārgakmeni. Savukārt savākt maisus ar 499, 2 un 2 dārgakmeņiem var 3 dažādos veidos:

1) savācot maisus 2_1, 2_2 un 499;
2) savācot maisus 2_3, 2_1 un 499;
3) savācot maisus 2_3, 2_2 un 499.

Esam aplūkojuši visas iespējas, kā Alise var iziet cauri labirintam, izpildot nosacījumus. Tātad šo labirintu var iziet $3+1+3=7$ dažādos veidos.

5.2.3. ***Atbilde:*** $a=3$.

Risinājums. Pārveidosim doto vienādību:

$$5a^2-3=14a$$
$$5a^2-14a=3$$
$$a(5a-14)=3$$

Tā kā a ir vesels skaitlis, tad arī $5a-14$ ir vesels skaitlis. Skaitli 3 kā veselu skaitļu reizinājumu var izteikt 4 veidos:

$$3=1\cdot3=3\cdot1=(-1)\cdot(-3)=(-3)\cdot(-1)$$

Tātad ir jāizpildās vienai no četrām iespējām:

I $a=1$ un $5a-14=3$, bet $5\cdot1-14\neq3$, tātad $a\neq1$
II $a=3$ un $5a-14=1$; $5\cdot3-14=1$, tātad $\boldsymbol{a=3}$ der.
III $a=-1$ un $5a-14=-3$, bet $5\cdot(-1)-14\neq-3$, tātad $a\neq-1$
IV $a=-3$ un $5a-14=-1$, bet $5\cdot(-3)-14\neq-1$, tātad $a\neq-3$.

Redzam, ka vienīgā a vērtība, kas apmierina doto vienādību un ir vesels skaitlis, ir 3.

5.2.4. ***Atbilde:*** Jānītis bija uzzīmējis lielāku kvadrātu nekā Pēterītis.

Risinājums. Apzīmēsim ar a Jānīša sākotnējā kvadrāta malas garumu, ar b – Pēterīša sākotnējā kvadrāta malas garumu. Tad Jānīša kvadrāta laukums bija a^2, bet Pēterīša kvadrāta laukums bija b^2. Pēc samazināšanas Jānītis ieguva kvadrātu ar malas garumu $a-0{,}2a=0{,}8a$ un laukumu $(0{,}8a)^2=0{,}64a^2$, bet Pēterītis ieguva kvadrātu ar laukumu $b^2-0{,}21b^2=0{,}79b^2$. Tā kā jauniegūtie kvadrāti ir vienādi, tad arī to laukumi ir vienādi:

$$0{,}64a^2=0{,}79b^2$$

Izdalīsim vienādības abas puses ar 0,64:

$$a^2=(0{,}79:0{,}64)b^2$$
$$a^2=\frac{79}{64}b^2=1\frac{15}{64}b^2>b^2$$

No pēdējās izteiksmes redzams, ka Jānīša sākotnēja kvadrāta laukums bija lielāks nekā Pēterīša sākotnējā kvadrāta laukums, tātad Jānītis sākumā bija uzzīmējis lielāku kvadrātu.

5.2.5. ***Atbilde:*** Lattelekom Tālo Runu zemē nomainīja ne vairāk kā 648 numurus.

Risinājums. Lattelekom Tālo Runu zemē varēja nomainīt augstākais tik numurus, cik ir piecciparu "simetriskie" skaitļi, kam tieši trīs cipari ir dažādi. Saskaitīsim, cik šādi skaitļi ir.

Pirmais cipars šādā skaitlī nevar būt 0, tātad tas var būt 1, 2, 3,…, 9, pavisam 9 dažādi cipari. Otrais cipars nevar būt vienāds ar pirmo, bet var būt 0, tātad katram jau izvēlētam pirmajam ciparam otro var izvēlēties 9 veidos. Trešais cipars nevar būt vienāds ne ar pirmo, ne ar otro ciparu, tātad to var piemeklēt 8 veidos katrai pirmo divu ciparu izvēlei. Tātad pirmos trīs ciparus var izvēlēties $9\cdot9\cdot8=648$ veidos. Tā kā numuri ir simetriski, tad ceturtais un piektais cipars ir viennozīmīgi noteikti ar otro un pirmo ciparu. Noskaidrojot, cik dažādos veidos var izvēlēties pirmos trīs ciparus, esam arī uzzinājuši, cik pavisam ir simetrisku piecciparu skaitļu ar trīs dažādiem cipariem; to ir 648. Tā kā nomainītie numuri bija tikai aprakstītā veida skaitļi, tad nomainīto numuru nevar būt vairāk nekā ir šādu skaitļu, t.i., tika nomainīti ne vairāk kā 648 numuri (nevar noteikt, cik tieši numuri nomainīti, jo uzdevumā nekas nav teikts, vai **visi** minētā veida skaitļi atbilst kāda abonementa numuram).

5.3.1. ***Atbilde:*** kaudzē bija 6 peles.

Risinājums. Pieņemsim, ka sākumā kaudzē bija x peles. Ieraudzījušas Anniņu paslēpās $\frac{1}{2}x$ peles, kokā uzrāpās $\frac{1}{6}$ no x jeb $\frac{1}{6}x$ peles, arī zemē ierakās $\frac{1}{6}x$ peles. Tātad kaudzē bija

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}x+1=\frac{5}{6}x+1$$

peles jeb

$$\frac{5}{6}x+1=x$$

$$x-\frac{5}{6}x=1$$

$$\frac{1}{6}x=1$$

$$x=6.$$

Pārbaude. Ja kaudzē bija 6 peles, tad paslēpās un 3 peles, kokā uzrāpās 1 pele un zemē ierakās 1 pele. Tātad uz ceļa palika 6-3-1-1=1 pele, kas saskan ar uzdevuma nosacījumiem.

5.3.2. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A51.zīmējumu.

3	6	3	0	0	0	4	6
6	4	3	6	0	0	2	0
4	3	6	5	0	2	2	2
4	3	6	0	1	1	1	3
4	6	3	5	1	1	1	4
6	1	2	5	5	5	5	5
2	2	4	4	2	1	5	3

A51. zīm.

5.3.3. ***Atbilde:*** 720 dienās Štepseļu ģimene saslēgs savas elektroierīces visos iespējamos veidos.

Risinājums. Štepseļu ģimenes dzīvoklī ir 6 rozetes, izvietotas taisnā rindā, un 6 elektroierīces, kas visas ir jāsaslēdz šajās rozetēs. Tātad mums ir jāaprēķina, cik dažādos veidos var rindā izvietot 6 dažādus priekšmetus.

Pirmajā rozetē var tikt ieslēgta viena no sešām ierīcēm. Otrajā rozetē var ieslēgt jebkuru no 5 atlikušajām ierīcēm (to, kas ieslēgta pirmajā rozetē, otrajā ieslēgt nevar). Tātad pirmajās divās rozetēs varam ieslēgt ierīces $6\cdot5=30$ veidos. Katram no šiem veidiem trešajā rozetē varam ieslēgt kādu no 4 atlikušajām ierīcēm (divas ierīces jau ieslēgtas pirmajā un otrajā rozetē). Līdzīgi varam izspriest, ka ceturtajā rozetē var ieslēgt jebkuru no 3 atlikušajām ierīcēm, piektajā rozetē jebkuru no 2 atlikušajām ierīcēm un sestajā rozetē atlikušo vienu ierīci. Tātad 6 ierīces 6 rozetēs varam saslēgt $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!=720$ dažādos veidos. Tas nozīmē, ka Štepseļu ģimenei būs vajadzīgas 720 dienas (gandrīz 2 gadi), lai visas elektroierīces būtu saslēgtas visos iespējamos veidos.

5.3.4. ***Risinājums.*** Apskatīsim A52.zīmējumu.

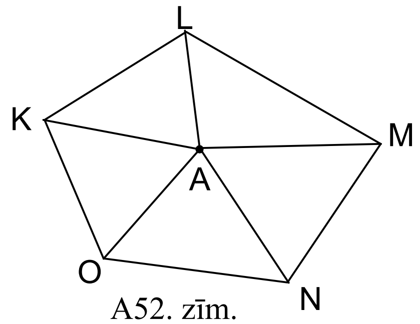
Rūķītis Strīpainā Zeķe apgalvo, ka viņš var jebkura piecstūra, tātad arī piecstūra KLMNO iekšpusē izvēlēties tādu punktu A, ka $\angle KAL=\angle LAM=\angle MAN=\angle NAO==\angle KAO=90°$. Tātad Strīpainā Zeķe apgalvo, ka eksistē tāds punkts A, ka

$$\angle KAL+\angle LAM+\angle MAN+\angle NAO+\angle KAO=5\cdot 90°=450°.$$

Bet piecu leņķu, kas veidojas, kādu punktu piecstūra iekšpusē savienojot ar piecstūra virsotnēm, summa ir pilns leņķis – tieši 360° liels. Tātad jābūt

$$\angle KAL+\angle LAM+\angle MAN+\angle NAO+\angle KAO=360°.$$

Bet $360°\neq 450°$, tātad tāds punkts A piecstūra iekšpusē neeksistē un taisnība ir rūķītim Lielā Cepure.



A52. zīm.

5.3.5. ***Atbilde:*** Jānim bija 16 *ha* sējumu un ražība 51 *cnt*/*ha*; Pēterim – 8 *ha* sējumu un ražība 34 *cnt*/*ha*; Andrim – 20 *ha* sējumu un ražība 40,8 *cnt*/*ha*.

Risinājums. Apzīmēsim Jāņa lauka platību ar x *ha* un ražību ar y *cnt*/*ha*. Uzdevumā dotos lielumus un sakarības apkoposim tabulā:

	platība (*ha*)	raža (*cnt*)	ražība (*cnt*/*ha*)
Jānim	x	xy	y
Pēterim	$0{,}5x$	$xy:3=272$	
Andrim		xy	$0{,}8y$
kopā	44		

Tā kā *raža=platība · ražība*, tad *platība=raža : ražība*. Tāpēc Andra lauku platība ir

$$xy:(0{,}8y)=x:0{,}8=1{,}25x.$$

Tāpēc visu lauku kopējā platība ir

$$x+0{,}5x+1{,}25x=2{,}75x=44,$$

no kurienes iegūstam, ka

$$x=44:2{,}75=16\ (ha).$$

No vienādības $xy:3=272$ iegūstam $xy=272\cdot 3=816$, no kurienes savukārt var aprēķināt

$$y=816:x=816:16=51\,(cnt/ha).$$

Tagad bez grūtībām var aprēķināt pārējos lielumus.

Pētera lauka platība ir $0{,}5\cdot 16$ *ha*=8 *ha* un ražība – 272 *cnt* :8 *ha*=34 *cnt*/*ha*, bet Andra lauks aizņem 44-16-8=20 *ha* un ražība bija $0{,}8\cdot 51$ *cnt*/*ha*=40,8 *cnt*/*ha*.

5.4.1. ***Atbilde:***

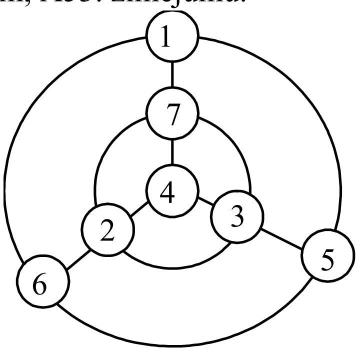
a)
$$\begin{array}{r} 1\,6\,0\,0\,8\,7\,4 \\ -\;8\,5\,1\,3\,2\,7 \\ \hline 7\,4\,9\,5\,4\,7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 6\,6 \\ 1\,1\,1 \\ \hline 6\,6 \\ 6\,6 \\ 6\,6 \\ \hline 7\,3\,2\,6 \end{array}$$

Risinājums. **a)** Mazināmā pēdējais cipars ir 4, jo 7+7=14. Tātad 1 desmitu "aizņemamies" no 7 desmitiem, tātad mazinātāja desmitu cipars ir 7-1-4=2. Starpības simtu cipars ir 8-3=5. Tā kā 5+4=9, bet mazināmajā atbilstošais cipars ir 0, tad, atņemot tūkstošus, vienu desmittūkstoti esam "aizņēmušies" no 0, jeb no 10 desmittūkstošiem; tātad mazināmajā paliek 5 simttūkstoši, 9 desmittūkstoši un $10+x$ tūkstoši (x- tūkstošu cipars mazināmajā). Mazinātājā ir 1 tūkstotis, tātad $x=0$. (Ja $x\geq 1$, tad nebūtu "jāaizņemas" 1 no nākamās šķiras.) Tātad starpībā ir 10-1=9 tūkstoši. Mazināmā pirmais cipars var būt tikai 1, tātad mazinātāja pirmais cipars ir 15-7=8.

b) Tā katrs starpreizinājums ir divciparu skaitlis, tad otra reizinātāja visi cipari var būt tikai 1; ja kaut viens no tiem būtu $a\geq 2$, tad, reizinot to ar pirmo reizinātāju $x=6\ast\geq 60$, reizinājumā iegūtu skaitli $a\cdot x\geq 2\cdot 60=120$, tātad trīsciparu skaitli. Visa reizinājuma pēdējais cipars ir vienāds ar pirmā starpreizinājuma pēdējo ciparu, tāpēc tas arī ir 6. Bet pirmais starpreizinājums ir $1\cdot 6\ast=\ast 6$, tātad pirmais reizinātājs ir 66. Atliek sareizināt 66 ar 111, un būsim atjaunojuši arī Jānīša mājasdarba otro piemēru.

5.4.2. Atbilde: skat., piemēram, A53. zīmējumu.



A53. zīm.

Risinājums. Zīmējumā ir 2 riņķa līnijas, kuras satur 6 aplīšus, un vēl paliek vidējais aplītis. Tā kā uz katras riņķa līnijas esošo trīs skaitļu summa ir 12, tad varam aprēķināt, kāds skaitlis ir vidējā aplītī.

Visu skaitļu no 1 līdz 7 summa ir 1+2+3+4+5+6+7=28; uz abām riņķa līnijām esošo skaitļu summa ir 12+12=24, tātad vidējā aplītī ir skaitlis 28-24=4. Pārējos skaitļus ierakstām tā, lai izpildītos nosacījumi. Viens atrisinājums ir redzams A55. zīmējumā.

5.4.3. ***Risinājums.*** Uzdevuma autorēm ir zināmi 83 skaitļi, kurus var izteikt, izmantojot piecus pieciniekus, aritmētiskās darbību zīmes un iekavas. Mazākais no tiem, protams, ir skaitlis 1:

$$1=55:5-5-5,$$

bet lielākais – 55555.

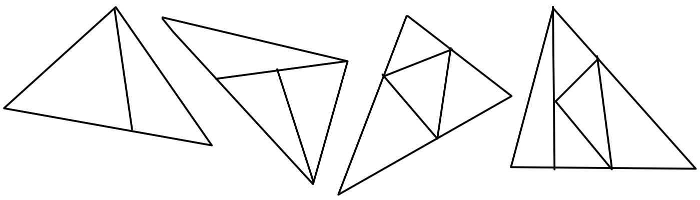
Lielāku skaitli nekā 55555 uzdevumā aprakstītajā veidā iegūt nevar, jo, vislielāko rezultātu varam iegūt, lietojot tikai reizināšanas operāciju. Pārbaudot visas iespējas, redzam, ka nākamais lielākais iegūstamais skaitlis ir tikai 30525.

$5555 \cdot 5 = 27775$,
$555 \cdot 55 = 30525$,
$555 \cdot 5 \cdot 5 = 13875$,
$55 \cdot 55 \cdot 5 = 15125$,
$55 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 6875$
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

5.4.4. ***Atbilde.*** Kā trijstūri var sadalīt 2, 3, 4 un 5 trijstūros, parādīts A54. zīmējumā.

Risinājums. Pieņemsim, ka trijstūris ir sadalīts *n* trijstūros. Tā kā trijstūri var sadalīt 2 trijstūros, tad, vienu no šiem *n* trijstūriem sadalot 2 trijstūros, sākotnējais trijstūris tiks sadalīts jau $n+2-1=n+1$ trijstūros (*ir jāatņem tas trijstūris, kuru sadalām 2 trijstūros*). Tātad, ja trijstūri var sadalīt *n* trijstūros, tad to var sadalīt arī *n*+1 trijstūrī.

A54. zīmējumā redzams, ka patvaļīgu trijstūri var sadalīt 5 trijstūros. Tātad to var sadalīt arī 6 trijstūros. Kādu no iegūtajiem trijstūrīšiem sadalot divos trijstūros, tiks iegūtas 7 daļas – trijstūri, un, tādā veidā pakāpeniski turpinot, tiks iegūts dotā trijstūra sadalījums arī 10 trijstūrīšos.



A54.zīm.

Piezīme. Šī uzdevuma risinājumā izmantotā spriedumu gaita būtībā ir *matemātiskā indukcija* (skat. 10.lpp.): mēs tieši pārbaudījām, ka iespējams jebkuru trijstūri sadalīt 2 trijstūros, kā arī parādījām, kā katrā situācijā rīkoties, lai sadalījumā iegūtu tieši par vienu trijstūri vairāk, un pamatojām, ka tas vienmēr ir iespējams.

5.4.5. ***Atbilde:*** otrajā grupā bija 6 cilvēki.

Risinājums. Ieviesīsim jēdzienu pārtikas vienība – pārtikas daudzums, kas nepieciešams vienam cilvēkam vienā dienā. Tā kā tūristu grupā bija 9 cilvēki un līdzpaņemtās pārtikas viņiem pietiktu 5 dienām, tad viņu proviants sastāvēja no $9 \cdot 5 = 45$ pārtikas vienībām.

Ar *x* apzīmēsim cilvēku skaitu otrajā grupā. Tātad kopā bija 9+*x* tūristi, kuriem ar 45 pārtikas vienībām pietika 3 dienām. Tas nozīmē, ka

$(9+x) \cdot 3 = 45$
$9+x = 45:3 = 15$
$x = 15-9 = 6$ (cilvēki otrā grupā).

1997./98. mācību gads

6.1.1. ***Atbilde:*** gan skaitli 1000, gan skaitli 20 var iegūt no 1997, izpildot atļautās darbības.

Risinājums. Uzdevums būs atrisināts, ja parādīsim, kādā secībā jāizpilda atļautās darbības, lai no sākotnējā skaitļa iegūtu prasītos skaitļus.

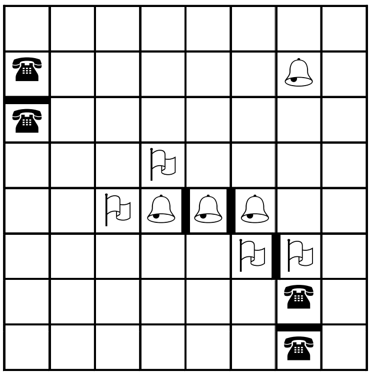
Ar „$\xrightarrow{1}$” apzīmēsim, ka tiek veikta 1.darbība – dalīšana ar 2, ar „$\xrightarrow{2}$” apzīmēsim, ka tiek veikta 2.darbība – skaitļa pirmais cipars tiek samainīts vietām ar pēdējo un iegūtajam skaitlim pieskaitīts 1.

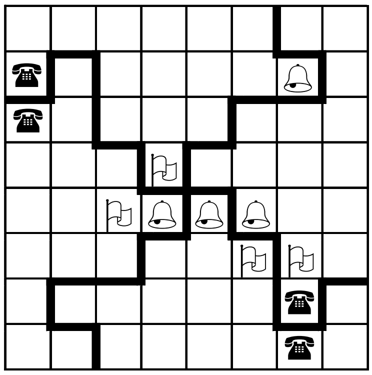
$$\mathbf{1997} \xrightarrow{2} 7992 \xrightarrow{1} 3996 \xrightarrow{1} 1998 \xrightarrow{1} 999 \xrightarrow{2} \mathbf{1000}$$

$$1000 \xrightarrow{1} 500 \xrightarrow{1} 250 \xrightarrow{1} 125 \xrightarrow{2} 522 \xrightarrow{1} 261 \xrightarrow{2} 163 \xrightarrow{2} 362 \xrightarrow{1} 181 \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} 182 \xrightarrow{1} 91 \xrightarrow{2} \mathbf{20}.$$

6.1.2. ***Risinājums.*** Tā kā katrā daļā ir jābūt tieši vienam telefonam, karodziņam un zvaniņam, tad dalījuma līnijas noteikti iet pa sekojošām rūtiņu malām (A55. zīm.). Tālākos griezumus veicam simetriski attiecībā pret kvadrāta centru. Iegūtais rezultāts ir parādīts A56. zīmējumā.


A55. zīm.


A56. zīm.

6.1.3. ***Risinājums.*** Šī uzdevuma risināšanā izmantosim *Dirihlē principu* (skat. 8.lpp.)

Šajā uzdevumā par *"būriem"* izvēlēsimies grāmatas lappuses. Tā kā grāmatā pavisam ir 96 lappuses, tad mums ir 96 *"būri"*. Par *"trušiem"* sauksim skolēnu izlasītās lappuses. Šoreiz *"truši"* un *"būri"* ir vieni un tie paši elementi – lappuses, tikai *"būru"* gadījumā katra lappuse ir tieši viens *"būris"*, bet *"trušu"* gadījumā katra lappuse varētu tikt ieskaitīta vairākas reizes, ja to ir izlasījuši vairāki skolēni, vai arī nevienu reizi, ja to nav lasījis neviens skolēns.

Lai pierādītu uzdevumā prasīto, mums ir jāpamato, ka *"trušu"* noteikti ir vairāk nekā *"būru"*. Tādā gadījumā tiešām būs tā, ka vismaz vienā *"būrī"* būs vairāk nekā viens *"trusis"*, t.i., vismaz vienu lappusi no grāmatas būs izlasījis vairāk nekā viens skolēns.

Uzdevumā nav norādīts, cik tieši lappuses kopā skolēni ir izlasījuši, tātad kopējo *"trušu"* skaitu mēs nezinām. Toties mēs varam noteikt **vismazāko iespējamo** *"trušu"* skaitu. Tā kā ir dots, ka katrs skolēns izlasīja dažādu lappušu skaitu, tad mazākais iespējamais kopā izlasīto lappušu skaits būs tad, ja viens skolēns nebūs izlasījis nevienu lappusi (jeb izlasījis 0 lappuses), otrs – izlasījis 1 lappusi, ..., 14-tais skolēns – izlasījis 13 lappuses un 15-tais skolēns būs izlasījis 14 lappuses. Tad kopā būs izlasītas

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105 \text{ lappuses.}$$

Tas nozīmē, ka pavisam būs **vismaz** 105 *"truši"*. Tā kā 105>96, tad būs tādas lappuses, kuras ir izlasījuši vismaz divi skolēni.

6.1.4. ***Atbilde:*** 800 tonnas.

Risinājums. Modelis ir reāla objekta (mājas, mašīnas utml.) samazināts atveidojums. Tātad visi modeļa izmēri ir proporcionāli īstajiem izmēriem, t.i., visi mājas izmēri ir samazināti vienādu skaitu reižu. Mums ir zināms, ka mājas patiesais augstums ir 10 m, bet modeļa augstums ir 5 cm. Tātad modeļa visi izmēri ir

$$10\ m:5\ cm=1000\ cm:5\ cm=200 \text{ reizes}$$

mazāki nekā mājas izmēri (mērogs ir 1:200).

Mēģināsim noskaidrot, cik sver māja, ja modelis sver $S_{mod}=100\,g$. To darīsim, pakāpeniski "izaudzējot" modeli līdz mājas izmēriem. Ja 200 reizes palielināsim tikai modeļa augstumu, tad iegūsim objektu, kura augstums būs vienāds ar mājas izmēriem, bet pārējie izmēri paliks tādi paši kā modelim. Iegūtā objekta svars būs 200 reizes lielāks nekā modeļa svars, tātad tas būs $S_1=S_{mod}\cdot 200=100\ g\cdot 200=20000\ g=20\ kg$.

Tagad iegūtā objekta platumu palielināsim 200 reizes, tātad iegūsim jaunu objektu, kura augstums un platums ir vienāds ar mājas augstumu un platumu, bet garums ir vienāds ar modeļa garumu. Šī objekta svars būs $S_2=S_1\cdot 200=20\ kg\cdot 200=4000\ kg=4\ t$.

Beidzot arī garumu tādā pašā veidā palielināsim 200 reizes, tad iegūsim objektu, kura visi izmēri ir vienādi ar mājas izmēriem, tātad tā svars būs vienāds ar mājas svaru $S_m=S_2\cdot 200=4\ t\cdot 200=800\ t$. Tātad mājas svars ir 800 tonnas.

No uzdevuma risinājuma varam secināt, ka, ja doti divi telpiski ķermeņi, un viena ķermeņa visi izmēri ir k reizes lielāki nekā otra ķermeņa atbilstošie izmēri, tad tilpums (un svars, ja tie izgatavoti no viena materiāla) pirmajam ķermenim ir $k\cdot k\cdot k=k^3$ reizes lielāks nekā otram ķermenim. (Dotajā uzdevumā svars mājai bija $200^3=8000000$ reizes lielāks nekā modelim.)

6.1.5. ***Atbilde:*** saindēto cepumu var atrast ar divām svēršanām.

Risinājums. Lai Čips atrastu saindēto cepumu, pietiek ar divām svēršanām. Tad ir jārīkojas sekojoši:

1) sadala visus 9 cepumus 3 kaudzītes pa 3 cepumiem katrā un divas kaudzītes salīdzina uz svariem:

a) ja svari ir līdzsvarā, tad saindētais cepums ir trešajā kaudzītē,

b) ja viena kaudzīte ir smagāka, tad saindētais cepums ir tajā;

Acīmredzami, viens no šiem gadījumiem noteikti iestāsies, jo svari var vai nu būt līdzsvarā, vai nebūt; citu iespēju atsvaru svariem nav.

2) ņem kaudzīti, kurā ir saindētais cepums, un uz abiem svaru kausiem uzliek pa vienam cepumam no tās:

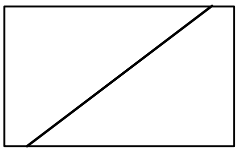
a) ja abi cepumi ir vienādi, tad pāri palikušais ir saindēts,

b) ja kāds cepums ir smagāks par otru, tad tas ir meklētais.

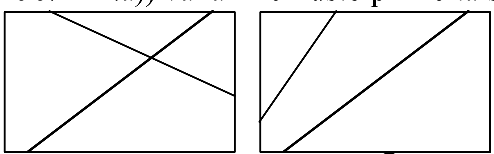
Tātad ar 2 svēršanām Čips noteikti var atrast saindēto cepumu.

Atliek tikai pamatot, ka ar mazāk nekā divām svēršanām uzdevumu izpildīt nevar. Tā kā vienas svēršanas rezultātā varam iegūt tikai 3 dažādus rezultātus (svari ir līdzsvarā, labais kauss smagāks vai labais kauss vieglāks), tad ar vienu svēršanu kaut ko var noskaidrot par, augstākais, trim cepumiem. Tā kā cepumu ir vairāk nekā 3, ir nepieciešamas vairāk nekā viena svēršana.

6.2.1. ***Risinājums.*** Ar vienu taisni papīra lapu var sadalīt tieši 2 daļās (A57. zīm.). Otru taisni var vilkt tā, lai tā krusto pirmo (A58. zīm.a)) vai arī nekrusto pirmo taisni (A58. zīm.b)).



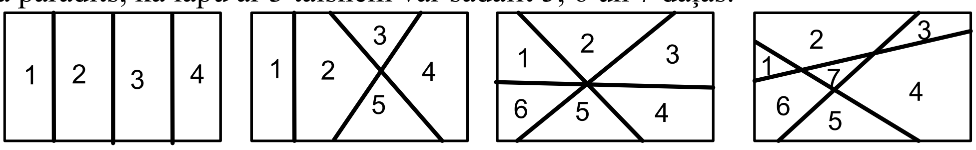
A57. zīm.



a b

A58. zīm.

Tātad divas taisnes taisnstūri var sadalīt attiecīgi 4 daļās vai 3 daļās. Lai arī kā novilktu trešo taisni, vismaz vienu no jau iegūtajām daļām tā sadalīs vēl divās daļās, tātad mazākais iespējamais daļu skaits, kādās lapu var sadalīt trīs taisnes, ir 4 (skat. A59. zīm.). Šajā pašā zīmējumā parādīts, kā lapu ar 3 taisnēm var sadalīt 5, 6 un 7 daļās.



A59. zīm.

Lielākais iespējamais daļu skaits, kādā lapu var sadalīt divas taisnes, ir 4, kuras veido 4 stari – 2 stari un to papildstari. Trešā taisne lapas iekšpusē var nekrustot nevienu no abām novilktajām taisnēm, var krustot tikai vienu no novilktajām taisnēm vai arī var krustot abas novilktās taisnes. Pie tam divas krustiskas taisnes trešā taisne var krustot to krustpunktā (veidojas tikai viens krustpunkts) vai arī katru taisni citā punktā (kopā veidojas trīs krustpunkti). Tā kā divām dažādām taisnēm kopīgi var būt ne vairāk kā viens punkts, tad trešā taisne var krustot tikai divus no jau esošajiem 4 stariem (ja taisne krusto vienu staru, tad tā papildstaru tā krustot nevar). Tātad trešā taisne var sadalīt divās daļās augstākais 3 no jau esošajām lapas daļām, tātad daļu skaits var palielināties ne vairāk kā par 3. Tad trīs taisnes papīra lapu var sadalīt ne vairāk kā 4+3=7 daļās.

6.2.2. ***Atbilde:*** tādi skaitļi *n* neeksistē.

Risinājums. Ja *n* ir vesels skaitlis, tad $n-1$ un n ir pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi. Lai atrastu dotā vienādojuma atrisinājumu veselos skaitļos, jāatrod divi pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi, kuru reizinājums ir 9.

Skaitli 9 veselu skaitļu reizinājumā var sadalīt sekojošos veidos:

9=1·9	9=-1·(-9)
9=3·3	9=-3·(-3)
9=9·1	9=-9·(-1)

Kā redzam, nevienā gadījumā reizinātāji nav divi pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi. Tātad nav tādu veselu *n* vērtību, ar kurām vienādība $n(n-1)=9$ ir pareiza.

6.2.3. ***Risinājums.*** Tā kā reizinājuma pēdējais cipars ir 3, bet pirmā reizinātāja pēdējais cipars ir 1, tad otrā reizinātāja pēdējam ciparam jābūt 3 (jo tikai 3·1=3). Pie tam arī pirmā starpreizinājuma pēdējais cipars ir 3. Tā kā 5·1=5, tad otrā starpreizinājuma pēdējais cipars ir 5 (skat.A60. a) zīm.).

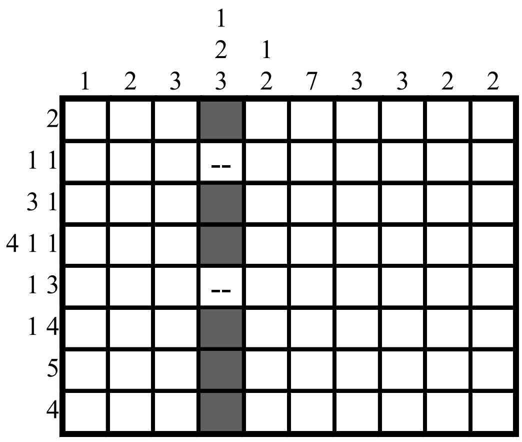
$$\begin{array}{cccc} & * & * & 1 \\ & & 5 & \mathbf{3} \\ \hline & * & 6 & \mathbf{3} \\ * & * & \mathbf{5} & \\ \hline * & * & \mathbf{1} & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ & & 5 & 3 \\ \hline & * & 6 & 3 \\ * & * & 5 & \\ \hline * & * & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 1 \\ & & 5 & 3 \\ \hline & \mathbf{3} & 6 & 3 \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & 5 & \\ \hline \mathbf{6} & \mathbf{4} & 1 & 3 \end{array}$$

A60. a) zīm. A60. b) zīm. A60. c) zīm.

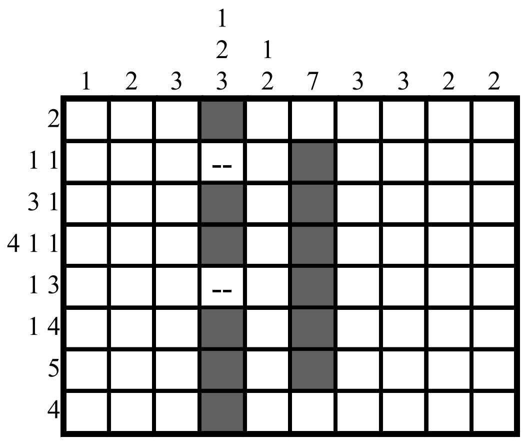
Skaitli 5 reizinot ar trīsciparu skaitli (pirmo reizinātāju), iegūstam arī trīsciparu skaitli (otro starpreizinājumu), tātad pirmā reizinātāja pirmais cipars var būt tikai cipars 1, jo jau 5·200=1000 – četrciparu skaitlis. Pirmā reizinātāja otrais cipars ir cipars 2, jo 6=3·2. (Skat. A60. b) zīm.)

Kad abi reizinātāji ir zināmi, viegli varam atjaunot doto reizināšanas piemēru (skat. A60. c) zīm.).

6.2.4. ***Risinājums.*** Zīmējumu sāksim aizpildīt ar 4. kolonnu. Šajā kolonnā aizkrāsotām jābūt 1+2+3=6 rūtiņām, tātad tukšas būs 8-6=2 rūtiņas. Tā kā šī kolonna sastāv no 3 aizkrāsoto rūtiņu grupām, tad starp tām ir jābūt vismaz divām tukšām rūtiņām, tādējādi šo kolonnu var aizpildīt tikai vienā vienīgā veidā, tā kā parādīts A61. zīmējumā. (Ar "--" attēlosim tās rūtiņas, kuras ir noteikti tukšas.)



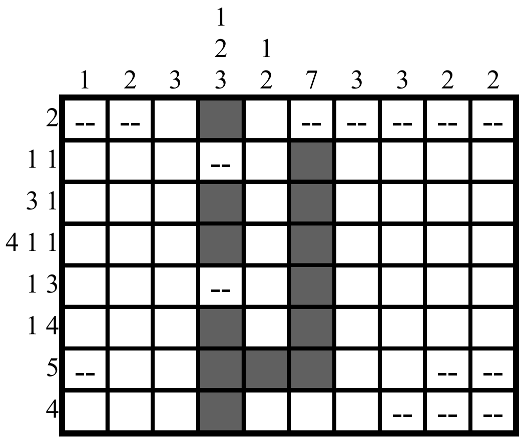
A61.zīm.



A62.zīm.

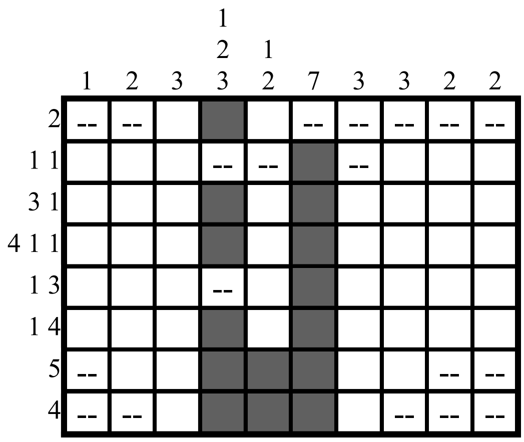
Sestajā kolonnā pēc kārtas ir iekrāsotas 7 rūtiņas, tātad visā kolonnā neiekrāsota paliek 8-7=1 rūtiņa. Tā var būt tikai pati augšējā vai pati apakšējā rūtiņa, tātad sešas vidējās rūtiņas noteikti ir iekrāsotas (skat. A62. zīm.).

Tagad papētīsim rindiņas. Pirmajā rindiņā iekrāsotas ir tikai divas blakusrūtiņas. Tā kā viena rūtiņa šajā rindā jau ir iekrāsota, tad otra iekrāsotā rūtiņa var būt vai nu pa kreisi, vai pa labi no iekrāsotās. Visas pārējās rūtiņas noteikti ir tukšas. Septītajā rindiņā ir 5 pēc kārtas iekrāsotas rūtiņas, tātad iekrāsota noteikti būs rūtiņa starp jau divām iekrāsotajām. Vēl šajā rindā jāiekrāso 2 rūtiņas. Tās var atrasties abas pa kreisi vai pa labi no jau šīm trim iekrāsotājām vai arī viena pa labi un viena pa kreisi no šīm rūtiņām. Tātad septītās rindas pirmā un divas pēdējās rūtiņas noteikti ir tukšas. Līdzīgā veidā varam noskaidrot, ka noteikti tukšas būs arī pēdējās rindas beidzamās trīs rūtiņas (skat. A63. zīm.).

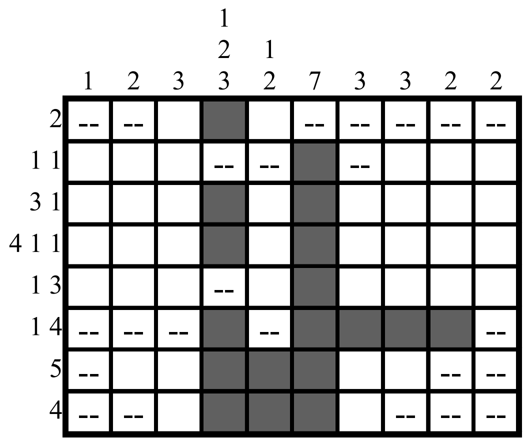


A63.zīm.

Tā kā sestās kolonnas pirmā rūtiņa noteikti ir tukša, tad aizkrāsotai jābūt apakšējai rūtiņai (jo pavisam šajā kolonnā jābūt iekrāsotām 7 rūtiņām). Līdz ar to arī pēdējā rindiņā tad būs iekrāsotas trīs blakusesošās rūtiņas – ceturtā, piektā un sestā. Tātad pēdējā rindiņā pirmā un otrā rūtiņas noteikti ir tukšas. Tukšas noteikti ir arī rūtiņas ap vienīgo iekrāsoto rūtiņu otrajā rindā, jo šajā rindā ir iekrāsotas tikai grupas pa vienai rūtiņai katrā grupā (skat. A64. zīm.).



A64.zīm.



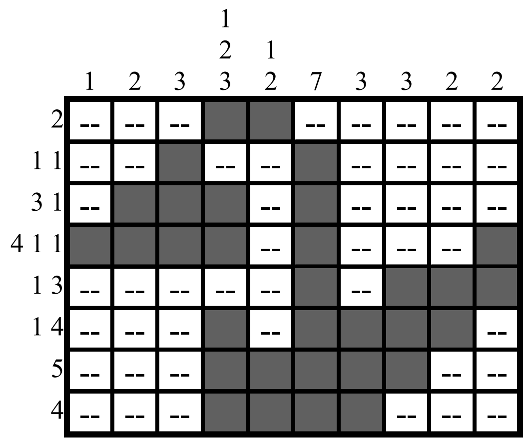
A65.zīm.

Piektajā kolonnā ir iekrāsotas divas apakšējās rūtiņas un šajā kolonnā ir jābūt iekrāsotai grupai no divām rūtiņām, tātad šī ir tā grupa. Tad šīs kolonnas sestā rūtiņa noteikti ir tukša. Tagad papētīsim sesto rindiņu. Tajā jau ir iekrāsotas divas atdalītas rūtiņas – tātad katra no savas grupas. Tā kā visā rindiņā ir tikai divas iekrāsoto rūtiņu grupas, tad šo rindiņu mēs varam aizpildīt viennozīmīgi (skat. A65. zīm.).

Priekšpēdējā kolonnā ir tikai divas pēc kārtas iekrāsotas rūtiņas, bet viena rūtiņa šajā kolonnā jau ir iekrāsota. Tātad otra rūtiņa var būt iekrāsota tikai uz augšu no tās, un šī kolonna būs aizpildīta pilnībā. Otrajā kolonnā ir iekrāsota grupa no 2 rūtiņām, bet apakšā palikusi brīva tikai viena rūtiņa, tātad tā noteikti nebūs iekrāsota. Tāpat arī trešās kolonnas divas apakšējās rūtiņas noteikti ir tukšas, jo tur neietilpst grupa no trīs iekrāsotām rūtiņām. Līdz ar to viennozīmīgi varam arī aizpildīt pēdējās divas rindiņas.

Tagad varam pilnībā aizpildīt arī septīto un astoto kolonnas. Pēc tam arī piekto rindiņu, tad pēdējo kolonnu, tad ceturto rindu.

Tālāk viennozīmīgi varam aizpildīt pirmo, otro un trešo kolonnas, pēc tam pirmo rindiņu. Neaizpildīta tad paliek tikai piektās kolonnas trešā rūtiņa, kura acīmredzami ir tukša. Līdz ar to zīmējumu esam atšifrējuši. Tas redzams A66. zīmējumā.

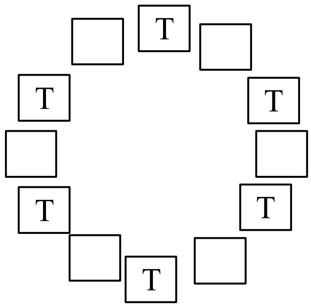


A66.zīm.

6.2.5. ***Atbilde:*** 3 atšķirīgos veidos.

Risinājums. Tā kā aplim nav ne sākuma, ne beigu, par atšķirīgiem uzskata tādus dzīvnieku izvietojumu veidus, kurus nevar iegūt vienu no otra „*pagriežot*”.

Pavisam ir 12 krātiņi un 6 tīģeri, tātad tīģerus var izvietot vienā vienīgā veidā tā, lai blakus krātiņos neatrastos divi tīģeri – katrā otrajā krātiņā ir jāievieto pa tīģerim (skat. A67. zīm.).

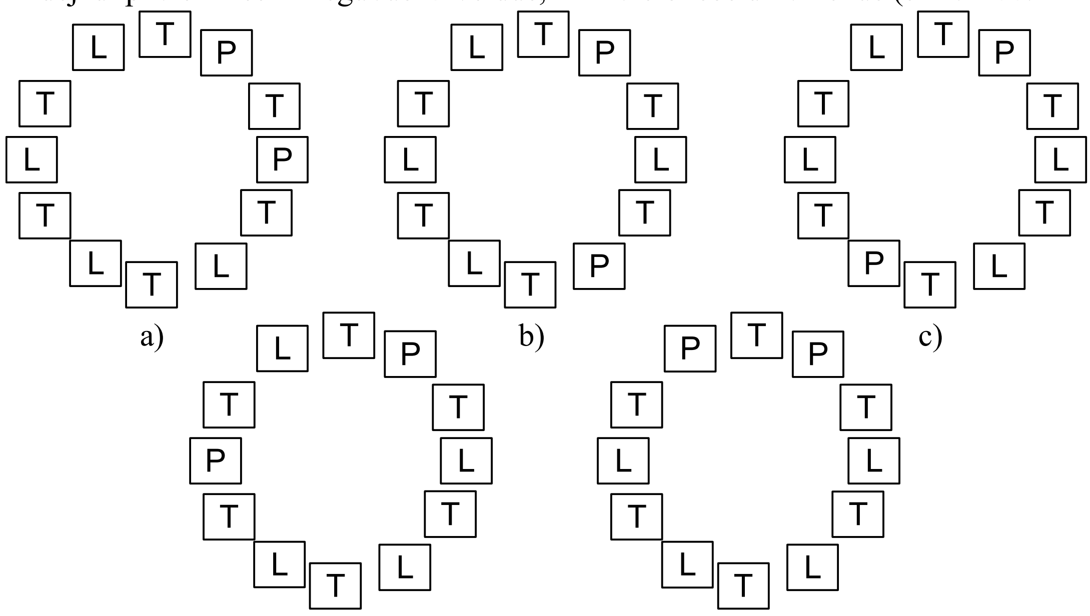


A67. zīm.

Atlikušajos 6 krātiņos jāizvieto 2 panteras un 4 lauvas. Kad būsim izvietojuši panteras, lauvu izvietojums būs noteikts viennozīmīgi.

Kā noskaidrojām iepriekš, tad nav svarīgi, kurā krātiņā ievietojam pirmo panteru (to uzskatīsim par atskaites punktu). Tad otro panteru varētu ievietot 5 atlikušajos krātiņos (divas panteras neatradīsies blakus, jo starp katriem diviem tukšiem krātiņiem atrodas vismaz viens krātiņš ar tīģeri). Pēc panteru izvietošanas tukši paliek tieši 4 krātiņi, kas noteikti neatrodas blakus (starp tiem ir vismaz viens krātiņš ar tīģeri), tātad tajos varam viennozīmīgi izvietot visas 4 lauvas.

Tādējādi pavisam esam ieguvuši 5 veidus, kā izvietot šos dzīvniekus (skat. A68. zīm.).



A68. zīm.

Taču a) un e) izvietojumi ir vienādi, jo e) izvietojumu var iegūt no a) izvietojuma, "*pagriežot*" par 2 krātiņiem pretēji pulksteņrādītāja virzienam. Tieši tāpat arī b) un d) izvietojumi ir vienādi. Tātad atšķirīgi ir tikai 5-2=3 veidi, kā var šos 12 dzīvniekus izvietot pa apli 12 krātiņos.

6.3.1. ***Atbilde:*** 1020=1·4·3·5·17=1·2·6·5·17=1·2·3·10·17=1·2·3·5·34.

Risinājums. Sadalīsim doto skaitli 1020 pirmreizinātājos: 1020=2·2·3·5·17. Kā redzam, tas sastāv no 5 reizinātājiem, bet diemžēl divi no tiem ir vienādi (2 un 2), kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tā kā pirmskaitļus sīkāk reizinātājos sadalīt nevar, tad, lai iegūtu 1020 sadalījumu piecos **dažādos** naturālos skaitļos, jāatrod vēl kāds naturāls skaitlis, ar kuru piereizinot atrasto reizinājumu, tā vērtība nemainīsies. Tāds skaitlis ir 1.

Skaitli 1020 esam izteikuši kā sešu naturālu skaitļu reizinājumu: 1020=1·2·2·3·5·17.

Tā kā divi reizinātāji ir skaitlis 2, tad viens no tiem ir jāpiereizina kādam no pārējiem skaitļiem. Tā kā sareizinot, 2 ar 1, iegūsim to pašu sadalījumu pirmreizinātājos, tad šis gadījums neder. Atliek vēl 4 iespējas:

1) 2 sareizina ar 2, iegūst $1020=1\cdot4\cdot3\cdot5\cdot17$;
2) 2 sareizina ar 3, iegūst $1020=1\cdot2\cdot6\cdot5\cdot17$;
3) 2 sareizina ar 5, iegūst $1020=1\cdot2\cdot3\cdot10\cdot17$ un
4) 2 sareizina ar 17, iegūst $1020=1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot34$.

Esam apskatījuši visas iespējas, tātad citu veidu, kā sadalīt skaitli 1020 piecos dažādos naturālos reizinātājos, nav.

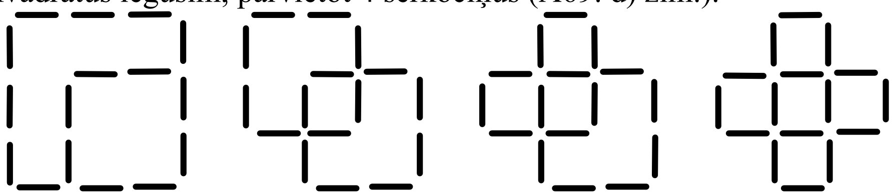
6.3.2. ***Atbilde.***

a) Tieši divus kvadrātus varam iegūt, pārvietojot 4 sērkociņus (A69. a) zīm.).

b) Trīs kvadrāti ir redzami jau dotajā zīmējumā, tāpēc nav jāpārvieto neviens sērkociņš (A69. b) zīm.)

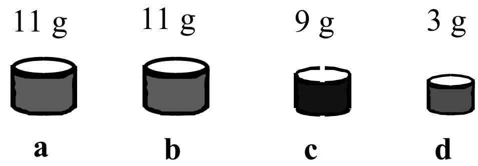
c) četrus kvadrātus varam iegūt, pārvietojot 2 sērkociņus (A69. c) zīm.).

d) 5 kvadrātus iegūsim, pārvietot 4 sērkociņus (A69. d) zīm.).



A69. a).zīm. A69. b).zīm. A69. c).zīm. A69. d).zīm.

6.3.3. ***Risinājums.*** Apzīmēsim trauciņus ar burtiem **a**, **b**, **c** un **d** tā, kā tas ir parādīts A70. zīmējumā.



A70. zīm.

Iebērsim 3 *g* no trauciņa **a** trauciņā **d** un visu atlikušo daļu, tas ir, 8 *g* nātrija karbonāta, iebērsim trauciņā **c**. Tagad trauciņš **a** ir tukšs. Pēc tam pārbērsim 3 *g* nātrija karbonāta no trauciņa **d** trauciņā **a** (trauciņš **d** paliek tukšs), no trauciņa **b** iebērsim 1 *g* nātrija karbonāta trauciņā **c**, tagad trauciņš **c** ir pilns, tajā ir 9 *g*, bet trauciņā **b** ir 10 *g* nātrija karbonāta. Ieberot 3 *g* no trauciņa **b** trauciņā **d**, panāksim to, ka trauciņā **b** paliks tieši 7 *g* dotās vielas.

Aprakstītās darbības varam attēlot arī sekojošajā tabulā:

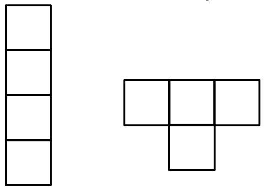
a (11 *g*)	**b** (11 *g*)	**c** (9 *g*)	**d** (3 *g*)
11	11	0	0
0	11	8	3
3	11	8	0
3	10	9	0
3	**7**	9	3

6.3.4. ***Atbilde:*** namdara uzdevums nav izpildāms.

Risinājums. Aprēķinot pieejamo dēlīšu kopējo laukumu un grīdas platību, pretruna nerodas: $(10+5)\cdot4=60=6\cdot10$ (m^2). Taču, pamēģinot uzdevumu izpildīt, vairākkārtēji mēģinājumi ir neveiksmīgi. Tas vedina uz domām, ka varbūt šis uzdevums vispār nav izpildāms. Un šī hipotēze ir jāpierāda, balstoties uz vispārīgiem apsvērumiem, nevis apskatot dažus atsevišķus piemērus.

Šādos pierādījumos parasti efektīva ir *invariantu metode* (skat. 7.lpp.), ko pielietosim arī šoreiz.

Ja namdaris sadalīs grīdu rūtiņās ar izmēriem 1 *m*×1 *m*, un izkrāsos rūtiņas kā šaha galdiņu, tad pavisam būs 30 melnas un 30 baltas rūtiņas.



"I" "T"

A71. zīm.

Viegli ievērot, ka "T" veida dēlītis vienmēr noklāj nepāra skaitu melno rūtiņu (1 vai 3), bet "I" veida dēlītis vienmēr noklāj tieši divas (pāra skaitu) melnās rūtiņas (skat. A71. zīm.). Tā kā ir 5 (nepāra skaits) "T" veida dēlīši, tad tie kopā uz grīdas varēs nosegt nepāra skaitu melno rūtiņu. Savukārt, tā kā katrs "I" veida dēlītis nosedz pāra skaitu melno rūtiņu, tad tie visi kopā arī nosegs pāra skaitu melno rūtiņu uz grīdas. Tāpēc visi 15 pieejamie dēlīši kopā uz grīdas vienmēr nosegs nepāra skaitu melno rūtiņu. Bet, tā kā melno rūtiņu skaits uz grīdas ir 30 – pāra skaitlis, namdaris prasīto uzdevumu izpildīt nevarēs.

6.3.5. ***Atbilde:*** maisiņos jābūt attiecīgi 1, 2, 4, 8 un 16 dāvanām.

Risinājums. Tā kā Ziemassvētku vecītis nezina, cik īsti skolēni mācās meža skolā, bet zina tikai to, ka viņu nav vairāk par 31, tad Ziemassvētku vecītim jābūt gatavam katram skolēnu skaitam no 1 līdz 31. Lai izpildītu Ziemassvētku vecīša uzdevumu, jāatrod tādi pieci naturāli skaitļi, kurus izvēloties pa vienam vai kombinējot vairākus summā, varam iegūt jebkuru skaitli no 1 līdz 31.

Acīmredzot vienā maisiņā jāliek tikai 1 dāvana – gadījumam, ja skolā ir tikai 1 skolēns.

Lai būtu gatavi apsveikt 2 skolēnus, otrajā maisiņā jāieliek 2 dāvanas.

Pirmajā un otrajā maisiņā kopā ir 1+2=3 dāvanas. Toties, lai varētu apsveikt 4 bērnus, jāsagatavo trešais maisiņš ar 4 dāvanām.

Ar šiem trim maisiņiem esam gatavi arī 5 (5=4+1), 6 (6=4+2) un 7 (7=4+2+1) bērnu apsveikšanai.

Toties ceturtajā maisiņā iepakosim 8 dāvanas.

Tā kā 9=8+1; 10=8+2; 11=8+2+1; 12=8+4; 13=8+4+1; 14=8+4+2; 15=8+4+2+1, tad esam gatavi apsveikt arī šādu skaitu skolēnu. Savukārt 16 skolēnu apsveikšanai šajos četros maisiņos dāvanu nepietiek, tāpēc piektajā maisā jāieliek 16 dāvanas.

Ar šiem pieciem maisiņiem esam gatavi arī visiem gadījumiem, kad skolēnu skaits ir no 17 līdz 31: 17=16+1; 18=16+2; 19=16+2+1; 20=16+4; 21=16+4+1; 22=16+4+2; 23=16+4+2+1; 24=16+8; 25=16+8+1; 26=16+8+2; 27=16+8+2+1; 28=16+8+4; 29=16+8+4+1; 30=16+8+4+2; 31=16+8+4+2+1.

6.4.1. ***Risinājums.*** **a)** Viegli pamanīt, ka $99=100-1$, tāpēc

$$69\cdot 99=69\cdot(100-1).$$

Izmantojot reizināšanas distributīvo īpašību, iegūstam, ka

$$69\cdot(100-1)=69\cdot 100-69\cdot 1.$$

Sareizināt kādu veselu skaitli ar 100, nozīmē pierakstīt tam labajā pusē divas nulles, tātad meklētais reizinājums ir

$$69\cdot 100-69\cdot 1=6900-69=\mathbf{6831}.$$

b) Līdzīgā veidā iegūstam arī otru reizinājumu. Šajā gadījumā ievērojam, ka $101 = 100 + 1$, tātad

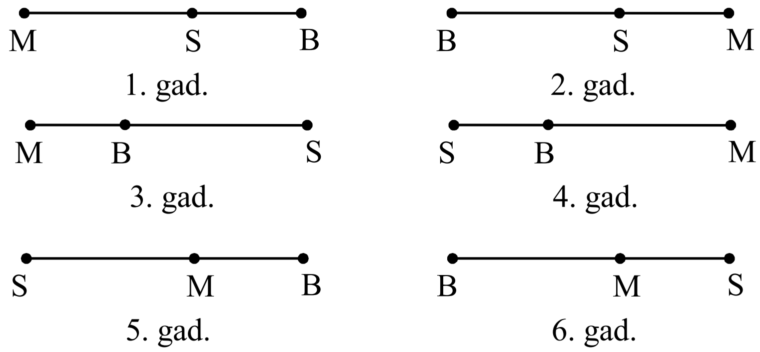
$$47 \cdot 101 = 47 \cdot (100 + 1) = 47 \cdot 100 + 47 \cdot 1 = 4700 + 47 = \mathbf{4747}.$$

6.4.2. ***Atbilde:*** katru dienu Jānītis noiet vismaz 10 *km*, bet ne vairāk kā 16 *km*.

Risinājums. Uzdevuma risinājumā apzīmēsim Jānīša mājas, skolu un baseinu attiecīgi par punktiem M, S un B. Tātad mūsu uzdevums ir noskaidrot visus iespējamos šo punktu izvietojumus un katrā gadījumā noteikt lauztās līnijas MSBM garumu, ja zināms, ka MS=5 *km* un SB=3 *km*.

Plaknē trīs punkti var atrasties un var neatrasties uz vienas taisnes.

Vispirms apskatīsim gadījumus, ja M, S un B atrodas uz vienas taisnes. Trīs punkti uz taisnes var būt izvietoti 6 dažādos veidos (skat. A72. zīm.).

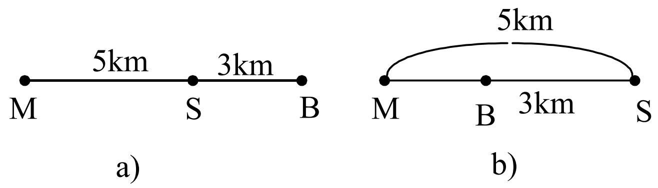


A72. zīm.

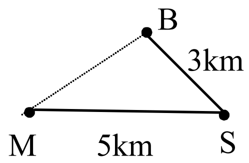
Taču, ņemot vērā dotos attālumus, 5. un 6. gadījums neatbilst uzdevuma nosacījumiem (šajos gadījumos SB=BM+SM>SM, bet 3<5 – pretruna).

Tāpat varam ievērot, ka 2. gadījums ir 1. gadījuma spoguļattēls un 4. gadījums ir 3.gadījuma spoguļattēls. Tāpēc ir tikai divas principiāli atšķirīgas iespējas, kā M, S un B var būt izvietoti uz vienas taisnes.

Tātad, ja mājas, skola un baseins ir izvietoti uz vienas taisnes, tad Jānītis katru dienu veic vai nu 5+3+8=16 (*km*) (skat. A73. a) zīm.) vai arī 5+3+2=10 (*km*) (skat. A73. b) zīm.).



A73. zīm.



A74. zīm.

Ja trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes, tad tie ir kaut kāda trijstūra virsotnes un attālumi starp šiem punktiem ir trijstūra malas. Katrā trijstūrī starp tā malām pastāv trijstūra nevienādības: katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa un lielāks nekā abu pārējo malu garumu starpības absolūtā vērtība (skat. A74. zīm.)

Tātad

BM<MS+SB jeb BM<5 *km*+3 *km*=8 *km* un
BM>MS–SB jeb BM>5 *km*–3 *km*=2 *km*.

Tas nozīmē, ka

$$2\ km < BM < 8\ km,$$

un viss noietais ceļš BM+MS+SB=BM+5 *km*+3 *km*=BM+8 *km*. Ņemot vērā arī gadījumus, kad BM=2 *km* un BM=8 *km*, redzam, ka BM garums var būt jebkurš lielums no intervāla [2 *km*; 8 *km*]. Tātad viss noietais ceļš ir $2\ km+8\ km \le MS+SB+BM \le 8\ km+8\ km$ jeb $\mathbf{10\ km \le MS+SB+BM \le 16\ km}$.

6.4.3. ***Risinājums.*** Paskatoties uzmanīgāk uz doto dalīšanas piemēru, redzam, ka dalītājs (trīsciparu skaitlis) *reiz* 8 ir trīsciparu skaitlis, bet abi pārējie starpreizinājumi ir četrciparu skaitļi. Tātad dalījuma abi nezināmie cipari ir lielāki nekā 8, tātad tie var būt tikai 9. Tātad dalījums ir 989.

Savukārt dalītājs ir tāds trīsciparu skaitlis, kuru reizinot ar 8, iegūst trīsciparu skaitli, bet, reizinot ar 9, – četrciparu skaitli. Tādi skaitļi ir 112, 113, 114, ..., 124 (tik tiešām, $9\cdot111=999$ – vēl ir trīsciparu skaitlis un $9\cdot112=1008$ – jau četrciparu skaitlis; $124\cdot8=992$ – vēl trīsciparu skaitlis, bet $125\cdot8=1000$ – jau četrciparu skaitlis).

Pārbaudot visus 13 iespējamos dalītājus, redzam, ka tikai gadījumā 110768:112=989 atlikums pie pirmā starpreizinājuma ir divciparu skaitlis; pārējos gadījumos tas ir trīsciparu skaitlis. Tātad dalītājs ir 112, dalījums ir 989 un dalāmais ir 110768. Tagad varam atjaunot visu dalīšanas piemēru, skat. A75. zīm.

```
1 1 0 7 6 8 : 1 1 2 = 9 8 9
1 0 0 8
-------
    9 9 6
    8 9 6
    -------
    1 0 0 8
    1 0 0 8
    -------
          0
```

A75. zīm.

6.4.4. ***Atbilde:*** 0,5 *kg*.

Risinājums. Uzskatām, ka, žāvējot ābolus, no tiem iztvaiko tikai ūdens, bet pārējo vielu ("sausnas") masa nemainās. Svaigos ābolos ir 80% ūdens, tātad "sausnas" tajos ir 100%-80%=20%, tas ir 20% no 1 *kg* jeb $0{,}2 \cdot 1\ kg=0{,}2\ kg$.

Žāvētos ābolos "sausna" ir 100%-60%=40% no kopējās masas. Tā kā "sausnas" daudzums kilogramos nemainījās, tad 40% no žāvētu ābolu kopējās masas ir 0,2 *kg*.

0,2 *kg* atbilst 40%

x kg atbilst 100%

$x=(0{,}2 \cdot 100\%):40\%=0{,}5\ kg$

Tātad no 1 *kg* svaigu ābolu var iegūt 0,5 *kg* žāvētu ābolu.

6.4.5. ***Risinājums.*** Uzdevumu risināsim, pieņemot pretējo pierādāmajam apgalvojumam un pierādot, ka mūsu pieņēmums ir aplams. (*Šādu pierādīšanas paņēmienu sauc par "pierādījumu no pretējā".*)

Pieņemsim, ka katra rūķīša, kas dzīvo Ramtam mežā, garums ir mazāks nekā 15 pēdas. Tādā gadījumā visu rūķīšu kopējais garums ir **mazāks nekā** 15·11=**165 pēdas**.

Bet ir **dots**, ka visu rūķīšu kopējais garums ir **tieši 165 pēdas**.

Esam ieguvuši pretrunu (165 nav mazāks par 165). Tas nozīmē, ka mūsu pieņēmums ir bijis aplams (jo tieši no tā izriet, ka kopējais rūķīšu garums ir mazāks nekā 165 pēdas), tātad Ramtam mežā dzīvo vismaz viens rūķītis, kura garums nav mazāks par 15 pēdām, k.b.j.

6.5.1. ***Risinājums.*** Nav grūti saprast, ka **L** var būt tikai divas vērtības – 0 un 9.

Ja **L**=0, tad starp burtiem pastāv sekojošas sakarības: **A**=**K**+1, 10+**I**=2·**O**, **E**=2·**A**;

ja **L**=9, tad sakarības ir sekojošas: **A**=**K**+1, 9+**I**=2·**O**, 10+**E**=2·**A**.

Pārbaudes rezultātā iegūstam, ka dotajam uzdevumam ir 9 dažādi atrisinājumi. Tabulā norādītas iespējamās burtu vērtības.

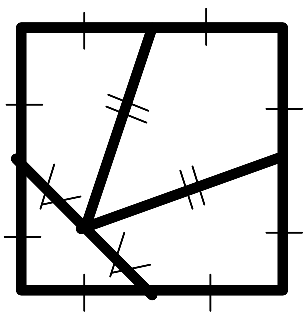
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
A	4	3	3	2	2	5	5	6	7
I	2	4	8	6	8	3	7	7	1
L	0	0	0	0	0	9	9	9	9
E	8	6	6	4	4	0	0	2	4
K	3	2	2	1	1	4	4	5	6
O	6	7	9	8	9	6	8	8	5

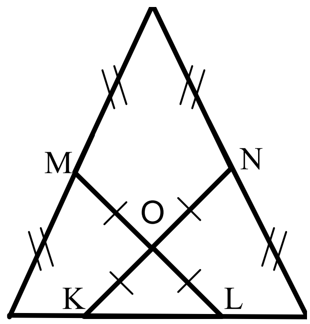
6.5.2. ***Atbilde:*** katra bērna krājkasītē ir 40 santīmi.

Risinājums. Ar x apzīmēsim naudas daudzumu (santīmos) katra bērna krājkasītē. Tā kā visas Jānīša monētas ir ar vienādu vērtību (5 santīmi), tad monētu daudzums Jānīša krājkasītē ir izsakāms ar izteiksmi x:5, savukārt Anniņas krājkasītē esošais monētu skaits ir x:2.

Tātad $\frac{x}{5}+\frac{x}{2}=28$ jeb $2x+5x=280$ un $x=40$.

6.5.3. ***Risinājums.*** Tā kā katra no griezuma līnijām iet caur kādas kvadrāta malas viduspunktu (skat. A76. a) zīm.), tad, saliekot kvadrāta daļas tā, kā tas ir parādīts A76. b) zīmējumā, mēs iegūstam vienādsānu trijstūri: sānu malas ir vienāda garuma; punktā O kvadrāta daļas saskaras viena ar otru pa savstarpēji vienādiem nogriežņiem un ar 90° lielajiem leņķiem, tas nozīmē, ka pie punkta O neveidojas nekādi caurumi un neviena no kvadrāta daļām „neizlien" ārpus trijstūra robežām. Savukārt punktos M, N, K un L veidojas izstiepti leņķi.


A76. a) zīm.



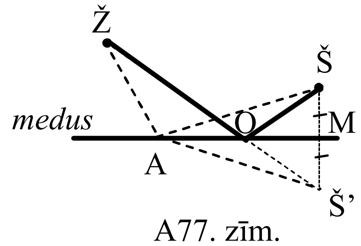
A76. b) zīm.

6.5.4. ***Atbilde:*** 5040 dažādas cepures.

Risinājums. Ja cepurītei būtu tikai viena josla un mūsu rīcībā vēl arvien būtu 7 krāsas, tad varētu noadīt 7 dažādas cepurītes. Adot klāt otro joslu, mums ir tikai 6 iespējas – ir palikušas 6 neizmantotas krāsas. Tā kā vienkrāsaino cepurīšu skaits ir 7, tad divkrāsaino cepurīšu skaits būs 7·6=42 dažādas cepurītes. Adot klāt aizvien jaunas joslas, pakāpeniski varam iegūt arvien lielāku skaitu dažādu cepurīšu. Tādējādi pavisam var noadīt 7·6·5·4·3·2=5040 dažādas 6-joslu cepurītes, izmantojot 7 krāsu dzijas.

6.5.5. ***Risinājums.*** Visīsākais attālums starp diviem punktiem ir taisnes nogrieznis. Tā kā taisnes nogrieznis, kas savieno Žaņa un Šarlotes atrašanās vietas, nekrusto *medus taisni*, tad meklētais ceļš būs lauzta līnija.

Centīsimies zīmējumu pārveidot tā, lai Žanis un Šarlote atrastos uz tāda nogriežņa, kas krusto *medus taisni* un kura garums vienāds ar Žaņa ejamā ceļa garumu. Zīmējumā Žaņa atrašanās vietu apzīmēsim ar punktu Ž, bet Šarlotes atrašanās vietu – ar punktu Š. Attēlosim punktu Š simetriski pret *medus taisni*; iegūto attēlu apzīmēsim ar punktu Š' (skat. A77. zīm.). Tad punkts O, kurā nogrieznis ŽŠ' krusto *medus taisni*, ir meklētais punkts, kurā Žanim jāpiestāj pie *medus taisnes*.



A77. zīm.

Tik tiešām, nogriežņa ŽŠ' garums vienāds ar lauztās līnijas ŽOŠ garumu (OŠ=OŠ' kā hipotenūzas vienādos taisnleņķa trijstūros ŠOM un Š'OM; ΔŠOM=ΔŠ'OM pēc pazīmes *kk*).

Savukārt, ja Žanis piestātu kādā citā punktā A, tad ceļa ŽAŠ garums ir vienāds ar lauztās līnijas ŽAŠ' garumu. Bet katrā trijstūrī ŽAŠ'   ŽŠ'<ŽA+AŠ', tāpēc Žaņa veiktais ceļš būs garāks nekā tad, ja viņš piestātu punktā O.

1998./99. mācību gads

7.1.1. ***Atbilde:*** A=1, E=3, I=5, K=6, L=8, O=4, P=2, S=0, U=7.

Risinājums. Tā kā pirmais starpreizinājums sākas tikai ar desmitiem, tad skaidrs, ka S=0, un reizināšana ir sākusies ar otrā reizinātāja desmitu ciparu (skat. A78. a) zīm.).

			A	P	0	E
			O	0	I	0
		K	0	A	I	
O	L	A	P			
O	L	U	P	A	I	0

A78. a) zīm.

			1	P	0	E
			O	0	I	0
		K	0	1	I	
O	L	1	P			
O	L	U	P	1	I	0

A78. b) zīm.

			1	5	0	6
			O	0	2	0
		K	0	1	2	
O	L	1	5			
O	L	U	5	1	2	0

A78. c) zīm.

Ievērojot, ka **O**·**A**=**O**, iegūstam, ka **A**=1 (skat. A78. b) zīm.). No pirmā starpreizinājuma seko, ka **I**·**E**=10+**I**, tātad $\mathbf{I}(\mathbf{E}-1)=10$. Tā kā **I** un **E** ir cipari, tad ir iespējami divi gadījumi:

1) **I**=2, **E**=6; tādā gadījumā, lai **I** un **P** reizinājums beigtos ar 0, cipara **P** vietā ir jābūt 5 un iegūstam, ka cipara **O** reizinājums ar 6 beidzas ar 5 (skat. A78. c) zīm.), taču tā būt nevar.

2) **I**=5, **E**=3 (skat. A78. d) zīm.). Ciparu **P** un 5 reizinājuma pēdējais cipars ir 0, tātad **P** var būt 2, 4, 6 vai 8, savukārt, tā kā **O**·3=10+**P**, mēs iegūstam, ka **P** iespējamās vērtības ir 2, 5 vai 8, tātad **P** ir vai nu 2, vai 8. Ja **P**=8, tad **K**=5·1+4=9 un **U**=9+1=10 – nav cipars, tātad **P**=2, bet **O**=4 (skat. A78. e) zīm.).

			1	P	0	3
			O	0	5	0
		K	0	1	5	
O	L	1	P			
O	L	U	P	1	5	0

A78. d) zīm.

			1	2	0	3
			4	0	5	0
		K	0	1	5	
4	L	1	2			
4	L	U	2	1	5	0

A78. e) zīm.

			1	2	0	3
			4	0	5	0
		6	0	1	5	
4	8	1	2			
4	8	7	2	1	5	0

A78. f) zīm.

Tā kā abu reizinātāju visi cipari tagad ir zināmi, viegli var noskaidrot atlikušo neatšifrēto burtu vērtības. Atrisinājums parādīts A78. f) zīmējumā.

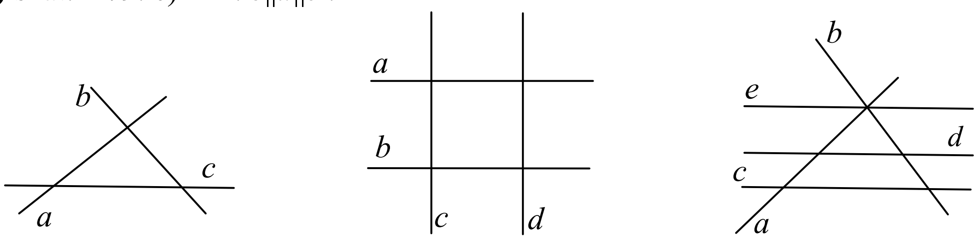
7.1.2. ***Atbilde:*** Kurmis pārdeva krelles par 5,20 Ls gabalā, kopējā Kurmja peļņa ir 120 Ls.

Risinājums. Tā kā kreļļu sākotnējā cena bija 5 Ls, tad 20% atlaide ir $5 \cdot \frac{20}{100} = 1$ Ls, tātad Kurmis krelles iepirka par 5−1=4 Ls gabalā, visu 100 kreļļu iegādei iztērējot 4·100=400 Ls. Citā ciemā Kurmis krelles pārdeva par 30% dārgāk nekā iepirka, t.i., par 30% no 4 Ls jeb $\frac{30}{100} \cdot 4 = 1{,}20$ Ls dārgāk; Kurmja cena krellēm bija 4+1,20=5,20 Ls gabalā. Kopā Kurmis ietirgoja 5,20·100=520 Ls. Tātad Kurmja "tīrā peļņa" bija 520-400=120 Ls.

7.1.3. ***Atbilde.* a)** skat. A79. a) zīm .

b) skat. A79. b) zīm. $a \| b$, $c \| d$.

c) skat. A79. c) zīm. $c \| d \| e$.



A79. a) zīm. A79. b) zīm. A79. c) zīm.

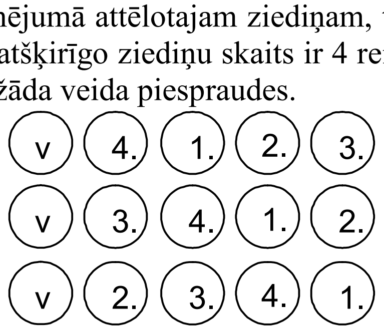
7.1.4. ***Atbilde:*** jāsāk mieloties ar melno mušu.

Risinājums. Ja Vardītes jaunkundze sāks kukaiņu skaitīšanu no 1. oda, tad pirmais tiks apēsts 2. ods, kā otrais tiks apēsts 4. ods, pēc tam 6. ods, 1. ods, mazā muša, 7. ods, 3. ods, lielā muša, zaļā muša, melnā muša, bet 5. ods tiks apēsts pēdējais. Redzam, ka skaitot pulksteņa rādītāja kustības virzienā, lielā muša ir ceturtā aiz 5. oda. Tātad, ja Vardīte vēlas šo mušu notiesāt pēdējo, tai ir jāsāk mieloties ar to kukaini, kas pulksteņa rādītāja kustības virzienā stāv četras vietas aiz 1. oda, tas ir, ar melno mušu.

7.1.5. ***Atbilde:*** ir 270 dažādas piespraudes.

Risinājums. "Izstiepsim" ziediņu un apzīmēsim tā viduci un ziedlapiņas tā, kā parādīts A80. a) zīmējumā. Viduci var iekrāsot 3 dažādos veidos, akmentiņu 1. ziedlapiņai var izvēlēties 6 veidos, 2. − 5 veidos, 3. − 4 veidos, bet 4. − 3 veidos, iegūstam 3·6·5·4·3=1080 variantus. Taču šeit ir ieskaitīti arī visi A80. b) zīmējuma ziediņi, bet tiem krāsu izkārtojums pulksteņrādītāja virzienā ir tāds pats kā A80. a) zīmējumā attēlotajam ziediņam, tātad visi šie 4 varianti raksturo vienu un to pašu ziediņu. Tātad atšķirīgo ziediņu skaits ir 4 reizes mazāks, t.i., juvelieris pavisam var izgatavot 1080:4=270 dažāda veida piespraudes.

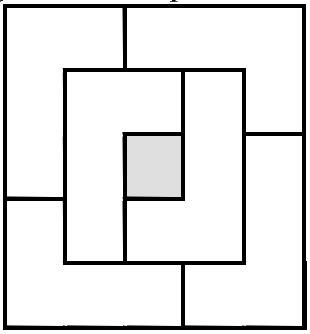
A80. a) zīm.



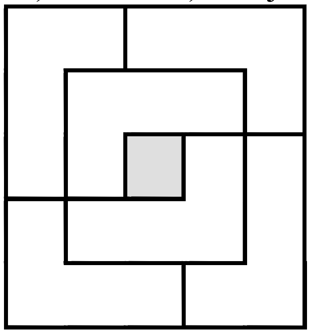
A80. b) zīm.

7.2.1. ***Risinājums.*** Lai divu skaitļu starpība būtu nepāra skaitlis, šo skaitļu paritātēm ir jābūt atšķirīgām, proti, vienam skaitlim jābūt pāra skaitlim, bet otram − nepāra. Savukārt, ja no vairākiem veseliem skaitļiem vismaz viens ir pāra skaitlis, tad šo skaitļu reizinājums ir pāra skaitlis. Tā kā 567 ir nepāra skaitlis, tad veseli skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, neeksistē.

7.2.2. ***Atbilde:*** jā, var, skat., piemēram, A81. a) vai A81. b) zīmējumus.



A81. a) zīm.



A81. b) zīm.

7.2.3. ***Atbilde:*** var būt 33 meļi vai 99 meļi.

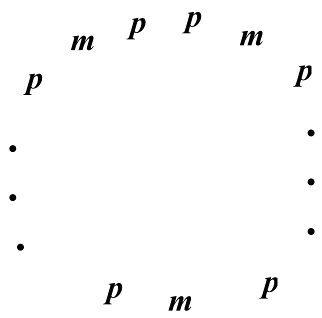
Risinājums. Sauksim patiesību runājošos rūķīšus par p rūķīšiem un meļus – par m rūķīšiem. Apskatīsim 2 gadījumus.

1) Ir vismaz viens rūķītis, kas runā patiesību. Tā kā patiesību runājošie rūķīši nekad nemelo, tad katram p rūķītim blakus noteikti stāv viens m rūķītis un viens p rūķītis. Tātad vienā apļa posmā rūķīšu izvietojums ir sekojošs:

$$m_1 \ p \ p \ m_2.$$

Tā kā m_1 rūķītim vienā pusē jau stāv p rūķītis, tad otrā pusē jābūt arī p rūķītim (citādi m_1 rūķītis nebūs melojis, teikdams, ka viņam blakus stāv tieši viens melis).

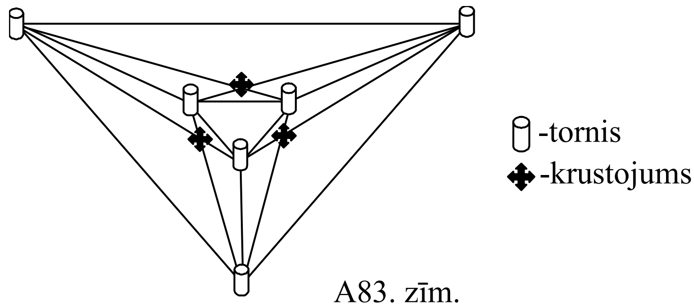
Līdzīgi spriežot, iegūstam, ka rūķīšu izvietojums pa apli ir tāds, kā parādīts A82. zīmējumā. Redzam, ka melis ir katrs trešais rūķītis, tātad pavisam ir 99:3=33 meļi.



A82. zīm.

2) Nav neviena rūķīša, kas runā patiesību. Arī šis gadījums atbilst uzdevuma nosacījumiem: katram rūķītim abās pusēs stāv pa melim, tāpēc neviens no rūķīšiem, apgalvodams, ka viņam blakus stāv tieši viens melis, nav teicis patiesību. Tātad var būt arī 99 meļi.

7.2.4. ***Atbilde:*** A83. zīmējumā parādīts, kā ķēniņš Dullums var uzbūvēt 6 torņus un katrus divus no tiem savienot ar taisnu ceļu tā, lai veidotos tikai trīs krustojumi.



A83. zīm.

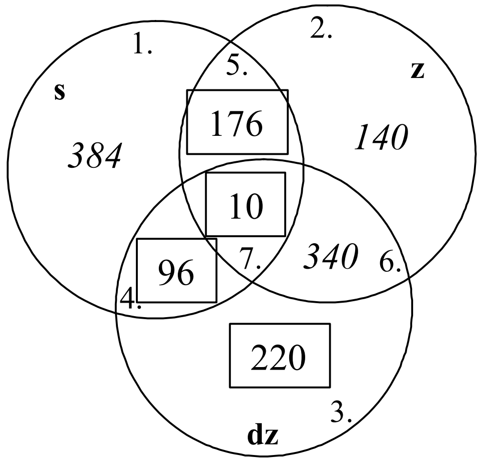
7.2.5. ***Atbilde:*** 1366 rūķīši.

Risinājums. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem izveidosim diagrammu (to sauksim par *Eilera-Venna diagrammu*), skat. A84. zīm.:

1. apgabalā attēlosim to rūķīšu skaitu, kam ir tikai sarkanā cepurīte
2. – kam ir tikai zaļā cepurīte,
3. – kam ir tikai dzeltenā cepurīte,
4. – kam ir tikai sarkanā un dzeltenā cepurītes,
5. – kam ir tikai sarkanā un zaļā cepurītes,
6. – kam ir tikai dzeltenā un zaļā cepurītes,
7. – kam ir visas trīs cepurītes.

Ir dots, ka **s** aplī (1., 5., 7. un 4. apgabalā kopā) ir jāieraksta skaitļus, kuru summa ir 666; tāpat arī **z** un **dz** apļos summa ir 666 katrā. Vēl ir doti rāmīšos ierakstītie skaitļi. Tagad viegli varam izskaitļot arī rūķīšu skaitu pārējos apgabalos. Tātad pavisam mežā dzīvo

384+176+10+96+140+340+220=1366 rūķīši.



A84. zīm.

7.3.1. ***Atbilde:*** sākotnējais skaitlis ir 102564.

Risinājums. Tā kā dotā skaitļa pēdējais cipars ir 4, tad četras reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars būs 6 (4·4=16). Tātad iegūtā skaitļa pēdējais cipars (jeb sākotnējā skaitļa priekšpēdējais) ir 6.

64·4=256, tātad iegūtā skaitļa priekšpēdējais cipars jeb sākotnējā skaitļa simtu cipars ir 5.

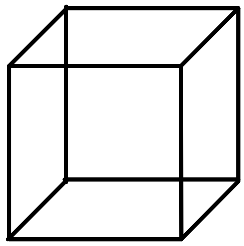
564·4=2264, tātad iegūtā skaitļa simtu cipars jeb sākotnējā skaitļa tūkstošu cipars ir 2.

2564·4=10264, tātad iegūtā skaitļa tūkstošu cipars jeb sākotnējā skaitļa desmittūkstošu cipars ir 0.

Tā kā iegūtā skaitļa pirmais cipars ir 4, tad sākotnējā skaitļa pirmais cipars ir 1.

Pārbaude: 102564·4=410256.

7.3.2. ***Risinājums.*** Uzdevumā nav prasīts dotos stienīšus izvietot vienā plaknē, tāpēc drīkst veidot arī telpiskas figūras. Tā kā visi 12 stienīši ir vienādi savā starpā, tad no tiem var salikt kuba karkasu (skat. A85. zīm.). Kubam ir 6 skaldnes, katra no kurām ir kvadrāts, uzdevuma prasības ir izpildītas.



A85. zīm.

7.3.3. ***Atbilde:*** 100 *kg*.

Risinājums. 10 cāļi 100 dienās apēdīs 10 reizes vairāk graudu nekā 10 cāļi 10 dienās, tātad 10 *kg* graudu. Savukārt 100 cāļi 100 dienās apēdīs 10 reizes vairāk graudu nekā 10 cāļi 100 dienās, tātad 100 *kg* graudu.

7.3.4. ***Atbilde:*** plkst. 20:00.

Risinājums. Ja no dotā brīža līdz diennakts beigām vēl palikušas x stundas, tad kopš diennakts sākuma līdz šim brīdim ir pagājušas $5x$ stundas. Atliek atcerēties, ka diennakts ilgst no plkst 00:00 līdz 24:00, tātad 24 stundas. Iegūstam sekojošu vienādojumu

$5x+x=24$

$x=4$ (stundas).

Tātad kopš diennakts sākuma ir pagājušas $5\cdot 4=20$ stundas, t.i., kad Jānis paskatījās pulkstenī, kad tas rādīja 20:00.

7.3.5. ***Atbilde:*** 6 koki, 5 vārnas un 4 žagatas.

Risinājums. Apzīmēsim vārnu skaitu ar v, žagatu – ar $\check{z}$, bet koku – ar k. Tā kā, katrai vārnai apsēžoties savā kokā, pāri paliek viens koks, bet, katrai žagatai apsēžoties savā kokā, pāri paliek 2 koki, secinām, ka vārnu ir par vienu vairāk nekā žagatu. Tādējādi iegūstam sekojošas vienādības:

$v=\check{z}+1$

$\check{z}+2+v+1=2k$ jeb $\check{z}+v=2k-3$.   (1)

Bet, nosēdinot katru putnu savā kokā, iegūstam

$\check{z}+v=k+3$.   (2)

Tā kā vienādību (1) un (2) kreisās puses ir vienādas, arī labajām pusēm jābūt vienādām. Ņemot to vērā, iegūstam vienādojumu, kuru atrisinājums dod uzdevuma atbildi.

$2k-3=k+3$

$k=6$

$\check{z}=k-2=6-2=4$

$v=k-1=6-1=5$

Piezīme. Tieši tāds pats matemātiskais saturs ir arī 5.1.3. uzdevumam, taču tā risinājums pasniegts mazliet citā formā.

7.4.1. ***Atbilde:*** A=2, B=6, C=3, D=1, E=4, I=5, L=9, K=8, M=0.

Risinājums. No vienādības $\mathbf{IM{:}I=DM}$ seko, ka D=1, savukārt, no vienādības $\mathbf{IM+I=II}$ iegūstam, ka M=0. Tātad vienādību $\mathbf{II\cdot A=DDM}$ varam pārrakstīt

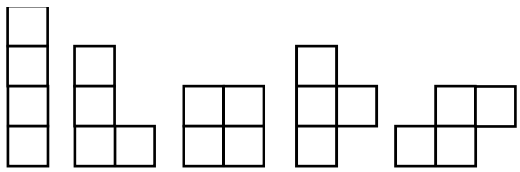
$\mathbf{II\cdot A=110}$.

A ir viencipara skaitlis, lai noteiktu tā vērtību, jānoskaidro, cik dažādos veidos skaitli 110 var sadalīt divos reizinātājos, no kuriem viens ir viencipara skaitlis, bet otrs – divciparu skaitlis, kura abi cipari vienādi. Ir tikai divas iespējas:

1) 110=5·22, tātad A=5, I=2. Tādā gadījumā BE:5=C5, C nevar būt 1 vai 0, un, ja liksim C vietā mazāko no atlikušajām vērtībām 35·5=175 – trīsciparu skaitlis, iegūta pretruna.

2) 110=2·55, tātad A=2, I=5. Šajā gadījumā BE:2=C2 un E=4. Aplūkosim vienādību 1C·C=CL, no tās seko, ka L=C^2, bet, tā kā L ir viencipara skaitlis, tad C var būt tikai 2 vai 3. Skaitlis 2 jau ir "aizņemts", tātad C=3 un L=9. No vienādības B4:2=32 varam uzzināt B vērtību, proti, B4=32·2=64, tātad B=6. No pēdējās vienādības iegūstam: R=6+1=7, bet K=8. Pārbaude parāda, ka visas vienādības izpildās.

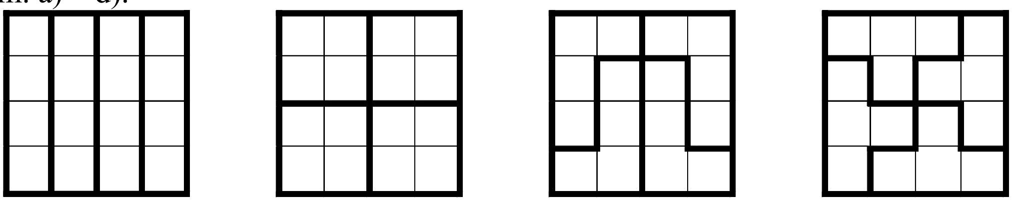
7.4.2. ***Risinājums.*** Tā kā kvadrāts sastāv no 4×4=16 rūtiņām, tad katrai dalījumā iegūtajai daļai jāsastāv no 16:4=4 rūtiņām. No četrām rūtiņām var izveidot 5 dažādas figūriņas; tās sauc par *tetramino* (skat. A86. zīm.).



a) b) c) d) e)

A86. zīm.

Kā kvadrātu 4×4 rūtiņas var sagriezt četrās vienādās daļās četros veidos, skat., piem., A87. zīm. a) – d).



a) b) c) d)

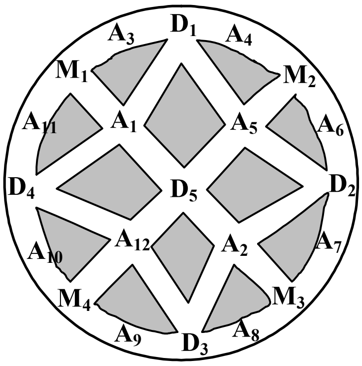
A87. zīm.

7.4.3. ***Atbilde:*** 64 reizes.

Risinājums. Pēc pirmajām septiņām mazgāšanas reizēm ziepju gabaliņš bija samazinājies 2·2·2=8 reizes, bet pēc nākošajām 7 reizēm ziepju gabaliņš samazinājās vēl 8 reizes. Tātad pēc mazgāšanas palikušais ziepju gabaliņš ir 8·8=64 reizes mazāks salīdzinājumā ar sākotnējo.

7.4.4. ***Atbilde:*** 80 veidos.

Risinājums. Ievērosim, ka dotā "parka" shēma un burtu izvietojums ir simetriski attiecībā gan pret centru, gan pret *diametriem*. Arī pats vārds "MADAM" ir simetrisks – vienādi izlasāms no abiem galiem. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, prasīto vārdu drīkst lasīt jebkādos virzienos, pie tam vārda sākuma un beigu burts "M" var būt gan viens un tas pats burts uz "parka celiņiem", gan dažādi burti. Tāpat, *lasot* vienu prasīto vārdu, varam gan iet pa dažādiem "parka celiņu" posmiem, gan pa kādu posmu iet turp un atpakaļ.



A88. zīm.

Lai būtu vieglāk uzskaitīt visus variantus, sanumurēsim visus dotos burtus; skat. A88.zīm. Vispirms saskaitīsim, cik veidos var izlasīt vārdu "MADAM", sākot lasīt no vienas un tās pašas vietas, piem., no burta "M_1". Tā kā burtu izvietojums ir simetrisks pret taisni M_1M_3, pietiek saskaitīt, cik veidos prasīto vārdu var izlasīt uz taisnes M_1M_3 un cik veidos – uz vienu pusi (piem., pa labi) no taisnes M_1M_3.

Uz taisnes M_1M_3 vārdu "MADAM", sākot ar burtu M_1, var izlasīt 2 veidos:

$M_1A_1D_5A_2M_3$ un $M_1A_1D_5A_1M_1$.

Pa labi no taisnes M_1M_3 vārdu "MADAM", sākot ar burtu M_1, var izlasīt 9 veidos:

$M_1A_3D_1A_4M_2$	$M_1A_3D_1A_1M_1$	$M_1A_1D_5A_5M_2$
$M_1A_3D_1A_5M_2$	$M_1A_1D_1A_3M_1$	$M_1A_1D_1A_4M_2$
$M_1A_3D_1A_3M_1$	$M_1A_1D_1A_1M_1$	$M_1A_1D_1A_5M_2$

Simetrijas pēc arī pa kreisi no taisnes M_1M_3 vārdu "MADAM", sākot ar burtu M_1, var izlasīt 9 veidos. Tātad pavisam, sākot ar burtu M_1, vārdu "MADAM" var izlasīt $2+9+9=20$ dažādos veidos. Tieši tikpat dažādos veidos prasīto vārdu var izlasīt, sākot ar burtu "M_2", "M_3" vai "M_4". Tātad pavisam kopā vārdu "MADAM" var izlasīt $4\cdot 20=80$ dažādos veidos.

7.4.5. ***Atbilde:*** vectētiņam ir 99 gadi, vecmāmiņai – 66 gadi.

Risinājums. Apzīmēsim vectētiņa vecumu šobrīd ar x. Tad vecmāmiņai šobrīd ir $x-33$ gadi (jo vecmāmiņa ir par 33 gadiem jaunāka nekā vectētiņš). Tad, kad vecmāmiņai būs tik pat gadu, cik šobrīd ir vectētiņam, tad vecmāmiņai būs x gadi; 3 reizes mazāk nekā x ir $\frac{x}{3}$. No vectētiņa stāstītā iegūstam šādu vienādojumu:

$$x-33=2\cdot\frac{x}{3}$$

Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam $x=99$.

Tātad vectētiņš ir 99 gadus vecs, bet vecmāmiņa – 66 gadus veca.

7.5.1. ***Atbilde:*** dotais dalīšanas piemērs parādīts A89. zīm.

$$\begin{array}{l} 1089709 : 12 = 90809 \\ \underline{108\ \ } \\ \quad\ 97 \\ \quad \underline{\ 96\ \ } \\ \qquad 109 \\ \quad\ \ \underline{108\ \ } \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

A89. zīm.

Risinājums. Ievērojam, ka dalījumā ir piecciparu skaitlis, bet starpreizinājumu ir tikai trīs. Tas nozīmē, ka atbilstoši otrais un ceturtais cipars dalījumā ir "0". Vēl varam ievērot, ka

8, reizinot ar dalītāju (divciparu skaitli), iegūst divciparu skaitli, bet, dalījuma pirmo un pēdējo ciparus reizinot ar to pašu dalītāju, iegūst trīsciparu skaitli. Tātad dalījuma pirmais un pēdējais cipari ir lielāki nekā 8; vienīgā iespēja, ka tie ir 9. Esam noskaidrojuši, ka dalījums ir 90809.

Savukārt dalītājs ir tāds divciparu skaitlis, kuru, reizinot ar 8, iegūst divciparu skaitli, bet, reizinot ar 9 – trīsciparu skaitli. Vienīgais divciparu skaitlis, kas apmierina šos nosacījumus, ir 12 (jo $11 \cdot 9 = 99 < 100$, bet $13 \cdot 8 = 104 > 100$). Tātad noskaidrots arī dalītājs, tas ir 12.

Zinot dalījumu, dalītāju un atlikumu, var viennozīmīgi atjaunot doto dalīšanas piemēru.

7.5.2. ***Risinājums.*** Uzdevuma risināšanā izmantosim *Dirihlē principu* (skat. 8.lpp.).

Atkarībā no lappušu skaita pavisam var būt 80 veidu grāmatas – tādas, kurās ir 1 lpp., 2 lpp., ..., 79 lpp., 80 lpp. Šos veidus izvēlēsimies par "*būriem*", tātad pavisam ir 80 "*būri*". Grāmatas uzskatīsim par "*trušiem*", kas jāsadala pa šiem "*būriem*" (katrā "*būrī*" nonāk tās grāmatas, kurām ir atbilstošais lappušu skaits).

Ir jāpamato, ka noteikti būs kāds "*būris*", kurā atradīsies vismaz 13 truši.

Ievērosim, ka $1000 = 12 \cdot 80 + 40$, tāpēc saskaņā ar *vispārināto Dirihlē principu*, vismaz viens tāds būris atradīsies.

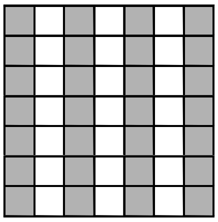
7.5.3. ***Atbilde:*** Sivēns apēda tieši vienu banānu.

Risinājums. Vinnijs Pūks un Sivēntiņš kopā apēda $70 - 45 = 25$ banānus. Tā kā katrs (arī Sivēntiņš) apēda vismaz vienu banānu, tad **Vinnijs Pūks apēda ne vairāk kā 24 banānus**.

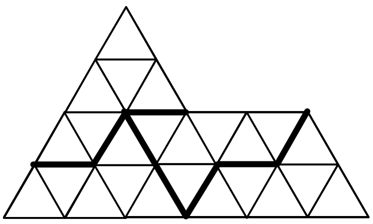
Trusītis un Pūce kopā apēda 45 banānus, tātad nozīmē, ka viens no viņiem apēda vismaz 45:2=22,5 jeb vismaz 23 banānus (jo katrs apēda veselu skaitu banānu). Tā kā Pūks apēda visvairāk banānu, tad **Pūks apēda vismaz 24 banānus**. No izceltajiem apgalvojumiem seko, ka Pūks apēda tieši 24 banānus, tātad Sivēntiņš apēda $25 - 24 = 1$ banānu.

7.5.4. ***Atbilde:*** nē, karalis nevar apstaigāt kvadrātu 7×7 prasītajā veidā.

Risinājums. Izkrāsosim kvadrātu, kā parādīts A90. zīmējumā. Ar slīpo gājienu var aiziet tikai no baltas rūtiņas uz melnu vai otrādi. Apvienosim rūtiņas pāros tā, ka vienā pārī ir rūtiņas, kuras savieno slīpais karaļa gājiens. Katra rūtiņa, izņemot vienu, nonāk vienā pārī. Tātad balto un melno rūtiņu skaitiem jāatšķiras par 1, bet tie atšķiras par 7. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums bija aplams un šāds maršruts nav iespējams.



A90. zīm.



A91. zīm.

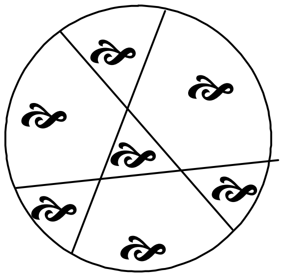
7.5.5. Atbilde. Skat., piemēram, A91. zīmējumu.

1999./2000. mācību gads

8.1.1. ***Risinājums.*** Dotās skaitļu virknes pirmais loceklis ir 1, bet katru nākamo virknes locekli iegūst iepriekšējo reizinot ar 2 un rezultātam pieskaitot 3. Tātad visi šīs virknes locekļi būs nepāra skaitļi, tas nozīmē, ka skaitlis 2000 nepieder dotajai virknei.

Piezīme. Šāda tipa uzdevumos atbilde principā varētu būt jebkāda: virknes sastādītājs varētu būt iedomājies, ka virknes sākotnējo locekļu vērtības veidojas pēc viena noteikta likuma, bet sākot ar kādu vietu – pēc cita likuma, vtml. (skat. skaidrojumus 1.1.5. uzdevuma risinājumā).

8.1.2. ***Atbilde:*** skat., piem., A92. zīm.



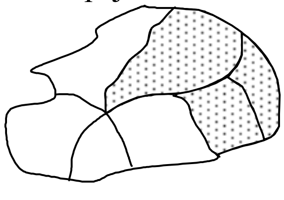
A92. zīm.

8.1.3. ***Atbilde:*** 48,8%.

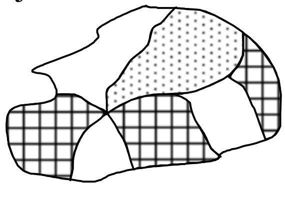
Risinājums. Pieņemsim, ka datora sākotnējā cena ir x Ls. Tad pēc pirmās cenu pazemināšanas tas maksāja 0,8x Ls. Tā kā 20% no 0,8x ir $0{,}2 \cdot 0{,}8x = 0{,}16x$ (Ls), tad pēc otrās cenu pazemināšanas dators maksāja $0{,}8x - 0{,}16x = 0{,}64x$. Savukārt pēc trešās cenu pazemināšanas datora cena bija $0{,}64x - 0{,}2 \cdot 0{,}64x = 0{,}512x$ (Ls). Tātad tagad datora cena ir $\frac{512}{1000} = 51{,}2\%$ no sākotnējās datora cenas, tāpēc tagad datoru var nopirkt ar $100\% - 51{,}2\% = 48{,}8\%$ lielu atlaidi.

8.1.4. ***Atbilde:*** nepieciešamas vismaz 3 krāsas; piemēru skat. A94. zīm.

Risinājums. Apskatot A93. zīm. iekrāsotos novadus, viegli saprast, ka ar 2 krāsām iztikt nevar (tiem ir pa pāriem kopīgas robežas daļas), tātad ir nepieciešamas vismaz trīs dažādas krāsas. Vienu no iespējamiem kartes krāsojumiem trīs krāsās skat. A93. zīm.



A93. zīm.



A94. zīm.

8.1.5. ***Atbilde:*** Pūķis var noskaidrot Rūķa iedomāto skaitli, uzdodot 3 jautājumus.

Risinājums. Skaitļu kopu sauksim par "*noteiktu*", ja ir noskaidrots, ka neviens no tajā ietilpstošajiem skaitļiem nav Rūķa iedomātais skaitlis; pārējo skaitļu kopu sauksim par "*nenoteiktu*" (meklējamais skaitlis ir viens no "*nenoteiktās*" kopas skaitļiem). Sākumā visa skaitļu kopa {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8} ir "*nenoteikta*".

Pūķa stratēģija ir ar katru jautājumu samazināt "*nenoteikto*" kopu, līdz tā satur tikai vienu skaitli; tas arī būs Rūķa iedomātais skaitlis. Lai jautājumus izmantotu iespējami *ekonomiskāk*, ar katru jautājumu jācenšas cik vien var samazināt "*nenoteikto*" kopu. Tāpēc "*nenoteiktā*" kopa ir jāsadala līdzīgās daļās (uz pusēm vai, ja tas nav iespējams – daļās, kurās skaitļu skaits atšķiras par viens), un jājautā par vienu no tām. Pēc Rūķa atbildes par vienu no daļām būs skaidrs, ka tā ir "*noteikta*", savukārt "*nenoteiktā*" kopa būs kļuvusi uz pusi mazāka.

Tādējādi pēc atbildes uz pirmo jautājumu “*nenoteiktā*” kopa saturēs četrus skaitļus, pēc atbildes uz otro jautājumu “*nenoteiktā*” kopa saturēs tikai divus skaitļus, un ar trešo jautājumu “*nenoteiktā*” kopa saruks līdz vienam skaitlim, kas arī ir Rūķa iedomātais skaitlis.

Tā kā uz vienu jautājumu var iegūt tikai divas dažādas atbildes (“jā” vai “nē”), tad ar vienu jautājumu var atrisināt doto uzdevumu gadījumā, ja sākotnējā “*nenoteiktā*” kopa satur ne vairāk kā divus skaitļus. Ar diviem jautājumiem uzdevumu varēs atrisināt gadījumā, ja sākotnējā “*nenoteiktā*” kopa satur ne vairāk kā $2 \cdot 2=4$ skaitļus. Tāpēc 8 skaitļu gadījumā vismaz trīs jautājumi ir nepieciešami.

Iespējamie Pūķa jautājumi varētu būt sekojoši:

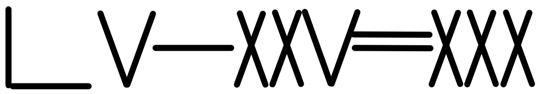
1) *Vai tas ir pāra skaitlis?* Lai arī kā Rūķis atbildēs, par četriem skaitļiem (vai nu par visiem pāra skaitļiem, vai par visiem nepāra skaitļiem) varēs apgalvot, ka nevienu no tiem Rūķis nav iedomājies, tātad tie veido “*noteikto*” kopu, bet otri četri skaitļi veido “*nenoteikto*” kopu; pieņemsim, ka atbilde ir "nē", tad “*nenoteikto*” kopu veido skaitļi {1; 3; 5; 7}.

2) Vai tas ir kāds no skaitļiem 1 un 3? Atkal, neatkarīgi no Rūķa sniegtās atbildes, puse no atlikušajiem skaitļiem pievienosies “*noteiktajiem*” skaitļiem, bet “*nenoteiktā*” kopa saturēs divus skaitļus; pieņemsim, ka arī šoreiz Rūķa atbilde ir "nē", tad “*nenoteikto*” kopu veido skaitļi {5; 7}.

3) Vai tas ir 7? Ja Rūķis teiks "jā", tad Pūķis vajadzīgo skaitli ir atradis, bet, ja Rūķis arī šoreiz teiks "nē", tad, skaidrs, ka iedomātais skaitlis ir 5.

Gadījumos, ja Rūķa atbildes ir citas, Pūķis rīkojas analoģiski.

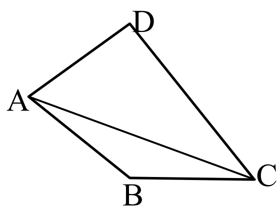
8.2.1. ***Atbilde:*** skat., piem., A95. zīm., t.i., 55-25=30.



A95. zīm.

8.2.2. ***Atbilde:*** nē, nevar būt.

Risinājums. Diagonāle AC četrstūri ABCD sadala divos trijstūros ABC un ACD (skat. A96. zīm.).



A96. zīm.

Abos šajos trijstūros ir jāpastāv trijstūra nevienādībai, t.i., katrai malai jābūt īsākai par abu pārējo malu summu. Tātad trijstūrī ABC jāizpildās nevienādībām AB+AC>BC; AC+BC>AB un AB+BC>AC. Trijstūrī ABC malu garumi ir AB=1 *cm*, BC=2 *cm*, AC=5 *cm*. Kā redzam, trešā nevienādība ir aplama: 1+2 nav lielāks par 5. Tātad neeksistē trijstūris ar malu garumiem 1 *cm*, 2 *cm* un 5 *cm*, līdz ar to nevar būt, ka četrstūra ABCD diagonāles AC garums ir 5 *cm*.

8.2.3. ***Risinājums.*** Tā kā Pūķis var vienreiz sameloties, Rūķis jautājumus veidos tā, lai par katru skaitli tiktu jautāts vismaz divreiz. Rūķis varēs būt pārliecināts, ka kāds no skaitļiem nav (vai ir) Pūķa iedomātais skaitlis tikai tad, ja būs saņēmis noliedzošu (vai apstiprinošu) atbildi vismaz divas reizes. Lai uzskatāmāk attēlotu iegūto informāciju, apskatāmo skaitļu rindā pavilksim vienu svītriņu katrreiz, kad par kādu skaitli no Pūķa atbildēm sekos, ka tas nav viņa iedomātais skaitlis. Ja kāds skaitlis būs pasvītrots divreiz, par to droši varēs apgalvot, ka tas nav Pūķa iedomātais skaitlis.

Pirmais Rūķa jautājums: "*Vai iedomātais skaitlis ir starp skaitļiem 1 un 2?*" Ja Pūķis atbildēs "*nē*", pasvītrosim ar vienu svītriņu skaitļus 1 un 2; ja Pūķis atbildēs "*jā*", pasvītrosim skaitļus 3 un 4. Pieņemsim, ka Pūķis atbild "*jā*" (citus gadījumus analizē līdzīgi):

$$1 \quad 2 \quad \underline{3} \quad \underline{4}$$

Otrais Rūķa jautājums: "*Vai iedomātais skaitlis ir starp skaitļiem 2 un 4?*" Pieņemsim, ka šoreiz Pūķa atbilde ir "*nē*" un, rīkojoties līdzīgi kā iepriekš, iegūstam:

$$1 \quad \underline{2} \quad \underline{3} \quad \underline{\underline{4}}$$

Tā kā Pūķis drīkst melot tikai vienu reizi, tad skaitlis 4 pilnīgi noteikti nav iedomātais skaitlis.

Trešais Rūķa jautājums: "*Vai tas ir 1?*" Atkarībā no Pūķa atbildes iegūstam divus variantus:

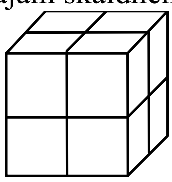
a) atbilde "*jā*": $1 \quad \underline{\underline{2}} \quad \underline{\underline{3}} \quad \underline{\underline{\underline{4}}}$,

tātad Pūķa iedomātais skaitlis ir 1;

b) atbilde "*nē*": $\underline{1} \quad \underline{2} \quad \underline{3} \quad \underline{\underline{4}}$,

tātad Pūķis ir vienreiz melojis par kādu no skaitļiem 1; 2; 3. Lai Rūķis noskaidrotu, kurš no skaitļiem 1, 2 vai 3 ir iedomātais, viņš uzdod vēl vismaz divus jautājumus (ievērosim, ka visas turpmākās Pūķa atbildes noteikti ir patiesas, jo vienreiz viņš jau ir samelojies). Tātad ar 5 jautājumiem Rūķis pilnīgi noteikti var noskaidrot Pūķa iedomāto skaitli.

8.2.4. *Risinājums.* Ja Pūks savu klucīti sazāģēs tā, kā tas ir parādīts A97. zīm., tad katram mazajam klucītim tieši trīs sānu skaldnes būs brūnas, bet pārējās trīs skaldnes – baltas. Salīmējot mazos klucīšus pa brūnajām skaldnēm, Pūks atkal iegūs baltu klucīti.



A97. zīm.

8.2.5. *Atbilde:* 63.

Risinājums. Apzīmēsim meklējamā skaitļa pirmo ciparu ar a, otro ciparu ar b. Tā kā a ir vairākas reizes lielāks nekā b, tad $a = kb$, kur k - naturāls skaitlis, $k \neq 1$.

Skaitļa $\overline{ab}$ ciparu summa ir $a + b = kb + b = b(k+1)$; starpība ir $a - b = kb - b = b(k-1)$; reizinājums ir $ab = kb \cdot b = kb^2$; dalījums ir $a : b = kb : b = k$. Šiem četriem skaitļiem jābūt dažādiem, un to reizinājums ir 972. Sadalot 972 pirmreizinātājos, iegūstam 972=2·2·3·3·3·3·3, tātad $b(k+1) \cdot b(k-1) \cdot kb^2 \cdot k = b^4 k^2 (k^2 - 1) = 972 = 2^2 \cdot 3^5$.

Tā kā b ir naturāls skaitlis, tātad $b \geq 1$ un $b^4 \geq 1$, tad $k^2(k^2-1) \leq 972$. $k^2(k^2-1) > (k^2-1)^2$, tāpēc

$$(k^2-1)^2 < 972 < 1024 = 32^2$$
$$k^2 - 1 < 32$$
$$k^2 < 33 < 36 = 6^2$$
$$k < 6.$$

Tātad iespējamās k vērtības varētu būt 2, 3, 4 vai 5. Apskatīsim katru no šiem gadījumiem, ievietojot k vērtības vienādojumā

$$b^4 k^2 (k^2 - 1) = 2^2 \cdot 3^5 \qquad (1)$$

Ja $\boldsymbol{k = 2}$, no vienādojuma (1) iegūstam

$$b^4 \cdot 2^2 \cdot (2^2 - 1) = b^4 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^5,$$
$$b^4 = 3^4 \text{ un } \boldsymbol{b = 3}.$$

Ja $\boldsymbol{k}$ **= 3**, no vienādojuma (1) iegūstam

$$b^4 \cdot 3^2 \cdot (3^2 - 1) = b^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 3^5 \text{ jeb } 2 \cdot b^4 = 3^3.$$

Tā kā $2b^4$ ir pāra skaitlis, bet 3^3 – nepāra skaitlis, tad nav tāda naturāla skaitļa b, kas apmierina šo vienādojumu.

Ja $\boldsymbol{k}$ **= 4**, no vienādojuma (1) iegūstam

$$b^4 \cdot 4^2 \cdot (4^2 - 1) = b^4 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^5 \text{ jeb } b^4 \cdot 2^2 \cdot 5 = 3^4.$$

Iegūtā vienādojuma labā puse satur tikai pirmreizinātājus 3, tātad tā nedalās ne ar 2, ne ar 5, līdz ar to neeksistē tāds naturāls skaitlis b, kas apmierina šo vienādojumu.

Ja $\boldsymbol{k}$ **= 5**, no vienādojuma (1) iegūstam

$$b^4 \cdot 5^2 \cdot (5^2 - 1) = b^4 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^5 \text{ jeb } b^4 \cdot 5^2 \cdot 2 = 3^4.$$

Arī šajā gadījumā nav tāda naturāla skaitļa b, kas apmierina iegūto vienādojumu.

Tātad vienādojuma (1) vienīgais atrisinājums naturālos skaitļos ir $b = 3$ un $k = 2$; līdz ar to $a = kb = 2 \cdot 3 = 6$ un meklējamais skaitlis ir 63.

8.3.1. ***Atbilde:*** 45 gada skaitļi.

Risinājums. 11. gadsimtā nebija neviena tāda gada, kura ciparu summa ir 20: 11. gadsimta gadskaitļus var uzrakstīt formā 10** (katrai * atbilst viens cipars), to ciparu summa ir 1+0+*+*≤1+0+9+9≤19.

12. gadsimtā bija 1 gads, kura ciparu summa ir 20: 1199.

13. gadsimtā bija 2 tādi gadskaitļi, kuru ciparu summa ir 20: 1289 un 1298.

14. gadsimtā – 3 gada skaitļi: 1379, 1388, 1397.

15. gadsimtā – 4 gada skaitļi: 1469, 1478, 1487, 1496.

16. gadsimtā – 5 gada skaitļi: 1559, 1568, 1577, 1586, 1595.

17. gadsimtā – 6 gada skaitļi: 1649, 1658, 1667, 1676, 1685, 1694.

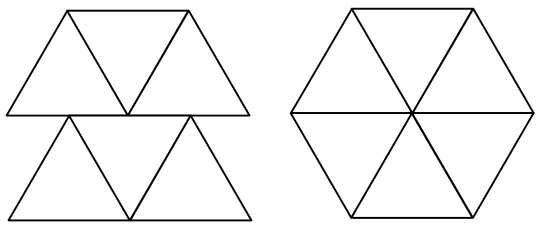
18. gadsimtā – 7 gada skaitļi: 1739, 1748, 1757, 1766, 1775, 1784, 1793.

19. gadsimtā – 8 gada skaitļi: 1829, 1838, 1847, 1856, 1865, 1874, 1883, 1892.

20. gadsimtā – 9 gada skaitļi: 1919, 1928, 1937, 1946, 1955, 1964, 1973, 1982, 1991.

Tātad otrajā tūkstošgadē pavisam bija 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 tādi gada skaitļi, kuru ciparu summa ir 20.

8.3.2. ***Atbilde:*** skat., piem., A98. zīm.



A98. zīm.

8.3.3. ***Atbilde:*** summa ir $999\frac{1}{2}$.

Risinājums. Ievērosim, ka

$$\frac{1}{2000} + \frac{1999}{2000} = \frac{2000}{2000} = 1, \quad \frac{2}{2000} + \frac{1998}{2000} = \frac{2000}{2000} = 1, \quad \frac{3}{2000} + \frac{1997}{2000} = \frac{2000}{2000} = 1 \text{ utt.}$$

Pavisam var izveidot $(1999 - 1) : 2 = 999$ daļu pārus, kuru summa ir 1, bet daļai $\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$ nav pāra. Tātad

$$\frac{1}{2000}+\frac{2}{2000}+\frac{3}{2000}+...+\frac{1998}{2000}+\frac{1999}{2000}=999\cdot 1+\frac{1}{2}.$$

8.3.4. ***Atbilde:*** 25 trijstūri.

Risinājums. Vispirms aprēķināsim, cik daudzus dažādus trijstūrus var izveidot, neņemot vērā virsotņu krāsu. Pirmajā rindā varam izvēlēties vienu virsotni 3 dažādos veidos, bet otrajā rindā divas virsotnes – $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ veidos. Tātad ir 3·6=18 tādi trijstūri, kuriem pirmajā rindā atrodas tieši viena virsotne. Otrajā rindā vienu virsotni varam izvēlēties 4 veidos, bet pirmajā rindā divas virsotnes – 3 veidos. Pavisam ir 4·3=12 tādi trijstūri, kuriem otrajā rindā atrodas tieši viena virsotne. Tas nozīmē, ka kopumā var izveidot 12+18=30 trijstūrus. No tiem 5 trijstūri ir tādi, kuriem visas virsotnes ir vienā krāsā (ΔACL, ΔACN, ΔLNA, ΔLNC un ΔBKM). Tātad $30-5=25$ trijstūri ir tādi, kuriem virsotnes atrodas dotajos punktos un ne vairāk kā divas ir vienā krāsā.

8.3.5. ***Atbilde:*** Rūķelim pienākas 1 Ls, bet Rāķelim 4 Ls.

Risinājums. No dotā seko, ka katrs rūķītis ir nobaudījis medus dzērienu 5 Ls vērtībā. Tātad no Rīķeļa dotajiem 5 Ls Rūķelim (pērkot podiņu viņš ir iztērējis 6 Ls) pienākas 1 Ls, bet Rāķelim (šis rūķītis ir iztērējis 9 Ls) pienākas 4 Ls, līdz ar to katrs rūķītis būs samaksājis par medus dzēriena podiņu 5 Ls.

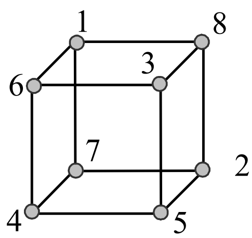
8.4.1. ***Risinājums.*** Šim uzdevumam ir vairāki atrisinājumi. Daži no tiem ir sekojoši:

$$(1\cdot 2+3+4-5+6+7-8):9=1$$

$$(12+34-5):(6\cdot 7+8-9)=1$$

$$(12-3\cdot 4)\cdot 5\cdot 6\cdot 7-8+9=1$$

8.4.2. ***Atbilde:*** skat., piem., A99. zīm.



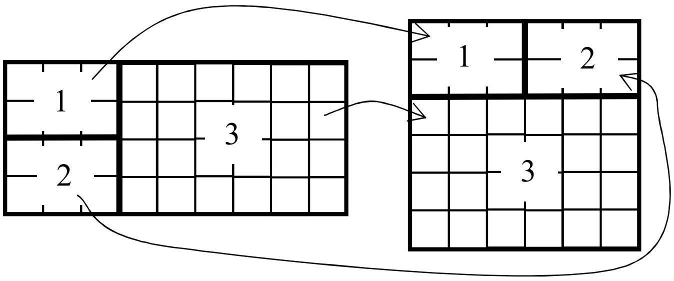
A99. zīm.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, kādu summu jāveido vienas skaldnes virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem.

Visu ierakstāmo skaitļu summa ir 1+2+3+4+5+6+7+8=36. Kuba katra virsotne atrodas trīs skaldnēs, tātad katrs no dotajiem skaitļiem piedalās trīs summu veidošanā. Tāpēc, saskaitot visu skaldņu summas, iegūsim 36·3=108. Tā kā kubam ir 6 skaldnes, tad katrā skaldnē ierakstīto skaitļu summai jābūt 108:6=18.

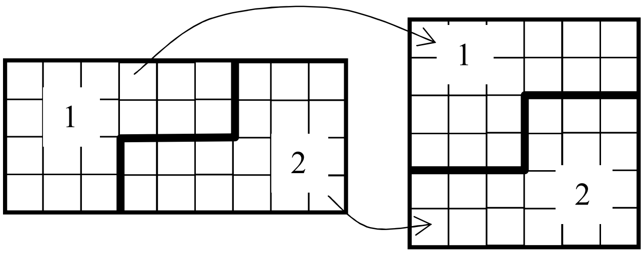
A98. zīm. piemērs parāda, ka dotos skaitļus tiešām var ierakstīt kuba virsotnēs atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

8.4.3. ***Atbilde:*** **a)** skat., piem., A100. zīm.



A100. zīm.

b) Skat., piem., A101. zīm.



A101. zīm.

8.4.4. ***Atbilde:*** jāpērk vismaz 9 tapešu ruļļi.

Risinājums. Vispirms aprēķināsim, cik daudz tapešu lokšņu vajag "pilnā garumā" 2,5 *m*. Tādas loksnes vajadzīgas visapkārt istabai, izņemot logu un durvis: $(5+3)\cdot 2-2{,}1-0{,}9=16-3=13$ *m*. Tā kā viena tapešu loksne ir 50 *cm* plata, tad pavisam nepieciešamas 13 *m* : 0,5 *m* = 26 šādas loksnes. Tad vēl nepieciešamas divas loksnītes garumā vismaz 2,5 *m* – 2 *m* = 0,5 *m* virs durvīm (ar vienu loksni nepietiek, jo tās platums ir tikai 0,5 *m*, bet durvju platums ir 0,9 *m*). Loga platums ir 2,1 *m*, tātad virs un zem loga nepieciešamas piecas loksnes (ar četrām loksnēm nepietiek, jo 4·0,5 *m*=2 *m*) kopējā garumā vismaz 2,5 *m* - 1,9 *m* = 0,6 *m*.

Tā kā tapešu raksts atkārtojas ik pēc 30cm, tad uz katru garo loksni (2,5 *m*) "jārēķina" 2,7 *m* – 9 pilni raksti. Tātad no viena tapešu ruļļa var iegūt 10 *m* : 2,7 *m* = 3 garās loksnes; tad no ruļļa vēl atliks vismaz 1,9 *m*. Tātad garajām loksnēm kopā nepieciešami 9 ruļļi (ar 8 ruļļiem nepietiek, jo 8·3=24, vēl nepieciešamas 2 loksnes). Pāri paliek 8 loksnes garumā 1,9 *m* katra un 1,9 *m* + 2,7 *m* = 4,6 *m* no devītā ruļļa. No šiem atlikumiem noteikti pietiks loksnēm virs durvīm un loga: virs durvīm vajadzīgas 2 loksnītes, kuras varam ņemt no 2 ruļļu pārpalikuma (1,9 *m* > 0,6 *m* >0,5 *m*); no 5 citu ruļļu pārpalikuma varam ņemt nepieciešamās loksnītes virs un zem loga (1,9 *m* > 2·0,6 *m* = 1,2 *m* – mēs nezinām, cik tieši garas loksnes ir virs un zem loga, taču, kā redzam, pat „vissliktākajam” gadījumā atgriezumu loksnes būs pietiekamas). Tātad rūķītim jāpērk 9 tapešu ruļļi, un ar tiem, prātīgi rīkojoties, rūķītis varēs izlīmēt visu savu istabu.

8.4.5. ***Atbilde:*** burts **V** aizšifrēts ar burtu **O**, burts **J** - ar burtu **S**, burts **L** – ar burtu **R**, burts **T** – ar burtu **A**, burts **A** – ar burtu **B**, burts **I** – ar burtu **E**; ar burtu virknīti **BESB** aizšifrēts vārds **AIJA**, bet ar burtu virknīti **RBAOESB** – vārds **LATVIJA**.

Risinājums. Ievērosim, ka dotajās virknītēs burts **T** sastopams visos trīs vārdos – vienreiz kā pirmais burts, bet divas reizes – kā trešais burts. Šifra virknītēs burts **A** arī sastopams trīs reizes tādās pašās vietās. Tātad burts **T** ir aizšifrēts ar burtu **A** un vārds **TAIL** ir aizšifrēts ar vārdu **ABER**, t.i., **A** ir aizšifrēts ar **B**, **I** – ar **E** un **L** – ar **R**. Tagad varam pamanīt, ka virknīte **LVTJ** ir aizšifrēta ar virknīti **ROAS**, t.i., **V** aizšifrēts ar **O** un **J** – ar **S**. Apkoposim to tabulā:

Burts	**A**	**I**	**J**	**L**	**T**	**V**
Šifrs	**B**	**E**	**S**	**R**	**A**	**O**

Esam atraduši *šifra atslēgu*, tāpēc bez grūtībām varam atšifrēt aizšifrētos vārdus: ar burtu virknīti **BESB** aizšifrēts vārds **AIJA**, bet ar burtu virknīti **RBAOESB** – vārds **LATVIJA**.

8.5.1. ***Atbilde:*** reizinājuma pēdējie četri cipari ir 8000.

Risinājums. Šī uzdevuma risinājumā izmantosim faktus, ka

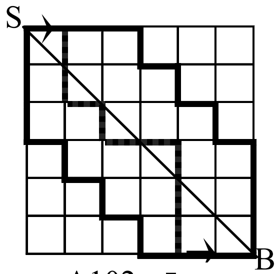
1) vairāku naturālu skaitļu reizinājuma pēdējais cipars ir vienāds ar šo skaitļu pēdējo ciparu reizinājuma pēdējo ciparu, un

2) naturālu skaitli reizinot ar skaitli, kurš beidzas ar vairākām, pieņemsim n nullēm, iegūst skaitli, kas beidzas ar n vai vairāk nullēm.

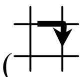
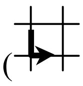
Doto reizinājumu varam pārrakstīt kā $1998 \cdot 1999 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 2001 \cdot 2002$. Tā kā pareizināt ar 1000 nozīmē skaitlim labajā pusē pierakstīt 3 nulles, tad jānoskaidro, ar kādu ciparu beidzas reizinājums $1998 \cdot 1999 \cdot 2 \cdot 2001 \cdot 2002$; tas arī būs dotā reizinājuma ceturtais cipars no beigām. Bet $8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 72 \cdot 4 = 288$. Tāpēc doto skaitļu reizinājuma pēdējie četri cipari ir 8000.

8.5.2. ***Atbilde:*** pa 200 dažādiem ceļiem.

Risinājums. Ievērosim, ka pelīte Pīka savā ceļā drīkst izmantot tikai tās rūtiņu malas, kas A102. zīmējumā atrodas ar treknāku līniju ierāmētajā laukumā, un pašas treknākās līnijas (izmantojot citas rūtiņas un pārvietojoties pēc uzdevuma nosacījumiem, Pīkas ceļā būs ne vairāk kā 5 pagriezieni).



A102. zīm.

Pavisam ceļā jābūt 6 pagriezieniem: 3 pagriezieniem no horizontāla virziena uz vertikālo () un 3 pagriezieniem no vertikālā virziena uz horizontālo (). Tātad visā ceļā gan horizontālā, gan vertikālā virzienā jābūt vismaz 3 dažādiem posmiem (t.i., ir jāiet vismaz pa 3 dažādām rindiņām un vismaz pa 3 dažādām kolonnām). Pie tam, kādā virzienā sāka iet, tādā arī jābeidz (horizontālā vai vertikālā), jo pēc nepāra skaita pagriezienu virziens mainās, bet pēc pāra skaita pagriezienu paliek tāds pats. Tātad visā ceļā ir jābūt 4 horizontāliem posmiem un 3 vertikāliem posmiem vai 4 vertikāliem posmiem un 3 horizontāliem posmiem.

Tāpat ievērosim, ka kvadrāts ir simetrisks attiecībā pret savu diagonāli un ka arī iešanas virzieni pa labi un uz leju ir savstarpēji simetriski diagonālei SB, tātad arī katram iespējamajam ceļam ir savstarpēji simetriskais ceļš, kas nav vienāds ar šo ceļu. Tas nozīmē, ka mums pietiek saskaitīt visus ceļus, kuros ir 4 horizontāli posmi un 3 vertikāli posmi, tad ceļu, kuros ir 4 vertikāli posmi un 3 horizontāli posmi, būs tikpat, un kopējais ceļu skaits būs 2 reizes lielāks.

Saskaitīsim, cik ir tādu ceļu, kuros ir 4 horizontāli posmi un 3 vertikāli posmi, t.i., pelīte savu ceļu sāk, no punkta S ejot pa labi. Visu horizontālo posmu summai jābūt 6 rūtiņu malas garumi un visu vertikālo posmu garumu summai jābūt arī jābūt 6 rūtiņu malas garumi. Ar pierakstu (a, b, c, d) sapratīsim, ka horizontālā virzienā noieto posmu garumi pēc kārtas ir a rūtiņu malas, b rūtiņu malas, c rūtiņu malas un d rūtiņu malas (piem., A102.zīmējumā ar punktoto līniju parādītajam ceļam horizontālo posmu garumi ir (1, 1, 2, 2)); pie tam jābūt $a+b+c+d=6$ un $a, b, c, d \geq 1$. Līdzīgi ar (k, l, m) apzīmēsim vertikālo posmu garumus pēc kārtas (piem., A102. zīmējumā punktotajai līnijai – (2, 1, 3)); pie tam jābūt $k+l+m=6$ un $k, l, m \geq 1$.

Pavisam ir 10 dažādi skaitļu četrinieki (a, b, c, d), kas atbilst uzdevuma nosacījumiem:

(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 3, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 3, 1, 1),
(2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1).

Arī skaitļu trijnieku (k, l, m), kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, pavisam ir 10:

(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1),
(3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 1).

Tātad kopā tādu ceļu, kuros ir 3 vertikālie un 4 horizontālie posmi, ir $10 \cdot 10=100$, jo katram skaitļu četriniekam (a, b, c, d) var piekārtot jebkuru no 10 skaitļu trijniekiem (k, l, m), t.i., horizontālo posmu garumus varam izvēlēties 10 dažādos veidos, un katram no tiem vertikālo posmu garumus varam izvēlēties 10 dažādos veidos.

Ņemot vērā iepriekš pamatoto, pavisam pelīte Pīka no punkta S uz punktu B atbilstoši uzdevuma nosacījumiem var nokļūt pa $2 \cdot 100=200$ dažādiem ceļiem.

8.5.3. ***Atbilde:*** nē, tādu spoguļskaitļu pāru nav.

Risinājums. Apzīmēsim vienu no meklējamajiem spoguļskaitļiem ar $\overline{ab}=10a+b$ (a un b ir dažādi cipari: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vai 9; cipars 0 nevar tikt izmantots, jo tad viens no spoguļskaitļiem vairs nebūs divciparu skaitlis), tad otrs spoguļskaitlis ir $\overline{ba}=10b+a$. Uzdevumā prasīts atrast visus tādus spoguļskaitļu pārus, kuros viens skaitlis ir veselu skaitu reižu lielāks nekā otrs. Pieņemsim , ka $a>b$. Šo nosacījumu varam pierakstīt sekojoši:

$$\overline{ab}=k\cdot\overline{ba} \text{ jeb } 10a+b=k(10b+a)$$

(k ir naturāls skaitlis, pie tam k ir lielāks par 1, jo viens skaitlis ir lielāks par otru, un k nav lielāks par 9, jo divu divciparu skaitļu attiecības vislielākā vērtība ir 99:10=9,9).

$$10a+b=10bk+ak$$
$$10a-ak=10bk-b$$
$$a(10-k)=b(10k-1)$$
$$a=b\cdot\frac{10k-1}{10-k}$$

Tā kā a un b ir dažādi cipari, tātad naturāli skaitļi no 1 līdz 9, tad arī reizinātājam $\frac{10k-1}{10-k}$ jābūt lielākam nekā 1 un ne lielākam kā 9:1=9. Tātad

$$1<\frac{10k-1}{10-k}\leq 9$$
$$10-k<10k-1\leq 9(10-k)$$
$$1<k\leq 4<4\frac{15}{19}$$

Apskatīsim visas iespējamās k vērtības:

$k=2$, tad $a=b\cdot\frac{10\cdot 2-1}{10-2}=\frac{19}{8}\cdot b$. Tā kā a un b ir jābūt cipariem, tad b var būt tikai 8 (lai reizinājumā saīsinātos saucējs un a būtu naturāls skaitlis), bet tad $a=\frac{19}{8}\cdot 8=19$, kas nav cipars. Tātad šis gadījums neder.

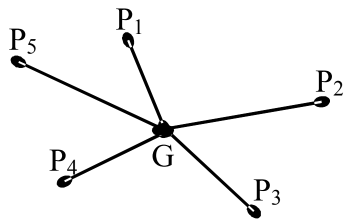
k=3: $a = b \cdot \frac{10 \cdot 3 - 1}{10 - 3} = \frac{29}{7} \cdot b \Rightarrow a = \frac{29}{7} \cdot 7 = 29$, atkal a nav cipars un arī šis gadījums neder.

k=4: $a = b \cdot \frac{10 \cdot 4 - 1}{10 - 4} = \frac{39}{6} \cdot b = \frac{13}{2} \cdot b$. Tā kā a un b ir jābūt cipariem, tad b var būt 2, 4, 6 vai 8 (lai reizinājumā saīsinātos saucējs un a būtu naturāls skaitlis), bet arī visos šajos gadījumos a vērtība nav viencipara naturāls skaitlis.

Kā redzam, tādu divciparu spoguļskaitļu, kas apmierina uzdevuma prasības, nav.

8.5.4. ***Atbilde:*** pietiek ar 5 maģistrālēm, skat., piem., A103. zīm.

Risinājums. A102. zīmējumā parādīts, kā var ierīkot 5 maģistrāles, lai no katras pilsētas varētu nokļūt uz katru citu, braucot pa ne vairāk kā 2 maģistrālēm. Vienu pilsētu izvēlamies par "galvaspilsētu" G, un ierīkosim maģistrāles, kas katru no pārējām pilsētām savieno ar pilsētu G. Tādējādi no katras pilsētas A var nokļūt uz jebkuru citu pilsētu B, braucot pa ne vairāk kā divām maģistrālēm: no A uz G un no G uz B.



A103. zīm.

Pierādīsim, ka nevar ierīkot mazāk par 5 maģistrālēm tā, lai izpildītos uzdevuma prasības. Valstī noteikti eksistē divas pilsētas A_1 un A_2, kuras ir savā starpā savienotas ar maģistrāli. Tā kā no katras pilsētas var aizbraukt uz katru, šī divu pilsētu sistēma nevar būt izolēta no pārējām, tāpēc ir kāda pilsēta A_3, kura ir savienota ar maģistrāli ar kādu no pilsētām A_1 vai A_2. (Tātad starp šīm trim pilsētām noteikti ir vismaz divas maģistrāles.)

Arī šo trīs pilsētu sistēma nevar būt izolēta no pārējām, tāpēc eksistē kāda pilsēta A_4, kura noteikti savienota ar kādu no pilsētām A_1, A_2, A_3. (Tātad starp šīm četrām pilsētām noteikti ir vismaz trīs maģistrāles.)

Spriedumu analoģiski turpinot, iegūstam, ka valstī Flandija ir vismaz 5 maģistrāles ("pievienojot" sistēmai vienu pilsētu, pievienojas arī vismaz viena maģistrāle.)

8.5.5. ***Atbilde:*** abās valodās runā 30% Leiputrijas iedzīvotāju.

Risinājums. Tā kā purpuļu valodu prot 90% Leiputrijas iedzīvotāju, tad tikai murmuļu valodā runā 100%-90%=10% jeb $\frac{1}{10}$ Leiputrijas iedzīvotāju. Murmuļu valodu pārvalda $\frac{2}{5}$ visu rūķu, tātad tikai purpuļu valodu pārvalda $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ Leiputrijas iedzīvotāju. Tātad tikai vienu valodu Leiputrijā prot $\frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$ jeb 70% no visiem rūķiem un abas valodas pārvalda 100%-70%=30% Leiputrijas iedzīvotāju.

SĒRIJA „LAIMA" MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome:	A.Andžāns, B.Johannessons, L.Ramāna, F.Bjernsdottira, A.Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja	D.Bonka

1991. gada augustā Īslande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **Ī**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Īslandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2.daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987.-2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1.daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26.-33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5.-9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1.daļa (2.izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Part II. Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannessons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4.-9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26.-33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9.-12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: LU, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4.-9. klasēm.** Rīga: LU, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina".** Rīga: LU, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: LU, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: LU, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola *Turība*, 2009.

36. K. Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums?** Rīga: LU, 2009.

37. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1984.-1986. gadā.** Rīga: LU, 2009.

38. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part III.** Rīga: LU, 2009.

39. A. Cibulis. **Pentamino maģiskās konstantes un dvīnītes**. Rīga: LU, 2009.

40. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 2.** Rīga: LU, 2009.

41. A. Andžāns, L. Freija, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: LU, 2009.

42. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm. Uzdevumi un atrisinājumi 2008./2009. mācību gadā.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2009.

43. D. Bonka, S. Krauze, M. Seile. **Jauno matemātiķu konkurss 1993.-2000. gados.** Rīga: LU, 2009.

CITA IZMANTOTĀ LITERATŪRA

44. A. Bērziņš. **Praktikums elementārajā skaitļu teorijā.** Rīga: LU A.Liepas NMS, 1994.

45. A. Andžāns, J. Čakste, T. Larfelds, L. Ramāna, M. Seile. **Vidējās vērtības metode.** Rīga: “Mācību grāmata”, 1996.

46. A. Andžāns u.c. **Dirihlē princips.** Rīga: "Mācību grāmata", 1994.

47. A. Gailītis, A. Andžāns. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Aizkraukle: Krauklītis, 1995.

48. A. Andžāns, I. Markusa. **Vai vari atrisināt? Algebra.** Rīga: Zvaigzne ABC, 1996.

49. A. Andžāns, A. Bērziņš. **Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi.** Rīga: Zvaigzne ABC, 1998.

50. М. Б. Гельфанд, В. С. Павлович. **Внекласная работа по математике.** Просвещение, 1965.

51. А. Я. Котов. **Вечера занимательной арифметики.** Просвещение, 1967.

52. С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. **Ленинградские математические кружки.** Киров: АСА, 1994.

53. Р. М. Смаллиан. **Алиса в стране смекалки.** Москва: Мир, 1987.