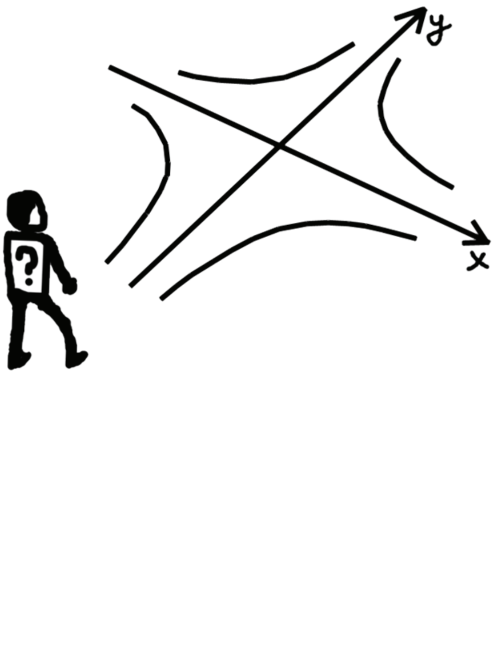
A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons

LATVIJAS 26. – 33. ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES. 5. – 9. KLASES



Turība
BIZNESA AUGSTSKOLA

Rīga, 2007

UDK 51(075.2)(079)
An 318

A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. Latvijas 26. – 33. atklātās matemātikas olimpiādes. 5. – 9. klases. Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007. – 107 lpp.

Grāmatā apkopoti uzdevumi, kas piedāvāti 5. – 9. klašu skolēniem Latvijas atklātajās matemātikas olimpiādēs no 1999. līdz 2006. gadam, īsas norādes to risināšanai un pilni atrisinājumi. Grāmata paredzēta skolēniem, skolotājiem, matemātikas pulciņu vadītājiem, kā arī visiem matemātikas entuziastiem. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Grāmatas galīgo variantu sagatavoja Z. Škuškovnika LU Pētniecības projekta "Matemātikas padziļinātas mācīšanas zinātniskais un metodiskais nodrošinājums" ietvaros.

ISBN 978-9984-766-89-8

SATURS

IEVADS

Labdien!

Mūsdienu sabiedrībā visaugstāk tiek novērtēta cilvēku spēja domāt. Cilvēki, kas ir spējīgi paskatīties uz visu no mazliet cita skatu punkta un pamatot vajadzīgo, bauda vislielāko atzinību un ir vislabākie speciālisti jebkurā nozarē.

Šī grāmata var palīdzēt attīstīt informācijas strukturēšanas un sakārtošanas spējas, pamatošanas un secināšanas prasmes, kā arī, iespējams, parādīs dažādus veidus, kā skatīties uz esošu problēmu vai uzdevumu. Tāpēc tā domāta gan skolniekiem, kas gatavojas olimpiādēm, gan skolotājiem, kas palīdz skolniekiem gatavoties, gan arī jebkuram citam cilvēkam jebkurā vecumā, kurš ir sapratis, ka attīstīt un pilnveidot savas domāšanas spējas nekad nav par vēlu!

Grāmata sastāv no 3 nodaļām. Pirmajā nodaļā "Uzdevumi" varēsiet atrast visus 5. – 9. klašu uzdevumus, kas pēdējos astoņos gados piedāvāti Latvijas atklātajās matemātikas olimpiādēs. Otrajā nodaļā "Ieteikumi" ir atrodami īsi ieteikumi, kā risināt konkrēto uzdevumu. Lielākoties būs dots tikai viens ieteikums katram uzdevumam, bet, protams, iespējami vairāki varianti, kā nonākt pie atrisinājuma, un dotais variants nav jāuzskata ne par pareizāko, ne vieglāko. Trešajā nodaļā "Atrisinājumi" ir apkopoti visu uzdevumu precīzi atrisinājumi. Lielākoties tiek piedāvāts viens atrisinājuma variants katram uzdevumam, taču katram uzdevumam iespējami vairāki pilnīgi atšķirīgi pareizi risinājumi, kas noved pie vienas un tās pašas atbildes.

Ja vēlies gūt no šīs grāmatas pēc iespējas vairāk un esi nolēmis risināt uzdevumus, mēs iesakām vispirms mēģināt katru uzdevumu atrisināt pašam un izmēģināt visus iespējamos risināšanas veidus, ko vari iedomāties. Dažreiz pats negaidītākais ceļš izrādās pareizais! Ja atrisināt tomēr neizdodas, vari izmantot nodaļu "Ieteikumi", kur būs norādīts, par ko padomāt, lai varētu atrisinājumu atrast. Kad esi uzdevumu atrisinājis, vai arī tas nav izdevies pat ar ieteikumu palīdzību, vari skatīties atrisinājumos. Uzdevumu atrisinājumi ir strukturēti tā, lai vispirms būtu iespējams apskatīties atbildi un salīdzināt, vai iznākums ir pareizs (ja gadījumā tā nav – vēl ir iespēja pašam mēģināt atrast kļūdu un izlabot to), un tad iepazīties ar pilnu uzdevuma atrisinājumu.

Lai veicas!

Autori

UZDEVUMI

Latvijas 26. atklātā matemātikas olimpiāde

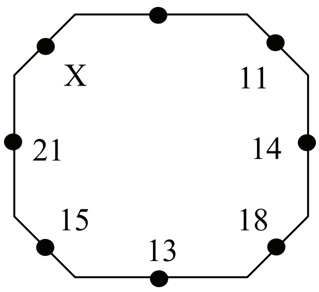
5.klase

26.5.1. Andris, Bruno, Didzis un Edgars kopā apēda 40 konfektes, katrs vismaz vienu. Bruno un Didzis kopā apēda vismaz 25 konfektes; Andris apēda vairāk konfektes nekā jebkurš cits no zēniem. Cik konfektes apēda Edgars?

26.5.2. Cik no 1 līdz 1999 ieskaitot ir tādu naturālu skaitļu, kuru ciparu summa dalās ar 5?

26.5.3. Apskatām taisnstūrus, kuru malu garumi ir veseli skaitļi un augstums nepārsniedz platumu. Vai vairāk ir dažādu izmēru taisnstūru ar perimetru 200 vai dažādu izmēru taisnstūru ar perimetru 202?

26.5.4. Astoņstūra virsotnēs ierakstīja pa naturālam skaitlim. Katras malas viduspunktā uzrakstīja tās galos esošo skaitļu summu. Pēc tam nodzēsa skaitļus visās virsotnēs un vienas malas viduspunktā X; ieguva 1. zīmējumā parādīto ainu. Kāds skaitlis bija ierakstīts punktā X?



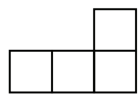
1.zīmējums

26.5.5. Konferencē piedalījās 17 zinātnieki. Katrs no viņiem konstatēja, ka konferencē vismaz 8 zinātnieki ir viņa radinieki. Pierādīt, ka visi 17 zinātnieki ir radinieki.

6.klase

26.6.1. Pieci bērni apēd 5 mandarīnus 5 minūtēs. Cik bērni apēd 50 mandarīnus 25 minūtēs? (Visi mandarīni ir vienādi, visi bērni ēd vienādi ātri.)

26.6.2. Kuba katra skaldne sadalīta 4 vienādās kvadrātiskās rūtiņās. Vai kuba virsmu var pilnībā aplīmēt ar sešām tādām figūrām, kāda parādīta 2. zīm. (katra figūra sastāv no 4 tādām pašām rūtiņām, kādās sadalītas kuba skaldnes)?



2. zīmējums

26.6.3. Kādas vērtības var pieņemt ciparu summa naturālam skaitlim, kas dalās ar 7?

26.6.4. Pa apli kaut kādā kārtībā uzrakstīti visi nenulles cipari, katrs vienu reizi. Apskatām visus deviņus trīsciparu skaitļus, kas iegūstami, nolasot trīs pulksteņa rādītāja kustības virzienā pēc kārtas uzrakstītus ciparus. Aprēķināt šo 9 skaitļu summu.

26.6.5. a) Uz riņķa līnijas atzīmēti 10 punkti. Vai tajos var ierakstīt burtus A, B, C, D, E (katrā punktā vienu burtu) tā, lai vienādi burti nekur neatrastos blakus un lai visi blakus esošo burtu pāri būtu dažādi? (Pārus, kas atšķiras tikai ar burtu kārtību, uzskatām par vienādiem).

b) Atrisināt līdzīgu uzdevumu, ja 15 punktos jāizvieto burti A, B, C, D, E, F.

7. klase

26.7.1. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu, kas dalās ar 3, var uzrakstīt, lietojot katru nenulles ciparu tieši vienu reizi?

26.7.2. Rindā stāv n dažāda auguma skolnieki. Pats kreisais no tiem ir īsāks par pašu labējo. Vai noteikti atradīsies tāds skolnieks, kura kaimiņš pa kreisi īsāks nekā viņa kaimiņš pa labi? Atrisināt uzdevumu, ja a) n=10, b) n=11.

26.7.3. Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi un a+b=c+d. Pierādīt, ka skaitli $a^2+b^2+c^2+d^2$ var izsacīt kā triju veselu skaitļu kvadrātu summu.

26.7.4. Dots, ka ΔABC ir vienādmalu. Uz malas BC ņemts punkts M, kas nav ΔABC virsotne. Taisnes, kas caur M vilktas paralēli AB un AC, krusto malas AC un AB atbilstoši punktos E un F. Dots, ka K un L ir atbilstoši BE un CF viduspunkti. Pierādīt, ka ΔMKL ir vienādmalu.

26.7.5. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienu masu, bet viena - ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 2 svēršanu palīdzību noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām? (Pašu atšķirīgo monētu atrast nav nepieciešams).

8. klase

26.8.1. Dots, ka $a+b+c=0$ un $a \neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izsacīt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.
26.8.2. Dots, ka ΔABC ir vienādsānu, AB=BC. Uz malas AC ņemts punkts M, kas nesakrīt ne ar A, ne ar C. Caur M vilkta taisne t, kas perpendikulāra AC; tā krusto taisni AB punktā X un taisni BC – punktā Y. Pierādīt, ka lieluma MX+MY vērtība nav atkarīga no punkta M izvēles uz AC.
26.8.3. Jānis raksta uz tāfeles skaitļus. Pirmais skaitlis ir 23, katrs nākošais ir divas reizes lielāks par iepriekšējo. (Tātad pirmie uzrakstītie skaitļi ir 23; 46; 92; 184;...). Vai starp Jāņa uzrakstītajiem skaitļiem atradīsies divi tādi skaitļi, kuru pirmie cipari ir vienādi, otrie – arī vienādi, priekšpēdējie – arī vienādi un pēdējie – arī vienādi? (Uzskatām, ka Jānis turpina rakstīšanu neierobežoti ilgi).
26.8.4. Rindā kaut kādā kārtībā jāizraksta naturālie skaitļi no 1 līdz 13, katrs tieši vienu reizi. Zināms, ka pirmajam skaitlim jābūt 13, otrajam jābūt 1 un katram skaitlim, sākot ar otro, jābūt visu pirms tā uzrakstīto skaitļu summas dalītājam. Kuru skaitli var rakstīt kā trešo?
26.8.5. Uz lapas rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no l līdz 20:
1 2 3 4 ... 19 20.
Divi spēlētāji pēc kārtas ieraksta pa vienai "+", "–", vai "×" zīmei jebkurā vēl brīvā atstarpē starp blakus uzrakstītiem skaitļiem. Spēle beidzas, kad ierakstītas visas 19 zīmes. Pierādīt, ka spēlētājs, kas izdara pirmo gājienu, var panākt, lai iegūtās aritmētiskās izteiksmes vērtība būtu pāra skaitlis.

9.klase

26.9.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

26.9.2. Dots, ka k – naturāls skaitlis. Pierādīt:
a) ja k=m+2mn+n, kur m un n – naturāli skaitļi, tad 2k+1 nav pirmskaitlis,
b) ja 2k+1 nav pirmskaitlis, tad eksistē tādi naturāli skaitļi m un n, ka k=m+2mn+n.
26.9.3. Punkts M ir paralelograma ABCD malas AD viduspunkts. Punkts K ir tā perpendikula pamats, kas no B novilkts pret taisni CM. Pierādīt, ka AB=AK.
26.9.4. Uz riņķa līnijas atzīmēti n punkti, n>3. Pakāpeniski novelk pa vienam nogrieznim, kas savieno divus no dotajiem punktiem, pie tam neviens no jauna novilkts nogrieznis nekrusto nevienu no iepriekšējiem. Pirmo novilkto nogriezni krāso baltu, otro – sarkanu, trešo – baltu, ceturto – sarkanu, utt. Nogriežņus turpina vilkt, kamēr vien tas iespējams; vilkšanas secība var būt patvaļīga. Kādā krāsā būs pēdējais novilktais nogrieznis?
26.9.5. Vairākās kaudzes kopā ir n konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 2 kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums). Vai taisnība, ka konfektes var apvienot visas vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja a) n=64, b) n=100?

Latvijas 27. atklātā matemātikas olimpiāde

5.klase

27.5.1. Cik no 1 līdz 2000 ieskaitot ir tādu naturālu skaitļu, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 5?

27.5.2. Atrast, kādi cipari saskaitīšanas piemērā aizstāti ar burtiem, ja vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi – ar dažādiem:

$$\begin{array}{r} AUDI \\ AUD \\ +\ \ AU \\ A \\ \hline 4\,3\,2\,1 \end{array}$$

27.5.3. Pasaku mežā dzīvoja triju ķildīgu cilšu rūķīši: votivapas, šillišallas un pukkas. Sākot ar pirmdienas rītu, katru dienu notika sekojošais:

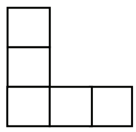
a) brokastu laikā katrs mežā palikušais votivapa padzina no meža vienu šillišallu (katrs citu),

b) pusdienlaikā katrs mežā vēl palikušais pukka padzina no meža vienu votivapu (katrs citu),

c) vakariņu laikā katrs mežā vēl palikušais šillišalla padzina no meža vienu pukku (katrs citu).

Ceturtdien pēc vakariņām mežā palika tikai viens rūķītis. Cik katras cilts rūķīšu bija mežā pirmdien pirms brokastīm?

27.5.4. Trīsdesmit zēni nostājušies taisnstūrī piecās rindās un sešās kolonnās. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Jāni, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Jāni, nav īsāks par viņu. Tas pats paliek spēkā, ja vārdu "Jānis" aizstāj ar vārdu "Andris". Pierādiet, ka Jānis un Andris ir vienāda auguma.



3. zīmējums

27.5.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet par rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 3. zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?

6. klase

27.6.1. Cik nepāra ciparu uzrakstīts, ja uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100 ieskaitot, katrs vienu reizi?

27.6.2. Kādas vērtības var pieņemt ciparu summa naturālam skaitlim, kas dalās ar 7?

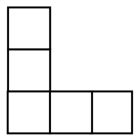
27.6.3. Parlamentā ir 100 deputāti. Tajā nodibinātas 17 komisijas (katrs deputāts var piedalīties vairākās komisijās). Lai novērstu grūtības balsošanā, katrā komisijā ir nepāra skaits locekļu. Pierādīt: vismaz viens deputāts ir iesaistījies pāra skaitā komisiju.

27.6.4. Kuba virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 8, katrs vienu reizi. Visās skaldnēs ierakstīto 4 skaitļu summas ir vienādas.

a) atrodiet kaut vienu skaitļu izvietojumu ar šo īpašību,

b) atrodiet trīs dažādus skaitļu izvietojumus ar šo īpašību.

(Divi izvietojumi skaitās dažādi, ja var atrast divus skaitļus, kas vienā izvietojumā atrodas uz vienas šķautnes, bet otrā – ne).



4. zīmējums

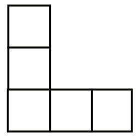
27.6.5. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 4.zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?

7. klase

27.7.1. Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi un ab=cd. Pierādīt, ka skaitli $a^2+b^2+c^2+d^2$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu. Vai to noteikti var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu?

27.7.2. Atrast mazāko naturālo skaitli, kam visi cipari vienādi un kas dalās ar 49.

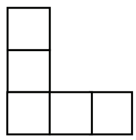
27.7.3. Dots, ka ΔABC ir vienādmalu. Uz malas BC ņemts punkts M, kas nav ΔABC virsotne. Taisnes, kas caur M vilktas paralēli AB un AC, krusto malas AC un AB atbilstoši punktos E un F. Dots, ka K un L ir atbilstoši BE un CF viduspunkti. Pierādīt, ka ΔMKL ir vienādmalu.
27.7.4. Vai naturālos skaitļus a) no 1 līdz 12 ieskaitot, b) no 1 līdz 50 ieskaitot var tā sadalīt pa pāriem, lai visas pāros esošās skaitļu summas būtu dažādas un katra no tām būtu pirmskaitlis? (Piemēram, skaitļus no 1 līdz 6 varētu sadalīt tā: 1+2=3, 3+4=7, 5+6=11).
27.7.5. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu figūru, kas visas vienādas ar 5.zīm. redzamo, var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas nevienu citu tādu figūru izgriezt vairs nevarētu? Griezumi pieļaujami tikai pa rūtiņu robežām.



5. zīmējums

8. klase

27.8.1. Dots, ka a+b+c=0 un $a \neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izsacīt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.
27.8.2. a) Vai eksistē tāds ΔABC, ka $AB = 2\cdot AC$ un $\angle CAB = 2\cdot\angle ABC$?
b) Trijstūrī ABC zināms, ka $AB = 2\cdot AC$ un $\angle CAB = 2\cdot\angle ABC$. Aprēķināt $\angle ACB$.
27.8.3. Uz katras no vairākām kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi); uz visām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa ir 100. Vai noteikti var atrast tādas kartītes (varbūt vienu pašu), uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 50, ja kartīšu skaits ir a) 50, b) 51?
27.8.4. Riņķa līnija ar 2000 punktiem sadalīta 2000 vienādos lokos. Puse no dalījuma punktiem ir balti, puse - sarkani. Novilktas visas hordas, kas savieno divus dalījuma punktus. Pierādīt: to hordu garumu summa, kuru abi gali ir balti, ir vienāda ar to hordu garumu summu, kam abi gali ir sarkani.
27.8.5. Kvadrāts sastāv no 6 x 6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet par rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 6.zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?



6. zīmējums

9. klase

27.9.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

27.9.2. Vai a) skaitli 2, b) skaitli $\frac{1}{8}$ var izsacīt kā četriem dažādiem naturālu skaitļu kvadrātiem apgriezto lielumu summu?
27.9.3. Caur taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru novilktas taisnes paralēli tā malām. Šīs taisnes sadala katru no trijstūra malām trīs nogriežņos. Pierādīt, ka hipotenūzas vidējā nogriežņa garums vienāds ar katešu vidējo nogriežņu garumu summu.
27.9.4. Apskatām pirmos n naturālos skaitļus. No tiem jāizvēlas divus tā, lai to reizinājums būtu vienāds ar visu pārējo skaitļu summu. Vai tas ir iespējams, ja a) n=10, b) n=15 ?
27.9.5. Karnevāla zālē katras divas lampas savienotas ar baltu vai sarkanu vītni (tikai vienu!). Pierādīt, ka zirneklītis var izvēlēties vienu no šīm krāsām tā, ka, rāpojot tikai pa izvēlētās krāsas vītnēm, viņš var nokļūt no jebkuras lampas uz jebkuru citu, pa ceļam apmeklējot augstākais 3 no pārējām lampām.

Latvijas 28. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

28.5.1. Andrim ir daži ozola klucīši, daži liepas klucīši, daži dzelzs klucīši un viens bronzas klucītis. Tieši 6 klucīši nav ozola; tieši 7 klucīši nav dzelzs; tieši 3 klucīši nav koka. Cik ir ozola klucīšu?

28.5.2. Pareizā vienādībā $4 \cdot 4 = 16$ var katru kreisās puses ciparu izmainīt tieši par 1 un atkal iegūt pareizu vienādību: $5 \cdot 5 = 25$.

a) atrodiet kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un trīsciparu skaitli,

b) atrodiet kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un divciparu skaitli, pie tam sākotnējā vienādībā ir vismaz 4 dažādi cipari.

28.5.3. Trīsdesmit zēni nostājušies taisnstūrī piecās rindās un sešās kolonnās. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Jāni, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Jāni, nav īsāks par viņu. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Andri, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Andri, nav īsāks par viņu. Pierādiet, ka Jānis un Andris ir vienāda auguma.

28.5.4. Ir 8 kartiņas. Uz katras no tām uzrakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 8 (uz katras kartiņas cits skaitlis). Andris un Bruno pēc kārtas ņem pa vienai kartiņai; pirmais ņem Andris. Andris grib, lai tad, kad visas kartiņas būs paņemtas, uz viņa paņemtajām četrām kartiņām uzrakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis. Vai viņš to noteikti var panākt, pat ja Bruno centīsies viņam traucēt?

28.5.5. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Dažās rūtiņās novilkts pa vienai diagonālei. Nekādām divām novilktajām diagonālēm nav kopīga galapunkta. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto diagonāļu skaits?

6. klase

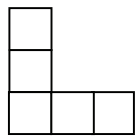
28.6.1. Kuri piecciparu skaitļi apmierina īpašību: katrs cipars (izņemot pēdējo) ir lielāks par visu tam sekojošo ciparu summu?

28.6.2. Sauksim naturālu skaitli par īpašu, ja tas dalās ar visu to savu ciparu reizinājumu, kuri nav 0. (Par viencipara skaitļa ciparu reizinājumu sauc tā vienīgo ciparu.) Piemēram, skaitļi 7 un 102 ir īpaši, bet skaitlis 77 – nav.

a) vai eksistē 12 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kas visi ir īpaši?

b) vai eksistē 14 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kas visi ir īpaši?

28.6.3. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām. Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 7. zīm. attēlotā figūra (tās var būt pagrieztas arī citādi)?



7. zīmējums

28.6.4. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 123. Andris un Pēteris pēc kārtas izdara pa vienam gājienam; pirmais iet Andris. Andris ar katru savu gājienu vai nu nedara neko, vai arī samaina uz tāfeles esošā skaitļa ciparus vietām, uzraksta jauniegūto skaitli un nodzēš iepriekšējo. (Ja viens vai vairāki cipari ir nulles, viņš arī drīkst tās novietot skaitļa sākumā un nodzēst, tādējādi samazinot skaitļa ciparu skaitu; piemēram, no 100 viņš drīkst iegūt 001 jeb 1.) Pēteris ar savu gājienu pieskaita uz tāfeles esošajam skaitlim 102, uzraksta iegūto summu un nodzēš iepriekšējo skaitli. Vai Andris var panākt, lai uz tāfeles nekad neparādītos četrciparu skaitlis?

28.6.5. Autobusā brauca 60 skolēni. Lai kurus 10 skolēnus no tiem izvēlētos, vismaz 3 no izvēlētajiem mācās vienā skolā. Pierādīt, ka vismaz 15 no autobusā braucošajiem skolēniem mācās vienā skolā.

7. klase

28.7.1. Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi, ab=cd. Pierādīt, ka skaitli $a^2+b^2+c^2+d^2$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu. Vai to noteikti var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu?

28.7.2. Naturālu skaitli sauc par simetrisku, ja tā pēdējais cipars nav 0 un, uzrakstot tā ciparus apgrieztā secībā, skaitlis nemainās. Piemēram, 1221 ir simetrisks skaitlis, bet 1231 – nav.

a) pierādiet: ja simetrisks sešciparu skaitlis dalās ar 13, tad tas dalās arī ar 7,

b) vai taisnība, ka katrs simetrisks sešciparu skaitlis, kas dalās ar 7, dalās arī ar 13?

28.7.3. Trijstūrī ABC zināms, ka AB=2 cm, AC=3 cm, $\angle BAC = 60^o$ un M ir malas AB viduspunkts. Pierādīt, ka CM=CB.

28.7.4. Uz riņķa līnijas atzīmēti 6 dažādi punkti A; B; C; D; E; F un novilkti taisnes nogriežņi AB; BC; CD; DE; EF; FA. Kāds lielākais krustpunktu skaits var rasties?

28.7.5. Uz pieņemšanu pie Šerloka Holmsa atnācis Puaro un vēl 99 citi viesi; Holmss nepazīst nevienu atnācēju. Puaro zina, kā sauc jebkuru no pārējiem viesiem, bet neviens no pārējiem viesiem nezina, kā sauc Puaro. Holmsam ir atļauts pieiet pie jebkura viesa, norādīt tam uz jebkuru citu viesi un jautāt: "Vai jūs zināt, kā viņu sauc?" Visas atbildes ir patiesas. Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Holmss garantēti var noskaidrot, kurš no viesiem ir Puaro?

8. klase

28.8.1. Dots, ka a+b+c=0 un x+y+z=0. Pierādīt, ka $x^2bc + y^2ac + z^2ab \le 0$.

28.8.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC pastāv sakarība $\angle BAC = 3 \cdot \angle ABC$. Pierādīt, ka ΔABC var sagriezt 3 vienādsānu trijstūros tā, ka visas 6 to sānu malas vienādas savā starpā.

28.8.3. Andrim vajadzēja sareizināt divus trīsciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais sešciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu sešciparu skaitli Andris uzrakstīja?

28.8.4. Riņķa līnija ar 2000 punktiem sadalīta 2000 vienādos lokos. Puse no dalījuma punktiem ir balti, puse – sarkani. Novilktas visas hordas, kas savieno divus dalījuma punktus. Pierādīt: to hordu garumu summa, kam abi gali ir balti, ir vienāda ar to hordu garumu summu, kam abi gali ir sarkani.

28.8.5. Ap apaļu galdu sēž n cilvēki. Katram no viņiem starp klātesošajiem ir tieši 2 draugi, un tie sēž viens otram blakus. Nav tādu divu cilvēku, kam abiem būtu vieni un tie paši divi draugi. Vai tas ir iespējams, ja a) n=12, b) n=9?

Piezīme: ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A.

9. klase

28.9.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

28.9.2. Pierādīt: katru izliektu četrstūri var sagriezt 5 daļās, no kurām iespējams izveidot divus paralelogramus tā, ka nekādas divas daļas nepārklājas.

28.9.3. Vai eksistē četrstūris ar īpašību: jebkuru tā virsotni var pārvietot uz citu vietu (pārējo 3 virsotņu stāvokli nemainot) tā, ka jauniegūtais četrstūris vienāds ar sākotnējo?

28.9.4. Dots, ka x, y, z – naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem xy–z, xz–y un yz–x dalās ar 3. Pierādiet, ka $x^2+y^2+z^2$ dalās ar 3.

28.9.5. Matemātikas pulciņā piedalās 8 skolēni. Uz mājām tika uzdoti 8 uzdevumi (visiem skolēniem vieni un tie paši.) Ir zināms: katru uzdevumu atrisināja tieši 5 skolēni. Pierādīt, ka var izvēlēties 2 skolēnus tā, ka katru uzdevumu atrisinājis vismaz viens no viņiem abiem.

Latvijas 29. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

29.5.1. Sauksim naturālu skaitli par interesantu, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars vienāds ar visu citu ciparu summu.

a) kāds ir mazākais interesantais četrciparu skaitlis?

b) kāds ir lielākais iespējamais interesantais skaitlis?

29.5.2. Uz galda atrodas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka piecas no tām sver vienādi, bet sestā – vai nu tāpat, vai vairāk nekā katra no pārējām piecām. Mūsu rīcībā ir svari, uz kuriem var uzlikt jebkuru daudzumu monētu un noskaidrot to kopējo svaru. Kā ar divām svēršanām noskaidrot, cik sver katra no tām monētām, kuru svari vienādi savā starpā?

29.5.3. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Dažās rūtiņās novilkts pa vienai diagonālei. Nekādām divām novilktajām diagonālēm nav kopīga galapunkta. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto diagonāļu skaits?

29.5.4. Taisnstūris sastāv no 8×10 rūtiņām. Tajā jāizmitina 2 suņi, daži kaķi un daži jēri. Katram kaķim dzīvei vajag vienu rūtiņu, katram sunim dzīvei vajag 2×2 rūtiņu kvadrātu. Katram jēram dzīvei vajag 10 rūtiņu lielu patvaļīgas formas apgabalu. Neviena suņa mītne ne ar malām, ne stūriem nedrīkst saskarties ne ar vienu jēra mītni. Kāds ir lielākais izvietojamais jēru daudzums?

29.5.5. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis n ar īpašību: skaitļi n un 2n pa abiem satur katru ciparu tieši vienu reizi?

6. klase

29.6.1. Šodien plkst. 12^{00} divi pulksteņi ar parastu ciparnīcu rādīja pareizu laiku. Pirmais pulkstenis katru dienu steidzas par 4 minūtēm; otrais pulkstenis katru dienu atpaliek par 8 minūtēm. Pēc cik dienām pirmo reizi plkst. 12^{00} abi pulksteņi atkal rādīs pareizu laiku?

29.6.2. Uzzīmējiet

a) četrus trijstūrus,

b) četrus četrstūrus,

c) četrus vienādus sešstūrus, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām

tā, lai katrai figūrai būtu vismaz 1 mm gara kopēja robeža ar trim pārējām.

29.6.3. Autobusā brauca 60 skolēni. Lai kurus 5 skolēnus no tiem izvēlētos, vismaz 3 no izvēlētajiem mācās vienā skolā. Pierādīt, ka vismaz 30 no autobusā braucošajiem mācās vienā skolā.

29.6.4. Kvadrātā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, ierakstīti visi naturālie skaitļi no 5 līdz 20 (skat. 8. zīm., kur vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi – ar dažādiem). Bez tam visās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas. Kurš cipars, ar kuru burtu aizstāts?

ZK	B	ZF	ZZ
G	ND	C	ZA
ZB	K	ZC	ZN
ZD	ZG	F	ZE

8. zīmējums

29.6.5. Karnevāla zālē karājas 10 lampas. Andrim dažas no tām jāsavieno ar vītnēm tā, lai katra vītne savienotu tieši 2 lampas un no katras lampas "izietu" tieši 3 vītnes. Jānim pēc tam būs jānokrāso katra vītne balta, zaļa vai sarkana. Vai, neko nezinot par Jāņa nodomiem, Andris var panākt, ka vismaz no vienas lampas noteikti "iziet" vismaz divas vienādi nokrāsotas vītnes?

7. klase

29.7.1. Vai eksistē tādi A un B, kas var būt gan polinomi, gan skaitļi, ka visām x vērtībām pastāv vienādība

1) $A \cdot (x-1) + B \cdot (x^2+1) = 4$?

2) $A \cdot (x-1) + B \cdot (x^2-1) = 4$?

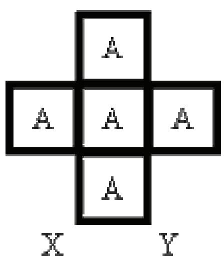
29.7.2. Trijstūrī ABC punkti K un M atrodas uz malas AC. Pie tam M ir AC viduspunkts. Ir zināms, ka BM=3, AK=1, MC=2 un $\angle BMC = 120^{\circ}$. Pierādīt, ka AB=BK.
29.7.3. Plaknē doti 6 punkti. Daži no tiem savienoti ar taisnes nogriežņiem. No katra punkta iziet vismaz 3 nogriežņi. Pierādīt, ka no novilktajiem nogriežņiem var izvēlēties 3 tādus, kam visi 6 galapunkti ir dažādi.
29.7.4. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 8 ieskaitot. Nedrīkst rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kaut viens jau uzrakstīts skaitlis. Tas, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Parādiet, kā tas, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt.
29.7.5. Kādu lielāko daudzumu dažādu naturālu skaitļu, kas nepārsniedz 100, var izvēlēties tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu starpība nebūtu ne 3, ne 4, ne 7?

8. klase

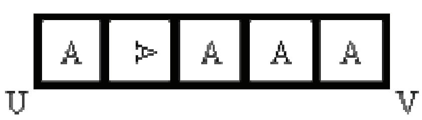
29.8.1. Vienādojumam $x^2 - |p|x + |q| = 0$ ir 2 dažādas saknes. Cik dažādu sakņu var būt vienādojumam $x^4 - |p|x^2 + |q| = 0$?
29.8.2. Andrim vajadzēja sareizināt divus dažādus divciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais četrciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu četrciparu skaitli Andris uzrakstīja?
29.8.3. Par Fibonači skaitļiem sauc skaitļus 1; 2; 3; 5; 8; … (katru nākošo iegūst, saskaitot divus iepriekšējos). Vai var pastāvēt vienādība a+b=c+d, ja a, b, c, d ir dažādi Fibonači skaitļi?
29.8.4. Izliektā piecstūrī ABCDE zināms, ka $\angle A = \angle C = \angle E = 90^{\circ}$, AB=BC un CD=DE. Aprēķināt $\angle ACE$.
29.8.5. Uz katras no divām papīra lapām uzrakstīti pa n naturāliem skaitļiem; visi 2n skaitļi ir dažādi. Katras lapas otrā pusē uzrakstīja visas summas, kuras iegūst, saskaitot uz šīs lapas sākotnēji uzrakstītos skaitļus pa pāriem (nevienu skaitli pašu ar sevi nesaskaitīja). Pirmās lapas otrajā pusē ieguva precīzi tādus pašus skaitļus kā otrās lapas otrajā pusē. Vai tas ir iespējams, ja
a) n=3, b) n=4, c) n=8?

9. klase

29.9.1. Dots, ka $q_1 q_2 < 0$. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ un $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ ir divas dažādas saknes.
29.9.2. Pierādīt, ka katru trijstūri var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros.
29.9.3. Dots, ka x, y, z – naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem xy–z, xz–y un yz–3 dalās ar 3. Pierādīt, ka $x^2+y^2+z^2$ dalās ar 3.
29.9.4. Pieciem vienādiem kubiem katram uz vienas skaldnes uzrakstīts burts A. Kubi sākotnēji novietoti uz līdzena galda tā, kā parādīts 9. zīm. (skats no augšas). Kubus var pārvietot, vienīgi pārveļot pāri kādai no šķautnēm, ar kurām tie pieskaras galda virsmai. Pēc vairākām pārvelšanām kubi ieņem tādu stāvokli, kāds parādīts 10. zīm. (nogriežņi XY un UV ir paralēli savā starpā). Kurā vietā šajā rindā atrodas tas kubs, kas sākumā atradās centrā?



9. zīmējums



10. zīmējums

29.9.5. Ap apaļu galdu sēž n rūķīši, kam pēc kārtas piešķirti numuri 1; 2; …; n. Sākumā pirmajam rūķītim ir par vienu dālderi vairāk nekā otrajam, otrajam – par vienu dālderi vairāk nekā trešajam, …, (n–1)-am – par vienu dālderi vairāk nekā n-tajam; katram ir vismaz viens dālderis.
Pirmais rūķītis iedod 1 dālderi otrajam. Pēc tam otrais iedod 2 dālderus trešajam. Pēc tam trešais iedod 3 dālderus ceturtajam utt. (**Katrā** nākošajā reizē tiek dots par vienu dālderi vairāk nekā iepriekšējā.) Tā turpina, kamēr iespējams (varbūt "apriņķojot" galdu vairāk nekā vienu reizi). Kad process beidzās, izrādījās, ka vienam no rūķīšiem bija tieši 6 reizes vairāk naudas nekā vienam no viņa kaimiņiem. Cik bija rūķīšu un cik naudas sākumā viņiem bija? (Dālderi sīkāk nedalās.)

Latvijas 30. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

30.5.1. Sauksim naturālu skaitli par interesantu, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars par 1 mazāks nekā visu citu ciparu summa.

a) kāds ir mazākais interesantais četrciparu skaitlis?

b) kāds ir lielākais interesantais skaitlis?

30.5.2. Uz galda atrodas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir un, ja tā ir, tad vai tā vieglāka vai smagāka par citām?

30.5.3. No 10×10 rūtiņu liela kvadrāta izgriezts centrālais 8×8 rūtiņu kvadrāts. Sagrieziet atlikušo "rāmi" iespējami mazā skaitā gabalu, lai no tiem varētu salikt vienu kvadrātu bez caurumiem un pārklāšanās. (Griezumiem jāiet pa rūtiņu robežām; **nav jāpierāda**, ka Jūsu iegūtais gabalu skaits ir mazākais iespējamais).

30.5.4. Vai kvadrātā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, var katrā rūtiņā ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 16 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai nekādi divi skaitļi, kas ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu, abi vienlaicīgi nedalītos ne ar vienu citu naturālu skaitli kā 1?

30.5.5. Kastē atrodas 10 baltas, 12 sarkanas un 16 zaļas lodītes. Ar vienu gājienu no kastes var izņemt divas dažādu krāsu lodītes un ielikt kastē vienu trešās krāsas lodīti. Vai var panākt, lai kastē paliek tikai viena lodīte? Vai to var panākt, ja sākotnējie lodīšu daudzumi ir 10, 12 un 15?

6. klase

30.6.1. Šodien pulkst. 12^{00} divi pulksteņi ar parastu ciparnīcu rādīja pareizu laiku. Pirmais pulkstenis katru dienu steidzas par 4 minūtēm, otrais pulkstenis katru dienu atpaliek par 6 minūtēm. Pēc cik dienām pirmo reizi pulkst. 12^{00} abi pulksteņi atkal rādīs pareizu laiku?

30.6.2. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām; viena stūra rūtiņa izgriezta. Rūtiņas malas garums ir 1. Atlikušo daļu jāsadala taisnstūros ar izmēriem 1×2 tā, lai pusei no tiem garākā mala ietu vienā virzienā, bet pusei – otrā. Vai to var izdarīt, ja a) n=5, b) n=7?

30.6.3. Vai var rindā izrakstīt divus ciparus 1, divus ciparus 2, ..., divus ciparus 5 tā, lai katrs izrakstītais viencipara skaitlis, izņemot pirmo un pēdējo, būtu vienāds ar savu abu kaimiņu summu vai starpību?

30.6.4. Šaha turnīrā katrs spēlētājs ar katru citu spēlēja vienu reizi. Par uzvaru iegūst 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu – 0 punktus. Jānis, Pēteris, Andris un Juris ieguva attiecīgi $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 3 un $1\frac{1}{2}$ punktus; neviens no citiem spēlētājiem neieguva vairāk punktu nekā Juris. Cik bija citu spēlētāju un cik punktus viņi ieguva?

30.6.5. Doti 4 atsvari. Katram no tiem masa ir 10 g vai 11g. Doti arī svari, kas rāda uz tiem uzlikto atsvaru kopējo masu. Vai ar 3 svēršanām var noteikt katra atsvara masu?

7. klase

30.7.1. Dots, ka $|x + y| + |x - y| = 10$. Kāda ir lielākā iespējamā x vērtība?

30.7.2. Trijstūri krusto 4 taisnes. Vai var gadīties, ka trijstūris sadalās 5 trijstūros, 3 četrstūros, 2 piecstūros un 1 sešstūrī?

Vai var gadīties, ka sadalījumā iegūto trijstūru ir par vienu mazāk, četrstūru – par vienu vairāk, bet piecstūru un sešstūru daudzumi ir tādi paši, kā minēts iepriekš?

30.7.3. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 9 ieskaitot. Nedrīkst rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kaut viens jau uzrakstīts skaitlis. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Parādiet, kā tas, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt.
30.7.4. Izliektā piecstūrī ABCDE punkti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ir attiecīgi malu CD, DE, EA, AB, BC viduspunkti. Dots, ka $AA_1 \perp CD$, $BB_1 \perp DE$, $CC_1 \perp EA$ un $DD_1 \perp AB$. Pierādiet, ka $EE_1 \perp BC$.
30.7.5. Uz tāfeles pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot. Ar vienu gājienu var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt $\left|a^2 - b^2\right|$. Pēc n–1 gājiena uz tāfeles paliek viens skaitlis. Vai tas var būt 0, ja a) n=8, b) n=9?

8. klase

30.8.1. Vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$, $x^2+p_2x+q_2=0$ un $x^2+p_3x+q_3=0$ ir attiecīgi saknes x_0 un x_1, x_0 un x_2, x_0 un x_3. Izteikt vienādojuma $x^2 + \frac{p_1+p_2+p_3}{3}x + \frac{q_1+q_2+q_3}{3} = 0$ saknes ar x_0, x_1, x_2 un x_3, nelietojot kvadrātsaknes zīmi.
30.8.2. Andrim vajadzēja sareizināt divus dažādus pozitīvus trīsciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais sešciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu sešciparu skaitli Andris uzrakstīja?
30.8.3. Kādā lielākajā daudzumā dažādu naturālu saskaitāmo, kas visi lielāki par 1, var sadalīt skaitli 56 tā, lai katru divu saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs būtu 1?
30.8.4. Andrim un Jurim iedots pa papīra kvadrātam ar izmēriem 1 m × 1 m. Katrs no viņiem savā kvadrātā novilka vairākas līnijas, sadalot to daļās; katra daļa ir taisnstūris ar izmēriem $4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ vai $3\text{ cm} \times 6\text{ cm}$.
Pierādiet, ka Andra novilkto līniju kopgarums vienāds ar Jura novilkto līniju kopgarumu. (Tika novilktas **tikai** līnijas, kas dala kvadrātus taisnstūros.)
30.8.5. Uz katras no divām lapām jāuzraksta pa n veseliem pozitīviem skaitļiem. Visiem 2n uzrakstītajiem skaitļiem jābūt dažādiem. Pie tam uz lapām uzrakstīto skaitļu summām jābūt vienādām savā starpā, un uzrakstīto skaitļu kvadrātu summām arī jābūt vienādām savā starpā.
Vai tas iespējams, ja a) n=3, b) n=4, c) n=2003?

9. klase

30.9.1. Dots, ka $q_1q_2q_3 < 0$. Pierādiet, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$, $x^2+p_2x+q_2=0$ un $x^2+p_3x+q_3=0$ ir divas dažādas saknes.
30.9.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var tajās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai skaitļu summas visās rindās un kolonnās būtu dažādas un visas dalītos ar a) 4, b) 8?
30.9.3. Noskaidrot, kādiem dažādiem pirmskaitļiem p_1, p_2, ..., p_n pastāv īpašība: $p_1p_2p_3...p_n$ dalās ar $(p_1-1)(p_2-1)...(p_n-1)$.
30.9.4. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa centrs ir I. Dots, ka CA+AI=CB. Pierādīt, ka $\angle BAC = 2 \cdot \angle CBA$.
30.9.5. Uz galda atrodas k konfektes. Andris un Juris pamīšus izdara gājienus: Andris – pirmo, trešo, piekto, ..., Juris – otro, ceturto, sesto, ... Ar n-to gājienu (n=1, 2, 3, ...) jāapēd vismaz viena, bet ne vairāk par n konfektēm. Tas, kurš apēd pēdējo konfekti, uzvar.
Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot, ja **a)** k=8, **b)** k=64?

Latvijas 31. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

31.5.1. Sauksim naturālu skaitli par interesantu, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars par 2 mazāks nekā visu citu ciparu summa.

a) kāds ir mazākais interesantais piecciparu skaitlis?

b) kāds ir lielākais interesantais skaitlis?

31.5.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 16 (visi skaitļi dažādi). Skaitļu summas rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi.
Daļa ierakstīto skaitļu parādīti 11. zīm.. Kāds skaitlis ierakstīts rūtiņā, kurā ir jautājuma zīme?

4	5	7	14
6	13	3	?
11	12	9	
10			

11. zīmējums

31.5.3. Kvadrātā, kas sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, katrā rūtiņā dzīvo pa vienam votivapam; taisnstūrī, kas sastāv no 2×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, katrā rūtiņā dzīvo pa vienam šillišallam. Rūķīši grib mainīt dzīves vietas: votivapas grib pārcelties uz taisnstūri, bet šillišallas – uz kvadrātu.

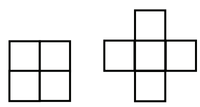
a) vai to var izdarīt tā, lai katri divi votivapas, kas kvadrātā dzīvoja blakus rūtiņās, arī taisnstūrī dzīvotu blakus rūtiņās?

b) vai to var izdarīt tā, lai katri divi šillišallas, kas taisnstūrī dzīvoja blakus rūtiņās, arī kvadrātā dzīvotu blakus rūtiņās?

Piezīme: divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

31.5.4. Vai eksistē taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sagriezt tādās daļās, kādas attēlotas 12. zīm.? Jābūt vismaz vienai katra veida daļai.

31.5.5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 10 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai pirmais skaitlis dalītos ar otro, pirmo divu skaitļu summa – ar trešo, pirmo trīs skaitļu summa – ar ceturto utt., pirmo deviņu skaitļu summa – ar desmito?
Vai līdzīgā veidā var uzrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 13 ieskaitot?

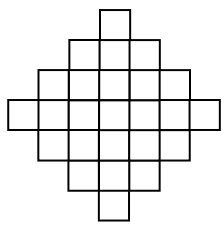


12. zīmējums

6. klase

31.6.1. Dots, ka 19 vienādas grāmatas kopā maksā 24 latus ar santīmiem, bet 18 tādas pašas grāmatas – 22 latus ar santīmiem. Cik maksā 1 grāmata?

31.6.2. Kādu lielāko daudzumu taisnstūru, kas sastāv no vismaz 2 rūtiņām katrs, var izgriezt no 13. zīm. attēlotās figūras?



13. zīmējums

31.6.3. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav ne mazāk par 1, ne vairāk par 12 sērkociņiem.
Pierādīt: ir vai nu divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņu.

31.6.4. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Kreisajā apakšējā rūtiņā atrodas figūriņa. Divi spēlētāji pēc kārtas bīda figūriņu. Ar vienu gājienu figūriņu var pabīdīt vai nu 1 rūtiņu pa labi, vai 1 rūtiņu uz augšu, vai 1 rūtiņu pa diagonāli "uz augšu un pa labi". Zaudē tas, kas nevar izdarīt gājienu.
Kas uzvar, pareizi spēlējot – pirmais vai otrais spēlētājs?

31.6.5. No sākuma uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 2; 3; 4; 5; 6 (katrs vienu reizi). Ar vienu gājienu var izvēlēties divus uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un vietā uzrakstīt skaitļus $a+b$ un $a \cdot b$. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka uz tāfeles vienlaicīgi atrodas skaitļi 21; 27; 64; 180; 225?

7. klase

31.7.1. Ja skaitļi a un b ir dažādi, tad ar max(a,b) apzīmējam lielāko no tiem.
Dots, ka skaitļi x; y; z; t; x+z; y+t visi ir dažādi un
max(x,y)+max(z,t)=max(x+z; y+t)
Pierādīt, ka (x–y)(z–t)>0.

31.7.2. Taisnleņķa trijstūrī ABC novilkts augstums CH pret hipotenūzu AB. Punkts M atrodas uz hipotenūzas un BM=BC; punkts N atrodas uz katetes AC un CN=CH. Pierādīt, ka $MN \perp AC$. (*Piezīme:* drīkst izmantot to, ka katra trijstūra iekšējo leņķu lielumu summa ir 180°.)

31.7.3. Kādam mazākajam naturālajam *n* visas daļas

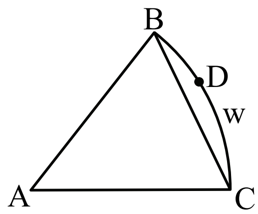
$\frac{5}{n+7}, \frac{6}{n+8}, \frac{7}{n+9}, ..., \frac{35}{n+37}, \frac{36}{n+38}$ ir nesaīsināmas?

31.7.4. Izliektā 7-stūrī ABCDEFG punkti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 ir attiecīgi malu DE, EF, FG, GA, AB, BC, CD viduspunkti. Dots, ka $AA_1 \perp DE$, $BB_1 \perp EF$, $CC_1 \perp FG$, $DD_1 \perp GA$, $EE_1 \perp AB$ un $FF_1 \perp BC$. Pierādīt, ka $GG_1 \perp CD$.

31.7.5. Kādā komisijā strādā 7 diplomāti. Katri divi savā starpā sarunājas angļu, vācu vai franču valodā (tikai vienā). Katrs diplomāts ar 2 kolēģiem sarunājas angliski, ar 2 – vāciski, ar 2 – franciski.
Pierādiet: var atrast 3 diplomātus, kas, savā starpā sazinoties, lieto visas 3 valodas.

8. klase

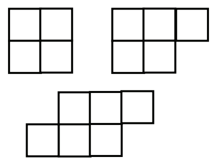
31.8.1. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt *a* un *b* ar *p* un *q* palīdzību.



14. zīmējums

31.8.2. Dots, ka ΔABC pastāv sakarības AB=AC un $\angle ABC = 60^\circ$; w ir riņķa līnijas loks, kura centrs ir A, bet galapunkti B un C (skat. 14. zīm.). Uz loka *w* izvēlēts punkts D, kas atšķiras gan no B, gan no C. Dots, ka X, Y, Z, T ir attiecīgi nogriežņu AB, BD, DC, CA viduspunkti. Pierādīt, ka $XZ \perp YT$.

31.8.3. Dots, ka A un B – naturāli divciparu skaitļi. Skaitli X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B; skaitli Y iegūst, pierakstot skaitlim B galā skaitli A. Dots, ka X–Y dalās ar 91. Pierādīt, ka A=B.


15. zīmējums

31.8.4. Kvadrāta malas garums ir 1 m. Tajā novilktas līnijas, kas to sadala vairākās daļās; katra daļa vienāda ar kādu no figūrām, kas redzamas 15. zīm. (rūtiņas malas garums ir 1 cm). Aprēķināt novilkto līniju kopējo garumu.

31.8.5. Virknē augošā kārtībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2004 ieskaitot, katrs vienu reizi. Izsvītrojam no tās skaitļus, kas atrodas 1., 4., 7., 10., ... vietās. No palikušās virknes atkal izsvītrojam skaitļus, kas tajā atrodas 1., 4., 7., ... vietās. Ar iegūto virkni rīkojamies tāpat, utt., kamēr paliek neizsvītrots viens skaitlis. Kurš tas ir?

9. klase

31.9.1. Dots, ka vienādojumam $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)=0$ eksistē atrisinājums. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$ un $x^2+p_2x+q_2=0$ arī eksistē atrisinājums.

31.9.2. Dots, ka *a* un *b* – naturāli skaitļi un *a*+*b* ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordināti dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, attālums starp kuriem ir vai nu a, vai *b*.

31.9.3. Dots, ka ABCD – kvadrāts, bet w – riņķa līnija, kas iet caur A un B; punkti C un D atrodas w iekšpusē. Stari BD un BC krusto w attiecīgi punktos E un F. Apzīmējam CF viduspunktu ar M. Pierādīt, ka $EM \perp BC$.

31.9.4. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n$+1 rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.

Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

31.9.5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta viens no skaitļiem –1; 0; 1 tā, lai n rindās un n kolonnās ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas.

Vai to var izdarīt, ja **a)** n=4; **b)** n=5?

Latvijas 32. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

32.5.1. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 16 (visi skaitļi dažādi). Skaitļu summas rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi.
Daļa ierakstīto skaitļu parādīti 16. zīm. Kāds skaitlis ierakstīts rūtiņā, kurā ir jautājuma zīme?

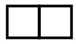
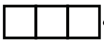
14	?		
7	3	9	
5	13	12	
4	6	11	10

16. zīmējums

32.5.2. Uz galda atrodas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir un, ja tā ir, tad vai tā vieglāka vai smagāka par citām?

32.5.3. Kvadrātiska tabula sastāv no **a)** 5×5, **b)** 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai var dažās rūtiņās ierakstīt pa vienai zvaigznītei tā, lai katrā kolonnā būtu pāra skaits zvaigznīšu, bet katrā rindiņā – nepāra skaits zvaigznīšu?

32.5.4. Ir 2005 zelta gabali. Pierādīt, ka divus no tiem var katru sadalīt divos gabalos tā, lai pēc tam visus 2007 gabalus varētu sadalīt 4 kaudzēs A, B, C, D ar īpašību: kaudze A ir tikpat vērtīga, cik kaudze B, bet kaudze C ir tikpat vērtīga, cik kaudze D. (Kaudzes vērtību nosaka tikai kopējais zelta daudzums tajā.)

32.5.5. No kvadrāta, kas sastāv no 8×8 rūtiņām, izgrieza 12 gabalus ar formu . Vai no atlikušās daļas noteikti var izgriezt gabalu ar formu ?

6. klase

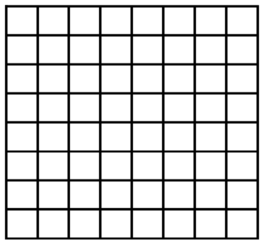
32.6.1. Kurš no skaitļiem $200420042004 \times 20052005$ un $200520052005 \times 20042004$ ir lielāks?

32.6.2. Vairākās kaudzītēs kopā ir 78 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav ne mazāk par 1, ne vairāk par 14 sērkociņiem.
Pierādīt: ir vai nu divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 15 sērkociņu.

32.6.3. Doti 4 atsvari. Katram no tiem masa ir 10g vai 11g. Doti arī svari, kas rāda uz tiem uzlikto atsvaru kopējo masu. Vai ar 3 svēršanām var noteikt katra atsvara masu?

32.6.4. Katra no monētām sver 5g vai 6g, to kopējā masa ir 600g. Pierādīt, ka monētas var sadalīt 10 kaudzēs, kuru masas visas vienādas savā starpā.

32.6.5. Režģis ar izmēriem 8×8 rūtiņas salikts no stienīšiem, kuru garumi ir naturāli skaitļi (rūtiņas malas garums ir 1, skat. 17. zīm.). Stienīši savā starpā nekrustojas. Kāds ir mazākais iespējamais tādu stienīšu daudzums, kuru garums ir 1?



17. zīmējums

7. klase

32.7.1. Trijstūrī ABC punkti K un M atrodas uz malas AC, pie tam M ir AC viduspunkts. Ir zināms, ka BM=3, AK=1, MC=2 un $\angle BMC = 120^\circ$. Pierādīt, ka AB = BK.

32.7.2. Kādam mazākajam naturālajam *n* visas daļas

$$\frac{5}{n+7}, \frac{6}{n+8}, \frac{7}{n+9}, \ldots, \frac{35}{n+37}, \frac{36}{n+38}$$ ir nesaīsināmas?

32.7.3. Pankūka no katras puses jācep 6 minūtes (varbūt ar pārtraukumiem). Uz pannas vienlaicīgi var atrasties augstākais 4 pankūkas. Kādā īsākajā laikā var no abām pusēm apcept 5 pankūkas?
Pankūku nomaiņai laiks nav jāparedz.

32.7.4. Triju veselu pozitīvu skaitļu summa ir 407. Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties šo skaitļu reizinājums?

32.7.5. Rindā izrakstīti 10 dažādi skaitļi, kas visi lielāki par 0 un mazāki par 1. To skaitļu summa, kas atrodas 2., 4., 6., 8., 10. vietās, par 1 lielāka nekā to skaitļu summa, kas atrodas 1., 3., 5., 7., 9. vietās. Pierādiet: rindā var atrast tādu skaitli, kas mazāks par abiem saviem kaimiņiem.

8. klase

32.8.1. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt a un b ar p un q palīdzību.

32.8.2. Par Fibonači skaitļiem sauc skaitļus 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... (katru nākamo skaitli šajā virknē iegūst, saskaitot divus iepriekšējos).
Vai var pastāvēt vienādība $a+b=c+d$, ja a, b, c, d ir dažādi Fibonači skaitļi?

32.8.3. Kā var sadalīt naturālos skaitļus no 1 līdz 9 ieskaitot divās daļās tā, lai vienas daļas visu skaitļu summa būtu vienāda ar otras daļas visu skaitļu reizinājumu?

32.8.4. Trijstūrī ABC pastāv sakarības AC=BC un $\angle ACB = 20^\circ$. Leņķa CAB bisektrise un malas AC vidusperpendikuls krustojas punktā M. Aprēķināt
a) $\angle MCB$, **b)** $\angle MBC$.

32.8.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota vienā no n krāsām. Ir zināms: katrai rūtiņai var atrast vismaz divas kaimiņu rūtiņas, kas nokrāsotas tādā pašā krāsā kā viņa. (Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)
Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

9. klase

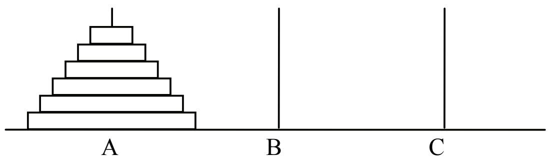
32.9.1. Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 225 un kura decimālajā pierakstā neizmanto nevienu no cipariem 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

32.9.2. Trijstūra ABC ievilktā riņķa centrs ir I. Dots, ka CA+AI=CB. Pierādīt, ka $\angle BAC = 2\cdot\angle CBA$.

32.9.3. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n+1$ rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.
Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

32.9.4. Dots, ka $x^2+yz\le 2$, $y^2+xz\le 2$ un $z^2+xy\le 2$. Atrast izteiksmes $x+y+z$ lielāko un mazāko iespējamo vērtību.

32.9.5. Doti 3 stienīši. Uz viena no tiem sākotnēji uzmaukti n dažādu izmēru diski ar caurumiem vidū tā, ka to rādiusi samazinās no lejas uz augšu; abi pārējie stienīši sākotnēji ir tukši (skat. 18. zīm., kur n=6).
Ar vienu gājienu var pārlikt augšējo disku no jebkura stienīša uz jebkuru citu, ja tikai pārliekamais disks D nav lielāks par to disku, kas atrodas pašā apakšā uz stienīša, uz kuru pārliek D.



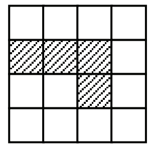
18. zīmējums

Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi diski atrastos uz stienīša C tādā pašā kārtībā, kādā tie sākotnēji atradās uz stienīša A?

Latvijas 33. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

33.5.1. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; četras no tām iekrāsotas (skat. 19. zīm.). Parādīt, ka kvadrātu var sagriezt 4 vienādās daļās tā, lai katra daļa saturētu vienu iekrāsoto rūtiņu. (Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.)
Vai šādu sagriešanu var izdarīt divos dažādos veidos tā, lai vienā sagriešanā iegūtās daļas pēc formas atšķirtos no otrā sagriešanā iegūtajām daļām?



19. zīmējums

33.5.2. Uz galda atrodas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām un sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir un, ja tā ir, tad vai tā vieglāka vai smagāka par citām?
33.5.3. Aplī sastājušies Andris, Dzintars, Gunārs, Juliata, Maija un Skaidrīte. Visi attālumi starp bērniem ir dažādi. Katrs bērns nosauc sev vistuvāk stāvošā bērna vārdu. Cik vārdi var tikt nosaukti divreiz? (Attālumus starp bērniem mēra "pa apli".)
33.5.4. Istabā atrodas 3 rūķīši: Alfa, Beta un Gamma. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo, un katrs zina visu par abiem pārējiem. Uz jautājumu: "Cik starp jums trijiem ir meļu?" viņi atbildēja šādi:
Alfa: "Viens."
Beta: "Divi."
Gamma: "Trīs."
Kuri no rūķīšiem melo, kuri – runā patiesību?
33.5.5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 14 ieskaitot var sadalīt trīs daļās tā, lai visu daļu summas būtu vienādas?
Vai to var izdarīt ar skaitļiem no 1 līdz 13 ieskaitot?

6. klase

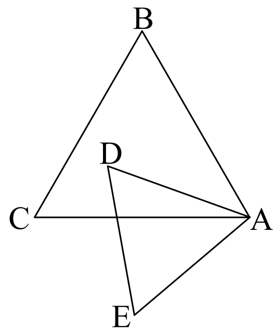
33.6.1. Trīsciparu skaitļa x simtu cipars ir a, desmitu cipars ir b un vienu cipars ir c. Pierādīt: ar 7 dalās visi tie un tikai tie skaitļi x, kuriem izteiksme $2a + 3b + c$ dalās ar 7.
33.6.2. Doti 4 atsvari. Katram no tiem masa ir 10 g vai 11g. Doti arī svari, kas rāda uz tiem uzlikto atsvaru kopējo masu. Vai ar 3 svēršanām var noteikt katra atsvara masu?
33.6.3. Katrā no 3 groziem ir gan āboli, gan bumbieri. Pierādīt: Andris var paņemt 2 grozus tā, lai tajos kopā būtu vairāk nekā puse ābolu un vairāk nekā puse bumbieru.
33.6.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu rūtiņu malu var nokrāsot, lai katrai rūtiņai būtu nokrāsotas vismaz 2 malas?
33.6.5. Kvadrāts sadalīts 10×10 vienādās kvadrātiskās rūtiņās un izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Trīsdesmit trijās baltajās rūtiņās atrodas pa dukātam. Sprīdītis staigā pa kvadrātu, ar katru soli šķērsojot divu rūtiņu kopējo malu. (Sprīdītis neiet caur rūtiņu stūri un neieiet rūtiņā, kurā jau ir bijis.) Ieraugot dukātu, viņš to paņem.
Pierādīt: ja Sprīdītis pavisam pabūs vismaz 54 rūtiņās, tad viņam būs vismaz 10 dukāti.

7. klase

33.7.1. Vilcienā Rīga–Mehiko vietas numurētas ar naturāliem skaitļiem, sākot ar 1 (numerācija ir vienota visam vilcienam, t.i., ir tikai viena vieta ar numuru 1, viena vieta ar numuru 2 utt.; numuri piešķirti virzienā no lokomotīves uz vilciena "asti"). Visos vagonos ir vienāds vietu skaits. Vietas ar numuriem 1996 un 2015 ir vienā vagonā, bet vietas ar numuriem 630 un 652 – dažādos vagonos, kas pie tam nav blakus viens otram. Cik vietu ir katrā vagonā?

33.7.2. Triju veselu pozitīvu skaitļu summa ir 407. Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties šo skaitļu reizinājums?

33.7.3. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir 60º lieli (skat. 20. zīm.). Pierādīt, ka BD=CE.



20. zīmējums

33.7.4. Radījuši Trio salu, dievi tajā nometināja 2005 princeses, 2006 bruņiniekus un 2007 pūķus. Pūķi ēd princeses; bruņinieki nogalina pūķus; princeses noved līdz bojāejai bruņiniekus. Saskaņā ar dievu ieviesto kārtību nav iespējams iznīcināt to, kurš pats iznīcinājis nepāra skaitu citu būtņu. Pašreiz Trio salā palikusi tikai viena dzīva būtne. Kas tā ir?

33.7.5. Pa apli izvietoti 24 trauki; katrā ir pa vienai konfektei. Ar vienu gājienu var paņemt vienu konfekti no jebkura trauka. Ja abos blakus esošajos traukos arī ir pa vienai konfektei, tad paņemto konfekti drīkst apēst; pretējā gadījumā tā jāieliek tajā blakus esošajā traukā, kurā konfekšu nav (jebkurā no tiem, ja tie abi ir tukši). Kādu lielāko konfekšu daudzumu var apēst?

8. klase

33.8.1. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt *a* un *b* ar *p* un *q* palīdzību.

33.8.2. Matemātikas pulciņā piedalās Andris, Dzintars, Gunārs, Juliata, Liene un Maija. Uzdevumus viņi risina grupās pa trim. Kāds mazākais skaits uzdevumu tika risināts, ja katri divi bērni kopā risināja vismaz vienu no tiem?

33.8.3. Naturāla skaitļa *x* ciparu summu apzīmēsim ar S(*x*). Pieņemsim, ka *n* – tāds naturāls skaitlis, kam vienlaicīgi izpildās īpašības S(*n*)=10 un S(5*n*)=5.

a) atrodiet kaut vienu tādu skaitli,
b) vai tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz?
c) vai kāds no tādiem skaitļiem ir nepāra?

33.8.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC uz malām AC un AB izvēlēti attiecīgi tādi punkti K un L, ka $KL \parallel BC$ un KL = KC. Uz malas BC izvēlēts tāds punkts M, ka $\angle KMB = \angle BAC$. Pierādīt, ka KM = AL.

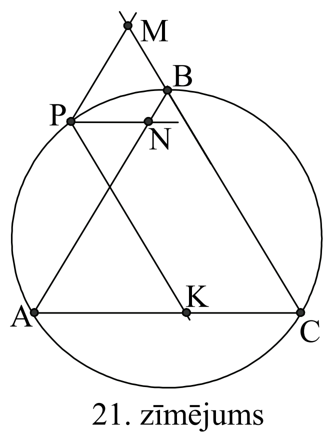
33.8.5. Kvadrāts sastāv no 33×33 kvadrātiskām rūtiņām. No šīm rūtiņām 32 ir nokrāsotas melnas, pārējās – baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties baltu rūtiņu, no kuras kaimiņu rūtiņām vismaz divas jau ir melnas, un nokrāsot arī šo rūtiņu melnu. (Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.) Vai var gadīties, ka izdodas nokrāsot melnu visu kvadrātu?
Vai tas var gadīties, ja sākotnēji melnas ir 33 rūtiņas?

9. klase

33.9.1. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

33.9.2. Dots, ka *n* – naturāls skaitlis. Katrs no 2*n*+1 rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz *n* citus rūķīšus.
Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus 2*n* citus rūķīšus.

33.9.3. Dots, ka ΔABC ir regulārs. Punkts P atrodas uz ABC apvilktās riņķa līnijas (skat. 21. zīm.). Taisnes, kas caur P vilktas paralēli AB, BC un CA, krusto atbilstoši taisnes BC, AC un AB attiecīgi punktos M, K un N. Pierādīt, ka $\angle BMN = \angle BMK$.



21. zīmējums

33.9.4. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Ir dots, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, kas atšķiras viena no otras vismaz par 5. Pierādīt, ka vienādojumam $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0$ arī ir divas saknes.

33.9.5. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var izvēlēties tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nedalītos viens ar otru un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks par 1?

IETEIKUMI
Latvijas 26. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

26.5.1. Novērtējiet, cik konfektes apēda Andris. Zināms, ka Andris apēda vairāk gan par Didzi, gan par Bruno.
26.5.2. Izdomājiet, cik šādu skaitļu ir starp 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem. Skaitļus ar dažādu ciparu skaitu var apskatīt atsevišķi.
26.5.3. Saskaitiet, cik dažādu izmēru taisnstūru ir ar attiecīgajiem perimetriem.
26.5.4. Atrodiet 2 veidus, kā ar dotajiem skaitļiem var sastādīt visu astoņstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summu.
26.5.5. Ja zinātniekam A ir radinieks zinātnieks K un arī zinātniekam B ir radinieks zinātnieks K, tad zinātnieki A un B ir radinieki. Prasīto pierādiet, pieņemot pretējo un atrodot pretrunu.

6. klase

26.6.1. Izrēķiniet, cik ilgā laikā 1 bērns apēd 1 mandarīnu.
26.6.2. Mēģiniet noklāt 3 skaldnes ar 3 figūrām.
26.6.3. Atsevišķi apskatiet pāra un nepāra ciparu summas. Veidojiet vajadzīgos skaitļus, ņemot vērā, ka 1001 dalās ar 7.
26.6.4. Atsevišķi aplūkojiet vienus, desmitus un simtus.
26.6.5.
a) Izmantojiet variantu pārlasi.
b) 1. variants. Apskatiet, cik dažādus burtu pārus var izveidot.
2. variants. Apskatiet, cik reizes katrs burts var būt uzrakstīts un kādi ir tā iespējamie kaimiņi.

7. klase

26.7.1. Izveidojiet piemēru ar 6 skaitļiem un pierādiet, ka vairāk skaitļu izveidot nevar.
26.7.2. Apskatiet gadījumus, kad n ir mazāks skaitlis. Atsevišķi pētiet gadījumus, kad n ir pāra vai nepāra skaitlis.
26.7.3. Izmantojiet divu un trīs saskaitāmo summas kvadrātu formulas. Pierādījumu veiciet, pārveidojot izteiksmi $a^2+b^2+c^2+d^2$.
26.7.4. Pierādiet, ka ΔFBM un ΔEMC ir vienādmalu trijstūri. Tālāk pierādījumā izmantojiet trijstūra pagriešanu.
26.7.5. Ar pirmo svēršanu uz katra kausa uzlieciet 6 monētas.

8. klase

26.8.1.

1. variants. Uzmanīgi salīdziniet vienādību a+b+c=0 un vienādojumu $ax^2+bx+c=0$. Kāda x vērtība ir vienādojuma sakne?
2. variants. Izsakiet a, b vai c no dotās vienādības, ievietojiet vienādojumā un sadaliet reizinātājos (izsakot c vai b, atrisināt vieglāk).
26.8.2. Tā kā MX+MY nemainās, pārvietojot punktu M, tad vispirms aplūkojiet gadījumu, kad M atrodas AC viduspunktā (un t iet caur punktu B). Izmantojiet iegūto rezultātu, lai pierādītu prasīto patvaļīgai M atrašanās vietai.
26.8.3. Apskatiet, cik veidos ir iespējams izvēlēties pirmos 2 un pēdējos 2 ciparus.

26.8.4. Vispirms pierādiet, ka visu skaitļu summa dalās ar pēdējo uzrakstīto skaitli.
26.8.5. Pierādiet: var panākt, ka visi saskaitāmie ir pāra skaitļi.

9. klase

26.9.1. Risiniet, atņemot no pirmā vienādojuma otro un iznesot pirms iekavām x–y.
26.9.2.
a) Pierādiet ievietojot.
b) Ņemiet vērā: ja nepāra skaitlis nav pirmskaitlis, tad tā reizinātāji ir nepāra skaitļi.
26.9.3. Pagariniet malu CM līdz krustpunktam ar AB.
26.9.4. Izdomājiet, kādās figūrās tiek sadalīts n-stūris, un izmantojiet iekšējo leņķu summu.
26.9.5.
a) Atbrīvojieties no kaudzītēm, kurās ir nepāra konfekšu skaits (pierādiet, ka to vienmēr varēs izdarīt), tad apvienojiet konfektes pāros.
b) Pirms pēdējās apvienošanas bija 2 kaudzītes ar 50 konfektēm katrā. Apskatiet sākotnējo sadalījumu – 5 kaudzītes ar 20 konfektēm katrā. Atrodiet īpašību, kas nemainās kaudzīšu apvienošanas rezultātā, un pierādiet, ka nevarēs iegūt 2 kaudzītes ar 50 konfektēm katrā.

Latvijas 27. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

27.5.1. Izdomājiet, cik šādu skaitļu ir starp 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem. Skaitļus ar dažādu ciparu skaitu var apskatīt atsevišķi.
27.5.2. Atrodiet prasīto ar pilnu iespējamo variantu pārlasi, sākot ar tūkstošu šķiru.
27.5.3. Izdomājiet, kurš rūķītis varēja palikt mežā vienīgais ceturtdien pēc vakariņām. Ņemot vērā uzdevuma nosacījumus, risiniet uzdevumu no beigām un soli pa solim uzziniet prasīto.
27.5.4. Apskatiet to zēnu, kas ir vienā kolonnā ar Jāni un vienā rindā ar Andri, un to, kas ir vienā rindā ar Jāni un vienā kolonnā ar Andri.
27.5.5. Izdomājiet, kāds ir lielākais iespējamais izgriežamo figūru skaits, ja kvadrāta laukums ir 8×8 rūtiņas un viena figūra aizņem 5 rūtiņas. Jāparāda piemērs, kā tas ir iespējams.

6. klase.

27.6.1. Izdomājiet, kā ērti saskaitīt uzrakstītos nepāra ciparus atsevišķi vienu un desmitu šķirā.
27.6.2. Atsevišķi apskatiet pāra un nepāra ciparu summas. Veidojiet vajadzīgos skaitļus, ņemot vērā, ka 1001 dalās ar 7.
27.6.3. Prasīto pierādiet, pieņemot pretējo un divos dažādos veidos saskaitot, cik vietas komisijās aizņem 100 deputāti.
27.6.4. Ņemot vērā, ka katrā virsotnē ierakstītais skaitlis tiek pieskaitīts trīs dažādām skaldnēm, aprēķiniet, kāda ir to skaitļu summa, kas uzrakstīta uz vienas skaldnes.
27.6.5. Lai pierādītu, ka 5 figūras izgriezt nav iespējams, iekrāsojiet kvadrāta pirmo, trešo un piekto kolonnu un spriediet par balto un iekrāsoto rūtiņu atšķirībām kvadrātā un figūrās, kas var tikt izgrieztas. Jāparāda piemērs, kā ir iespējams izgriezt 4 figūriņas.

7. klase.

27.7.1. Apskatāmā izteiksme nemainīsies, ja tai pieskaitīs un atņems vienu un to pašu skaitli. Ņemot vērā uzdevumā doto vienādību, izdomājiet, ko vajadzētu pieskaitīt un atņemt, lai pēc tam varētu izmantot summas un starpības kvadrātu formulas.

27.7.2. Izdomājiet, kā ar 2 reizinātājiem var pierakstīt jebkuru skaitli, kura visi cipari ir vienādi. Izpētiet, kad šāds skaitlis var dalīties ar 49.

27.7.3. Pierādiet, ka ΔFBM un ΔEMC ir vienādmalu trijstūri. Tālāk pierādiet, izmantojot trijstūra pagriešanu.

27.7.4.

a) Atrodiet piemēru, kad prasītais izpildās.

b) Saskaitiet, cik dažādus pirmskaitļus ir iespējams iegūt, pa pāriem saskaitot skaitļus no 1 līdz 50.

27.7.5. Izdomājiet, kāds ir lielākais iespējamais izgriežamo figūru skaits, ja kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām un viena izgriežamā figūra sastāv no 5 rūtiņām. Jāparāda piemērs.

8. klase.

27.8.1.

1. variants. Uzmanīgi salīdziniet vienādību a+b+c=0 ar vienādojumu $ax^2+bx+c=0$. Kāda x vērtība ir vienādojuma sakne?

2. variants. Izsakiet a, b vai c no dotās vienādības, ievietojiet vienādojumā un sadaliet reizinātājos (izsakot c vai b, atrisināt vieglāk).

27.8.2.

a) Atrodiet piemēru, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

b) Novelciet bisektrisi AN un augstumu NM pret malu AB. Apskatiet vienādos trijstūrus, kas radušies.

27.8.3.

a) Atrodiet pretpiemēru, kad prasītais nav iespējams.

b) Prasītais ir iespējams.

27.8.4. Apskatiet novilkto hordu galapunktu krāsas, pagriežot riņķa līniju. Atsevišķi apskatiet gadījumus, kad riņķa līniju pagriež par n=1, 2, ..., 1000 lociņiem.

27.8.5. Apskatiet, cik figūriņas var izgriezt, ņemot vērā, ka kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām un viena figūriņa aizņem 5 rūtiņas. Lai pierādītu, ka nevar izgriezt 7 figūriņas, iekrāso katru otro kvadrāta kolonnu un pēta balto un iekrāsoto rūtiņu skaita atšķirības.

9. klase.

27.9.1. Risiniet, atņemot no pirmā vienādojuma otro un iznesot pirms iekavām x–y.

27.9.2.

a) Apskatiet 4 lielāko iespējamo apgriezto skaitļu summu.

b) Prasītais ir iespējams.

27.9.3. Apskatiet paralelogramu BXOY, kur X un Y ir attiecīgie katetes un hipotenūzas krustpunkti ar novilktajām taisnēm. Papildiniet zīmējumu ar perpendikulu, kas vilkts no riņķa līnijas centra pret hipotenūzu.

27.9.4.

a) Apzīmējiet meklētos skaitļus ar x un y un, ņemot vērā, ka visu skaitļu summa mums ir zināma, pēc uzdevuma nosacījumiem sastādiet vienādojumu. Sastādīto vienādojumu sadaliet reizinātājos.

b) Līdzīgi kā a) gadījumā sastādiet vienādojumu un veiciet pilnu variantu pārlasi.

27.9.5. Izvēlieties lampu, no kuras iziet visvairāk vienas krāsas vītņu. Apskatiet iespējamos gadījumus.

Latvijas 28. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

28.5.1. Varat sākt, noskaidrojot, cik ir dzelzs klucīšu.

28.5.2. Mēģinot atrodiet prasītos piemērus.

28.5.3. Apskatiet to zēnu, kas ir vienā kolonnā ar Jāni un vienā rindā ar Andri, un to zēnu, kas ir vienā rindā ar Jāni un vienā kolonnā ar Andri.
28.5.4. Apskatiet, kāds varētu būt Andra gājiens pēc iespējamajiem Bruno gājieniem. Cik un kādas kārtis Andris var paņemt, lai uz kartiņām uzrakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis?
28.5.5. Cik virsotnes var izvēlēties, lai katrā no tām atrastos viens no galapunktiem jebkurai novelkamai diagonālei?

6. klase

28.6.1. Veiciet pilnu iespējamo variantu pārlasi, ņemot vērā uzdevumā dotos nosacījumus.
28.6.2.
a) Pārbaudiet kādi skaitļi ir īpaši, sākot ar skaitli 1.
b) Pierādiet, pieņemot pretējo un apskatot skaitli, kura pēdējais cipars ir 3.
28.6.3. Lai pierādītu, ka 5 figūras izgriezt nav iespējams, iekrāsojiet kvadrāta pirmo, trešo un piekto kolonnu un apskatiet balto un iekrāsoto rūtiņu skaita atšķirības kvadrātā un figūrās, kas var tikt izgrieztas. Jāparāda piemērs, kā ir iespējams izgriezt 4 figūriņas.
28.6.4. Izdomājiet, kādus gājienus izdarot, Andris var izveidot ciklu, kura laikā četrciparu skaitlis netiek iegūts.
28.6.5. Pierādiet, pieņemot pretējo un apskatot to skolu skaitu, no kurām ir vairāk nekā 2 skolēni.

7. klase

28.7.1. Apskatāmā izteiksme nemainīsies, ja tai pieskaitīs un atņems vienu un to pašu skaitli. Ņemot vērā uzdevumā doto vienādību, izdomājiet, ko vajadzētu pieskaitīt un atņemt, lai pēc tam varētu izmantot summas un starpības kvadrātu formulas.
28.7.2.
a) Izvēlieties patvaļīgu simetrisku sešciparu skaitli. Tā kā pats skaitlis dalās ar 13, tad arī saskaitāmo summa dalās ar 13. Izdomājiet, kā izdevīgi sadalīt skaitli saskaitāmajos.
b) Pierāda, atrodot piemēru, kad prasītais neizpildās.
28.7.3. Pagariniet trijstūra malu AB tā, lai izveidotos tāds trijstūris ADC, kas izdevīgs tālākam pierādījumam.
28.7.4. Izvēlieties vienu no novilktajiem nogriežņiem un apskatiet pārējo punktu iespējamās atrašanās vietas attiecībā pret šo nogriezni.
28.7.5. Izpētiet, kādas atbildes Holms var saņemt uz uzdotajiem jautājumiem un ko tas liecina par viesiem. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmajā daļā parāda, ka pietiek ar noteiktu skaitu jautājumu; otrajā daļā pierāda, ka ar mazāku skaitu jautājumu nepietiek.

8. klase

28.8.1. Samazina mainīgo skaitu apskatāmajā izteiksmē, izmantojot dotās vienādības, un veic pārveidojumus.
28.8.2. Ievērojiet, ka ΔABC virsotnēm nav noteikti jābūt vienādo malu kopējām virsotnēm vienādsānu trijstūros.
28.8.3. Kā Andra iegūtais sešciparu skaitlis izsakāms ar dotajiem skaitļiem?
28.8.4. Apskatiet novilkto hordu galapunktu krāsas, pagriežot riņķa līniju. Atsevišķi apskatiet gadījumus, kad riņķa līniju pagriež par n=1, 2, ..., 1000 lociņiem.
28.8.5.
a) Cilvēku draudzību attēlojiet kā hordu riņķa līnijā. Izmantojot uzdevuma nosacījumus, pētiet iespējamos hordas novietojumus.
b) Atrodiet piemēru, kā prasītais ir iespējams.

9. klase.

28.9.1. Risiniet, atņemot no pirmā vienādojuma otro un iznesot pirms iekavām x–y.
28.9.2. Savienojiet četrstūra malu viduspunktus.
28.9.3. Padomājiet par regulāru piecstūri.
28.9.4. Izsakiet $x^2+y^2+z^2$ kā tādu saskaitāmo summu, lai katrs no tiem dalītos ar 3.
28.9.5. Risiniet uzdevumu, pieņemot pretējo un apskatot, cik skolēni neatrisināja katru no uzdevumiem.

Latvijas 29. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

29.5.1.

a) Apskatiet, kad četrciparu skaitlis ir mazāks salīdzinājumā ar citiem četrciparu skaitļiem.

b) Apskatiet, cik daudz ciparu var būt skaitlī, ja tā pirmais cipars ir vienāds ar pārējo ciparu summu. Kāda var būt lielākā ciparu summa, lai izpildītos šis nosacījums?

29.5.2. Ar 2 svēršanām kaut kādā kombinācijā noteikti jānosver visas monētas. Izdomājiet, cik monētas svērt pirmajā svēršanā, cik otrajā.
29.5.3. Atrodiet tādu virsotņu grupu, kas satur vismaz vienu jebkuras diagonāles galapunktu.
29.5.4. Tā kā suņu skaits ir zināms, tad var aprēķināt, cik rūtiņu paliek kaķu un jēru izmitināšanai. Parādiet piemēru, kā izvietot atrasto lielāko jēru daudzumu, un pierādiet, ka vairāk jēru nav iespējams izmitināt.
29.5.5. Apskatiet, cik ciparu varētu būt skaitlim n un cik – skaitlim 2n. Kad piecciparu skaitlis ir mazāks salīdzinājumā ar citiem?

6. klase

29.6.1. Apskatiet katru pulksteni atsevišķi. Pēc cik ilga laika katrs no tiem atkal rādītu pareizu laiku 12^{oo}?
29.6.2. Mēģinot atrodiet vajadzīgos piemērus.
29.6.3. Izdomājiet, cik dažādu skolu skolnieki var braukt autobusā, lai izpildītos nosacījums, ka izvēloties jebkurus 5 skolēnus, vismaz 3 no tiem mācās vienā skolā.
29.6.4. Kādi cipari būs uzrakstīti visretāk (un kādi burti ir uzrakstīti visretāk)? Kāds cipars pārsvarā ir divciparu skaitļu pirmais cipars? Ņemot vērā šos jautājumus un to, ka visās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas, atrodiet pārējos ciparus.
29.6.5. Prasītais ir iespējams. Pietiek atrast vienu piemēru.

7. klase

29.7.1.

a) Jā, ir iespējams. Pietiek atrast vienu A un B vērtību piemēru.

b) Nē, nav iespējams. Pietiek atrast vienu x vērtību, ar kuru vienādība noteikti neizpildās.

29.7.2. Pagariniet malu AC līdz punktam S tā, lai iegūtais trijstūris SBM būtu vienādsānu.
29.7.3. Izvēlas divus nogriežņus AB un CD. Apskatiet visus veidus, kā atlikušie punkti var būt savienoti ar šiem nogriežņiem .
29.7.4. Pirmajā gājienā A var rakstīt 2.
29.7.5. Apskatiet, kāds ir lielākais iespējamais dažādu naturālu skaitļu skaits no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem.

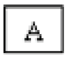
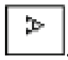
8. klase

29.8.1. Kā iespējams ceturtās pakāpes vienādojumu "pārveidot" par otrās pakāpes vienādojumu, lai, iegūstot otrās pakāpes vienādojuma atrisinājumu, varētu iegūt arī ceturtās pakāpes vienādojuma atrisinājumu?

29.8.2. Kā Andra uzrakstītais četrciparu skaitlis izsakāms ar dotajiem skaitļiem?
29.8.3. Apskatiet lielāko no skaitļiem a, b, c, d. Ņemot vērā, ka tas izsakāms kā divu par to mazāku skaitļu summa, salīdziniet lielāko ar katru no pārējiem skaitļiem.
29.8.4. Pagariniet malas BC un DC līdz taisnei AE, iegūstot trijstūri.
29.8.5.

a) Apskatiet, cik dažādas summas veidojas. Pierādiet, ka no summu vienādības seko arī skaitļu vienādība.
b) Atrodiet piemēru, kā prasīto izpildīt.
c) Atrodiet piemēru, kā prasīto izpildīt.

9. klase

29.9.1. Ko var secināt par q_1 un q_2 no $q_1q_2<0$? Un kādā gadījumā vienādojumam eksistē divas dažādas saknes?
29.9.2. Var izmantot faktu, ka taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas viduspunkts ir vienādos attālumos no trijstūra virsotnēm.
29.9.3. Izsakiet $x^2+y^2+z^2$ kā tādu saskaitāmo summu, lai katrs no tiem dalītos ar 3.
29.9.4. Noskaidrojiet gājienu skaita paritāti, kas nepieciešami, lai kubs atrastos uz tādas pašas krāsas rūtiņas un lai kubs atrastos uz pretējas krāsas rūtiņas. Noskaidrojiet gājienu skaita paritāti, kas nepieciešami, lai kubs būtu pārgājis no stāvokļa  stāvoklī .
29.9.5. Apzīmējiet dālderu skaitu n-tajam rūķītim ar x, aprēķiniet dālderu skaitu pārējiem rūķīšiem un pētiet naudas plūsmu, kad katrs no tiem padod tālāk savus dālderus.

Latvijas 30. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

30.5.1.

a) Izdomājiet, kad četrciparu skaitlis ir mazāks salīdzinājumā ar citiem četrciparu skaitļiem.
b) Izdomājiet, cik daudz ciparu var būt skaitlī, ja tā pirmais cipars ir par viens mazāks nekā pārējo ciparu summa. Kāda var būt lielākā ciparu summa, lai izpildītos šis nosacījums?

30.5.2. Ar pirmo svēršanu salīdziniet divu un divu monētu svaru. Pēc tam apskatiet visus iespējamos rezultātus.
30.5.3. Var izveidot 6×6 rūtiņu lielu kvadrātu.
30.5.4. Prasītais ir iespējams.
30.5.5.

a) Prasītais nav iespējams; apskatiet, kā mainās katras krāsas lodīšu skaits katrā gājienā.
b) Prasītais ir iespējams; apskatiet, kādi gājieni jāizdara, lai visu veidu lodīšu skaits samazinātos par 1.

6. klase

30.6.1. Apskatiet katru pulksteni atsevišķi. Pēc cik ilga laika katrs no tiem atkal rādīs pareizu laiku pulksten 12^{oo}?
30.6.2.

a) Prasītais ir iespējams.
b) Dotās figūras katru otro rindu nokrāsojiet melnu. Saskaitiet, cik balto un cik melno rūtiņu veido vertikālos un horizontālos taisnstūrīšus.

30.6.3. Prasītais ir iespējams.
30.6.4. Spēļu skaits sakrīt ar kopējo punktu skaitu. Cik spēlēm jānotiek, lai katrs zēns varētu iegūt uzdevumā doto punktu skaitu? Apskatiet iespējamos gadījumus.
30.6.5. Pirmajā svēršanā nosveriet jebkurus divus atsvarus, tad apskatiet visus iespējamos gadījumus.

7. klase

30.7.1. Lielākā iespējamā x vērtība ir 5.

30.7.2.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Saskaitiet iegūstamo daudzstūru malas divos veidos.

30.7.3. Pirmajā gājienā A var rakstīt 2.

30.7.4. Ja trijstūrī augstums sakrīt ar mediānu, tad trijstūris ir vienādsānu. No vienādsānu trijstūriem seko prasītais.

30.7.5.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Apskatiet nepāra skaitļu skaita izmaiņas atļauto darbību izpildes rezultātā.

8. klase

30.8.1. Pareizinot apskatāmo vienādojumu ar 3 un mainot saskaitāmo secību, iegūst, ka apskatāmais vienādojums ir 3 jau zināmu vienādojumu summa.

30.8.2. Kā Andra iegūtais sešciparu skaitlis izsakāms ar dotajiem skaitļiem?

30.8.3. Kādiem jābūt skaitļu pirmreizinātājiem, lai to lielākais kopīgais dalītājs būtu 1?

30.8.4. Salīdziniet izgriežamo daļu perimetru un laukumu skaitliskās vērtības.

30.8.5.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Prasītais ir iespējams.

c) Pamatojiet, ka jebkurus 8 pēc kārtas ņemtus skaitļus var sadalīt tā, lai tie atbilstu uzdevuma nosacījumiem.

9. klase

30.9.1. Ko var secināt par q_1, q_2 un q_3 no $q_1q_2q_3<0$? Un kādā gadījumā kvadrātvienādojumam eksistē divas dažādas saknes?

30.9.2.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Kāda ir visu rindu un visu kolonnu summu summa? Cik dažādi skaitļi, kas dalās ar 8, nepieciešami, lai izpildītu uzdevuma prasības? Kāda būs to summa?

30.9.3. Cik starp apskatītajiem skaitļiem būs pāra? Kas no tā seko?

30.9.4. Pagariniet trijstūra malu CA līdz CM tā, lai AM=AI.

30.9.5.

a) Parādiet, kā uzvar Juris.

b) Andris spēlē tā, lai pēc viņa gājiena būtu apēstas 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ... konfektes. Pamatojiet, kā tas iespējams.

Latvijas 31. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

31.5.1.

a) Izdomājiet, kādi var būt pēdējie četri cipari piecciparu skaitlī, lai izpildītos prasītais?

b) Izdomājiet, cik daudz ciparu var būt skaitlī, ja tā pirmais cipars ir par divi mazāks nekā pārējo ciparu summa. Kāda var būt lielākā iespējamā “pārējo” ciparu summa, lai izpildītos šis nosacījums?

31.5.2. Kādas būs apskatāmās summas, ņemot vērā, ka dažas ir iespējams aprēķināt no uzdevumā dotajiem skaitļiem un ka šīs summas ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi?

31.5.3.

a) Tā kā kaimiņiem jādzīvo blakus rūtiņās, tad saskaitiet, cik kaimiņu pāru iespējams izvietot katrā no četrstūriem.

b) Uz kurieni var pārcelties šillišallas, kas dzīvoja stūra rūtiņās? Kas tad notiek ar viņu kaimiņiem?

31.5.4. Apskatiet krustveida figūru, kas atrodas vistuvāk taisnstūra augšējai malai.

31.5.5.

a) Atrodiet piemēru, kad prasītais izpildās.

b) Atrodiet piemēru, kad prasītais izpildās.

6. klase

31.6.1. Veic novērtējumu, ka 24 lati ar santīmiem nozīmē 2401 līdz 2499 santīmus. Risina nevienādības.

31.6.2. Iekrāsojiet doto figūru tā, lai katrs taisnstūris, ko ir iespējams izgriezt no šīs figūras, saturētu vienu baltu un vienu melnu rūtiņu.

31.6.3. Kāds ir lielākais iespējamais kaudzīšu skaits, lai nebūtu kaudzītes ar vienādu sērkociņu skaitu (ņemot vērā, ka kaudzītēs ir no 1 līdz 12 sērkociņiem)? Cik no šīm kaudzītēm var izvēlēties tā, lai nevienu divu kaudzīšu sērkociņu summa nebūtu 13?

31.6.4. Kuras rūtiņas ir jāiekrāso spēles laukumā, lai 1. spēlētājs vienmēr ar savu gājienu varētu iebīdīt figūriņu melnajā lauciņā, bet 2. spēlētājs to nekad nevarētu?

31.6.5. Pētiet pāra un nepāra skaitļu skaita izmaiņas atļauto operāciju laikā, sākumā un beigās.

7. klase

31.7.1. Apskatiet visus iespējamos variantus, vai skaitlis x lielāks vai mazāks par y un vai skaitlis z lielāks vai mazāks par t.

31.7.2. Pierādiet, ka $\Delta NMC = \Delta HMC$.

31.7.3. Saucējos atdaliet saskaitāmo n+2.

31.7.4. Ja trijstūrī augstums sakrīt ar mediānu, tad trijstūris ir vienādsānu. No vienādsānu trijstūriem seko prasītais.

31.7.5. Attēlojiet diplomātus kā punktus un valodas, kādās viņi sazinās, kā krāsainus nogriežņus. Uz kādu uzdevumu tagad reducējas dotais uzdevums?

8. klase

31.8.1. Pielietojiet Vjeta teorēmu abiem dotajiem vienādojumiem.

31.8.2. Apskatiet nogriežņus XY, YZ, ZT, TX kā viduslīnijas trijstūros.

31.8.3. Izsakiet X kā 100A+B (līdzīgi izsakiet Y). Uzrakstiet uzdevumā aprakstītās izteiksmes un spriediet par dalāmību ar 91.

31.8.4. Salīdziniet izgriežamo daļu perimetrus un laukumus.

31.8.5. Pētiet, kuri skaitļi ir mazākie neizsvītrotie pēc 1., 2., 3., ... svītrošanas sērijas.

9. klase

31.9.1. Pierādiet, pieņemot pretējo un pētot grafiku atrašanās vietu koordinātu plaknē.

31.9.2. Pierādiet, pieņemot pretējo un apskatot, kādas cilts rūķīši dzīvo punktos, kuru koordinātas dalās ar a vai b.

31.9.3. Pierādiet, ka $\Delta EDA = \Delta EDC$.

31.9.4. Lai kāds rūķītis būtu saticis visus pārējos rūķīšus, viņam jāsatiek arī tas rūķītis, kurš atnāca pirmais, un tas rūķītis, kurš aizgāja pēdējais.

31.9.5.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Cik dažādas summas ir iespējamas? Un cik no tām noteikti jāparādās? Kādas summas var neparādīties?

Latvijas 32. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

32.5.1. Kādas būs apskatāmās summas, ņemot vērā, ka dažas ir iespējams aprēķināt no uzdevumā dotajiem skaitļiem un ka šīs summas ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi?

32.5.2. Ar pirmo svēršanu salīdziniet četru monētu svaru (divas uz viena svaru kausa un otras divas uz otra svaru kausa). Pēc tam apskatiet visus iespējamos rezultātus.

32.5.3.

a) Saskaitiet zvaigznīšu skaitu kvadrātā divējādi – pa rindām un pa kolonnām.

b) Atrodiet piemēru, kas parāda prasīto.

32.5.4. Pirmās divas kaudzes veidos viens zelta gabals, bet otrās divas kaudzes veidos visi pārējie zelta gabali.

32.5.5. Atrodiet piemēru, kā jāizvieto 12 figūriņas, lai prasīto trīs rūtiņu figūru izgriezt nevarētu.

6. klase

32.6.1. Apskatiet, no kādiem reizinātājiem sastāv katrs no skaitļiem.

32.6.2. Kāds ir lielākais iespējamais kaudzīšu skaits, lai nebūtu kaudzīšu ar vienādu sērkociņu skaitu (ņemot vērā, ka kaudzītēs ir no 1 līdz 14 sērkociņiem)? Cik no šīm kaudzītēm var izvēlēties tā, lai nevienu divu kaudzīšu sērkociņu skaitu summa nebūtu 15?

32.6.3. Pirmajā svēršanā nosveriet jebkurus divus atsvarus, tad apskatiet visus iespējamos gadījumus.

32.6.4. Apzīmējiet kāda veida monētu skaitu un no dotā izsakiet otra veida monētu skaitu. Kādās kaudzītēs šīs monētas var ērti apvienot? Līdzīgi apzīmējiet otra veida monētu skaitu.

32.6.5. Atsevišķi apskatiet stūra rūtiņu un malas rūtiņu ar 3 "kaimiņ-rūtiņām". Cik vienas vienības stienīši noteikti nepieciešami? Jāparāda piemērs, kā iespējams izveidot prasīto ar atrasto mazāko iespējamo vienības stienīšu daudzumu.

7. klase

32.7.1. Pagariniet malu AC līdz punktam S tā, lai iegūtais trijstūris SBM būtu vienādsānu.

32.7.2. Saucējos atdaliet saskaitāmo n+2.

32.7.3. Cik ilgi būtu jācep pankūkas, ja tās ceptu pa vienai (ņemot vērā, ka katrai pankūkai ir 2 apcepamas virsmas)? Un cik ilgā laikā iespējams paveikt prasīto, ja uz pannas var novietot 4 pankūkas? Jāparāda piemērs, kā iespējams izdarīt prasīto ar atrasto mazāko minūšu skaitu.

32.7.4. Kādi skaitļi jāreizina, lai iegūtu nulli skaitļa beigās? Un kāds ir lielākais šādu skaitļu daudzums, ko var saturēt saskaitāmie?

32.7.5. Pierādiet, pieņemot pretējo un izmantojot, ka katrs skaitlis ir lielāks par vienu savu kaimiņu.

8. klase

32.8.1. Pielietojiet Vjeta teorēmu abiem dotajiem vienādojumiem.

32.8.2. Apskatiet lielāko no skaitļiem a, b, c, d. Ņemot vērā, ka tas izsakāms kā divu par to mazāku skaitļu summa, salīdziniet lielāko ar katru no pārējiem skaitļiem.

32.8.3. Veiciet pilnu iespējamo variantu pārlasi.

32.8.4.

a) Apskatiet trijstūrus AXM un CXM.

b) Novelciet $BY \perp AM$ un apskatiet izveidojušos trijstūrus AYD un ABD.

32.8.5. Atbilde: 16. Prasīto pierādiet, pieņemot pretējo, ka n>16.

9. klase

32.9.1. Ja skaitlis dalās ar 225, tad kādi var būt tā pēdējie cipari? No kādiem reizinātājiem sastāv 225, un ko tas liecina par meklēto skaitli?

32.9.2. Pagariniet trijstūra malu CA līdz CM tā, lai AM=AI.

32.9.3. Lai kāds rūķītis būtu saticis visus pārējos rūķīšus, viņam jāsatiek arī tas rūķītis, kurš atnāca pirmais, un tas rūķītis, kurš aizgāja pēdējais.

32.9.4. Apskatiet nevienādību, kas rodas, saskaitot dotās nevienādības, ar mērķi izteikt summas kvadrāta formulu. Izmanto nevienādību $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$.

32.9.5. Līdz ar šo uzdevumu apskatiet arī divus modificētus uzdevumus. Vienā no tiem nav prasīts, lai beigās diski atkal būtu monotonā secībā (bet lielākajam diskam tomēr ir jābūt apakšā).

Latvijas 33. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

33.5.1.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Prasītais ir iespējams.

33.5.2. Ar pirmo svēršanu salīdziniet četru monētu svaru (divas uz viena svaru kausa un otras divas uz otra svaru kausa). Pēc tam apskatiet visus iespējamos rezultātus.

33.5.3. Divreiz var tikt nosaukti 0; 1 vai 2 bērnu vārdi.

33.5.4. Ko uz uzdoto jautājumu atbildētu rūķīši, ja divi no viņiem runātu patiesību? Un ko atbildētu, ja trīs no viņiem runātu patiesību?

33.5.5.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Kādai jābūt visu skaitļu kopējai summai, ja zināms, ka visus skaitļus var sadalīt trīs daļās, kuru summas ir vienādas?

6. klase

33.6.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām:

1) Pieņemiet, ka zināms: 2a+3b+c dalās ar 7, un pierādīt, ka $\overline{abc}$ dalās ar 7.

2) Pieņemiet, ka zināms: $\overline{abc}$ dalās ar 7, un pierādīt, ka 2a+3b+c dalās ar 7.

33.6.2. Pirmajā svēršanā nosveriet jebkurus divus atsvarus, tad apskatiet visus iespējamos gadījumus.

33.6.3. Koncentrējieties vispirms uz tiem augļiem, kuru ir visvairāk.

33.6.4. Apskatiet, cik rūtiņu malas jānokrāso un cik rūtiņu malas ir nokrāsotas, novelkot vienu nogriezni.

33.6.5. Cik baltajās rūtiņas Sprīdītis ir bijis un cik baltajās rūtiņās viņš nav bijis? Kāds ir mazākais iespējamais skaits dukātu, kas varētu atrasties Sprīdīša apmeklētajās baltajās rūtiņās?

7. klase

33.7.1. No dotā seciniet, kāds ir iespējamais (lielākais un mazākais) vietu skaits vagonā.

33.7.2. Kādi skaitļi jāreizina, lai iegūtu nulli skaitļa beigās? Un kāds ir lielākais šādu skaitļus daudzums, ko var saturēt saskaitāmie?
33.7.3. Pierādiet, ka $\Delta EAC = \Delta DAB$.
33.7.4. Apskatiet visus iespējamos gadījumus, kas varēja palikt pēdējā būtne uz salas.
33.7.5. Atbilde: 22 konfektes.

8. klase

33.8.1. Pielieto Vjeta teorēmu abiem dotajiem vienādojumiem.
33.8.2. Vismaz cik grupās jāiesaistās katram bērnam?
33.8.3.

a) Kāds var būt divciparu skaitlis, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi?

b) Ar kādiem cipariem var "papildināt" a) piemērā atrasto skaitli, lai tā ciparu summa paliktu nemainīga, t.i., 10?

c) Ko iegūst, ja nepāra skaitli reizina ar 5?

33.8.4. Novelciet KN tā, lai $\angle KNC = \angle KMB$. Apskatiet trijstūrus, kuros ietilpst prasītie nogriežņi.
33.8.5.

a) Apskatiet nokrāsotā apgabala robežas kopgarumu – vai tas var pieaugt?

b) Prasītais ir iespējams.

9. klase

33.9.1. Kad skaitlis dalās ar 8?
33.9.2. Lai kāds rūķītis būtu saticis visus pārējos rūķīšus, viņam jāsatiek arī tas rūķītis, kurš atnāca pirmais, un tas rūķītis, kurš aizgāja pēdējais.
33.9.3. Sameklējiet zīmējumā vairākas vienādsānu trapeces.
33.9.4. Pētiet vienādojuma kreiso pušu grafiku novietojumus.
33.9.5. Atbilde: 25 skaitļus. Pieņemiet, ka M – kopa ar lielāko iespējamo skaitļu skaitu, un pakāpeniski pārveidojiet to tā, lai uzdevuma nosacījumi saglabātos, bet visi kopas elementi būtu vismaz 50.

ATRISINĀJUMI

Latvijas 26. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

26.5.1. Atbilde: Edgars apēda vienu konfekti. **Pierādījums:** tā kā Bruno un Didzis kopā apēda vismaz 25 konfektes, tad viens no viņiem apēda vismaz 13 konfektes. (Pamatosim: pieņemsim pretējo – Bruno un Didzis apēda mazāk par 13 konfektēm, t.i., ne vairāk par 12, tad kopā viņi apēda ne vairāk kā 24 konfektes. Kopējais konfekšu skaits ir 25, tātad iegūta pretruna un kāds no zēniem noteikti apēda vairāk par 12 konfektēm, tātad vismaz 13.) Tā kā Andris apēda vairāk konfektes nekā jebkurš cits no zēniem, tad viņš apēda vismaz par vienu konfekti vairāk nekā Bruno un vismaz par vienu konfekti vairāk nekā Didzis. Tā kā Bruno vai Didzis apēda vismaz 13 konfektes, tad Andris apēda vismaz 14. Kopā Bruno, Didzis un Andris apēda vismaz 25+14=39 konfektes. Tā kā kopā bija 40 konfektes un vismaz 39 bija apēstas, tad neapēsta palika maksimums 1 konfekte. Pēc uzdevuma nosacījumiem Edgars apēda vismaz vienu konfekti, pēc mūsu sprieduma Edgaram palika maksimums 1 konfekte – tātad Edgars varēja apēst **tikai tieši** vienu konfekti.

26.5.2. Atbilde: ir 399 skaitļi. **Pierādījums:** atsevišķi apskatīsim viencipara, divciparu un trīsciparu skaitļus.

1) Viencipara skaitļi no 1 līdz 9. Ir tikai viens tāds skaitlis, kura ciparu summa dalās ar 5, t.i., 5.

2) Divciparu skaitļi no 10 līdz 99. Katrā skaitļu desmitā no $\overline{a0}$ līdz $\overline{a9}$ ir 10 pēc kārtas ņemti skaitļi un arī šo skaitļu ciparu summas ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Tā kā ar 5 dalās katrs piektais skaitlis, tad katrā skaitļu desmitā tieši divu skaitļu ciparu summas dalīsies ar pieci. Pavisam ir 9 desmiti, tātad kopumā skaitļu, kuru ciparu summas dalās ar 5, ir $9 \cdot 2 = 18$

3) Trīsciparu skaitļi no 100 līdz 999. Katrā skaitļu desmitā no $\overline{ab0}$ līdz $\overline{ab9}$ ir 10 pēc kārtas ņemti skaitļi un arī šo skaitļu ciparu summas ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Tā kā ar 5 dalās katrs piektais skaitlis, tad katrā skaitļu desmitā tieši divu skaitļu ciparu summas dalīsies ar pieci. Trīsciparu skaitļa $\overline{abc}$ pirmo divu ciparu a un b vietā var būt 10; 11; 12; ...; 98; 99. Tātad cipariem a un b iespējami 90 varianti. Tas nozīmē, ka skaitļu, kuru ciparu summas dalās ar 5, ir $90 \cdot 2 = 180$

4) Četrciparu skaitļi no 1000 līdz 1999. Katrā skaitļu desmitā no $\overline{abc0}$ līdz $\overline{abc9}$ ir 10 pēc kārtas ņemti skaitļi un arī šo skaitļu ciparu summas ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Tā kā ar 5 dalās katrs piektais skaitlis, tad katrā skaitļu desmitā tieši divu skaitļu ciparu summas dalīsies ar pieci. Četrciparu skaitļa $\overline{abcd}$ pirmo trīs ciparu a, b un c vietā var būt 100; 101; 102; ...; 198; 199. Tātad cipariem a, b un c iespējami 100 varianti. Tas nozīmē, ka skaitļu, kuru ciparu summas dalās ar 5, ir $100 \cdot 2$ = 200

Tātad kopumā no 1 līdz 199 ir 200+180+18+1=399 skaitļi, kuru ciparu summas dalās ar 5.

26.5.3. Atbilde: dažādu izmēru taisnstūru daudzumi ir vienādi. **Pierādījums:** apzīmēsim augstumu ar h un platumu ar p. Ja perimetrs ir 200, tad h+p=100. Apzīmēsim ar (h,p) pāri, kas atbilst nosacījumam h+p=100.

Tad (h,p) var būt: (1,99), (2,98), ..., (50,50) – kopā 50 dažādi veidi.

Ja perimetrs ir 202, tad h+p=101, un (h,p) var būt: (1,100), (2,99), ..., (50,51) – arī kopā 50 dažādi varianti. Tātad dažādu izmēru taisnstūru daudzumi abos gadījumos ir vienādi.

26.5.4. Atbilde: x=14. **Pierādījums:** aplūkosim astoņstūra 4 malas bez kopīgiem galapunktiem. Tajās ierakstīti skaitļi x , 11, 18, 15. Šo 4 skaitļu summa ir visu astoņstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summa. Līdzīgi aplūkosim pārējās 4 astoņstūra malas, tajās ierakstītie skaitļi ir 10, 14, 13, 21. Arī šo 4 skaitļu summa ir visu astoņstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summa. Tātad 10+14+13+21=11+18+15+x, un no tā seko, ka x=14.

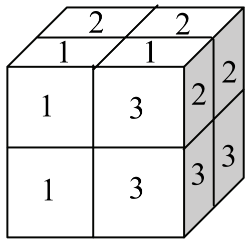
26.5.5. **Pierādījums:** aplūkosim jebkurus divus zinātniekus A un B. Pierādīsim, ka viņi ir radinieki. Pieņemsim pretējo, ka A un B nav radinieki. Tad atlikuši 15 cilvēki, no kuriem 8 ir A radinieki un 8 ir

B radinieki. Ja neviens A radinieks nesakrīt ne ar vienu B radinieku, tad kopā A un B ir 8+8=16 radinieki. Tā kā konferencē kopā bija 17 cilvēki, tad ir atlikuši tieši 15 cilvēki, kas var būt radinieki zinātniekam A vai zinātniekam B. Tā kā kopā A un B ir 16 radinieki, tad būs tāds zinātnieks C, kas būs radinieks gan A, gan B. Ja A un C ir radinieki un B un C ir radinieki, tad arī A un B ir radinieki. Esam ieguvuši pretrunu, tātad sākotnējais pieņēmums nav bijis patiess. Jebkuri divi zinātnieki ir radinieki.

6.klase

26.6.1. Atbilde: 10 bērni. **Pierādījums:** tā kā 5 bērni ēd 5 mandarīnus 5 minūtes, tad 1 bērns vienu mandarīnu ēd 5 minūtes. Tad 50 mandarīnus viens bērns apēstu 250 minūtēs. Tā kā ēšanai dotas 25 minūtes, tad to varēs paveikt 250:25=10 bērni.

26.6.2. Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** kuba 3 skaldnes aplīmē, kā redzams zīmējumā 1A. Skaldņu ceturtdaļas, uz kurām atrodas vienādie cipari, veido vienu figūru. Trīs atlikušās skaldnes, kas zīmējumā nav redzamas, aplīmē simetriski attēlā redzamajām.



1A. zīmējums

26.6.3. Atbilde: ciparu summa var būt jebkurš naturālais skaitlis, kas lielāks par 1. **Pierādījums:** pārbaudīsim, kādas ciparu summas var būt:

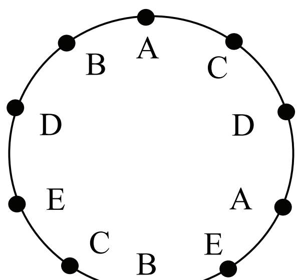
a) Ciparu summa 1 ir tikai skaitļiem 1, 10, 100, ... 10...0; tie nedalās ar 7, tātad ciparu summa nevar būt 1;
b) Ciparu summu 2 var iegūt no skaitļa 1001. Skaitlis 1001 dalās ar 7; tātad ciparu summa var būt 2;
c) Ciparu summu 3 var iegūt no skaitļa 21, kas dalās ar 7. Tātad ciparu summa var būt 3;
d) Ciparu summa var būt jebkurš naturāls pāra skaitlis. Aprakstīsim, kā iegūt skaitli, kurš dalās ar 7 un kura ciparu summa ir jebkurš pāra skaitlis. Ja skaitli 1001 pierakstīs n reizes pēc kārtas pašu sev galā (n – jebkurš naturāls skaitlis), tad iegūs skaitli 1001’1001’....’1001, kas dalās ar 7 un kura ciparu summa ir 2n (kur n=1,2,3...);
e) Ciparu summa var būt jebkurš naturāls nepāra skaitlis, kas lielāks par 3. Aprakstīsim, kā iegūt skaitli, kurš dalās ar 7 un kura ciparu summa ir jebkurš nepāra naturāls skaitlis, kas lielāks par 3. Ja skaitlim 21 pieraksta galā 1001 n reižu (n – jebkurš naturāls skaitlis), tad iegūs skaitli 21’1001’1001’...’1001, kas dalās ar 7 un kura ciparu summa ir 2n+1 (kur n=1,2,3,...).

Tātad iespējamās ciparu summas vērtības ir visi naturālie skaitļi, kas lielāki par 1.

26.6.4. Atbilde: šo skaitļu summa ir 4995. **Pierādījums:** visos skaitļos kopā katrs cipars vienu reizi parādīsies kā simtu cipars, vienu reizi kā desmitu cipars un vienu reizi kā vienu cipars. Tāpēc meklējamā summa ir:

$(1+2+3+...+9)+(10+20+30+...+90)+(100+200+300+...+900)=(1+2+..+9)(1+10+100)=45\cdot 111=4995$.

26.6.5. a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** skat. zīm. 2A.



2A. zīmējums

b) 1.variants

Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** no dažādiem burtiem A, B, C, D, E, F var izveidot tieši 15 dažādus pārus:

AB, BC, CD, DE, EF
AC, BD, CE, DF,
AD, BE, CF,
AE, BF,
AF,

Tā kā uz riņķa līnijas doti 15 punkti, tad visiem šiem pāriem noteikti jāparādās. Tātad katram burtam jāveido pāris ar atlikušajiem pieciem, tas nozīmē, ka katram burtam jābūt piecos eksemplāros. Bet katram burta eksemplāram ir tieši divi "kaimiņi". Tātad, lai izveidotos pieci dažādi pāri, katram burtam ir jābūt vismaz 3 eksemplāros. Bet tad šim burtam ir 6 "kaimiņi" un kāds burtu pāris atkārtojas.

2.variants

Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** tā kā uzrakstīti 15 burti, bet dažādu burtu ir 6, tad kāds burts X būs uzrakstīts vismaz 3 reizes. (Pamatosim: pieņemsim pretējo, ka neviens burts nav uzrakstīts vairāk kā 2 reizes. Tā kā ir 6 burti, tad kopā tiks izmantoti ne vairāk kā $2 \cdot 6 = 12$ punkti. Iegūta pretruna ar uzdevuma nosacījumu, ka uz riņķa līnijas ir 15 punkti. Tātad pieņēmums bija aplams un kāds burts X ir uzrakstīts vismaz 3 reizes.) Vienam burtam ir 2 "kaimiņi", blakus visiem 3 burtiem X kopā ir 6 "kaimiņi". Visi 6 kaimiņi nevar būt dažādi, jo ir tikai 5 **dažādi** burti. Tātad vismaz divi no "kaimiņiem" būs vienādi. "Kaimiņu", kas atkārtojas 2 reizes, apzīmēsim ar Y. Esam ieguvuši 2 vienādus burtu pārus XY, jo Y divas reizes ir X kaimiņš.

7. klase

26.7.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo skaitļu skaitu un parādīt piemēru, otrkārt, pierādīt, ka nav iespējams izveidot vairāk skaitļu.

- **Atbilde:** var uzrakstīt 6 skaitļus. **Piemērs:** 3; 6; 9; 18; 27; 45.
- **Pierādījums:** pamatosim, ka nav iespējams uzrakstīt 7 vai vairāk skaitļus. Lai uzrakstītu 7 skaitļus, vairāk nekā 3 no tiem būtu jābūt viencipara. (Pamatosim: ja uzrakstām tikai 3 viencipara skaitļus, tad no pārējiem 6 cipariem jāizveido vēl 4 skaitļi. Vislielāko skaitu skaitļu varam izveidot, ja tie sastāv no pēc iespējas mazāk cipariem. Viencipara skaitļu ir tieši 3, bet no 6 cipariem varam izveidot vislielākais 3 divciparu skaitļus. Nav vērts veidot skaitļus no vairāk kā 2 cipariem, jo tad to izveidošanai patērēsim vairāk ciparus un skaitļu skaits nebūs lielāks par jau iegūto. Tātad kopā 7 skaitļus iegūt nevaram.) Tātad, lai uzrakstītu 7 vai vairāk skaitļus, kas dalās ar 3, vismaz 4 no tiem jābūt viencipara, bet tas nav iespējams, jo ir tikai 3 viencipara skaitļi, kas dalās ar 3. Tātad maksimums ir 6 skaitļi.

26.7.2.

a) **Atbilde:** nē, ne noteikti. **Pierādījums:** skolēnu augumi var būt pierakstīti no kreisās puses uz labo, piemēram, šādi (centimetros): 105, 110, 104, 109, 103, 108, 102, 107, 101, 106.

b) **Atbilde**: jā, noteikti. **Pierādījums:** apzīmēsim skolēnu augumus rindā no kreisās uz labo ar a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k. Pieņemsim pretējo, t.i., ka tādu skolēnu nevar atrast. Tad iegūstam, ka $a \geq c$, $c \geq e$, $e \geq g$, $g \geq i$, $i \geq k$, no kurienes seko, ka $a \geq k$ – pretruna ar doto. Tātad sākotnējais pieņēmums bija nepareizs un šādu skolēnu noteikti var atrast.

26.7.3. Pierādījums:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$ (no dotā d=a+b-c)

$= a^2 + b^2 + c^2 + (a + b - c)^2 =$ (iekavās izpildām kāpināšanu)

$= a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc =$ (mainām saskaitāmo kārtību)

$= a^2 - 2ac + c^2 + a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 =$

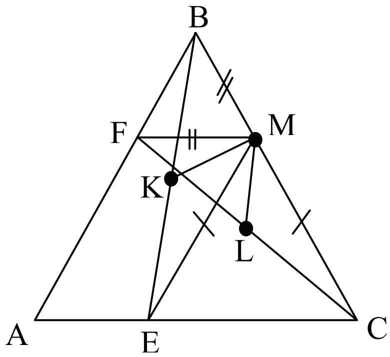
$= (a - c)^2 + (a + b)^2 + (b - c)^2$ iegūstam triju veselu skaitļu kvadrātus.

Apzīmēsim: a-c=f; b-c=g; a+b=h. Esam ieguvuši, ka $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + g^2 + h^2$, kur f, g, h – veseli skaitļi.

26.7.4.

1. variants. Pierādījums: (skat. zīm. 3A.)

1) $\angle BFM = \angle BAC = 60^\circ$ un $\angle BMF = \angle BCA = 60^\circ$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm FM un AC.
2) ΔFBM – vienādmalu, jo visi tā leņķi ir 60°.
3) FM=BM, jo ΔFBM – vienādmalu.
4) $\angle MEC = \angle BAC = 60^\circ$ un $\angle CME = \angle CBA = 60^\circ$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm EM un AB.
5) ΔEMC – vienādmalu, jo visi tā leņķi ir 60°.
6) EM=MC, jo ΔEMC – vienādmalu.
7) $\angle CMF = 180^\circ - \angle BMF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
8) $\angle EMB = 180^\circ - \angle CME = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
9) $\Delta EMB = \Delta CMF$ pēc pazīmes mlm, jo CM=EM, MF=MB un $\angle CMF = \angle EMB = 120^\circ$.



3A. zīmējums

10) Pagriežot ΔCMF ap virsotni M par 60°, iegūstam ΔEMB.
11) ML ir ΔCMF mediāna, jo pēc dotā L dala uz pusēm malu FC.
12) ΔCMF mediāna ML pagriežot kļūst par ΔEMB mediānu MK, jo, veicot pagriešanu, elementi saglabā savas īpašības.
13) Tātad MK ir iegūts, pagriežot ML par 60° grādiem.
14) Tātad $\angle LMK = 60^\circ$.
15) ΔLMK – vienādsānu, jo ML=MK.
16) $\angle MKL = \angle MLK = \dfrac{(180^\circ - 60^\circ)}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, jo leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī ir vienādi.
17) ΔLMK – vienādmalu, jo visi tā leņķi ir 60°.

2. variants. Pierādījums: (skat. zīm. 3A.)

1) $\Delta BMF \sim \Delta BCA$, jo $\angle B$ ir kopīgs, $\angle BMF = \angle BAC$ un $\angle BMF = \angle BCA$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm FM un AC .
2) $\Delta EMC \sim \Delta ABC$, jo $\angle C$ ir kopīgs, $\angle EMC = \angle ABC$ un $\angle EMC = \angle BAC$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm AB un EM.
3) Tātad $\Delta BMF \sim \Delta EMC \sim \Delta BCA$.
4) Tā kā ΔABC ir vienādmalu pēc dotā, tad arī tam līdzīgie trijstūri ΔBMF un ΔEMC ir vienādmalu, tāpēc BM=FM un ME=MC, un visi leņķi šajos trijstūros ir 60°.
5) Pierādīsim, ka $\Delta BME = \Delta FMC$ pēc pazīmes mlm. Tiešām, BM=FM un ME=MC, atliek pierādīt, ka leņķi starp malām ir vienādi. Tā kā $\angle EMC = 60^\circ$, tad $\angle BME = 180^\circ - \angle EMC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Līdzīgi, $\angle BMF = 60^\circ$, tad $\angle FMC = 180^\circ - \angle BMF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Tad $\angle BME = \angle FMC$ un līdz ar to $\Delta BME = \Delta FMC$. No tā seko, ka MK=KL kā atbilstošās mediānas vienādos trijstūros un ka ΔKML ir vienādsānu.
6) $\angle KME = \angle LMC$ kā leņķi vienādos trijstūros starp atbilstošajām malām un atbilstošajām mediānām, tāpēc

   $\angle KML = \angle KME + \angle EML = \angle LMC + \angle EML = \angle EMC = 60^\circ$.
7) Tātad ΔKML ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad ΔKML ir vienādmalu.

26.7.5. Pierādījums: ar pirmo svēršanu uz katra kausa uzliekam jebkuras 6 monētas. Ja svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir palikusī un ar otru svēršanu salīdzinām to ar jebkuru citu, tādejādi noskaidrojot, vai tā ir vieglāka vai smagāka par pārējām.

Ja svari nav līdzsvarā, tad uzliekam otrajā svēršanā uz kausiem pa 3 monētām no smagākā sešinieka. Ja otrajā svēršanā svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir otrā monētu sešiniekā, kas bija vieglāks –

arī atšķirīgā monēta ir vieglāka par pārējām monētām. Ja svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir šajā – smagākajā sešiniekā, un tātad ir smagāka par pārējām.
Piezīme: var būt arī citi risinājumi, kad pirmajā reizē sver četras un četras monētas vai piecas un piecas monētas. Pierādījuma gaita līdzīga aprakstītajai.

8. klase

26.8.1.

1. variants. Pierādījums: ievietojot vienādojumā x vietā 1, iegūstam a+b+c=0. Vienādība a+b+c=0 ir patiesa pēc uzdevuma nosacījumiem, tātad viena vienādojuma sakne ir 1. Pēc Vjeta teorēmas zinām, ka starp saknēm pastāv sakarības $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ un $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Ievietojot x=1 jebkurā no nosacījumiem, varam iegūt otru sakni. Tātad $x_2 = \frac{c}{a}$ jeb (ievietojot otrā nosacījumā) $x_2 = -\frac{b}{a} - 1$.

2. variants. Pierādījums: no dotās vienādības izsakot b, iegūstam $b = -a - c$. Iegūto b izteiksmi ievietojot vienādojumā, iegūstam, ka $ax^2 - ax - cx + c = 0$. Iznesam a un c pirms iekavām, tad $a(x^2 - x) - c(x - 1) = 0$ jeb $ax(x-1) - c(x-1) = 0$. Iznesot (x–1) pirms iekavām, iegūstam, ka $(x-1)(ax - c) = 0$. Tātad iespējami 2 gadījumi:

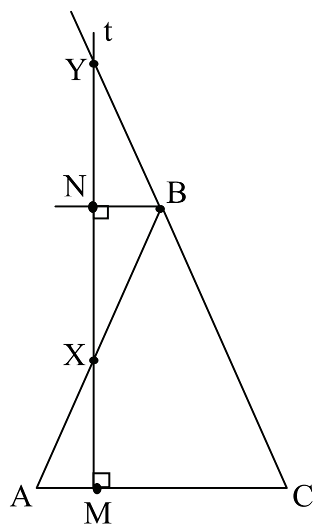
1) x–1=0, tad x=1.
2) ax–c=0, tad $x = \frac{c}{a}$.

Piezīme: līdzīgi uzdevumu var atrisināt, no dotās vienādības izsakot a vai c.

26.8.2.

1. variants. Pierādījums:

1) Novelkam $BN \perp t$, $N \in t$; tad $BN \| AC$ (skat. zīm. 4A.).
2) $\angle NBA = \angle BAC = \angle BCA = \angle YBN$ kā šķērsleņķi un kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm NB un AC un kā vienādsānu trijstūra leņķi pie pamata.
3) No tā seko, ka ΔBXY augstums BN ir arī $\angle XBY$ bisektrise, tātad ΔBXY ir vienādsānu, un BN ir arī ΔBXY mediāna.
4) MX+MY=MX+(MX+XY)=MX+(MX+2XN)= =2(MX+XN)=2MN, kas nav atkarīgs no punkta M izvēles, jo MN ir attālums starp paralēlām taisnēm BN un AC.
5) Ja X un Y sakrīt vai X atrodas augstāk par Y, tad spriedums ir līdzīgs.



4A. zīmējums

2. variants. Pierādījums:

1) $\Delta AXM \sim \Delta CYM$, jo $\angle AMX = \angle CMY = 90^\circ$, bet $\angle A = \angle C$, jo leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī ir vienādi.
2) Tā kā līdzīgos trijstūros malu attiecības ir vienādas, tad $\frac{XM}{YM} = \frac{AM}{MC}$ jeb $\frac{XM}{AM} = \frac{YM}{MC}$. Apzīmēsim šo attiecību ar k, t.i., $k = \frac{XM}{AM} = \frac{YM}{MC}$ (*).
3) Taisnleņķa trijstūrī ΔAMX katešu attiecību var izteikt kā $\frac{XM}{AM} = \text{tg}\angle A$.
4) Taisnleņķa trijstūrī ΔCMY katešu attiecību var izteikt kā $\frac{YM}{CM} = \text{tg}\angle C$.
5) Tā kā $\angle A = \angle C$, tad arī $\text{tg}\angle A = \text{tg}\angle C$.
6) Tātad $k = \frac{XM}{AM} = \frac{YM}{MC} = \text{tg}\angle A = \text{tg}\angle C$.

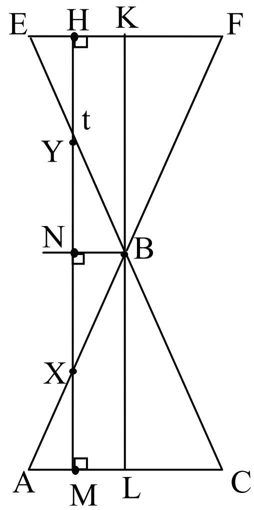
7) k nav atkarīgs no punkta M izvēles, jo, mainot M atrašanās vietu, leņķa tangenss nemainās.

8) No vienādībām (*) seko, ka $k=\dfrac{XM}{AM}$ jeb $k\cdot AM=XM$ un $k=\dfrac{YM}{CM}$ jeb $k\cdot CM=YM$.

9) Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam, ka $MK+MY=k\cdot(AM+MC)=k\cdot AC$. Tātad prasītā summa nav atkarīga no punkta M izvēles.

3. variants. Pierādījums:

1) Pagarinām taisni BC līdz punktam E tā, lai BC=EB.
2) Pagarinām taisni AB līdz punktam F tā, lai AB=BF.
3) Novelkam BL un BK – augstumus vienādsānu trijstūros ABC un EBF.
4) $\Delta ABC=\Delta FBE$ pēc pazīmes mlm, jo AB=BF un CB=EB pēc konstrukcijas, un $\angle ABC=\angle FBE$ kā krustleņķi.
5) Attēlojam ΔEBF simetriski pret taisni NB. Tā rezultātā virsotne E sakrīt ar virsotni A, virsotne F sakrīt ar virsotni C un, tā kā XM un YH atrodas uz taisnes NM, nogrieznis XM sakrīt ar nogriezni YH. Tāpēc MX=HY.
6) Tā kā MX=HY, tad MX+MY=HY+MY=MH.
7) Četrstūris MHKL – taisnstūris, jo visi tā leņķi ir 90°.
8) KL=HM, jo MHKL – taisnstūris.
9) Tā kā KL ir attālums starp 2 paralēlām taisnēm, tad tas nav atkarīgs no M izvēles, tātad MX+MY=MH=LK nav atkarīgs no punkta M izvēles.



5A zīmējums

26.8.3. Atbilde: jā, tādi skaitļi būs. **Pierādījums:** apskatām Jāņa uzrakstītos skaitļus sākot no tā brīža, kad tiem ir vismaz četri cipari. Katram Jāņa skaitlim izveidojam jaunu četrciparu skaitli, kas sastāv no Jāņa skaitļa pirmajiem diviem un pēdējiem diviem cipariem. Tā kā četrciparu skaitļu skaits ir galīgs, bet Jānis rakstīšanu turpina neierobežoti ilgi, tad noteikti būs tādi skaitļi, kas atkārtosies. Tad atbilstošie Jāņa skaitļi būs uzdevumā prasītie.

26.8.4. Atbilde: var rakstīt skaitli 2. **Pierādījums:** trešais skaitlis var būt tikai viens no summas 13+1=14 dalītājiem 1; 2; 7; 14. Skaitlis 1 neder, jo vienu reizi jau ir izmantots, bet skaitlis 14 neder pēc uzdevuma nosacījumiem, jo skaitļi ir no 1 līdz 13.

Ievērosim, ka visu 13 skaitļu summa $1+2+3+...+12+13=13\cdot 7$. Apzīmēsim pirmo 12 uzrakstīto skaitļu summu ar S un pēdējo skaitli ar x. Tā kā katram skaitlim ir jādalās ar visu pirms tā uzrakstīto skaitļu summu, tad S dalās ar x. Bet no tā, ka S dalās ar x, seko, ka arī S+x dalās ar x. Bet S+x=91. Tāpēc x ir viens no skaitļiem 1; 7; 13; 91. Tā kā 91 nevar izmantot un 13 un 1 jau izmantoti, tad x =7. No tā, ka pēdējais virknes skaitlis x=7, seko, ka virknes trešais cipars nevar būt 7.

Tātad, ja tādu skaitļu virkni uzrakstīt ir iespējams, tad trešajam skaitlim jābūt 2.

Piemērs: 13; 1; 2; 8; 3; 9; 4; 10; 5; 11; 6; 12; 7 parāda, ka uzdevuma prasības ir izpildāmas. Tātad uzdevuma atbilde ir 2.

26.8.5. Pierādījums: tad, kad būs ierakstītas visas zīmes, izteiksme sastāvēs no vairākiem reizinājumiem (daži reizinājumi var saturēt arī tikai vienu reizinātāju), kas savienoti ar "+" un "–"| zīmēm. Pirmais spēlētājs būs sasniedzis savu mērķi, ja katrs nepāra skaitlis būs iekļauts kādā reizinājumā (tad tas noteikti būs pareizināts ar pāra skaitli un rezultāts būs pāra skaitlis). Pirmais spēlētājs to var sasniegt, piemēram, šādi:

1) pirmajā gājienā ieliek "×" zīmi starp 1 un 2,
2) ja a – jebkurš nepāra skaitlis, izņemot 1, un 2. spēlētājs ar savu gājienu ieliek zīmi blakus skaitlim a vienā pusē, tad 1. spēlētājs savā gājienā ieliek "×" zīmi skaitlim a otrā pusē.

Tādējādi katrs nepāra skaitlis būs pareizināts ar pāra skaitli un kopējā izteiksmes vērtība arī būs pāra skaitlis.

9. klase

26.9.1.

1. variants. Atrisinājums: atņemot no uzdevumā dotā pirmā vienādojuma otro, iegūstam

$x^2 + y - x - y^2 = 0$

(x–y)(x+y)=x–y (dalām ar (x–y))

$\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)} = \frac{x-y}{x-y}$ jeb $x + y = 1$.

(Tā kā saucējs nedrīkst būt 0, tad apskatāmais pārveidojums der, ja $x - y \neq 0$ jeb $x \neq y$. Jāpārbauda, vai x=y nav vienādojuma sakne. Ievietojot vienā no dotajiem vienādojumiem x=y, iegūstam $x^2 + x = 1$ jeb $x^2 + x - 1 = 0$. Atrisinot kvadrātvienādojumu, iegūstam 2 atrisinājumus $x = y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.)

Ja x≠y, tad dalīšanas rezultātā esam ieguvuši vienādojumu $x + y = 1$. Izsakot y, iegūstam $y = 1 - x$ un ievietojot kādā no sākumā dotajiem vienādojumiem $y = 1 - x$, iegūstam, ka $x^2 - x = 0$. Atrisinot iegūto vienādojumu, iegūstam 2 atrisinājumus: (1;0) un (0,1).

2. variants. Atrisinājums: var lietot arī ievietošanas metodi. Tad iegūstam, ka $y = 1 - x^2$. Iegūto izteiksmi ievietojam otrajā vienādojumā, tad iegūstam $x + (1 - x^2)^2 = 1$ jeb $(1 - x^2)^2 = 1 - x$. Iekavās izteiksmi $1 - x^2$ sadalām reizinātājos pēc kvadrātu starpības formulas: $((1-x)(1+x))^2 = 1 - x$ jeb $(1-x)^2 \cdot (1+x)^2 = 1 - x$. Abas vienādojuma puses izdalot ar $(1 - x)$ iegūstam, ka $(1-x) \cdot (1+x)^2 = 1$

1) Tā kā dalītājs nedrīkst būt 0, tad apskatāmais pārveidojums der, ja $(1 - x) \neq 0$ jeb $x \neq 1$. Jāpārbauda, vai x=1 neietilpst kādā no vienādojumu sistēmas atrisinājumiem. Ievietojot x=1 pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka y=0. Tātad esam ieguvuši atrisinājumu (1;0).

2) Ja 1–x≠0, tad dalīšanas rezultātā esam ieguvuši vienādojumu $(1-x) \cdot (1+x)^2 = 1$. Izpildot kāpināšanu kvadrātā, iegūstam $(1-x) \cdot (1 + 2x + x^2) = 1$. Atverot iekavas, $1 + 2x + x^2 - x - 2x^2 - x^3 = 1$ jeb $x^3 + x^2 - x = 0$. Iznesot x pirms iekavām, iegūstam $x(x^2 + x - 1) = 0$. No iegūtā vienādojuma seko, ka x=0 vai $x^2 + x - 1 = 0$.

1) ja x=0, tad y=1. Iegūstam atrisinājumu (0;1).

2) ja $x^2+x-1=0$, tad $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ievērojam, ka $y = 1 - x^2 = x$, jo $x^2 + x - 1 = 0$. Iegūstam atrisinājumus

$\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

26.9.2.

a) Pierādījums: ja k=m+2mn+n, tad 2k+1=2m+4mn+2n+1=(2m+1)(2n+1). Tā kā 2m+1>1 un 2n+1>1 un abi ir naturāli skaitļi, tad 2k+1 nav pirmskaitlis.

b) Pierādījums: ja 2k+1 nav pirmskaitlis, tad eksistē tādi naturāli skaitļi a un b, ka $2k + 1 = a \cdot b$, pie tam a>1 un b>1. Tāpēc $k = \frac{ab - 1}{2}$. Viegli pārbaudīt, ka par meklētajiem m un n var ņemt $m = \frac{a-1}{2}$ un $n = \frac{b-1}{2}$. Lai m un n iznāktu naturāli skaitļi, a un b ir jābūt nepāra naturāliem skaitļiem, kas lielāki par 1. Tas, ka a>1 un b>1, jau zināms. Ja a vai b būtu pāra skaitlis, tad $a \cdot b$ nebūtu nepāra skaitlis. Pārbaude:

$m + 2mn + n =$

$= \frac{a-1}{2} + 2\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2} + \frac{b-1}{2} =$

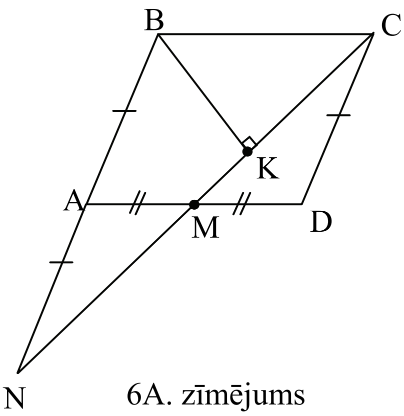
$= \frac{a-1+ab-a-b+1+b-1}{2} = \frac{ab-1}{2} = k$

Tātad, ja 2k+1 nav pirmskaitlis, eksistē tādi naturāli skaitļi m un n, ka k=m+2mn+n.

2. variants. Pierādījums: tā kā 2k+1 nav pirmskaitlis, tad to noteikti var sadalīt reizinātājos a un b. Tad $2k+1 = a\cdot b$. Tā kā 2k+1 ir nepāra skaitlis, tad tā reizinātājiem a un b arī jābūt nepāra skaitļiem. (Pamatosim: ja a vai b būtu pāra skaitlis, tad arī viss reizinājums, t. i., 2k+1, būtu pāra skaitlis, bet tā nevar būt.) Tātad a un b ir nepāra skaitļi, kas uzrakstāmi formā 2p+1 un 2q+1. Sareizinot izteiksmes 2p+1 un 2q+1, iegūstam, ka $2k+1=(2p+1)(2q+1)$ jeb $2k+1=4pq+2p+2q+1$. No iegūtās vienādības izsakām k, t. i., $2k=4pq+2p+2q$ un $k=2pq+p+q$. Tātad esam ieguvuši, ka k izsakāms formā $k=p+2pq+q$. Ja apzīmējam m=p un n=q, tad esam pierādījuši uzdevumā prasīto.

26.9.3.

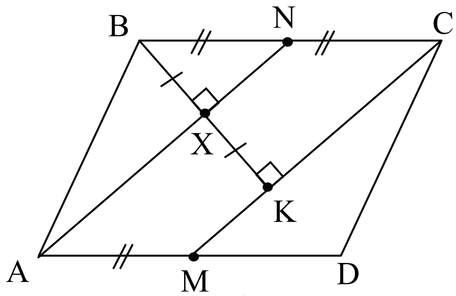
1. variants. Pierādījums:



6A. zīmējums

1) Pagarina CM līdz krustpunktam N ar taisni AB (skat. 6A. zīm.).
2) $\Delta AMN = \Delta DMC$, pēc pazīmes lml, jo $\angle AMN = \angle DMC$ kā krustleņķi, AM=DM, jo M ir malas AD viduspunkts, $\angle NAM = \angle CDM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AB un CD.
3) No trijstūru vienādības seko, ka AN=DC, un no paralelograma pretējo malu vienādības seko, ka DC=AB, tātad AN=AB.
4) Tātad A ir taisnleņķa trijstūra BKN hipotenūzas viduspunkts, kas ir arī ΔBKN apvilktās riņķa līnijas centrs. Tāpēc AK=AB kā ΔBKN apvilktās riņķa līnijas rādiusi.

2. **variants. Pierādījums:**



7A. zīmējums

1) Apzīmēsim ar N malas BC viduspunktu (skat. 7A. zīm.).
2) NC=AM, jo paralelograma ABCD malas ir vienādas, tātad arī malu puses ir vienādas.
3) Tā kā $NC \| AM$, jo paralelograma pretējās malas ir paralēlas, tad ANCM ir paralelograms.
4) Paralelograma pretējās malas ir paralēlas, tātad $AN \| CM$.
5) Tā kā $CM \perp BK$, tad arī $AN \perp BK$.
6) Atcerēsimies Talesa teorēmu: ja savstarpēji paralēlas taisnes, krustojot leņķa malas, uz vienas no tām atdala vienādus nogriežņus, tad arī uz leņķa otras malas tās atdala vienādus nogriežņus.
7) Pielietosim Talesa teorēmu $\angle KBC;$ no tā, ka BN=NC, seko, ka BX=XK.
8) Tātad ΔBAK nogrieznis AX vienlaicīgi ir augstums un mediāna, tāpēc ΔBAK ir vienādsānu un AB=AK, kas arī bija jāpierāda.

26.9.4. Atbilde: pēdējais nogrieznis būs balts. **Pierādījums:** noteikti varēs novilkt tos nogriežņus, kas savieno uz riņķa līnijas blakus esošos punktus, tādu būs n. Tas, **kurus** "iekšējos" nogriežņus novelk, būs atkarīgs no izvēlētās vilkšanas secības. Nogriežņu vilkšana beigsies tad, kad n-stūris būs ar diagonālēm sadalīts trijstūros. (Ja kāda daļa būtu 4-stūris, 5-stūris utt., tad tajā varētu vēl novilkt diagonāles.) Pieņemsim: nogriežņu vilkšanas process ir beidzies, vairs nevar novilkt nevienu nogriezni, kas atbilstu uzdevuma prasībām. Tad ir izveidojies kaut kāds trijstūru skaits – apzīmēsim to ar t. Visu trijstūru iekšējo leņķu summa ir $180^\circ \cdot t$, no otras puses, tā vienāda ar n-stūra iekšējo leņķu lielumu summu $180^\circ \cdot (n-2)$.

Tāpēc t=n–2 neatkarīgi no tā, kurus nogriežņus novelk. Lai n-stūri sadalītu n–2 daļās, tiek novilkti n–3 "iekšējie" nogriežņi (katra nogriežņa novilkšana daļu skaitu palielina par 1). Tātad **kopīgais** novilkto nogriežņu skaits būs n+(n–3)=2n-3, t. i., nepāra skaitlis. Tāpēc pēdējais novilktais nogrieznis būs balts.

26.9.5.

a) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** tā kā kopējais konfekšu skaits ir pāra skaitlis, tad būs pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits konfekšu. (Pamatosim: pieņemsim pretējo, ka ir nepāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits konfekšu. Tad kopējais konfekšu skaits būtu nepāra skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu, jo kopējais konfekšu skaits ir pāra skaitlis 64. Tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un ir pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits konfekšu.) Katrām divām kaudzītēm, kurās ir nepāra skaits konfekšu, veicam uzdevumā atļauto "pārlikšanas" operāciju. Ja mums bija divas kaudzītes A un B ar nepāra skaitu konfekšu attiecīgi x un y, un y>x, tad tagad kaudzītē A ir x+x=2x – pāra skaits konfekšu un kaudzītē B ir y–x konfekšu, kas arī ir pāra skaitlis, jo, no nepāra skaitļa atņemot nepāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tagad visās kaudzītēs ir pāra skaits konfekšu.

Tālāk apskatām tās kaudzītes, kurās konfekšu skaits nedalās ar 4, t. i., meklējam kaudzītes, kurās ir nepāra skaits konfekšu pāru. Tādu kaudzīšu noteikti ir pāra skaits, jo konfekšu pāru ir 64:2=32. Atkal pa pāriem apvienojam tās kaudzītes, kurās ir nepāra skaits konfekšu pāru, un veicam "pārlikšanas" operāciju. Un līdzīgi, kā iepriekš aprakstīts, iegūstam, ka konfekšu skaits visās kaudzītēs dalās ar 4.

Tālāk līdzīgi meklējam, kurās kaudzītēs konfekšu skaits nedalās ar 8 – arī tādu ir pāra skaits, tad ar 16 un 32. Esam ieguvuši, ka visu kaudzīšu konfekšu skaits dalās ar 32. Tā kā kopējais konfekšu skaits ir 64, tad mums ir divas kaudzītes, katra ar 32 konfektēm. Tās apvienojot, iegūstam vienu kaudzīti ar 64 konfektēm.

b) Atbilde: nē, ne vienmēr. **Pierādījums:** pieņemsim, ka ir 5 kaudzītes pa 20 konfektēm katrā. Lai kā arī veiktu pārlikšanu visās kaudzītēs, konfekšu skaits katrā kaudzītē vienmēr dalīsies ar 20; bet, lai visas konfektes savāktu vienā kaudzē, pirms pēdējā gājiena jābūt divām kaudzēm ar 50 konfektēm katrā.

Latvijas 27. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

27.5.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.5.2. atrisinājumu. Uzdevumā izmainīts tikai pēdējais apskatāmais skaitlis no 1999 uz 2000. Bet, tā kā skaitļa 2000 ciparu summa nedalās ar 5, tad uzdevuma atrisinājums nemainās.

27.5.2. Atbilde:

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 8 & 9 & 1 \\ & 3 & 8 & 9 \\ + & & 3 & 8 \\ & & & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Pierādījums: pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Apskatīsim iespējamās A vērtības. A noteikti nav lielāks vai vienāds ar 5, jo tūkstošu ciparam summā jābūt 4. Apskatīsim gadījumu, ja A=4. No simtu cipara aprēķināšanas zinām, ka U+A=3. Bet, lai arī cik mazs būtu skaitlis U, $U + A \neq 3$, ja A=4. Tātad $A \neq 4$. Apskatīsim gadījums, kad A=1, tad pārnesumam no simtu šķiras jābūt 3. Izpētīsim, kādi var būt pārnesumi, ja A=1.

Pārnesums no vienu šķiras uz desmitu šķiru, ja I, D un U ir maksimāli iespējamie cipari un A=1, ir 2, jo summa I+D+U+A maksimāli ir 9+8+7+1=25.

Pārnesums no desmitu šķiras uz simtu šķiru arī ir 2, ja D un U ir maksimāli iespējamie cipari un A=1, tad summa D+U+A maksimāli ir 9+8+1=18. Vēl jāpieskaita 2, kā pārnesums no vienu šķiras uz desmitu šķiru. Tātad kopā maksimāli ir 20 un lielākais iespējamais pārnesums no desmitu šķiras uz simtu šķiru ir 2.

Bet pārnesums no simtu šķiras uz tūkstošu šķiru ir 1, jo U+A maksimāli ir 10, jo U maksimāli var būt 9 un A=1. Pieskaitot maksimālo pārnesumu no simtu šķiras, t. i., 2, iegūstam 12. Tātad lielākais pārnesums uz tūkstošu šķiru, ja A=1, ir 1. Un gala rezultātā tūkstošu cipara vietā, kur jābūt 4, iegūstam tikai 2. Tātad $A \neq 1$.

Izpētīsim kādi var būt pārnesumi, ja A=2.

Pārnesums no vienu šķiras uz desmitu šķiru, ja I, D un U ir maksimāli iespējamie cipari un A=2, ir 2, jo summa I+D+U+A maksimāli ir 9+8+7+2=26.

Pārnesums no desmitu šķiras uz simtu šķiru arī ir 2, ja D un U ir maksimāli iespējamie cipari un A=2, tad summa D+U+A maksimāli ir 9+8+2=19. Vēl jāpieskaita 2, kā pārnesums no vienu šķiras uz desmitu šķiru. Tātad kopā maksimāli ir 21 un lielākais iespējamais pārnesums no desmitu šķiras uz simtu šķiru ir 2.

Bet pārnesums no simtu šķiras uz tūkstošu šķiru ir 1, jo U+A maksimāli ir 11 (U maksimāli var būt 9 un A=2). Pieskaitot maksimālo pārnesumu no simtu šķiras, t. i., 2, iegūstam 13. Tātad lielākais pārnesums uz tūkstošu šķiru, ja A=2, ir 1. Un gala rezultātā tūkstošu cipara vietā, kur jābūt 4, iegūstam tikai 3. Tātad $A \neq 2$.

Vienīgais gadījums, ko vēl neesam apskatījuši, ir A=3. Tā kā neviens cits neder, tad A tiešām ir 3. Apskatīsim iespējamos pārnesumus. Ja I, D un U ir maksimāli iespējamie un A=3, tad pārnesums no vienu šķiras uz desmitu šķiru ir ≤ 2, un no desmitu šķiras uz simtu šķiru tāpat ≤ 2. Apskatīsim situāciju simtu un tūkstošu šķirās.

$$\begin{array}{rr} 3 & U \\ + & 3 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

Ja $U \leq 7$, tad simtu šķirā pie maksimāla pārnesuma no desmitu šķiras lielākā summa, ko iegūstam, ir 7+3+2=12. Tas nevar būt, jo simtu šķirā jābūt 3. Tātad U=8 vai U=9.
Ja U=9, tad izveidojusies situācija:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 9 & D & I \\ & 3 & 9 & D \\ + & & 3 & 9 \\ & & & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Vieninieku vienu šķirā var iegūt tikai, ja I+D=9; jo I+D+9+3 atlikumā jādod 1. Un 9+3=12 un vienīgais gadījums, kad summa dos atlikumu 1 ir, ja I+D=9. Bet lai simtu kolonnā veidotos summas atlikums 2, jābūt D=8, taču tad visa summa būtu 4421. Tātad $U \neq 9$, bet U=8. Iegūstam piemēru:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 8 & D & I \\ & 3 & 8 & D \\ + & & 3 & 8 \\ & & & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

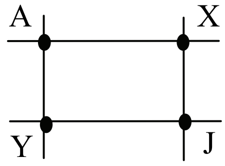
no kura redzams: tā kā 8+3=11, tad, lai vienu cipars būtu 1, I+D jābūt 10. Un līdz ar to pārnesums uz desmitu kolonnu ir 2. Tātad summa desmitu kolonnā ir 2+D+8+3=D+13 un, lai summā pēdējais cipars būtu 2, D ir jābūt 9. Un tad savukārt seko, ka I=1. Pārbaude parāda, ka atrisinājums der!

27.5.3. Atbilde: pirmdien mežā pirms brokastīm bija 41 votovapa, 28 pukkas un 60 šillišallas.
Pierādījums: aprēķinu atspoguļo sekojoša tabula, ko iegūst rindu aiz rindas. Tā kā ceturtdienas vakarā bija palicis tikai viens rūķītis un pēc vakariņām šillišalla padzen pukku, tad vienīgā iespēja ir, ka ceturtdien pirms vakariņām bija tieši viens šillišalla un viena pukka. Šillišalla pukku padzina un palika vienīgais rūķītis mežā. Tā iegūta pirmā tabulas rindiņa. Pārējās rindiņas seko no iepriekšējās, ņemot vērā uzdevuma nosacījumus.

Diena	*Pirms kuras ēdienreizes*	*Votivapas*	*Pukkas*	*Šillišallas*
Ceturtdiena	Vakariņām		1	1
	Pusdienām	1	1	1
	Brokastīm	1	1	2
Trešdiena	Vakariņām	1	3	2
	Pusdienām	4	3	2
	Brokastīm	4	3	6
Otrdiena	Vakariņām	4	9	6
	Pusdienām	13	9	6
	Brokastīm	13	9	19
Pirmdiena	Vakariņām	13	28	19
	Pusdienām	41	28	19
	Brokastīm	41	28	60

27.5.4. Pierādījums: ja Jānis ar Andri atrodas vienā kolonnā vai rindā, tad prasītais izpildās. Paskaidrosim: lai arī kurās vietās vienā rindā atrastos Jānis un Andris, ir dots, ka visā rindā neviens nav garāks par Jāni un neviens nav garāks par Andri. Ja Jānis būtu garāks par Andri, tad neizpildītos uzdevuma nosacījumi Andrim; ja Andris būtu garāks par Jāni, tad neizpildītos uzdevuma nosacījumi Jānim. Spriedums par abu puišu atrašanos vienā un tajā pašā kolonnā līdzīgs.

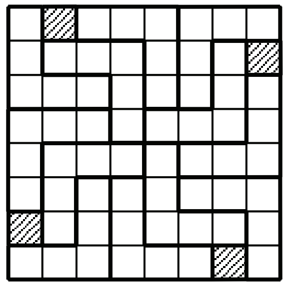
Apskatīsim gadījumu, kad Andris un Jānis neatrodas vienā un tajā pašā rindā un arī neatrodas vienā un tajā pašā kolonnā. Apzīmēsim ar X skolnieku, kurš atrodas vienā rindā ar Andri un vienā kolonnā ar Jāni, kā arī ar *Y* – skolnieku, kurš atrodas vienā rindā ar Jāni un vienā kolonnā ar Andri (skat. zīm. 8A).
No dotā zinām, ka $A \geq X \geq J$ un arī $A \leq Y \leq J$. Ņemot vērā abas nevienādības, varam secināt, ka Andris un Jānis ir vienāda auguma.



8A. zīmējums

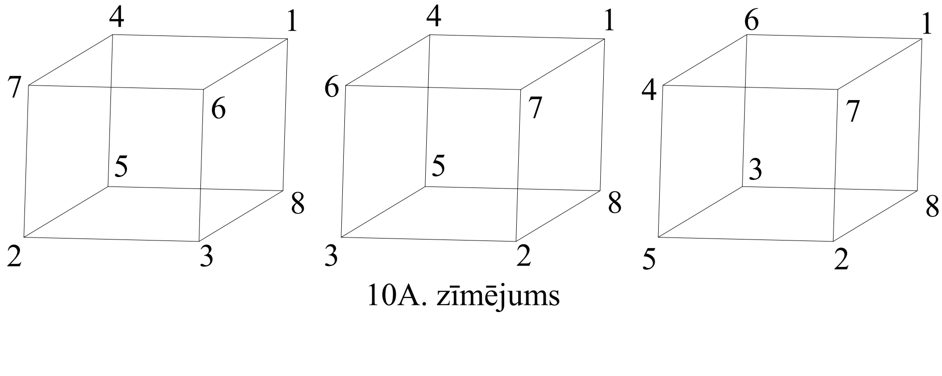
27.5.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo izgriezto figūriņu skaitu un parādīt piemēru; otrkārt, pierādīt, ka vairāk figūriņu izgriezt nav iespējams.

- **Atbilde:** var izgriezt 12 figūriņas. **Piemērs:** skat. zīm. 9A.
- **Pierādījums:** viena figūra sastāv no 5 rūtiņām. Kopā kvadrātā ir 64 rūtiņas. Pieņemsim, ka no kvadrāta var izgriezt 13 figūriņas, tad šīs figūriņas kopā aizņemtu $13 \cdot 5 = 65$ rūtiņas. Bet zinām, ka kvadrātā kopā ir 64 rūtiņas. Tātad esam ieguvuši pretrunu un sākotnējais pieņēmums, ka no kvadrāta var izgriezt 13 figūriņas, ir nepareizs. No kvadrāta noteikti nav iespējams izgriezt arī vairāk par 13 figūriņām, jo tad tās kopā aizņemtu vēl vairāk rūtiņu nekā 13 figūriņas. No tā seko, ka 13 vai vairāk figūriņas no kvadrāta izgriezt nevar. Tātad lielākais iespējamais izgriezto figūriņu skaits ir 12.


9A. zīmējums

6. klase

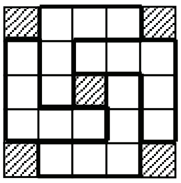
27.6.1. Atbilde: uzrakstīts 101 cipars. **Pierādījums:** skaitļos no 1 līdz 9 ir pieci nepāra cipari; tātad arī skaitļos no $\overline{n0}$ līdz $\overline{n9}$ ir pa pieciem nepāra *vienu cipariem.* Desmitu pavisam ir 10. Tātad kopā ir $10 \cdot 5$ nepāra vienu cipari. Bet vēl jāņem vērā, ka arī *desmitu cipars* var būt nepāra. Pavisam ir 5 desmiti, kuri sākas ar nepāra ciparu. Katrā desmitā ir 10 skaitļi. Tātad vēl ir $5 \cdot 10 = 50$ nepāra ciparu. Pieskaitot ciparu 1 no skaitļa 100, iegūstam atbildi, t. i., 101.
27.6.2. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.6.3. atrisinājumu.
27.6.3. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka neviens deputāts nav iesaistījies pāra skaitā komisiju. Tas nozīmē, ka visi 100 deputāti ir iesaistījušies nepāra skaita komisiju. Saskaitīsim, cik vietas komisijās ieņem 100 deputāti kopā. Jāsaskaita 100 nepāra skaitļi, jo katrs no 100 deputātiem iesaistījies nepāra skaitā komisiju. Saskaitot 100 nepāra skaitļus, iegūsim pāra skaitli. Tagad saskaitīsim, cik locekļu ir komisijās kopā. Ņemot vērā, ka ir dotas 17 komisijas un katrā no tām ir nepāra skaits locekļu, kopā sanāk nepāra skaitlis. Pretruna – no vienas puses deputāti komisijās kopā ieņem pāra skaitu vietu, no otras puses – nepāra skaitu vietu. Tātad sākotnējais pieņēmums bija nepareizs, un ir tādi deputāti, kas ir iesaistījušies pāra skaitā komisiju.
27.6.4. Atbilde: skat. 10A. zīm..

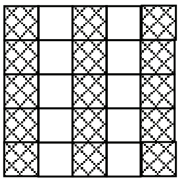


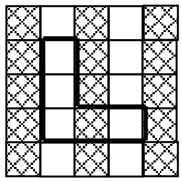
10A. zīmējums

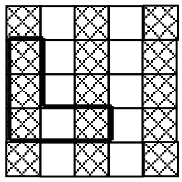
27.6.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamos izgriezto figūriņu skaitu un parādīt piemēru; otrkārt, pierādīt, ka vairāk figūriņu izgriezt nav iespējams.

- **Atbilde:** var izgriezt 4 figūriņas. **Piemērs:** to, ka var izgriezt 4 figūras, redzam zīm. 11A.


11A. zīmējums


12A. zīmējums


13A. zīmējums


14A. zīmējums

- **Pierādījums:** ja kvadrātā varētu izvietot 5 figūriņas, tad katra kvadrāta rūtiņa būtu kādas figūriņas sastāvā un tukšu rūtiņu nebūtu (jo kvadrātā ir tieši 25 rūtiņas un 5 figūriņas, kas katra aizņem 5 rūtiņas, aizņemtu tieši $5 \cdot 5 = 25$ rūtiņas). Nokrāsosim doto kvadrātu, kā parādīts zīmējumā 12A. Viegli pārbaudīt: lai arī kā mēs liktu doto figūru, tā aizņems 4 baltas un 1 melnu rūtiņu (skat. zīm. 13A.) vai 4 melnas un 1 baltu rūtiņu (skat. zīm. 14A.). Balto un melno rūtiņu skaits šādās figūrās atšķirtos par 3. Tātad, ievietojot 5 figūras, balto un melno rūtiņu skaitam jāatšķiras par 3 daudzkārtni. Bet zinām, ka ir 15 melnas un 10 baltas rūtiņas. Tātad melno un balto rūtiņu skaits atšķiras par 5. No tā, ka 5 nav 3 daudzkārtnis, seko, ka kvadrātā nevar izvietot 5 uzdevumā dotās figūriņas.

7. klase

27.7.1.

a) Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** kvadrātu summu neizmainīsim, ja tai pieskaitīsim un atņemsim vienu un to pašu vērtību 2ab. Tātad varam rakstīt, ka
$a^2+b^2+c^2+d^2=a^2-2ab+b^2+c^2+2ab+d^2=$ (tā kā ab=cd, tad varam 2ab vietā rakstīt 2cd)
$= a^2-2ab+b^2+c^2+2cd+d^2=$ (izmantosim summas un starpības kvadrātu formulas $(x+y)^2$ un $(x-y)^2$)
$=(a-b)^2+(c+d)^2$. Esam ieguvuši prasīto – izteikuši sākumā doto izteiksmi kā 2 veselu skaitļu, a–b un c+d, kvadrātu summu.

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums**: skaitli $a^2+b^2+c^2+d^2$ ne vienmēr var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu. Piemēram, ja a=b=c=d=1, tad $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Skaitli 4 var izsacīt kā divu naturālu skaitļu summu tikai 2 veidos: 1+3=4 vai 2+2=4. Tā kā katrā no šiem veidiem vismaz viens saskaitāmais nav naturāla skaitļa kvadrāts, tad varam secināt, ka skaitli 4 nevar izteikt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu.

27.7.2. Atbilde: meklējamais skaitlis ir 777777. **Pierādījums**: meklējamais skaitlis noteikti būs formā $a \cdot 11...1$, kur a – cipars. Reizinātājs 11...1 nodrošina, ka skaitlī visi cipari būs vienādi, bet reizinātājs a nosaka, kādi šie cipari būs. Lai $a \cdot 11...1$ dalītos ar 49, ir 2 varianti: vai nu a dalās ar 7 un 11...1 dalās ar 7, vai arī 11...1 dalās ar 49. Apskatīsim pirmo gadījumu, kad 11...1 dalās ar 7. Zinām, ka 1, 11, 111, 1111, 11111 nedalās ar 7, bet 111111 dalās ar 7. Reizinātājam a jābūt 7, lai tas dalītos ar 7. Tad izveidojas skaitlis no sešiem cipariem 777777, kas dalās ar 49.
Apskatīsim otro gadījumu, kad 11....1 dalās ar 49. Redzam, ka skaitlis 1111111 nedalās ar 49, bet tas nozīmē: pat ja ir tāds skaitlis formā 11...1, kas dalās ar 49, tad šis skaitlis noteikti ir lielāks par 777777 (jo satur vairāk ciparu!). Tātad meklētais skaitlis ir 777777.

27.7.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.7.4. atrisinājumu.

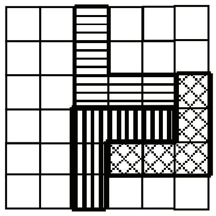
27.7.4.

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** 1+4=5, 2+5=7, 3+8=11, 9+10=19, 11+12=23, 6+7=13.

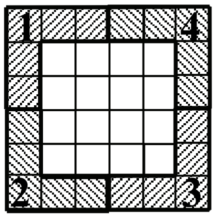
b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** saskaitot pa pāriem skaitļus no 1 līdz 50, vislielākā summa, ko varam iegūt, ir 99 (saskaitot 50 un 49). Tātad varam apskatīt pirmskaitļus līdz 99. Līdz 99 ir šādi pirmskaitļi: 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97. Šādu pirmskaitļu ir tikai 24. Tā kā mums ir 50 skaitļi no 1 līdz 50, tad izveidosies 25 pāri. Tas nozīmē, ka būs nepieciešamas 25 dažādas summas. Tātad prasītais nav iespējams.

27.7.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast mazāko iespējamo izgriežamo figūriņu skaitu un parādīt piemēru; otrkārt, pierādīt, ka vēl mazāk figūriņas izgriezt nav iespējams.

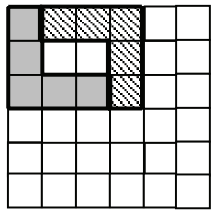
- **Atbilde:** var izgriezt 3 figūriņas. **Piemērs:** pietiek ar 3 figūru izgriešanu (skat. zīm. 15A.).



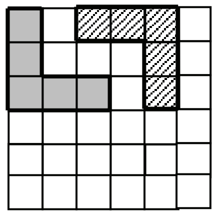
15A. zīmējums



16A. zīmējums



17A. zīmējums



18A. zīmējums

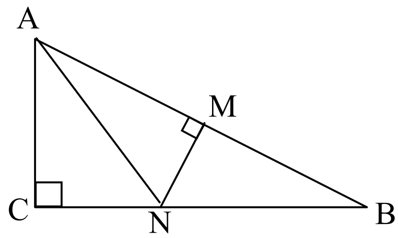
- **Pierādījums:** parādīsim, ka ar 2 figūru izgriešanu nepietiek. Lai arī kā izgrieztu divas figūras, vienmēr varēs izgriezt vēl vismaz vienu no 16A. zīm. attēlotajām figūrām 1; 2; 3 vai 4. Ja tā nebūtu, tad ar katru no 2 izgriežamajām figūrām būtu "jābloķē" divu no 16A. zīm. attēloto figūru izgriešanu. Apskatīsim izgriežamo figūru, kas "sabojā", piemēram, 1 un 4. Tai iespējami tikai divi principiāli dažādi stāvokļi (skat. zīm. 17A. un 18A. iesvītroto figūru); abos redzams, ka var izgriezt vēl vienu figūru (pelēkajā krāsā).

8. klase

27.8.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.8.1. atrisinājumu.

27.8.2.

a) Atbilde: jā, eksistē. **Pierādījums:** meklējamais trijstūris var būt taisnleņķa trijstūris, kura leņķi ir: $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$ un $\angle ACB = 90^\circ$. Taisnleņķa trijstūrī katete pret 30° lielo leņķi ir puse no hipotenūzas, tātad izpildās arī uzdevuma nosacījums par malu attiecību.



19A. zīmējums

b) Atbilde: $\angle ACB = 90^\circ$. **Pierādījums:**

Novelkam leņķa *A* bisektrisi *AN* (skat. zīm. 19A.).

ΔANB – vienādsānu, jo pēc dotā $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$ un tad $\frac{1}{2}\angle CAB = \angle BAN = \angle NBA$.

Ar M apzīmēsim AB viduspunktu.

Tad NM ir perpendikuls pret pamatu ΔANB. Tātad $\angle AMN = 90^\circ$

$\Delta ACN = \Delta AMN$ pēc pazīmes mlm, jo AN – kopīga mala; $\angle CAN = \angle NAM$, jo AN – bisektrise; $AC = \frac{1}{2}AB$ pēc dotā, $AM = \frac{1}{2}AB$, jo M – AB viduspunkts. Tātad AC=AM.

Vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi, tātad $\angle ACB = 90^\circ$, jo $\angle AMN = 90^\circ$.

27.8.3.

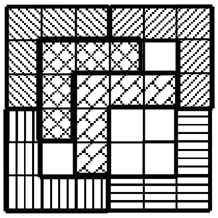
a) Atbilde: nē, nevarēs. **Pierādījums:** uz vienas kartītes var būt uzrakstīts skaitlis 51 un uz katras no pārējām 49 kartītēm uzrakstīts skaitlis 1. Tad nevarēs izvēlēties kartītes tā, lai uz tām uzrakstīto summa būtu 50.

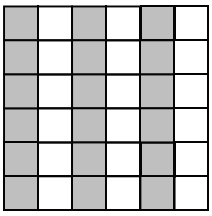
b) Atbilde: jā, varēs. **Pierādījums:** sadalīsim riņķa līniju 100 vienādās daļās. Ir izveidojušies 100 punkti, kas norobežo 100 vienādus riņķa līnijas lociņus. No 100 punktiem 51 atzīmēsim sarkanu tā, lai starp punktiem esošo lociņu skaits atbilstu uz kartītes uzrakstītajam punktu skaitam. Starp sākumā dotajiem 100 punktiem var novilkt 50 diametrus (katrs punkts ietilpst vienā diametrā). Tātad mums būs 50 diametri, kas veidoti no visiem 100 punktiem, no kuriem 51 ir sarkanā krāsā. No tā seko, ka noteikti varēs atrast tādu diametru, kuram abos galos būs sarkani punkti. No otras puses, diametrs sadala riņķa līniju uz pusēm, tātad vienā pusē no tā paliek 50 mazie lociņi un otrā – arī 50. Tātad, ņemot tās kartītes, kas atbilst vienai riņķa līnijas pusei, iegūsim uzdevumā prasīto summu 50.

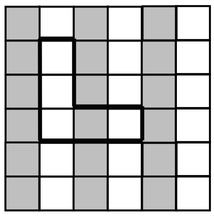
27.8.4. Pierādījums: sadalīsim riņķa līniju 2000 vienādās daļās. Ir izveidojušies 2000 punkti, kas ierobežo 2000 vienādus riņķa līnijas lociņus. Katrai hordai ar n apzīmēsim, cik mazos lociņus tā savelk. Apskatīsim atsevišķi gadījumus, kad n=1,2,...,1000. Pagriezīsim riņķa līniju ap centru par n mazajiem lociņiem. Tad būsim nonākuši no hordas (kas savelk n lociņus) viena galapunkta uz otru galapunktu. Apskatīsim, kādā krāsā ir šie galapunkti. Apzīmēsim: x – tik baltie punkti pagriežot pāriet par baltiem. Tā kā kopā ir 1000 baltie punkti un x no tiem pāriet par baltiem, tad atlikušie 1000–x baltie punkti pāriet par sarkaniem. Arī sarkano punktu kopā ir 1000. Pagriežot sarkano punktu, tas var pāriet vai nu par baltu, vai sarkanu. Esam jau apskatījuši 1000–x sarkanos punktus (tos, par kuriem pagriezienā pāriet baltie). Tātad par citiem sarkaniem punktiem pāriet sarkani punkti, un to skaits ir $1000-(1000-x)=x$. Tātad ir x punkti, kas no baltiem pāriet par baltiem, un x punkti, kas no sarkaniem pāriet par sarkaniem. Ja horda ir novilkta starp baltiem punktiem, sauksim to par baltu hordu, bet, ja starp sarkaniem, tad – par sarkanu. Tātad ir vienādā skaitā baltās un sarkanās hordas, kas savelk 1 lociņu, 2 lociņus, ..., 1000 lociņus. Tātad arī to kopējie garumi būs attiecīgi vienādi.

27.8.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo izgriezto figūriņu skaitu un parādīt piemēru; otrkārt, pierādīt, ka vairāk figūriņu izgriezt nav iespējams.

- **Atbilde:** Kvadrātā var ievietot 6 figūriņas. **Piemērs:** skat. 20A. zīm.


20A. zīmējums


21A. zīmējums


22A. zīmējums

- **Pierādījums:** kvadrāta kopējais rūtiņu skaits ir 36, bet viena figūra aizņem 5 rūtiņas. Tā kā $8 \cdot 5 = 40 > 36$, tad 8 vai vairāk figūras izgriezt nevar.

Pierādīsim, ka nevar izgriezt arī 7 figūras. Pieņemsim pretējo, ka var izgriezt 7 figūras. Nokrāsosim doto kvadrātu, kā parādīts zīmējumā 21A. Viegli pārbaudīt: lai arī kā mēs liktu doto figūru, balto un melno rūtiņu skaits šajā figūrā atšķirtos par 3. (Liekot figūru, būtu 4 melnas un 1 balta rūtiņa vai 4 baltas un 1 melna rūtiņa – skat. zīm 22A). Viena rūtiņa figūrām nepieder, jo $7 \cdot 5 = 35$. Tātad izgrieztajās figūrās melno un balto rūtiņu daudzumi kopā atšķirtos par 1. Bet katrā tādā figūrā šie daudzumi atšķiras par 3 (skat. zīm. 22A), tāpēc arī kopā tiem jāatšķiras par 3 daudzkārtni. Tātad iegūta pretruna un 7 figūras izgriezt nevar.

9. klase

27.9.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.9.1. atrisinājumu.

27.9.2.

a) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** prasītais nav iespējams, jo pat četru lielāko iespējamo saskaitāmo summa ir mazāka par 2.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<2$$

b) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** kā 4 naturālos skaitļus var ņemt 3, 12, 15, 20. To katrs var pārbaudīt patstāvīgi.

Parādīsim, kā varēja nonākt līdz šai atbildei.

Zinām, ka $\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$, bet $\frac{1}{72}$ var izteikt kā $\frac{1}{72} = \frac{1}{144} + \frac{1}{144}$. Zināms, ka $144=12^2$. Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem naturālajiem skaitļiem jābūt dažādiem, tad vienu no daļām $\frac{1}{144}$ vajag pārveidot savādāk:

$\frac{1}{144} = \frac{1}{3^2 \cdot 4^2} =$ (skaitītāju un saucēju pareizinām ar 5^2)

$= \frac{5^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} =$ (zinām, ka $5^2=3^2+4^2$)

$= \frac{3^2 + 4^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} =$ (katru saskaitāmo skaitītājā varam atsevišķi izdalīt ar saucēju)

$= \frac{3^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \frac{4^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2}$.

Kopā ņemot iegūstam, ka $\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{144} + \frac{1}{225} + \frac{1}{400}$.

27.9.3. Pierādījums: (skat. zīm. 23A.)

c) BNOS ir paralelograms, jo $BS \| NO$ un $SO \| BN$.

d) OL – augstums starp paralelograma malām NO un BS.
OT – augstums starp paralelograma malām SO un BN.

e) OL=OT kā riņķa līnijas rādiusi.

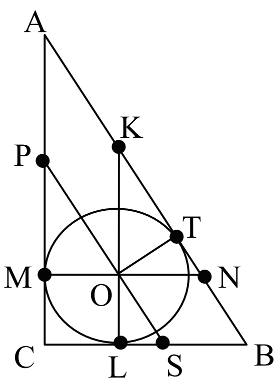
f) Tā kā BNOS ir paralelograms ar vienādiem augstumiem, tad tas ir rombs. Tāpēc BN=BS.

g) BT=BL kā pieskaru nogriežņi no viena punkta B.

h) Tā kā BT=BL un OL=OT, tad arī NT=LS.

i) Līdzīgi pierāda, ka TK=MP.

j) Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam, ka NK=MP+LS.



23A. zīmējums

27.9.4.

a) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** ar x un y apzīmējam skaitļus, ko izvēlamies kā reizināmos. Zinām, ka $1+2+...+10=55$. Pēc uzdevumā dotā, 2 naturālu skaitļu reizinājums (no 1 līdz n) ir vienāds ar pārējo skaitļu summu, tātad $x \cdot y = 55-(x+y)$. Iegūto vienādību var pārveidot; pārnesam x un y uz kreiso pusi un iegūstam

$xy+x+u=55$; iznesam x pirms iekavām un pieskaitām abām vienādojuma pusēm 1. Iegūstam $x(y+1)+y+1=56$ jeb $(x+1)(y+1)=56$.

Varam ņemt x=6, y=7.

b) Atbilde: nē, nav iespējams. **Pierādījums:** risināsim līdzīgi kā a) gadījumā. Ar x un y apzīmēsim reizinātos skaitļus. Skaitļu no 1 līdz 15 summa ir 120. Tad no uzdevumā dotā seko, ka

$x \cdot y = 120-(x+y)$. Veicot pārveidojumus, iegūstam

xy+x+y=120. Iznesot pirms iekavām x un pieskaitām abām vienādojuma pusēm 1, iegūstam x(y+1)+y+1=120 jeb (1+x)(1+y)=121.

Iespējami tikai 2 varianti, kā, sareizinot 2 naturālus skaitļus, iegūt 121:

1) vai nu 1+x=1 un 1+y=121, vai arī 1+x=121 un 1+y=1 (neder, jo x un y neiznāk vajadzīgajās robežās),

2) vai arī 1+x=1+y=11 (neder, jo jābūt $x \neq y$).

Tātad prasītais nav iespējams.

27.9.5. Pierādījums: apskatīsim lampu, no kuras iziet lielākais daudzums vienas krāsas vītņu. Pieņemsim, ka tā ir lampa A ar x baltām vītnēm. Parādīsim, ka zirneklis var rāpot pa baltajām vītnēm. (Ja no

lampas A baltās un sarkanās vītnes iziet vienādā skaitā, tad viņš var rāpot arī pa sarkanajām vītnēm.) Lampas, kas savienotas ar A ar baltām vītnēm, sauksim par 1. grupas lampām, bet lampas, kas savienotas ar A ar sarkanām vītnēm, sauksim par 2. grupas lampām. Pieņemsim, ka B ir otrās grupas lampa, tad B ir savienota ar A ar sarkanu vītni. Ja B arī ar visām pirmās grupas lampām būtu savienota ar sarkanām vītnēm, tad no B izietu vismaz x+1 sarkana vītne (x vītnes uz 1. grupas lampām un 1 vītne uz A), bet no lampas A iziet tikai x vienas krāsas vītnes. Esam ieguvuši pretrunu, jo pieņēmām, ka no A iziet lielākais daudzums vienas krāsas vītņu. Tas nozīmē, ka B ar kādu no 1. grupas lampām ir savienota ar baltu vītni, tātad no B uz A var nokļūt, rāpojot pa 2 baltām vītnēm (caur 1. grupas lampu). Līdzīgi to var pierādīt jebkurai lampai, kas savienota ar A ar sarkanu vītni.
Apskatīsim iespējamos variantus:

1. Ja zirneklītim jānokļūst no 1. grupas lampas uz 1. grupas lampu, tad zirneklītim jārāpo pa baltu vītni uz lampu A un no lampas A pa baltu vītni uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklēta 1 lampa.
2. Ja zirneklītim jānokļūst no 2. grupas lampas uz 2. grupas lampu, tad zirneklītim jārāpo pa divām baltām vītnēm uz lampu A un no lampas A pa 2 baltām vītnēm uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklētas 3 lampas.
3. Ja zirneklītim jānokļūst no 1. grupas lampas uz 2. grupas lampu, tad zirneklītim jārāpo pa vienu baltu vītni uz lampu A un no lampas A pa 2 baltām vītnēm uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklētas 2 lampas.
4. Ja zirneklītim jānokļūst no 2. grupas lampas uz 1. grupas lampu, tad viņam jārāpo pa divām baltām vītnēm uz lampu A un no lampas A pa 1 baltu vītni uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklētas 2 lampas.

Latvijas 28. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

28.5.1. Atbilde: Andrim ir 3 ozola klucīši. **Pierādījums:** no pēdējā nosacījuma seko, ka tieši 3 klucīši nav no koka. Tas nozīmē, ka bronzas un dzelzs klucīšu kopā ir 3. Tā kā ir 1 bronzas klucītis, tad dzelzs klucīšu ir 3–1=2. No pirmā uzdevuma nosacījuma, ka tieši 6 klucīši nav ozola, seko, ka bronzas, dzelzs un liepas klucīšu kopā ir 6. Tad varam aprēķināt, ka liepas klucīšu ir 6–1–2=3. Un no vēl neizmantotā nosacījuma seko, ka tieši 7 klucīši nav no dzelzs. Tātad bronzas, ozola un liepas klucīšu kopā ir 7. Tā kā zinām gan bronzas, gan liepas klucīšu skaitu, tad varam aprēķināt ozola klucīšu skaitu. Andrim ir 7–3–1=3 ozola klucīši.

28.5.2.

a) Piemērs: $1 \cdot 333 = 333$ un pārveidojot var iegūt $2 \cdot 222 = 444$.

b) Piemērs: $3 \cdot 25 = 75$ un pārveidojot var iegūt $4 \cdot 16 = 64$.

28.5.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.5.4. atrisinājumu.

28.5.4. Atbilde: jā, Andris var panākt, lai uz viņam esošajām kartiņām uzrakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis. **Pierādījums:** apzīmēsim kartiņas, uz kurām ir pāra skaitļi, ar p un kartiņas, uz kurām ir nepāra skaitļi, ar n. Sākumā ir kartiņas p, p, p, p, n, n, n, n. Andris kā pirmo kartiņu izvēlas p un tālāk, ja 1) Bruno ņem n, tad Andris arī ņem n, 2) ja Bruno ņem p, tad arī Andris ņem p, ja vien tāds vēl ir atlicis. Ja Bruno jebkādā secībā ņem n, n un p, tad skaidrs, ka Andris iegūst kartiņas, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis, jo arī ņem n, n un p, kas kopā ar vēl sākumā paņemto p noteikti veido pāra skaitli (n+n=p, p+p=p). Apskatīsim gadījumu, kad Bruno jau ir paņēmis vienu p (līdz ar to arī Andris) un tagad ņem sev otro p (kopumā pēdējo), pie tam tā nav Bruno pēdējā kārts. (Skaidrs, ka tā nevar būt arī Bruno pirmā kārts: lai paņemtu otro p, vispirms ir jāpaņem pirmais, tātad tā ir Bruno 2. vai 3. kārts.) Tā kā Bruno paņem pēdējo p, tad Andrim ir jāņem n. Ir divas iespējas:

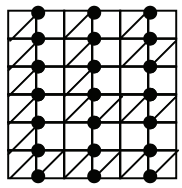
1) Bruno jau pirms tam ir paņēmis vienu n (līdz ar to arī Andris sev vienu). Tādā gadījumā Andris ir paņēmis divas kartiņas ar p (vienu sākumā un vienu, kad Bruno paņēma pirmo p) un divas kartiņas ar n (vienu, kad Bruno paņēma n un otru, kad Bruno paņēma otro p), un summā uz Andra kartiņām ir pāra skaitlis.

2) Bruno pirms tam nav paņēmis n. Tad Andris sev paņem pirmo no četrām n kartiņām. Tā kā visas p kartiņas jau izlietotas, tad Bruno tagad ņem n un arī Andris ņem n. Līdz ar to Andris ir paņēmis 2 p (vienu sākumā un vienu, kad Bruno ņēma pirmo p) un 2 n (vienu, kad Bruno ņēma otro p un vienu beigās, kad Bruno ņēma p). Tātad Andrim atkal ir kartiņas, uz kurām ciparu summa ir pāra skaitlis.

28.5.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo novelkamo diagonāļu skaitu un parādīt piemēru, kā tas ir iespējams; otrkārt, pierādīt, ka vairāk diagonāļu nav iespējams novilkt.

Atbilde: diagonāles var novilkt vislielākais 21 rūtiņai. Piemērs: skat. 24A. zīm.

Pierādījums: jebkurai vispār novelkamai diagonālei viens no gala punktiem atrodas kādā zīm. 24A. tumšāk atzīmētajā punktā. Tā kā šādu punktu ir tieši 21, tad vairāk kā 21 diagonāli novilkt nevar.



24A. zīmējums

6. klase

28.6.1. Atbilde: meklējamie skaitļi ir 94210, 84210 un 95210. **Pierādījums:** Apzīmēsim skaitli ar $\overline{abcde}$. No uzdevuma nosacījumiem seko: d>e, c>d+e, b>c+d+e, a>b+c+d+e. Ja $e \geq 2$, tad $d \geq 3$ (jo d>e), $c \geq 6$ (jo c>d+e), $b \geq 12$ (b>c+d+e). Iegūta pretruna, jo esam ieguvuši, ka $b \geq 12$, bet pēc mūsu apzīmējumiem b ir cipars. Tātad noteikti e<2. Ja e=1, tad $d \geq 2$, $c \geq 4$, $b \geq 8$, $a \geq 16$. Iegūta pretruna, jo esam ieguvuši, ka $a \geq 16$, bet pēc mūsu apzīmējumiem a ir cipars. Tātad $e \neq 1$, un seko, ka e=0. Ja

$d \geq 2$, tad $c \geq 3$, $b \geq 6$ un $a \geq 12$. Esam ieguvuši pretrunu, jo cipars a nevar būt lielāks vai vienāds par 12. Tā kā d>e, tad d=1. Ja $c \geq 3$, tad $b \geq 5$ un $a \geq 10$. Iegūta pretruna, jo cipars a nevar būt lielāks vai vienāds par 10. No tā, ka zināms: c>d+e un c<3, seko, ka c=2. No tā, ka c=2, seko: $b \geq 4$, tad var būt vai nu a=8, vai a=9. Ja b=5, tad a=9. Ja $b \geq 6$, tad atkal iegūstam pretrunu, jo noteikti $a \geq 10$. Tātad meklējamie skaitļi ir 94210, 84210 un 95210.

28.6.2.

a) Atbilde: jā, eksistē. **Piemērs:** par 12 pēc kārtas ņemtiem īpašiem skaitļiem der skaitļi no 1 līdz 12. **Pierādījums:** visi viencipara skaitļi ir īpaši, jo dalās ar savu nenulles ciparu reizinājumu, kas ir pats viencipara skaitlis. Skaitlis 10 ir īpašs, jo dalās ar 1, skaitlis 11 dalās ar 1 un skaitlis 12 dalās ar 2.

b) Atbilde: nē, neeksistē. **Pierādījums:** pieņemsim pretējo, ka mums ir izdevies atrast tādu 14 pēc kārtas esošu skaitļu virkni, kurā visi skaitļi ir īpaši. Starp šiem 14 noteikti būs skaitlis, kam vienu cipars ir 3. Apzīmēsim šo skaitli ar n. Tā kā n ir īpašs skaitlis, tad tas dalās ar savu nenulles ciparu reizinājumu. Tā kā vienu cipars ir 3, tad n noteikti dalās arī ar 3. Skaidrs, ka pēc kārtas esošu skaitļu virknē ar 3 dalās katrs trešais skaitlis, tātad n+10 un n–4 ar 3 noteikti nedalās. No otras puses skaitļa n+10 vienu cipars arī ir 3. Ja n+10 arī būtu īpašs skaitlis, tad tas dalītos ar savu nenulles ciparu reizinājumu un tātad arī ar 3. Zinām, ka, ja n vienu cipars ir 3, tad n–4 vienu cipars būs 9. Ja n–4 būtu īpašs skaitlis, tad arī tas dalītos ar savu nenulles ciparu reizinājumu, un, tā kā 9 ir viens no cipariem, tad n–4 dalītos arī ar 9 un arī ar 3. Tātad skaitļi n+10 un n-4 nav īpaši un mūsu virknē neietilpst. Tas nozīmē, ka maksimāli mūsu virknē ietilpst skaitļi no n–3 līdz n+9, tātad pavisam kopā 13 skaitļi. Esam ieguvuši pretrunu ar sākotnējo pieņēmumu, tātad tas bija aplams un nav iespējams izvēlēties pēc kārtas esošus 14 skaitļus, kas apmierinātu uzdevuma nosacījumus.

28.6.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.6.5. atrisinājumu.

28.6.4. Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** Andris pirmajā gājienā samaina skaitļa 123 ciparus vietām un iegūst 312. Nākošajos gājienos Andris nedara neko un ļauj Pēterim pakāpeniski iegūt 414, 516, 618, 720. Tad Andris samaina skaitļa 720 ciparus vietām un iegūst skaitli 027 jeb 27 un ļauj Pēterim iegūt skaitļus 129 un 231. Tad Andris samaina skaitļa 231 ciparus vietām un iegūst 312. Tālāk Andris atkal veic iepriekš aprakstītās darbības no sākuma. Tā kā ir izveidojies cikls, kura laikā četrciparu skaitlis netika iegūts, tad skaidrs, ka, tā turpinot, četrciparu skaitli iegūt nevarēs.

28.6.5. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nav tādu 15 skolēnu, kas mācītos vienā skolā. Ar n apzīmēsim to skolu skaitu, no kurām ir vismaz 2 skolēni. Ja šādas skolas, būtu vismaz 5, tad nebūtu iespējams no jebkuriem 10 skolēniem izvēlēties 3, kas mācās vienā skolā. (Piemēram: varam izveidot 10 skolēnu grupu no 5 dažādām skolām paņemot no katras divus skolēnus.) Tātad šādas skolas, no kurām ir vismaz 2 skolēni, ir 4 vai mazāk. Ja n<4 un nav tādu 15 skolēnu, kas mācītos vienā skolā, tad skolās, no kurām ir vismaz 2 skolēni, mācās vislielākais $14 \cdot 3 = 42$ skolēni. Tas nozīmē, ka ir vēl 18 skolēni, kas ir katrs no savas skolas. Bet tad mēs noteikti varam izvēlēties 10 cilvēku grupu, kurā nav tādu 3 skolēnu, kas mācītos vienā skolā (uzdevuma nosacījums). Tātad iegūta pretruna un n nevar būt mazāks par 4. Apskatīsim gadījumu, ja n=4, pie pieņēmuma, ka nav tādu 15 skolēnu, kas mācās vienā skolā; tad šajās skolās, no kurām ir vismaz 2 skolēni, ir vislielākais $4 \cdot 14 = 54$ skolēni. Tas nozīmē, ka ir vēl 6 skolēni, kas katrs ir no savas skolas. Arī šoreiz varam izvēlēties tādus 10 skolēnus, lai nevieni 3 no viņiem nemācītos vienā skolā: izvēlamies pa 2 skolēniem no četrām "lielajām" skolām (skolas, no kurām ir vismaz 2 skolēni) un vēl 2 skolēnus katru no savas skolas. Esam ieguvuši pretrunu, jo no šādas 10 skolēnu grupas nekādi 3 nemācās vienā skolā. Esam apskatījuši visas iespējamās n vērtības, neapskatītu variantu nav, bet visi apskatītie noved pie pretrunas. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un ir tādi 15 skolēni, kas mācās vienā skolā.

7. klase

28.7.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.7.1. atrisinājumu.

28.7.2.

a) Pierādījums: apzīmēsim simetrisku sešciparu skaitli n ar $\overline{abccba}$. Varam rakstīt, ka

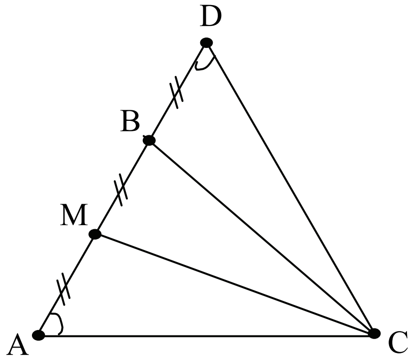
$n = a\cdot10^5 + b\cdot10^4 + c\cdot10^3 + c\cdot10^2 + b\cdot10 + a =$ (savelkot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam) =100001a+10010b+1100c.

Ja n dalās ar 13, tad arī vienādojuma labajai pusei jādalās ar 13. Apskatīsim iegūto koeficentu dalāmību ar 13. Pirmo saskaitāmo 100001a varam sadalīt divos tā, lai viens dalītos ar 13. Tad iegūstam 100001a=99996a+5a (jo 99996 ir tuvākais skaitlis 100001, kas dalās ar 13: 99996:13=7692). Skaitlis 10010b nav jāsadala sīkāk, jo 10010 dalās ar 13 (10010:13=770). Bet skaitli 1100c visizdevīgāk ir sadalīt kā 1100c=1105c–5c, jo 1105:13=85, tikai vēl jāatņem 5c, ko pieskaitījām, lai vienādība būtu patiesa.

Tad varam rakstīt, ka n=99996a+5a+10010b+1105c–5c= (iznesot kopīgos reizinātājus pirms iekavām, iegūstam) $= 13\cdot(7692a + 770b + 85c) + 5\cdot(a - c)$.

Tā kā n dalās 13, tad arī vienādojuma labajai pusei jādalās ar 13. Redzam, ka pirmās iekavas dalās ar 13, tātad vēl tikai $5\cdot(a-c)$ jādalās ar 13. Tā kā a un c ir cipari, tad $|a - c| \le 9$. Tātad, lai $5\cdot(a-c)$ dalītos ar 13, jābūt a–c=0.

Ja a–c=0, tad a=c un n=100001a+10010b+1100a=101101a+10010b. Tagad viegli pierādīt: ja n dalās ar 13, tad tas dalās arī ar 7, jo koeficienti pie a un pie b abi dalās ar 7. Varam rakstīt, ka $n = 7\cdot(14443a + 1430b)$, jo 101101:7=14443 un 10010:7=1430.

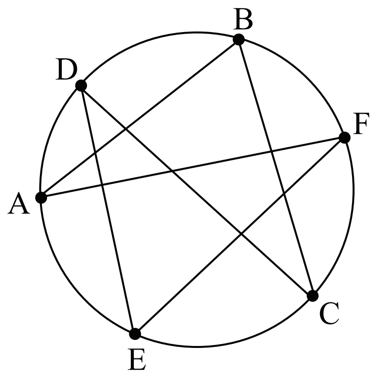


25A. zīmējums

b) Atbilde: nē, nav taisnība. **Piemērs:** ja n=108801, tad redzams, ka n dalās ar 7, jo 108801:7=15543, bet n nedalās ar 13, jo 108801:13=8369 un atlikumā 4.

28.7.3. Pierādījums: (skat. 25A. zīm.)

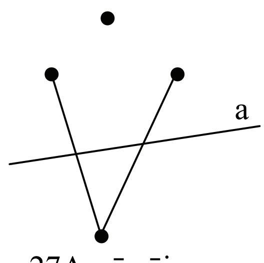
1) pagarinām malu AB līdz AD tā, lai AD=3
2) ΔDAC – vienādsānu, jo AD=AC=3
3) $\angle ADC = \angle DCA$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī. Tā kā virsotnes leņķis $\angle A = 60^o$, tad leņķi pie pamata $\angle ADC = \angle DCA = (180^o - 60^0) : 2 = 60^o$.
4) ΔADC – vienādmalu, jo visi virsotnes leņķi ir 60^o.
5) $\Delta BDC = \Delta MAC$ pēc pazīmes mlm, jo BD=MA pēc konstrukcijas, DC=AC kā vienādmalu trijstūra ADB malas un $\angle D = \angle A = 60^o$.
6) Vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi, tāpēc BC=MC, k. b. j.



26A. zīmējums

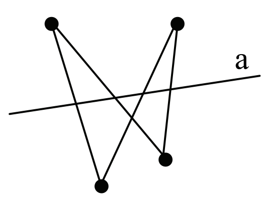
28.7.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast kāds ir lielākais iespējamais krustpunktu skaits un parādīt piemēru, kā tas ir iespējams; otrkārt, pierādīt, ka vairāk krustpunktu nevar būt.

Atbilde: var rasties lielākais 7 krustpunkti. **Piemērs:** zīmējumā 26A. redzams, kā var krustoties nogriežņi, lai veidotos 7 krustpunkti.



27A. zīmējums

Pierādījums: pierādīsim, ka vairāk kā 7 krustpunkti nevar būt. Aplūkosim patvaļīgu novilktu nogriezni a. Ja visi pārējie punkti ir vienā pusē no tā, tad nav krustpunktu ar nogriezni a. Ja vienā pusē ir 1 punkts un otrā pusē 3, tad var izveidoties maksimums 2 krustpunkti ar nogriezni a (skat. 27A. zīm.). Ja vienā nogriežņa pusē ir 2 punkti un otrā arī 2, tad var izveidoties maksimums 3 krustpunkti. (Nav iespējama situācija, kas attēlota zīmējumā 28A., jo vismaz vienam no punktiem ir jābūt savienotam ar kādu no nogriežņa a galapunktiem. Tātad 4 krustpunkti nevar veidoties un iespējama tikai tāda situācija, kas attēlota zīmējumā 29A.)



28A. zīmējums

Šādu nogriežņu, kuram, krustojoties ar citiem nogriežņiem, ir 3 krustpunkti, var būt maksimums 3. (Pamatosim: no katra dotā punkta var novilkt tieši vienu nogriezni, kurš sadala pārējos punktus, divus – vienā pusē no novilktā nogriežņa, otrus divus – otrā pusē no novilktā nogriežņa. Uzdevumā doti 6 punkti, tātad varētu novilkt 6 nogriežņus, kas krustojoties veido 3 krustpunktus. Bet, tā kā katru nogriezni veido 2 punkti, tad nogriežņu ir 2 reizes mazāk (nogrieznis no punkta X uz Y sakrīt ar nogriezni no Y uz X) t. i., 6:2=3.) Ja 3 nogriežņi var veidot 3 krustpunktus ar pārējiem nogriežņiem, tad pārējie trīs nogriežņi katrs var veidot maksimums 2 krustpunktus. Saskaitot iespējamo krustpunktu skaitu, iegūstam 3+3+3+2+2+2=15. Bet, tā kā katrs krustpunkts ieskaitīts 2 reizes (krustpunkts, kas rodas, nogrieznim x krustojoties ar nogriezni y, sakrīt ar krustpunktu, kas rodas, nogrieznim y krustojoties ar nogriezni x), tad 15 jādala ar 2. Iegūstam 15:2=7,5. Tā kā nevar būt puse no krustpunkta, tad var būt vislielākais 7 krustpunkti.

28.7.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, jāpierāda, ka ar noteiktu jautājumu skaitu pietiek; otrkārt, jāparāda, ka ar mazāku skaitu jautājumu nevar garantēt, ka izdosies noteikt prasīto.

Atbilde: ar 99 jautājumiem. **Pierādījums:**

1) Ja Holmss, jautājot A: “Vai jūs zināt, kā sauc B?” saņem atbildi “nē”, tad skaidrs, ka A nav Puaro (jo Puaro zina vārdus pilnīgi visiem), bet, ja Holmss saņem atbildi “jā”, tad skaidrs, ka B nav Puaro (jo Puaro vārdu nezina neviens). Tātad ar vienu jautājumu varam izslēgt no kandidātu saraksta tieši VIENU viesi, kas nav Puaro. Tā kā viesu ir 100, tad ar 99 jautājumiem Holmss uzzinās, kurš ir Puaro.
2) Ir iespējams, ka pārējie viesi neviens nezina cita viesa vārdus. Tad var gadīties, ka Holmss uzdod 98 jautājumus “pārējiem viesiem” un līdz ar to uz visiem no tiem saņem atbildi “nē, nezinu”. Šajā situācijā Puaro var būt jebkurš no atlikušajiem 2 viesiem, kuriem Holmss vēl nav jautājis. Līdz ar to **noteikti** nepieciešams 99-tais jautājums, lai uzzinātu, kurš no abiem vēl nepārbaudītajiem ir Puaro.

8. klase

28.8.1. Pierādījums: $x^2bc + y^2ac + z^2ab =$ (pēc dotā zināms, ka c= –a–b un z= –x–y)

$= x^2b(-a-b) + y^2a(-a-b) + (-x-y)^2ab =$ (atverot iekavas iegūstam)

$= -x^2ab - x^2b^2 - y^2a^2 - y^2ab + x^2ab + 2xyab + y^2ab =$ (savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$= -x^2b^2 - y^2a^2 + 2xyab =$ (iznesam mīnusa zīmi pirms iekavām un mainām kārtību)

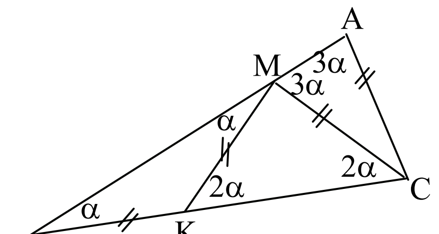
$= -(x^2b^2 - 2xyab + y^2a^2) =$ (izveidojies starpības kvadrāts)

$= -(xb - ya)^2$

Tā kā jebkurš skaitlis, kāpināts kvadrātā, vienmēr ir lielāks vai vienāds ar nulli, tad skaidrs, ka “mīnus skaitļa kvadrāts” ir mazāks vai vienāds ar nulli. Tātad $-(xb-ya)^2 \le 0$, no tā seko, ka arī $x^2bc + y^2ac + z^2ab \le 0$, k. b. j.

28.8.2. Pierādījums: (skat. 30A. zīm.)

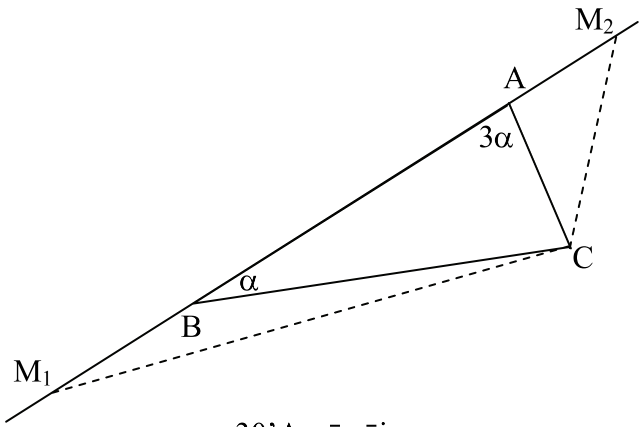
1) Izvēlamies punktu M uz taisnes AB tā, lai AC=CM. (Pamatojums tam, ka M atrodas starp punktiem A un B, būs uzdevuma beigās.) Tātad ΔACM ir vienādsānu un $\angle MAC = \angle AMC = 3\alpha$.
2) Apskatām ΔBMC. No tā, ka $\angle BMC = 180^\circ - 3\alpha$ (blakusleņķu summa ir 180°) seko, ka $\angle BCM = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 3\alpha) = 2\alpha$ (trijstūra leņķu summa ir 180°).
3) Izvēlamies punktu K uz taisnes BC tā, lai MK=MC. (Pamatojums tam, ka K atrodas starp punktiem B un C, būs uzdevuma beigās.) Tātad ΔMCK ir vienādsānu un $\angle MKC = \angle MCK = 2\alpha$.
4) No tā, ka $\angle CMK = 180^\circ - 4\alpha$ (trijstūra leņķu summa ir 180°) seko, ka $\angle BMK = 180^\circ - 3\alpha - (180^\circ - 4\alpha) = \alpha$.
5) No tā, ka $\angle BMK = \angle MBK = \alpha$, seko, ka ΔBMK ir vienādsānu un BK=MK



30A. zīmējums

6) ΔABC ir sadalīts trīs vienādsānu trijstūros: ΔKMB, ΔKCM un ΔACM, kur visas sānu malas ir vienādas: BK=KM=MC=AC. Tātad, lai iegūtu prasīto, var griezt pa taisnēm MC un MK.

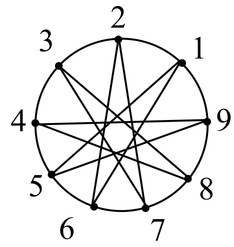
Pamatosim, ka M atrodas starp A un B.
1) Atcerēsimies, ka trijstūrī pastāv īpašība: mazākam leņķim atbilst īsākā mala.
2) Apskatīsim trijstūri ABC. Tā kā $\alpha < 3\alpha$, tad $\angle ABC < \angle BAC$ un spēkā nevienādība arī attiecīgajām malām, t. i., $AC < BC$.
3) Pieņemsim, ka M atrodas ārpus trijstūra ABC (aiz punkta B uz taisnes AB), apzīmēsim šo punktu ar M_1 (skat. 30'A. zīm.), un ka $\angle AM_1C = \angle M_1AC = 3\alpha$.
4) No tā, ka $\angle ABC = \alpha$ ir šaurs leņķis pēc dotā, seko, ka $\angle CBM_1 = 180^o - \alpha$ (blakusleņķu summa ir 180^o) ir plats leņķis.
5) Apskatīsim trijstūri CBM_1. Tā kā $\angle AM_1C = 3\alpha$ ir šaurs (jo dotajā trijstūrī $\angle BAC = 3\alpha$ ir šaurs) un $\angle CBM_1$ ir plats, tad $\angle AM_1C < \angle CBM_1$ un spēkā nevienādība arī attiecīgajām malām, t. i., $BC < CM_1$.
6) Esam ieguvuši, ka $AC < BC$ un $BC < CM_1$, tātad nav iespējams, ka $AC=CM_1$. Esam ieguvuši pretrunu un sākotnējais pieņēmums, ka M atrodas ārpus trijstūra punktā M_1, nav pareizs.
7) Pieņemsim, ka M atrodas ārpus trijstūra ABC (aiz punkta A uz taisnes AB), apzīmēsim šo punktu ar M_2. (skat. 30'A. zīm.), un ka $\angle AM_2C = \angle M_2AC = 3\alpha$.
8) No tā, ka $\angle BAC = 3\alpha$ ir šaurs leņķis pēc dotā, seko, ka $\angle CAM_2 = 180^o - 3\alpha$ (blakusleņķu summa ir 180^o) ir plats leņķis.
9) Apskatīsim trijstūri CAM_2. Tā kā $\angle AM_2C = 3\alpha$ ir šaurs (jo dotajā trijstūrī $\angle BAC = 3\alpha$ ir šaurs) un $\angle CAM_2$ ir plats, tad $\angle AM_2C < \angle CAM_2$ un spēkā nevienādība arī attiecīgajām malām, t. i., $AC < CM_2$.



30'A. zīmējums

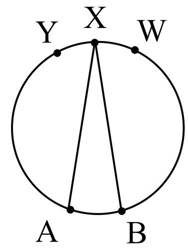
10) Esam ieguvuši, ka $AC < CM_2$, bet tas nav iespējams, jo $AC=CM_2$. Esam ieguvuši pretrunu un sākotnējais pieņēmums, ka M atrodas ārpus trijstūra punktā M_2, nav pareizs.
Tā kā esam pierādījuši, ka M neatrodas ne aiz punkta B, ne arī aiz punkta A uz taisnes AB, tad M noteikti atrodas starp A un B.
Līdzīgi pamato, ka K atrodas starp B un C.
28.8.3. **Atbilde:** x=167, y=334. **Pierādījums:** apzīmēsim trīsciparu skaitļus ar x un y. Ja x un y pieraksta vienu otram galā, tad iegūst skaitli $n = 1000 \cdot x + y$. Pēc uzdevuma nosacījumiem Andra uzrakstītais skaitlis ir 3 reizes lielāks par abu skaitļu reizinājumu, no tā seko vienādība: $3xy = 1000 \cdot x + y$. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar y, tad arī labajai pusei jādalās ar y. Tas nozīmē, ka $1000 \cdot x$ dalās ar y un $y = k \cdot x$. Tā kā x un y ir trīsciparu skaitļi, tad $1 \le k \le 9$ (ja $k \ge 10$, tad y – četrciparu skaitlis, jo spēkā vienādība $y = k \cdot x$). Ievietojot sākotnējā vienādojumā $y = k \cdot x$, iegūstam, ka $3kx^2 = 1000 \cdot x + kx$. Izdalot abas puses vienādojuma puses ar x, iegūstam 3kx=1000+k. Iegūtā vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, tātad 1000+k dalās ar 3, un kreisā puse dalās ar k, tātad arī 1000 dalās ar k. Ņemot vērā, ka k ir no 1 līdz 9, apskatīsim visus iespējamos 1000 dalītājus. No iespējamām k vērtībām 1000 dalās ar 1, 2, 4, 5, 8. Tagad pārbaudīsim, vai 1000+k dalās ar 3.
Ja k=1, tad 1000+k=1001, kas nedalās ar 3. Tātad $k \neq 1$.
Ja k=2, tad 1000+k=1002, kas dalās ar 3. Tātad k varbūt ir 2.
Ja k=4, tad 1000+k=1004, kas nedalās ar 3. Tātad $k \neq 4$.

Ja k=5, tad 1000+k=1005, kas dalās ar 3. Tātad k varbūt ir 5.
Ja k=8, tad 1000+k=1008, kas dalās ar 3. Tātad k varbūt ir 8.



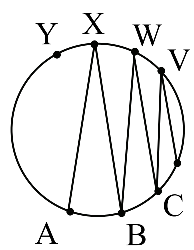
31A. zīmējums

Ievietosim k=2 vienādojumā:
3kx=1000+k
6x=1000+2
x=1002:6
x=167; tad $y = k \cdot x = 2 \cdot 167 = 334$.
Ievietosim k=5 vienādojumā:
3kx=1000+k
15x=1000+5
x=1005:15
x=67. Tā kā x nav trīsciparu skaitlis, tad $k \neq 5$.



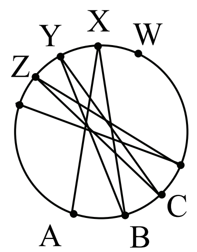
32A. zīmējums

Ievietosim k=8 vienādojumā:
3kx=1000+k
24x=1000+8
x=1008:24
x=42. Tā kā x nav trīsciparu skaitlis, tad $k \neq 8$.
28.8.4. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.8.4. atrisinājumu.
28.8.5.
b) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** ja 1. cilvēks draudzējas ar 2.; 2. – ar 3.; 3. – ar 4., u. t. t. 8. – ar 9. un 9. – ar 1, tad ap galdu cilvēki var sēdēt šādā secībā: 2-4-6-8-1-3-5-7-9. Iespējami arī citi varianti, piemēram, skat. 31A. zīm., kur horda apzīmē draudzību starp attiecīgajiem cilvēkiem.
a) Atbilde: nē, nav iespējams. **Pierādījums:** ja ap galdu sēž 12 cilvēki, tad ir arī 12 blakus sēdošu cilvēku pāri. Tas nozīmē, ka katram pārim noteikti ir kāds cilvēks, ar ko draudzējas abi pāra dalībnieki (neviens pāris nav lieks). Izvēlēsimies vienu patvaļīgu cilvēku pāri A un B, kas sēž blakus. Viņiem ir kāds cits cilvēks X, kas ar viņiem draudzējas (skat. 32A. zīm.– ar hordu savienoti cilvēki, kas draudzējas). Ja X draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar X. Un, tā kā arī B draugiem ir jāsēž blakus, tad B var draudzēties vai nu ar X un Y, vai X un W. Apskatīsim abus gadījumus:
1) B draudzējas ar X un W (skat. 33A. zīm.). Tā kā B draudzējas ar W, tad arī W draudzējas ar B, un, ņemot vērā, ka W draugiem jāsēž blakus, tie var būt tikai A-B vai B-C. W nevar draudzēties ar pāri A-B, jo ar A-B jau draudzējas X. Tātad W var draudzēties tikai ar B-C. Līdzīgi, tā kā W draudzējas ar C, tad arī C draudzējas ar W. Tā kā arī C draugiem ir jāsēž blakus, tad viņa draugi varētu būt vai nu X-W vai W-V. Bet, tā kā X-W jau draudzējas ar B, tad C jādraudzējas ar W-V. Arī V draugiem ir jāsēž blakus. Tā kā B-C jau draudzējas ar W, tad V jādraudzējas ar C-D. Tā mēs varētu turpināt bezgalīgi, jo process nekad nebeigtos. Bet, tā kā punktu skaits ir ierobežots, tad kādā brīdī iegūsim situāciju, ka vienam cilvēkam būs tikai viens draugs, bet tā nevar būt. Tātad B nevar draudzēties ar X un W.



33A. zīmējums

2) B draudzējas ar X un Y (skat. zīm. 34A.). Tad arī Y draugiem jāsēž blakus. Līdzīgi kā iepriekš aprakstīts, Y nevar draudzēties ar A-B, jo ar tiem jau draudzējas X, tātad Y draudzējas ar B-C. Tā kā C draugiem arī jāsēž blakus, un pāris X-Y aizņemts, tad C jādraudzējas ar Y-Z. Arī Z draugiem jāsēž blakus, un tā kā pāris B-C jau ir aizņemts, tad Z jādraudzējas ar C-D. Un tā varam turpināt, līdz apejam pilnu apli. Ja punktu skaits ir, piemēram, 9 kā b) gadījumā, tad prasītais ir iespējams, skat. 31A. zīm.



34A. zīmējums

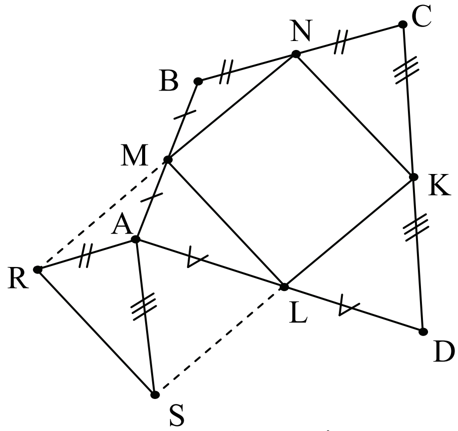
Tā kā n=12 un sākumā jau izmantoti 3 punkti (A, B un C), tad skaidrs, ka vēl palikuši 12–3=9 punkti. Tas nozīmē, ka vienā pusē no X būs pāra skaits punktu, bet otrā – nepāra. Izpildot tādas darbības, kā aprakstīts punktā 2), mēs pakāpeniski izmantojam vienu punktu no X pa kreisi un vienu – no X pa labi.

Bet, ja punktu skaits vienā pusē ir pāra skaitlis un otrā – nepāra skaitlis, tad paliks viens punkts, kuram varēs novilkt tikai 1 hordu. Tas nozīmē, ka būs viens cilvēks, kuram būs tikai viens draugs. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad, ja n=12, nav iespējams izpildīt uzdevuma nosacījumus.

9. klase

28.9.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.9.1. atrisinājumu.
28.9.2. Pierādījums: (skat. 35A. zīm.)

1) M, N, K, L ir četrstūra ABCD malu viduspunkti.
2) $MN \| AC$ pēc viduslīnijas īpašības (viduslīnija paralēla pamatam) trijstūrī ABC. Līdzīgi arī $LK \| AC$ pēc viduslīnijas īpašības trijstūrī ABC. No tā seko, ka $MN \| LK$.
3) $ML \| BD$ pēc viduslīnijas īpašības trijstūrī ABD. Līdzīgi arī $NK \| BD$ pēc viduslīnijas īpašības trijstūrī BCD. No tā seko, ka $ML \| NK$.
4) Tātad četrstūris MNKL ir paralelograms, jo tā malas pa pāriem paralēlas.

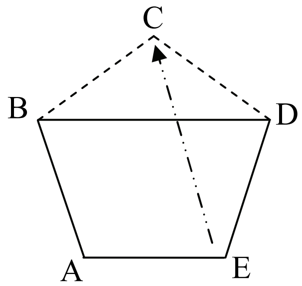


35A. zīmējums

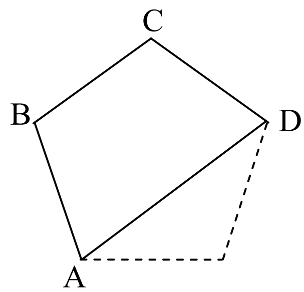
5) ΔRAS ir vienāds un paralēli novietots ar ΔNCK.
6) Tātad ML ir vienāds un paralēls ar RS.
7) $\Delta SAL = \Delta KDL$ pēc pazīmes mlm, jo AS=DK kā puses no malas CD un AL=DL kā puses no malas AD, $\angle SAL = \angle KDL$ kā iekšējie šķērsleņķi pie taisnēm AS un KD.
8) Līdzīgi, $\Delta RAM = \Delta NBM$ pēc pazīmes mlm, jo AM=BM kā puses no malas AB un RA=NB kā puses no malas BC, $\angle RAM = \angle NBM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie taisnēm RA un BN.
9) Esam ieguvuši, ka RMLS ir paralelograms, jo pretējās malas pa pāriem paralēlas un vienādas, un RMLS ir izveidojams no sākotnējā četrstūra "atgrieztajiem" stūriem.

28.9.3. Atbilde: jā, šādu četrstūri var iegūt, savienojot četras regulāra piecstūra virsotnes. Piemēram, četrstūris ABDE (skat. 36A. zīm.).

Pierādījums: apskatīsim četrstūri ABDE. Pagriežot šo četrstūri ap piecstūra centru O, varam iegūt šādus četrstūrus: BCEA, CDAB, DEBC, EACD. Visi 4 četrstūri ir vienādi ar četrstūri ABDE, jo tie iegūti, pagriežot sākotnējo četrstūri ABDE. No tā seko, ka visi pieci nosauktie četrstūri ir vienādi savā starpā.



36A. zīmējums



37A. zīmējums

Jebkuram no šiem četrstūriem izpildās uzdevumā prasītā īpašība, jo, pārvietojot jebkuru virsotni uz brīvo punktu, iegūsim četrstūri, kas ir iegūstams arī, pagriežot šo četrstūri ap piecstūra centru.

Piemērs: apskatīsim četrstūri ABDE. Lai arī kuru tā virsotni pārvietosim uz punktu C, iegūtais četrstūris būs kāds no kopas {BCEA, CDAB, DEBC, EACD}. Bet jau zināms, ka šie četrstūri ir vienādi savā starpā, jo iegūstami, pagriežot sākotnējo četrstūri ABDE.

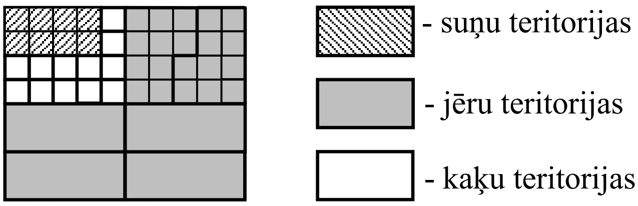
28.9.4. Pierādījums: apskatīsim izteiksmi:
$z(x-z)+y(xz-y)+x(yz-x)=xyz-z^2+xyz-y^2+xyz-x^2=3xyz-x^2-y^2-z^2=3xyz-(x^2+y^2+z^2)$.
Tā kā xy–z, xz–y un yz–x dalās ar 3 pēc uzdevuma nosacījumiem, tad uzrakstītās vienādības kreisā puse dalās ar 3. No tā, ka vienādības kreisā puse dalās ar 3, seko, ka arī labajai pusei jādalās ar 3. Skaidrs, ka 3xyz dalās ar 3, tātad arī $x^2+y^2+z^2$ dalās ar 3.

28.9.5. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nav iespējams izvēlēties 2 skolēnus tā, lai viņi abi kopā būtu atrisinājuši visus uzdevumus. Tad katram skolēnu pārim ir kāds neatrisināts uzdevums. No 8 skolēniem iespējams izveidot 28 skolēnu pārus (katru no 8 skolēniem var salikt pārī ar jebkuru no atlikušajiem 7, tātad iespējamo kombināciju skaits ir $8 \cdot 7 = 56$, bet, tā katrs pāris ieskaitīts 2 reizes (jo pāris A-B ir tas pats, kas B-A), tad iespējamo kombināciju skaits jādala ar 2. Tātad ir 56:2=28 pāri). Pēc uzdevumā dotā zināms, ka katru uzdevumu atrisināja tieši 5 skolēni, no tā seko, ka katru uzdevumu neatrisināja tieši atlikušie 3 skolēni. Tā kā bija 8 uzdevumi un katru uzdevumu neatrisināja 3 skolēni, tad kopā 8 skolēni neatrisināja $3 \cdot 8 = 24$ uzdevumus. Ir 28 skolēnu pāri un 24 neatrisināti uzdevumi; tā kā 28>24, tad ir vismaz viens uzdevums, kuru neatrisināja vairāk kā 3 (vismaz 4) skolēnu pāri. Vismaz 4 skolēnu pārus veido vismaz 4 skolēni (pamatosim: 3 skolēni – A, B, C – var izveidot lielākais 3 skolēnu pārus – AB, BC, AC. Lai izveidotu 4 skolēnu pārus, būs vajadzīgi vismaz 4 skolēni). Bet, ja vismaz 4 skolēni neatrisināja vienu uzdevumu, tad tā ir pretruna ar uzdevumā doto, ka katru uzdevumu atrisināja 5 skolēni. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepatiess, un mēs noteikti varam izvēlēties 2 skolēnus tā, lai kopā viņi būtu atrisinājuši visus uzdevumus.

Latvijas 29. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

29.5.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast mazāko (lielāko) iespējamo vērtību un parādīt piemēru; otrkārt, pierādīt, ka mazāku (lielāku) vērtību atrast nav iespējams.
a) Atbilde: 3111.
Pierādījums: apskatīsim četrciparu skaitļa pēdējos 3 ciparus. Zināms, ka neviens no tiem nevar būt nulle, bet nekādu citu nosacījumu nav. Lai skaitlis būtu pēc iespējas mazāks, arī tā pēdējiem cipariem jābūt pēc iespējas mazākiem. Tātad par četrciparu skaitļa pēdējiem 3 cipariem der 111. Pirmais cipars ir pārējo ciparu summa, tātad tas jebkuram interesantam četrciparu skaitlim ir vismaz 3. Mūsu iegūtajam skaitlim 3111 arī pirmais cipars ir mazākais iespējamais. Tātad mazākais interesantais četrciparu skaitlis ir 3111.
b) Atbilde: 9111111111.
Pierādījums: lai iegūtu pēc iespējas lielāku skaitli, tam ir jāsatur pēc iespējas vairāk ciparu. Vislielākais cipars ir 9. Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem skaitļa pirmajam ciparam jābūt visu pārējo summai, tad 1. cipars noteikti ir 9 (lielāka cipara par 9 nav, bet, ja liksim mazāku, samazināsim skaitli). Ciparu 9 var iegūt, saskaitot ne vairāk kā 9 ciparus, no kuriem neviens nav 0. Tātad interesantā skaitlī ir ne vairāk kā 10 ciparu (pirmais cipars un vēl ne vairāk kā 9 citi). Desmit ciparu skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir tikai 9111111111.
29.5.2. **Pierādījums:** ar pirmo svēršanu nosver jebkuras 2 monētas, bet ar otru – pārējās četras. Divu monētu svaru apzīmēsim ar d, bet pārējo četru monētu svaru apzīmēsim ar t. Apskatīsim iespējamos gadījums:
Ja t=2d, tad visu monētu masas ir vienādas, jo 2 monētas sver divas reizes mazāk nekā 4 monētas. Tātad katra monēta sver $\frac{d}{2}$ (jeb $\frac{t}{4}$).
Ja t<2d, tad smagākā monēta ir starp pirmajā svēršanā nosvērtajām. Tātad pārējās četras ir "pareizās" monētas, un vienas tādas monētas svars ir $\frac{t}{4}$.
Ja t>2d, tad smagākā monēta ir starp otrajā svēršanā nosvērtajām. Tātad pirmajā svēršanā nosvērtās monētas abas ir "pareizas", tātad vienas tādas monētas svars ir $\frac{d}{2}$.
29.5.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 28.5.5. atrisinājumu.
29.5.4. Atbilde: var izmitināt 6 jērus. **Pierādījums:** kopā mums ir $8 \cdot 10 = 80$ rūtiņas. Tā kā jāizmitina 2 suņi un viņiem būs nepieciešamas $2 \cdot 4 = 8$ rūtiņas, tad jēriem un kaķiem paliks 80–8=72 rūtiņas. Ja gribētu izmitināt 7 jērus, tad viņiem būtu nepieciešamas $7 \cdot 10 = 70$ rūtiņas. Tas nozīmē, ka paliktu tikai 72–70=2 rūtiņas, kurās izmitināt kaķus. Kaķu uzdevums ir atdalīt suņus no jēriem, bet ar 2 rūtiņām, kurās dzīvo kaķi, nekādi nevarēs atdalīt 8 rūtiņās dzīvojošos suņus. Tātad nav iespējams izmitināt 7 jērus. Ir iespējams izmitināt 6 jērus (skat. 38A. zīm.) .



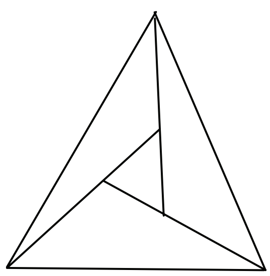
38A. zīmējums

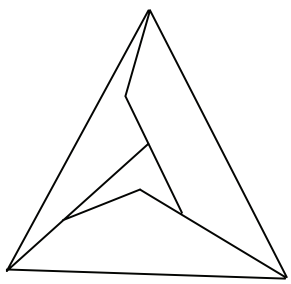
29.5.5. Atbilde: 13485. **Pierādījums:** ja skaitlim n būtu vislielākais 4 cipari, tad kopā skaitļiem n un 2n būtu vislielākais 9 cipari (reizinot četrciparu skaitli ar 2, var iegūt vai nu četrciparu, vai piecciparu skaitli). Tā kā kopā ir 10 dažādi cipari, tad n nevar būt četrciparu. Ja skaitlim n būtu vismaz 6 cipari, tad kopā skaitļiem n un 2n būtu vismaz 12 cipari, bet tas nozīmētu, ka daži no tiem atkārtojas. Tātad n nevar būt sešciparu skaitlis. Tātad n un 2n ir piecciparu skaitļi. Meklējam vismazāko iespējamo n un

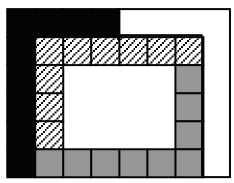
zinām, ka tas būs piecciparu skaitlis. Lai skaitlis būtu pēc iespējas mazāks, tam jāsākas ar pēc iespējas mazāku ciparu. Mēģināsim atrast tādu n, kura pirmais cipars būtu 1. Ja n saturētu 0, tad arī 2n šai pašā šķirā saturētu vai nu 0, vai arī 1 (kā pārnesumu no iepriekšējās šķiras). Bet tā kā n jau satur 1, skaitlī 2n nevar būt 1. Tātad n nulli nesatur. Ja n otrais cipars būtu 2, tad 2n pirmais cipars arī būtu 2. Bet tad 2 saturētu gan n, gan 2n. Tātad n otrais cipars ir vismaz 3 un trešais cipars ir vismaz 4.
Pieņemsim, ka n = 134... Tad n ceturtais un piektais cipars ir vismaz 5. Tā kā, reizinot ar 2, n desmitu šķirā rodas pārnesums, tad 2n trešais cipars ir vismaz 9. Tātad n=134..., un minimālajam n atbilstošais 2n=269... . No atlikušajiem cipariem 0; 5; 7; 8; tikai 5 var būt n pēdējais cipars, citādi n pēdējais cipars sakrīt ar kādu jau noteiktu ciparu. Tad 2n beidzas ar 0. Pārbaudot abas iespējas ievietot 7 un 8 atlikušajās vietās, redzam, ka jābūt n=13485; tad 2n=26970. Tātad mazākais n ir 13485.

6. klase

29.6.1. Atbilde: pēc 180 dienām. **Pierādījums:** ja pulkstenis ietu pareizi, tad 12^{00} tas atkal rādītu pēc 12, 24, 36... stundām. Lai pulkstenis, kurš steidzas 12^{00} atkal rādītu pareizu laiku (tas rādītu 12^{00}), tam jābūt nepareizam par 12 stundām (1. dienā – pareizs, 2. dienā – nepareizs par 4 min., 3.dienā – nepareizs par 8 min.; meklējam to dienu, kad pulkstenis nepareizs par 12 stundām, jo tad tas atkal rādīs 12^{00}). Zinām, ka 12 stundās kopā ir $12 \cdot 60 = 720$ minūtes, bet katru dienu pulkstenis steidzas par 4 minūtēm. Tātad, lai pulkstenis būtu steidzies par 720 minūtēm, nepieciešamas 720:4=180 dienas. Apskatīsimies, par cik minūtēm būs nepareizs 2. pulkstenis pēc 180 dienām. Tā kā 2. pulkstenis katru dienu atpaliek par 8 minūtēm, tad pēc 180 dienām tas būs nepareizs par $180 \cdot 8 = 1440$ minūtēm jeb 1440:60=24 stundām. No tā seko, ka arī 2. pulkstenis pēc 180 dienām rādīs 12^{00}, jo būs nepareizs par 24 stundām.
29.6.2.
a) Piemērs: skat. 39A. zīm.,
b) Piemērs: skat. 40A. zīm.,
c) Piemērs: skat. 41A. zīm..


39A. zīmējums


40A. zīmējums


41A. zīmējums

29.6.3. Pierādījums: ja autobusā ir tikai vienas skolas pārstāvji, tad uzdevuma nosacījumi izpildās un no jebkuriem 5 skolēniem var izvēlēties 3, kas mācās vienā skolā. Tad noteikti ir arī 30 skolēni, kas mācās vienā skolā. Ja autobusā ir 2 skolu pārstāvji, arī tad no vienas skolas ir vismaz 30 skolēni (pamatosim: pieņemsim pretējo, ka ne no vienas skolas nav 30 skolēnu. Tādā gadījumā no katras skolas ir lielākais 29 skolēni, bet kopā tad ir ne vairāk kā $29 \cdot 2 = 58$ skolēni. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums nav bijis pareizs un no vienas skolas ir vismaz 30 skolēni). Apskatīsim gadījumu, kad autobusā ir 3 skolu pārstāvji. Ja no divām (vai visām 3) skolām ir vairāk nekā 1 skolēns, tad varam izvēlēties skolēnu piecinieku AABBC, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, jo nevar izvēlēties 3 skolēnus, kas mācās vienā skolā. Tātad mazāk nekā no divām, t. i., tikai no vienas skolas var būt vairāk nekā 1 skolēns. Tas nozīmē, ka no 2 skolām no katras ir pa vienam skolēnam, bet no trešās skolas ir 60–1–1=58 skolēni. Tātad, ja autobusā ir 3 skolu pārstāvji un no katriem jebkuriem 5 skolēniem 3 noteikti mācās vienā skolā, tad autobusā noteikti ir 30 vienas skolas skolēni. Ja autobusā būtu 4 (vai vairāk) skolu pārstāvji, tad vienmēr varētu izvēlēties tādu skolēnu piecinieku, kurš sastāvētu no 4 skolēniem, kas ir katrs no savas skolas. Tad, lai arī no kuras skolas būtu piektais skolnieks, noteikti nevarēs izvēlēties 3 skolēnus no vienas skolas. Tas nozīmē, ka ja autobusā ir 4 vai vairāk skolu skolēni, tad neizpildās uzdevuma nosacījumi (ne no jebkuriem 5 skolēniem var izvēlēties 3 no vienas skolas).

Esam apskatījuši visus iespējamos variantus. Gadījumos, kad izpildās uzdevuma nosacījumi (vienas, divu un trīs skolu gadījumos) esam pierādījuši, ka vismaz 30 skolēni ir no vienas skolas.

29.6.4. Atbilde: A=4; C=7; D=0; E=3; F=8; G=9; N=2, Z=1; B un K ir 5 un 6 – der abi varianti. **Pierādījums:** visu skaitļu summa 5+6+...+20=200. Tā kā visās rindās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas, tad tās ir 200:4=50 (ir 4 rindas, un visās rūtiņās kopā ierakstīti skaitļi no 5 līdz 20, kuru summa ir 200). Tā kā cipars 1 sastopams visvairāk (jo visi skaitļi no 10 līdz 19 satur 1), tad **Z=1**.Vienīgais divciparu skaitlis, kas nesatur 1, ir 20; skatoties zīmējumā, redzam, ka vienīgais divciparu skaitlis, kas nesatur Z, ir ND. Tātad **N=2** un **D=0**. Tā kā 3 un 4 katrs parādās vienu reizi, tad tie ir A un E. Tas nozīmē, ka A+E=7 (*). No 2. rindas seko, ka (ņemot vērā, ka ND=20 un kopā rindas summa ir 50) G+C+ZA=30. Tā kā Z=1 un atrodas desmitu šķirā, tad G+C+A=20. Bet no 4. rindas seko, ka (ZD=10, jo Z=1 un D=0) ZG+F+ZE=40. Tā kā Z=1 un atrodas desmitu šķirā, tad G+F+E=20. Saskaitot abas iegūtās vienādības, iegūstam:

G+C+A+G+F+E=20+20 jeb 2G+(A+E)+(C+F)=40 (**)

No 3. kolonnas seko, ka ZF+C+ZC+F=50, bet tā kā **Z=1**, tad F+C+C+F=30 jeb 2F+2C=30; izdalot abas vienādojuma puses ar 2, iegūstam F+C=15 (***). Ievietojot vienādojumā (**) iegūtās vienādības (*), ka A+E=7, un (***), ka F+C=15, iegūstam, ka

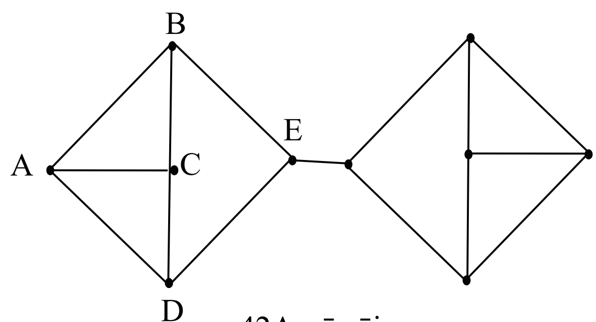
2G+7+15=40 jeb 2G=40–7–15 jeb 2G=18 un **G=9**

Tagad no 1. kolonnas seko, ka (ņemot vērā, ka ZD=10 un G=9) ZK+ZB=31. Tā kā Z=1 un atrodas desmitu šķirā, tad K+B=11. No 1. rindas seko, ka (ņemot vērā, ka ZZ=11) ZK+B+ZF=39, bet, tā kā Z=1 un atrodas desmitu šķirā, tad K+B+F=19. Ievietojot iegūto K+B=11, iegūstam, ka 11+F=19 jeb **F=8**. No 4. rindas redzam, ka (ņemot vērā, ka ZD=10, ZG=19 un F=8) ZE=13 jeb **E=3**. Tā kā A un E ir 3 un 4, tad tagad zināms, ka **A=4**. No 3. kolonnas redzam, ka (ņemot vērā, ka ZF=18 un F=8) C+ZC=24. Tā kā Z=1 un atrodas desmitu šķirā, tad C+C=14 jeb **C=7**. Burtiem **B** un **K** atliek vērtības **5** un **6**, abas iespējas der. Noteikti nepieciešama pārbaude.

1K	B	18	11
9	20	7	14
1B	K	17	12
10	19	8	13

B=5, K=6
vai
B=6, K=5

29.6.5. Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** Andris var savienot lampas, kā parādīts 42A.zīmējumā. Lai ne no vienas lampas neizietu vienādas krāsas vītnes, arī no A jāiziet zaļai (z), sarkanai (s) un baltai (b) vītnei. Pieņemsim, ka AB~b, AC~z un AD~s. Arī no C jāiziet vītnēm 3 krāsās, tātad no vītnēm BC un CD viena ir sarkana un otra balta. Vītne BC nevar būt balta, jo tad no B izietu 2 baltas vītnes BC un AB, tātad CD~b un CB~s. Lai no B izietu 3 dažādas vītnes, BE~z; lai no D izietu 3 dažādas vītnes, DE~z. Iegūta pretruna, jo no E iziet 2 zaļas vītnes BE un DE. Tātad Andris var tā savienot lampas ar vītnēm, lai noteikti būtu tāda lampa, no kuras iziet 2 vienādas krāsas vītnes.



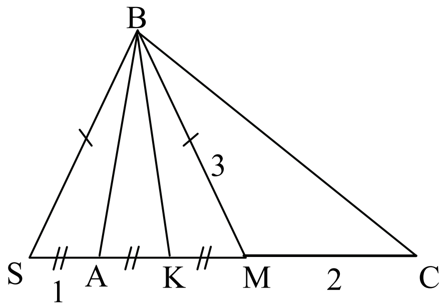
42A. zīmējums

7. klase

29.7.1.

a) Atbilde: jā, eksistē. **Piemērs:** B=2 un A= –2x–2.

b) Atbilde: nē, neeksistē. **Pierādījums:** vienādībā $A\cdot(x-1)+B\cdot(x^2-1)=4$ ievietojot x=1, iegūstam 0=4. Tātad ir tāda x vērtība (x=1), pie kuras jebkuram A un jebkuram B uzdevumā dotā vienādība ir aplama.



43A. zīmējums

29.7.2. Pierādījums: (skat. 43A. zīm.)

1) Uz taisnes AC atliekam nogriezni SA, kur SA=1.

2) Tā kā M ir malas AC viduspunkts un MC=2, tad arī AM=2. No tā seko, ka SM=SA+AM=1+2=3.

3) $\angle SMB = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$, jo blakusleņķu summa ir 180°.

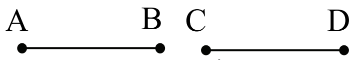
4) ΔSBM ir vienādsānu (jo SM=BM=3) ar virsotnes leņķi 60°, tātad SBM ir vienādmalu.

5) SB=BM=3, jo SBM vienādmalu.

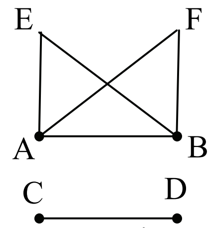
6) $\Delta BSA = \Delta BMK$ pēc pazīmes mlm, jo SB=MB, SA=MK=1 un $\angle BSA = \angle BMK = 60^{\circ}$.

7) Vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi, tātad AB=MB.

29.7.3. Pierādījums: apskatīsim vienu taisnes nogriezni; apzīmēsim to ar AB. Ņemsim trešo punktu C. Tā kā no C iziet 3 taisnes nogriežņi, tad būs vismaz viens nogrieznis, kas neies ne uz A, ne uz B (skat. 44A. zīm.) ; apzīmēsim šo nogriezni ar CD. Tā kā kopā ir 6 punkti, tad atlikuši vēl divi – E un F. Ja E un F arī savienoti ar nogriezni savā starpā, tad meklētie nogriežņi ir AB, CD un EF (un nav svarīgi, no kurienes uz kurieni novilkti pārējie nogriežņi). Ja tā nav, tad katrs no punktiem E un F ir savienots ar vismaz trīs no punktiem A, B, C, D. Iespējami divi gadījumi:



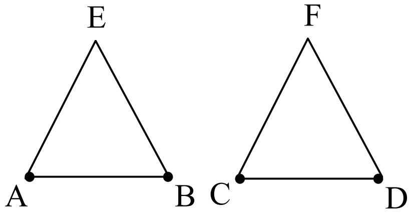
44A. zīmējums



45A. zīmējums

1) abi punkti E un F ir savienoti vai nu ar A un B (un vēl C vai D), vai ar C un D (un vēl A vai B). Ja E un F abi ir savienoti ar A un B (vai abi ar C un D), skat. 45A. zīm, tad meklētie nogriežņi ir AE, BF un CD (vai arī CE, DF un AB).

2)abi punkti E un F nav savienoti ne ar A un B, ne arī ar C un D. Tad vai nu E būs savienots ar A un B, un F būs savienots ar C un D, vai arī otrādāk – E būs savienots ar C un D, un F būs savienots ar A un B (skat. 46A. zīm). Tā kā E ir savienots ar A un B un vēl C vai D, vai arī ar C un D un vēl A vai B, tad E noteikti ir savienots ar C vai D. Ja ir nogrieznis EC, tad vajadzīgie nogriežņi ir AB, EC un FD. Ja E savienots ar D un ir nogrieznis ED, tad vajadzīgie nogriežņi ir AB, ED, FC. Visas iespējas apskatītas, vajadzīgais pierādīts.



46A. zīmējums

29.7.4. Pierādījums: apzīmēsim spēlētājus ar A un B, un spēlētājs A būs tas, kurš izdara pirmo gājienu. Lai A uzvarētu, viņš pirmajā gājienā uzraksta skaitli 2. Tagad vēl var rakstīt skaitļus 3, 4, 5, 6, 7, 8. Skaitli 1 rakstīt nevar, jo 2 dalās ar 1. Spēlētājs A domās sadala atlikušos skaitļus pāros: (3, 4), (6, 8) un (5, 7). Lai arī kādu skaitli x uzrakstītu B, spēlētājam A jāraksta otrs skaitlis no pāra, kurā ietilpst x. Tā kā vienā pārī esošie skaitļi viens ar otru nedalās, tad, ja spēlētājs B varēs uzrakstīt savu skaitli, tad noteikti arī spēlētājs A varēs uzrakstīt vēl vienu skaitli. Tāpēc A noteikti uzvarēs, jo pēc katra B gājiena A vienmēr vēl varēs izdarīt gājienu.

29.7.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo naturālo skaitļu daudzumu un parādīt piemēru, ka prasītais tiešām iespējams; otrkārt, pierādīt, ka vairāk skaitļus izvēlēties nav iespējams.

- **Atbilde:** var izvēlēties 30 skaitļus. **Piemērs:** <u>1; 2; 3</u>; <u>11; 12; 13</u>; <u>21; 22; 23</u>; ...; <u>91; 92; 93</u>; viena trijnieka ietvaros skaitļu starpības ir mazākas par 3, bet starp dažādiem trijniekiem starpības ir vismaz 8.

- **Pierādījums:** pierādīsim, ka nevar izvēlēties vairāk kā 30 skaitļus. Lai to pierādītu, pamatosim, ka no katriem pēc kārtas ņemtiem 10 skaitļiem varam izvēlēties augstākais 3, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad ir 10 pēc kārtas ņemti skaitļi, un mēs pēc kārtas sasaistām katru skaitli ar vienu burtu, attiecīgi ar A_1, B_2, C_3, A_4, B_5, C_6, X_7, A_8, B_9, C_{10}. No visiem trīs A, kas ir šajā virknē, mēs varam izvēlēties tikai vienu tā, lai tas atbilstu uzdevuma nosacījumiem (šo skaitļu starpība ir 3, 4 vai 7). Līdzīgi varam izvēlēties arī tikai vienu B un vienu C. Tātad, ja mēs gribētu no 10 skaitļiem izvēlēties četrus, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, tad vienīgais skaitlis, ko varam vēl ņemt, ir X_7. Ja esam izvēlējušies skaitli X_7, tad noteikti nevaram ņemt C_3 vai C_{10}, jo starpības X_7–C_3 un C_{10}–X_7 ir attiecīgi 4 un 3, kas nevar būt. Tātad mums noteikti ir jāņem C_6. Ja esam izvēlējušies skaitli C_6, tad noteikti nevaram ņemt B_2 vai B_9, jo tad starpības attiecīgi ir 4 un 3. Tātad noteikti jāņem B_5. Ja esam izvēlējušies B_5, tad noteikti nevar ņemt A_1 vai A_8, jo attiecīgās starpības ir 4 un 3. Tātad ir jāņem A_4. Bet X_7 ar A_4 veido starpību 3, kas arī nav pieļaujama. Tātad iegūta pretruna un nav iespējams no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem izvēlēties vairāk kā 3, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad no 100 skaitļiem var izvēlēties vislielākais 30 skaitļus.

8. klase

29.8.1. Atbilde: vienādojumam ir 3 vai 4 saknes. **Pierādījums:** tā kā $|p|\geq 0$ un $|q|\geq 0$, tad pēc Vjeta teorēmas kvadrātvienādojuma saknes ir pozitīvas vai nulle. Tātad dotā kvadrātvienādojuma saknes $x_1>0$ un $x_2>0$.

Lai atrisinātu ceturtās pakāpes vienādojumu $x^4-|p|x^2+|q|=0$ apzīmējam $x^2=a$. Ievietojot vienādojumā, iegūstam, ka $a^2-|p|a+|q|=0$. Iegūtā kvadrātvienādojuma saknes a_1 un a_2 sakrīt ar uzdevumā dotā kvadrātvienādojuma saknēm x_1 un x_2, jo visi koeficienti ir vienādi. Tagad, apzīmētajā $x^2=a$ ievietojam iegūtās a vērtības. Tātad $x^2=a_1$ un $x^2=a_2$, kas sakrīt arī ar $x^2=x_1$ un $x^2=x_2$. Tātad ceturtās pakāpes vienādojuma saknes ir $\pm\sqrt{x_1}$ un $\pm\sqrt{x_2}$. Kopumā otrajam vienādojumam ir 4 saknes. Ja $x_1=0$ vai $x_2=0$, tad ir tikai 3 <u>dažādas</u> saknes (jo $\pm\sqrt{0}=0$). **Piemēri:** ja p=13 un q=36, tad vienādojumam $x^4-13x^2+36=0$ ir četras dažādas saknes $x_{1,2}=\pm 2$ un $x_{3,4}=\pm 3$. Ja p=25 un q=0, tad vienādojumam $x^4-25x^2=0$ ir trīs dažādas saknes $x_{1,2}=\pm 5$ un $x_3=0$.

29.8.2. Atbilde: x=17 un y=34. **Pierādījums:** apzīmēsim divciparu skaitļus ar x un y. Ja x un y pieraksta vienu otram galā, tad iegūst skaitli $n=100\cdot x+y$. Pēc uzdevuma nosacījumiem Andra uzrakstītais skaitlis ir 3 reizes lielāks par abu skaitļu reizinājumu, no tā seko vienādība: $3xy=100\cdot x+y$. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar y, tad arī labajai pusei jādalās ar y. Tas nozīmē, ka $100\cdot x$ dalās ar y un $y=k\cdot x$. Tā kā x un y ir divciparu skaitļi, tad $1\leq k\leq 9$ (ja $k\geq 10$, tad y – trīsciparu skaitlis, jo spēkā vienādība $y=k\cdot x$). Ievietojot sākotnējā vienādojumā $y=k\cdot x$, iegūstam, ka $3kx^2=100\cdot x+kx$. Izdalot abas puses vienādojuma puses ar x, iegūstam 3kx=100+k. Iegūtā vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, tātad arī 100+k dalās ar 3. Līdzīgi, iegūtā vienādojuma kreisā puse dalās ar k, tātad arī 100 dalās ar k. Ņemot vērā, ka k ir no 1 līdz 9, apskatīsim visus iespējamos 100 dalītājus. No iespējamām k vērtībām 100 dalās ar 1, 2, 4, 5. Tagad pārbaudīsim, vai 100+k dalās ar 3.

1. Ja k=1, tad 100+k=101, kas nedalās ar 3. Tātad $k\neq 1$.
2. Ja k=2, tad 100+k=102, kas dalās ar 3. Tātad k varbūt ir 2.
3. Ja k=4, tad 100+k=104, kas nedalās ar 3. Tātad $k\neq 4$.
4. Ja k=5, tad 100+k=105, kas dalās ar 3. Tātad k varbūt ir 5.

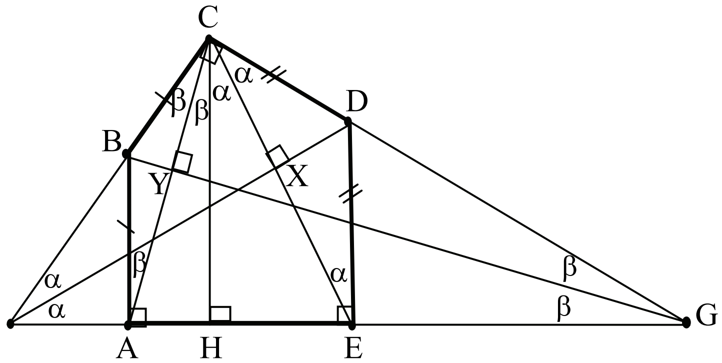
Ievietosim k=2 vienādojumā:

3kx=100+k
6x=100+2
x=102:6
x=17; tad $y = k \cdot x = 2 \cdot 17 = 34$.
Ievietosim k=5 vienādojumā:
3kx=100+k
15x=100+5
x=105:15
x=7. Tā kā x nav divciparu skaitlis, tad $k \neq 5$.
No iegūtā seko, ka x=17 un y=34.

29.8.3. Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** pieņemsim, ka d ir lielākais no šiem skaitļiem. Tā kā katru Fibonači skaitli iegūst kā divu iepriekšējo summu, tad apzīmēsim ar x un y skaitļus, kurus saskaitot iegūst d. Tātad d=x+y. Tad a un b var būt vai nu vienādi ar x un y vai arī mazāki par tiem, jo Fibonači skaitļu virkne ir augoša un d ir lielākais no skaitļiem x, y, d. Tātad pastāv nevienādība $a + b \leq x + y$. Tā kā x+y=d, tad $a + b \leq d$. Zinām, ka c>0, jo c ir Fibonači skaitlis. Ja nevienādības $a + b \leq d$ labajai pusei pieskaitām pozitīvu lielumu c, tad noteikti a+b<c+d. Tāpēc $a + b \neq c + d$.

29.8.4. Pierādījums:

1) Pagarinām CB un CD līdz taisnei AE. Krustpunkti F un G noteikti eksistē, jo C atrodas starp stariem AB un ED "augstāk" nekā B un D.
2) $\Delta FCD = \Delta FED$ pēc pazīmes hk, jo ΔFCD un ΔFED ir taisnleņķa, FD – kopīga un CD=ED pēc dotā.
3) Līdzīgi, $\Delta GCB = \Delta GAB$ pēc pazīmes hk.
4) Tā kā vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi, tad $\angle CFD = \angle EFD$ un $\angle CGB = \angle AGB$. Apzīmēsim $\angle CFD = \alpha$ un $\angle CGB = \beta$.
5) ΔCGA – vienādsānu, jo no $\Delta GCB = \Delta GAB$ seko, ka GC=GA. Līdzīgi, ΔCFE – vienādsānu.
6) Vienādsānu trijstūros ΔCGA un ΔCFE bisektrises ir arī augstumi, tāpēc $BG \perp AC$ un $FD \perp CE$. Apzīmēsim BG un AC krustpunktu ar Y, bet FD un CE krustpunktu – ar X.



47A. zīmējums

7) Trijstūra FCD leņķu summa ir $90^\circ + \alpha + \angle CDF$. Zinām, ka $\angle CXD = 90^\circ$; apskatīsim ΔCXD leņķu summu: $\angle CXD + \angle XDC + \angle DCX = 90^\circ + \angle XCD + \angle CDF$. Apskatot abas iegūtās vienādības, varam secināt, ka $\angle XCD = \alpha$ (Līdzīgi arī $\angle DEC = \alpha$).
8) Līdzīgi iegūstam, ka $\angle BCY = \beta$. (Līdzīgi arī $\angle BAC = \beta$).
9) Novelkam $CH \perp FG$. Tā kā arī $BA \perp FG$ un $ED \perp FG$, tad $BA \| CH \| DE$.
10) $\angle ACH = \angle BAC = \beta$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm BA un CH.
11) $\angle ECH = \angle DEC = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm DE un CH.
12) $\angle BCA + \angle ACH + \angle HCE + \angle ECD = 90^\circ$, jo pēc dotā $\angle BCD = 90^\circ$. No tā seko, ka $\beta + \beta + \alpha + \alpha = 90^\circ$. Tātad $2\beta + 2\alpha = 90^\circ$ jeb $\alpha + \beta = 45^\circ$.
13) Iegūstam $\angle ACE = \angle ACH + \angle HCE = \beta + \alpha = 45^\circ$.

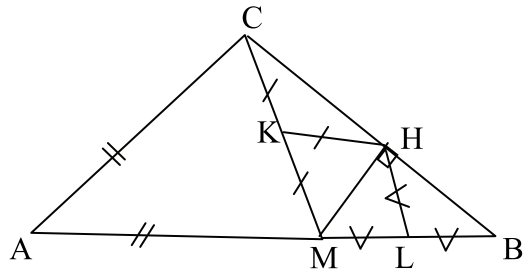
29.8.5.

a) Atbilde: nē, nav iespējams. **Pierādījums:** pieņemsim, ka uz pirmās lapas bija skaitļi x, y un z, kur x<y<z, bet uz otrās lapas bija skaitļi a, b un c, kur a<b<c. Mazākā summa uz pirmās lapas ir x+y, bet

mazākā summa uz otrās lapas ir a+b. Tātad x+y=a+b. Līdzīgi, lielākajām summām arī jābūt vienādām, t.i., y+z=b+c. Tā kā uz katras lapas ir 3 summas un divas no tām ir vienādas, tad, lai vienādas būtu visas trīs summas arī trešajām ir jābūt savstarpēji vienādām. Tāpēc x+z=a+c. No vienādības x+z=a+c iegūstam, ka x=a+c–z, bet no vienādības y+z=b+c iegūstam, ka c=y+z–b. Ievietojot vienādībā x+y=a+b iegūstam, ka a+c–z+y=a+b, ievietojot iegūto c izteiksmi ir a+y+z–b–z+y=a+b jeb 2y=2b. Tātad y=b, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, jo visiem skaitļiem bija jābūt vienādiem.
b) Atbilde: jā, ir iespējams. **Piemērs**: uz vienas lapas var būt skaitļi 1; 4; 6; 7 un uz otras lapas – skaitļi 2; 3; 5; 8.
c) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** pieņemsim, ka x_1, x_2, x_3, x_4 un y_1, y_2, y_3, y_4 divi skaitļu komplekti, kas apmierina uzdevuma nosacījumus b) gadījumā. Izvēlēsimies tādu skaitli M, ka visi skaitļi x_1+M, x_2+M, x_3+M, x_4+M, y_1+M, y_2+M, y_3+M, y_4+M pārsniedz visus skaitļus x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4. Tādā gadījumā skaitļu komplekti x_1, x_2, x_3, x_4, y_1+M, y_2+M, y_3+M, y_4+M un y_1, y_2, y_3, y_4, x_1+M, x_2+M, x_3+M, x_4+M arī apmierina uzdevuma nosacījumus. **Piemēram**, varam ņemt tos pašus skaitļus, kas bija b) piemērā, un M=10. Tad iegūstam skaitļu komplektus 1; 4; 6; 7; 12; 13; 15; 18 un 2; 3; 5; 8; 11; 14; 16; 17, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

9. klase

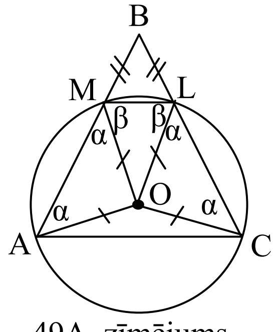
29.9.1. Pierādījums: zinām, ka $q_1q_2<0$, tātad $q_1<0$ vai $q_2<0$. Pieņemsim, ka $q_1<0$, tad $D_1 = p_1^2 - 4q_1$. Tātad $D_1 > 0$ (jo –4 tiek reizināts ar negatīvu skaitli q_1) un 1. vienādojumam ir divas dažādas saknes.
29.9.2. Pierādījums: apskatīsim 2 gadījumus:
a) trijstūris nav vienādmalu.
1) Varam pieņemt, ka AB>AC (skat. 48A. zīm.).
2) Atliekam AM=MC, tad ΔCAM ir vienādsānu.
3) $\angle CMA$ ir šaurs. Pamatosim: pieņemsim pretējo, ka $\angle CMA$ ir plats. Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi. Tātad $\angle CMA = \angle ACM$ un abi leņķi ir plati. Iegūta pretruna, jo trijstūrī nevar būt 2 plati leņķi (plats leņķis lielāks par 90^o, bet trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180^o). Tātad pieņēmums bija nepareizs un $\angle CMA$ ir šaurs.



48A. zīmējums

4) Ja $\angle CMA$ ir šaurs, tad $\angle CMB$ ir plats, jo tie ir blakusleņķi.
5) Novelkam $MH \perp BC$ un katru no taisnleņķa trijstūriem CHM un BHM ar mediānu pret hipotenūzu (attiecīgi HK un HL) sadalām divos vienādsānu trijstūros (taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas).
6) Tātad esam ieguvuši šādus trijstūrus: ΔACM, kur AC=AM; ΔCHK, kur CK=KH; ΔHKM, kur KH=KM; ΔMHL, kur MH=HL un ΔHLB, kur HB=BM.

b) trijstūris ir vienādmalu (skat. 49A. zīm.).
1) Novelkam riņķa līniju ar centru ΔABC iekšpusē, kas iet caur A un C un krusto malas BA un BC.
2) No riņķa līnijas centra O novilkti 4 rādiusi uz punktiem A, M, L un C.
3) Iegūtie trijstūri AOM, MOL, LOC, COA ir vienādsānu, jo katra trijstūra divas malas ir riņķa līnijas rādiusi.
4) Pierādīsim, ka arī ΔMBL ir vienādsānu.
5) Apzīmēsim ΔMOA leņķus pie pamata ar α.
6) $\angle OAC = \angle BAC - \angle MAO = 60^o - \alpha$, jo ΔABC ir vienādmalu, tātad visi tā leņķi ir 60^o.



49A. zīmējums

7) $\angle OCA = \angle OAC = 60^{\circ} - \alpha$, jo ΔCOA vienādsānu un tā leņķi pie pamata vienādi.

8) $\angle LCO = \angle BCA - \angle ACO = 60^{\circ} - (60^{\circ} - \alpha) = \alpha$, jo ΔABC ir vienādmalu un visi tā leņķi ir 60°.

9) $\angle OLC = \angle LCO = \alpha$, jo ΔLOC vienādsānu un leņķi pie pamata ir vienādi.

10) Apzīmēsim trijstūra MLO leņķus pie pamata ar β.

11) $\angle BML = 180^{\circ} - \angle LMO - \angle OMA = 180 - \beta - \alpha$ un arī

12) $\angle BLM = 180^{\circ} - \angle MLO - \angle OLC = 180^{\circ} - \beta - \alpha$.

13) No tā seko, ka $\angle BML = \angle BLM$, tātad ΔMBL ir vienādsānu.

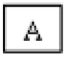
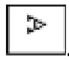
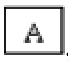
29.9.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 28.9.4. atrisinājumu.

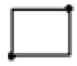
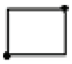
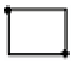
29.9.4. Atbilde: 4. vietā. **Pierādījums:** sadalīsim plakni rūtiņu režģī tā, ka viena rūtiņa ir vienāda ar kuba skaldni. Iekrāsosim rūtiņas šaha galdiņa secībā tā, ka centrālais kubs sākumā stāv uz melnās rūtiņas.

Pierādīsim divas lemmas:

1. lemma. Pēc pāra skaita gājienu kubs atrodas uz tās pašas krāsas rūtiņas, kur sākumā, bet pēc nepāra skaita gājienu – uz pretējas krāsas rūtiņas.

Tā kā rūtiņas izkrāsotas šaha galdiņa secībā, tad kubs var pārvelties tikai no melnas rūtiņas uz baltu un no baltas – uz melnu. Tad skaidrs, ka ik pēc diviem gājieniem kubs atradīsies uz tās pašas krāsas rūtiņas, bet ik pēc viena – uz pretējas krāsas rūtiņas nekā sākumā.

2. lemma. Ja kubs no stāvokļa  pārgājis stāvoklī , tad tas izdarījis nepāra skaita gājienu, bet, ja pārgājis stāvoklī , tad tas izdarījis pāra skaita gājienu.

Iezīmēsim kuba divas virsotnes tā, ka, skatoties no augšas, redzam . Izdarot vienu gājienu, stāvoklis  mainās uz stāvokli  un tad atkal atpakaļ. Līdz ar to arī A burts ir redzams pamīšus: vienu reizi vertikāli, vienu reizi horizontāli.

Sauksim kubiņus par malējiem vai par centrālo atkarībā no to sākuma pozīcijas un par 1., 2., 3., 4., 5. atkarībā no to beigu pozīcijas (no kreisās uz labo). Saskaņā ar 2. lemmu 2. kubs ir izdarījis nepāra skaitu gājienu, jo pārgājis no vertikālas pozīcijas uz horizontālu. Ja 2. kubs būtu centrālais, tad, ņemot vērā, ka tas sākumā stāv uz melnas rūtiņas un ir izdarījis nepāra skaitu gājienu, tas tagad stāvētu uz baltas rūtiņas. Tā kā 2. rūtiņa ir balta, tad 1. rūtiņa ir melna. Tā kā 2. kubs ir centrālais, tad 1. kubs var būt tikai malējais. Tātad ir kāds malējais kubs, kurš no baltas rūtiņas (tie visi sākumā atradās uz baltām rūtiņām) nonācis uz melnas rūtiņas, pie tam A burts redzams vertikāli. Lai nonāktu no baltas uz melnu rūtiņu, vajadzīgs nepāra skaits gājienu, bet, lai nonāktu no vertikālas pozīcijas uz vertikālu, vajadzīgs pāra skaits gājienu. Tātad iegūta pretruna un 2. kubs nevar būt centrālais. No tā seko, ka 2. kubs ir malējais. Tā kā malējam kubam vajadzīgs nepāra skaits gājienu, lai pārietu no vertikāla stāvokļa uz horizontālu, tad pēc 1. lemmas tas pārgājis no baltas rūtiņas uz melnu. Tā kā laukums izkrāsots šaha galdiņa formā, tad ir vēl tikai viena cita melna rūtiņa – 4. rūtiņa. Centrālais kubs ir pārgājis no vertikālas pozīcijas uz vertikālu, tātad izdarījis pāra skaitu gājienu. Pēc 1. lemmas tas nonācis melnā rūtiņā. Tātad centrālais kubs ir 4. kubs.

29.9.5. Atbilde: bija 11 rūķīšu; 11. rūķītim bija 4 dālderi; 10. rūķītim bija 5 dālderi; ..., 2. rūķītim bija 13 dālderi un 1. rūķītim bija 14 dālderi. **Pierādījums:** pieņemsim, ka sākumā n-tajam rūķītim ir x dālderi. Tad (n-1)-am rūķītim ir x+1 dālderis, (n–2)-am ir x+2 dālderi, ..., 1-ajam ir n+x–1 dālderis.

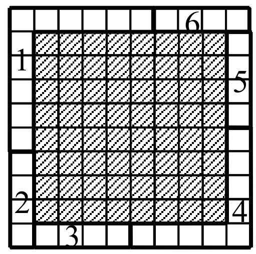
Pēc 1. apļa 2-ajam rūķītim ir par 1 dālderi mazāk nekā sākumā, jo viņam 1 dālderi iedod 1-ais rūķītis, bet 3-ajam viņš atdod 2 dālderus. Līdzīgi ir arī visiem pārējiem rūķīšiem, izņemot pirmo: ja saņem k dālderus, tad projām atdod k+1, un rezultātā ir par 1 dālderi mazāk, nekā bija sākumā. Pie pirmā rūķīša turpretī nonāk visu citu rūķīšu "zaudētie" n–1 dālderi.

Tātad pēc 1. apļa naudas daudzumi ir $2n+x-2$, $n+x-3$, $n+x-4$, ..., $x+1$, x, $x-1$. Bet pēc 2. apļa naudas daudzumi ir $3n+x-3$, $n+x-4$, $n+x-5$, ..., x, $x-1$, $x-2$. Process beigsies brīdī, kad naudas daudzumi būs $x+(x+1)(n-1)$, $n-2$, $n-3$, ..., 2, 1, 0. Vienīgi 1. rūķītim var būt 6 reizes vairāk naudas nekā kaimiņam, jo pārējiem rūķiem ir $n-2$; $n-3$; ...; 1; 0 dālderi, kas ir pēc kārtas ņemti veseli skaitļi. Ja 1. rūķītim ir 6 reizes vairāk naudas nekā tā kaimiņam, tad $x+(x+1)(n-1)=6(n-2)$. Risinot vienādojumu, iegūstam $x+xn-x+n-1=6n-12$ jeb $xn=5n-11$; izsakot x, iegūstam $x = 5 - \frac{11}{n}$. Tā kā x – naturāls skaitlis, tad $n=1$ vai $n=11$. Pēc uzdevuma jēgas nevar būt $n=1$. Tāpēc $n=11$ un $x = 5 - \frac{11}{n} = 4$.

Latvijas 30. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

30.5.1. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.5.1. atrisinājumam.
Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast mazāko (lielāko) iespējamo vērtību un parādīt piemēru; otrkārt, pierādīt, ka mazāku (lielāku) vērtību atrast nav iespējams.
a) **Atbilde:** 2111.
Pierādījums: apskatīsim četrciparu skaitļa pēdējos 3 ciparus. Zināms, ka neviens no tiem nevar būt nulle, bet nekādu citu nosacījumu nav. Lai skaitlis būtu pēc iespējas mazāks, arī tā pēdējiem cipariem jābūt pēc iespējas mazākiem. Tātad par četrciparu skaitļa pēdējiem 3 cipariem der 111. Pirmais cipars ir par 1 mazāks nekā pārējo ciparu summa, tātad tas jebkuram interesantam četrciparu skaitlim ir vismaz 2 (pēdējo 3 ciparu summa ir vismaz 1+1+1=3, bet, tā kā pirmais cipars ir par 1 mazāks nekā pārējo ciparu summa, tad tas ir vismaz 3–1=2). Mūsu iegūtajam skaitlim 2111 arī pirmais cipars ir mazākais iespējamais. Tātad mazākais interesantais četrciparu skaitlis ir 2111.
b) **Atbilde:** 91111111111 (skaitlis beidzas ar desmit 1).
Pierādījums: lai iegūtu pēc iespējas lielāku skaitli, tam ir jāsatur pēc iespējas vairāk ciparu. Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem skaitļa pirmajam ciparam jābūt par 1 mazākam nekā visu pārējo ciparu summai, tad 1. cipars noteikti ir 9 (lielāka cipara par 9 nav, bet, ja 1. cipars būs mazāks par 9, tad arī skaitlis samazināsies). Pārējo ciparu summa ir par 1 lielāka nekā pirmais cipars, tātad 9+1=10. Ciparu summu 10 var iegūt, saskaitot ne vairāk kā 10 ciparus, no kuriem neviens nav 0. Tātad interesantā skaitlī ir ne vairāk kā 11 ciparu (pirmais cipars un vēl ne vairāk kā 10 citi). Vienpadsmit ciparu skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir tikai 91111111111.
30.5.2. Piemērs: pietiek parādīt vienu veidu, kā ar 2 svēršanām iespējams noskaidrot prasīto. Apzīmēsim monētas ar A, B, C, D, E, F, G. Ar pirmo svēršanu salīdzinām jebkuras divas monētas ar jebkurām divām citām monētām, piemēram, A, B ar C, D. Iespējami vairāki gadījumi:
1) svari nav līdzsvarā. Tas nozīmē, ka ir atšķirīga monēta un tā ir kāda no monētām A, B, C, D. Ar otro svēršanu salīdzinām A, B ar E, F (E un F ir "īstās monētas", jo atšķirīga ir tikai 1 monēta un tā ir kāda no monētām A, B, C, D). Iespējami vairāki gadījumi:
   a) svari ir līdzsvarā. Tas nozīmē, ka monētas A, B, E un F ir īstas un viltotā monēta ir vai nu C, vai D. Tādā gadījumā no 1. svēršanas uzzina, vai viltotā monēta ir bijusi smagāka vai vieglāka. (Ja C un D svēra vairāk nekā A un B, tad viltotā monēta ir smagāka, bet, ja C un D svēra mazāk nekā A un B, tad viltotā monēta ir vieglāka.)
   b) svari nav līdzsvarā. Tas nozīmē, ka atšķirīgā monēta ir vai nu A, vai B. Tādā gadījumā gan 1., gan 2. svēršana rāda, vai viltotā monēta ir smagāka vai vieglāka par īsto (ja A, B sver mazāk nekā E, F, tad atšķirīgā monēta ir vieglāka, bet, ja A, B sver vairāk nekā E, F, tad atšķirīgā monēta ir smagāka).
2) svari ir līdzsvarā. Tas nozīmē, ka visas monētas A, B, C un D ir "īstas". Otrajā svēršanā salīdzinām monētas A, B, C (kas ir īstas) ar monētām E, F, G (kas vēl nav pārbaudītas). Iespējami vairāki varianti:
   a) svari ir līdzsvarā. Tas nozīmē, ka atšķirīgu monētu nav.
   b) svari nav līdzsvarā. Tas nozīmē, ka viltota ir kāda no monētām E, F vai G. To, vai viltotā monēta ir smagāka vai vieglāka, uzzinām no 2. svēršanas (ja E, F, G sver mazāk nekā A, B, C, tad atšķirīgā monēta ir vieglāka, bet, ja E, F, G sver vairāk nekā A, B, C, tad atšķirīgā monēta ir smagāka).



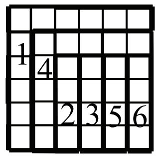
50A. zīmējums

30.5.3. Atbilde: kvadrātu **var** izveidot no 6 gabaliem. **Piemērs:** skat. 50A. zīm. **Pierādījums:** sauksim par "rāmi" figūru, kas izveidojas, kad no 10×10 rūtiņu liela kvadrāta izgriež 8×8 rūtiņu lielu centrālo kvadrātu (skat. 50A. zīm. – iesvītroto daļu). No rāmja izgriežam 6 figūras (skat. 50A. zīm.). Zīmējumā 51A. redzam, ka šīs 6 figūras var sakārtot tā, lai izveidotu kvadrātu.

30.5.4. Atbilde: jā, var. **Piemērs:** skat. 52A. zīm.
Ievērojiet: ja rūtiņas izkrāsotu šaha galdiņa kārtībā, tad pāra skaitļi atrodas melnajās rūtiņās, bet nepāra – baltajās rūtiņās.

5	16	9	2
8	1	4	15
13	12	11	14
6	7	10	3

52A. zīmējums



51A. zīmējums

30.5.5.
a) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** ievērosim, ka sākumā visu krāsu lodītes ir pāra skaitā. Izdarot pirmo gājienu, divu krāsu lodīšu skaits samazinās par vienu un trešās krāsas lodīšu skaits palielinās par vienu. Tātad visu krāsu lodīšu skaits ir mainījies par vienu un ir nepāra skaitlis (pāra skaitlim pieskaitot un atņemot viens, iegūst nepāra skaitli). Ar katru nākošo izdarīto gājienu atkal kādu divu krāsu lodīšu skaits samazināsies par vienu un trešās krāsas lodīšu skaits palielināsies par vienu. Ja visu krāsu lodītes bija pāra skaitā, tad pēc izdarītā gājiena tās būs nepāra skaitā, bet, ja visu krāsu lodītes bija nepāra skaitā, tad pēc izdarītā gājiena tās būs pāra skaitā. Tātad visu krāsu lodīšu skaita paritāte mainās reizē pēc katra gājiena. Tāpēc noteikti nevarēsim iegūt situāciju, kad divi daudzumi ir 0 (pāra skaitlis), bet viens daudzums – 1 (nepāra skaitlis).
b) Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** ievērosim, ka izdarot 3 gājienus bs, bz, sz pēc kārtas, visi daudzumi samazinās par 1 (par gājienu xy sauksim situāciju, kad no kastes paņemam x un y krāsu lodītes). Atkārtojam šo 3 gājienu ciklu vairākas reizes, kamēr izveidojam situāciju 1b, 3s, 6z (1 balta bumbiņa, 3 sarkanas bumbiņas un 6 zaļas bumbiņas). Tālāk ar gājieniem sz, sz, bz izveidojam situāciju 2b, 2s, 3z. To ar gājieniem bs, sz, bz, sz, bz, bs pārveidojam par 0b, 0s, 1z.

6. klase

30.6.1. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.6.1. atrisinājumam.

Atbilde: pēc 360 dienām. **Pierādījums:** ja pulkstenis ietu pareizi, tad 12^{00} tas atkal rādītu pēc 12, 24, 36...stundām. Lai pulkstenis, kurš steidzas, 12^{00} atkal rādītu pareizu laiku (tas rādītu 12^{00}), tam jābūt nepareizam par 12 stundām (1. dienā – pareizs, 2. dienā – nepareizs par 4 min., 3.dienā – nepareizs par 8 min.; meklējam to dienu, kad pulkstenis nepareizs par 12 stundām, jo tad tas atkal rādīs 12^{00}). Zinām, ka 12 stundās kopā ir $12 \cdot 60 = 720$ minūtes, bet katru dienu pulkstenis steidzas par 4 minūtēm. Tātad, lai pulkstenis būtu steidzies par 720 minūtēm, nepieciešamas 720:4=180 dienas.

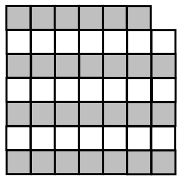
Lai pulkstenis, kurš atpaliek, 12^{00} atkal rādītu pareizu laiku (tas rādītu 12^{00}), tam jābūt nepareizam par 12 stundām. (1. dienā – pareizs, 2. dienā – nepareizs par 6 min., 3.dienā – nepareizs par 12 min.; meklējam to dienu, kad pulkstenis nepareizs par 12 stundām, jo tad tas atkal rādīs 12^{00}). Zinām, ka 12 stundās kopā ir $12 \cdot 60 = 720$ minūtes, bet katru dienu pulkstenis atpaliek par 6 minūtēm. Tātad, lai pulkstenis būtu atpalicis par 720 minūtēm, nepieciešamas 720:6=120 dienas.

Tātad pulkstenis, kurš steidzas 12^{00} atkal pareizu laiku (rādīs 12^{00}) pēc 180, 360, 540... dienām, bet pulkstenis, kurš atpaliek – pēc 120, 240, 360, 480 ... dienām. Tātad vienlaicīgi 12^{00} tie pirmo reizi rādīs pareizu laiku pēc 360 dienām.

30.6.2.
a) Atbilde: jā, var izdarīt. **Piemērs:** skat. 53A. zīm.. Ar bultiņām parādīts, kuri taisnstūri ir horizontāli, kuri – vertikāli.


53A. zīmējums

b) Atbilde: nē, nevar izdarīt. **Pierādījums:** ja n=7, tad figūrā ir 48 rūtiņas. Tas nozīmē, ka puse no visām rūtiņām jeb 24 no tām ietilpst taisnstūros, kas ir horizontāli. Nokrāsosim doto figūru, kā parādīts zīmējumā 54A. Redzam: katrs horizontālais taisnstūris satur vai nu 0, vai 2 baltas rūtiņas. Tātad horizontālie taisnstūri satur pāra skaitu balto rūtiņu. Savukārt katrs no "vertikālajiem" taisnstūriem satur tieši 1 baltu un 1 melnu rūtiņu. Tā kā arī vertikālo taisnstūru ir 24, tad kopā tie saturēs 12 baltas rūtiņas, tātad pāra skaitu. Bet balto rūtiņu pavisam ir 21, kas ir nepāra skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu. Tātad esam pierādījuši, ka prasītais nav iespējams.



54A. zīmējums

30.6.3. Atbilde: jā, var. **Piemērs:** 4, 5, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 5, 2.

30.6.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast kāds ir spēlētāju un iegūto punktu skaits, un parādīt piemēru kā tas ir iespējams; otrkārt, pamatot atrastos rezultātus un pierādīt, ka spēlētāju un viņu iegūto punktu skaits nevar būt savādāks.

- **Atbilde:** ir 6 spēlētāji: Jānis, Pēteris, Andris, Juris, X un Y, kas ieguvuši attiecīgi: 4½, 3½, 3, 1½, 1½, 1 punktus. **Piemērs:** kādi var būt izspēlēto spēļu rezultāti, lai iegūtu prasīto, skat. 55A. zīm.

	Jā	Pē	An	Ju	X	Y	
Jā		½	1	1	1	1	4½
Pē	½		½	½	1	1	3½
An	0	½		½	1	1	3
Ju	0	½	½		½	0	1½
X	0	0	0	½		1	1½
Y	0	0	0	1	0		1

55A. zīmējums

- **Pierādījums:** turnīrā, kur katrs spēlētājs spēlē ar katru citu vienu reizi, kopumā ir $\frac{n(n-1)}{2}$ spēles (katrs no n spēlētājiem spēlē ar katru no (n–1) spēlētājiem, bet reizinājumā $n \cdot (n-1)$ katra spēle ieskaitīta 2 reizes). Varam iegūt tabulu:

Spēlētāju skaits	Spēļu skaits (kopējais punktu skaits)
4	6
5	10
6	15
7	21

Jānis, Pēteris, Andris un Juris kopā ieguva 12½ punktus. Tātad spēlētāju skaits bija vismaz 6 (ja spēlētāju skaits būtu mazāks par 6, tad kopējais punktu skaits būtu mazāks par četru puišu zināmo punktu skaitu summu – tā nevar būt). Ja spēlētāju būtu 7, tad pārējie spēlētāji būtu ieguvuši 21–12½=8½ punktus. Zinām, ka nevienam no pārējiem spēlētājam nevar būt vairāk punktu par Juri. Tā kā Jurim ir 1½ punkti, tad trim "pārējiem spēlētājiem" nevarētu būt vairāk par 1½+1½+1½=4½ punktiem. Esam ieguvuši pretrunu, jo pārējiem spēlētājiem kopā ir 8½ punktu. Ja spēlētāju skaits ir lielāks par 7, tad spriežam līdzīgi un atkal nonākam pie pretrunas.

Tātad spēlētāju skaits **varbūt** varētu būt 6. Abi pārējie spēlētāji X un Y kopā būtu ieguvuši 15–12½=2½ punktus. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, ka nevienam spēlētājam nav vairāk punktu par Juri, vienam no viņiem jāiegūst 1½ punkti, otram – 1 punkts.

Lai pierādītu, ka spēlētāju skaits patiešām var būt 6, jānoskaidro, vai turnīrs ar šādiem rezultātiem vispār ir iespējams (skat. piemēru).

30.6.5. Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** apzīmēsim atsvarus ar A, B, C un D. Ar 1. svēršanu nosveram A+B. Ja A+B=20 vai A+B=22, tad attiecīgi A=B=10 vai A=B=11. Ar atlikušajām 2 svēršanām nosveram atsevišķi C un D. Visas masas esam uzzinājuši.

Ja A+B nav ne 20, ne 22, tad A+B=21. Ar 2. svēršanu nosveram A+C. Ja A+C=20 vai A+C=22, tad attiecīgi A=C=10 vai A=C=11. No tā, ka A+B=21, varam aprēķināt B, un ar 3. svēršanu uzzinām D masu. Ja A+C=21, tad A+B=A+C un no tā seko, ka B=C. Tā kā B=C, tad B+C ir pāra skaitlis, tātad 20 vai 22. Trešajā reizē sveram B+C+D. Apskatīsim iespējamos variantus:

B+C+D	B+C	D	B	C	A
30	20	10	10	10	11
31	20	11	10	10	11
32	22	10	11	11	10
33	22	11	11	11	10

Esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus.

7. klase

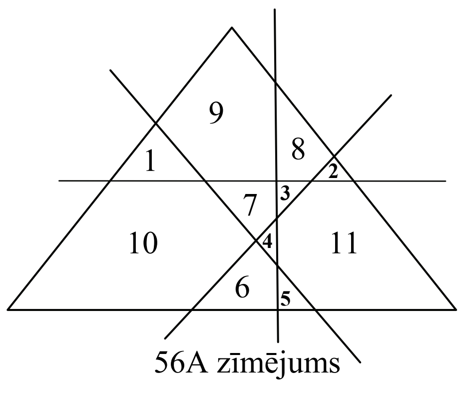
30.7.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast, kāda ir lielākā iespējamā x vērtība, un parādīt piemēru, kas parāda, kā tas ir iespējams; otrkārt, pierādīt, ka lielāka x vērtība nav iespējama.
Atbilde: x=5. **Piemērs:** ja x=5 un y=0, ievietojot iegūstam, ka $|5+0|+|5-0|=10$. Vienādība ir patiesa, x var būt 5.
Pierādījums: pamatosim, ka nevar būt x>5. Apskatīsim vairākus gadījumus:

1) $x>5$ un $y \geq 5$. Tad $|x+y|>10$, dotā vienādība ir aplama, jo kreisajā pusē ir vērtība, kas ir lielāka par 10, bet labajā pusē ir tikai 10. Tātad esam ieguvuši pretrunu, un nav iespējams, ka $x>5$ un $y \geq 5$.
2) $x>5$ un $-5 \leq y \leq 5$. Tad kreisajā vienādības pusē ir $|x+y|+|x-y|=x+y+x-y=2x>10$ (moduļu zīmes varam nerakstīt, jo $x+y>0$ un arī $x-y>0$ pie dotajiem x un y), bet labajā pusē ir tikai 10. Tātad esam ieguvuši pretrunu un nav iespējams, ka $x>5$ un $-5 \leq y \leq 5$.
3) $x>5$ un $y<-5$. Tad $|x-y|>10$ un dotā vienādība ir aplama, jo kreisajā pusē ir vērtība, kas ir lielāka par 10, bet labajā pusē ir tikai 10. Tātad esam ieguvuši pretrunu, un nav iespējams, ka $x>5$ un $y<-5$.

Esam apskatījuši visus iespējamos variantus, kad $x>5$, un ieguvuši pretrunas, tātad x nevar būt lielāks par 5.

30.7.2.

a) Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** skat. 56A. zīm.. Zīmējumā redzami 5 trijstūri (figūras ar numuriem no 1 līdz 5), 3 četrstūri (figūras ar numuriem no 6 līdz 8), 2 piecstūri (figūras ar numuriem 9 un 10) un 1 sešstūris (figūra ar numuru 11).



56A zīmējums

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** katra no 4 dotajām taisnēm krusto trijstūra malas 2 punktos (tātad lielākais var būt 8 krustpunkti). Tā rezultātā trijstūra kontūrs ir sadalīts nogriežņos, kur katru nogriezni ierobežo taisnes krustpunkts ar kontūru vai trijstūra virsotne. Tātad kopā trijstūra kontūrs var tikt sadalīts maksimums 11 nogriežņos. (Pamatosim: novelkot 4 taisnes, iegūstam lielākais 8 krustpunktus ar trijstūra malām. Nogriežņu skaits, kas veidojas uz trijstūra malas, ir par 1 lielāks nekā krustpunktu skaits ar šo malu. Tātad, ja katru no trijstūra malām krusto vismaz viena taisne, tad kopumā izveidojas 8+3=11 nogriežņi uz trijstūra kontūra. Ja ir kāda trijstūra mala x, kuru neviena taisne nekrusto, tad izveidojas 8+2=10 nogriežņi uz tām trijstūra malām, kuras tiek krustotas, bet arī pati mala x veido nogriezni, tātad, atkal kopumā var tikt izveidoti 10+1=11 nogriežņi. Situācija, kad neviena taisne nekrusto divas vai vairāk trijstūra malas, nav jāapskata, jo tad neveidosies neviens no prasītajiem daudzstūriem.) Katra taisne krusto augstākais 3+2=5 citas taisnes. (Pamatosim: tā kā kopā ir 4 taisnes un pati sevi neviena taisne krustot nevar, tad tā var krustot 3 atlikušās taisnes katru vienu reizi. Un taisne var krustot 2 trijstūra malas. Kopā iegūstam 3 krustpunktus ar citām taisnēm un 2 krustpunktus ar taisnēm, uz kurām atrodas trijstūra malas, tātad 3+2=5 krustpunktus.) Ja taisnei ir 5 krustpunkti, kur 2 no tiem ir ar trijstūra malām, tad trijstūra iekšpusē ir izveidojušies 4 nogriežņi uz šīs taisnes.

Katrs kontūra nogrieznis ir mala **vienam** sadalījuma daudzstūrim. Katrs iekšējs nogrieznis ir sadalījuma mala **diviem** daudzstūriem. Tāpēc sadalījuma daudzstūriem kopā nevar būt vairāk par $11+(4\cdot4)\cdot2=43$ malām (11 – sadalījuma punkti uz trijstūra kontūra; $4\cdot4$ – uz katras no 4 taisnēm ir 4 nogriežņi; reizina ar 2, jo katrs iekšējais nogrieznis ir sadalījuma mala diviem daudzstūriem). Bet no prasītā seko, ka jābūt $4\cdot3+4\cdot4+2\cdot5+1\cdot6=44$ malām (4 – trijstūri; 4 – četrstūri; 2 – piecstūri; 1 – sešstūris). Esam ieguvuši pretrunu – varam izveidot maksimums 43 malas, bet vajadzīgas 44. Tātad tas nav iespējams.

30.7.3. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.7.4. atrisinājumam.

Pierādījums: apzīmēsim spēlētājus ar A un B, un spēlētājs A būs tas, kurš izdara pirmo gājienu. Lai A uzvarētu, viņš pirmajā gājienā uzraksta skaitli 2. Tagad vēl var rakstīt skaitļus 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Skaitli 1 rakstīt nevar, jo 2 dalās ar 1. Spēlētājs A domās sadala atlikušos skaitļus grupās: (5, 7), (3, 8) un (9, 4, 6). Ja spēlētājs B uzraksta skaitli x, kas atrodas skaitļu pārī, tad spēlētājam A jāraksta otrs skaitlis no pāra, kurā ietilpst x. Bet, ja spēlētājs B uzraksta skaitli x no skaitļu trijnieka, tad: ja x=9, tad A raksta 4; ja x=4, tad A raksta 6, un, ja x=6, tad A raksta 4. Tā kā vienā grupā esošie skaitļi viens ar otru nedalās, tad, ja spēlētājs B varēs uzrakstīt savu skaitli, tad noteikti arī spēlētājs A varēs uzrakstīt vēl vienu skaitli. Tāpēc A noteikti uzvarēs, jo pēc katra B gājiena A vienmēr vēl varēs izdarīt gājienu.

30.7.4. Pierādījums:

1) ΔCAD, ΔDBE, ΔECA, ΔADB – vienādsānu, jo šajos trijstūros augstumi ir arī mediānas (augstums sadala pamatu uz pusēm, tātad ir mediāna).
2) AC=AD, BD=BE, EC=AC, AD=DB, jo mediānas sadala pamatu uz pusēm.
3) Esam ieguvuši, ka **BE**=BD=AD=AC=**CE**.
4) Tātad BE=CE un ΔBEC ir vienādsānu.
5) Vienādsānu trijstūrī mediāna ir arī augstums, tāpēc $EE_1 \perp BC$.

30.7.5

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** $5,4\to9$; $9,7\to32$; $6,2\to32$; $32,32\to0$; $3,1\to8$; $8,8\to0$; $0,0\to0$.

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** aplūkosim sekojošu tabulu:

a	b	$\lvert a^2-b^2\rvert$
pāra	pāra	pāra
pāra	nepāra	nepāra
nepāra	pāra	nepāra
nepāra	nepāra	pāra

No tabulas redzams, ka nepāra skaitļu daudzums uz tāfeles pēc viena gājiena izdarīšanas vai nu nemainīsies, vai arī samazināsies par 2. Tā kā sākumā ir 5 nepāra skaitļi (nepāra skaits), tad nevarēsim iegūt 0 nepāra skaitļus, jo 0 ir pāra skaitlis.

8. klase

30.8.1. Atbilde: vienādojuma saknes ir x_0 un $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$. **Pierādījums:** pareizinot doto vienādojumu $x^2+\frac{p_1+p_2+p_3}{3}x+\frac{q_1+q_2+q_3}{3}=0$ ar 3, iegūstam $3x^2+p_1x+p_2x+p_3x+q_1+q_2+q_3=0$ jeb $(x^2+p_1x+q_1)+(x^2+p_2x+q_2)+(x^2+p_3x+q_3)=0$ (1). Esam ieguvuši 3 sākumā doto vienādojumu summu. Tā kā x_0 ir katra dotā vienādojuma sakne, tad katra no iekavām ir 0 un arī iekavu summa jeb vienādojuma (1) kreisās puses vērtība ir 0. Tātad x_0 ir viena no meklētā vienādojuma saknēm. Otru vienādojuma sakni w varam izteikt pēc Vjeta teorēmas: $x_0+w=-\frac{p_1+p_2+p_3}{3}$.

Tāpēc $w=-\frac{3x_0+p_1+p_2+p_3}{3}=\frac{-(x_0+p_1)-(x_0+p_2)-(x_0+p_3)}{3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

30.8.2. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 28.8.3. atrisinājumu**.**

30.8.3. Atbilde: var iegūt 6 saskaitāmos: 56=3+5+7+11+13+17. **Pierādījums:** pierādīsim, ka vairāk saskaitāmo iegūt nevar. Lai katru divu saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs būtu 1, tiem jābūt savstarpējiem pirmskaitļiem. Aizstājot katru saskaitāmo ar mazāko pirmskaitli, ar kuru tas dalās (katrs saskaitāmais noteikti dalās ar pirmskaitli, kas mazāks par to, vai arī pats ir pirmskaitlis), kopējā summa vai nu samazinās, vai paliek tā pati (noteikti nepalielinās). Lai saskaitāmie būtu savstarpēji pirmskaitļi, katram no tiem jādalās ar citu pirmskaitli (citādi tie abi dalīsies ar skaitli, kas lielāks par 1, bet tā nedrīkst būt pēc uzdevuma nosacījumiem). Bet pat 7 mazāko pirmskaitļu summa ir 2+3+5+7+11+13+17=58, bet 58>56.

30.8.4. Pierādījums: ievērosim, ka 4×4 un 3×6 daļām laukums kvadrātcentimetros skaitliski vienāds ar perimetru centimetros (laukums kvadrātiņam 4×4 ir $4\times4=16$, bet perimetrs 4+4+4+4=16; līdzīgi, laukums taisnstūrim 3×6 ir $3\times6=18$, bet perimetrs 3+6+3+6=18). Tā kā Andrim un Jurim jāsadala vienādi laukumi, tad viņu iegūtajām daļām ir arī vienādas perimetru summas – apzīmēsim tās ar P. Katra zēna perimetru summa sastāv no kvadrāta perimetra 400 cm (kvadrāta mala ir 1 m jeb 100 cm, tātad P=400 cm), kuru zēni nav vilkuši, un no divkāršotas novilkto līniju garumu summas. (Pamatosim: katra novilktā līnija sadala figūru divās citās, un tāpēc, aprēķinot figūru perimetru summu, katra līnija ir jāieskaita divas reizes.) Tātad katra zēna novilkto līniju garumu summa ir $\frac{P-400}{2}$ un Andra novilkto līniju kopgarums tiešām vienāds ar Jura novilkto līniju kopgarumu.

30.8.5.

a) Atbilde: jā. **Piemērs:** (1; 5; 6) un (2; 3; 7)

b) Atbilde: jā. **Piemērs:** (1; 4; 6; 7) un (2; 3; 5; 8)

c) Atbilde: jā. **Pierādījums:** b) piemērā redzam, ka astoņus pēc kārtas ņemtus skaitļus no 1 līdz 8 var sadalīt divās daļās tā, lai tie apmierinātu uzdevuma nosacījumus. Līdzīgi **jebkurus** astoņus pēc kārtas ņemtus skaitļus x+1, x+2, x+3, ..., x+8 var sadalīt divās grupās, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem: (x+1; x+4; x+6; x+7) un (x+2; x+3; x+5; x+8). Pārbaudīsim, vai skaitļu summas patiešām ir vienādas: tiešām, x+1+x+4+x+6+x+7=4x+18 un arī x+2+x+3+x+5+x+8=4x+18. Līdzīgi pārbaudīsim arī kvadrātu summu vienādību: $(x+1)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+7)^2=$
$=x^2+2x+1+x^2+8x+16+x^2+12x+36+x^2+14x+49=4x^2+36x+102$ un arī
$(x+2)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+8)^2=x^2+4x+4+x^2+6x+9+x^2+10x+25+x^2+16x+64=x^2+36x+102$.

Uz katras lapas jābūt 2003 skaitļiem, 2003 varam izteikt kā $3+4\cdot500$. Tātad uz lapas varam rakstīt 3 skaitļus no a) piemēra un 500 reizes 4 skaitļus no dažādiem skaitļu astotniekiem, kas aprakstīti iepriekš. Lai neviens skaitlis neatkārtotos, katrs nākamais x, kas veido skaitļu astotniekus, jāizvēlas ar pietiekami lielu intervālu. Varam izvēlēties x_n kā $x_{n-1}+10$; tā kā pie katra no x lielākais skaitlis, kas tiek pieskaitīts, ir 8, tad nekādi 2 šādi izveidoti skaitļi noteikti nebūs vienādi. Tā kā 3 skaitļu komplekts apmierina uzdevuma nosacījumus un arī katrs no 4 skaitļu komplektiem apmierina uzdevuma nosacījumus, tad arī viss sadalījums apmierina uzdevuma nosacījumus.

9. klase

30.9.1. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.9.1. atrisinājumam. **Pierādījums:** Tā kā $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 < 0$, tad vismaz viens no q_1, q_2, q_3 ir negatīvs. Tālāk līdzīgi kā 29.9.1. uzdevumā: pieņemsim, ka $q_1<0$, bet tad atbilstošā vienādojuma diskriminants $(p_1)^2 - 4 \cdot q_1>0$. Tātad vienādojumam ir 2 saknes.

30.9.2.

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** skat. 57A. zīm.

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** naturālo skaitļu no 1 līdz 16 summa ir $(1+16)+(2+15)+...+(8+9)=17 \cdot 8=136$. Tā kā katrs skaitlis ir gan rindiņā, gan kolonnā, tad visu rindiņu un kolonnu summu summa ir $2 \cdot 136 = 272$. Pēc dotā zināms, ka skaitļu summām visās rindās un kolonnās jābūt dažādām un jādalās ar 8. Tā kā pavisam ir 4 kolonnas un 4 rindiņas, tad visu rindiņu un visu kolonnu summu summa sastāvēs no 8 skaitļiem. Mazākie iespējamie atšķirīgie skaitļi, kas dalās ar 8, ir 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, un to summa ir 8+16+32+...+64=$8 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8) = 8 \cdot 36 = 288$. Iegūta pretruna, jo no vienas puses visu rindiņu un kolonnu summu summa ir vismaz 288, bet no otras puses tā ir 272.

16	1	3	5	7
20	2	4	6	8
48	9	11	13	15
52	16	14	12	10
	28	32	36	40

57A. zīmējums

30.9.3. Atbilde: p_1=2 vai p_1=2 un p_2=3. **Pierādījums:** eksistē tikai viens pāra pirmskaitlis – skaitlis 2. Tātad ne vairāk kā viens no skaitļiem p_1, p_2 ..., p_n ir pāra skaitlis. Tātad no skaitļiem $(p_1–1)$, $(p_2–1)$, ... $(p_n–1)$ ne vairāk kā viens ir nepāra skaitlis (ja no pāra skaitļa atņem 1, iegūst nepāra skaitli), bet visi pārējie skaitļi ir pāra (ja no nepāra skaitļa atņem 1, iegūst pāra skaitli). Ja n>3, tad $p_1p_2...p_n$ nedalās ar 4, jo satur maksimums 1 pāra skaitli – 2, bet $(p_1–1)(p_2–1)...(p_n–1)$ dalās ar 4, jo satur vismaz 2 pāra skaitļus. Tātad $n \le 2$.

Ja n=1, der tikai p_1=2. Ja p>2, tad pastāv nevienādība $1 < \frac{p}{p-1} < 2$, tātad p nedalās ar (p–1).

Pamatosim: pieņemsim, ka p fiksēts skaitlis un p>2, tad iegūstam $\frac{p}{p-1}$, varam veikt pārveidojumus: $\frac{p-1+1}{p-1} = \frac{p-1}{p-1} + \frac{1}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ (skaitītājā pieskaitām un atņemam 1, daļas vērtību nemainot, pēc tam sadalām iegūto izteiksmi 2 saskaitāmajos). Iegūtā izteiksme $1+\frac{1}{p-1}$ noteikti lielāka par 1, un tā kā p>2, tad $\frac{1}{p-1}$ ir nesaīsināma daļa. No tā seko, ka $1 < \frac{p}{p-1} < 2$.

Ja n=2, tad vienam no pirmskaitļiem p_1, p_2 jābūt 2 (nepāra skaitlis p_1p_2 nedalītos ar pāra skaitli $(p_1–1)(p_2–1)$). Pieņemsim, ka p_1=2, tad jānoskaidro, kādiem p_2 skaitlis $p_1p_2 = 2 \cdot p_2$ dalās ar $p_2–1$ (skaitlis $(p_1–1)$=1, tāpēc noteikti p_1p_2 dalīsies ar $(p_1–1)$). Ievērojam, ka $\frac{2p_2}{p_2-1} = \frac{2p_2-2+2}{p_2-1} = \frac{2(p_2-1)+2}{p_2-1} = 2 + \frac{2}{p_2-1}$.

Tātad, lai $2 \cdot p_2$ dalītos ar $(p_2–1)$, skaitlim 2 jādalās ar $p_2–1$. Tā kā skaitlis 2 dalās tikai ar 1 un 2, tad $p_2-1=1$ vai $p_2-1=2$. Tas nozīmē, ka p_2=2 vai p_2=3, bet tā kā p_1=2 un pirmskaitļiem jābūt dažādiem, tad $p_2 \neq 2$, un p_2=3. Tātad gadījums n=2 der, un p_1=2 un p_2=3.

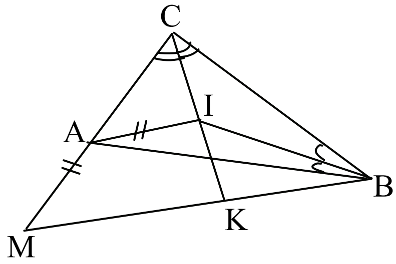
30.9.4. Pierādījums:

1) Atliksim uz CA pagarinājuma AM=AI (skat. 58A. zīm.).

2) CM=CA+AM=CA+AI=CB.

3) ΔMCB – vienādsānu, jo CM=CB.

4) $\angle AMI = \frac{1}{2}\angle CAI = \frac{1}{4}\angle CAB$ pēc ārējā leņķa īpašības vienādsānu trijstūrī MAI un ņemot vērā, ka $\angle CAI = \frac{1}{2}\angle CAB$ (jo trijstūrī ievilktās r. l. centrs atrodas bisektrišu krustpunktā).



58A. zīmējums

5) $\Delta MCI = \Delta BCI$ pēc pazīmes mlm, jo MC=BC, CI – kopīga, $\angle MCI = \angle BCI$, jo CK ir $\angle MCB$ bisektrise.
6) $\angle IBC = \angle IMC$, jo vienādos trijstūros MCI un BCI attiecīgie elementi ir vienādi.
7) no tā seko, ka $\frac{1}{2}\angle ABC = \angle IBC = \angle IMC = \angle IMA = \frac{1}{4}\angle A$.
8) tātad $\angle A = 2 \cdot \angle B$.

30.9.5.

a) Atbilde: uzvar Juris. **Pierādījums:** Andris izdara pirmo gājienu un apēd tieši 1 konfekti (vismaz 1 jāapēd obligāti, bet ne vairāk kā n, kur n – gājiena kārtas numurs, tātad šoreiz tieši 1). Juris ar otro gājienu ēd 2 konfektes. Kopā tagad apēstas 3 konfektes. Andris var ēst 1, 2 vai 3 konfektes, bet Juris ēd attiecīgi 4, 3 vai 2 konfektes un uzvar.

b) Atbilde: uzvar Andris. **Pierādījums:** Andris spēlē tā, lai pēc viņa gājieniem būtu apēstas 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ... konfektes. Parādīsim, kā Andris to var panākt. Skaidrs, ka ar 1.gājienu viņš panācis, ka apēsta 1 konfekte. Pieņemsim, ka ar (2n–1)-o gājienu (n=1; 2; 3;...) viņš panācis, ka apēstas n^2 konfektes. Kārtējā gājienā Juris apēdīs no 1 līdz 2n konfektēm, tātad kopā pēc šī Jura gājiena būs apēstas vismaz n^2+1, bet ne vairāk kā n^2+2n konfektes. Andris grib panākt, lai pēc (2n+1)-ā gājiena (ko izdarīs viņš) būtu apēstas $(n+1)^2=n^2+(2n+1)$ konfektes. Tā kā $n^2+(2n+1)–(n^2+1)=2n$ un $n^2+(2n+1)–(n^2+2n)=1$, tad viņš šo mērķi var sasniegt, jo ar (2n+1)-o gājienu viņš var ēst no 1 līdz 2n+1 konfektēm. Tātad Andris savu mērķi var realizēt. Tā kā $64=8^2$, tad Andris noteikti apēdīs arī 64-o konfekti.

Latvijas 31. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

31.5.1. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.5.1 un uzdevuma 30.5.1. atrisinājumiem.
Ja uzdevumā prasīts atrast lielāko (mazāko) iespējamo vērtību, tad risinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, parādīt, kāda ir vislielākā (vismazākā) vērība un pamatot, ka tā patiešām der; otrkārt, pierādīt, ka lielāku (mazāku) vērtību iegūt nevar.

a) Atbilde: 21111. **Piemērs:** vislielākā vērtība ir 21111. Skaitļa 21111 pirmais cipars – 2 – patiešām par 2 mazāks nekā visu pārējo ciparu summa 1+1+1+1=4.

- **Pierādījums:** Pierādīsim, ka lielāku skaitli iegūt nevar. Apskatīsim piecciparu skaitļa pēdējos 4 ciparus. Zināms, ka neviens no tiem nevar būt nulle, bet nekādu citu nosacījumu nav. Lai skaitlis būtu pēc iespējas mazāks, arī tā pēdējiem cipariem jābūt pēc iespējas mazākiem. Tātad par piecciparu skaitļa pēdējiem 4 cipariem der 1111. Pirmais cipars ir par 2 mazāks, nekā pārējo ciparu summa, tātad tas ir vismaz 2. Tātad mazākais interesantais piecciparu skaitlis ir 21111.

b) Pierādījums: lai skaitlis būtu lielāks, tajā jābūt pēc iespējas daudz cipariem. Pēc uzdevuma nosacījumiem pirmais skaitļa cipars ir par divi mazāks nekā pārējo ciparu summa. Vislielākais cipars ir 9. Bet pārējo ciparu summa ir par 2 lielāka nekā 1. cipars. Tātad pārējo ciparu summa var būt 11. Lai ciparu skaits meklētajā skaitlī būtu pēc iespējas lielāks, 11 jāizsaka ar pēc iespējas daudz saskaitāmajiem, kas katrs būs vienāds ar viena cipara vērtību. Tāpēc 11 jāizsaka kā 11 vieninieku summa.

- **Atbilde:** meklētais skaitlis ir 911111111111 (11 vieninieki). **Piemērs:** Šis skaitlis patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus, jo tā 1. cipars ir par 2 mazāks nekā pārējo ciparu summa.

31.5.2. Atbilde: t=15. **Pierādījums:** apzīmēsim tukšās rūtiņas ar burtiem: t, u, x, y, z tā, kā parādīts zīmējumā 59A. Redzam, ka augšējās rindiņas summa ir 4+5+7+14=30, bet aizpildītās diagonāles summa ir 10+12+3+14=39. No dotā zināms, ka skaitļu summas rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Tātad apskatāmās summas ir no 30 līdz 39. Uzdevumā dotajā kvadrātā vēl nav ierakstīti skaitļi 1; 2; 8; 15; 16. Burtu t un y vietā varētu būt tikai 15 un 16. (Pamatosim: pieņemsim, ka burta t vietā varētu būt kāds cits no vēl neuzrakstītajiem skaitļiem (ne 15 vai 16). Lielākais no palikušajiem skaitļiem tad būtu 8. Rindas 6+13+3+t summa ir 22+t. Ja t būtu 8, tad 22+t būtu 30, bet vienai rindiņai jau ir šāda summa. Pieskaitot mazāku skaitli, summa nesasniegs vērtību 30. Tātad, lai izpildītos nosacījums par summu dažādību un summa būtu robežās no 30 līdz 39, t vietā var būt tikai 15 vai 16. Līdzīgs pamatojums arī par y.) Ja t un y ir 15 un 16, tad, lai diagonāles 4, 13, 9, z summa būtu robežās no 30 līdz 39, z jābūt vismaz 5. Tā kā pieejamās vērtības ir 1, 2 un 8, tad z=8. Zināms, ka y var būt 15 vai 16. Ja y=15, tad trešās kolonnas vērtība ir 7+3+9+15=34, bet tā nevar būt, jo jau diagonāles 4, 13, 9, 8 vērtība ir 34. Tātad y=16 un līdz ar to t=15. Tabulu var aizpildīt arī tālāk; lai visas summas būtu dažādas, jābūt u=1, x=2.

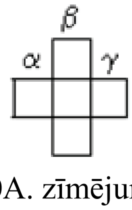
4	5	7	14
6	13	3	t
11	12	9	u
10	x	y	z

59A. zīmējums

31.5.3.

a) Atbilde: nē, nevarēs. **Pierādījums:** lai izpildītos uzdevuma nosacījumi un, pārceļoties no kvadrāta, votivapām saglabātos kaimiņi, kaimiņu pāru skaitam kvadrātā jābūt vienādam vai mazākam par kaimiņu pāru skaitu taisnstūrī (kaimiņu pāru skaitam nav jābūt tieši vienādam, jo drīkst rasties jauni kaimiņi, nedrīkst tikai pazaudēt jau esošos). Kvadrātā ir 24 kaimiņu pāri, bet taisnstūrī tikai 22 kaimiņu pāri. Tātad nav iespējama votivapu pārcelšanās, lai kāds kaimiņu pāris neizjuktu.

b) Atbilde: nē, nevarēs. **Pierādījums:** pieņemsim, ka taisnstūris novietots vertikāli, tātad tam ir 2 kolonnas un 8 rindiņas. Gan kvadrātā, gan taisnstūrī ir 12 rūtiņas ar 3 vai vairāk kaimiņiem, un ar 2 kaimiņiem ir tikai stūra rūtiņas. Tas nozīmē, ka no stūra rūtiņām taisnstūrī šilišallām būs jāpārceļas uz stūra rūtiņām kvadrātā. Tā kā taisnstūris ir ar izmēriem 2×8 rūtiņas, tad augšējā un apakšējā rindiņā stūra



60A. zīmējums

rūtiņās dzīvojošie savā starpā ir kaimiņi. Pārceļoties no taisnstūra stūra rūtiņām uz kvadrāta stūra rūtiņām, kas nav savā starpā kaimiņi, šīs šilišallas vairs nebūs kaimiņos. Tātad šilišallām nav iespējams pārcelties no taisnstūra uz kvadrātu tā, lai neviens kaimiņu pāris neizjuktu.

31.5.4. Atbilde: nē, neeksistē. **Pierādījums:** figūras, kurās jāsagriež taisnstūris, sauksim attiecīgi par kvadrātu un krustu. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds taisnstūris, kuru var sagriezt dotajās figūrās. Apskatīsim krustu (vai vienu no tādiem, ja tādu ir vairāki), kura centrālā rūtiņa atrodas visaugstāk (vistuvāk lapas augšējai malai). Tad noteikti eksistē rūtiņas α un γ (skat. 60A. zīm.), jo sagriežamā figūra ir taisnstūris. Šīs rūtiņas var aizpildīt tikai kvadrāti (ja tās aizpildītu krusti, tad to centrālā rūtiņa atrastos augstāk par apskatāmo krustu, un tad apskatāmais krusts vairs nebūtu pats augstākais). Ja α un γ eksistē, tad eksistē arī rūtiņa β, bet to nevar aizpildīt kvadrāts (jo kvadrāts ir ar izmēriem 2×2 rūtiņas un α un γ jau ir aizpildītas); tātad β rūtiņu aizpilda krusts. Iegūta pretruna, jo apskatāmais krusts vairs nav pats augstākais. Tātad sākotnējais pieņēmums bija nepatiess un neeksistē tāds taisnstūris, kuru var sagriezts dotajās figūrās.

31.5.5.

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5.

b) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6, 13.

6. klase

31.6.1. Atbilde: 1,27 Ls. **Pierādījums:** pieņemsim, ka vienas grāmatas cena ir x santīmi. Zināms, ka 19 vienādas grāmatas kopā maksā 24 latus ar santīmiem. Izsakot santīmos, iegūstam, ka 19 grāmatas maksā no 2401 santīma līdz 2499 santīmiem (ja 19 vienādas grāmatas maksātu vairāk par 2499 santīmiem vai mazāk par 2401 santīmiem, tad tās vairs nemaksātu 24 latus ar santīmiem). Iegūtās sakarības varam pierakstīt nevienādību formā

$\begin{cases} 2401 \le 19x \\ 2499 \ge 19x \end{cases}$, kur 19x ir 19 vienādu grāmatu cena, ja katra grāmata maksā x santīmus. Izsakot x, iegūstam, ka $x \ge 2401:19$ un $x \le 2499:19$ jeb $126\frac{7}{19} \le x \le 131\frac{10}{19}$. Bet, tā kā par grāmatu nevar maksāt santīma daļas, tad $127 \le x \le 131$.

Līdzīgi 18 vienādas grāmatas maksā no 2201 līdz 2299 santīmiem. Pierakstot kā nevienādību sistēmu, iegūstam:

$\begin{cases} 2201 \le 18x \\ 2299 \ge 18x \end{cases}$. No sistēmas izsakot x, seko, ka $x \ge 2201:18$ un $x \le 2299:18$ jeb $122\frac{5}{18} \le x \le 127\frac{13}{18}$.

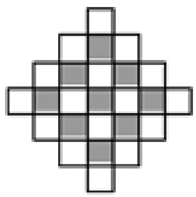
Bet, tā kā par grāmatu nevar maksāt santīma daļas, tad $123 \le x \le 127$.

Tā kā vienlaicīgi jāizpildās nosacījumam gan par 18, gan par 19 grāmatām, tad arī nevienādībām jāizpildās vienlaicīgi:

$$\begin{cases} 127 \le x \le 131 \\ 123 \le x \le 127 \end{cases}.$$

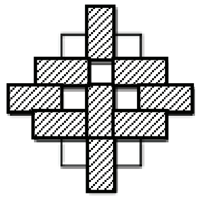
Lai x apmierinātu abus nosacījumus, tas var būt tikai 127. Pārbaudot x=127, iegūstam, ka $127 \cdot 18 = 2286$ un $127 \cdot 19 = 2413$, kas apmierina abus nosacījumus. Tātad vienas grāmatas cena ir 127 santīmi jeb 1,27 Ls.

31.6.2. Atbilde: 9 taisnstūrīšus. **Pierādījums:** iekrāsosim uzdevumā doto figūru, kā parādīts zīmējumā 61A. Katrs izgrieztais taisnstūris sastāv no vismaz 2 rūtiņām, kam ir kopīga mala. Tā kā nevienām divām baltām rūtiņām nav kopīgas malas, tad katrs taisnstūris saturēs vismaz vienu melno rūtiņu. Pavisam zīmējumā 61A. ir 9 melnas rūtiņas. Tātad izgriezt varēs ne vairāk kā 9 taisnstūrīšus. Izgriezt 9 taisnstūrīšus var daudz dažādos veidos, piemēram, skat. zīm. 62A.



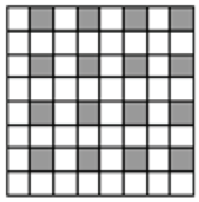
61A. zīmējums

31.6.3. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nav 2 kaudzītes ar vienādu sērkociņu skaitu un nevar atrast arī tādas divas kaudzītes, kurās kopā būtu tieši 13 sērkociņu. Tā kā sērkociņu skaits kaudzītēs ir no 1 līdz 12 un nevienas divas kaudzītes nav ar vienādu sērkociņu skaitu, tad lielākais iespējams, ka ir 12 kaudzītes, kurās sērkociņu skaits ir 1; 2; ....; 12. Sadalīsim skaitļus, kas apzīmē sērkociņu skaitu kaudzītēs, pāros: (1; 12), (2; 11), (3; 10), (4; 9), (5; 8), (6; 7). Redzam, ka, katrā pārī saskaitot abus skaitļus kopā, iegūstam 13. Tā kā pēc mūsu pieņēmuma nav 2 kaudzīšu, kuru sērkociņu skaits kopā ir 13, tad no katra pāra augstākais viens no skaitļiem ir sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Sasummējot visu pāru lielākos skaitļus, iegūsim, kāds ir lielākais iespējamais sērkociņu skaits kopā, t. i., $12+11+10+9+8+7=57$. Esam ieguvuši pretrunu, jo pēc uzdevuma nosacījumiem ir 58 sērkociņi. Tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un eksistē tādas 2 kaudzītes, kurās sērkociņu skaits ir vienāds, vai arī tādas divas, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi.



62A. zīmējums

31.6.4. Atbilde: uzvar 1. spēlētājs. **Pierādījums:** iekrāsosim spēles laukumu, kā parādīts zīmējumā 63A. Pierādīsim, ka, pareizi spēlējot, var uzvarēt 1. spēlētājs. Ar pirmo gājienu 1. spēlētājs figūriņu pabīda pa diagonāli (uz augšu un pa labi). Tagad figūriņa atrodas melnajā rūtiņā. Tagad 2. spēlētājs ir spiests to iebīdīt baltajā rūtiņā, jo, bīdot pa labi, uz augšu vai pa diagonāli, no melnās rūtiņas var nokļūt tikai baltā. Izdarot nākamo gājienu, 1. spēlētājs atkal iebīda figūriņu melnajā rūtiņā, bet 2. spēlētājs atkal spiests to iebīdīt baltajā. Tā turpinot, otrais spēlētājs vienmēr iebīda figūriņu baltā rūtiņā. Tā kā uzvarošā rūtiņa (labajā augšējā stūrī) ir melna, tad viņš nevar uzvarēt. Tā kā kāds noteikti uzvar, tad tas ir 1. spēlētājs.



63A. zīmējums

31.6.5. Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** sākumā doti 3 pāra skaitļi – 2, 4, 6 – un 2 nepāra skaitļi – 3 un 5, bet beigās jāiegūst 2 pāra skaitļi – 64 un 180 – un 3 nepāra skaitļi – 21, 27, 225. Pierādīsim, ka pāra skaitļu skaits atļauto darbību izpildes laikā nevar samazināties. Apskatot tabulu redzam, ka

a,b	a+b	$a \cdot b$	pāra skaitļu skaita izmaiņas
pāra, pāra	pāra	pāra	skaits nemainās
pāra, nepāra	nepāra	pāra	skaits nemainās
nepāra, nepāra	pāra	nepāra	palielinās par 1

Izvēloties jebkurus divus skaitļus, pāra skaitļu skaits uz tāfeles vai nu paliek tāds pats, vai arī palielinās par 1. No tā seko, ka pāra skaitļu skaits noteikti nesamazināsies. Tātad nebūs iespējams panākt, ka uz tāfeles vienlaicīgi atrodas skaitļi 21, 27, 64, 180, 225, jo tad pāra skaitļu skaitam būtu jāsamazinās.

7. klase.

31.7.1. Pierādījums: apskatīsim vairākus gadījumus:

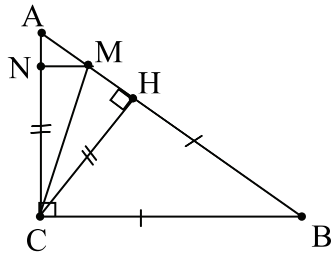
1) pieņemsim, ka $x>y$ un $z<t$. Tādā gadījumā $\max(x,y)=x$ un $\max(z,t)=t$. Summējot šīs vienādības, iegūstam, ka $\max(x,y)+\max(z,t)=x+t$ (*). Pēc uzdevumā dotā nosacījuma, ka $\max(x,y)+\max(z,t)=\max(x+z; y+t)$, iespējami 2 gadījumi:
   a) $\max(x+z, y+t)=x+z$. Tad $\max(x,y)+\max(z,t)=x+t$ un arī $\max(x,y)+\max(z,t)= =\max(x+z; y+t)=x+z$. Tātad $x+z=x+t$, un no tā seko, ka $z=t$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad nav taisnība, ka $\max(x+z, y+t)=x+z$.
   b) $\max(x+z, y+t)=y+t$. Tad $\max(x,y)+\max(z,t)=x+t$ un arī $\max(x,y)+\max(z,t)= =\max(x+z; y+t)=y+t$. Tātad $x+t=y+t$, un no tā seko, ka $x=y$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad nav taisnība, ka $\max(x+z, y+t)=y+t$.

   Abos gadījumos esam ieguvuši pretrunas, tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un nav taisnība, ka $x>y$ un $z<t$.
2) pieņēmumu, ka $x<y$ un $z>t$, apskata līdzīgi kā pirmo un arī iegūst pretrunas.

3) vēl neapskatīti gadījumi, kad $x>y$ un $z>t$ vai arī $x<y$ un $z<t$. Abos gadījumos reizinājums $(x–y)(z–t)$ tiešām lielāks par 0, jo vai nu $(x–y)>0$ un $(z–t)>0$, vai arī $(x–y)<0$ un $(z–t)<0$.
Tātad, ja dotie skaitļi visi ir dažādi, tad $(x–y)(z–t)>0$.

31.7.2. Pierādījums:

1) ΔCBM – vienādsānu, jo pēc dotā CB=BM,
2) ΔCNH – vienādsānu, jo pēc dotā NC=CH.
3) Apzīmējam $\angle ABC = \beta$.
4) $\angle MCB = \frac{1}{2}(180^o - \beta) = 90^o - \frac{\beta}{2}$, jo leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī ir vienādi.



64A. zīmējums

5) $\angle HCB = 90^o - \beta$, jo šauro leņķu summa taisnleņķa trijstūrī CHB ir 90^o.
6) $\angle MCH = \angle MCB - \angle HCB = (90^o - \frac{\beta}{2}) - (90^o - \beta) = \frac{\beta}{2}$
7) $\angle ACH = 90^o - \angle HCB = 90^o - (90^o - \beta) = \beta$.
8) $\angle ACM = \angle ACH - \angle MCH = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$.
9) $\Delta NCM = \Delta HCM$ pēc pazīmes mlm, jo CM – kopīga, NC=CH pēc uzdevumā dotā, $\angle NCM = \angle MCH = \frac{\beta}{2}$.
10) $\angle MNC = 90^o$, jo vienādos trijstūros atbilstošie elementi ir vienādi.
Esam ieguvuši prasīto un $MN \perp AC$.

31.7.3. Atbilde: n=35. **Pierādījums:** uzdevumā dotās daļas varam uzrakstīt kā $\frac{5}{(n+2)+5}$, $\frac{6}{(n+2)+6}$, ..., $\frac{36}{(n+2)+36}$. Visas daļas ir formā $\frac{x}{(n+2)+x}$, kur x ir skaitļi no 5 līdz 36. Lai daļas būtu nesaīsināmas, x un (n+2)+x nedrīkst būt kopīgu reizinātāju. Tātad $LKD(x, (n+2)+x) = 1$; pēc LKD īpašībām iegūstam LKD (x, n+2)=1. Tātad n+2 ir jāizvēlas pēc iespējas mazāks skaitlis, kurš būtu savstarpējs pirmskaitlis ar skaitļiem no 5 līdz 36. Mazākais šāds skaitlis ir 37. Tātad mazākais iespējamais n+2=37, tāpēc n=37–2=35.

31.7.4. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 30.7.4. atrisinājumam. **Pierādījums:** no dotā seko, ka $\Delta GCF, \Delta FBE, \Delta EAD, \Delta CFB, \Delta BEA, \Delta ADG$ – vienādsānu, jo pēc dotā zināms, ka augstums sadala pamatu uz pusēm. Tātad augstums ir arī mediāna, un no tā seko, ka trijstūris ir vienādsānu. Tāpēc AD = AE, BE = BF, CF = CG, DG = DA, EA = EB, FB = FC. No šīm vienādībām seko, ka **GC**=CF=BF=EB=AE=DA=**GD**.
Tātad GC=GD un ΔCGD – vienādsānu.
Vienādsānu trijstūrī mediāna ir arī augstums, tāpēc $GG_1 \perp CD$.

31.7.5. Pierādījums: attēlosim 7 diplomātus ar 7 punktiem. Izvēlēsimies vienu no 7 punktiem, sauksim to par A. Starp atlikušajiem 6 punktiem var novilkt 15 nogriežņus. (Pamatosim: katru no 6 punktiem ar pārējiem pieciem var savienot ar vienu nogriezni; ņemot vērā, ka katrs nogrieznis ieskaitīts divreiz (piemēram, nogrieznis no B uz C un nogrieznis no C uz B ir viens un tas pats), tad iespējams novilkt $\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ nogriežņus.) Ja visu šo 15 nogriežņu galus savieno ar A, tad iegūst 15 trijstūrus (tā kā visi nogriežņi atšķiras, tad katrs no tiem, savienojot ar A, veido citu trijstūri). Veidosim šādus 15 trijstūrus no katra punkta (ne tikai no A); tā kā trijstūrim ir 3 virsotnes, tad katrs trijstūris tiek ieskaitīts 3 reizes. Tāpēc kopējais trijstūru skaits ir $\frac{7 \cdot 15}{3} = \frac{105}{3} = 35$. Nokrāsosim trijstūru malas atbilstoši tam, kādā valodā runā attiecīgie diplomāti (angļu, vācu vai franču). Mūsu uzdevums ir pierādīt, ka ir tādi 3 diplomāti, kas, sazinoties savā starpā, runā visās trijās valodās. Tas nozīmē, ka mums jāpierāda, ka eksistē tāds trijstūris, kuram visas malas nokrāsotas dažādās krāsās. Lai to pierādītu, apskatīsim, cik ir tādu trijstūru, kam malas ir divās vai vienā krāsā. Tā kā katrs no 7 diplomātiem runā ar diviem no atlikušajiem 6 diplomātiem angļu, ar diviem – franču un ar diviem – vācu valodā, tad no katra punkta iziet 2 nogriežņi vienā, 2 nogriežņi otrā un 2 nogriežņi trešā krāsā. Katri divi no šiem nogriežņiem noteikti ietilpst kādā trijstūrī. Tātad no katras virsotnes iziet 3 trijstūri, kam vismaz divas malas ir vienā krāsā. Iespējams, ka arī trešā mala ir tādā pat krāsā, kā divas iepriekšējās. Tādā gadījumā šis trijstūris, skatoties no visām trim tā virsotnēm, būtu ieskaitīts pie tiem, kuriem vismaz divas malas ir vienādā krāsā. Tāpēc tādu trijstūru, kuriem vismaz divas malas ir vienādā krāsā, ir ne vairāk kā $3 \cdot 7 = 21$. Tā kā kopējais trijstūru skaits tik un tā ir lielāks par trijstūru skaitu, kam ir vienādas krāsas malas, tad ir vismaz 35–21=14 trijstūri, kam visas malas nokrāsotas dažādi. Tātad ir vismaz 14 diplomātu trijnieki, kam nepieciešamas visas trīs valodas, lai varētu sazināties savā starpā.

8. klase.

31.8.1. Atbilde: $a=2q-p^2$, $b=q^2$**. Pierādījums:** no Vjeta teorēmas zinām, ka $q = x_1 \cdot x_2$ un $p=-(x_1+x_2)$. Pielietojot Vjeta teorēmu otrajam vienādojumam, iegūstam, ka

$b = x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 = q^2$, bet

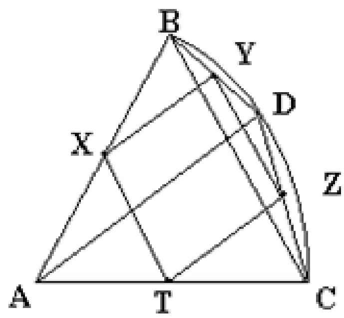
$a=-(x_1^2 + x_2^2) =$ (izteiksme nemainīsies, ja tai pieskaitīs un atņems $2x_1x_2$)

$=-(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 =$ (ienesot $2x_1x_2$ iekavās, iegūstam summas kvadrāta formulu)

$=-(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2x_1x_2 = -(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 =$ (ievērosim, ka $(x_1+x_2)=-p$ un $x_1 \cdot x_2 = q$)

$=-p^2 + 2q$

31.8.2. Pierādījums: (skat. 65A. zīm.)



65A. zīmējums

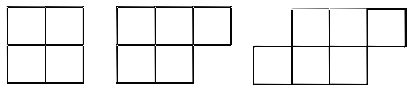
1) ΔABC – regulārs. Pamatosim: no tā, ka AB=AC (pēc dotā) seko, ka ΔABC – vienādsānu. Dots, ka $\angle ABC = 60^\circ$. Tā kā vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi, tad arī $\angle BCA = 60^\circ$, tātad arī virsotnes leņķis A ir 60°. No tā, ka visi trijstūra leņķi ir vienādi, seko, ka trijstūris ir vienādmalu (regulārs).
2) Tātad AB=BC=AC.
3) AB=AD=AC, jo tie ir rādiusi riņķa līnijā ar centru A.
4) XY=½AD, jo XY ir viduslīnija trijstūrī ABD; TZ=½AD, jo TZ ir viduslīnija trijstūrī ACD.
5) Tātad XY=TZ=½AD.
6) YZ=½BC, jo YZ ir viduslīnija trijstūrī BDC.
7) XT=½BC, jo XT ir viduslīnija trijstūrī BAC.
8) Tātad YZ=XT=½BC.
9) Tā kā AD=BC, tad no 5) un 8) seko, ka XY=TZ=YZ=XT.
10) XYZT – rombs, jo visas tā malas vienādas.
11) Tā kā romba diagonāles ir perpendikulāras, tad $YT \perp XZ$.

31.8.3. Pierādījums: ja X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B, tad $X = \overline{AB} = 100A + B$. Līdzīgi, ja Y iegūst, skaitlim B pierakstot galā skaitli A, tad $Y = \overline{BA} = 100B + A$. Iegūstam, ka X–Y=100A+B–(100B+A)=100A+B–100B–A=99A–99B=99(A–B). Tā kā X–Y dalās ar 91 tad arī 99(A–B) dalās ar 91. Skaitlis 99 nesaīsinās ar 91, tāpēc ar 91 dalās (A–B). Skaitļi A un B abi ir divciparu, tātad lielākā

iespējamā starpība $\max|A - B| = 89$ (lielākais divciparu skaitlis ir 99 un mazākais – 10). Tātad $|A - B| \le 89$.
Tā kā 91>89, tad vienīgais gadījums, kad $|A - B|$ dalās ar 91, ir $|A - B| = 0$. No tā seko, ka A=B.

31.8.4. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 30.8.4. atrisinājumam.

Atbilde: 98 m. **Pierādījums:** ievērosim, ka katras daļas perimetrs centimetros ir vienāds ar divkāršotu tā laukumu kvadrātcentimetros. Tiešām, figūras A (skat. 66A. zīm.) perimetrs P_A=8 cm un laukums S_A=4 cm^2, figūras B perimetrs P_B=10 cm un laukums S_B=5 cm^2 un figūras C perimetrs P_C=12 cm un laukums S_C=6 cm^2. Dotais kvadrāts $1\text{m} \times 1\text{m}$ sastāvēs tikai no figūrām A, B un C, un



figūra A figūra B figūra C

66A. zīmējums

kvadrāta laukums $S_{Kv} = 1\text{m} \cdot 1\text{m} = 100\text{cm} \cdot 100\text{cm} = 10000\text{cm}^2$. Sasummējot visu figūru A, B un C laukumus, kas atrodas kvadrātā, mēs iegūsim kopējo laukumu S_{KV}. Tā kā katras figūras perimetrs ir divkāršots figūras laukums, tad kopējā figūru perimetru summa skaitliski vienāda ar divkāršotu kopējo laukumu. Tāpēc visu daļu perimetru summa ir $P_{kop} = 2 \cdot S_{Kv} = 2 \cdot 10000 = 20\,000$ (cm) jeb 200 m. Visu līniju garumi, kas atrodas kvadrāta iekšpusē, ir ieskaitīti divreiz. (Pamatosim: katra līnija atdala divas figūras, tātad tās garums ietilpst gan vienas, gan otras figūras perimetrā, līdz ar to kopējā līniju garumu summā ir ieskaitīts divreiz.) Tātad perimetru summa P_{kop} sastāv no kvadrāta perimetra – 4m un no divkāršotas visu novilkto līniju garumu summas $2 \cdot L$ (kur L –novilkto līniju garumu summa). Tāpēc $2L = 200\text{m} - 4\text{m} = 196\text{m}$ un $L = 98\text{m}$.

31.8.5. Atbilde: 1598. **Pierādījums:** apzīmēsim skaitli, kas ir mazākais neizsvītrotais pēc n svītrošanas sērijām, ar x_n (n=0; 1; 2; ...). Apskatot tabulu, redzam, ka

n	virkne pēc n-tās svītrošanas sērijas	x_n
0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...	1
1	2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, ...	2
2	3, 5, 8, 9, 12, ...	3
3	5, 8, 12, ...	5
4	8, 12, ...	8
5	12, ...	12

Tātad x_0=1; x_1=2; x_2=3; x_3=5; x_4=8...

Skatīsimies, kā no zināma mazākā neizsvītrotā skaitļa x_n var iegūt nākamo mazāko neizsvītroto x_{n+1}. Eksperimentējot vēl tālāk, var pamanīt, ka no x_n, kas ir pāra skaitlis, nākamo skaitli x_{n+1} var iegūt, pieskaitot skaitlim x_n lielumu $\frac{1}{2}x_n$. Piemēram, redzam, ka $12 = 8 + \frac{1}{2} \cdot 8$. Ja x_n ir nepāra skaitlis, tad: lai iegūtu nākamo skaitli x_{n+1}, pie iepriekšējā x_n jāpieskaita $\frac{1}{2}x_n$, kas noapaļota līdz veselam skaitlim uz augšu. Tā, piemēram, zinām, ka $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5;$ noapaļojot uz augšu, iegūstam 3. No x_3=5 var iegūt $x_4 = x_3 + 3 = 5 + 3 = 8$.

No iepriekš aprakstītā rodas hipotēze, ka x_n ar x_{n+1} varētu saistīt šādas sakarības:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{2}x_n & \text{, ja } x_n \text{ – pāra skaitlis,} \\ \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2} & \text{, ja } x_n \text{ – nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Pierādīsim, ka tās izpildās. Apskatīsim 2 gadījumus:

1) x_n ir pāra skaitlis; tad x_n uzrakstāms formā $x_n=2m$, kur $m\in N$. Tas nozīmē, ka ir vajadzīgas n svītrošanas sērijas, lai skaitlis 2m nokļūtu pirmajā vietā (būtu mazākais neizsvītrotais). Pamatosim, ka skaitlis, kas būs mazākais pēc (n+1)-ās svītrošanas reizes, ir 3m. Apskatīsim skaitli 3m un pieņemsim, ka vēl nav izdarīta neviena svītrošana. Tad virknē ir visi skaitļi no 1 līdz 3m, no tiem ir m skaitļi, kas dalās ar 3 (jo ar 3 dalās katrs trešais skaitlis), ir m skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, un m skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2. Tā kā pirmajā svītrošanas sērijā izsvītrojam tos skaitļus, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad skaitļu skaits no 1 līdz 3m samazināsies par m pēc **pirmās svītrošanas sērijas**. Tātad 3m atradīsies 2m-tajā vietā. Bet jau zināms, ka ir vajadzīgas **n svītrošanas sērijas**, lai skaitlis, kurš ir 2m-tajā vietā, nokļūtu pirmajā vietā, jo $x_n=2m$. Tātad skaitlis 3m nokļūst pirmajā vietā pēc **n+1** svītrošanas sērijas un $x_{n+1}=3m$. Ja $x_n=2m$ un $x_{n+1}=3m$, tad skaidrs, ka $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n$.

2) x_n ir nepāra skaitlis; tad x_n uzrakstāms formā $x_n=2m+1$, kur $m\in N$. Tas nozīmē, ka ir vajadzīgas n svītrošanas sērijas, lai skaitlis 2m+1 nokļūtu pirmajā vietā (būtu mazākais neizsvītrotais). Pēc pierādāmās formulas aprēķinām, ka būtu jābūt $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(2m+1)+\frac{1}{2}=\frac{6m+3+1}{2}=3m+2$. Pierādīsim, ka skaitlis, kas būs mazākais pēc n+1 svītrošanas sērijas, tiešām būs 3m+2. Apskatīsim skaitli 3m+2 un pieņemsim, ka vēl nav izdarīta neviena svītrošana. Tad virknē ir visi skaitļi no 1 līdz skaitlim 3m+2, no tiem ir m skaitļi, kas dalās ar 3; ir m+1 skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1; un ir m+1 skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2. Tā kā pirmajā svītrošanas sērijā izsvītrojam tos skaitļus, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad izsvītrosim m+1 skaitli. Tas nozīmē, ka atlikušo skaitļu skaits no 1 līdz 3m+2 samazināsies par m+1 pēc **pirmās svītrošanas sērijas**. Tātad 3m+2 atradīsies (2m+1)-ajā vietā (jo (3m+2)–(m+1)=2m+1). Bet jau zināms, ka ir vajadzīgas **n svītrošanas sērijas**, lai skaitlis, kurš ir (2m+1)-ajā vietā, nokļūtu pirmajā vietā, jo $x_n=2m+1$. Tātad skaitlis 3m+2 nokļūst pirmajā vietā pēc **n+1** svītrošanas sērijas un $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n+\frac{1}{2}$.

Tātad sakarība ir pareiza gan gadījumā, ja x_n ir pāra, gan gadījumā, ja x_n ir nepāra skaitlis.
Tagad pakāpeniski iegūstam x_i vērtības 1; 2; 3; 5; 8; 12; 18; 27; 41; 62; 93; 140; 210; 315; 473; 710; 1065; 1598. Nākošais skaitlis ir 2397, kas ir lielāks par 2004, tāpēc uzdevumā meklētais skaitlis ir 1598.

9. klase.

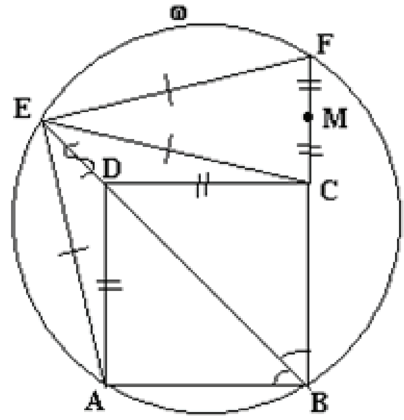
31.9.1. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nevienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$ un $x^2+p_2x+q_2=0$ neeksistē atrisinājums. Uzzīmēsim vienādojumu kreisajās pusēs esošo kvadrāttrinomu grafikus. Koeficienti pie x^2 ir 1 un 1>0, tātad abām parabolām zari ir vērsti uz augšu. Lai atrisinājumu nebūtu, tās nekrusto x asi, tātad atrodas virs tās. Tas nozīmē, ka visiem x izpildās $x^2+p_1x+q_1>0$ un visiem x izpildās $x^2+p_2x+q_2>0$. Tā kā
$x^2+p_1x+q_1+ x^2+p_2x+q_2=2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)$ un $x^2+p_1x+q_1+ x^2+p_2x+q_2>0$, tad arī visiem x izpildās $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)>0$. Iegūta pretruna, jo pēc dotā vienādojumam $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)=0$ eksistē atrisinājums. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un vismaz vienam no dotajiem vienādojumiem atrisinājums eksistē.

31.9.2. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka neeksistē divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir a vai b. Tā kā a+b ir nepāra skaitlis, tad viens no skaitļiem a un b ir pāra, otrs – nepāra. Pieņemsim, ka a – pāra, b – nepāra.
Pieņemsim, ka punktā 0 dzīvo votivapa. No tā seko, ka punktā $1\cdot a=a$ dzīvo šillišalla (citādi divas votivapas dzīvotu attālumā a viena no otras un uzdevuma prasības izpildītos), bet tādā gadījumā punktā $2\cdot a=2a$ dzīvo votivapa (citādi šillišallas dzīvotu punktos a un 2a, attālums starp tām būtu a un izpildītos uzdevuma nosacījumi). Turpinot spriešanu līdzīgi, punktā 3a dzīvo šillišalla, bet punktā 4a – votivapa, utt. Ievērojam, ka punktos, kas izsakāmi kā pāra skaitļa reizinājums ar a, dzīvo votivapas, bet

punktos, kas izsakāmi kā nepāra skaitļa reizinājums ar a, dzīvo šillišallas. Punkts $b \cdot a$ ir nepāra skaitļa reizinājums ar a, tāpēc tajā dzīvo šillišalla.
Tā kā punktā 0 dzīvo votivapa, tad punktā $1 \cdot b = b$ dzīvo šillišalla (lai starp 2 votivapām attālums nebūtu b), tad punktā $2 \cdot b = 2b$ dzīvo votivapa, punktā $3 \cdot b$ – šillišalla utt. Redzam, ka punktos, kas izsakāmi kā pāra skaitļa reizinājums ar b, dzīvo votivapas, bet punktos, kas izsakāmi kā nepāra skaitļa reizinājums ar a, dzīvo šillišallas. Tā kā $a \cdot b$ ir pāra skaitļa reizinājums ar b, tad punktā $a \cdot b$ dzīvo votivapa.
Esam ieguvuši, ka punktā $a \cdot b$ dzīvo gan šillišalla, gan votivapa, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja punktā 0 dzīvo šillišalla. Tātad sākotnējais pieņēmums nav pareizs un noteikti ir atrodami divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir a vai b.

31.9.3. Pierādījums: (skat. 67A. zīm.)

1) $\angle ABE = \angle EBF$, jo BD (kas sakrīt ar BE) ir kvadrāta ABCD diagonāle un tāpēc ir arī leņķa $\angle ABC$ bisektrise.
   Līdzīgi $\angle ADB = \angle CDB$, jo BD ir arī kvadrāta ABCD bisektrise.
2) EA=EF pēc ievilkto leņķu īpašības, ka vienādi ievilkti leņķi $\angle ABE$ un $\angle EBF$ balstās uz vienādām hordām.
3) $\angle ADE = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle BDC = \angle CDE$, jo blakusleņķu summa ir 180° un $\angle ADB = \angle CDB$.
4) $\Delta EDA = \Delta EDC$ pēc pazīmes mlm, jo DE – kopīga, AD=CD kā kvadrāta malas, $\angle ADE = \angle CDE$.
5) EA=EC, jo vienādos trijstūros $\Delta EDA = \Delta EDC$ attiecīgie elementi ir vienādi.
6) No tā, ka EA=EC un EA=EF, seko, ka EA=EC=EF.
7) ΔCEF ir vienādsānu, jo CE=EF.
8) Tā kā vienādsānu trijstūrī mediāna ir arī augstums, tad $EM \perp BC$.



67A. zīmējums

31.9.4. Pierādījums: apzīmēsim rūķīti, kurš atnāca pēdējais ar A, un rūķīti, kurš aizgāja pirmais, ar B. Ja kāds rūķītis C pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus, tas nozīmē, ka pie Sniegbaltītes tajā brīdī bija vismaz n+1 rūķītis (n citi rūķīši un vēl pats C). Ar KA apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no paša A un viņa satiktajiem rūķīšiem, un ar KB apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no B un viņa satiktajiem rūķīšiem. Gan KA, gan KB katrā ir vismaz n+1 rūķītis. Ja KA un KB nebūtu neviena kopīga rūķīša, tad kopā KA un KB sastāvētu no vismaz (n+1)+(n+1)=2n+2 rūķīšiem. Bet pēc uzdevumā dotā pie Sniegbaltītes aizgāja 2n+1 rūķītis, tātad eksistē tāds rūķītis, kas pieder gan KA, gan KB. Apzīmēsim kopīgo rūķīti ar R.
Pierādīsim, ka R satika pilnīgi visus citus rūķīšus. Ja būtu tāds rūķītis X, ko R nesatika, tad ir divas iespējas:

1) X aizgāja agrāk, nekā R atnāca. Ja X ir aizgājis, tad arī B ir aizgājis, jo B ir rūķītis, kurš aizgāja pirmais. Bet tas nozīmē, ka B nav saticis R (jo ir aizgājis, pirms R atnāca). Esam ieguvuši pretrunu, jo R izraudzījāmies tādu, lai viņš būtu saticis B. Tātad nav tāda rūķīša, kurš aizgāja ātrāk, nekā R atnāca.
2) X atnāca vēlāk, nekā R aizgāja. Ja X atnāca vēlāk, nekā R aizgāja, tad arī A atnāca vēlāk, nekā R aizgāja, jo A ir rūķītis, kurš atnāca pēdējais. Bet tas nozīmē, ka A nav saticis R (jo ir atnācis pēc tam, kad R aizgāja). Esam ieguvuši pretrunu, jo R izraudzījāmies tādu, lai viņš būtu saticis A. Tātad nav tāda rūķīša, kurš atnāca vēlāk, nekā R aizgāja.

Esam ieguvuši, ka nav neviena rūķīša, kurš aizgāja agrāk, nekā R atnāca, un nav arī neviena rūķīša, kurš atnāca vēlāk, nekā R aizgāja. Tātad R ir saticis visus rūķīšus.

31.9.5.

a) Atbilde: jā, var izdarīt. **Piemērs:** skat. 68A. zīm.

1	-1	0	-1	-1
1	-1	1	1	2
0	-1	-1	-1	-3
1	1	1	1	4
3	-2	1	0	

68A. zīmējums

b) Atbilde: nē, nevar izdarīt. **Pierādījums:** desmit summām iespējamās vērtības ir $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5$, kopā iespējamas 11 dažādas vērtības. Tātad tieši viena vērtība nav sastopama. Ja rindiņu summas ir $r_1, ..., r_5$ un kolonu summas ir $k_1, ..., k_5$, tad visi skaitļi ir ieskaitīti divas reizes (vienreiz pa rindām, vienreiz pa kolonnām), tāpēc $(r_1 + ... + r_5) + (k_1 + ... + k_5)$ ir pāra skaitlis. Tāpēc starp $r_1, ..., r_5, k_1, ..., k_5$ ir pāra skaits nepāra skaitļu. Tāpēc visas nepāra summas $\pm 1; \pm 3; \pm 5$ ir sastopamas. Ievērosim, ka tabulā var patvaļīgi mainīt savā starpā rindas un savā starpā – kolonnas, saglabājot vajadzīgo īpašību. Varam pieņemt, ka $k_1 = 5$. Tad nevienas rindiņas summa nevar būt –5 (lai rindiņas summa būtu –5, visās rūtiņās jābūt rakstītam –1, bet tas nav iespējams, jo vienā rūtiņā jau noteikti ir +1). Tā kā summai –5 noteikti jābūt, tad tā būs kādā kolonnā. Varam pieņemt, ka $k_2=-5$. No summām "4" un "–4" obligāti jābūt vismaz vienai, citādi kopumā nesanāk 10 dažādas summas. Varam pieņemt, ka ir summa $k_3 = 4$ (otru gadījumu, kad ir summa (–4), apskata līdzīgi). Vienīgais veids, lai no 5 saskaitāmajiem iegūtu summā 4, izmantojot –1, 0 un 1, ir izteikt 4 kā 1; 1; 1; 1; 0 summu. Tā kā rindu secība nav svarīga, tad varam pieņemt, ka nulle ir rindā r_5 (skat. 69A. zīm.). Patlaban 1. un 4. rindās ierakstīto skaitļu summas ir 2, bet 5. rindā ierakstīto skaitļu summa ir 1, tāpēc nav iespējams, ka $r_i = -3$. Tā kā visām nepāra vērtībām jābūt, tad (–3) ir kādas kolonnas summa. Varam uzskatīt, ka $k_4=-3$. Tātad 4. kolonā ir trīs "–1". Apskatīsim 2 gadījumus.

r_1	1	-1	1		
r_2	1	-1	1		
r_3	1	-1	1		
r_4	1	-1	1		
r_5	1	-1	0		
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5

69A. zīmējums

1	-1	1	-1	
1	-1	1	-1	
1	-1	1	-1	
1	-1	1		
1	-1	0		x

70A. zīmējums

1) Tie visi sastopami pirmajās 4 rindās. Tā kā patlaban pirmo 4 rindu summas ir vienādas, tad varam uzskatīt, ka –1 ir pirmajās 3 rindās (skat. 70A. zīm.). Lai pirmajās 3 rindās summas būtu dažādas, tās var būt tikai $-1; 0; 1$. Tāpēc 5. kolonā pirmajās 3 rindās ir skaitļi –1; 0; 1, tad $k_5 \neq 3$ un arī $r_5 \neq 3$. Vērība 3 var būt tikai r_4, tāpēc 4. rindā abi pēdējie skaitļi ir 1. Tā kā $k_4=-3$, tad 4. kolonas un 5. rindas krustpunktā ir "–1". Lai kā izvēlētos skaitli x, iegūst pretrunu (tieša pārbaude).

1	-1	1	-1	x
1	-1	1	-1	y
1	-1	1	0	z
1	-1	1	0	t
1	-1	0	-1	

71A. zīmējums

2) Ceturtajā kolonā pirmajās 4 rindās ir tikai divi –1 un trešais –1 ir piektajā rindā. Varam uzskatīt, ka situāciju attēlo 71A. zīm. Nevienā rindā summa nevar būt 3, tāpēc $k_5=3$. Tas iespējams vai nu kā 1+1+1+0+0, vai kā 1+1+1+1+(–1). Jābūt $x \neq y$ un $z \neq t$. Pārbaudot visas iespējas, katrā no tām iegūst pretrunu.

Latvijas 32. atklātā matemātikas olimpiāde

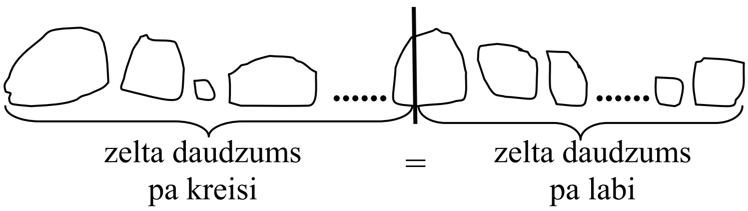
5. klase

32.5.1. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 31.5.2. atrisinājumu. Uzdevums 32.5.1. iegūts samainot uzdevuma 31.5.2. esošajā kvadrātā rindas ar kolonnām. Uzdevuma 32.5.1. atrisinājuma ideja sakrīt ar uzdevuma 31.5.2 atrisinājuma ideju, jāuzmanās tikai, lai samainītu rindu un kolonnu nosaukumus vietām pareizi.
32.5.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.5.2. atrisinājumu.
32.5.3.
a) Atbilde: nē, nav iespējams. **Pierādījums:** ja tāda tabula pastāvētu un katrā kolonnā būtu pāra skaits zvaigznīšu, tad visās piecās kolonnās kopā būtu nepāra skaits zvaigznīšu. Bet, ja katrā rindā būtu nepāra skaits zvaigznīšu, tad visās piecās rindās kopā būtu pāra skaits zvaigznīšu. Esam ieguvuši, ka no vienas puses kopējais zvaigznīšu skaits ir nepāra skaitlis, bet no otras puses – pāra skaitlis. Bet tā nevar būt.
b) Atbilde: jā, ir iespējamas. **Piemērs:** skat. 72A. zīm.

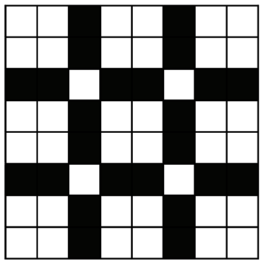
*	*	*	
*	*	*	
			*
			*

72A. zīmējums

32.5.4. Pierādījums: izvēlamies jebkuru vienu zelta gabalu. Ar pirmo dalīšanas reizi sadalām šo gabalu divos vienādos. Viena šī gabala puse būs kaudze A, bet otra šī gabala puse būs kaudze B. Tad A noteikti būs vienāds ar B. Pārējos gabalus saliek rindā un sadala šo rindu divās daļās tā, lai šajās daļās būtu vienādi zelta daudzumi. Tās būs kaudzes C un D. Ja, veidojot kaudzes C un D, nācās sadalīt vienu gabalu divos gabalos, tad visi uzdevuma nosacījumi tiek izpildīti (skat. 73A. zīm.). Ja neviens gabals nebija jāsadala divos, tad dalījuma līnija iet starp zelta gabaliem. Šādā gadījumā izvēlamies jebkuru vienu zelta gabalu, sadalām to divās daļās un abas daļas atliekam atpakaļ tajā kaudzē, no kuras izvēlēts sagrieztais gabals.



73A. zīmējums



74A. zīmējums

32.5.5. Atbilde: nē, ne noteikti. **Piemērs:** skat. 74A. zīm., melnā krāsā iekrāsoti izgrieztie taisnstūrīši. Izgriežot šādus 12 taisnstūrīšus, kas katrs sastāv no 2 rūtiņām, noteikti nebūs iespējams izgriezt uzdevumā prasīto taisnstūri, kas sastāvētu no 3 rūtiņām.

6. klase.

32.6.1. Atbilde: abi skaitļi ir vienādi. **Pierādījums:** apskatīsim, no kādiem reizinātājiem sastāv katrs no skaitļiem. Apskatīsim skaitli $200420042004 \cdot 20052005$; reizinātāju 200420042004 var sadalīt kā $2004 \cdot 100010001$ un reizinātāju 20052005 var salīt reizinātājos kā $2005 \cdot 10001$. Tātad kopumā $200420042004 \cdot 20052005 = 2004 \cdot 100010001 \cdot 2005 \cdot 10001$.
Apskatīsim skaitli $200520052005 \cdot 20042004$; reizinātāju 200520052005 var sadalīt reizinātājos kā $2005 \cdot 100010001$, bet 20042004 var sadalīt reizinātājos kā $2004 \cdot 10001$. Tātad kopumā $200520052005 \cdot 20042004 = 2005 \cdot 100010001 \cdot 2004 \cdot 10001$.
Tā kā reizinātāju secība neietekmē rezultātu, tad abi šie skaitļi ir vienādi.
32.6.2. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 31.6.3. atrisinājumam.

Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nav 2 kaudzīšu ar vienādu sērkociņu skaitu un nevar atrast arī tādas divas kaudzītes, kurās kopā būtu tieši 15 sērkociņu. Tā kā sērkociņu skaits kaudzītēs ir no 1 līdz 14 un nevienas divas kaudzītes nav ar vienādu sērkociņu skaitu, tad lielākais iespējams, ka ir 14 kaudzītes, kurās sērkociņu skaits ir 1; 2; ....; 14. Sadalīsim šos skaitļus, kas apzīmē sērkociņu skaitu kaudzītēs, pāros: (1; 14), (2; 13), (3; 12), (4; 11), (5; 10), (6; 9), (7; 8). Redzam, ka, katrā pārī saskaitot abus skaitļus kopā, iegūstam 15. Tā kā pēc mūsu pieņēmuma nav 2 kaudzīšu, kuru sērkociņu skaits kopā ir 15, tad no katra pāra augstākais viens no skaitļiem ir sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Sasummējot visu pāru lielākos skaitļus, iegūsim, kāds ir lielākais iespējamais sērkociņu skaits kopā, t. i., 14+13+12+11+10+9+8=77. Esam ieguvuši pretrunu, jo pēc uzdevuma nosacījumiem ir doti 78 sērkociņi. Tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un eksistē tādas 2 kaudzītes, kurās sērkociņu skaits ir vienāds, vai arī tādas, kurās kopā ir tieši 15 sērkociņi.

32.6.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.6.5. atrisinājumu.

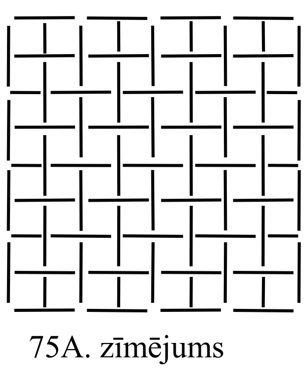
32.6.4. Pierādījums: pieņemsim, ka mums ir x monētas, kas sver 5 g, tad to kopējā masa ir $5 \cdot x$ g. Atlikušo monētu masa (600–5x) g sastāv tikai no 6 g monētām. Tātad 6 g monētu skaits ir $\frac{600-5x}{6}=100-\frac{5x}{6}$. Tā kā monētu skaits noteikti ir vesels skaitlis (nevar būt, piemēram, pus-monēta), tad 5x jādalās ar 6. No tā, ka skaitļiem 5 un 6 nav kopīga reizinātāja, kas lielāks par 1, seko, ka x jādalās ar 6. Esam ieguvuši, ka 5 gramu monētu skaits x dalās ar 6; tad šīs monētas var apvienot kaudzītēs pa 6. Katra kaudzīte sastāv no sešām 5 g monētām, un kopējā kaudzītes masa ir 30 g.

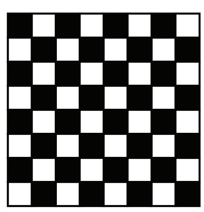
Līdzīgi iegūstam, ka 6 g monētu skaits dalās ar 5. Pieņemam, ka ir y monētas, kas sver 6 g, un to kopējā masa ir $6 \cdot y$ g. Tādā gadījumā atlikušo monētu masa ir (600–6y) g, kas sastāv tikai no 5 g monētām. Tātad 5 g monētu skaits ir $\frac{600-6y}{5}=120-\frac{6y}{5}$. No tā seko, ka 6y jādalās ar 5; tā kā skaitļiem 6 un 5 nav kopīga reizinātāja, kas lielāks par 1, tad y jādalās ar 6. Esam ieguvuši, ka 6 gramu monētu skaits dalās ar 5; tāpēc noteikti iespējams šīs monētas apvienot kaudzītēs pa 5. Katra kaudzīte sastāv no piecām 6 g monētām; kaudzītes masa ir 30 g.

Tātad visas monētas ir sadalītas kaudzītēs pa 30 gramiem. Kaudzīšu pavisam ir 600g:30g=20. Tā kā uzdevumā prasīts iegūt 10 vienādas masas kaudzītes, tad apvienojam 30 gramu kaudzītes pāros pa divām. Tad katra kaudzīte sver 60 gramus un to ir uz pusi mazāk nekā 30 g kaudzīšu, tātad 20:2=10 kaudzītes.

32.6.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: atrast mazāko iespējamo stienīšu daudzumu un pierādīt, ka mazāks stienīšu skaits nav iespējams.

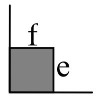
- **Atbilde:** 14 vienības stienīši. **Piemērs:** skat. 75A. zīm.
- **Pierādījums:** pieņemsim, ka kvadrāts izkrāsots kā šaha galdiņš (skat. 76A. zīm.). Pie kvadrāta malām atrodas 14 melnās rūtiņas. Nevienām divām no šīm melnajām rūtiņām nav kopīgas malas. Pierādīsim, ka katru malējo melno rūtiņu norobežo vismaz viens vienu vienību garš stienītis. Tad būs pierādīts, ka jābūt vismaz 14 vienu vienību gariem stienīšiem.


75A. zīmējums


76A. zīmējums

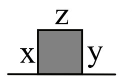
Apskatīsim divus gadījums:

1) apskatīsim melnu stūra rūtiņu (skat. 77A. zīm). Lai būtu ievērots uzdevuma nosacījums, ka stienīši nekrustojas, e un f vienlaicīgi nevar piederēt stienīšiem, kas garāki par 1. Tātad vismaz 1 malu veido vienu vienību garš stienītis.



77A. zīmējums

2) apskatīsim melnu rūtiņu, kas atrodas pie kvadrāta malas un kurai ir 3 "kaimiņ-rūtiņas" (skat. 78A. zīm.). Lai būtu ievēroti uzdevuma nosacījumi, ka stienīši nekrustojas, tad kādu no malām x, y un z veido stienītis, kas ir vienu vienību garš. (Ja stienīši, kas veido malas x un y, ir garāki par 1 vienību, tad stienītim, kas veido malu z, noteikti ir jābūt vienu vienību garam.)



78A. zīmējums

Esam pierādījuši, ka katru malējo melno rūtiņu ierobežo vismaz viens vienību garš stienītis. Tā kā ir 14 melnas malējās rūtiņas, tad būs vismaz 14 vienības stienīši. Tas, ka var izveidot piemēru ar 14 vienības stienīšiem, redzams zīmējumā 76A.

7. klase

32.7.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 29.7.2. atrsinājumu.

32.7.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.7.3. atrisinājumu.

32.7.3. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast mazāko iespējamo minūšu skaitu un parādīt piemēru, ka tas ir iespējams; otrkārt, pierādīt, ka ar mazāk minūtēm tas nav iespējams.

- **Pierādījums:** ja 5 pankūkas katra jāapcep no abām pusēm, tad pavisam mums ir 10 apcepamas virsmas. Ja 5 pankūkas ceptu pa vienai no abām pusēm, tad būtu vajadzīgas $10 \cdot 6 = 60$ minūtes. Tā kā augstākais 4 pankūkas var tik ceptas vienlaicīgi, tad mums vajadzīgas vismaz 60:4=15 minūtes.
- **Atbilde:** pietiek ar 15 minūtēm. **Piemērs:** uzdevumā prasīto tiešām var veikt 15 minūtēs. Atrisinājums parādīts tabulā, kur A, B, C un D apzīmē 4 iespējamās vietas uz pannas, skaitļi no 1 līdz 15 norāda minūtes numuru un tabulā ierakstītie skaitļi – kāda pankūka katrā no vietām attiecīgajā minūtē jācep.

Minūte / Vieta uz pannas	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
B	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
C	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
D	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Piezīme: veidojot šādu tabulu, jāseko, lai katrā kolonnā visi skaitļi būtu dažādi, jo vienu pankūku nevar reizē apcept no abām pusēm.

32.7.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo nuļļu skaitu un parādīt piemēru, ka tas ir iespējams; otrkārt, pierādīt, ka nav iespējams atrast saskaitāmos, kas reizinot dotu vairāk nulles.

- **Atbilde:** ar 6 nullēm. **Piemērs:** skaitli 407 var uzrakstīt kā 407=250+125+32. Sareizinot skaitļus 250; 125; 32, iegūstam:

  $250 \cdot 125 \cdot 32 = 2 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 2^5 = 1\,000\,000$.
- **Pierādījums:** iegūt nulli kā pēdējo ciparu var tikai, sareizinot 2 ar 5. Tātad, lai būtu pēc iespējas vairāk nuļļu kāda skaitļa beigās, tā reizinātājiem jāsastāv no pēc iespējas vairāk divniekiem un piecniekiem. Tā kā kopējā skaitļu summa ir 407, tad neviens saskaitāmais nevar saturēt 5^4, jo 5^4=625. Tātad augstākā piecnieka pakāpe, ar kādu saskaitāmie var dalīties, ir 5^3. Turklāt vismaz viens saskaitāmais ar 5 nedalās, jo visu saskaitāmo summa nedalās ar 5. Tātad kopumā ir viens saskaitāmais, kurš ar 5 nedalās, un 2 saskaitāmie, kas katrs dalās ar augstākais 5^3. Tāpēc visi 3 saskaitāmie kopā satur ne vairāk kā 3+3=6 pirmreizinātājus 5. Tāpēc arī vairāk par 6 nullēm nevar būt.

32.7.5. Pierādījums: dotos skaitļus apzīmēsim pēc kārtas ar A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5. Pieņemsim pretējo, ka nevar atrast tādu skaitli, kas mazāks par abiem saviem kaimiņiem. Tas nozīmē, ka katrs skaitlis ir lielāks par vismaz vienu savu kaimiņu (izņemot A_1 un B_5, jo šiem skaitļiem nav 2 kaimiņu). Skaitļiem A_2, A_3, A_4, A_5 atradīsim pa vienam kaimiņam, kas būtu mazāks par izvēlēto skaitli. Atrastie kaimiņi visi ir dažādi (citādi šis kaimiņš, kas atrasts divreiz, būtu mazāks par abiem A_i, kuriem viņš atrasts, bet mēs pieņēmām, ka šāda skaitļa nav).

Apzīmēsim šos atrastos skaitļus ar K_1, K_2, K_3, K_4 – tie ir četri no skaitļiem B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Iegūstam nevienādības $A_2>K_1$; $A_3>K_2$; $A_4>K_3$; $A_5>K_4$. Saskaitot iegūtās nevienādības, iegūstam, ka $A_2+A_3+A_4+A_5>K_1+K_2+K_3+K_4$ **(1)**.

Apzīmēsim ar B_i to skaitli no B_1, ..., B_5, kas nav neviens no izvēlētajiem kaimiņiem K_1, K_2, K_3, K_4; tad $A_1+1>B_i$ **(2)**,

jo gan A_1, gan B_i atrodas intervālā (0; 1). Saskaitot nevienādības (1) un (2), iegūstam $(A_1+...+A_5)+1>(B_1+...+B_5)$ jeb $(B_1+...+B_5)-(A_1+...+A_5)<1$. Esam ieguvuši pretrunu, jo pēc uzdevumā dotā bija zināms, ka to skaitļu summa, kas atrodas 2., 4., 6., 8., 10. vietās (jeb B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 summa) ir par 1 lielāka nekā to skaitļu summa, kas atrodas 1., 3., 5., 7., 9. vietās (jeb A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 summa). Tātad sākotnējais pieņēmums nav bijis pareizs un noteikti ir iespējams atrast skaitli, kas mazāks par abiem saviem kaimiņiem

8. klase

32.8.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.8.1. atrisinājumu.
32.8.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 29.8.3. atrisinājumu.
32.8.3. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, parādīt visus iespējamos veidus, kā izpildīt uzdevuma prasības; otrkārt, pierādīt, ka citu iespējamo variantu nav.

Atbilde: skaitļu 1, 4, 8 reizinājums ir vienāds ar skaitļu 2, 3, 5, 6, 7, 9 summu.

Pierādījums: visu skaitļu summa ir 1+2+3+...+9=45. Apskatīsim iespējamos gadījumus, kad viena, divu, trīs, četru vai vismaz piecu skaitļu reizinājums ir pārējo skaitļu summa.

1. Neviens skaitlis pats par sevi nav pārējo skaitļu summa, jo pat skaitlis 9, kas ir lielākais no visiem skaitļiem, ir mazāks par pārējo 8 summu.
2. Ja ir 2 skaitļi x un y, kuru reizinājums ir vienāds ar pārējo skaitļu summu, tad kopējā skaitļu summa 45 sastāv no x, y un pārējo skaitļu summas, ko varam aizstāt ar reizinājumu xy. Tātad $x+y+xy=45$; ja abām pusēm pieskaitām 1, iegūstam $x+y+xy+1=46$. Kreiso vienādojuma pusi varam sadalīt reizinātājos kā $(x+1)+y(x+1)=46$ jeb $(x+1)(y+1)=46$. Skaitli 46 var sadalīt reizinātājos divos veidos $46=2\cdot 23$ un $46=1\cdot 46$. Tātad viens no skaitļiem (x+1) vai (y+1) ir 23 vai 46, bet tas nav iespējams, jo pat lielākajam no dotajiem skaitļiem pieskaitot 1, iegūstam tikai 10.
3. Ja ir 3 skaitļi x, y un z, kuru reizinājums ir vienāds ar pārējo skaitļu summu (pieņemsim, ka $x<y<z$), tad kopējā skaitļu summa 45 sastāv no x, y, z un pārējo skaitļu summas, ko varam aizstāt ar reizinājumu xyz. Tātad $x+y+z+xyz=45$. Ir vairākas iespējas:
    a. ja x=1, tad $1+y+z+1\cdot yz=45$ jeb $y+z+yz=44$. Pieskaitot abām vienādojuma pusēm 1 un sadalot reizinātājos, kā aprakstīts punktā 2), iegūstam, ka $(1+y)(1+z)=45$. Tikai vienā veidā skaitli 45 var sadalīt divos reizinātājos, kas katrs ir no 3 līdz 10, tie ir $1+y=5$ un $1+z=9$. Tāpēc y=4 un z=8.
    b. ja x=2, tad $2+y+z+2\cdot yz=45$ jeb $y+z+2yz=43$. Reizinot abas vienādojuma puses ar 2, iegūstam $2y+2z+4yz=86$; pieskaitot abām vienādojuma pusēm 1, iegūstam $2y+2z+4yz+1=87$ jeb $(2y+1)+2z(2y+1)=87$. Iegūto vienādojumu var pārveidot par $(2y+1)(2z+1)=87$. Tā kā 87 var sadalīt reizinātājos, kuri lielāki par 1, tikai kā $87=3\cdot 29$, bet neviens no skaitļiem (2y+1) vai (2z+1) nevar būt 29 (pat lielāko no iespējamiem skaitļiem 9 reizinot ar 2 un pieskaitot 1, iegūstam tikai 19), tad $x\neq 3$.

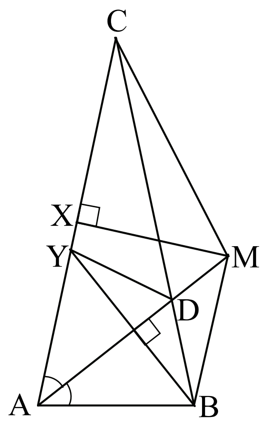
c. ja $x \geq 3$, tad y un z lielāki par x, jo x<y<z, bet pat mazāko 3 skaitļu reizinājums, kuri lielāki vai vienādi par 3, ir $xyz \geq 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$; bet 60 lielāks par visu skaitļu summu 45 – tā nevar būt. Tātad x nav lielāks vai vienāds par 3.

4. Ja ir 4 skaitļi x, y, z un t, kuru reizinājums ir vienāds ar pārējo skaitļu summu (pieņemsim, ka $x<y<z<$t), tad kopējā skaitļu summa 45 sastāv no x, y, z, t un pārējo skaitļu summas, ko varam aizstāt ar reizinājumu xyzt. Iespējami vairāki varianti:
   a. ja x=1 un y=2, tad 1+2+z+t+2zt=45 jeb z+t+2zt=42. Abas vienādojuma puses reizinot ar 2 un pieskaitot tām 1, varam vienādojumu pārveidot par (2z+1)(2t+1)=85. Skaitli 85 var sadalīt reizinātājos vienā vienīgā veidā, kā $85 = 5 \cdot 17$. Tā kā z<t (pēc pieņēmuma), tad 2z+1=5 jeb z=2. Esam ieguvuši situāciju, kad y=2 un z=2, bet tas nav iespējams pēc uzdevuma nosacījumiem.
   b. ja $x \neq 1$, tad mazākais iespējamais 4 skaitļu reizinājums ir $xyzt = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, bet visu skaitļu summa ir tikai 45. Tātad šis gadījums nav iespējams.
   c. ja $y \neq 2$, tad mazākais iespējamais 4 skaitļu reizinājums ir $xyzt = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, bet visu skaitļu summa ir tikai 45. Tātad šis gadījums nav iespējams.
5. Mazākais iespējamais piecu vai vairāk skaitļu reizinājums ir $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, bet visu skaitļu summa ir tikai 45. Tātad arī šis gadījums nav iespējams.

Tātad vienīgā atbilde ir {1; 4; 8} un {2; 3; 5; 6; 7; 9}.

32.8.4.

a) Atbilde: $\angle BCM = 20^\circ$. **Pierādījums:** (skat. 79A. zīm.)



79A. zīmējums

1) ΔABC – vienādsānu, jo pēc dotā zināms, ka AC=BC.
2) $\angle CAB = \angle CBA = 80^\circ$, jo ΔABC – vienādsānu.
3) $\angle CAM = \angle BAM = 40^\circ$, jo AM leņķa CAB bisektrise.
4) $\Delta CXM = \Delta AXM$ pēc pazīmes mlm, jo MX – kopīga; $\angle CXM = \angle AXM = 90^\circ$, jo XM perpendikulārs malai AC; AX=CX, jo X – malas AC viduspunkts.
5) AM=CM, jo vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi.
6) ΔAMC – vienādsānu, jo AM=MC.
7) $\angle ACM = \angle CAM = 40^\circ$ no 3) punkta.
8) $\angle BCM = \angle ACM - \angle ACB = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$.

b) Atbilde: $\angle MBC = 30^\circ$. **Pierādījums:** (skat. 79A. zīm.)
1) ar D apzīmēsim AM un CB krustpunktu.
2) novelkam $BY \perp AD$.
3) ΔYAB – vienādsānu, jo AD ir leņķa YAB bisektrise un arī augstums pret malu YB.
4) AY=AB, jo ΔYAB – vienādsānu.
5) $\Delta AYD = \Delta ABD$ pēc pazīmes mlm, jo AD – kopīga; $\angle YAD = \angle BAD$, jo AD – bisektrise; AY=AB, jo ΔYAB – vienādsānu.
6) YD=BD, jo vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi.
7) $\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle ABD = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$, jo ΔADB leņķu summa ir 180° un $\angle DAB = 40^\circ$, un $\angle ABD = 80^\circ$.
8) $\angle YDA = 60^\circ$, jo vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi.
9) $\angle MDC = \angle ADB = 60^\circ$ kā krustleņķi taisnēm AM un CB
10) $\angle YDC = 180^\circ - \angle MDC - \angle ADY = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.
11) $\Delta MDC = \Delta YDC$ pēc pazīmes lml, jo $\angle YDC = \angle MDC = 60^\circ$; DC – kopīga; $\angle YCD = \angle MCD = 20^\circ$ pēc **a)** variantā pierādītā.
12) YD=MD, jo vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi.

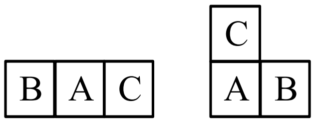
13) no tā, ka YD=BD un YD=MD, seko, ka MD=BD un ΔMDB – vienādsānu.

14) $\angle MDB = 180^\circ - \angle MDC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, jo blakusleņķu summa ir 180°

15) $\angle MBC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$, jo vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi.

32.8.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo n vērtību un parādīt piemēru, ka tas iespējams; otrkārt, pierādīt, ka lielāka vērtība nav iespējama.

- **Atbilde:** n=16. **Piemērs:** Ja kvadrātu sadala 16 kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas katru un katru daļu nokrāso savā krāsā, uzdevuma nosacījumi izpildās.
- **Pierādījums:** pieņemsim, ka n>16. Ja katrā krāsā būtu 4 lauciņi, tad nokrāsotas būtu vairāk nekā 64 rūtiņas, bet rūtiņu kopējais skaits nevar pārsniegt 64. Tāpēc noteikti ir tāda krāsa, kurā nokrāsots ne vairāk par 3 rūtiņām. Apzīmēsim šīs 3 rūtiņas, kas ir vienā krāsā, ar A, B un C. Izvēlēsimies vienu no šīm 3 rūtiņām, piemēram, A. Tās divi kaimiņi, kas ir tādā pašā krāsā kā A, var atrasties tikai 2 principiāli atšķirīgos veidos (skat. 80A. zīm.). Abos gadījumos rūtiņām B un C ir tikai viena kaimiņu rūtiņa, kas nokrāsota tādā pašā krāsā. Tātad uzdevuma nosacījumi neizpildās un dažādo krāsu skaits nevar pārsniegt 16.



80A. zīmējums

9. klase

32.9.1. Atbilde: 1222200. **Pierādījums:** ja skaitlis dalās ar 225, tad tā pēdējie 2 cipari ir 25, 50, 75 vai 00. Lai izmantotu skaitļa pierakstā pieļautos ciparus, skaitlim noteikti jābeidzas ar 00. Tā kā $225 = 9 \cdot 25$, tad ciparu summai noteikti jādalās ar 9. Lieku ciparu ieviešana pagarina skaitli, tāpēc pārējiem cipariem jābūt iespējami maz un arī lieku nuļļu pievienošana skaitļa beigās pagarinās skaitli. Pārējie cipari summā veido skaitli 9, jo tas ir mazākais skaitlis, kas dalās ar 9. Skaitli 9 no pieļautajiem cipariem var izveidot, sasummējot 1, 2, 2, 2, 2. Cipariem jābūt tieši šādā secībā, lai meklējamais skaitlis būtu pēc iespējas mazāks. Tāpēc meklētais skaitlis ir 1222200.

32.9.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.9.4. atrisinājumu.

32.9.3. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.9.4. atrisinājumu.

32.9.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo n vērtību un parādīt piemēru, ka tas iespējams; otrkārt, pierādīt, ka lielāka vērtība nav iespējama.

- **Atbilde:** min=–3, max=3. **Piemērs:** minimālo vērtību var sasniegt, ja x=y=z=–1, bet maksimālo, ja x=y=z=1.
- **Pierādījums:** saskaitot dotās nevienādības, iegūstam, ka

  $\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (xy + xz + yz) \le 6$ **(1)**

  Jebkuru divu skaitļu starpības kvadrāts ir lielāks vai vienāds par nulli, tāpēc arī $(x-y)^2 \ge 0$, $(x-z)^2 \ge 0$, $(y-z)^2 \ge 0$. Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam, ka $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \ge 0$. Atverot iekavas:

  $x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \ge 0$ jeb $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \ge 0$.

  Pārnesot uz otru nevienādības pusi daļu no saskaitāmajiem un izdalot ar 2, iegūstam: $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + xz + yz$ **(2)**

  Ievietojot nevienādībā (1) nevienādību (2):

  $(xy + xz + yz) + (xy + xz + yz) \le \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (xy + xz + yz) \le 6$

  Tā rīkojoties, pierādāmajā nevienādībā mēs lielāku saskaitāmo $x^2 + y^2 + z^2$ aizstājam ar mazāku $(xy + xz + yz)$. Tātad, ja 6 būtu lielāks par sākotnējo izteiksmi, tad 6 būtu lielāks arī par pārveidoto izteiksmi, kur saskaitāmais pamazināts. Savelkot līdzīgos saskaitāmos:

  $2xy + 2xz + 2yz \le 6$ jeb $xy + xz + yz \le 3$ **(3)**

Saskaitot nevienādības (1) un (3), iegūstam, ka $\left(x^2+y^2+z^2\right)+(xy+xz+yz)+(xy+xz+yz)\le 3+6$ jeb $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\le 9$, bet šai nevienādībā redzama triju saskaitāmo summas kvadrāta formula, tātad $(x+y+z)^2\le 9$ jeb $-3\le x+y+z\le 3$.

Tātad **min=–3** un **max=3**.

32.9.5. Atrisināsim vispirms līdzīgu uzdevumu I, kuram ir divas atšķirības no sākotnējā: 1) diskiem gala situācijā uz stienīša C nav jāatrodas monotonā secībā, 2) diski uz stienīša A var izkārtoties patvaļīgā secībā (tomēr nosacījums par to, ka nekad nedrīkst pārlikt disku uz stienīti B vai C, ja uz tā esošais apakšējais disks ir mazāks par pārliekamo, paliek spēkā). Apzīmēsim minimālo pietiekamo gājienu skaitu šim jaunajam uzdevumam n disku gadījumā ar pn. Skaidrs, ka p1=1.

Lai atrisinātu šo uzdevumu n disku gadījumā (n>1), acīmredzami nepieciešams veikt tā apakšuzdevumus norādītajā secībā:

Pārcelt n–1 augšējo disku no A uz B,

Pārcelt apakšējo disku no A uz C,

Pārcelt pārējos n–1 diskus no B uz C.

Apakšuzdevuma b) veikšanai nepieciešama un pietiekama 1 pārcelšana. Apakšuzdevuma c) veikšanai nepieciešamas n–1 pārcelšanas (katram diskam pa vienai); tā kā uz C apakšā jau atrodas vislielākais disks, tad ar n–1 pārcelšanu arī pietiek (par disku izmēriem nav jārūpējas). Apskatīsim apakšuzdevumu a). Padomāsim, vai, rīkojoties optimālākajā veidā, apakšējais disks pirms uzdevuma a) pabeigšanas varbūt pārvietojies uz B. Ja tā būtu noticis, tad brīdī, kad apakšējo disku pirmo reizi pārceļ uz B, visiem citiem diskiem jābūt uz C. Bet tādā gadījumā mēs būtu varējuši līdz šim brīdim veiktās operācijas aizstāt ar citām (operāciju, kurā kādu disku pārceļ no /uz B, aizstāt ar operāciju, kurā šo disku pārceļ no/uz C, un otrādi) un iegūt, ka pēc tāda paša operāciju skaita apakšējais disks jau būtu uz C, un nākošās operācijas a) veikšanai vairs nebūtu vajadzīgas; tātad ceļš, kurā apakšējais disks nonāk uz C, nav optimālais.

Tātad, veicot a) optimālajā veidā, apakšējais disks vispār netiek aiztikts.

Tāpēc a) veikšanas laikā mēs rīkojamies ar n–1 sākotnēji augšējiem diskiem, it kā n-tā diska nemaz nebūtu. Minimālais pārcelšanu skaits ir pn–1. Tātad kopā a), b), c) veikšanai minimālais pietiekamais pārcelšanu skaits irpn-1+1+(n–1)=pn–1+n. No nosacījuma p1=1 un pn=pn–1+n (n=2; 3; ...) iegūstam $p_n=1+2+...+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Tagad atrisināsim vēl citu uzdevumu II, kuram ir tikai viena atšķirība no sākotnējā: diskiem gala situācijā uz stienīša C nav jāatrodas monotonā secībā (bet nosacījums par diska pārlikšanu šoreiz ir spēkā gan stienītim A, gan stienītim B, gan stienītim C). Apzīmēsim minimālo pietiekamo pārcelšanu skaitu uzdevumam II n disku gadījumā ar qn. Tā kā uzdevumā II uz disku pārcelšanu ir stingrāki ierobežojumi nekā uzdevumā I, tad $q_n\ge p_n$; no otras puses, viegli pārbaudīt, ka etapus a), b), c) var veikt attiecīgi ar qn–1, 1 un n–1 pārcelšanām. Tāpēc $q_n\le q_{n-1}+n$. Līdz ar nosacījumu q1=1 tas dod $q_n\le 1+2+...+n=p_n$. No nevienādībām $q_n\ge p_n$ un $q_n\le p_n$ seko, ka $q_n=p_n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Tagad beidzot risināsim sākotnējo uzdevumu. Ievērosim sekojošu svarīgu "simetriju": ja no kādas konfigurācijas X ir pieļaujams, pārliekot disku d no stienīša α uz stienīti β, iegūt konfigurāciju Y, tad no konfigurācijas Y, pārliekot disku d no stienīša β uz stienīti α, ir pieļaujams iegūt konfigurāciju X. Šī īpašība seko no tā, ka gan konfigurācijā X, gan konfigurācijā Y pārliekamais disks d nav lielāks par apakšējo disku uz sava stienīša.

Apzīmēsim minimālo pietiekamo gājienu skaitu n disku gadījumā ar xn. Skaidrs, ka x1=1 un pie n>1 n disku gadījumā nepieciešams veikt jau sākumā minētos etapus a), b), c) tieši šādā secībā. Tad, a) etapa gaitā augšējos (n–1) diskus pārceļot uz B, minimālais pārcelšanu skaits ir $q_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Lai veiktu b) etapu, nepieciešama un pietiekama viena pārcelšana. Lai veiktu c) etapu, rīkojamies simetriski tam, kā augšējie n–1diski tika pārcelti no A uz B; ja c) etapu varētu veikt ar mazāk nekā qn–1gājieniem, tad arī sākotnējo pārcelšanu no A uz B varētu veikt ar mazāk nekā qn–1 gājieniem – pretruna. Tāpēc c) etapam nepieciešami un pietiekami qn–1 gājieni. Galarezultātā iegūstam

$$x_n = q_{n-1} + 1 + q_{n-1} = 2q_{n-1} = 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 1 = n^2 - n + 1.$$

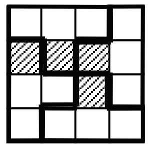
Latvijas 33. atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

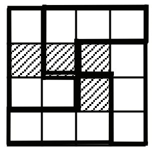
33.5.1.

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** skat. 81A. zīm.

b) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** skat. 81A. zīm. un 82A. zīm.



81A. zīmējums

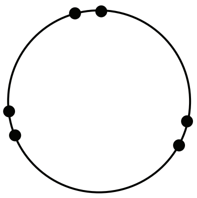


82A. zīmējums

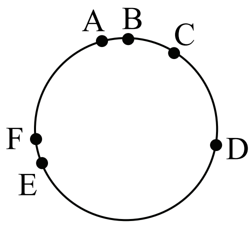
33.5.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.5.2. atrisinājumu.

33.5.3. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast iespējamo variantu skaitu un parādīt piemērus; otrkārt, pierādīt, ka citi varianti nav iespējami.

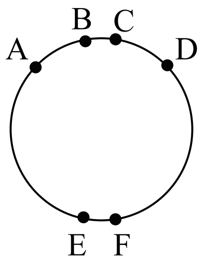
Atbilde: 0, 1 vai 2. **Piemēri:** iespējams divreiz nosaukt 0 bērnus (skat. 83A. zīm.). Tā kā katrs bērns nosauc sev tuvāko bērnu, tad visi bērni nosaukti 1 reizi un neviens nav nosaukts 2 vai vairāk reizes. Ir iespējams divreiz nosaukt 1 bērnu (skat. 84A. zīm.), tur A nosauc B, B nosauc A, C nosauc B, D nosauc C un E ar F nosauc viens otru. Tā esam ieguvuši situāciju, ka B ir nosaukts 2 reizes. Ir iespējams divreiz nosaukt 2 bērnus (skat. 85A. zīm.), tur A nosauc B, B nosauc C, C nosauc B un D nosauc C, bet E un F atkal nosauc viens otru.



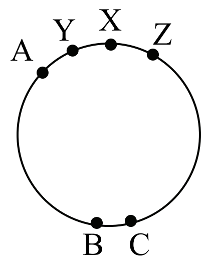
83A. zīmējums



84A. zīmējums



85A. zīmējums



86A. zīmējums

Pierādījums: ja divas reizes būtu nosaukti 4 vai vairāk vārdi, tad kopā būtu vismaz 8 bērni (jo katrs bērns nosauc viena cilvēka vārdu). Iegūta pretruna, jo ir tikai 6 bērni, tātad 4 un vairāk vārdi nevar būt nosaukti divas reizes. Tā kā bērni stāv aplī, tad tuvākais katram no viņiem būs kaimiņš pa labi vai kaimiņš pa kreisi. Pieņemsim, ka iespējams 3 vārdus nosaukt divas reizes. Tad 3 citi vārdi vispār nav nosaukti. Tad ir kāds bērns X, kas nosaukts 2 reizes, un to nosaukuši abi tā kaimiņi Y un Z (skat. 86A. zīm.). Bērns X nosauks vienu no saviem kaimiņiem, varam pieņemt, ka X nosauc Y. Tā kā var būt tikai vai nu, ka bērns nosaukts 2 reizes vai ka tas nav nosaukts vispār, tad vārdu Y nosaucis vēl kāds bērns. Vienīgais, kas varēja vēl nosaukt Y, ir otrs tā kaimiņš A. Esam ieguvuši, ka divi vārdi X un Y nosaukti 2 reizes un četri bērni jau ir runājuši. Tātad paliek 2 bērni – B un C, kam vēl jārunā. Spriežam līdzīgi: ja, piemēram, B būtu nosaukts 2 reizes, tad abiem tā kaimiņiem viņš jānosauc. Tas nav iespējams, jo ir tikai viens kaimiņš C, kas vēl neko nav pateicis. Tātad esam ieguvuši pretrunu un 3 vārdi nevar tikt nosaukti divreiz.

33.5.4. Atbilde: melo Alfa un Gamma, patiesību runā Beta. **Pierādījums:** ja divi vai trīs rūķīši runātu patiesību un atbildētu uz jautājumu, cik starp viņiem ir meļu, tad divas vai trīs atbildes būtu vienādas. Tā kā vienādu atbilžu nav, tad noteikti nav ne divu, ne trīs rūķīšu, kas saka patiesību. Ja visi trīs rūķīši melotu, tad visām trim atbildēm vajadzētu būt nepatiesām, bet viena no atbildēm "viens", "divi", "trīs" ir patiesa (jo patiešām melo vai nu "viens" vai "divi", vai "trīs" rūķīši). Tātad viena atbilde ir patiesa un viens rūķītis saka patiesību. Tas nozīmē, ka pārējie divi melo. Tātad ir divi meļi un patiesību runā Beta, kurš saka, ka ir 2 meļi, bet pārējie (Alfa un Gamma) melo.

33.5.5.

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** {14; 13; 8}, {12; 11; 10; 2}; {1; 3; 4; 5; 6; 7; 9}.

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** ja skaitļus no 1 līdz 13 varētu sadalīt 3 daļās, kuru summas ir vienādas, tad šo skaitļu kopējā summa dalītos ar 3. Bet 1+2+3+...+13=91 un 91 nedalās ar 3. Tātad nav iespējams skaitļus no 1 līdz 13 sadalīt 3 daļās tā, lai to summas būtu vienādas.

6. klase

33.6.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām:

1) pieņemt, ka zināms: 2a+3b+c dalās ar 7, un pierādīt, ka $\overline{abc}$ dalās ar 7.
2) pieņemt, ka zināms: $\overline{abc}$ dalās ar 7, un pierādīt, ka 2a+3b+c dalās ar 7.

Pierādījums:

1) pieņemsim, ka 2a+3b+c dalās ar 7. Pierādīsim, ka tad arī $\overline{abc}$ dalās ar 7. Skaitli $\overline{abc}$ var izteikt kā $\overline{abc}$=100a+10b+c. Pārveidojot $\overline{abc}$, iegūstam, ka $\overline{abc}$=100a+10b+c=98a+2a+7b+3b+c=(98a+7b)+(2a+3b+c). Ja pierādīsim, ka abi iegūtie saskaitāmie dalās ar 7, tad arī pats skaitlis dalīsies ar 7. Tā kā 98a+7b=7(14a+b) dalās ar 7 un 2a+3b+c dalās ar 7 pēc pieņēmuma, tad arī pats skaitlis dalās ar 7.

2) pieņemsim, ka $\overline{abc}$ dalās ar 7. Pierādīsim, ka tad arī skaitlis 2a+3b+c dalās ar 7. Skaitli $\overline{abc}$ var izteikt kā $\overline{abc}$=100a+10b+c. Pārveidojot $\overline{abc}$, iegūstam, ka $\overline{abc}$=100a+10b+c=98a+2a+7b+3b+c= =(98a+7b)+(2a+3b+c). No tā, ka vienādības viena puse dalās ar 7, seko, ka arī otra vienādības puse dalās ar 7. Tātad no tā, ka $\overline{abc}$ dalās ar 7, seko, ka arī (98a+7b)+(2a+3b+c) dalās ar 7. Ja no diviem saskaitāmajiem viens dalās ar 7, tad arī otram ir jādalās ar 7. Saskaitāmo (98a+7b) var pārveidot 98a+7b=7(14a+b), kas dalās ar 7 (jo satur reizinātāju 7). Tātad no tā, ka saskaitāmais 98a+7b dalās ar 7, seko, ka arī 2a+3b+c dalās ar 7.

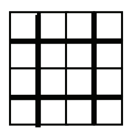
33.6.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.6.5. atrisinājumu.

33.6.3. Pierādījums: kā pirmo Andris izvēlas to grozu, kurā ir visvairāk ābolu (vai vienu no tādiem, ja vairākos grozos ābolu ir vienāds skaits) un kā otro – to grozu, kurā ir visvairāk bumbieru (vai vienu no tādiem, ja vairākos grozos ir vienāds skaits). Ja tas ir viens un tas pats grozs un tajā vienlaicīgi ir visvairāk ābolu un visvairāk bumbieru, tad kā otro grozu Andris var ņemt jebkuru.

Apskatīsim gadījumu, ja tas nav viens un tas pats grozs, kurā ir vienlaicīgi visvairāk ābolu un visvairāk bumbieru. Pirmajā izvēlētajā grozā ir vismaz tikpat ābolu kā otrajā grozā un vismaz tikpat ābolu kā trešajā grozā. Tad pirmā izvēlētā groza ābolu skaits kopā ar otrā izvēlētā groza ābolu skaitu noteikti ir vairāk nekā trešā groza ābolu skaits. No tā seko, ka abos izvēlētajos grozos noteikti ir vairāk kā puse no visiem āboliem. Līdzīgi, otrajā izvēlētajā grozā ir vismaz tikpat bumbieru kā pirmajā izvēlētajā grozā un vismaz tikpat bumbieru kā trešajā grozā. Tad otrā izvēlētā groza bumbieru skaits kopā ar pirmā izvēlētā groza bumbieru skaitu noteikti ir vairāk nekā trešā groza bumbieru skaits (jau otrajā izvēlētajā grozā vienā pašā ir vairāk bumbieru nekā trešajā – neizvēlētajā grozā). No tā seko, ka abos izvēlētajos grozos noteikti ir vairāk nekā puse no visiem bumbieriem.

33.6.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, jāatrod, kāds ir mazākais nokrāsoto malu skaits un jāparāda piemērs, ka tas tiešām ir iespējams; otrkārt, jāpierāda, ka nav iespējams nokrāsot mazāk malu, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Atbilde: var nokrāsot 16 nogriežņus. **Piemērs:** skat. 87A. zīm., kur tumšākās ir tās malas, kas nokrāsotas.



87A. zīmējums

Pierādījums: kvadrātam ir 16 rūtiņas. Lai katrai no tām būtu nokrāsotas divas malas, pavisam jābūt nokrāsotām $16 \times 2 = 32$ malām. Viena nogriežņa nokrāsošana dod vienas vai divu malu krāsojumu (atkarībā no tā, vai šis nogrieznis ir uz kvadrāta kontūra vai tā iekšpusē). Tātad jākrāso vismaz 32:2=16 nogriežņi. To, ka ar 16 nogriežņiem pietiek, skat. 87A. zīm..

33.6.5. Pierādījums: tā kā laukums izkrāsots šaha galdiņa veidā, tad Sprīdītis iet no melnās uz balto rūtiņu vai no baltās uz melno rūtiņu. Tā kā viņš apmeklējis 54 rūtiņas, tad puse no tām bijusi baltā krāsā,

t. i., 54:2=27. Pavisam kvadrātā ir $10 \times 10 = 100$ rūtiņu, un puse no tām (100:2=50) ir baltas rūtiņas. Tā kā Sprīdītis ir pabijis 27 baltās rūtiņās, tad 50–27=23 baltas rūtiņas viņš nav apmeklējis. Ja visās neapmeklētajās baltajās rūtiņās ir pa dukātam, tad to kopā ir tik, cik ir šo balto rūtiņu, t. i., 23. Tā kā visās pārējās 27 baltajās rūtiņās Sprīdītis ir bijis, tad viņš ir arī savācis visus atlikušos 33 – 23 = 10 dukātus. Ja ir tādas neapmeklētās baltās rūtiņās, kurās nav dukāta, tad Sprīdītis ir savācis vēl vairāk par 10 dukātiem. Tātad, apmeklējot 54 rūtiņas, vismaz 10 dukātus Sprīdītis ir noteikti savācis.

7. klase

33.7.1. Atbilde: vagonā ir 21 vieta. **Pierādījums:** tā kā 1996-ā un 2015-ā vieta ir vienā vagonā, tad skaidrs, ka vagonā ir vismaz 20 vietu (no 1996 līdz 2015 ir 20 vietas, jo abi "galapunkti" arī jāieskaita). Tā kā 630-ā un 652-ā vieta ir dažādos vagonos, tad starp šīm vietām ir vismaz viens vagons. Apskatīsim lielāko iespējamo vietu skaitu, kas varētu būt vagonā starp 630-o un 652-o vietu. Šajā vagonā varētu būt vietas ar numuriem: 631; 632; ...; 650; 651. Kopā šajā vagonā varētu būt vislielākais 21 vieta.
Esam ieguvuši, ka vagonā ir vismaz 20 un ne vairāk kā 21 vieta. Apskatīsim abas iespējas:

1) Ja katrā vagonā būtu 20 vietas, tad 1996. vieta būtu 100. vagonā (kur ir vietas no 1981. līdz 2000.), bet 2015. vieta būtu 101. vagonā (kur ir vietas no 2001. līdz 2020.). Esam ieguvuši pretrunu, jo pēc dotā zināms, ka 1996. un 2015. vietai jābūt vienā vagonā.
2) Ja katrā vagonā būtu 21 vieta, tad gan 1996., gan 2015. vieta būtu 96. vagonā (kur ir vietas no 1995. līdz 2015.). Nosacījums par 1996. un 2015. vietu izpildās. Pārbaudīsim, vai izpildās arī nosacījums par 630. un 652. vietu. 630. vieta ir 30. vagonā un 652. vieta ir 32 vagonā. Tātad izpildās visi uzdevuma nosacījumi, un vagonā ir 21 vieta.

33.7.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 32.7.4. atrisinājumu.

33.7.3. Pierādījums:

1) ΔADE un ΔABC ir vienādmalu, jo pēc dotā visi to leņķi ir 60^o.
2) AE=AD un AC=AB, jo ΔADE un ΔABC ir vienādmalu.
3) $\angle EAC = \angle EAD - \angle CAD = 60^o - \angle CAD$
4) $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 60^o - \angle CAD$
5) Tā kā gan $\angle EAC$, gan arī $\angle DAB$ ir vienādi ar $60^o - \angle CAD$, tad $\angle EAC = \angle DAB$.
6) $\Delta EAC = \Delta DAB$ pēc pazīmes mlm, jo AE=AD, AC=AB un $\angle EAC = \angle DAB$.
7) Tā kā vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi, tad EC=DB.

33.7.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast, kura būtne paliks vienīgā uz salas, un parādīt piemēru kā tas ir iespējams; otrkārt, pierādīt, ka neviena cita būtne nevarētu palikt vienīgā uz salas.

- **Pierādījums:** apskatīsim visus iespējamos gadījumus:
  Pieņemsim, ka dzīvs palicis bruņinieks. Tad pūķi kopā apēduši visas 2005 princeses. Ja katrs pūķis būtu apēdis pāra skaitu princešu, tad arī kopā būtu apēsts pāra skaits princešu. Tā kā apēstais princešu skaits ir nepāra skaitlis, tad noteikti atrodams tāds pūķis, kurš apēdis nepāra skaitu princešu. Pēc uzdevuma nosacījumiem neviens bruņinieks nevar nogalināt pūķi, kas apēdis nepāra skaitu princešu. Tātad vismaz 1 pūķis paliek dzīvs. Esam ieguvuši pretrunu, tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un bruņinieks nevarēja būt vienīgā dzīvā būtne uz salas.
  Pieņemsim, ka dzīva palikusi princese. Tad bruņinieki kopā nogalinājuši visus 2007 pūķus. Ja katrs bruņinieks būtu nogalinājis pāra skaitu pūķu, tad arī kopā būtu nogalināts pāra skaits pūķu. Tā kā nogalinātais pūķu skaits ir nepāra skaitlis, tad noteikti atrodams tāds bruņinieks, kurš nogalinājis nepāra skaitu pūķu. Pēc uzdevuma nosacījumiem neviena princese nevar nomocīt līdz nāvei bruņinieku, kas nogalinājis nepāra skaitu pūķu. Tātad vismaz 1 bruņinieks paliek dzīvs. Esam ieguvuši pretrunu, tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un princese nevarēja būt vienīgā dzīvā būtne uz salas.
  Atliek parādīt piemēru, ka kāds pūķis patiešām var palikt dzīvs saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem.

- **Atbilde:** dzīvs paliek pūķis. **Piemērs:** vienīgā dzīvā būtne uz salas var būt pūķis, tas var notikt šādi:
  a) vispirms viens bruņinieks nogalina 2006 pūķus,
  b) pēc tam viena princese nomoka līdz nāvei 2006 bruņiniekus,
  c) pēc tam atlikušais pūķis, noskaities uz nepateicīgajām princesēm, apēd tās visas.

33.7.5. Atbilde: var apēst 22 konfektes**. Pierādījums:** ja trauciņos būtu palikušas 2 konfektes, tad nevienu no tām apēst nevarētu. Tāpēc apēsto konfekšu skaits noteikti nepārsniedz 24–2=22 konfektes. Pierādīsim, ka ir iespējams apēst 22 konfektes. Sanumurēsim traukus pēc kārtas ar numuriem 1., 2., ..., 23., 24. Pierādīsim, ka iespējams apēst konfektes pēc kārtas no 1., 2., ..., 22. trauka. Ar pirmo gājienu apēdam konfekti no 1. trauka. Pieņemsim, ka jau iztukšoti 1., 2., 3., ..., k-ais trauki (tā kā jābūt vismaz 3 konfektēm, lai vienu vēl varētu apēst, tad $k \le 24-3$ jeb $k \le 21$), tad (k + 1)-ā, (k + 2)-ā, ..., 24-ā traukā ir pa konfektei. Pierādīsim, ka iespējams iztukšot (k+1)-o trauku:

a) apēdam konfekti no (k + 2)-ā trauka; tas ir iespējams, jo traukos, kuru numuri lielāki vai vienādi par (k+1), vēl ir konfektes.

b) paņemam konfekti no (k + 1)-ā trauka un ieliekam to (k + 2)-ā traukā; to var izdarīt, jo (k+2)-ā traukā pēc a) darbības vairs konfektes nav.

Līdz ar to esam iztukšojuši (k+1) trauku un esam pierādījuši, ka iespējams iztukšot nākamo pēc kārtas esošo trauku.

Tā varēsim rīkoties, kamēr būs iztukšoti 1., 2., 3., ..., 21., 22. trauki.

8. klase

33.8.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.8.1. atrisinājumu

33.8.2. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, jāatrod, kāds ir mazākais iespējamais atrisināto uzdevumu skaits, un jāparāda piemērs, ka tas ir iespējams; otrkārt, jāpierāda, ka atrastais skaits patiešām ir mazākais iespējamais.

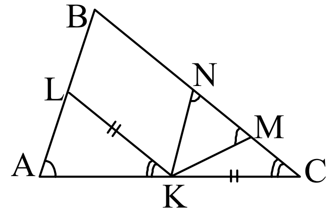
- **Pierādījums:** pēc uzdevuma nosacījumiem zinām, ka katri divi bērni kopā risināja vismaz vienu uzdevumu. Tas nozīmē, ka katrs no bērniem risināja vismaz vienu uzdevumu ar katru no pārējiem 5 bērniem. Tā kā vienā grupā katrs bērns ir kopā ar 2 citiem, tad, lai pabūtu kopā ar visiem citiem 5 bērniem, tam kopumā ir jāiesaistās vismaz 3 grupās (pamatosim: ja katrs bērns iesaistītos tikai 2 grupās, tad tas būtu bijis kopā ar 2 citiem bērniem katrā grupā, tātad kopumā ar augstākais $2 \cdot 2 = 4$ bērniem. Esam ieguvuši pretrunu, jo katram bērnam jābūt kopā ar 5 bērniem. Tātad katram no tiem jāiesaistās vismaz 3 grupās). Katrā grupā tiek risināts vismaz 1 uzdevums. Tā kā katram no 6 bērniem jāiesaistās 3 grupās (lai satiktu pārējos 5 bērnus), tad kopumā jānotiek vismaz $6 \cdot 3 = 18$ uzdevumu risināšanām (par risināšanu šeit tiek saukts process, kad 1 bērns risina 1 uzdevumu. Piemēram, ja 2 bērni kopīgi risina vienu uzdevumu, tad iegūstam 2 risināšanas). Lai iegūtu nepieciešamo grupu skaitu, dalām kopīgo risināšanu daudzumu – 18 – ar cilvēku skaitu vienā grupā – 3. Iegūstam, ka nepieciešamas vismaz $\frac{18}{3} = 6$ grupas, kur katrā grupā tiek risināts 1 uzdevums. Tātad kopā tiek atrisināti mazākais 6 uzdevumi.
- **Atbilde:** 6 uzdevumi. **Piemērs:** iespējams izveidot 6 grupas tā, lai katrs no bērniem kopā ar katru no pārējiem bērniem būtu risinājis kādu uzdevumu. Ja katru bērnu apzīmēsim ar tādu lielo burtu, ar kuru sākas viņa vārds, tad iespējamās grupas ir šādas:
  ADJ, AGM, ALM, DGL, DJM, GJL.
  Jāņem vērā, ka katrā grupā tiek risināts 1 uzdevums.

33.8.3.

a) Piemērs: prasītais skaitlis ir, piemēram, n=64. Tā ciparu summa S(64)=10 un ciparu summa skaitlim 5n jeb 320 ir S(320)=5, tātad uzdevuma prasības izpildītas.

b) Atbilde: jā, ir. **Pierādījums:** par atrisinājumu der visi skaitļi, kas uzrakstāmi formā: $64\underbrace{0...0}_{\text{x nulles}}$. Šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz, jo nuļļu skaitu x varam izvēlēties bezgalīgi daudz veidos. Šāda skaitļa ciparu summa S(n) vienmēr būs 10, jo nuļļu daudzums neietekmēs ciparu summu, un arī S(5n) vienmēr būs 5, jo, $64\underbrace{0...0}_{\text{x nulles}}$ reizinot ar 5, iegūsim $320\underbrace{0...0}_{\text{x nulles}}$. Tā kā nuļļu daudzums ciparu summu neietekmē, tad S(5n)=5.

c) Atbilde: nē, nav. **Pierādījums:** Ja n – nepāra naturāls skaitlis, tad arī 5n noteikti ir nepāra naturāls skaitlis. Ievērosim, ka, reizinot nepāra skaitli ar 5, iegūstam skaitli, kas beidzas ar 5. Tātad 5n ir nepāra naturāls skaitlis, kad beidzas ar 5. Ja pie tam vēl izpildās uzdevuma nosacījumi un S(5n)=5, tad skaitlī 5n nav citu ciparu kā pēdējais cipars (ja skaitlim 5n būtu vēl citi cipari, tad skaitļa 5n ciparu summa noteikti būtu lielāka par 5). Ja skaitlim 5n ir tikai viens cipars un tas ir 5, tad 5n=5 un n=1, bet n=1 neapmierina uzdevuma nosacījumus, kas prasa, ka S(n)=10. Tātad n nevar būt nepāra skaitlis.



88A. zīmējums

33.8.4. Pierādījums: skat. 88A. zīm.

1) Atliekam uz BC tādu punktu N, ka $\angle KNC = \angle KMB$ (tā kā ΔABC – šaurleņķu, tad N nesakrīt ar M).
2) Tā kā $\angle KMB = \angle BAK$ pēc uzdevuma nosacījumiem, tad $\angle KNC = \angle KMB = \angle BAK$.
3) $\angle C = \angle LKA$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm KL un BC. (Pēc dotā zināms, ka $KL \parallel BC$.)
4) $\angle ALK = 180^o - \angle LAK - \angle AKL$ un $\angle NKC = 180^o - \angle KNC - \angle NCK$, jo trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180^o.
5) $\angle ALK = \angle NKC$. Lai to iegūtu, 4) jāievieto, ka $\angle LAK = \angle KNC$, kas seko no 2), un $\angle AKL = \angle NCK$, kas seko no 3).
6) $\Delta ALK = \Delta NKC$ pēc pazīmes lml, jo $\angle AKL = \angle NCK$, $\angle ALK = \angle NKC$ un LK=KC pēc dotā.
7) AL=NK, jo vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi.
8) ΔNKM – vienādsānu, jo leņķi pie pamata vienādi: $\angle KNC = \angle KMB$.
9) KN=KM, jo vienādsānu trijstūra sānu malas ir vienādas.
10) KM=AL, jo gan KM, gan AL vienāds ar KN.

33.8.5.

a) Atbilde: nē, tas nav iespējams. **Pierādījums:** sākumā melnas nokrāsotas 32 rūtiņas, tātad nokrāsotā apgabala robežas kopgarums nav lielāks par $32 \cdot 4 = 128$. Ja melns būtu viss kvadrāts, tad nokrāsotā apgabala robežas kopgarums būtu vienāds ar kvadrāta perimetru, t. i., ar $33 \cdot 4 = 132$. Ja pierādīsim, ka šis kopgarums nevar augt, tad būsim pierādījuši, ka visas rūtiņas nav iespējams nokrāsot melnas.

Pēc uzdevuma nosacījumiem varam nokrāsot melnu tikai tādu baltu rūtiņu, kurai jau ir vismaz 2 melni kaimiņi. Ja baltai rūtiņai ir 2 melni kaimiņi, tad nokrāsotā apgabala robežas kopgarumā tā dod 2 malas. Nokrāsojot šo rūtiņu melnu, sākotnējās 2 malas vairs robežas kopgarumā netiek ieskaitītas, bet tās malas, kas bija baltas, tagad ir melnas un tiek ieskaitītas nokrāsotā apgabala robežas kopgarumā. Tātad nokrāsotā apgabala robežas kopgarumā šī rūtiņa vēl joprojām dod 2 malas. Tātad robežas kopgarums nav palielinājies.

Ja baltai rūtiņai ir 3 melni kaimiņi, tad nokrāsotā apgabala kopgarumā tā dod 3 malas. Nokrāsojot šo rūtiņu melnu, sākotnējās 3 malas vairs robežas kopgarumā netiek ieskaitītas, bet tā mala, kas bija balta, tagad ir melna un tiek ieskaitīta nokrāsotā apgabala robežas kopgarumā. Tātad nokrāsotā apgabala robežas kopgarumā šī rūtiņa dod tikai 1 malu. Tātad robežas kopgarums noteikti nav palielinājies.

Ja baltai rūtiņai ir 4 melni kaimiņi, tad nokrāsotā apgabala kopgarumā tā dod 4 malas. Nokrāsojot šo rūtiņu melnu, sākotnējās 4 malas robežas kopgarumā vairs netiek ieskaitītas. Jaunajai melnajai rūtiņai nav robežas ar baltu rūtiņu. Tāpēc pēc nokrāsošanas nokrāsotā apgabala robežas kopgarumā netiks ieskaitīta neviena šīs rūtiņas mala. Tātad robežas kopgarums noteikti nav palielinājies.

Esam pierādījuši, ka nokrāsotā apgabala kopgarums nevar augt, un līdz ar to esam arī pierādījuši, ka nav iespējams nokrāsot visas rūtiņas.

b) Atbilde: jā, var. **Pierādījums:** tā kā uzdevumā prasīts, vai **var gadīties**, ka visas rūtiņas ir nokrāsotas melnas, tad pietiekami parādīt vienu piemēru, kad tas ir iespējams, lai uzdevums būtu atrisināts. **Piemērs:** ja sākotnēji melnā krāsā nokrāsotas 33 vienas diagonāles rūtiņas, tad, pēc kārtas krāsojot baltās rūtiņas, kas atrodas "diagonālēs" abās pusēs "galvenajai diagonālei", var visu kvadrātu nokrāsot melnu.

9. klase

33.9.1. Atbilde: 60. **Pierādījums:** pēc dalāmības īpašībām skaitlis dalās ar 8 tad un tikai tad, ja tā pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. Lai septiņciparu skaitlis būtu pēc iespējas lielāks, tā cipariem jābūt pēc iespējas lielākiem. Ja kā pirmos 4 septiņciparu skaitļa ciparus izvēlēsimies 9, tad tie būs lielākie iespējamie. Atlikušajiem 3 septiņciparu skaitļa cipariem ir jāizpildās 2 nosacījumiem: tiem jābūt pēc iespējas lielākiem un skaitlim, ko veido šie pēdējie 3 cipari, jādalās ar 8. Pēdējie 3 cipari varētu būt 8, tad pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis būtu 888, kas dalās ar 8. Septiņciparu skaitlis tad būtu 9999888, un skaitļa ciparu summa būtu $4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 36 + 24 = 60$. Pierādīsim, ka pēdējo 3 ciparu vietā nav iespējams izvēlēties citus ciparus tā, lai to summa būt lielāka par skaitļa 888 ciparu summu 24 un skaitlis dalītos ar 8. Lai ciparu summa būtu lielāka par 24, pastāv šādas iespējas:

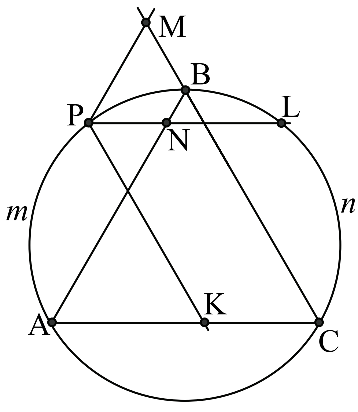
1) viens no cipariem ir 9, bet divi –8. Tad iespējams izveidot skaitļus 889; 898; 988, bet neviens no tiem nedalās ar 8.
2) divi no cipariem ir 9, bet viens – 8. Tad iespējams izveidot skaitļus 998; 989; 899, bet neviens no tiem nedalās ar 8.
3) visi trīs cipari ir 9. Tad iespējams izveidot skaitli 999, bet tas nedalās ar 8.
4) divi no cipariem ir 9, bet viens – 7. Tad iespējams izveidot skaitļus 997; 979; 799, bet neviens no tiem nedalās ar 8.

Tātad nav iespējams trīsciparu skaitlis, kura ciparu summa būtu lielāka par 24 un kurš dalītos ar 8. Tātad lielākais iespējamais skaitlis ir 9999888 un atbilstoši lielākā iespējamā ciparu summa ir 60.

33.9.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.9.4. atrisinājumu.

33.9.3. Pierādījums: skat. 89A. zīm.

1) $\angle MPN = \angle BAC = 60^0$, jo $PL \| AC$ un $PM \| AB$.
2) $\angle BMP = \angle CBA = 60^0$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm PM un AB.
3) PMBN – vienādsānu trapece, jo pamata malas BN un PM paralēlas pēc uzdevuma nosacījumiem un leņķi pie pamata PM vienādi.
4) $\angle BMN = \angle BPN$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz hordu NB riņķa līnijā, kas apvilkta vienādsānu trapecei BMPN.
5) PMCK – vienādsānu trapece, jo pamata malas MC un PK paralēlas pēc uzdevuma nosacījumiem un leņķi pie pamata MC ir 60^0 un tātad ir vienādi ($\angle BMP = 60^0$ no 2) un $\angle BCA = 60^0$, jo dotais trijstūris ABC ir regulārs).



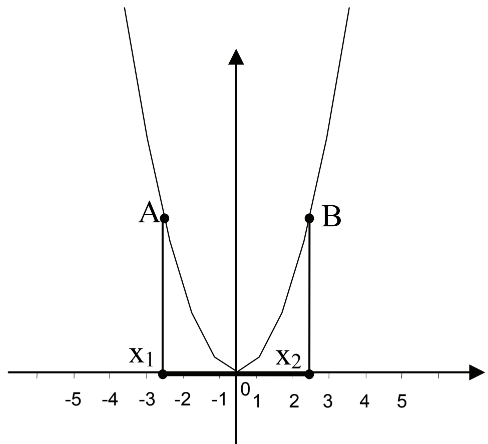
6) $\angle BMK = \angle BCP$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ko savelk vienādas hordas CK un PM riņķa līnijā, kas apvilkta vienādsānu trapecei MPKC.
7) Mums jāpierāda, ka $\angle BMN = \angle BMK$; ņemot vērā 4) un 6), mums jāpierāda, ka $\angle BPN = \angle BCP$.
8) $\angle BPN$ un $\angle BCP$ – ievilkti leņķi, kas balstās attiecīgi uz lokiem BL un BP.
9) Lai pierādītu, ka $\angle BPN = \angle BCP$, pietiek pierādīt, ka loki BL un BP ir vienādi, jo ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi.
10) $\cup APB = \cup CLB = 120^0$, jo $\angle ACB$ un $\angle BAC$ ir ievilkti leņķi un $\angle ACB = \angle BAC = 60^0$.

11) $\cup AmP = \cup CnL$ kā loki starp paralēlām hordām AC un PL.

12) $\cup PB = \cup BL$, jo, atņemot no vienādiem lokiem ($\cup APB = \cup CLB$) vienādus lokus ($\cup AmP = \cup CnL$), arī iegūtie loki ir vienādi.

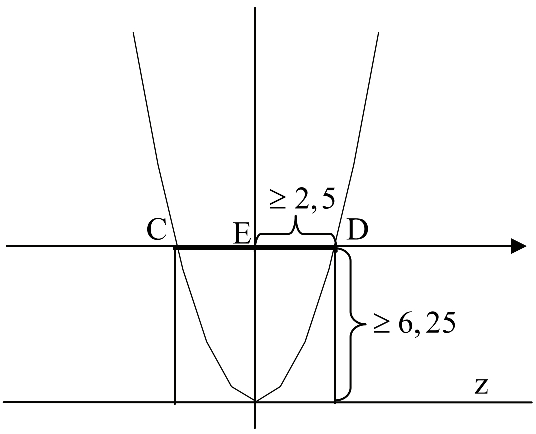
13) Tātad $\cup PB = \cup BL$, no tā seko, ka $\angle BPN = \angle BCP$, un no tā seko, ka $\angle BMN = \angle BMK$, kas arī bija prasīts.

33.9.4. Pierādījums: vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ kreisās puses grafiks ir parabola $y = x^2$, kuras virsotne nobīdīta no koordinātu sākumpunkta (par to liecina saskaitāmie ar p un q). Parabolas zari vērsti uz augšu, jo koeficients pie x^2 ir pozitīvs. Apskatīsim parabolu $y = x^2$ (skat. 90A. zīm.). Izvēlēsimies divas x vērtības $x_1 = -2,5$ un $x_2 = 2,5$. Ar A apzīmēsim grafika punktu, kas atbilst x vērtībai x_1, tātad $Ax_1=y(x_1)=y(-2,5)==6,25$. Līdzīgi ar B apzīmēsim grafika punktu, kas atbilst x vērtībai x_2, tātad $Bx_2=y(x_2)=y(2,5)=6,25$. Attālums gan no A, gan B līdz x asij ir 6,25, bet attālums starp punktiem A un B ir 5. Gan A, gan B attālums līdz y asij – grafika simetrijas asij ir 2,5. Skaidrs, ka, palielinot attālumu starp A un B (izvēloties x_1 un x_2 tālāk vienu no otra, bet joprojām simetriski attiecībā pret parabolas simetrijas asi), arī attālums no punktiem A un B līdz x asij un arī attālums līdz simetrijas asij tikai palielināsies.



89A. zīmējums

No tā, ka dotajam vienādojumam ir divas saknes, kas atšķiras viena no otras vismaz par 5, seko, ka vienādojuma kreisās puses grafiks krusto x asi 2 punktos, kas viens no otra atšķiras vismaz par 5 (skat. 91A. zīm.). Apzīmēsim šos punktus ar C un D. Apzīmēsim asi, kas paralēla x asij un uz kuras atrodas dotā vienādojuma kreisās puses grafika – parabolas – virsotne, ar z. Tā kā šo grafiku varam iegūt, pārbīdot funkcijas $y = x^2$ grafiku koordinātu plaknē, tad iegūtās sakarības par attālumiem starp konkrētiem punktiem ir spēkā arī dotā vienādojuma kreisās puses grafikam. Tāpēc no tā, ka attālums starp C un D ir vismaz 5, seko, ka attālums no punktiem C un D līdz asij z ir vismaz 6,25 un attālums līdz parabolas simetrijas asij ir vismaz 2,5. Apzīmēsim simetrijas ass krustpunktu ar x asi ar E, tad $f(E_x) \le -6,25$.



91A. zīmējums

Tālāk parādīsim divus risinājuma variantus:

1. variants.

Lai pierādītu, ka funkcijai f(x)+f(x+1)+f(x+2) ir divas saknes, pietiek pierādīt, ka eksistē tāda argumenta x vērtība, kurai funkcijas vērtība ir negatīva, bet tās grafika parabolas zari vērsti uz augšu.

Kā meklēto x vērtību izvēlamies punktu E. Jau zinām, ka f(E)<0; pierādīsim, ka f(E+1)<0 un f(E+2)<0. Tā kā funkcijas f(x) grafiks krusto x asi punktos C un D, tad f(C)=f(D)=0. Tā, kā funkcija ir negatīva, kad $x \in (C;D)$, un gan $E+1 \in (C;D)$, gan arī $E+2 \in (C;D)$, tad arī f(E+1)<0 un f(E+2)<0. Tātad esam atraduši punktu E, kam f(E)+f(E+1)+f(E+2)<0 (ja katrs saskaitāmais ir mazāks par nulli, tad arī šo saskaitāmo summa ir mazāka par nulli).

Funkcijas f(x) grafiks ir parabola, kuras zari vērsti uz augšu, līdzīgi arī funkciju f(x+1) un f(x+2) grafiki ir parabolas, kuru zari ir vērsti uz augšu, jo zaru vērsums atkarīgs no koeficienta pie x^2, kas ir tāds pats kā funkcijai f(x). Tātad arī funkcijas f(x)+f(x+1)+f(x+2) grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu.

No tā, ka eksistē tāds punkts, kurā funkcijas vērtība ir negatīva, un no tā, ka funkcijas grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu, seko, ka vienādojumam f(x)+f(x+1)+f(x+2)=0 ir divas saknes.

2. variants.

Apzīmēsim x+1=y; tad x=y-1 un x+2=y+1. Tā kā no uzdevumā dotā zināms, ka $f(x)=x^2+px+q$, tad $f(y-1)=(y-1)^2+p(y-1)+q$. Līdzīgi iegūstam, ka $f(y)=y^2+py+q$ un $f(y+1)=(y+1)^2+p(y+1)+q$.

Saskaitot

f(x)+f(x+1)+f(x+2)=f(y–1)+f(y)+f(y+1)=

$=(y-1)^2+p(y-1)+q+y^2+py+q+(y+1)^2+p(y+1)+q=$

$=y^2-2y+1+py-y+q+y^2+py+q+y^2+2y+1+py+y+q=$

$=3y^2+3py+3q+2$

Pielīdzinot iegūto izteiksmi nullei, iegūstam $3y^2+3py+3q+2=0$ jeb $y^2+py+q+\frac{2}{3}=0$. Šī vienādojuma kreisās puses funkcijas grafiku var iegūt, sākotnējā vienādojuma kreisās puses funkcijas grafiku nobīdot pa y asi pozitīvajā virzienā par $\frac{2}{3}$. Tā kā eksistē punkts E_x, kam $f(E_x)\le -6{,}25$, tad sākotnējā vienādojuma kreisās puses funkcijas grafiks ir nobīdīts zem x ass vismaz par 6,25. No tā seko, ka, pabīdot šo grafiku par $\frac{2}{3}$ pozitīvajā virzienā, vēl joprojām eksistēs grafika daļa, kas atradīsies zem x ass. Tā kā parabolas zari vērsti pozitīvā virzienā, tad noteikti eksistēs 2 krustpunkti ar x asi.

33.9.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, parādīt piemēru ar lielāko iespējamo skaitļu skaitu, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem; otrkārt, pierādīt, ka nav iespējams izvēlēties lielāku daudzums skaitļu, kas atbilstu uzdevuma nosacījumiem.

Atbilde: 25 skaitļus. **Piemērs:** lai iegūtu 25 skaitļus, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, izvēlamies skaitļus 52; 54; 56; ...; 96; 98; 100. Tie visi dalās ar 2, līdz ar to lielākais kopīgais dalītājs katriem diviem no tiem ir vismaz 2; neviens no šiem skaitļiem nedalās ne ar vienu citu, jo pat lielākā skaitļa dalījums ar mazāko ir $\frac{100}{52}<2$.

Pierādījums: pierādīsim, ka vairāk par 25 skaitļiem, kas apmierina uzdevuma prasības, izvēlēties nevar. Ar M apzīmēsim skaitļu kopu, ko veido lielākais iespējamais skaitļu skaits, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. <u>Ja skaitlis x no kopas M apmierina nosacījumu $x\le 50$, tad skaitlis 2x nevar piederēt kopai M</u> (pamatosim: ja kopai M piederētu gan skaitlis x, gan arī 2x, tad kopā M būtu skaitļi, kas dalītos viens ar otru, jo 2x dalās ar x, un būtu iegūta pretruna ar uzdevuma nosacījumiem).

Visus kopas M elementus, kas nepārsniedz 50, pa vienam aizstāsim ar divreiz lielākiem skaitļiem, pie tam katrā solī aizstāsim mazāko no šādiem skaitļiem x ar skaitli 2x. Pamatosim, ka veicot šādu darbību, jauniegūtā kopa M joprojām atbildīs uzdevuma nosacījumiem. Kopā M noteikti nav tāda skaitļa y, ka y dalās ar 2x, jo tad y dalītos arī ar x, bet tas ir pretrunā ar kopas M izveides nosacījumiem. Atliek pamatot, ka noteikti nevar atrast tādu skaitli v kopā M, ka 2x dalās ar v. Saskaņā ar x izvēli x<v. Tāpēc $\frac{x}{v}<1$ un $\frac{2x}{v}<2$. Ja 2x dalītos ar v, tad $\frac{2x}{v}$ jābūt naturālam skaitlim; tā kā $\frac{2x}{v}<2$, tad $\frac{2x}{v}=1$ un v=2x. Bet tas ir pretrunā ar augstāk izcelto apgalvojumu.

Ja līdz galam pārveidotajā kopā M (kur visi elementi lielāki par 50) būtu vairāk par 25 elementiem, tad vismaz 2 no tiem būtu pēc kārtas ņemti skaitļi (pamatojums nākošajā rindkopā), bet jebkuriem 2 pēc kārtas esošiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Esam ieguvuši pretrunu ar uzdevuma nosacījumiem, jo nekādu divu kopas M elementu LKD nevar būt 1. Tātad kopā M nevar būt vairāk par 25 skaitļiem.

Pamatosim, ka, ja pārveidotajā kopā M būtu vairāk nekā 25 elementi, tad vismaz 2 no tiem būtu pēc kārtas esoši skaitļi. Apskatīsim pieļaujamo intervālu [51; 100]. Sadalām to 25 pāros [51; 52], [53; 54], [55; 56], ... [99; 100]. Ja <u>vairāk</u> nekā 25 kopas M elementi sadalīti pa šiem 25 pāriem, tad vismaz vienā pārī ir vairāk nekā viens, tātad vismaz divi M elementi; tie ir meklējamie.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie sadalīti piecās grupās: skaitļu teorija, algebra, ģeometrija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkāk apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā grāmata ietver 5. – 9. klašu matemātikas olimpiāžu uzdevumus, tad metodes izvēle atkarīga no skolēnu zināšanām.

ALGEBRA

Algebriskie pārveidojumi – 26.7.3., 27.7.1., 29.7.1., 29.8.5.
Vienādojumi – 26.8.1., 27.8.1., 27.9.4., 29.6.4., 29.8.1., 29.8.3., 29.9.1., 30.8.1., 31.5.2., 31.8.1., 31.9.1., 32.8.3., 33.9.4.
Nevienādības – 26.5.1., 26.7.2., 27.5.4., 27.9.2., 28.5.3., 28.8.1., 30.7.1., 31.6.1., 31.7.1., 32.7.5., 32.9.4.
Vienādojumu sistēmas – 26.9.1.
Invariantu metode – 26.5.4., 29.8.5.
Ekstremālā elementa metode – 29.8.3.

ĢEOMETRIJA

Klasiskā ģeometrija – 26.7.4., 26.8.2., 26.9.3., 27.7.3., 27.8.2., 27.9.3., 28.7.3., 29.7.2., 29.8.4., 30.7.4., 30.9.4., 31.7.2., 31.7.4., 31.8.2., 31.9.3., 32.7.1., 32.8.4., 33.7.3., 33.8.4., 33.9.3.
Figūru sistēmas – 26.9.4., 28.7.4., 28.9.3., 29.5.4., 29.6.2., 29.7.3., 32.5.3.
Figūru sagriešana un salikšana – 26.6.2., 27.5.5., 27.6.5., 27.7.5., 28.8.2., 28.9.2., 29.9.2., 30.5.3., 30.6.2., 30.7.2., 32.5.5., 33.5.1.
Invariantu metode – 27.6.5., 27.8.4., 27.8.5., 28.8.4., 30.6.2., 30.8.4., 31.6.2., 31.8.4., 33.6.4., 33.8.5.
Dirihlē princips – 27.7.5., 28.5.5., 31.5.3., 32.6.5., 32.8.5.
Ekstremālā elementa metode – 31.5.4.

SKAITĻU TEORIJA

Dalāmība, dalīšana ar atlikumu – 26.6.3., 26.8.4., 27.5.1., 27.6.2., 27.7.2., 28.6.2., 28.7.2., 28.9.4., 29.7.4., 30.7.3., 30.9.3., 31.5.5., 31.6.1., 31.7.3., 31.8.3., 32.9.1., 33.5.5., 33.9.1.
Sadalīšana reizinātājos – 26.9.2., 30.5.4., 30.8.3., 32.6.1., 32.7.4.
Skaitļa pieraksts, aritmētisko darbību izpilde – 26.6.4., 26.7.1., 27.5.2., 28.5.2., 28.6.1., 28.6.2., 28.8.3., 29.5.1., 29.5.5., 29.6.4., 29.8.2., 30.5.1., 31.5.1., 33.6.1., 33.8.3.
Grupēšana – 27.7.4., 30.6.3., 30.9.2.
Dirihlē princips – 26.8.3., 27.7.4., 27.8.3., 29.7.5., 33.9.5.
Invariantu metode – 26.5.2., 30.7.5., 30.9.2., 31.6.5.

KOMBINATORIKA

Uzdevumi, kas reducējas uz grafiem – 26.5.5., 27.9.5., 29.6.5., 31.7.5.
Skaitīšana – 26.5.3., 27.6.1.
Kombinatoriskas struktūras – 26.6.5., 27.5.4., 27.6.4., 28.5.3., 28.8.5., 30.6.4., 31.9.5., 33.8.2.
Dirihlē princips – 26.6.5., 28.6.5., 28.9.5., 31.6.3., 32.6.2., 33.8.2.
Invariantu metode – 27.6.3., 29.9.4., 30.5.5., 31.9.2., 32.5.3.
Ekstremālā elementa metode – 31.9.4., 33.7.4.

ALGORITMIKA

Algoritma izstrāde – 26.7.5., 26.8.5., 26.9.5., 27.9.2., 28.5.4., 28.6.4., 28.7.5., 29.5.2., 29.7.4., 30.5.2., 30.5.5., 30.6.5., 30.7.3., 30.7.5., 30.9.5., 31.6.4., 32.5.4., 32.6.4., 32.7.3., 32.9.5., 33.5.5., 33.6.3., 33.7.5., 33.9.5.
Procesu analīze – 26.6.1., 26.8.3., 27.5.1., 27.5.3., 29.6.1., 29.9.4., 29.9.5., 31.8.5., 32.9.5., 33.6.5., 33.7.1.
Loģiska satura uzdevumi – 28.5.1., 28.7.5., 33.5.4.

LITERATŪRA

Vairāki uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:
Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde: 26.8.3., 28.6.5, 28.7.5., 28.9.4., 32.7.4., 32.7.5., 33.8.4.
Bulgārijas matemātikas olimpiāde: 27.5.3., 28.6.2., 29.5.5., 29.6.4., 31.9.5.
Ungārijas matemātikas olimpiāde: 27.9.3.
Krievijas matemātikas olimpiāde: 30.7.4., 31.9.4.
Albānijas matemātikas olimpiāde: 30.9.3.

Dž. Berzsenji: 27.6.4., 27.7.4.
A. Engels: 29.9.4.
M. Opmanis: 31.6.3.
V. Prasolovs: 27.8.4.
S. Savčevs: 31.8.2.
P. Vaderlinds: 30.7.5.

SĒRIJA “LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS “LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1994./95. m. g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 1993./94. m. g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5. – 9. klasēm 1999./2000. m. g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **“Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999. – 2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1997. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. atklātās matemātikas olimpiādes. 5. – 9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

BA Turība, Izdevniecība
Adrese: Graudu ielā 68, Rīgā, LV-1058
Tālrunis: 7623521, mobilais tālrunis: 29157200
Fakss: 7619152, e-pasts: Izdevnieciba@turiba.lv

Latvijas 26. – 33.
atklātās matemātikas olimpiādes.
5. – 9. klases

A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons

Izdevējs SIA "Biznesa augstskola Turība"
Izdevniecības vadītāja Daiga Rugāja
Iespiests SIA "Apgāds Imanta" tipogrāfijā