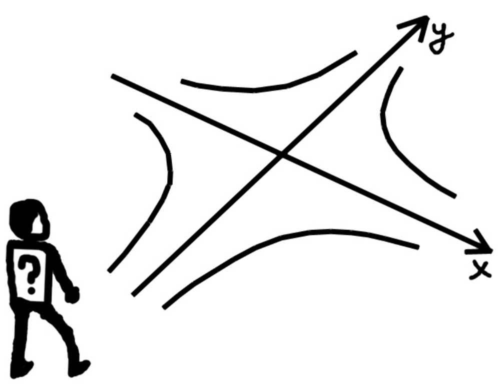
A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons

LATVIJAS 26. – 32. ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES. 9. – 12. klases



Rīga, 2008

UDK

A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas olimpiādes. 9. – 12. klases. Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008. – 165 lpp.

Grāmatā apkopoti uzdevumi, kas piedāvāti 9. – 12. klašu skolēniem Latvijas atklātajās matemātikas olimpiādēs no 1999. līdz 2005. gadam, īsas norādes to risināšanai un pilni atrisinājumi. Grāmata paredzēta skolēniem, skolotājiem, matemātikas pulciņu vadītājiem, kā arī visiem matemātikas entuziastiem. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija.

Grāmatas galīgo variantu sagatavoja Z. Škuškovnika LU akadēmiskās attīstības projekta „LU FMF centra – A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas - darbība” ietvaros. Tā iekļauta Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

SATURS

IEVADS

Labdien!

Ar dažādu lēmumu pieņemšanu un problēmu risināšanu sastopas jebkurš cilvēks. Situāciju risinājumi bieži vien ir intuitīvi, taču ir situācijas, kad ar intuīciju atrast „pareizo" atbildi ir grūti vai pat neiespējami. Tieši lēmumu pieņemšana neparedzētās situācijās bieži vien cilvēkiem sagādā pat bailes lielākoties tāpēc, ka šādās situācijās ir nepieciešama problēmas plānveida risināšana, izvirzot mērķi un soli pa solim tam tuvojoties.

Šī grāmata ir rakstīta kā darba „26. – 33. Latvijas Atklātās Matemātikas Olimpiādes 5. – 9. klasei" turpinājums. Arī te varēsiet attīstīt informācijas strukturēšanas un sakārtošanas spējas, pamatošanas un secināšanas prasmes, kā arī, iespējams, apgūt dažādus veidus, kā skatīties uz problēmu vai uzdevumu. Šī grāmata paredzēta skolniekiem, kas gatavojas olimpiādēm, skolotājiem, kas palīdz skolniekiem gatavoties, kā arī jebkuram citam cilvēkam jebkurā vecumā, kurš ir sapratis, ka attīstīt un pilnveidot lēmumu pieņemšanas spējas nekad nav par vēlu!

Grāmata sastāv no 3 nodaļām. Pirmajā nodaļā „Uzdevumi" varēsiet atrast visus 9. – 12. klašu uzdevumus, kas piedāvāti 26. – 32. Latvijas Atklātajā Matemātikas Olimpiādē. Otrajā nodaļā „Ieteikumi" ir atrodami īsi ieteikumi, kā risināt konkrēto uzdevumu. Lielākoties būs tikai viens ieteikums katram uzdevumam, bet, protams, iespējami vairāki varianti, kā nonākt pie atrisinājuma, un dotais nav jāuzskata ne par pareizāko, ne vieglāko. Trešajā nodaļā „Atrisinājumi" ir apkopoti visu uzdevumu precīzi atrisinājumi. Lielākoties tiek piedāvāts viens atrisinājuma variants katram uzdevumam, taču katram uzdevumam iespējami vairāki pilnīgi atšķirīgi pareizi risinājumi, kas noved pie vienas un tās pašas atbildes.

Ja vēlaties gūt no šīs grāmatas pēc iespējas vairāk un esat nolēmis risināt uzdevumus, mēs iesakām vispirms mēģināt katru uzdevumu atrisināt pašam un izmēģināt visus iespējamos risināšanas veidus, ko varat iedomāties. Dažreiz pats negaidītākais ceļš izrādās pareizais! Ja atrisināt tomēr neizdodas, varat izmantot nodaļu „Ieteikumi", kur norādīts, par ko padomāt, lai varētu atrisinājumu ieraudzīt. Kad esat uzdevumu atrisinājis vai arī tas nav izdevies pat ar ieteikumu palīdzību, varat skatīties atrisinājumos. Uzdevumu atrisinājumi ir strukturēti tā, lai vispirms varētu apskatīties atbildi un salīdzināt, vai iznākums sakrīt (ja gadījumā tā nav – vēl ir iespēja pašam mēģināt atrast kļūdu un izlabot to), un tad iepazīties ar pilnu uzdevuma atrisinājumu.

Olimpiāžu uzdevumu risināšana ir viens no veidiem kā attīstīt un pilnveidot savas spējas sarežģītās ikdienas situācijās pieņemt īstos lēmumus! Lai veicas!

Mēs sirsnīgi pateicamies Latvijas Universitātei par atbalstu šī darba izstrādē, kā arī Biznesa augstskolai „Turība” un īpaši A. Baumaņa kungam par solidaritāti mūsu kopējā darbā jaunās paaudzes veidošanā.

Autori

Rīgā, 2008. gada 7. maijā

UZDEVUMI

Latvijas 26. atklātā matemātikas olimpiāde

9.klase

26.9.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}.$$

26.9.2. Dots, ka k - naturāls skaitlis. Pierādīt:

a) ja k=m+2mn+n, kur m un n - naturāli skaitļi, tad 2k+1 nav pirmskaitlis,

b) ja 2k+1 nav pirmskaitlis, tad eksistē tādi naturāli skaitļi m un n, ka k=m+2mn+n.

26.9.3. Punkts M ir paralelograma ABCD malas AD viduspunkts. Punkts K ir tā perpendikula pamats, kas no B novilkts pret taisni CM. Pierādīt, ka AB=AK.

26.9.4. Uz riņķa līnijas atzīmēti n punkti, $n > 3$. Pakāpeniski novelk pa vienam nogrieznim, kas savieno divus no dotajiem punktiem, pie tam neviens no jauna novilkts nogrieznis nekrusto nevienu no iepriekšējiem. Pirmo novilkto nogriezni krāso baltu, otro - sarkanu, trešo - baltu, ceturto - sarkanu, utt. Nogriežņus turpina vilkt, kamēr vien tas iespējams; vilkšanas secība var būt patvaļīga. Kādā krāsā būs pēdējais novilktais nogrieznis?

26.9.5. Vairākās kaudzēs kopā ir n konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 2 kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienādi konfekšu daudzumi). Vai taisnība, ka konfektes var apvienot visas vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja a) n=64, b) n=100?

10.klase

26.10.1. Dots, ka $x^2 + y^2 = 1$, x un y – pozitīvi skaitļi. Kādas vērtības var pieņemt reizinājums xy ?

26.10.2. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$(x^2 + x + 1)^3 + (x^2 - 2x - 2)^3 = (2x^2 - x - 1)^3$.

26.10.3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BD. Trijstūrim BDC apvilktā riņķa līnija krusto malu AB punktā E, bet trijstūrim ABD apvilktā riņķa līnija krusto malu BC punktā F. Pierādīt, ka AE=CF.

26.10.4. Uz tāfeles uzrakstīti 1999 naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Ar vienu gājienu atļauts nodzēst divus skaitļus un to vietā uzrakstīt nodzēsto skaitļu lielāko kopīgo dalītāju un mazāko kopīgo dalāmo. Pierādīt: izdarot šādus gājienus pietiekami ilgi, uz tāfeles uzrakstītie skaitļi kādreiz pārstās mainīties.

26.10.5. Jānis uzrakstījis naturālus skaitļus no 1 līdz 20 (katru vienu reizi) rindā kaut kādā kārtībā; Andris šo kārtību nezina. Ar vienu gājienu Andris var nosaukt jebkurus 10 skaitļus, un Jānis viņam pasacīs, kādā secībā šie 10 skaitļi atrodas rindā. Izdomājiet paņēmienu, kas ļauj Andrim atrast Jāņa uzrakstīto virkni, izmantojot iespējami maz jautājumu. **Nav jāpierāda,** ka jūsu atrastais jautājumu skaits ir vismazākais iespējamais.

11.klase

26.11.1. Doti sviras svari bez atsvariem un sešas pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir dažādas. Andris norāda Jānim uz divām monētām. Izdomājiet paņēmienu, kas Jānim ar iespējami mazu svēršanu skaitu ļauj noskaidrot, vai šīs monētas atrastos blakus, ja visas sešas monētas saliktu rindā masu pieaugšanas secībā. **Nav jāpierāda,** ka Jūsu atrastais svēršanu daudzums ir mazākais iespējamais.

26.11.2. Smaragda pilsētas armijā ir n karavīri. Cik dažādos veidos var sarīkot paaugstināšanu dienesta pakāpē un ordeņa piešķiršanu, ja jāievēro divi nosacījumi:

a) katru, kas saņem ordeni, paaugstina arī dienesta pakāpē,

b) ir tādi karavīri, kurus dienesta pakāpē gan paaugstina, bet ordeni viņi nesaņem,

c) drīkst būt arī tādi karavīri, kas nesaņem neko.

26.11.3. Dots, ka $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, kur x, y, z, t - naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem x; y; z; t var būt pāra skaitļi?

26.11.4. Dots, ka $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – regulārs n–stūris. Tā virsotnēs atbilstoši dzīvo skudras $S_1, S_2, S_3 \ldots, S_n$. Kādu rītu skudra S_1 sastādīja plānu, kādā secībā viņa apmeklēs visas pārējās skudras, katru vienu reizi; pieņemsim, ka šī secība bija $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3} \ldots, S_{i_{n-1}}$. Sastādījusi plānu, S_1 nekavējoties sāka rāpot virsotnes A_{i_1} virzienā.

Norāpojusi pusceļu, viņa pārdomāja, pagriezās un sāka rāpot virsotnes A_{i_2} virzienā.

Norāpojusi trešdaļu ceļa, viņa pagriezās un sāka rāpot virsotnes A_{i_3}, virzienā.

Norāpojusi ceturtdaļu ceļa, viņa pagriezās un sāka rāpot virsotnes A_{i_4}, virzienā, utt.

Kur atradīsies skudra S_1 pēc tam, kad tā būs pēdējo reizi mainījusi savas domas un norāpojusi $\frac{1}{n}$ attāluma līdz virsotnei $A_{i_{n-1}}$?

26.11.5. Dots, ka a+b+c+d=0 un $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Pierādīt, ka $-1 \le ab+bc+cd+da \le 0$.

12.klase

26.12.1. Cik atrisinājumu reālos skaitļos ir vienādojumam $x^3+x^2-1=0$?

26.12.2. Funkcija f(x) definēta visiem reāliem x un pieņem reālas vērtības. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas divas īpašības:

a) visiem reāliem x pastāv nevienādība $f(x) \le x$;

b) visiem reāliem x un y pastāv nevienādība $f(x+y) \le f(x)+f(y)$.

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

26.12.3. Vai var telpā novietot 5 punktus tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

a) nekādi 4 no tiem neatrodas vienā plaknē,

b) visi attālumi starp tiem ir dažādi,

c) visām 5 posmu slēgtām lauztām līnijām, kuru virsotnes ir šie 5 punkti, garumi savā starpā vienādi?

26.12.4. Katram naturālam skaitlim no l līdz 2^n atrodam lielāko nepāra skaitli, ar kuru tas dalās. Atrodiet šo lielāko nepāra dalītāju summu!

26.12.5. Koordinātu plaknē punktos ar veselām koordinātām atrodas 4 figūriņas. Ar vienu gājienu var izvēlēties trīs figūriņas A, B, C un pārbīdīt figūriņu A par nogriezni, kas vienāds un paralēls ar BC.

Andris norāda uz divām figūriņām. Pierādīt, ka ar šādu gājienu palīdzību norādītās 2 figūriņas var sabīdīt vienā punktā.

Latvijas 27. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

27.9.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

27.9.2. Vai a) skaitli 2, b) skaitli $\frac{1}{8}$ var izsacīt kā četriem dažādiem naturālu skaitļu kvadrātiem apgriezto lielumu summu?

27.9.3. Caur taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru novilktas taisnes paralēli tā malām. Šīs taisnes sadala katru no trijstūra malām trīs nogriežņos. Pierādīt, ka hipotenūzas vidējā nogriežņa garums vienāds ar katešu vidējo nogriežņu garumu summu.

27.9.4. Apskatām pirmos n naturālos skaitļus. No tiem jāizvēlas divus tā, lai to reizinājums būtu vienāds ar visu pārējo skaitļu summu. Vai tas ir iespējams, ja a) n=10, b) n=15 ?

27.9.5. Karnevāla zālē katras divas lampas savienotas ar baltu vai sarkanu vītni (tikai vienu!). Pierādīt, ka zirneklītis var izvēlēties vienu no šīm krāsām tā, ka, rāpojot tikai pa izvēlētās krāsas vītnēm, viņš var nokļūt no jebkuras lampas uz jebkuru citu, pa ceļam apmeklējot augstākais 3 no pārējām lampām.

10.klase

27.10.1. Dots, ka $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$ un $y > 0$. Kādas vērtības var pieņemt reizinājums xy?

27.10.2. Divu pirmskaitļu starpība ir 100. Uzrakstot pirmo galā otrajam, atkal iegūst pirmskaitli. Atrast šos pirmskaitļus un pierādīt, ka citu bez Jūsu atrastajiem nav.

27.10.3. Šaurleņķu trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija. Punkts D atrodas uz riņķa līnijas tā loka BC, kas nesatur A (D nesakrīt ne ar B, ne ar C). Punkts E ir simetrisks punktam D attiecībā pret BC; punkts M ir AE viduspunkts.

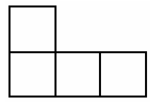
Pierādīt, ka M atrodas uz tās riņķa līnijas, kas iet caur trijstūra ABC malu viduspunktiem.

27.10.4. Kvadrāts sastāvēja no $n \times n$ kvadrātiskām rūtiņām. Tā četras stūra rūtiņas (katru savā stūrī) izgrieza. Atlikušo daļu jāsagriež figūrās, kas visas vienādas ar 1. zīm. attēloto. Vai to var izdarīt, ja

a) $n = 6$,

b) $n = 7$,

c) $n = 8$?



1. zīmējums

27.10.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. To centrus savieno slēgta lauzta līnija, kuras posmi paralēli kvadrāta malām; līnijas virsotnes atrodas tikai rūtiņu centros, un tā iet caur katras rūtiņas centru tieši vienu reizi.

a) Uzzīmēt šādu līniju ar iespējami daudzām virsotnēm,

b) pierādīt, ka tādai līnijai ir ne vairāk kā 60 virsotnes,

c) pierādīt, ka tādai līnijai ir ne vairāk kā 56 virsotnes.

11.klase

27.11.1. Dots, ka $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, kur x, y, z, t – naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem x, y, z, t var būt pāra skaitļi?

27.11.2. Paralelograma ABCD iekšpusē atrodas punkts M. Ir zināms, ka $\angle AMB + \angle CMD = 180°$. Pierādīt, ka $\angle CBM = \angle CDM$.

27.11.3. Izliekta n-stūra $A_1A_2 \ldots A_n$ iekšēju punktu P sauc par īpašu, ja stari $A_1P, A_2P, \ldots, A_nP$ krusto dažādas n-stūra malas to iekšējos punktos.

Pierādīt:

a) izliektā 2000-stūrī nav neviena īpaša punkta,

b) eksistē 9-stūris, kurā nav neviena īpaša punkta.

27.11.4. Funkcijas $f(x)$ argumenti un vērtības ir naturāli skaitļi. Katram naturālam x izpildās vienādība $f(f(x)) + f(x) = 2x$.

Atrast visas šādas funkcijas $f(x)$ un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

27.11.5. Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1} - 2$ komandas (n – naturāls skaitlis, $n > 1$), katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt, ka pēc turnīra beigām var izvēlēties ne vairāk kā n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām.

12.klase

27.12.1. Cik atrisinājumu reālos skaitļos ir vienādojumam

$$x^3 + x^2 - 1 = 0\ ?$$

27.12.2. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$(2a + b) \cdot (2b + a) = 2^c .$$

27.12.3. Trijstūra piramīdas šķautņu garumi ir 17, 18, 19, 20, 21, 23. Vai eksistē lode, kas pieskaras visām tās šķautnēm?

27.12.4. Riņķī ar rādiusu 1 atrodas 2000 punkti. Novilkti visi iespējamie nogriežņi, katrs no kuriem savieno kaut kādus divus no dotajiem 2000 punktiem. Kāds lielākais skaits šo nogriežņu var būt garāki par $\sqrt{3}$?

27.12.5. Naturālu skaitļu virkni sauc par F-virkni, ja tā ir augoša, bezgalīga un katrs tās loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo locekļu summu. Vai eksistē

a) galīgs daudzums,

b) bezgalīgs daudzums

F-virkņu ar īpašību: katrs naturāls skaitlis pieder tieši vienai no tām?

Latvijas 28. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

28.9.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

28.9.2. Pierādīt: katru izliektu četrstūri var sagriezt 5 daļās, no kurām iespējams izveidot divus paralelogramus tā, ka nekādas divas daļas nepārklājas.

28.9.3. Vai eksistē četrstūris ar īpašību: jebkuru tā virsotni var pārvietot uz citu vietu (pārējo 3 virsotņu stāvokli nemainot) tā, ka jauniegūtais četrstūris vienāds ar sākotnējo?

28.9.4. Dots, ka x, y, z - naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem xy-z, xz-y un yz-x dalās ar 3. Pierādiet, ka $x^2+y^2+z^2$ dalās ar 3.

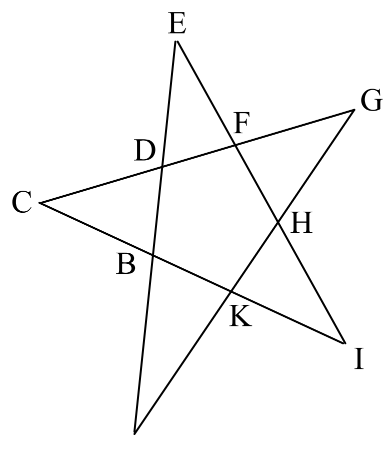
28.9.5. Matemātikas pulciņā piedalās 8 skolēni. Uz mājām tika uzdoti 8 uzdevumi (visiem skolēniem vieni un tie paši.) Ir zināms: katru uzdevumu atrisināja tieši 5 skolēni. Pierādīt, ka var izvēlēties 2 skolēnus tā, ka katru uzdevumu atrisinājis vismaz viens no viņiem abiem.

10. klase

28.10.1 Dots, ka $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$ un $y > 0$. Kādas vērtības var pieņemt reizinājums xy?

28.10.2. Piecstaru zvaigzne izveidota no 5 taisnes nogriežņiem, kas krustojas (skat. 2. zīm.). Pierādīt, ka

$AB \cdot CD \cdot EF \cdot GH \cdot IK = BC \cdot DE \cdot FG \cdot HI \cdot KA.$



2. zīmējums

28.10.3. Kāds ir mazākais pirmskaitlis p, kuram nevar atrast tādus nenegatīvus veselus skaitļus x un y, ka $p = |2^x - 3^y|$?

28.10.4. Doti n kvadrāti ar izmēriem 2×2 un n taisnstūri ar izmēriem 1×4. Izmantojot tos visus, jāsaliek divas vienādas plaknes figūras tā, ka gabali nepārklājas. Vai to var izdarīt, ja

a) n=2000,

b) n=2001?

28.10.5. Volejbola svētkos piedalās 24 komandas. Pirmo triju dienu laikā tika izspēlētas 18 spēles, pie tam katra komanda piedalījās vismaz vienā no tām.

Pierādīt, ka starp izspēlētajām spēlēm var izvēlēties tādas sešas, kurās kopā piedalījušās 12 dažādas komandas.

11. klase

28.11.1. Apzīmēsim $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ir zināms, ka $f(1) < 0; f(2) > 2; f(3) < 4.$ Vai skaitlis *a* ir pozitīvs, negatīvs vai 0?

28.11.2. Paralelograma ABCD iekšpusē atrodas punkts M. Ir zināms, ka $\angle AMB + \angle CMD = 180°$. Pierādīt, ka $\angle CBM = \angle CDM$.

28.11.3. Skaitļu virknes elementi ir naturāli skaitļi. Pirmo elementu izvēlas patvaļīgi, bet katrs nākošais elements ir vienāds ar iepriekšējā elementa naturālo dalītāju skaitu. (Piemēram, ja virknes pirmais elements ir 14, tad virkne ir 14; 4; 3; 2; 2; 2; …).

Kāds var būt virknes pirmais elements, ja neviens tās elements nav naturāla skaitļa kvadrāts?

28.11.4. Dots, ka nenegatīvu skaitļu $x_1, x_2, \dots, x_n$ summa ir 1. Atrast izteiksmes $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + \dots + x_{n-1}^2x_n + x_n^2x_1$ lielāko iespējamo vērtību, ja a) $n = 2$, b) $n = 3$.

28.11.5. Pa apli novietoti n trauki, katrā no tiem ir k monētas (n un k - naturāli skaitļi). Izņemam no viena trauka visas monētas un pa vienai liekam tās pēc kārtas traukos, kas ir nākošie pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Kad visas monētas ieliktas, atkārtojam šo procesu, izņemot visas monētas no trauka, kurā ielikām pēdējo monētu. Līdzīgi turpinām uz priekšu.

Pierādīt, ka agri vai vēlu visas monētas vienlaicīgi atradīsies vienā traukā.

12. klase

28.12.1. Dots, ka $0 \le x \le \pi$. Pierādīt, ka $\cos(\sin x) \ge \cos x$.

28.12.2. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(2a + b)(2b + a) = 2^c$.

28.12.3. Aplūkojam skaitļus $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\cdots$; $\frac{1}{2000}$; $\frac{1}{2001}$ un aprēķinām to reizinājumus pa 2, pa 4; pa 6; …; pa 1998; pa 2000. Atrodiet visu šo reizinājumu summu.

28.12.4. Izliektam daudzskaldnim ir 100 šķautnes. Kādu lielāko šķautņu skaitu var krustot viena plakne? (Plakne krusto nogriezni, ja nogriežņa galapunkti atrodas dažādās pusēs plaknei.)

28.12.5. Rindā uzrakstīti 10 veseli skaitļi. Zem katra no tiem uzraksta jaunu skaitli saskaņā ar šādu likumu: zem skaitļa x raksta to sākotnējās rindas skaitļu skaitu, kas uzrakstīti pa labi no x un ir lielāki par x. Tādējādi iegūst otru skaitļu rindu, kas arī sastāv no 10 veseliem skaitļiem. Piemēram,

3	4	8	4	3	6	5	2	1	1
5	3	0	2	2	0	0	0	0	0

Līdzīgā veidā no otrās rindas iegūst trešo, no trešās - ceturto, utt.

a) pierādīt, ka agri vai vēlu iegūsim rindu, kas sastāv tikai no nullēm,

b) sauksim rindu par labu, ja tajā vismaz 1 skaitlis nav 0. Kāds ir lielākais iespējamais labu rindu skaits?

Latvijas 29. atklātā matemātikas olimpiāde

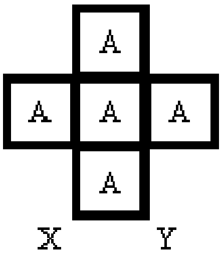
9. klase

29.9.1. Dots, ka $q_1q_2 < 0$. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ un $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ ir divas dažādas saknes.

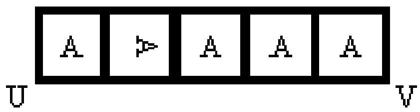
29.9.2. Pierādīt, ka katru trijstūri var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros.

29.9.3. Dots, ka x, y, z - naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem xy-z, xz-y un yz-x dalās ar 3. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + z^2$ dalās ar 3.

29.9.4. Pieciem vienādiem kubiem katram uz vienas skaldnes uzrakstīts burts A. Kubi sākotnēji novietoti uz līdzena galda tā, kā parādīts 3. zīm. (skats no augšas). Kubus var pārvietot, vienīgi pārveļot pāri kādai no šķautnēm, ar kurām tie pieskaras galda virsmai. Pēc vairākām pārvelšanām kubi ieņem tādu stāvokli, kāds parādīts 4. zīm. (nogriežņi XY un UV ir paralēli savā starpā). Kurā vietā šajā rindā atrodas tas kubs, kas sākumā atradās centrā?



3. zīmējums



4. zīmējums

29.9.5. Ap apaļu galdu sēž n rūķīši, kam pēc kārtas piešķirti numuri 1; 2; …; n. Sākumā pirmajam rūķītim ir par vienu dālderi vairāk nekā otrajam, otrajam - par vienu dālderi vairāk nekā trešajam, …, (n-1)-am - par vienu dālderi vairāk nekā n-tajam; katram ir vismaz viens dālderis.

Pirmais rūķītis iedod 1 dālderi otrajam. Pēc tam otrais iedod 2 dālderus trešajam. Pēc tam trešais iedod 3 dālderus ceturtajam utt. (**Katrā** nākošajā reizē tiek dots par vienu dālderi vairāk nekā iepriekšējā.) Tā turpina, kamēr iespējams (varbūt "apriņķojot" galdu vairāk nekā vienu reizi). Kad process beidzās, izrādījās, ka vienam no rūķīšiem bija tieši 6 reizes vairāk naudas nekā vienam no viņa kaimiņiem. Cik bija rūķīšu un cik naudas sākumā viņiem bija? (Dālderi sīkāk nedalās.)

10. klase

29.10.1. Vai noteikti $x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y}$, ja

a) $x > y > 0$,

b) $x > y > 1$?

29.10.2. Volejbola svētkos piedalās 36 komandas. Dažu pirmo dienu laikā tika izspēlētas 24 spēles, pie tam katra komanda piedalījās vismaz vienā no tām.
Pierādīt, ka starp izspēlētajām spēlēm var izvēlēties 12 tādas, kurās kopā piedalījušās 24 dažādas komandas.

29.10.3. Katrs naturāls skaitlis nokrāsots vienā krāsā. Ir zināms: ja divu naturālu skaitļu starpība ir pirmskaitlis, tad tie ir nokrāsoti dažādās krāsās. Kāds ir mazākais iespējamais krāsu skaits?

29.10.4. Trijstūrī ABC dots, ka $\angle ABC = 60^\circ$. Uz malas AB ņemts punkts M un uz malas BC ņemts punkts N tā, ka AM=MN=NC (ne M, ne N nav ΔABC virsotne.) Pierādīt, ka AN un CM krustojas ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrā.

29.10.5. Ja uz tāfeles uzrakstīti polinomi f un g, tad tur drīkst uzrakstīt arī polinomus $f + g$, $f - g$ un $f \cdot g$. Vai var iegūt uz tāfeles polinomu x, ja sākotnēji uzrakstīti

a) $x^2 + x$ un $x^2 + 2$,

b) $2x^2 + x$ un $2x$,

c) $x^2 + x$ un $x^2 - 2$?

11. klase

29.11.1. Kāds mazākais daudzums no skaitļiem a, b, c, d var būt 0, ja zināms, ka $a(bc + cd + bd) = b(ac + ad - cd) = c(ad + ab - bd) = d(ab + ac - bc) = 0$?

29.11.2. Dots, ka nenegatīvu skaitļi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ summa ir 1. Atrast izteiksmes $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + \ldots + x_{n-1}^2x_n + x_n^2x_1$ lielāko iespējamo vērtību, ja a) n=2, b) n=3.

29.11.3. Zināms, ka naturāls skaitlis n dalās ar pirmskaitli p un $p > \sqrt{n}$. Pierādīt, ka ne $n - 1$, ne $n^3 - 1$ nav divu tādu naturālu skaitļu reizinājums, kuru starpība ir 2.

29.11.4. Dots, ka ABCDEF ir riņķī ievilkts regulārs sešstūris, bet P – patvaļīgs šī riņķa iekšējs punkts. Novilkti nogriežņi PA, PB, …, PF. Pierādīt, ka riņķa daļu PAB, PCD un PEF laukumu summa vienāda ar riņķa daļu PBC, PDE un PFA laukumu summu (katru daļu norobežo viens loks un divi nogriežņi).

29.11.5. Pasaku mežā dzīvojošie rūķīši nodibinājuši 2002 zinātniskas biedrības. Katrā biedrībā ir tieši 40 rūķīši. Katrām divām biedrībām var atrast tieši vienu (ne vairāk un ne mazāk) rūķīti, kas ir abu šo biedrību biedrs. Pierādīt, ka ir tāds rūķītis, kurš ir visu 2002 biedrību biedrs.

12. klase

29.12.1. Pierādīt, ka $\left|\sin^3 x + \cos^4 x\right| \leq 1$ visiem reāliem x.

29.12.2. Aplūkojam skaitļus $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}$ un aprēķinām to reizinājumus pa 2, pa 4, pa 6, …, pa 98, pa 100. Atrodiet visu šo reizinājumu summu.

29.12.3. Uz trijstūra ABC malām AB un BC kā uz pamatiem ārpus ΔABC konstruēti vienādsānu trijstūri AMB un BNC (AM=MB un BN=NC). Zināms, ka $\angle AMB + \angle BNC = 180^\circ$ un K ir malas AC viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle MKN = 90^\circ$.

29.12.4. Skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ veido sekojoši: $a_1 = 0; a_2 = 1;$ pie $n > 2$ skaitli a_n iegūst, pierakstot skaitlim a_{n-1} pa labi galā skaitli a_{n-2}. (Piemēram, $a_3 = 10$, $a_4 = 101, a_5 = 10110$ utt.) Kādiem n skaitlis a_n dalās ar 11?

29.12.5. Plaknē atzīmēti n punkti, $n \geq 2$. Lielākais attālums starp diviem no tiem ir M, mazākais attālums starp diviem no tiem ir m. Pierādīt, ka $\frac{M}{m} > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n} - 1\right)$.

Latvijas 30. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

30.9.1. Dots, ka $q_1q_2q_3 < 0$. Pierādiet, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ un $x^2 + p_3x + q_3 = 0$ ir divas dažādas saknes.

30.9.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var tajās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai skaitļu summas visās rindās un kolonnās būtu dažādas un visas dalītos ar a) 4, b) 8?

30.9.3. Noskaidrot, kādiem dažādiem pirmskaitļiem $p_1, p_2, ..., p_n$ pastāv īpašība: $p_1p_2p_3...p_n$ dalās ar $(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_n - 1)$.

30.9.4. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa centrs ir I. Dots, ka CA+AI=CB. Pierādīt, ka $\angle BAC = 2\angle CBA$.

30.9.5. Uz galda atrodas k konfektes. Andris un Juris pamīšus izdara gājienus: Andris – pirmo, trešo, piekto, ..., Juris – otro, ceturto, sesto, ... Ar n-to gājienu (n=1, 2, 3, ...) jāapēd vismaz viena, bet ne vairāk par n konfektēm. Tas, kurš apēd pēdējo konfekti, uzvar.

Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot, ja **a)** k=8, **b)** k=64?

10. klase

30.10.1. Vai noteikti $x + \frac{4}{x} > y + \frac{4}{y}$, ja

a) $x > y > 0$, b) $x > y > 2$?

30.10.2. Uz trijstūra ABC malām AC un AB ņemti attiecīgi punkti M un N. Taisne t dala uz pusēm trijstūra ārējos leņķus pie virsotnes A. Riņķa līnijas, kas apvilktas ap ΔABM un ΔACN, krusto taisni t attiecīgi punktos K un L. Pierādiet, ka trijstūri KBM un LCN ir vienādsānu un līdzīgi savā starpā.

30.10.3. Dots, ka n – vesels pozitīvs skaitlis un skaitļi 2n+1 un 3n+1 ir veselu skaitļu kvadrāti.

a) atrodiet kaut vienu tādu n,

b) vai 5n+3 var būt pirmskaitlis?

30.10.4. Rindā ir 12 krēslu; uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēniem vienu reizi atļauts piecelties un apsēsties citā kārtībā, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu iepriekšējā vietā, vai tieši blakus iepriekšējai vietai.

Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārkārtošanās?

30.10.5. Ap apaļu galdu kaut kādā kārtībā apsēžas m votivapas un n šillišallas (gan vieni, gan otri ir rūķīši). Kādām m un n vērtībām noteikti var atrast rūķīti, kam gan pa labi, gan pa kreisi blakus sēž šillišalla? (Pieņemam, ka $m + n \geq 3$).

11. klase

30.11.1. Dots, ka x, y, z – reāli skaitļi un

$$|x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z| = 2003.$$

Kāda ir lielākā iespējamā z vērtība?

30.11.2. No punkta A riņķa līnijai w novilktas pieskares AX un AY (X un Y – pieskāršanās punkti). Punktam Y diametrāli pretējais punkts ir Z. Punkts B pieder nogrieznim YZ un $XB \perp YZ$.

Pierādiet, ka taisne AZ dala nogriezni XB uz pusēm.

30.11.3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$?

30.11.4. Kādā klubā ir 8 biedri. Vai var nodibināt vairākas komisijas tā, lai vienlaicīgi izpildītos divas prasības:

a) katrā komisijā ir tieši 4 biedri,

b) katri 3 no astoņiem kluba biedriem ir kopā tieši vienā komisijā?

30.11.5. Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1}-2$ komandas (n – naturāls skaitlis), katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt: pēc turnīra beigām var izvēlēties n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām n.

12. klase

30.12.1. Pierādīt: ΔABC visu leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi tad un tikai tad, ja ΔABC līdzīgs tādam trijstūrim, kura visu malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru.

30.12.2. Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka skaitlim n^2 ir tikpat daudz naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, cik naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3?

30.12.3. Uz trijstūra ABC malām AB un BC kā uz pamatiem ārpus ΔABC konstruēti vienādsānu trijstūri AMB un BNC (AM=MB un BN=NC). Zināms, ka $\angle AMB + \angle BNC = 180^o$ un K ir malas AC viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle MKN = 90^o$.

30.12.4. Atrisināt vienādojumu sistēmu ar 5 mainīgajiem $x + y = z^2$, $y + z = u^2$, $z + u = v^2$, $u + v = x^2$, $v + x = y^2$ pozitīvos skaitļos.

30.12.5. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Spēlētāji A un B pamīšus raksta tukšajās rūtiņās skaitļus (sāk A): A – vieninieku, B – nulli. A mērķis ir panākt, lai pēc tam, kad visas rūtiņas aizpildītas, varētu atrast 3×3 rūtiņu kvadrātu ar iespējami lielu tajā ierakstīto skaitļu summu S; B cenšas viņam traucēt.

Kādu lielāko summu S var sasniegt spēlētājs A?

Latvijas 31. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

31.9.1. Dots, ka vienādojumam $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)=0$ eksistē atrisinājums. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$ un $x^2+p_2x+q_2=0$ arī eksistē atrisinājums.

31.9.2. Dots, ka a un b – naturāli skaitļi un $a+b$ ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordināti dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, attālums starp kuriem ir vai nu a, vai b.

31.9.3. Dots, ka ABCD – kvadrāts, bet w – riņķa līnija, kas iet caur A un B; punkti C un D atrodas w iekšpusē. Stari BD un BC krusto w attiecīgi punktos E un F. Apzīmējam CF viduspunktu ar M. Pierādīt, ka $\mathrm{EM} \perp \mathrm{BC}$.

31.9.4. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n+1$ rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.

Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

31.9.5. Kvadrāts sastāv no $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta viens no skaitļiem $-1; 0; 1$ tā, lai n rindās un n kolonnās ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas.

Vai to var izdarīt, ja **a)** n=4; **b)** n=5?

10. klase

31.10.1. Atrast mazāko pozitīvo skaitli a, kam piemīt īpašība:

ja $\mathrm{x} > \mathrm{y} > \mathrm{a}$, tad $\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} > \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{y}$.

31.10.2. Pusriņķa līnijas diametrs ir AB. Uz pusriņķa līnijas ņemti divi punkti M un N, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Stari AM un BN krustojas punktā O.

Pierādīt: ap ΔMNO apvilktās riņķa līnijas garums atkarīgs tikai no hordas MN garuma, nevis no tās novietojuma.

31.10.3. Dots, ka n – naturāls skaitlis.

a) pierādīt, ka $\sqrt{n^2+11n+30}$ nav naturāls skaitlis,

b) atrast šī skaitļa pirmo ciparu aiz komata atkarībā no n.

31.10.4. Tenisa turnīrā piedalījās profesionāļi un amatieri; katrs ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Profesionāļu bija par 9 vairāk nekā amatieru, un viņi visi kopā izcīnīja 9 reizes vairāk uzvaru nekā visi amatieri kopā. Kāds ir lielākais iespējamais uzvaru skaits, ko šādā turnīrā varēja izcīnīt kāds amatieris? Tenisā neizšķirtu nav.

31.10.5. Vai, izmantojot tikai 3 dažādus ciparus, var uzrakstīt 16 trīsciparu skaitļus, kas visi dod dažādus atlikumus, dalot ar 16?

11. **klase**

31.11.1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $2004^n - 1$ dalās ar $1500^n - 1$?

31.11.2. Kvadrāts ABCD sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā novelk vienu diagonāli un vienu no iegūtajiem trijstūriem nokrāso baltu, otru – melnu. Nekādiem diviem vienādi nokrāsotiem trijstūriem nedrīkst būt kopīga mala. Cik dažādi kvadrāta krāsojumi iespējami?

31.11.3. Vienādsānu trapecē ABCD zināms, ka AB=BC=CD un $BC < AD$; diagonāļu krustpunkts ir O. Pierādīt, ka nogriežņu AO un BC viduspunkti, kā arī virsotnes C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

31.11.4. Dots, ka *a* un *b* – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $a^a \cdot b^b \geq a^b b^a$.

31.11.5. Komisijā darbojas 25 deputāti, daži no tiem draudzējas (ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A). Katram deputātam ir tieši n draugi. Ja kādi divi deputāti (apzīmēsim tos ar X un Y) nedraudzējas savā starpā, tad noteikti eksistē tāds deputāts, kas draudzējas gan ar X, gan ar Y.
Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

12. klase

31.12.1. Dots, ka n – naturāls skaitlis, $n > 1$. Vai izteiksmi $\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1\right)^2 - x^n$ noteikti var izsacīt kā divu polinomu reizinājumu tā, lai neviens no šiem polinomiem nebūtu konstante un visi abu polinomu koeficienti būtu veseli skaitļi?

31.12.2. Kvadrāti ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ atrodas paralēlās plaknēs; abiem virsotnes uzrādītas pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Pierādīt, ka $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$.

31.12.3. Funkcijai f(n) gan argumenti, gan vērtības ir naturāli skaitļi, un katriem diviem naturāliem skaitļiem x un y pastāv vienādība $x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = (x+y) \cdot f(x^2 + y^2)$.

Atrast visas šādas funkcijas *f* un pierādīt, ka citu bez jūsu atrastajām nav.

31.12.4. Ar n apzīmējam patvaļīgu nepāra naturālu skaitli, kas lielāks par 1. Pierādīt: abi skaitļi n un n +2 vienlaicīgi ir pirmskaitļi tad un tikai tad, ja (n-1)! nedalās ne ar n, ne ar n+2.

31.12.5. Konkursā uz direktora vietu pieteicās n kandidāti. Tos vērtēja 8 eksperti. Katrs eksperts katru kandidātu novērtēja ar „derīgs" vai „nederīgs". Izrādījās, ka katriem diviem kandidātiem A un B izpildās sekojošais:

„A derīgs, B derīgs" nolēmuši 2 eksperti,

„A derīgs, B nederīgs" nolēmuši 2 eksperti,

„A nederīgs, B derīgs" nolēmuši 2 eksperti,

„A nederīgs, B nederīgs" nolēmuši 2 eksperti.

Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

Latvijas 32. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

32.9.1. Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 225 un kura decimālajā pierakstā neizmanto nevienu no cipariem 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

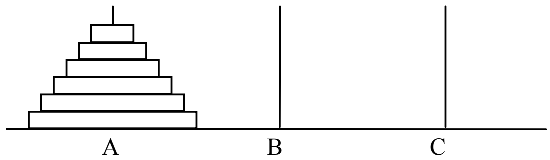
32.9.2. Trijstūra ABC ievilktā riņķa centrs ir I. Dots, ka CA+AI=CB. Pierādīt, ka $\angle BAC = 2 \cdot \angle CBA$.

32.9.3. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n$+1 rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.

Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

32.9.4. Dots, ka $x^2 + yz \le 2$, $y^2 + xz \le 2$ un $z^2 + xy \le 2$. Atrast izteiksmes $x+y+z$ lielāko un mazāko iespējamo vērtību.

32.9.5. Doti 3 stienīši. Uz viena no tiem sākotnēji uzmaukti n dažādu izmēru diski ar caurumiem vidū tā, ka to rādiusi samazinās no lejas uz augšu; abi pārējie stienīši sākotnēji ir tukši (skat. 5. zīm., kur n=6).



5. zīmējums

Ar vienu gājienu var pārlikt augšējo disku no jebkura stienīša uz jebkuru citu, ja tikai pārliekamais disks D nav lielāks par to disku, kas atrodas pašā apakšā uz stienīša, uz kuru pārliek D.

Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi diski atrastos uz stienīša C tādā pašā kārtībā, kādā tie sākotnēji atradās uz stienīša A?

10. klase

32.10.1. Vai noteikti $x + \dfrac{9}{x} > y + \dfrac{9}{y}$, ja

a) x>y>0, **b)** x>y>3?

32.10.2. Pusriņķa līnijas diametrs ir AB. Uz pusriņķa līnijas ņemti divi punkti M un N, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Stari AM un BN krustojas punktā O.

Pierādīt: ap ΔMNO apvilktās riņķa līnijas garums atkarīgs tikai no hordas MN garuma, nevis no tās novietojuma.

32.10.3. Kādiem naturāliem skaitļiem n abi skaitļi $2^n - 1$ un $2^n + 1$ ir pirmskaitļi?

32.10.4. Funkcijas f(t) definīcijas apgabals un vērtību apgabals ir kopa $\{1; 2; ...; n\}$, pie tam visas vērtības ir dažādas. Vai iespējams, ka visi skaitļi $|f(x) - x|$, x=1; 2; ...; n, ir dažādi, ja **a)** n=15, **b)** n=16 ?

32.10.5. Katrs naturāls skaitlis no 1 līdz 10 ieskaitot uzrakstīts uz vienas baltas, vienas melnas, vienas sarkanas un vienas zaļas kartītes; uz katras kartītes uzrakstīts tikai viens skaitlis. Šīs kartītes kaut kā izvietotas 4 rindās un 10 kolonnās. Ar vienu gājienu var mainīt vietām divas kartītes, uz kurām uzrakstīti vienādi skaitļi. Pierādiet: var panākt, ka katrā kolonnā pārstāvētas visas 4 krāsas.

11. klase

32.11.1. Vai eksistē tāds polinoms P(x), ka visiem x pastāv vienādība
$P(x) = \sin x + 2005$?

32.11.2. Vienādsānu trapecē ABCD zināms, ka AB=BC=CD un BC<AD; diagonāļu krustpunkts ir O. Pierādīt, ka nogriežņu AO un BC viduspunkti, kā arī virsotnes C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

32.11.3. Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1} - 2$ komandas (*n* – naturāls skaitlis), katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt: pēc turnīra beigām var izvēlēties n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām n.

32.11.4. Dots, ka $a < b \le c < d$ ir pozitīvi veseli skaitļi, $ad = bc$ un $\sqrt{d} - \sqrt{a} \le 1$. Pierādīt, ka a ir vesela skaitļa kvadrāts.

32.11.5. Kvadrāts sastāv no 2005×2005 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā; stūra rūtiņas ir melnas. Viens domino kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas. Sākotnēji uz kvadrāta novietoti $\frac{2005^2 - 1}{2}$ domino kauliņi, kas pārklāj visas rūtiņas, izņemot vienu melnu rūtiņu pie kvadrāta malas.

<u>Pierādīt:</u> lai uz kuru melnu rūtiņu R, kas atrodas 1., 3., 5., ..., 2003., 2005. rindiņā, mēs norādītu, domino kauliņus var tā pārbīdīt pa kvadrātu, nepaceļot no tā plaknes un neizbīdot ārpusē, ka rūtiņa R nebūs pārklāta.

12.klase

32.12.1. Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka skaitlim n^2 ir tikpat daudz naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, cik naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3?

32.12.2. Par parabolu sauc līniju, kas vienāda ar funkcijas $y = x^2$ grafiku. Vai var plaknē novietot 2005 parabolas tā, lai katrs plaknes punkts atrastos vismaz starp vienas parabolas zariem?

32.12.3. Kvadrāti ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ atrodas paralēlās plaknēs; abiem virsotnes uzrādītas pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Pierādīt, ka $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$.

32.12.4. Pieņemsim, ka $x_1, x_2, ..., x_n$ ir nenegatīvi reāli skaitļi, $n \geq 2$. Noskaidrot, kurām n vērtībām nevienādība

$$\frac{(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)...(x_{n-1}^2 + x_n^2)(x_n^2 + x_1^2)}{2^n} \geq \left(\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1}{n}\right)^n$$

ir identiski patiesa.

32.12.5. Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli, izdarot gājienus pēc kārtas. Sākumā doti divi stieņi: viens ar garumu n, otrs ar garumu n+1 (n – pozitīvs vesels skaitlis). Ar vienu gājienu var vai nu salauzt vienu stieni divos īsākos, kuru garumi ir pozitīvi veseli skaitļi, vai arī izslēgt no turpmākās spēles gaitas k stieņus, katram no kuriem garums ir k (k – jebkurš vesels pozitīvs skaitlis). Spēlētājs, kurš izdara pēdējo gājienu, uzvar.

Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot?

IETEIKUMI

Latvijas 26. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

26.9.1. Risiniet, atņemot no pirmā vienādojuma otro un iznesot pirms iekavām x-y.

26.9.2.

a) Pierādiet ievietojot.

b) Ņemiet vērā: ja nepāra skaitlis nav pirmskaitlis, tad tā reizinātāji ir nepāra skaitļi.

26.9.3. Pagariniet malu CM līdz krustpunktam ar AB.

26.9.4. Izdomājiet, kādās figūrās tiek sadalīts n-stūris, un izmantojiet iekšējo leņķu summu.

26.9.5.

a) Atbrīvojieties no kaudzītēm, kurās ir nepāra konfekšu skaits (pierādiet, ka to vienmēr varēs izdarīt), tad apvienojiet konfektes pāros.

b) Pirms pēdējās apvienošanas bija 2 kaudzītes ar 50 konfektēm katrā. Apskatiet sākotnējo sadalījumu – 5 kaudzītes ar 20 konfektēm katrā. Atrodiet īpašību, kas nemainās kaudzīšu apvienošanas rezultātā, un pierādiet, ka nevarēs iegūt 2 kaudzītes ar 50 konfektēm katrā.

10. klase

26.10.1. No uzdevuma nosacījumiem izsaka y^2. Novērtē izteiksmi x^2y^2, atdalot binoma kvadrātu.

26.10.2. Vienādojuma kreisajā pusē esošos saskaitāmos apzīmē ar a^3 un b^3. Apskata, ar ko vienāda summa a+b.

26.10.3. Divreiz pielieto teorēmu par sekantes reizinājumu ar tās ārējo daļu. Apskata iegūto vienādību dalījumu.

26.10.4. Apskatām mazāko no dotajiem skaitļiem. Spriežam, vai tas var kļūt mazāks un kāda ir minimālā vērtība, ko tas var sasniegt.

26.10.5. Var rīkoties šādi: sadalīt skaitļus 2 grupās, noskaidrot katras grupas relatīvo kārtību. Tad ar vēl vienu jautājumu būs iespējams uzzināt piecus visvairāk pa kreisi (pa labi) esošos skaitļus.

11. klase

26.11.1. Pamato, kā prasīto var noskaidrot ar 8 svēršanām.

26.11.2. Pārdomā, kādā statusā var atrasties karavīrs pēc paaugstināšanas ceremonijas un cik no iespējamajiem variantiem atbilst uzdevumā prasītajam.

26.11.3. Atsevišķi apskata katru no gadījumiem, kad pāra skaitļu skaits ir 0, 1, 2, 3 vai 4.

26.11.4. Pamato, ka skudra atradīsies daudzstūra centrā. Izmanto matemātiskās indukcijas metodi (<u>ne</u> pēc parametra n).

26.11.5. Uzdevumu sadala divās daļās (ierobežojums no augšas ar nulli un ierobežojums no apakšas ar –1). Lai pamatotu ierobežotību ar nulli, apskatāmo izteiksmi sadala reizinātājos un veic algebriskus pārveidojumus.

12. klase

26.12.1. Sadala iespējamās x vērtības vairākos intervālos un apskata iespējamo sakņu skaitu katrā no tiem.

26.12.2. Vispirms apskata gadījumus, kad $x=y=0$ un $x=-y$.

26.12.3. Meklējamos punktus izvēlas kā īpašā veidā izvietotu ložu centrus.

26.12.4. Apskata divas skaitļu kopas – viena, kas veidota no skaitļiem, kad $n=k$, bet otra, kad $n=k+1$. Pēta, kā viena kopa var tikt iegūta no otras.

26.12.5. Vispirms pierāda, ka 3 figūriņas, kas atrodas uz vienas taisnes, kas paralēla kādai no koordinātu asīm, iespējams pārbīdīt tā, lai divas, brīvi izvēlētas no tām, atrastos vienā punktā.

Latvijas 27. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase.

27.9.1. Risiniet, atņemot no pirmā vienādojuma otro un iznesot pirms iekavām x-y.

27.9.2.

a) Apskatiet lielāko iespējamo 4 apgriezto skaitļu summu.

b) Prasītais ir iespējams.

27.9.3. Apskatiet paralelogramu BXOY, kur B – hipotenūzas viduspunkts, O – iecentrs, X un Y – attiecīgie katetes un hipotenūzas krustpunkti ar novilktajām taisnēm. Papildiniet zīmējumu ar perpendikulu, kas vilkts no riņķa līnijas centra pret hipotenūzu.

27.9.4.

a) Apzīmējiet meklētos skaitļus ar x un y un, ņemot vērā, ka visu skaitļu summa mums ir zināma, pēc uzdevuma nosacījumiem sastādiet vienādojumu. Sastādīto vienādojumu sadaliet reizinātājos.

b) Līdzīgi kā a) gadījumā sastādiet vienādojumu un veiciet pilnu variantu pārlasi.

27.9.5. Izvēlieties lampu, no kuras iziet visvairāk vienas krāsas vītņu. Apskatiet iespējamos gadījumus.

10. klase

27.10.1. No uzdevuma nosacījumiem izsaka y^2. Novērtē izteiksmi x^2y^2, atdalot binoma kvadrātu.

27.10.2. Apskata mazākā pirmskaitļa dalāmību ar 3.

27.10.3. Ņem vērā, ka M atradīsies uz apraksītās riņķa līnijas tikai tad, ja četrstūrim, ko veido malu viduspunkti un M, varēs apvilkt riņķa līniju. Izmanto trijstūra viduslīnijas īpašības.

27.10.4.

a) Parāda piemēru, kā prasītais ir iespējams.

b) Apskata rūtiņu skaitu „kvadrātā” un figūrās, kurās „kvadrātu” sadalīsim.

c) Dotajā „kvadrātā” katru otro rindu iekrāso, apskata iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaitu atšķirības.

27.10.5.

a) parāda piemēru ar 56 virsotnēm,

b) apskata stūra rūtiņu un tai blakus esošās rūtiņas,

c) pamato, ka katrā kvadrāta ceturtdaļā ir vismaz divas rūtiņas, kurās neatrodas lauztās līnijas virsotnes.

11. klase

27.11.1. Apskata un pamato visus iespējamos gadījumus.

27.11.2. Pārbīda paralelogramu par vektoru $\overrightarrow{BC}$, izmanto četrstūrim apvilktas riņķa līnijas īpašības.

27.11.3.

a) Apskata malu un virsotņu iespējamos daudzumus stara abās pusēs.

b) No 3 virsotnēm novelk 3 starus tā, lai katrā stara pusē būtu 4 malas.

27.11.4. Pamato, ka funkcija $f(x) = x$ ir vienīgā, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

27.11.5. Pamato, ka starp katrām 2k komandām var atrast tādu, kas uzvarējusi vismaz k spēles, $k \geq 2$. Izmanto šo faktu atkārtoti.

12. klase

27.12.1. Sadala iespējamās x vērtības vairākos intervālos un apskata iespējamo sakņu skaitu katrā no tiem.

27.12.2. Skaitļus a un b izsaka kā divnieku pakāpju reizinājumus ar nepāra skaitļiem.

27.12.3. Izmantojot pieskaru īpašības, pamato, ka šāda lode neeksistē.

27.12.4. Pamato, ka riņķī ar rādiusu 1 nevar būt trijstūris, kura visas malas garākas par $\sqrt{3}$. Apskata, kāds ir lielākais iespējamais tādu nogriežņu skaits, kas neveido trijstūrus.

27.12.5.

a) Apskata skaitļus 3n+2; 3n+3; ... 6n +3 un pēta, cik no šiem skaitļiem var vienlaicīgi piederēt vienai virknei.

b) Izmanto Fibonači skaitļu īpašību, ka katru naturālu skaitli var vienā vienīgā veidā izteikt kā Fibonači skaitļu summu, no kuriem nekādi divi skaitļi nav Fibonači virknes blakus locekļi.

Latvijas 28. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase.

28.9.1. Risiniet, atņemot no pirmā vienādojuma otro un iznesot pirms iekavām x-y.

28.9.2. Savienojiet četrstūra malu viduspunktus.

28.9.3. Padomājiet par regulāru piecstūri.

28.9.4. Izsakiet $x^2+y^2+z^2$ kā tādu saskaitāmo summu, lai katrs no tiem dalītos ar 3.

28.9.5. Risiniet uzdevumu, pieņemot pretējo un apskatot, cik skolēni neatrisināja katru no uzdevumiem.

10. klase

28.10.1. No uzdevuma nosacījumiem izsaka y^2. Novērtē izteiksmi x^2y^2, atdalot binoma kvadrātu.

28.10.2. Pierādījumā izmanto sinusu teorēmu.

28.10.3. Prasītais skaitlis ir 41. Lai pierādītu prasīto, pēta skaitļu 2^n un 3^n dalīšanu ar atlikumu ar 8.

28.10.4.

a) no katra veida figūrām izveido taisnstūri ar izmēriem 80×100.

b) izveido koordinātu tīklu, veic iekrāsošanu un pamato, ka prasītais nav iespējams.

28.10.5. Apskata lielāko iespējamo izspēlēto spēļu skaitu n, kurās piedalījušās 2n dažādas komandas, un sastāda nevienādību, kas pamato prasīto.

11. klase

28.11.1. Izmantojot uzdevumā dotās nevienādības un f(x) definīciju, sastāda nevienādību sistēmu.

28.11.2. Pārbīda paralelogramu par vektoru $\overrightarrow{BC}$, izmanto četrstūrim apvilktas riņķa līnijas īpašības.

28.11.3. Apskata, kad un kā virknē var rasties skaitlis 2. Pēta, kādi skaitļi var atrasties virknē pirms skaitļa 2.

28.11.4.

a) apskatāmo summu pārveido reizinājumā. Izmanto faktu, ka reizinājuma lielākā vērtība ir tad, ja reizinātāji ir vienādi.

b) apskatāmo summu pārveido reizinājumā. Izmanto faktu, ka reizinājuma lielākā vērtība ir tad, ja reizinātāji ir vienādi.

28.11.5. Apskata situāciju pēc pabeigta etapa; izmanto faktu, ka dažādu situāciju skaits pēc pabeigta etapa ir galīgs.

12. klase

28.12.1. Izmanto faktu, ka cosx ir dilstoša funkcija apskatāmajā intervālā

28.12.2. Skaitļus a un b izsaka kā divnieku pakāpju reizinājumu ar nepāra skaitļiem.

28.12.3. Apskata tādu binomu reizinājumu, kur katram dotajam daļskaitlim pieskaitīts 1.

28.12.4. Pēta, cik skaldņu var būt šim daudzskaldnim.

28.12.5.

a) pierāda, pakāpeniski apskatot locekļus no rindas beigām.

b) pamato, ka labu rindu nav vairāk par 10, un atrod piemēru, kur ir 10 labas rindas.

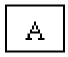
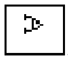
Latvijas 29. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

29.9.1. Ko var secināt par q_1 un q_2 no $q_1 q_2 < 0$? Un kādā gadījumā vienādojumam eksistē divas dažādas saknes?

29.9.2. Var izmantot faktu, ka taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas viduspunkts ir vienādos attālumos no trijstūra virsotnēm.

29.9.3. Izsakiet $x^2 + y^2 + z^2$ kā tādu saskaitāmo summu, lai katrs no tiem dalītos ar 3.

29.9.4. Sadalām plakni rūtiņu režģī tā, ka viena rūtiņa vienāda ar kuba skaldni. Izkrāsojam rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Noskaidrojiet gājienu skaita paritāti, kas nepieciešami, lai kubs atrastos uz tādas pašas krāsas rūtiņas un lai kubs atrastos uz pretējas krāsas rūtiņas. Noskaidrojiet gājienu skaita paritāti, kas nepieciešami, lai kubs būtu pārgājis no stāvokļa  uz stāvokli .

29.9.5. Apzīmējiet dālderu skaitu n-tajam rūķītim ar x, aprēķiniet dālderu skaitu pārējiem rūķīšiem un pētiet naudas plūsmu, kad katrs no tiem padod tālāk savus dālderus.

10. klase

29.10.1.

a) atrod piemēru, kad prasītais neizpildās.

b) pārnes visus saskaitāmos uz kreiso pusi un iegūto izteiksmi sadala reizinātājos. Pamato, ka nevienādība izpildīsies visiem x>y>1.

29.10.2. Apskata lielāko iespējamo izspēlēto spēļu skaitu n, kurās piedalījušās 2n dažādas komandas, un sastāda nevienādību, kas pamato prasīto.

29.10.3. Pamato, ka ar četrām krāsām pietiek.

29.10.4. Pamato, ka četrstūrim MBON var apvilkt riņķa līniju, un tad secina, ka trijstūri AOB un COB ir vienādsānu.

29.10.5.

a) izmantojot dalāmību ar 3, pierāda, ka prasītais nav iespējams.

b) atrod x vērtību – pretpiemēru un parāda, ka polinomu x uz tāfeles iegūt nav iespējams.

c) parāda, kā prasīto ir iespējams izpildīt.

11. klase

29.11.1. Atsevišķi apskata iespējamos variantus: neviens skaitlis nav 0, trīs skaitļi nav 0, divi skaitļi nav 0 un viens skaitlis nav 0.

29.11.2.

a) apskatāmo summu pārveido reizinājumā. Izmanto faktu, ka reizinājuma lielākā vērtība ir tad, ja reizinātāji ir vienādi.

b) apskatāmo summu pārveido reizinājumā. Izmanto faktu, ka reizinājuma lielākā vērtība ir tad, ja reizinātāji ir vienādi.

29.11.3. Pierāda, pieņemot pretējo un izmantojot pirmskaitļu īpašības.

29.11.4. Izveido 6 regulārus trijstūrus, kuriem katram divas virsotnes atrodas uz vienas no sešstūra malām, bet trešā virsotne – ārpus riņķa līnijas. Pierādot prasīto, ņem vērā, ka visu segmentu laukumi ir vienādi.

29.11.5. Pierāda, pieņemot pretējo un apskatot rūķīti, kurš ir biedrs kādā biedrībā B un vēl vismaz 51 citā biedrībā (jāpierāda, ka tāds eksistē).

12. klase

29.12.1. Pierāda, izmantojot nevienādību pastiprināšanu un faktu, ka $|\sin x|$ un $|\cos x|$ maksimālās vērtības ir 1.

29.12.2. Apskata tādu binomu reizinājumu, kur katram dotajam daļskaitlim pieskaitīts viens.

29.12.3. Papildina zīmējumu, simetriski pret AC atliekot punktus B, N un M un attiecīgi iegūstot jaunus punktus B_1, N_1 un M_1. Pamato un pierādījumā izmanto, ka četrstūris MNM_1N_1 ir rombs.

29.12.4. Apskata, kādu virkni veido virknes a_n elementu ciparu skaita virkne. Ar matemātiskām darbībām pieraksta „skaitļa pierakstīšanu otra skaitļa galā”.

29.12.5. Apskata riņķi ar rādiusu R, kurš pārklāj visus n punktus, un tam koncentrisku riņķi ar rādiusu $R+\frac{m}{2}$.

Latvijas 30. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

30.9.1. Ko var secināt par q_1, q_2 un q_3 no $q_1q_2q_3 < 0$? Un kādā gadījumā kvadrātvienādojumam eksistē divas dažādas saknes?

30.9.2.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Kāda ir visu rindu un visu kolonnu summu summa? Cik dažādi skaitļi, kas dalās ar 8, nepieciešami, lai izpildītu uzdevuma prasības? Kāda būs to summa?

30.9.3. Cik starp apskatītajiem skaitļiem būs pāra? Kas no tā seko?

30.9.4. Pagariniet trijstūra malu CA līdz CM tā, lai AM=AI.

30.9.5.

a) Parādiet, kā uzvar Juris.

b) Andris spēlē tā, lai pēc viņa gājiena būtu apēstas $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...$ konfektes. Pamatojiet, ka tas iespējams.

10. klase

30.10.1.

a) atrod piemēru, kad prasītais neizpildās.

b) visus saskaitāmos pārnes uz nevienādības kreiso pusi un to sadala reizinātājos. Pamato, ka nevienādība izpildīsies visiem x>y>2.

30.10.2. Ārējo leņķi ΔABC pie virsotnes A apzīmē ar 2α un pierāda, ka trijstūros LCN un KBM leņķi pie pamata ir α.

30.10.3.

a) Izsaka skaitļu kvadrātus formā 2n+1 un 3n+1, atrod skaitli, kas der n vietā.

b) Izteiksmi 5n+3 sadala reizinātājos, izsakot to ar 2n+1 un 3n+1.

30.10.4. Atrod formulu, kas saista izvietojumu skaitus n, n+1 un n+2 skolēnu gadījumā.

30.10.5. Apzīmē ar mainīgajiem rūķīšu skaitu, kam abi kaimiņi ir šillišallas; kam abi kaimiņi ir votivapas; kam viens kaimiņš ir šillišalla, bet otrs – votivapa. Ar jaunajiem mainīgajiem izsaka šillišallu un votivapu skaitu.

11. klase

30.11.1. Izmanto īpašību: $|a|+|b| \geq |a+b|$

30.11.2. Pagarina ZX līdz krustpunktam C ar taisni YA un izmanto ar riņķa līniju saistīto leņķu īpašības.

30.11.3. Pierāda, pieņemot pretējo. Izmanto īpašību: ja divi skaitļi dalās ar trešo skaitli, tad arī šo skaitļu starpība dalās ar trešo skaitli.

30.11.4. Kluba biedrus attēlo kā kuba virsotnes, bet izveidotās komisijas – kā virsotņu kopas.

30.11.5. Pamato, ka starp katrām 2k komandām var atrast tādu, kas uzvarējusi vismaz k spēles, $k \geq 2$. Izmanto šo faktu atkārtoti.

12. klase

30.12.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, pierādīt, ka leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi, zinot, ka līdzīga trijstūra malu garumi ir veseli skaitļi; otrkārt, pierādīt, ka eksistē līdzīgs trijstūris, kura malu garumi ir veseli skaitļi, ja zināms, ka dotā trijstūra leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi.

30.12.2. Skaitli n var uzrakstīt kā $n = 3^k \cdot a$, kur a nedalās ar 3. Apskata, kāds ir kopējais n^2 dalītāju skaits, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, un kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2.

30.12.3. Papildina zīmējumu, attiecībā pret AC viduspunktu atliekot punktiem B, N un M simetriskus punktus B_1, N_1 un M_1. Pamato un pierādījumā izmanto, ka četrstūris MNM_1N_1 ir rombs.

30.12.4. Pieņem, ka viena no vērtībām ir lielākā, novērtē, cik liela tā var būt. Līdzīgi pieņem, ka viena no vērtībām ir mazākā, un novērtē, cik maza tā var būt.

30.12.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, jāatrod, kādu lielāko summu S spēlētājs A var sasniegt, un jāparāda piemērs, kā to var izdarīt; otrkārt, jāpamato, ka lielāku summu spēlētājs A sasniegt nevar. Cenšoties iegūt iespējami lielāku summu, spēlētājs A var izdarīt pirmo gājienu kvadrāta centrā, tad tiek analizēti iespējamie tālākie gājieni, ņemot vērā figūras simetriskumu.

Latvijas 31. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

31.9.1. Pierādiet, pieņemot pretējo un pētot grafiku atrašanās vietu koordinātu plaknē.

31.9.2. Pierādiet, pieņemot pretējo un apskatot, kādas cilts rūķīši dzīvo punktos, kuru koordinātas dalās ar a vai b.

31.9.3. Pierādiet, ka $\Delta EDA = \Delta EDC$.

31.9.4. Lai kāds rūķītis būtu saticis visus pārējos rūķīšus, viņam jāsatiek arī tas rūķītis, kurš atnāca pēdējais, un tas rūķītis, kurš aizgāja pirmais.

31.9.5.

a) Prasītais ir iespējams.

b) Cik dažādas summas ir iespējamas? Un cik no tām noteikti jāparādās? Kādas summas var neparādīties?

10. klase

31.10.1. Pierādiet, ka a=1.

31.10.2. Pēta punkta O iespējamās atrašanās vietas. Pierāda, ka $\angle MOB$ lielums atkarīgs tikai no tā loka lieluma, ko savelk horda MN.

31.10.3.

a) Pamato, ka apskatāmais skaitlis atrodas starp kādu divu pēc kārtas esošu skaitļu kvadrātiem.

b) Apskatāmo skaitli iekļauj starp tādiem skaitļiem, kuriem pirmie cipari aiz komata ir zināmi.

31.10.4. Apzīmējot amatieru skaitu un to spēļu skaitu, kurās amatieri uzvarējuši profesionāļus, ar mainīgajiem, sastāda un atrisina vienādojumu naturālos skaitļos.

31.10.5. Apskata izveidotos nepāra skaitļus (pamato, ka tādi būs). Pēta izveidoto nepāra skaitļu starpību dalījumus ar 8 un 16.

11. klase

31.11.1. Pēta apskatāmo skaitļu starpību. Pamato, ka arī tai būtu jādalās ar $1500^n - 1$.

31.11.2. Pamato, ka nenokrāsotas rūtiņas krāsojumu nosaka divas tai blakus esošas nokrāsotas rūtiņas. Apskata rūtiņas uz kvadrāta diagonāles.

31.11.3. Izmantojot trijstūru viduslīniju īpašības, pamato, ka četrstūris MNKC ir vienādsānu trapece (M, N, K ir attiecīgi AO, BO un BC viduspunkts)

31.11.4. Logaritmē abas nevienādības puses, zinot, ka logaritmiskā funkcija ir augoša, ja bāze ir lielāka par 1.

31.11.5. Brīvi izvēlas vienu deputātu, apskata visus viņa „draugus” un „draugu draugus” – ievēro, ka tādējādi tiek aprakstīta visa deputātu kopa.

12. klase

31.12.1. Pamato, ka tas ir iespējams, izmantojot formulu $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$.

31.12.2. Izmanto vektoru saskaitīšanu un skalāro reizinājumu.

31.12.3. Pamato, ka visas konstantās funkcijas apmierina uzdevuma nosacījumus, un, pieņemot pretējo, pierāda, ka neviena cita funkcija neapmierina uzdevuma nosacījumus.

31.12.4. Pierādījuma daļu „tad” pierāda no pretējā.

31.12.5. Lai pamatotu, ka n nevar būt lielāks par 7, divos dažādos veidos apraksta tādu kandidātu pāru skaitu, kas novērtēti kā „nederīgi”.

Latvijas 32. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

32.9.1. Ja skaitlis dalās ar 225, tad kādi var būt tā pēdējie cipari? No kādiem reizinātājiem sastāv 225, un ko tas liecina par meklēto skaitli?

32.9.2. Pagariniet trijstūra malu CA līdz CM tā, lai AM=AI.

32.9.3. Lai kāds rūķītis būtu saticis visus pārējos rūķīšus, viņam jāsatiek arī tas rūķītis, kurš atnāca pirmais, un tas rūķītis, kurš aizgāja pēdējais.

32.9.4. Apskatiet nevienādību, kas rodas, saskaitot dotās nevienādības, ar mērķi izteikt summas kvadrāta formulu. Izmanto nevienādību $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$.

32.9.5. Līdz ar šo uzdevumu apskatiet arī divus modificētus uzdevumus. Vienā no tiem nav prasīts, lai beigās diski atkal būtu monotonā secībā (bet lielākajam diskam tomēr ir jābūt apakšā).

10. klase

32.10.1.

a) atrod tādas x un y vērtības, kam apskatāmā nevienādība neizpildās.

b) pārnesot visus saskaitāmos uz nevienādības kreiso pusi un, to sadalot reizinātājos, pamato, ka nevienādība izpildās.

32.10.2. Pēta punkta O iespējamās atrašanās vietas. Pierāda, ka $\angle MON$ lielums atkarīgs tikai no tā loka lieluma, ko savelk hordu MN,

32.10.3. Apskata 3 vienu otram sekojošus naturālus skaitļus 2^n-1, 2^n un 2^n+1 un izmanto īpašību, ka vienam no tiem noteikti jādalās ar 3.

32.10.4.

a) apskata $|f(x)-x|$ iespējamās vērtības.

b) atrod piemēru, kas parāda, kā iespējams izveidot funkciju f.

32.10.5. Izmanto matemātisko indukciju pēc „labo” kolonnu skaita.

11. klase

32.11.1. Pamato, ka $|P(x)|$ neierobežoti aug (tiecas uz bezgalību), ja ņemam aizvien lielākus x, bet sin x+2005 ir ierobežots.

32.11.2. Izmantojot trijstūru viduslīniju īpašības, pamato, ka četrstūris MNKC ir vienādsānu trapece (M, N, K ir attiecīgi AO, BO un BC viduspunkts).

32.11.3. Pamato, ka starp katrām 2k komandām var atrast tādu, kas uzvarējusi vismaz k spēles, $k \geq 2$. Izmanto šo faktu atkārtoti.

32.11.4. Skaitļus b, c un d izsaka kā skaitļa a summas ar nezināmiem lielumiem. Iegūtās izteiksmes ievieto uzdevumā dotajā vienādībā un nevienādībā.

32.11.5. Apskata vektoru virkni, kurā pirmais vektors izveidots, novelkot to no rūtiņas R centra uz otru šī domino kauliņa rūtiņas centru. Skaidrs, ka šis vektors norāda uz kādu melno rūtiņu. Tālāk no katras melnās rūtiņas, uz kuru norāda vektors, novelk atkal jaunu vektoru no melnās rūtiņas centra uz otras šī domino kauliņa rūtiņas centru.

12. klase

32.12.1. Izsaka n kā $n = 3^k \cdot a$, kur a nedalās ar 3. Salīdzina dalītāju kopas skaitļiem n^2 un a^2.

32.12.2. Apskata brīvi izvēlētu taisni, kas nav paralēla nevienas parabolas asij. Pēta, vai katrs taisnes punkts var atrasties starp vismaz vienas parabolas zariem.

32.12.3. Izmanto vektoru saskaitīšanu un skalāro reizinājumu.

32.12.4. Pamato, ka pie $n \geq 4$ nevienādība visām mainīgo vērtībām nav patiesa. Gadījumus, kad n=2 un n=3, apskata atsevišķi.

32.12.5. Apskata divas pozīciju klases:

- pozīcijas, kurās ir pāra daudzums stieņu un augstākais viens stienis ar pāra garumu;
- pozīcijas, kurās ir nepāra daudzums stieņu un augstākais divi stieņi ar pāra garumu.

ATRISINĀJUMI

Latvijas 26. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

26.9.1.

1. variants. Atņemot no uzdevumā dotā pirmā vienādojuma otro, iegūstam

$x^2 + y - x - y^2 = 0$

$(x - y)(x + y) = x - y \quad (*)$

1) ja $x - y = 0$, tad x=y un, ievietojot kādā no dotajiem vienādojumiem, iegūstam

   $x + x^2 - 1 = 0$. Atrisinot kvadrātvienādojumu, iegūstam, ka $x = y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) ja $x \neq y$, tad, dalām (*) ar $x - y$,

   $(x - y)(x + y) = x - y \quad |:(x - y)$

   $x + y = 1$,

   $y = 1 - x$. Ievietojot kādā no sākumā dotajiem vienādojumiem $y = 1 - x$, iegūstam,

ka $x^2 - x = 0$, no kurienes seko 2 atrisinājumi (1;0) un (0,1).

2. variants. Var lietot arī ievietošanas metodi. Tad pakāpeniski iegūstam, ka

$y = 1 - x^2$

$x + (1 - x^2)^2 = 1$

$(1 - x^2)^2 = 1 - x$

$((1 - x)(1 + x))^2 = 1 - x$

$(1 - x)^2(1 + x)^2 = 1 - x$

1) ja $1 - x = 0$, tad x=1 un y=0. Iegūstam atrisinājumu (1;0)

2) ja $1 - x \neq 0$, tad dalām ar $1 - x$ un iegūstam, ka $(1 - x)(1 + x)^2 = 1$

$(1 - x)(1 + 2x + x^2) = 1$

$1 + 2x + x^2 - x - 2x^2 - x^3 = 1$

$x^3 + x^2 - x = 0$

$x(x^2 + x - 1) = 0$, no kurienes seko:

1) ja x=0, tad y=1. Ieguvām atrisinājumu (0;1).

2) ja $x^2+x-1=0$ tad $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ un $y=1-x^2=x$. Ieguvām atrisinājumus $\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

26.9.2.

a) Ja k=m+2mn+n, tad 2k+1=2m+4mn+2n+1=(2m+1)(2n+1). Tā kā 2m+1>1 un 2n+1>1, un abi ir naturāli skaitļi, tad 2k+1 nav pirmskaitlis.

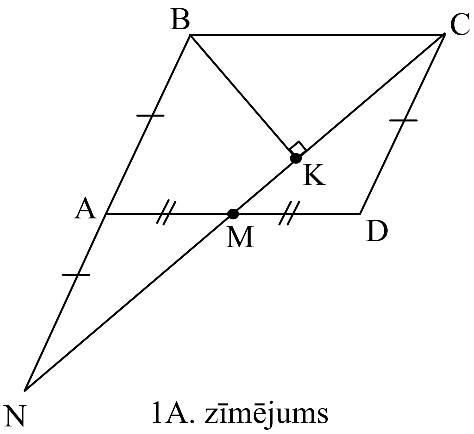
b) Ja 2k+1 nav pirmskaitlis, tad eksistē tādi nepāra naturāli skaitļi a un b, ka $2k+1=a\cdot b$, pie tam a>1 un b>1. Tāpēc $k=\frac{ab-1}{2}$. Viegli pārbaudīt, ka par meklējamiem m un n var ņemt $m=\frac{a-1}{2}$ un $n=\frac{b-1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
&m+2mn+n= \\
&=\frac{a-1}{2}+2\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}+\frac{b-1}{2}= \\
&=\frac{a-1+ab-a-b+1+b-1}{2}=\frac{ab-1}{2}=k
\end{aligned}
$$

Lai m un n iznāktu naturāli skaitļi, a un b ir jābūt nepāra naturāliem skaitļiem, kas lielāki par 1. Bet tā arī ir. Tātad eksistē tādi naturāli skaitļi m un n, ka k=m+2mn+n.

26.9.3.

1. variants

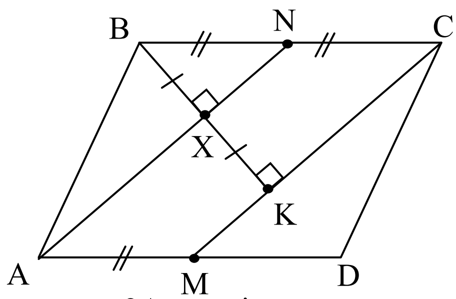


1A. zīmējums

1) Pagarina CM līdz krustpunktam N ar taisni AB (skat. zīm. 1A).
2) $\Delta AMN=\Delta DMC$ pēc pazīmes lml, jo $\angle AMN=\angle DMC$ kā krustleņķi, AM=DM, jo M malas AD viduspunkts, $\angle NAM=\angle CDM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AB un CD.
3) No trijstūru vienādības seko, ka AN=DC, un no paralelograma pretējo malu vienādības seko, ka DC=AB, tātad AN=AB
4) Tātad A ir taisnleņķa trijstūra BKN hipotenūzas viduspunkts, kas ir arī ΔBKN apvilktās riņķa līnijas centrs. Tāpēc AK=AB kā ΔBKN apvilktās riņķa līnijas rādiusi.

2. variants

1) Apzīmēsim ar N malas BC viduspunktu (skat. zīm. 2A).
2) NC=AM, jo paralelograma ABCD pretējās malas ir vienādas; tad arī šo malu puses ir vienādas.
3) Tā kā $NC \| AM$, jo paralelograma pretējās malas ir arī paralēlas, tad ANCM ir paralelograms.
4) Paralelograma pretējās malas ir paralēlas, tātad $AN \| CM$.



2A. zīmējums

5) Tā kā $CM \perp BK$, tad arī $AN \perp BK$.
6) Atcerēsimies Talesa teorēmu: ja savstarpēji paralēlas taisnes, krustojot leņķa malas, uz vienas no tām atdala vienādus nogriežņus, tad arī uz leņķa otras malas tās atdala vienādus nogriežņus.
7) Pielietosim Talesa teorēmu $\angle KBC$; no tā, ka BN=NC, seko, ka BX=XK.
8) Tātad ΔBAK nogrieznis AX vienlaicīgi ir augstums un mediāna, tāpēc ΔBAK ir vienādsānu un AB=AK, kas arī bija jāpierāda.

26.9.4. Noteikti varēs novilkt tos nogriežņus, kas savieno uz riņķa līnijas blakus esošos punktus, tādu būs n. Tas, **kurus** „iekšējos" nogriežņus novelk, būs atkarīgs no izvēlētās vilkšanas secības. Nogriežņu vilkšana beigsies tad, kad n-stūris būs ar diagonālēm sadalīts trijstūros. (Ja kāda daļa būtu 4-stūris, 5-stūris utt., tad tajā varētu novilkt diagonāles.) Pieņemsim: nogriežņu vilkšanas process ir beidzies, vairs nevar novilkt nevienu nogriezni, kas atbilstu uzdevuma prasībām. Tad ir izveidojies kaut kāds trijstūru skaits – apzīmēsim to ar t. Visu trijstūru iekšējo leņķu summa ir $180 \cdot t$, no otras puses, tā vienāda ar n-stūra iekšējo leņķu lielumu summu $180 \cdot (n-2)$. Tāpēc $t = n - 2$ neatkarīgi no tā, kurus nogriežņus novelk. Lai n-stūri sadalītu n-2 daļās, tiek novilkti n-3 „iekšējie" nogriežņi (katra nogriežņa novilkšana daļu skaitu palielina par 1). Tātad **kopīgais** novilkto nogriežņu skaits būs n+(n-3)=2n-3, t.i., nepāra skaitlis. Tāpēc pēdējais novilktais nogrieznis būs balts.

26.9.5.

a) Jā, ir iespējams. Tā kā kopējais konfekšu skaits ir pāra skaitlis, tad būs pāra skaits kaudzīšu, kurās būs nepāra skaits konfekšu. (Pamatosim: ja būtu nepāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits konfekšu, tad kopējais konfekšu skaits arī būtu nepāra skaitlis - pretruna.) Sadalām šīs kaudzītes pāros un katrā pārī veicam uzdevumā atļauto „pārlikšanas” operāciju. Ja mums pārī bija divas kaudzītes A un B ar nepāra skaitu konfekšu attiecīgi x un y, un y>x, tad tagad kaudzītē A ir x+x=2x – pāra skaits konfekšu un kaudzītē B ir y-x konfekšu, kas arī ir pāra skaitlis, jo „nepāra mīnus nepāra ir pāra”. Kad šis darba paveikts, visās kaudzītēs ir pāra skaits konfekšu.

Tālāk apskatām tās kaudzītes, kurās konfekšu skaits nedalās ar 4. Tā kā ar 2 dalās visu kaudzīšu konfekšu skaiti, tad varam uzskatīt, ka meklējam kaudzītes, kurās ir nepāra skaits konfekšu pāru. Tādu kaudzīšu noteikti ir pāra skaits, jo konfekšu pāru ir 64:2=32. Atkal pa pāriem apvienojam tās kaudzītes, kurās ir nepāra skaits konfekšu pāru, un veicam „pārlikšanas” operāciju. Un līdzīgi, kā iepriekš aprakstīts, iegūstam, ka konfekšu skaits visās kaudzītēs dalās ar 4.

Tālāk līdzīgi meklējam, kurās kaudzītēs konfekšu skaits nedalās ar 8 - arī tādu ir pāra skaits, tad ar 16 un 32. Esam ieguvuši, ka visu kaudzīšu konfekšu skaiti dalās ar 32. Tā kā kopējais konfekšu skaits ir 64, tad mums ir divas kaudzītes katra ar 32 konfektēm. Tās apvienojot, iegūstam vienu kaudzīti ar 64 konfektēm.

b) Nē, ne vienmēr. Pieņemsim, ka ir 5 kaudzītes pa 20 konfektēm katrā. Lai kā arī veiktu pārlikšanu, katrā kaudzītē konfekšu skaits vienmēr dalīsies ar 20; bet, lai visas konfektes savāktu vienā kaudzē, pirms pēdējā gājiena jābūt divām kaudzēm ar 50 konfektēm katrā.

10.klase

26.10.1

1. variants. Atbilde: $xy \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Pierādījums: no uzdevuma nosacījumiem varam izteikt $y^2 = 1 - x^2$; tad x^2y^2 var uzrakstīt šādi:

$x^2y^2 = x^2(1-x^2) = x^2 - x^4 =$ (pieskaitot un atņemot ¼, iegūstam)

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{4} - x^2 + x^4) =$ (iekavās esošo izteiksmi varam pārveidot par starpības kvadrātu)

$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)^2 \le \frac{1}{4}$.

Pamatosim: no $\frac{1}{4}$ tiek atņemts nenegatīvs skaitlis $\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2$ (skaitļa kvadrāts noteikti ir lielāks vai vienāds par nulli). Tā kā $x^2y^2 = \frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2$, tad arī $x^2y^2 \le \frac{1}{4}$. No uzdevuma nosacījumiem zinām, ka x un y ir pozitīvi skaitļi, tātad arī $x^2y^2 > 0$. Esam ieguvuši, ka izpildās dubultā nevienādība $0 < x^2y^2 \le \frac{1}{4}$, bet no tā seko, ka $0 < xy \le \frac{1}{2}$.

Tomēr šī nav galīgā atbilde, jo varbūt reizinājums xy vērtību $\frac{1}{2}$ nemaz nesasniedz un tā maksimālā vērtība ir mazāka par $\frac{1}{2}$.

Tātad mums vēl jāpierāda: ja c ir patvaļīgs reāls skaitlis intervālā $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, tad xy var būt vienāds ar c un izpildās uzdevumā dotā vienādība. Lai to pierādītu, apskatīsim, kādi atrisinājumi var būt vienādojumu sistēmai:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=c \end{cases}$$

Pieskaitot 1. vienādojumam 2. vienādojumu, kas pareizināts ar 2, iegūstam, ka $x^2+2xy+y^2=1+2c$. Ņemot vērā, ka $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$, velkam kvadrātsakni no abām vienādojuma pusēm: $x+y=\sqrt{1+2c}$ (atceramies, ka $x, y > 0$).

Atņemot no 1. vienādojuma 2. vienādojumu, kas pareizināts ar 2, iegūstam, ka $x^2-2xy+y^2=1-2c$. Ņemot vērā, ka $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$, velkam kvadrātsakni no abām vienādojuma pusēm:

$|x-y|=\sqrt{1-2c}$. Pieņemam, ka $x \ge y$, un risinām sistēmu

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{1+2c} \\ x-y=\sqrt{1-2c} \end{cases}$$

Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam, ka $2x=\sqrt{1+2c}+\sqrt{1-2c}$ jeb $x=\frac{\sqrt{1+2c}+\sqrt{1-2c}}{2}$, bet, atņemot abus vienādojumus, iegūstam, ka

$2y = \sqrt{1+2c} - \sqrt{1-2c}$ jeb $y = \dfrac{\sqrt{1+2c} - \sqrt{1-2c}}{2}$. Tā kā $c > 0$, tad $y > 0$ (jo $1+2c > 1-2c$). Ievietojot aprēķinātās x un y vērtības uzdevumā dotajā vienādībā, redzam:

$$\left(\frac{\sqrt{1+2c} + \sqrt{1-2c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1+2c} - \sqrt{1-2c}}{2}\right)^2 = 1 \qquad \text{(kāpinām kvadrātā)}$$

$$\frac{1+2c+2\sqrt{1-2c}\sqrt{1+2c}+1-2c}{4} + \frac{1-2c-2\sqrt{1-2c}\sqrt{1+2c}+1+2c}{4} = 1$$

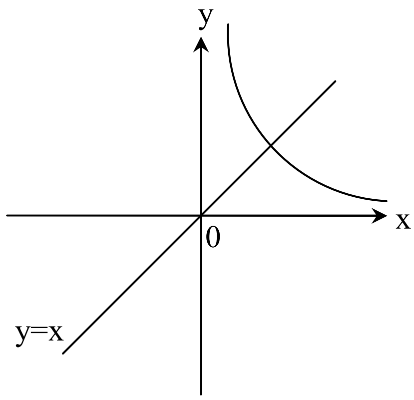
(vienādojam saucējus)

$$2+2\sqrt{1-2c}\sqrt{1+2c}+2-2\sqrt{1-2c}\sqrt{1+2c} = 4 \qquad \text{(savelkam līdzīgos saskaitāmos)}$$

$$2+2=4.$$

Redzam, ka aprēķinātās x un y vērtības apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad xy vērtību apgabals tiešām ir $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

2. variants. Atbilde: $xy \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.



3A. zīmējums

Pierādījums: aprēķināsim iespējamās reizinājuma xy vērtības, apskatot riņķa līnijas $x^2 + y^2 = 1$ un hiperbolas xy=c (jeb $y = \frac{x}{c}$) kopīgo punktu atrašanās vietas, ja c>0, x>0, y>0.

1) Hiperbola xy=c ir simetriska pret taisni y=x. Pamatosim: redzam, ka aizstājot y ar x un x ar y, iegūstam precīzi to pašu vienādību yx=c; no tā arī seko, ka hiperbola xy=c ir simetriska pret taisni y=x. (skat. zīm. 3A.)
2) Aprēķināsim hiperbolas xy=c krustpunktus P ar taisni y=x. Lai to izdarītu, atrisinām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} xy = c \\ y = x \end{cases}$$

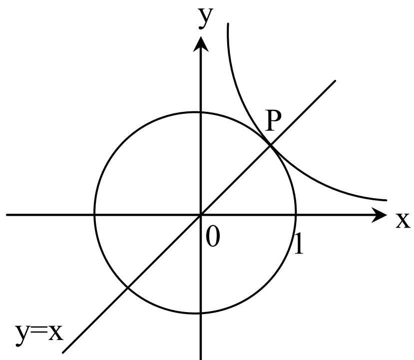
Izmantojot 2. vienādojumu pirmajā, iegūstam:

$x^2 = c$ jeb $x = y = \sqrt{c}$. Tātad krustpunkts P atrodas punktā $\left(\sqrt{c}, \sqrt{c}\right)$.

3) Aprēķināsim attālumu no koordinātu sākumpunkta O līdz punktam P. Izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam, ka $OP = \sqrt{c + c} = \sqrt{2c}$.

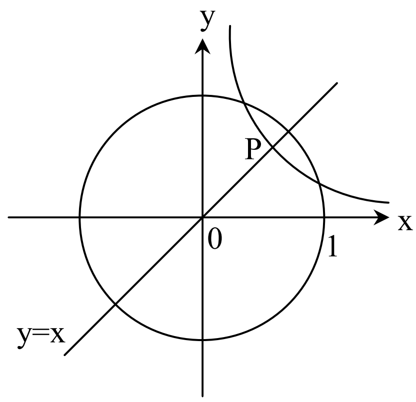
4) Tā kā $c \in (0;+\infty)$, tad arī attālums OP var pieņemt jebkuru vērtību intervālā $(0;+\infty)$.

5) Apskatīsim, cik kopīgu punktu var būt hiperbolai xy=c ar riņķa līniju $x^2 + y^2 = 1$ koordinātu plaknes I kvadrantā. Iespējami 2 gadījumi:



4A. zīmējums

   a. ir viens kopīgs punkts (skat. zīm. 4A.). Tādā gadījumā hiperbola pieskaras riņķa līnijai un pieskaršanās punkta attālums līdz koordinātu sākumpunktam ir 1. Skaidrs, ka šis pieskaršanās punkts atrodas uz taisnes y=x. Tātad iegūtā vērtība „1" ir viena no OP vērtībām.



5A. zīmējums

   b. ir divi kopīgi punkti (skat. zīm. 5A.). Tādā gadījumā hiperbola krusto riņķa līniju divos punktos, kas ir simetriski attiecībā pret taisni y=x, bet punkts P atrodas r.l. iekšpusē, tātad OP garums ir mazāks par 1.

6) Tātad $OP \le 1$, bet zinām, ka $OP = \sqrt{2c}$, tātad $\sqrt{2c} \le 1$ jeb $2c \le 1$, un iegūstam, ka $c \le \frac{1}{2}$.

7) Ņemot vērā, ka c=xy un c>0, esam ieguvuši, ka $xy \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

26.10.2. Atbilde: $x_1 = 1; x_2 = -0{,}5;\ x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$.

Pierādījums: apzīmēsim $x^2 + x + 1 = a$ un $x^2 - 2x - 2 = b$. Ņemot vērā, ka $a + b = 2x^2 - x - 1$, uzdevumā doto vienādojumu var pārveidot par

$a^3 + b^3 = (a + b)^3$ (1).

Savukārt vienādojuma (1) kreiso pusi var pārveidot, izmantojot kubu summas formulu: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3$ (pārnesam $(a+b)^3$ uz kreiso vienādojuma pusi)

$(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3=0$ (iznesam kopīgo reizinātāju (a+b))

$(a+b)\left(a^2-ab+b^2-(a+b)^2\right)=0$ (izpildām kāpināšanu kvadrātā)

$(a+b)\left(a^2-ab+b^2-a^2-2ab-b^2\right)=0$ (savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$(a+b)(-3ab)=0$.

Zinām, ka reizinājums ir nulle tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir nulle. Apskatīsim iespējamos variantus:

1) ja a+b=0. Ņemot vērā, ka $a+b=2x^2-x-1$, zinām, ka $2x^2-x-1=0$. Vienādojuma $2x^2-x-1=0$ atrisinājumi ir $x_1=1,\ x_2=-0{,}5$.

2) ja a=0, tad $x^2+x+1=0$, bet šim vienādojumam nav atrisinājuma.

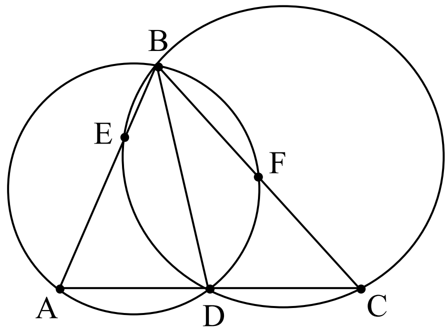
3) ja b=0, tad $x^2-2x-2=0$, un $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$.

26.10.3. Pierādījums: (skat. zīm. 6A)

1) No teorēmas par sekantes reizinājumu ar tās ārējo daļu seko, ka $AB\cdot AE=AC\cdot AD$ un $CB\cdot CF=CA\cdot CD$.

2) Dalot šīs vienādības vienu ar otru, iegūstam, ka $\frac{AB}{CB}\cdot\frac{AE}{CF}=\frac{AD}{CD}$ (*).

3) Tā kā pēc dotā BD ir ΔABC bisektrise, tad no bisektrises īpašības seko, ka $\frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}$.



6A. zīmējums

4) Ja $\frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}$, tad (*) varam izdalīt ar $\frac{AB}{CB}$ un iegūstam, ka $\frac{AE}{CF}=1$.

5) Ja $\frac{AE}{CF}=1$, tad AE=CF, k.b.j.

26.10.4.

1. variants.

Pierādījums: pieņemsim, ka x un y ir kaut kādi divi fiksēti skaitļi no uzrakstītajiem. Apzīmēsim LKD(x,y)=u un MKD(x,y)=v. Ir zināms, ka $x\cdot y=u\cdot v$, un tas nozīmē, ka kopējais visu uzrakstīto skaitļu reizinājums nemainās. Apzīmēsim visu 1999 skaitļu reizinājumu ar R. Mēs varam pieņemt, ka $x \leq y$. Ja, aizstājot jebkurus divus x un y ar attiecīgajiem u un v, skaitļi nemainīsies, tad u=x un y=v. No tā seko, ka arī skaitļu summa u+v=x+y nemainās un uzdevuma nosacījumi izpildās.

Apskatīsim gadījumu, kad, izpildot gājienu un aizstājot skaitļus x un y ar u un v, uzrakstītie skaitļi mainās. Zinām: lai arī skaitļi mainās, visu skaitļu reizinājums R noteikti nemainās. Tā kā skaitļu reizinājums R nemainās, tad arī skaitļu summa nevar bezgalīgi pieaugt. Novērtēsim, kāda ir lielākā iespējamā summas vērtība: ja katru no 1999 skaitļiem aizstātu ar visu doto skaitļu reizinājumu R, tad visu skaitļu summa būtu vienāda ar $1999 \cdot R$. Bet, tā kā neviens no skaitļiem nevar kļūt lielāks par visu doto skaitļu reizinājumu, tad arī visu skaitļu summa noteikti nav lielāka par $1999 \cdot R$. Ja, izdarot gājienus, skaitļu summa, kas ir naturāls skaitlis, pieaug, bet nekad nepārsniedz skaitli $1999 \cdot R$, tad noteikti tiek iegūta situācija, kad, izdarot gājienus, skaitļi vairs nemainās.

Pamatosim, ka, izdarot gājienu, iegūto skaitļu summa vai nu pieaug, vai paliek nemainīga, t.i., $u + v \geq x + y$. No LKD un MKD īpašībām zināms, ka $u \leq x$ un $v \geq y$. Zinot, ka LKD(x,y)=u un MKD (x,y)=v, skaitļus x un y varam uzrakstīt kā $x = u \cdot p$ un $y = u \cdot q$, kur u ir skaitļu x un y lielākais kopīgais dalītājs (LKD), bet $p = x : u$ un $q = y : u$. Līdz ar to $v = u \cdot p \cdot q$. Tad pierādāmā nevienādība $u + v \geq x + y$ pārrakstāma formā:

$u + upq \geq up + uq$ (zinot, ka u>0, dalām abas nevienādības puses ar u)

$1 + pq \geq p + q$ (visus saskaitāmos pārnesam uz nevienādības kreiso pusi)

$1 + pq - p - q \geq 0$ (pārgrupējam un kopīgos reizinātājus iznesam pirms iekavām)

$p(q-1) - (q-1) \geq 0$ (pirms iekavām iznesam kopīgo reizinātāju (q-1))

$(p-1)(q-1) \geq 0$.

Tā kā x un y naturāli skaitļi, tad $p - 1 \geq 0$ un $q - 1 \geq 0$.

Apskatīsim vairākus gadījumus:

1) ja $p - 1 > 0$ un $q - 1 > 0$, tad u+v>x+y un, izdarot gājienu, skaitļu summa pieaug.

2) ja $p - 1 = 0$ vai $q - 1 = 0$, tad $(p-1)(q-1) = 0$ un u+v=x+y, bet šāds gadījums jau iepriekš apskatīts.

Tātad apskatāmo skaitļu summa vai nu pieaug, vai paliek nemainīga. Un zinot, ka šī summa nevar būt lielāka par 1999R, esam pamatojuši, ka, izdarot uzdevumā aprakstītos gājienus, noteikti iegūsim situāciju, kad tā pārstās mainīties.

2. variants.

Pierādījums: pieņemsim, ka x un y ir kaut kādi divi fiksēti skaitļi no uzrakstītajiem. Pieņemsim, ka x=rp un y=rq, kur r ir skaitļu x un y lielākais kopīgais dalītājs (LKD), bet $p = x : u$ un $q = y : u$. Pieņemsim, ka $x \leq y$. Tas nozīmē, ka LKD(x,y)=r, bet MKD(x,y)=rpq. Tā kā LKD ir mazāks vai vienāds ar mazāko no skaitļiem x un y, tad $r \leq x$, un līdzīgi, tā kā MKD ir lielāks vai vienāds ar lielāko no skaitļiem x un y, tad $rpq \geq y$. Izpildot uzdevumā aprakstītos gājienus, mazāko no skaitļiem x vienmēr aizstāsim ar mazāko no jaunajiem skaitļiem r, bet lielāko skaitli y aizstāsim ar lielāko no jaunajiem skaitļiem rpq, t.i., $x_{jaunais}$=r un $y_{jaunais}$=rpq.

Apzīmēsim mazāko no 1999 uzrakstītajiem skaitļiem ar a. Izpildot uzdevumā aprakstīto operāciju ar šo skaitli, iespējami 2 gadījumi:

- skaitlis a nemainās. Tad skaitlis, ar kuru kopā ņemts a, ir vienāds ar a, vai arī šis skaitlis dalās ar a.
- skaitlis a mainās. Tā kā a noteikti ir mazākais no abiem skaitļiem, ar kuriem tiek izdarīts gājiens, tad pēc iepriekš aprakstītās shēmas to aizstāj ar r. Zinām, ka r ir lielākais kopīgais dalītājs, līdz ar to tas vienmēr ir mazāks vai vienāds par mazāko no skaitļiem. Tātad, ja a mainās, tad tas noteikti kļūst mazāks.

Veicot uzdevumā aprakstīto operāciju ar skaitli a vairākas reizes, vienmēr nonākam pie šiem 2 gadījumiem – skaitlis a nemainās vai samazinās. Skaitlis a nevar samazināties bezgalīgi ilgi, jo, tā kā LKD ir naturāls skaitlis, tad a var samazināties, pirmkārt, par veselu skaitli, un, otrkārt, ne ilgāk, kamēr sasniedz vērtību 1. Tātad noteikti būs tāds brīdis, kad a vairs nemainīsies.

Tad apskatām atlikušos 1998 skaitļus. Izvēlamies mazāko no tiem un veicam uzdevumā pieļaujamās operācijas. Līdzīgi, šis skaitlis var tikai palikt tāds pats vai samazināties, jo ir mazākais no apskatāmajiem. Pēc iepriekš aprakstītā skaidrs, ka arī šis skaitlis kādā brīdī beigs mainīties. Tas apskatām atlikšos 1997 skaitļus un spriežam līdzīgi. Tā turpinām, kamēr palikuši 2 skaitļi. Izpildām pieļaujamo operāciju un esam ieguvuši uzdevumā prasīto situāciju, kad nemainās neviens no skaitļiem.

26.10.5. Atbilde: Andrim pietiek ar 5 jautājumiem.

Pierādījums: pamatosim, ka Andrim pietiek ar 5 jautājumiem.

Uzdodot 1. jautājumu, Andris uzzina skaitļu 1, 2, ...,10 relatīvo kārtību. Apzīmēsim šo skaitļu relatīvo kārtību ar $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.

Uzdodot 2. jautājumu, Andris uzzina skaitļu 11, 12, ...,20 relatīvo kārtību. Apzīmēsim šo skaitļu relatīvo kārtību ar $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$.

Uzdodot 3. jautājumu, Andris uzzina skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_5$, $y_1, y_2, \ldots, y_5$ relatīvo kārtību. Apzīmēsim šo skaitļu relatīvo kārtību ar $z_1, z_2, \ldots, z_{10}$.

Pierādīsim, ka $z_1, z_2, \ldots, z_5$ ir 5 kreisie skaitļi Jāņa uzrakstītajā virknē. Uzdodot 1. jautājumu, mēs uzzinām, kuri 5 skaitļi no 1 līdz 10 ir vairāk pa kreisi Jāņa uzrakstītajā virknē. Tie ir $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Uzdodot 2. jautājumu, mēs uzzinām, kuri 5 skaitļi no 11 līdz 20 ir vairāk pa kreisi Jāņa uzrakstītajā virknē. Tie ir $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Uzdodot 3. jautājumu no 10 skaitļiem, kas ir visvairāk pa kreisi mēs uzzinām precīzi tos 5 skaitļus, ka Jāņa uzrakstītajā virknē ir visvairāk kreisajā pusē.

No $z_1, z_2, \ldots, z_5$ pa labi Jāņa uzrakstītajā virknē noteikti atrodas:

- $x_6, x_7, \ldots, x_{10}$ – izriet no 1. jautājuma. Zinām, ka $x_6, x_7, \ldots, x_{10}$ noteikti ir pa labi no $x_1, x_2, \ldots, x_5$ pēc 1. jautājuma nosacījumiem. Un, tā kā $z_1, z_2, \ldots, z_5$ ir skaitļi, kas atrodas visvairāk pa kreisi no uzrakstītajiem skaitļiem, tad no skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ tie var saturēt tikai kādu no skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Tātad $z_1, z_2, \ldots, z_5$ noteikti nesatur nevienu no skaitļiem $x_6, x_7, \ldots, x_{10}$, t.i., $x_6, x_7, \ldots, x_{10}$ atrodas pa labi no $z_1, z_2, \ldots, z_5$.
- $y_6, y_7, \ldots, y_{10}$ – izriet no 2. jautājuma. Zinām, ka $y_6, y_7, \ldots, y_{10}$ noteikti ir pa labi no $y_1, y_2, \ldots, y_5$ pēc 2. jautājuma nosacījumiem. Un, tā kā $z_1, z_2, \ldots, z_5$ ir skaitļi, kas atrodas visvairāk pa kreisi no uzrakstītajiem skaitļiem, tad no skaitļiem $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ tie var saturēt tikai kādu no skaitļiem $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Tātad $z_1, z_2, \ldots, z_5$ noteikti nesatur nevienu no skaitļiem $y_6, y_7, \ldots, y_{10}$, t.i., $y_6, y_7, \ldots, y_{10}$ atrodas pa labi no $z_1, z_2, \ldots, z_5$.
- $z_6, z_7, \ldots, z_{10}$ – izriet no 3. jautājuma nosacījumiem.

Uzdodot 4. jautājumu, Andris uzzina skaitļu $x_6, x_7, \ldots, x_{10}$, $y_6, y_7, \ldots, y_{10}$ relatīvo secību. Līdz ar to ir uzzināti arī Jāņa virknes 5 labējie skaitļi; to iegūst, spriežot līdzīgi kā par 5 kreisajiem skaitļiem.

Uzdodot 5. jautājumu, Andris uzzina 10 atlikušo (vidējo) skaitļu secību. Tādā veidā Andris uzzinājis visu 20 skaitļu patieso secību.

Piezīme: Var pierādīt, ka ar 4 jautājumiem Andrim nepietiek. Pierādījums ir garš un nav vienkāršs.

11. klase

26.11.1. Atbilde: Pietiek ar 8 svēršanām.

Pierādījums: pieņemsim, ka Andra norādītās monētas ir a un b, bet pārējās monētas – x, y, z un t. Jānis salīdzina katru monētu a un b ar katru no monētām x, y, z un t. Kopā notiek 8 salīdzināšanas (a ar katru no četrām atlikušajām un b ar katru no četrām atlikušajām). Ja a un b atrodas blakus rindā, kur monētas sakārtotas pēc masām, tad neviena cita monēta nav starp tām. Tas nozīmē: ja kāda cita monēta ir vieglāka par a, tad tā ir vieglāka arī par b, un, ja kāda cita monēta ir smagāka par a, tad tā ir smagāka arī par b. Tātad, lai monētas atrastos blakus, abām svēršanām, kur monētas a un b salīdzina ar kādu no pārējām monētām, jāuzrāda vienādi rezultāti.

26.11.2. Atbilde: $3^n - 2^n$.

Pierādījums: katram karavīram piešķirsim vienu no trim apzīmējumiem: N – netiek apbalvots, P – tiek tikai paaugstināts, O – saņem ordeni un tiek paaugstināts. Pirmajam karavīram var piešķirt vienu no 3 apzīmējumiem, otrajam karavīram tieši tāpat ir 3 iespējas, utt., arī pēdējam, n-tajam, karavīram varam piešķirt vienu no 3 apzīmējumiem. Reizinājums $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^n$ ir kopējais skaits, cik veidos n karavīriem var piešķirt vienu no 3 apzīmējumiem (N, P vai O).

Pēc uzdevuma nosacījumu b punkta ir zināms, ka ir jābūt vismaz 1 karavīram, kas tiek paaugstināts dienesta pakāpē un ordeni nesaņem. Tātad no kopējā apzīmējumu piešķiršanas skaita 3^n jāatņem to variantu skaits, kur neviens no karavīriem nav saņēmis tikai paaugstinājumu dienesta pakāpē. Tie ir tādi varianti, kur karavīri saņem vai nu paaugstinājumu un ordeni, vai nesaņem neko. Lai noskaidrotu šādu variantu skaitu, mums jāsaskaita, cik dažādos veidos karavīriem var piešķirt vienu no diviem apzīmējumiem N vai O. Skaidrs, ka pirmajam karavīram var piešķirt vienu no 2 apzīmējumiem, otrajam karavīram tieši tāpat arī var piešķirt vienu no 2 apzīmējumiem utt., arī pēdējam, n-tajam, karavīram varam piešķirt vienu no 2 apzīmējumiem. Tātad reizinājums $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ ir kopējais skaits, cik veidos n karavīriem var piešķirt vienu no 2 apzīmējumiem (N vai O).

Tātad no kopējā skaita, cik dažādos veidos n karavīriem var piešķirt 3 apzīmējumus, atņemot to skaitu, cik dažādos veidos var piešķirt 2 apzīmējumus, iegūstam uzdevuma atrisinājumu: $3^n - 2^n$.

26.11.3. Atbilde: Var būt 2 vai 4 pāra skaitļi.

Pierādījums: vienādības $2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2$ un $4^2 + 4^2 + 2^2 = 6^2$ parāda, ka pāra skaitļu skaits var būt 2 un 4. Pierādīsim, ka pāra skaitļu skaits nevar būt 1 un 3. Zinām, ka, kāpinot kvadrātā nepāra skaitli, iegūstam nepāra skaitli, bet, kāpinot kvadrātā pāra skaitli, iegūstam pāra skaitli. Pārnesot t^2 uz vienādojuma kreiso pusi, iegūstam, ka $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$. Ja tieši viens no x, y, z, t ir nepāra skaitlis, tad, pieskaitot vai atņemot pāra skaitļus, iegūsim nepāra skaitli, tātad nevarēsim iegūt 0. Līdzīgi, ja 3 no skaitļiem x, y, z, t ir nepāra skaitļi, tad to summa vai starpība ir nepāra skaitlis. Iegūtajam nepāra skaitlim pieskaitot vai atņemot atlikušo pāra skaitli, atkal iegūstam nepāra skaitli. Tātad rezultāts noteikti nav vienāds ar 0.

Pierādīsim, ka nav arī iespējams gadījums, kad ir tieši 0 pāra skaitļi un 4 nepāra skaitļi. Lai to pierādītu, mums būs vajadzīga lemma par nepāra skaitļu kvadrātu dalīšanu ar 4. To pierādīsim vispirms.

Lemma. Nepāra skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumu 1.

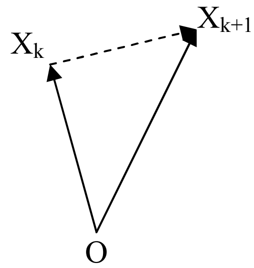
Pierādījums. Jebkuru nepāra skaitli var uzrakstīt formā: $2k+1$, $k \in Z$. Kāpinot šo skaitli kvadrātā, iegūstam: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$. Lai nepāra skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dotu atlikumu 1, arī izteiksmei $4 \cdot (k^2 + k) + 1$, dalot ar 4, jādod atlikums 1. Redzam, ka šīs izteiksmes pirmais saskaitāmais $4 \cdot (k^2 + k)$ noteikti dalās ar 4 (dod atlikumu 0), jo satur 4 kā reizinātāju. Bet otrais apskatāmās izteiksmes saskaitāmais 1 ar 4 nedalās un dod atlikumu 1. Tātad arī visa izteiksme $4 \cdot (k^2 + k) + 1$, dalot ar 4, dod atlikumu 1. Bet, tā kā jebkura nepāra skaitļa kvadrāts $(2k+1)^2$ ir vienāds ar šādu izteiksmi, tad esam pamatojuši, ka nepāra skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumu 1.

Ja x, y un z ir nepāra skaitļi, tad vienādojuma kreisā puse uzrakstāma šādi:
$x^2 + y^2 + z^2 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 = 4(a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c) + 3$. Tātad vienādojuma kreisā puse dod atlikumu 3, dalot ar 4. Tā kā vienādojuma labajā pusē ir t^2 un t ir nepāra skaitlis, tad labā puse dod atlikumu 1, dalot ar 4. Tātad vienādība neizpildās un nav iespējams gadījums, kad ir 0 pāra skaitļi un 4 nepāra skaitļi.

26.11.4. Atbilde: skudra atradīsies regulārā daudzstūra centrā.

Pierādījums: ar O apzīmēsim regulāra n-stūra centru. Pierādīsim teorēmu: pēc k posmu veikšanas skudra atradīsies tādā punktā X_k, ka

$$\overrightarrow{OX_k}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\ldots+\overrightarrow{OA_{i_k}}}{k+1}.$$



7A. zīmējums

Pierādīsim, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi.
Bāze: ja k=0, tad skudra nav nogājusi nevienu posmu un atrodas punktā $X_0=A_1$, un $\overrightarrow{OA_1}=\frac{\overrightarrow{OA_1}}{0+1}$.

Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka teorēmā dotā formula ir patiesa k posmiem:

$$\overrightarrow{OX_k}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\ldots+\overrightarrow{OA_{i_k}}}{k+1}.$$

Induktīvā pāreja: pierādīsim, ka formula ir patiesa arī k+1 posmiem. Skudra (k+1)-jā posmā pārvietojas par vektoru $\frac{1}{k+2}\overrightarrow{X_kA_{i_{k+1}}}$. (Pēc uzdevuma nosacījumiem (k+1)-ās virsotnes virzienā skudra norāpo $\frac{1}{k+2}$ daļu no vektora $\overrightarrow{X_kA_{i_{k+1}}}$ garuma.) Zinām, ka vektors $\overrightarrow{X_kA_{i_{k+1}}}$ apraksta virzienu no punkta X_k uz virsotni $A_{i_{k+1}}$ (tā ir nākamā virsotne, kuru skudra bija paredzējusi apciemot). Vektors no centra līdz jauniegūtajam punktam, kurā skudra pārdomāja turpmāk neiet (k+1)-ās virsotnes virzienā, ir $\overrightarrow{OX_{k+1}}$.

7A. zīmējumā redzamais vektors $\overrightarrow{X_kX_{k+1}}$ ir $\frac{1}{k+2}\overrightarrow{X_kA_{k+1}}$, jo, esot tieši punktā X_k, skudra pārdomāja iet virsotnes A_{k+1} virzienā. Izmantojot vektoru saskaitīšanas likumu, varam rakstīt, ka

$\overrightarrow{OX_{k+1}}=\overrightarrow{OX_k}+\frac{1}{k+2}\overrightarrow{X_kA_{i_{k+1}}}$ (izmantojot vektoru atņemšanas likumu, zinām, ka $\overrightarrow{X_kA_{i_{k+1}}}=\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}-\overrightarrow{OX_k}$)

$=\overrightarrow{OX_k}+\frac{1}{k+2}(\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}-\overrightarrow{OX_k})=$ (atveram iekavas)

$=\overrightarrow{OX_k}-\frac{1}{k+2}\overrightarrow{OX_k}+\frac{1}{k+2}\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}=$ (savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$$=\frac{k+1}{k+2}\overrightarrow{OX_k}+\frac{1}{k+2}\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}=$$ (no induktīvā pieņēmuma zinām, ka $\overrightarrow{OX_k}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+...+\overrightarrow{OA_{i_k}}}{k+1}$)

$$=\frac{(k+1)}{(k+2)}\frac{(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+...+\overrightarrow{OA_{i_k}})}{(k+1)}+\frac{1}{k+2}\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}=$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+...+\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}}{k+2}$$

Tātad esam pierādījuši, ka $\overrightarrow{OX_{k+1}}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+...+\overrightarrow{OA_{i_{k+1}}}}{k+2}$.

Tāpēc pēc n-1 posma veikšanas skudra atradīsies tādā punktā B, ka $\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}}{n}$. Ja varēsim pierādīt, ka $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$, tad skudra pēc n-1 posma būs tādā punktā B, ka $\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. Tas nozīmē, ka O sakrīt ar B un skudra būs nonākusi n-stūra centrā.

Pierādīsim, ka $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$, pieņemot pretējo, ka $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{\Delta}\neq\vec{0}$. Apskatīsim, par ko pārveidojas apskatāmo vektoru summa, rotējot vektoru sistēmu ap punktu O par leņķi $\frac{2\pi}{n}$. Tad jaunais vektors $\overrightarrow{OA_{1jauns}}$ attēlosies kā vektors $\overrightarrow{OA_2}$, jaunais vektors $\overrightarrow{OA_{2jauns}}$ attēlosies kā vektors $\overrightarrow{OA_3}$, utt., jaunais vektors $\overrightarrow{OA_{njauns}}$ attēlosies kā vektors $\overrightarrow{OA_1}$. Izpildot šādu rotāciju, visu pagriezto (jauno) vektoru summa ir

$$\overrightarrow{OA_{1jauns}}+\overrightarrow{OA_{2jauns}}+...+\overrightarrow{OA_{n\,jauns}}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+...+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_1}.$$

Tā kā saskaitāmo secība neietekmē summas vērtību, tad no pieņēmuma zinām, ka vienādības labjā pusē esošā summa ir vienāda ar vektoru $\vec{\Delta}$. Bet no otras puses zinām, ka pagriežot visus saskaitāmos par leņķi $\frac{2\pi}{n}$, arī summas vektoram būtu jāpagriežas par $\frac{2\pi}{n}$ un tas nevarētu sakrist ar vektoru $\vec{\Delta}$. Esam ieguvuši pretrunu: no vienas puses pagriezto vektoru summai jābūt $\vec{\Delta}$, bet no otras puses tā nevar būt $\vec{\Delta}$. Tātad sākotnējais pieņēmums bija nepatiess un $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Esam pierādījuši, ka skudra kustības beigās atradīsies daudzstūra centrā.

26.11.5. Pierādījums: ievērojam, ka

$ab + bc + cd + da =$	(iznesam kopīgo reizinātāju)
$= b(a + c) + d(a + c) =$	(iznesam kopīgo reizinātāju (a+c))
$= (a + c)(b + d) =$	(no dotās vienādības ir zināms, ka a+b+c+d=0 jeb b+d=-a-c. Tātad b+d varam aizstāt ar –(a+c))
$= (a + c) \cdot (-(a + c)) =$	
$= -(a + c)^2 \leq 0$	(tā kā jebkura skaitļa kvadrāts ir lielāks vai vienāds ar 0, tad skaitļa kvadrāts ar mīnusa zīmi noteikti ir mazāks vai vienāds ar 0)

Apskatot pārveidojumu sākumu un beigas, redzam, ka **ab+bc+cd+da $\leq$ 0.**

No otras puses, zinām, ka

$1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$	
$= (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) \geq$	
$\geq \frac{1}{2}((a + c)^2 + (b + d)^2) \geq$	(izmantojam faktu, ka $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy$, kur $x \geq 0, y \geq 0$ (apzīmēsim: $x = \lvert a + c \rvert$ un $y = \lvert b + d \rvert$, jāņem izteiksmju moduļi, lai izpildītos nosacījumi $x \geq 0$ un $y \geq 0$). Pamatosim: zinām, ka $(x - y)^2 \geq 0$. Izpildot kāpināšanu, iegūstam, ka $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, tad $x^2 + y^2 \geq 2xy$ un $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy$)
$\geq \lvert a + c \rvert \cdot \lvert b + d \rvert$.	

Apskatot pārveidojumu sākumu un beigas, redzam, ka $1 \geq \lvert a + c \rvert \cdot \lvert b + d \rvert$, bet pēc moduļu īpašībām varam nevienādību pārveidot dubultajā nevienādībā bez moduļiem: $-1 \leq (a + c)(b + d) \leq 1$. Bet, tā kā (a+c)(b+d)=ab+bc+cd+da, tad esam ieguvuši, ka $-1 \leq ab + bc + cd + da$. Apvienojot ar iepriekš iegūto $ab + bc + cd + da \leq 0$, iegūstam uzdevumā prasīto, ka $-1 \leq ab + bc + cd + da \leq 0$.

12. klase

26.12.1. Atbilde: Vienādojumam ir 1 reāla sakne.

Pierādījums: apskatīsim funkciju $f(x)=x^3+x^2$. Mūsu uzdevums ir atrast, pie cik dažādām x vērtībām funkcijas vērtība ir 1. Redzam: ja $x \geq 0$, tad funkcija ir augoša. Tātad arī funkcijas vērtībai 1 atbilst ne vairāk kā viena x vērtība. Ievietojot x vietā attiecīgi 0 un 1, iegūstam, ka $f(0)=0<1$ un $f(1)=2>1$. No tā seko, ka vienādojumam eksistē atrisinājums α, kur $1<\alpha<2$.

Tagad mums jānoskaidro, vai vienādojumam ir vēl kāds atrisinājums, ja $x<0$. Ja $x=-1$, tad f(x)=0. Bet, ja $x<-1$, tad $f(x)<0$. Pamatosim: zinām, ka $\left|x^3\right|>\left|x^2\right|$, ja $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, tātad $f(x)=-\left|x^3\right|+\left|x^2\right|<0$. No tā, ka $f(x)<0$, zināms, ka izpildās arī nevienādība $f(x)<1$. Tas nozīmē, ka intervālā $(-\infty;-1)$ vienādojumam sakņu nav, jo zināms, ka $f(x)<0$.

Tātad, ja vienādojumam ir vēl kāda sakne, tad tā ir vēl nepārbaudītajā intervālā $(-1;0)$. Bet, ja $-1<x<0$, tad $\left|x^3\right|<\left|x^2\right|$ un $x^3+x^2=|x|^2-|x|^3$. Tā kā $-1<x<0$, tad $|x|^2<1$, bet tad $f(x)=-\left|x^3\right|+\left|x^2\right|<-\left|x^3\right|+1<1$. Tātad intervālā $(-1;\ 1)$ vienādojumam sakņu nav.

26.12.2. Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, uzrādīt visas iespējamās funkcijas; otrkārt, pamatot, ka neviena cita funkcija neder.

- **Atbilde:** $f(x)=x$. Pārbaude parāda, ka šī funkcija apmierina visus uzdevuma nosacījumus.
- **Pierādījums:** ievietosim $x=0$ a) nosacījumā; seko, ka $f(0)\leq 0$. Bet, ievietojot b) nosacījumā $x=y=0$, seko, ka $f(0)\leq f(0)+f(0)$, kas ir ekvivalents nevienādībai $f(0)-2f(0)\leq 0$. Iegūstam, ka $-f(0)\leq 0$ jeb $f(0)\geq 0$. No a) nosacījuma esam ieguvuši, ka $f(x)\leq 0$, ja x=0, bet no b) nosacījuma ieguvām, ka $f(x)\geq 0$, ja x=0. No tā seko, ka f(x)=0, ja x=0.

  Ievietojot $y=-x$ b) nosacījumā, iegūstam: $f(x+(-x))\leq f(x)+f(-x)$ jeb $f(0)\leq f(x)+f(-x)$. Tā kā f(0)=0, tad varam rakstīt, ka

  $f(x)+f(-x)\geq 0$ (1)

  No a) nosacījuma zinām, ka $f(x)\leq x$ (2)

  un $f(-x)\leq -x$ (3).

Saskaitot (2) ar (3), iegūstam, ka $f(x)+f(-x)\le 0$ (4).

Salīdzinot (1) ar (4), iegūstam, ka $f(x)+f(-x)=0$. Bet, tā kā ir spēkā nevienādības (2) un (3), tad $f(x)+f(-x)\le x+(-x)\le 0$ un vienādība $f(x)+f(-x)=0$ iespējams tikai, ja f(x)=x un $f(-x)=-x$.

26.12.3. Atbilde: Jā, var.

Pierādījums: izvēlēsimies 5 punktus kā 5 ložu centrus. Konstruēsim šīs lodes tā, lai atbilstošajiem ložu centriem izpildītos uzdevumā aprakstītās īpašības.

Aplūkosim telpā tādas 5 lodes, kuras savstarpēji ārēji pieskaras viena otrai un jebkuru divu ložu rādiusu summas nav vienādas. Pamatosim, ka ir iespējams atrast šādas 5 lodes.

Telpā novietosim 4 lodes ar dažādiem rādiusiem tā, lai tās visas pieskaras viena otrai. Šo ložu rādiusus ņemsim M+1, M+2, M+4 un M+8 kur M – ļoti liels skaitlis. Šo ložu centri neatrodas vienā plaknē. Piektā lode būs izvēlēta ar tik mazu rādiusu, lai to varētu novietot „pa vidu" starp šīm 4 lodēm un lai tā pieskartos katrai no šīm 4 lodēm tieši vienā punktā.

Tā kā uzdevumā prasītos 5 punktus izvēlamies kā šo ložu centrus, tad skaidrs, ka attālumi starp katriem diviem no tiem ir dažādi. Pamatosim: zinām, ka visām lodēm rādiusi ir atšķirīgi. Bet attālums starp jebkuriem diviem ložu centriem, piemēram, starp ložu A un B centriem, ir attiecīgo ložu A un B rādiusu summa. Apskatīsim visas iespējamās sākotnējo četru ložu rādiusu summas pa divi (kas sakrīt ar visiem iespējamiem attālumiem starp to centriem):

M+1+M+2=2M+3 M+2+M+4=2M+6 M+4+M+8=2M+12

M+1+M+4=2M+5 M+2+M+8=2M+10

M+1+M+8=2M+9

Redzam, ka nekādi divi attālumi starp sākotnējo ložu centriem nav vienādi.

Ja piektās lodes rādiusu apzīmēsim ar r, tad attālumi starp tās centru un sākotnējo ložu centriem ir M+1+r; M+2+r; M+4=r; M+8+r. Savā starpā tie visi atšķiras. Ja M ir ļoti liels skaitlis, tad tie atšķiras arī no sešiem agrāk aprēķinātajiem attālumiem, jo $r\approx$ *l*-M, kur *l* - attālums starp tāda regulāra tetraedra virsotni un centru, kuram visu šķautņu garumi ir 2M, t.i., $r\approx M\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)<0{,}23M$.

Tātad visi 10 attālumi starp izvēlēto piecu ložu centriem ir dažādi.

Pamatosim, ka visām 5 posmu slēgtām lauztām līnijām, kuru virsotnes ir šie punkti, garumi ir vienādi. Tas seko no tā, ka katras šādas lauztas līnijas garums ir visu ložu divkāršotu rādiusu summa. Bet šī summa nemainās atkarībā no tā, kā veidota slēgtā lauztā līnija.

Tātad esam pamatojuši, ka telpā iespējams novietot 5 punktus tā, lai izpildītos uzdevumā dotās īpašības.

26.12.4. Atbilde: S(n)= $2+\frac{4^n-1}{3}-1=\frac{4^n+2}{3}$. **Pierādījums:** apzīmēsim meklēto summu ar S(n). Ja n=1, tad apskatāmie skaitļi ir $\{1, 2\}$ un to lielāko nepāru dalītāju summa S(1)=2. Ja n=k, tad apskatāmie skaitļi ir $\{1, 2, \ldots, 2^k\}$, bet, ja n=k+1, tad apskatāmie skaitļi ir no 1 līdz $2^{k+1}=2\cdot 2^k$ (tātad apskatāmo skaitļu ir divreiz vairāk), t.i., $\{1, 2, \ldots, 2^k, 2^k+1, 2^k+2, \ldots 2\cdot 2^k\}$. Otro kopu no pirmās var iegūt sekojoši: pareizināt visus pirmās kopas elementus ar 2 un pievienot nepāra skaitļus 1, 3, 5,..., 2^{n+1}-1. Pareizinot ar 2, mēs iegūsim visus otrās kopas pāra skaitļus, šīs kopas skaitļu lielāko nepāra dalītāju summa ir **S(k)** (tāda pati kā pirmās kopas nepāra dalītāju summa). Pamatosim: pareizinot ar 2, visiem pirmās kopas skaitļiem parādās vēl viens reizinātājs 2, bet, tā kā meklējam lielāko **nepāra** dalītāju, tad šis 2 neietekmē iznākumu. Tātad otrās kopas lielāko nepāra dalītāju summa ir S(k).

Skaitļu 1, 3, 5,..., 2^{k+1}-1 lielākie nepāra dalītāji ir viņi paši, tāpēc to summa ir 1+3+...+(2^{k+1}-1). Atrodam izteiksmes vērtību pēc aritmētiskās progresijas summas formulas, t.i., $\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. Tā kā $a_1+a_n=1+(2^{k+1}-1)=2^{k+1}$ un n= $\frac{2^{k+1}}{2}=2^k$, tad summa ir $\frac{2^{k+1}\cdot 2^k}{2}=2^k\cdot 2^k=4^k$.

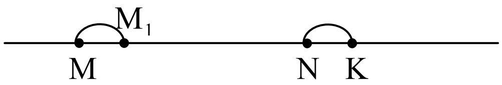
Tāpēc kopējā k+1 skaitļu lielāko nepāra dalītāju summa ir $S(k+1)=S(k)+4^k$.

Pēc tikko izteiktās formulas varam iegūt, ka S(2)=S(1)+4^1, S(3)=S(2)+4^2=S(1)+4^1+4^2 utt. Turpinot iegūsim, ka S(n)=S(1)+4^1+...+4^{n-1}. Pēc ģeometriskās progresijas summas formulas S(n)= $2+\frac{4^n-1}{3}-1=\frac{4^n+2}{3}$

26.12.5. Pierādījums: vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. Ja 3 figūriņas atrodas uz 1 taisnes, kas paralēla x vai y asij, tad pārbīdīšanu iespējams veikt tā, lai jebkuras 2 brīvi izvēlētas figūriņas atrastos vienā punktā.

Pierādījums. Uz taisnes esošās 3 figūriņas secīgi (virzienā no negatīvajām koordinātām uz pozitīvajām) apzīmēsim ar M, N un K (skat. zīm. 8A.). Ja $MN \geq NK$, pārbīdām figūriņu M par vektoru $\overrightarrow{NK}$ uz figūriņu N un K pusi (ja MN<NK, tad pārbīdām K par $\overrightarrow{NM}$). Jauniegūto figūriņas M atrašanās vietu apzīmēsim ar M_1. Acīmredzami, ka attālumu summa starp punktiem M_1, N un K ir mazāka nekā attālumu summa starp punktiem M, N un K. Bet, tā kā šī summa ir nenegatīvs vesels skaitlis, tad samazināšanās nevar turpināties bezgalīgi. Tas nozīmē, ka, atkārtojot šādus gājienus, iestāsies brīdis, kad pārbīdīšana vairs nevarēs notikt. Bet tad divas figūriņas atrodas vienā punktā. Ja tās nav vajadzīgās, piemēram, sakrīt M un K, bet jāsakrīt M un N, tad pārbīdām K par $\overrightarrow{MN}$ un pēc tam N par $\overrightarrow{KM}$.

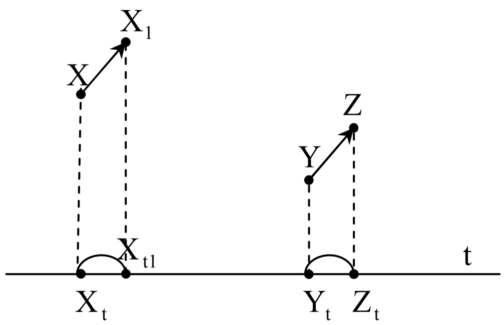


8A. zīmējums

Lemma pierādīta.

Tagad apskatīsim 4 figūriņas A, B, C, D un to projekcijas A_t, B_t, C_t, D_t uz brīvi izvēlētas horizontālas taisnes t. Pieņemsim, ka mums jāsavieto A un B.

Izmantojot lemmu, varam panākt, lai figūriņu projekcijas A_t, B_t, C_t, kas atrodas uz vienas taisnes, atrastos vienā punktā. Aprakstīsim rīcības algoritmu: lai kaut kādas figūriņas X projekciju X_t (skat. zīm. 9A.) pārbīdītu pa taisni t par vektoru $\overrightarrow{Y_tZ_t}$ uz punktu X_{t1}, tad plaknē pārvietojam figūru X par vektoru $\overrightarrow{YZ}$.



9A. zīmējums

Pamatojoties uz lemmu, varam panākt, ka sakrīt A_t un B_t. Pēc tam, atkal pamatojoties uz lemmu, varam panākt, ka sakrīt A_t, B_t, C_t (ja jāpārbīda A_t un B_t par vektoru $\pm\overrightarrow{C_tD_t}$, tad vispirms bīda vienu no tiem, pēc tam otru).

Esam ieguvuši situāciju, kad A_t, B_t, C_t sakrīt, tas nozīmē, ka A, B, C atrodas uz vienas taisnes, kas perpendikulāra t. Līdzīgi, izmantojot lemmu, varam panākt, lai sakrīt arī A un B.

Latvijas 27. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

27.9.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.9.1. atrisinājumu.

a) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** prasītais nav iespējams, jo pat četru lielāko iespējamo saskaitāmo summa ir mazāka par 2.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<2$$

b) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** kā 4 naturālos skaitļus var ņemt 3, 12, 15, 20. To katrs var pārbaudīt pastāvīgi.

Parādīsim, kā varēja nonākt līdz šai atbildei.

Zinām, ka $\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$, bet $\frac{1}{72}$ var izteikt kā $\frac{1}{72}=\frac{1}{144}+\frac{1}{144}$. Zināms, ka $144=12^2$.

Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem naturālajiem skaitļiem jābūt dažādiem, tad vienu no daļām $\frac{1}{144}$ vajag pārveidot savādāk:

$$\frac{1}{144}=\frac{1}{3^2\cdot4^2}= \text{(skaitītāju un saucēju pareizinām ar } 5^2\text{)}$$

$$=\frac{5^2}{3^2\cdot4^2\cdot5^2}= \text{(zinām, ka } 5^2=3^2+4^2\text{)}$$

$$=\frac{3^2+4^2}{3^2\cdot4^2\cdot5^2}= \text{(katru saskaitāmo skaitītājā varam atsevišķi izdalīt ar saucēju)}$$

$$=\frac{3^2}{3^2\cdot4^2\cdot5^2}+\frac{4^2}{3^2\cdot4^2\cdot5^2}..$$

Kopā ņemot iegūstam, ka $\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{225}+\frac{1}{400}$.

27.9.3. Pierādījums: (skat. 10A. zīm.)

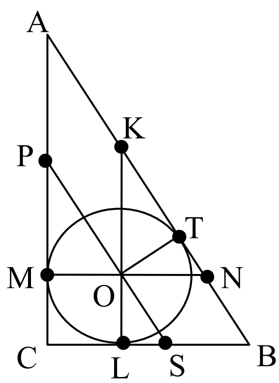
1) BNOS ir paralelograms, jo $BS\parallel NO$ un $SO\parallel BN$.

2) OL – augstums starp paralelograma malām NO un BS.

OT – augstums starp paralelograma malām SO un BN

3) OL=OT kā riņķa līnijas rādiusi

4) Tā kā BNOS ir paralelograms ar vienādiem



10A. zīmējums

augstumiem, tad tas ir rombs. Tāpēc BN=BS.

5) BT=BL kā pieskaru nogriežņi no viena punkta B

6) Tā kā BT=BL un BN=BS, tad arī NT=LS.

7) Līdzīgi pierāda, ka TK=MP.

8) Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam, ka NK=MP+LS

27.9.4.

a) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** ar x un y apzīmējam skaitļus, ko izvēlamies kā reizināmos. Zinām, ka $1+2+...+10=55$. Pēc uzdevumā dotā, 2 naturālu skaitļu reizinājums (no 1 līdz n) ir vienāds ar pārējo skaitļu summu, tātad $x \cdot y = 55-(x+y)$. Iegūto vienādību var pārveidot; pārnesam x un y uz kreiso pusi un iegūstam

$xy + x + y = 55$; iznesam x pirms iekavām un pieskaitām abām vienādojuma pusēm 1.

Iegūstam $x(y+1)+y+1=56$ jeb $(x+1)(y+1)=56$.

Varam ņemt x=6, y=7.

b) Atbilde: nē, nav iespējams. **Pierādījums:** risināsim līdzīgi kā a) gadījumā. Ar x un y apzīmēsim reizinātos skaitļus. Skaitļu no 1 līdz 15 summa ir 120. Tad no uzdevumā dotā seko, ka

$x \cdot y = 120-(x+y)$. Veicot pārveidojumus, iegūstam

xy+x+y=120. Iznesot pirms iekavām x un pieskaitot abām vienādojuma pusēm 1, iegūstam x(y+1)+y+1=120 jeb (1+x)(1+y)=121.

Iespējami tikai 2 varianti, kā, sareizinot 2 naturālus skaitļus, iegūt 121:

1) vai nu 1+x=1 un 1+y=121, vai arī 1+x=121 un 1+y=1 (neder, jo x un y neiznāk vajadzīgajās robežās)

2) vai arī 1+x=1+y=11 (neder, jo jābūt $x \neq y$).

Tātad prasītais nav iespējams.

27.9.5. Pierādījums: apskatīsim lampu, no kuras iziet lielākais daudzums vienas krāsas vītņu. Pieņemsim, ka tā ir lampa A ar x baltām vītnēm. Parādīsim, ka zirneklis var rāpot pa baltajām vītnēm. (Ja no lampas A baltās un sarkanās vītnes iziet vienādā skaitā, tad viņš var rāpot arī pa sarkanajām vītnēm). Lampas, kas savienotas ar A ar baltām vītnēm, sauksim par 1. grupas lampām, bet lampas, kas savienotas ar A ar sarkanām vītnēm, sauksim par 2. grupas lampām. Pieņemsim, ka B ir otrās grupas lampa, tad B ir savienota ar A ar sarkanu vītni. Ja B arī ar visām pirmās grupas lampām būtu savienota ar sarkanām vītnēm, tad no B izietu vismaz x+1 sarkana vītne

(x vītnes uz 1. grupas lampām un 1 vītne uz A), bet no lampas A iziet tikai x vienas krāsas vītnes. Esam ieguvuši pretrunu, jo pieņēmām, ka no A iziet lielākais daudzums vienas krāsas vītņu. Tas nozīmē, ka B ar kādu no 1. grupas lampām ir savienota ar baltu vītni, tātad no B uz A var nokļūt, rāpojot pa 2 baltām vītnēm (caur 1. grupas lampu). Līdzīgi to var pierādīt jebkurai lampai, kas savienota ar A ar sarkanu vītni.
Apskatīsim iespējamos variantus:

1) Ja zirneklītim jānokļūst no 1. grupas lampas uz 1. grupas lampu, tad zirneklītim jārāpo pa baltu vītni uz lampu A un no lampas A pa baltu vītni uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklēta 1 lampa.
2) Ja zirneklītim jānokļūst no 2. grupas lampas uz 2. grupas lampu, tad zirneklītim jārāpo pa divām baltām vītnēm uz lampu A un no lampas A pa 2 baltām vītnēm uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklētas 3 lampas.
3) Ja zirneklītim jānokļūst no 1. grupas lampas uz 2. grupas lampu, tad zirneklītim jārāpo pa vienu baltu vītni uz lampu A un no lampas A pa 2 baltām vītnēm uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklētas 2 lampas.
4) Ja zirneklītim jānokļūst no 2. grupas lampas uz 1. grupas lampu, tad viņam jārāpo pa divām baltām vītnēm uz lampu A un no lampas A pa 1 baltu vītni uz vajadzīgo. Tātad pa ceļam apmeklētas 2 lampas.

10. klase

27.10.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.10.1. atrisinājumu.

27.10.2. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast un parādīt piemēru, kas apmierina visus uzdevuma nosacījumus; otrkārt, pierādīt, ka citi varianti nav iespējami.

- **Atbilde:** prasītie skaitļi ir 3, 103 un 1033.
- **Pierādījums:** zinām, ka skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Līdzīgi, ja skaitlis, dalot ar 3, dod kādu atlikumu, tad, šī skaitļa ciparu summu dalot ar 3, iegūsim tādu pašu atlikumu.

Veselos skaitļus var iedalīt 3 grupās: tādi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1; tādi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2; tādi, kas dalās ar 3, tātad dod atlikumu 0. Apzīmēsim dotos pirmskaitļus ar x un y, kur y=x+100, un apskatīsim 3 iespējas:

1) x, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad x uzrakstāms formā $x = 3k + 2, k \in N$ vai k=0. Apskatīsim, kādu atlikumu, dalot ar 3, dod skaitlis y. Tā kā $y = x + 100 = 3k + 102$,

tad y atlikums, dalot ar 3, ir vienāds ar summas $3k+102$ atlikumu, dalot ar 3. Summa 3k+102, dalot ar 3, dod atlikumu 0, jo 3k dalās ar 3 (jo satur 3 kā reizinātāju) un 102 arī dalās ar 3. Esam ieguvuši, ka y, dalot ar 3, dod atlikumu nulle, bet no tā seko, ka y nevar būt pirmskaitlis (jo pirmskaitlis dalās tikai pats ar sevi un ar 1). Tātad nav iespējams, ka x, dalot ar 3, dod atlikumu 2.

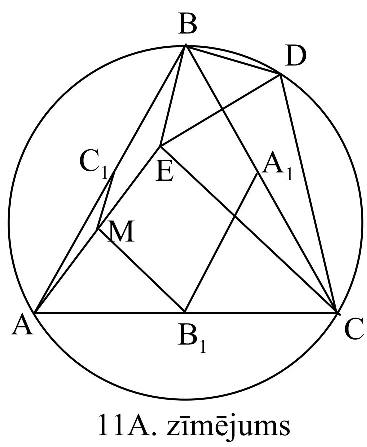
2) x, dalot ar 3, dod atlikumu 1; tad x uzrakstāms formā $x=3k+1, k \in N.$. Varam izteikt y kā $y=x+100=3k+101$; tad y, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (3k dalās ar 3, jo satur 3 kā reizinātāju, bet 101, dalot ar 3, dod atlikumu 2). Apskatīsim skaitli, ko pēc uzdevuma nosacījumiem veido, pierakstot x un y vienu otram galā. Skaidrs, ka skaitļa ciparu summa nemainīsies atkarībā no tā, kuru skaitli rakstīsim kā pirmo un kuru – kā otro.

Ir zināms, ka skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 3. Tāpēc x un y ciparu summas dod attiecīgi atlikumus 1 un 2, dalot ar 3, t.i., tās uzrakstāmas formā 3a+1 un 3b+2, kur $a \in Z, b \in Z.$ Tāpēc katram no skaitļiem $\overline{xy}$ un $\overline{yx}$ ciparu summa ir $(3a+1)+(3b+2)=3(a+b+1)$ un dalās ar 3; tāpēc gan $\overline{xy}$, gan $\overline{yx}$ dalās ar 3. Tā kā abi šie skaitļi lielāki par 3, tad tie nav pirmskaitļi.

3) x, dalot ar 3, dod atlikumu 0. Skaitlis x var būt pirmskaitlis tikai, ja tas ir 3 (tas nevar būt neviens cits skaitlis, jo zinām, ka tas dalās ar 3). Tādā gadījumā y=103 un $\overline{yx}$=1033, šis variants apmierina visus uzdevuma nosacījumus (3, 103 un 1033 ir pirmskaitļi, pilnā uzdevuma risinājumā tam jābūt pārbaudītam).

Izveidojot skaitli $\overline{xy}=3103$, redzam, ka tas nav pirmskaitlis, jo $3103=29\cdot 107$. Esam apskatījuši visus iespējamos variantus un esam pamatojuši, ka mūsu atrastais variants (skaitļi 3, 103 un 1033) ir vienīgais iespējamais.

27.10.3. Pierādījums: skat. 11A. zīm.



11A. zīmējums

Lai pierādītu prasīto, mums jāpierāda, ka četrstūrim $C_1MB_1A_1$ var apvilkt riņķa līniju. Kā zināms, četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir 180^o.

1) $MC_1 \parallel EB$ kā trijstūra AEB viduslīnija.
2) $MB_1 \parallel EC$ kā trijstūra AEC viduslīnija.

3) Tā kā $MC_1 \parallel EB$ un $MB_1 \parallel EC$, tad $\angle C_1MB_1 = \angle BEC$, jo leņķi starp taisnēm, kas ir pa pāriem paralēlas, ir vienādi.

4) $\Delta BEC = \Delta BDC$ pēc pazīmes mmm: mala BC – kopīga, BE=BD un EC=DC, jo pēc dotā punkts E ir simetrisks punktam D attiecībā pret BC.

5) $A_1B_1 \parallel BA$ un $A_1C_1 \parallel AC$ kā trijstūra ABC viduslīnijas.

No tā seko, ka četrstūris $C_1A_1B_1A$ ir paralelograms.

6) Apskatīsim summu $\angle C_1MB_1 + \angle C_1A_1B_1$; pierādot, ka tā vienāda ar 180°, būsim pamatojuši, ka četrstūrim $C_1MB_1A_1$ var apvilkt riņķa līniju.

7) $\angle C_1MB_1 + \angle C_1A_1B_1 = \angle BEC + \angle C_1AB_1$. Pamatosim: $\angle C_1MB_1 = \angle BEC$ pēc 3) pierādītā; $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_1AB_1$ kā paralelograma pretējie leņķi.

8) Varam pārveidot $\angle BEC + \angle C_1AB_1 = \angle BDC + \angle BAC = 180°$. Pamatosim: $\angle BEC = \angle BDC$, jo vienādos trijstūros BEC un BDC attiecīgie elementi ir vienādi; $\angle C_1AB_1 = \angle BAC$ acīmredzami no zīmējuma; $\angle BDC + \angle BAC = 180°$, jo četrstūrim ABDC ir apvilkta riņķa līnija un tātad tā pretējo leņķu summa ir 180°.

9) Tātad esam pierādījuši, ka $\angle C_1MB_1 + \angle C_1A_1B_1 = 180^\circ$, tāpēc četrstūrim $C_1MB_1A_1$ var apvilkt riņķa līniju. Tātad punkts M atrodas uz tās riņķa līnijas, kura iet caur trijstūra ABC malu viduspunktiem.

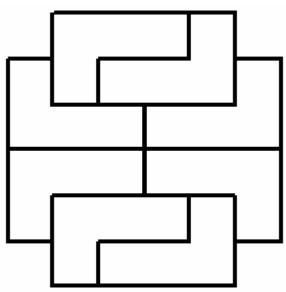
27.10.4.

a) Atbilde: jā, tas ir iespējams.

Piemērs: skat. 12A. zīm.

b) Atbilde: nē, tas nav iespējams.

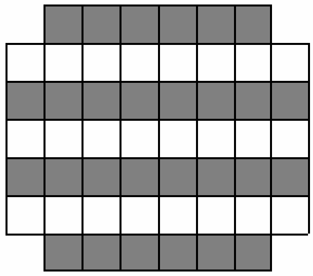
Pierādījums: pēc stūra rūtiņu izgriešanas figūra sastāvēs no $7 \cdot 7 - 4 = 49 - 4 = 45$ rūtiņām. Zināms, ka katra mazā uzdevumā dotā figūriņa sastāv no 4 rūtiņām. Tā kā 45 nedalās ar 4, tad kvadrātu, kas sastāv no $7 \cdot 7$ rūtiņām un kuram izgrieztas visas četras stūra rūtiņas, nav iespējams sadalīt mazajās figūriņās.



12A. zīmējums

c) Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Pierādījums: izkrāsosim doto „kvadrātu”, kā parādīts 13A. zīmējumā. Redzam: lai arī kā mēs liktu uzdevumā doto figūriņu, starpība starp iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaitu katrā figūriņā būs 2 (trīs iekrāsotas un viena neiekrāsota vai trīs neiekrāsotas un viena iekrāsota). Tā kā „kvadrāts” sastāv no $8 \cdot 8 - 4 = 64 - 4 = 60$ rūtiņām, tad mazo figūriņu skaits būs 60:4=15.



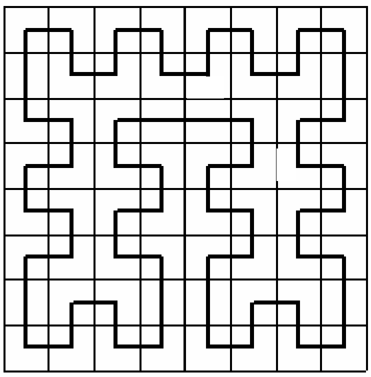
13A. zīmējums

Tā kā mazo figūriņu skaits ir nepāra skaitlis, tad iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaita starpība šajās figūriņās kopā ir uzrakstāma formā 4k+2, $k \in Z$.. Pamatosim: mazo figūriņu skaitu apzīmēsim ar 2n+1, $n \in N$. Ar a apzīmēsim to figūriņu skaitu, kurām par 2 vairāk ir iekrāsoto rūtiņu, bet ar b apzīmēsim to figūriņu skaitu, kurām par 2 vairāk ir neiekrāsoto rūtiņu. Skaidrs, ka a+b=2n+1, tāpēc vai nu a, vai b noteikti ir nepāra skaitlis (lai divu skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, vienam no saskaitāmajiem jābūt nepāra skaitlim, bet otram – pāra skaitlim). Zinām, ka katrai no 2n+1 mazajām figūriņām iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaita starpība ir 2. Tātad iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaitu starpība ir 2a-2b. Tā kā, no pāra skaitļa 2a atņemot pāra skaitli 2b, rezultāts būs pāra skaitlis, tad varam apzīmēt 2a-2b=2c. Zinām, ka c ir nepāra skaitlis, jo jau iepriekš pamatojām, ka tieši viens no skaitļiem a vai b ir nepāra. Bet tādā gadījumā c pierakstāms formā 2k+1 (k – vesels skaitlis), kas nozīmē, ka iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaita starpība pierakstāma: 2c=2(2k+1).

Apskatot doto „kvadrātu”, redzam, ka iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaita starpība ir 4. Bet 4 nav uzrakstāms formā 4k+2, ja k – vesels skaitlis. Tātad prasītais nav iespējams.

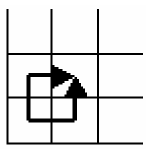
27.10.5.

a) Piemērs: skat. 14A. zīm.



14A. zīmējums

b) Pierādījums: sauksim rūtiņu par īpašu, ja lauztās līnijas virsotņu tajā nav. Pamatosim, ka katrai stūra rūtiņai blakus ir vismaz viena īpaša rūtiņa. Pieņemsim pretējo, ka stūra rūtiņai blakus nav nevienas īpašas rūtiņas. Tad, kā parādīts 15A. zīm., līnija ieietu vienā rūtiņā divas reizes, bet pēc uzdevuma nosacījumiem tā nedrīkst būt. Tātad mūsu pieņēmums nav pareizs un katrai stūra rūtiņai patiešām ir blakus viena īpaša rūtiņa. Tā kā kvadrātam ir 4 stūri, tad kopā ir vismaz 4 īpašas rūtiņas, tāpēc



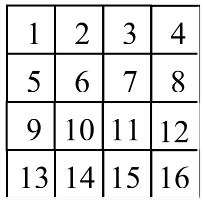
15A. zīmējums

šādas lauztas līnijas virsotņu skaits nav lielāks par $8 \cdot 8 - 4 = 64 - 4 = 60$.

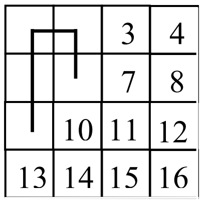
c) Pierādījums: pamatosim, ka katrā no kvadrāta ceturtdaļām ir vismaz divas īpašas rūtiņas. Tas, ka katrā kvadrāta ceturtdaļā ir vismaz viena šāda rūtiņa, seko no b) punktā pierādītā. Pierādīsim, pieņemot pretējo. Pieņemsim, ka kādā kvadrāta ceturtdaļā nav vairāk kā viena īpaša rūtiņa. Apskatīsim to kvadrāta ceturtdaļu, kurā nav vairāk kā viena īpaša rūtiņa. Tā kā kvadrāta ceturtdaļas ir simetriskas, tad varam pieņemt, ka apskatām 16A. zīm. parādīto ceturtdaļu. Numurēsim rūtiņas, kā parādīts 16A. zīmējumā.

Apskatīsim gadījumu, kad 1. rūtiņa ir savienota gan ar 2., gan ar 5. rūtiņu (tā kā no uzdevuma nosacījumiem zinām, ka lauztās līnijas virsotnei jābūt katrā kvadrāta rūtiņā, tad tā noteikti jābūt). No b) punktā pierādītā zinām, ka lauztās līnijas virsotne nevar atrasties gan 2., gan 5. rūtiņā – viena no tām ir īpaša rūtiņa. Pieņemsim, ka 5. rūtiņa ir īpaša, tas nozīmē, ka lauztā līnija no 2. rūtiņas iet uz 6. rūtiņu (skat.17A. zīm.) un no 1. rūtiņas uz 5. un tad uz 9. rūtiņu (piektajā rūtiņā lauztajai līnijai nav virsotnes, tātad tā iet taisni cauri uz 9. rūtiņu). Ja 9. rūtiņa būtu savienota ar 13. rūtiņu, tad arī 9. rūtiņa būtu īpaša, jo tajā nebūtu virsotnes, tāpēc 9. rūtiņai noteikti jābūt savienotai ar 10. rūtiņu (skat. 18A. zīm.). Līdzīgi, ja 10. rūtiņa būtu savienota ar 11. rūtiņu, tad 10. rūtiņa būtu īpaša, bet tā nevar būt, tāpēc 10. rūtiņa noteikti ir savienota ar 14. rūtiņu. Tā kā lauztai līnijai noteikti jābūt slēgtai, tad 14. rūtiņai ir noteikti jābūt savienotai ar 13. rūtiņu, citādi 13. rūtiņa paliktu tukša (bet tā nedrīkst būt), skat. 19A. zīm. No 13. rūtiņas ir tikai viena iespēja kā, turpināt lauzto līniju – uz leju, ieejot jau citā kvadrāta ceturtdaļā.

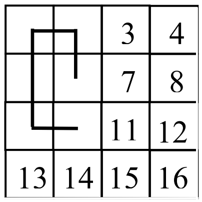
Apskatīsim, ar kādu rūtiņu savienota 6. rūtiņa. Redzam, ka 6. rūtiņa var būt savienota tikai ar 7. rūtiņu (skat. 20A. zīm.). Tā kā lauztajai līnijai noteikti jābūt slēgtai, tad 7. rūtiņai savienotai ar 3. rūtiņu, citādi 3. rūtiņa paliktu tukša (bet tā nedrīkst būt). Redzam, ka 3. rūtiņa var būt savienota tikai ar 4. rūtiņu. Ja lauztā līnija turpinātos no 4. rūtiņas pa labi uz blakus ceturtdaļu, tad 4.



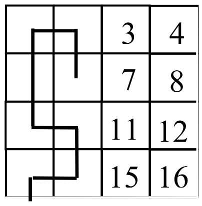
16A. zīmējums



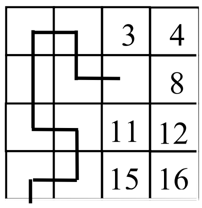
17A. zīmējums



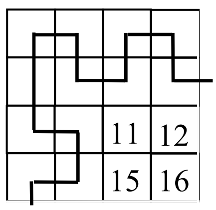
18A. zīmējums



19A. zīmējums



20A. zīmējums



21A. zīmējums

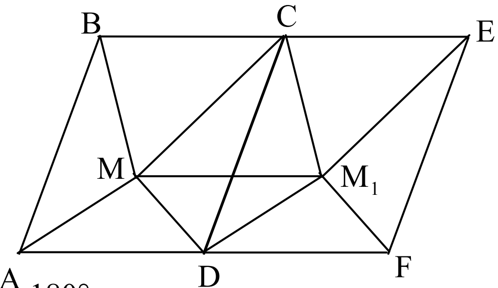
rūtiņa būtu īpaša, bet tā nevar būt, tātad 4. rūtiņa noteikti ir savienota ar 8. rūtiņu. Līdzīgi, ja lauztā līnija turpinātos no 8. rūtiņas uz leju (uz 12. rūtiņu), tad 8. rūtiņa būtu īpaša, bet tā nevar būt, tātad 8. rūtiņa ir savienota ar pa labi esošo rūtiņu no blakus ceturtdaļas (skat. 21A. zīm.).

Esam ieguvuši situāciju, kad rūtiņas 11., 12., 15. un 16. vēl ir tukšas. Pēc b) punktā pierādītā zinām: ja 11. rūtiņā vispār atradīsies lauztā līnija, tad kāda no rūtiņām tai blakus (12. vai 15. rūtiņa) būs īpaša. Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums nav pareizs un katrā kvadrāta ceturtdaļā patiešām atradīsies vismaz 2 īpašas rūtiņas. Bet tas nozīmē, ka lauztajai līnijai būs ne vairāk kā $8 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 64 - 8 = 56$ virsotnes.

11. klase

27.11.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.11.3. atrisinājumu.

27.11.2. Pierādījums:



22A. zīmējums

1) Pārbīdīsim paralelogramu ABCD par vektoru $\overrightarrow{BC}$ (skat. 22A. zīm.)

2) $\angle DM_1C = \angle AMB$ kā atbilstošie elementi vienādos paralelogramos.

3) $\angle CMD + \angle DM_1C = \angle CMD + \angle AMB = 180°$, jo $\angle DM_1C = \angle AMB$ pēc 2) un $\angle AMB + \angle CMD = 180°$ pēc uzdevumā dotā.

4) Tātad ap četrstūri MCM_1D var apvilkt riņķa līniju, jo tā pretējo leņķu summa ir $180°$.

5) $\angle CDM = \angle CM_1M$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ko savelk horda MC.

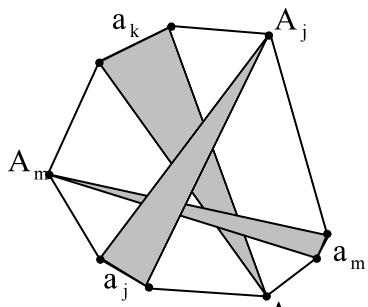
6) BCM_1M ir paralelograms, jo tā pretējās malas paralēlas pēc konstrukcijas.

7) $\angle CM_1M = \angle CBM$, jo paralelograma pretējie leņķi ir vienādi.

8) Tātad esam ieguvuši, ka $\angle CDM = \angle CM_1M = \angle CBM$. No tā seko, ka $\angle CDM = \angle CBM$.

27.11.3.

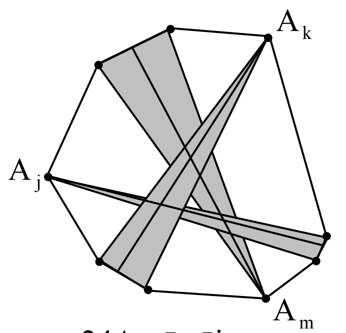
a) Pierādījums: apskatīsim staru A_1P. Ar x apzīmēsim vienā stara pusē esošo virsotņu skaitu, neskaitot virsotni A_1, tātad šajā pusē ir arī x malas, neskaitot malu, kuru krusto stars A_1P. Līdzīgi, ar y apzīmēsim otrā stara pusē esošo virsotņu skaitu, neskaitot virsotni A_1, un tātad šajā stara pusē ir arī y malas, neskaitot malu, kuru krusto stars A_1P. Tā kā malu, kuru krusto stars A_1P, neieskaitījām nevienā pusē, tad atlikušais malu skaits ir 1999 (tātad x+y=1999). Līdzīgi, nevienā pusē neieskaitījām virsotni A_1, tāpēc arī atlikušo virsotņu skaits ir 1999. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, katram staram, ko veido punkts P un virsotnes, kas atrodas A_1P vienā pusē, jākrusto daudzstūra malas stara otrā pusē. Bet, lai tas būtu iespējams, virsotņu skaitam stara vienā pusē x jābūt vienādam ar malu skaitu stara otrā pusē y. Bet, tā kā x+y=1999, tad nevar būt, ka x=y (x un y noteikti ir naturāli skaitļi). Tātad izliektā 2000-stūrī nav neviena īpaša punkta.



23A. zīmējums

b) Piemērs: skat. 24A. zīm.

Pierādījums: no a) punktā pierādītā seko, ka katram staram A_iP izpildās īpašība – abās stara A_iP pusēs esošo virsotņu (tātad arī malu) skaiti ir vienādi. (virsotni A_i neieskaitot nevienā pusē). Tā kā apskatāmā figūra ir 9-stūris, tad skaidrs, ka katra stara A_iP abās pusēs būs 4 virsotnes un 4 malas. Izvēlēsimies trīs virsotnes A_j, A_k un A_m. Stariem no šīm virsotnēm ir jākrusto attiecīgi malas a_j, a_k un a_m, tikai tad izpildās īpašība, ka katra stara abās pusēs atrodas 4 virsotnes un 4 malas. 24A. zīmējumā iekrāsotie trijstūri parāda visas iespējamās staru A_jP, A_kP un A_mP atrašanās vietas. Skaidrs, ka punktam P, caur kuru dotie stari varētu būt vilkti, būtu jāatrodas visos iekrāsotajos trijstūros. Bet, tā kā visiem dotajiem trijstūriem nav kopīgas daļas (to šķēlums ir tukša kopa), tad šādu punktu P nav iespējams atrast.



24A. zīmējums

27.11.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast visas šādas funkcijas un parādīt, ka tās apmierina uzdevuma nosacījumus; otrkārt, pierādīt, ka citu tādu funkciju nav.

Atbilde: $f(x)=x$. **Pārbaude:** funkcija $f(x)=x$ patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus, jo $f(f(x))+f(x)=f(x)+x=x+x=2x$.

Pierādījums: pamatosim, ka citu funkciju nav. Pamatosim, ka no $a \neq b$ seko $f(a)\neq f(b)$. Pamatojums: pieņemsim pretējo, ka eksistē tādi a un b, kam izpildās $a \neq b$ un $f(a)=f(b)$. Tad $f(f(a))+f(a)=f(f(b))+f(b)$, bet pēc uzdevumā dotā zināms, ka $f(f(a))+f(a)=2a$ un $f(f(b))+f(b)=2b$. Tātad $2a=f(f(a))+f(a)=f(f(b))+f(b)=2b$ un $2a=2b$ jeb $a=b$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums nav pareizs un no $a \neq b$ seko, ka $f(a)\neq f(b)$.

Ar matemātisko indukciju pamatosim, ka vienmēr f(n)=n.

Bāze: ievietojot x=1, iegūstam $f(f(1))+f(1)=2$. Tā kā funkcijas vērtības ir naturāli skaitļi un vienīgais veids, kā, saskaitot divus naturālus skaitļus, iegūt 2, ir 1+1, tad $f(1)=f(f(1))=1$.

Pieņemsim, ka apgalvojums f(n)=n pierādīts visiem naturāliem skaitļiem n no 1 līdz $k-1$. Pierādīsim, ka tas spēkā arī skaitlim k. Pieņemsim pretējo, ka $f(k)\neq k$. Tā kā visas funkcijas vērtības no 1 līdz k-1 ir aizņemtas, tad var būt tikai $f(k)>k$. Apskatīsim uzdevumā doto vienādību $f(f(x))+f(x)=2x$. Ievietosim x=k: $f(f(k))+f(k)=2k$ (1).

Zinām, ka $f(k)>k$, bet tad arī $f(f(k))>k$. Tātad varam novērtēt vienādības kreiso pusi: $f(f(k))+f(k)>k+k>2k$ (2).

No (1) un (2) redzam, ka esam ieguvuši pretrunu. Tātad pieņēmums bija aplams un f(k)=k. Izmantojot matemātisko indukciju, esam pamatojuši, ka visām n vērtībām izpildās f(n)=n.

Tātad vienīgā funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir jau atrastā $f(x)=x$.

27.11.5. Pierādījums: ievērosim, ka komandu skaits ir pāra skaitlis. Vispirms pierādīsim papildrezultātu.

<u>Lemma</u>. Ja turnīrā piedalās 2k komandas, $k \in N, k \geq 1$, un katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi, tad turnīra noslēgumā ir komanda, kas izcīnījusi vismaz k uzvaras.

<u>Pierādījums.</u> Katra komanda izspēlē tieši 2k-1 spēli. Ja nevienai komandai nav k vai vairāk uzvaru, tad katrai ir ne vairāk par (k-1) uzvarām un tātad vismaz (2k-1)-(k-1)=k zaudējumi; tātad katrai komandai uzvaru ir mazāk nekā zaudējumu, un tāpēc arī kopā visām komandām uzvaru ir mazāk nekā zaudējumu. Bet tā ir pretruna, jo katra

spēle vienai komandai nes uzvaru un otrai – zaudējumu, tāpēc to kopējiem daudzumiem jābūt vienādiem.

Saskaņā ar lemmu eksistē komanda A_1, kas izcīnījusi vismaz $\frac{1}{2}\left((n+2)\cdot 2^{n-1}-2\right)=(n+2)\cdot 2^{n-2}-1$ uzvaras. Izveidosim grupu G_1, kurā ietilpst tieši $(n+2)\cdot 2^{n-2}-1$ no tām komandām, pret kurām A_1 ir uzvarējusi. Visu pārējo komandu skaits, izņemot G_1 komandas un komandu A_1, ir

$$(n+2)\cdot 2^{n-1}-2-\frac{1}{2}\left((n+2)\cdot 2^{n-1}-2\right)-1=$$

$$=\frac{1}{2}\left((n+2)\cdot 2^{n-1}-2\right)-1=\left(n+2\right)\cdot 2^{n-2}-2.$$ Apskatām šo komandu „iekšējo turnīru”.

Kā iepriekš varam atrast tādu komandu A_2 un no $\left(n+2\right)\cdot 2^{n-3}-1$ komandām sastāvošu grupu G_2, ka A_2 uzvarējusi pret visām G_2 grupas komandām. Līdzīgi turpinot, atrodam A_3 un G_3, A_4 un G_4, ..., A_{n-1} un G_{n-1}. Šai brīdī atlikušo „pārējo” komandu skaits ir $\left(n+2\right)\cdot 2^{n-n}-2=n;$ apzīmējam šo pārējo n komandu grupu ar B.

Šķirojam divus gadījumus:

I Eksistē tāda komanda C, kas uzvarējusi pret visām grupas B komandām. Ja tā ir kāda no $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, par mūsu meklētajām komandām der šīs (n-1) komandas. Ja tā ir kāda cita komanda, tad par mūsu meklētajām der n komandas $C, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

II Tādas komandas C nav. Tas nozīmē, ka katra komanda, kas neietilpst grupā B, zaudējusi vismaz vienai no B komandām. Tad par uzdevumā meklētajām komandām var ņemt n komandas, kas veido grupu B.

12. klase

27.12.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.12.1. atrisinājumu.

27.12.2. Atbilde: vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Pierādījums: izteiksim skaitļus a un b formā: $a=2^x\cdot n, b=2^y\cdot m$, kur n un m – nepāra skaitļi. Skaitļus a un b noteikti varam uzrakstīt šādā formā (ja skaitlis nesatur 2 kā reizinātāju, tad $x=0$ un $2^x=1$). Pieņemsim, ka $x\geq y$. Apskatīsim summu

$2a + b = 2^{x+1} \cdot n + 2^y \cdot m = 2^y\left(2^{x+1-y} \cdot n + m\right)$. Tad dotais vienādojums pārrakstāms formā: $2^y\left(2^{x+1-y} \cdot n + m\right) \cdot (2b + a) = 2^c$ un reizinātājam $\left(2^{x+1-y} \cdot n + m\right)$ jābūt 2^c dalītājam. Bet, tā kā skaitlis $2^{x+1-y} \cdot n$ ir pāra skaitlis (jo satur kā reizinātāju 2), bet m ir nepāra skaitlis, tad skaitlis $\left(2^{x+1-y} \cdot n + m\right)$ ir nepāra skaitlis, kurš noteikti lielāks par 1, un tas nevar būt skaitļa 2^c dalītājs. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

27.12.3. Atbilde: nē, tāda lode neeksistē.

Pierādījums: pierādīsim, pieņemot pretējo, ka tāda lode eksistē. Lodes pieskares, kas novilktas no viena punkta ir vienādas savā starpā. Pamatojums: tā kā pieskare ar rādiusu, kas vilkts no pieskaršanās punkta, veido taisnu leņķi, tad pēc Pitagora teorēmas varam aprēķināt, ka pieskaru garumi ir $\sqrt{x^2 - r^2}$, kur x ir attālums no lodes centra līdz punktam, no kura vilkta pieskare, bet r ir lodes rādiuss.

Tātad katra piramīdas šķautne sastāv no divām pieskarēm, kas vilktas no piramīdas virsotnēm. Punktus, kuros lode pieskaras piramīdas šķautnēm, apzīmēsim: X_1 uz AB; X_2 uz BC; X_3 uz AC; X_4 uz AD; X_5 uz BD; X_6 uz CD. Pamatosim, ka $AB + CD = AD + BC = AC + BD$ (1).

Izmantojot apzīmējumus, (1) varam pārrakstīt šādi:

$$AX_1 + X_1B + CX_6 + X_6D = AX_4 + X_4D + BX_2 + X_2C = AX_3 + X_3C + BX_5 + X_5D \quad (2).$$

Tā kā no pieskaru īpašībām seko, ka $AX_1 = AX_3 = AX_4$; $BX_1 = BX_2 = BX_5$; $CX_2 = CX_3 = CX_6$ un $DX_4 = DX_5 = DX_6$, tad vienādība (2) ir patiesa. Tātad arī vienādība (1) ir patiesa.

Bet, ja vienādība (1) ir patiesa, tad visu šķautņu garumu summu var pierakstīt kā $3 \cdot (AB + CD)$ un šī summa dalās ar 3, jo visu šķautņu garumi ir veseli skaitļi.

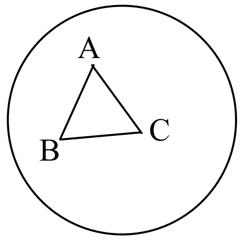
Bet, saskaitot uzdevumā doto šķautņu garumus, iegūstam skaitli, kas ar 3 nedalās. Tātad neeksistē lode, kas pieskaras visām piramīdas šķautnēm.

27.12.4. Atbilde: 1 000 000.

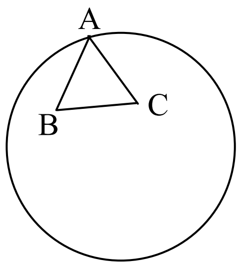
Pierādījums: uzdevuma atrisinājumā izmantosim divas lemmas.

1. lemma. Ja trijstūra visas malas garākas par $\sqrt{3}$, tad tas nevar atrasties riņķī ar rādiusu 1.

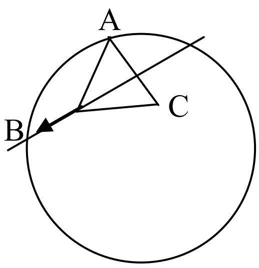
Pieņemsim pretējo, ka ir tāds trijstūris ABC, kura visas malas garākas par $\sqrt{3}$ un kurš atrodas riņķī ar rādiusu 1 (skat. 25A. zīm.). Pārvietosim šo trijstūri tā, lai vismaz viena no tā virsotnēm atrastos uz riņķa līnijas (pieņemsim, ka uz riņķa līnijas atrodas virsotne A, skat. 26A. zīm.). Tad pārveidosim trijstūri tā, lai uz riņķa līnijas atrastos arī virsotne B un visu trijstūra malu garumi varbūt kļūtu tikai lielāki. Virsotni B pārvietosim pa taisni, kas perpendikulāra malai AC un iet caur B riņķa līnijas virzienā (skat. 27A. zīm.). Izdarot šādu pārveidojumu, mala AC savu garumu nemaina; malas AB un CB pagarinās (vai nemainās, ja virsotne B jau atradās uz riņķa līnijas pirms pārveidošanas). Esam ieguvuši trijstūri, kura divas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Līdzīgi pārveidosim jauniegūto trijstūri, lai arī virsotne C atrastos uz riņķa līnijas (skat. 28A. zīm.). Pārvietosim virsotni C pa taisni, kas perpendikulāra AB un iet caur C, līdz riņķa līnijai. Tādā veidā mala AB savu garumu nemaina, bet AC un BC varbūt kļūst garākas.



25A. zīmējums



26A. zīmējums



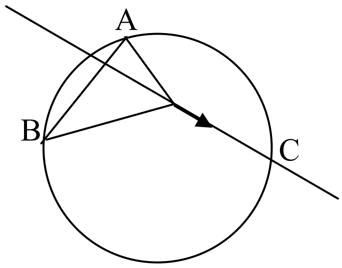
27A. zīmējums

Tātad esam ieguvuši trijstūri, kurš ir ievilkts riņķa līnijā un kuram katra mala ir garāka par $\sqrt{3}$, skat. 29A. zīm.

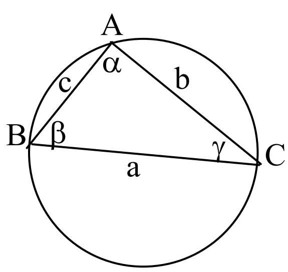
Iegūstam $a = 2R\sin\alpha$.

Tā kā R=1 un $a > \sqrt{3}$, tad $\sin\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ jeb $\alpha > 60^\circ$.

Līdzīgi iegūstam $\beta > 60^\circ$ un $\gamma > 60^\circ$. Esam ieguvuši pretrunu, jo izrādās, ka trijstūra visu leņķu summa $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$. Tātad sākotnējais pieņēmums bija nepareizs, un riņķī ar rādiusu 1 nevar atrasties trijstūris, kura visas malas garākas par $\sqrt{3}$.



28A. zīmējums



29A. zīmējums

No šīs lemmas seko, ka no nogriežņiem, kas garāki par $\sqrt{3}$, noteikti nav izveidojies neviens trijstūris. Tā kā mūs interesē tieši nogriežņi, kas ir garāki par $\sqrt{3}$, tad tālāk apskatām, kāds ir lielākais iespējamais nogriežņu skaits, kas neveido trijstūrus.

2. lemma. Ja ir 2n punkti un daži no tiem savienoti ar nogriežņiem tā, ka nav izveidojies neviens trijstūris ar virsotnēm šajos punktos, tad nogriežņu skaits nepārsniedz n^2.

Aplūkosim punktu P, no kura iziet lielākais nogriežņu skaits. Šo skaitu apzīmēsim ar x un virsotnes, ko ar P savieno šie nogriežņi, apzīmēsim ar $A_1, A_2, \ldots, A_x$. No katra punkta A_i iziet ne vairāk kā $2n - x$ nogriežņu. Pamatosim: kopā ir 2n virsotnes. Tā kā ir novilkti nogriežņi $A_1P, A_2P, \ldots, A_xP$, tad skaidrs, ka ne no viena A_i nevar būt novilkti nogriežņi uz kādu no pārējiem punktiem A_j $(i \neq j)$, citādi veidotos trijstūris ar virsotnēm P, A_i un A_j $(i \neq j)$, bet tā nevar būt. Tātad no katra punkta A_i nevar tikt novilkti nogriežņi uz x-1 punktu A_j, kur j=1, 2, ... i-1, i+1, ... x, kā arī nevar tikt novilkts nogrieznis uz punktu A_i . No tā seko, ka no katra A_i tiek novilkti ne vairāk kā $2n - x$ nogriežņi.

No pārējiem $2n - x$ punktiem katra iziet ne vairāk kā x nogriežņu. Pamatosim: punktu P izvēlējāmies kā punktu, no kura iziet lielākais nogriežņu skaits, un šis lielākais skaits ir x. Tātad no pārējām virsotnēm iziet x vai mazāk nogriežņi.

Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits nepārsniedz

$x \cdot (2n - x) + (2n - x) \cdot x = 2 \cdot x \cdot (2n - x)$, kur no katra punkta $A_1, A_2, \ldots, A_x$ iziet ne vairāk kā $2n - x$ nogriežņu, bet no atlikušajiem $2n - x$ punktiem iziet ne vairāk kā x nogriežņu no katra.

Katru nogriezni esam ieskaitījuši divreiz (katram nogrieznim ir 2 galapunkti, un abus tos esam ieskaitījuši), tāpēc lielākais iespējamais nogriežņu skaits ir uz pusi mazāks jeb $x \cdot (2n - x)$.

Šai izteiksmei pieskaitot un atņemot vienu un to pašu lielumu, tās vērtība nemainīsies, tātad tās vērtība ir: $x \cdot (2n - x) = n^2 - n^2 + 2nx - x^2$. Atdalām binoma kvadrātu:

$n^2 - n^2 + 2nx - x^2 = n^2 - (n^2 - 2nx + x^2) = n^2 - (n - x)^2 \leq n^2$.

Tā kā uzdevumā doti 2000 punkti, tad pēc 2. lemmas redzam, ka nevar būt vairāk par 1000^2 nogriežņiem, kas garāki par $\sqrt{3}$. Lai novilktu 1000^2 šādus nogriežņus, izvēlamies 1000 punktus riņķa diametra AB viena galapunkta tuvumā, bet citus 1000 punktus - riņķa diametra AB otra galapunkta tuvumā. Katru no 1000 punktiem viena galapunkta tuvumā savienojam ar katru no 1000 punktiem otra galapunkta tuvumā. Būsim konstruējuši piemēru, kas parāda, kā iespējams iegūt lielāko iespējamo nogriežņu skaitu, kas garāki par $\sqrt{3}$.

27.12.5.

a) Atbilde: nē, neeksistē.

Pierādījums: pierādīsim, pieņemot pretējo. Pieņemsim, ka eksistē tādas n virknes, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Aplūkosim skaitļus $3n+2, 3n+3, \ldots, 6n+3$. Šo skaitļu skaits ir $3n+2$ (pamatosim: $(6n+3)-(3n+2)+1=3n+1+1=3n+2$). Ja katra no F-virknēm sastāvētu tikai no viena no aplūkojamajiem skaitļiem, tad būtu izmantoti tikai n skaitļi un uzdevuma prasība par katra naturāla skaitļa piederību tieši vienai no virknēm nebūtu izpildīta. Apskatīsim, kāds ir lielākais aprakstīto skaitļu skaits, kas var piederēt vienai virknei. Ja kādai virknei pieder divi no dotajiem skaitļiem, proti, a un b, tad pēc a un b nākamais virknes loceklis noteikti ir lielāks par $(3n+2)+(3n+2)>6n+3$, jo katru nākamo locekli iegūst, saskaitot divus iepriekšējos (no kuriem vismaz viens noteikti ir lielāks par $3n+2$). Bet tas savukārt nozīmē, ka nevienai virknei nevar piederēt trīs no apskatītajiem skaitļiem. Tātad kopumā šīm n virknēm pieder ne vairāk kā 2n naturāli skaitļi no apskatāmajiem. Tā kā apskatīto skaitļu skaits ir $3n+2$, tad redzam, ka noteikti būs tādi skaitļi, kas nepiederēs nevienai no n virknēm. Esam ieguvuši pretrunu, tātad sākotnējais pieņēmums nebija pareizs un nav iespējams izvēlēties tādas n virknes, kas apmierinātu uzdevuma nosacījumus.

b) Atbilde: jā, eksistē.

Pierādījums: ar Fibonači skaitļu virkni mēs sapratīsim F-virkni:

$$f_1=1, f_2=2, f_3=3, f_4=5, \ldots, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n.$$

Mūsu risinājums balstīsies uz sekojošu lemmu.

<u>Lemma</u>. Katru naturālu skaitli var, un pie tam vienā vienīgā veidā, izteikt kā dažādu Fibonači skaitļu summu tā, lai nekādi 2 saskaitāmie nebūtu Fibonači virknes blakus locekļi.

(<u>Piemērs:</u> 30=21+8+1=$f_7+f_5+f_1$).

Pieņemsim, ka lemma jau pierādīta. Tad, pamatojoties uz to, mēs varam ieviest jaunu pozicionālu skaitīšanas sistēmu, kurā bāzes skaitļi ir Fibonači skaitļi, bet kā cipari kalpo tikai 1 un 0. Piemēram, skaitlis ”trīsdesmit” šajā sistēmā pierakstās kā 1010001, jo

$30 = 1\cdot f_7 + 0\cdot f_6 + 1\cdot f_5 + 0\cdot f_4 + 0\cdot f_3 + 0\cdot f_2 + 1\cdot f_1$.

Pamatojoties uz lemmu, šāds pieraksts katram naturālam skaitlim eksistē un tas ir viens vienīgs. Piemēram, paši Fibonači skaitļi šajā pierakstā izskatās kā 1; 10; 100; 1000; 10000; ... .

Pieņemsim tagad, ka α - kaut kāda galīga nuļļu un vieninieku virkne, kas sākas ar 1, beidzas ar 1 un kurā divi vieninieki nekur neatrodas blakus (tai skaitā arī virkne, kas sastāv no viena vieninieka).

Ar $\alpha 0, \alpha 00, \alpha 000$ utt. sapratīsim jaunas virknes, kuras iegūtas, virknei α galā pierakstot vienu, divas, trīs ... nulles.

Pārbaudīsim, ka $\alpha\underbrace{00...0}_{n} + \alpha\underbrace{00...0}_{n+1} = \alpha\underbrace{00...0}_{n+2}$. Tiešām, ja

$\alpha\underbrace{00...0}_{n} = f_{i_1} + f_{i_2} + ... + f_{i_k}$ (kur $i_1 > i_2 > ... > i_k$), tad $\alpha\underbrace{00...0}_{n+1} = f_{i_1+1} + f_{i_2+1} + ... + f_{i_k+1}$

un $\alpha\underbrace{00...0}_{n+2} = f_{i_1+2} + f_{i_2+2} + ... + f_{i_k+2}$. Tagad skaidri redzam, ka

$$\left(f_{i_1} + f_{i_2} + ... + f_{i_k}\right) + \left(f_{i_1+1} + f_{i_2+1} + ... + f_{i_k+1}\right) = \left(f_{i_1} + f_{i_1+1}\right) + \left(f_{i_2} + f_{i_2+1}\right) + ... + \left(f_{i_k} + f_{i_k+1}\right) =$$

$$= f_{i_1+2} + f_{i_2+2} + ... + f_{i_k+2}, \text{ k.b.j.}$$

Tātad $\alpha 0, \alpha 00, \alpha 000$ utt. ir F-virkne.

Tagad skaidrs, ka meklēto naturālo skaitļu kopas sadalījumu F-virknēs bez kopējiem elementiem mēs iegūsim, ņemot visas iespējamās galīgās virknes α, kas aprakstītas augstāk izceltajā rindkopā, un veidojot no tām F-virknes, kā nupat aprakstīts.

Atliek pierādīt lemmu. Darīsim to, izmantojot matemātisko indukciju.

Attiecībā uz skaitļiem 1; 2; 3 lemmas pareizība ir acīmredzama. Pieņemsim, ka lemma pareiza visiem skaitļiem 1; 2; 3; ...; n-1. Apskatīsim, kā izsacīt skaitli n.

Atradīsim lielāko Fibonači skaitli f_k, kas nepārsniedz skaitli n. Tad $n = f_k + (n - f_k)$. Ja $n - f_k = 0$, tad esam ieguvuši, ka $n = f_k$. Ja $n - f_k \neq 0$, tad ievērojam, ka $n - f_k < n$, tāpēc saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $n - f_k$ var izsacīt vajadzīgajā formā. Turklāt $n - f_k < f_{k-1}$ (ja būtu citādi, tad $n \geq f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$, un tad f_k vietā būtu ņemts f_{k+1}, tāpēc lielākais Fibonači skaitlis $(n - f_k)$ izsacīšanā nav f_{k-1}, un summā, kas iegūstama no $n = f_k + (n - f_k)$, nekādi divi Fibonači skaitļi nav Fibonači virknes blakus locekļi.

Līdz ar to izsacīšanas iespējamība pierādīta. Jāpierāda unitāte.

Pieņemsim, ka n izsacīts divos veidos:

$n = f_{i_1} + f_{i_2} + ... + f_{i_k}$ un $n = f_{j_1} + f_{j_2} + ... + f_{j_s}$.

Ja $f_{i_1} = f_{j_1} = a$, tad iegūstam pretrunu ar induktīvo pieņēmumu, jo tad jau skaitli $n - a$ varētu izteikt divos veidos. Tāpēc $f_{i_1} \neq f_{j_1}$. Varam pieņemt, ka $f_{i_1} > f_{j_1}$.

Tā kā Fibonači skaitļu virkne ir augoša un summā $f_{j_1} + f_{j_2} + ... + f_{j_s}$ nav blakus esošu locekļu, tad $n = f_{j_1} + f_{j_2} + ... + f_{j_s} \leq f_{j_1} + f_{j_1-2} + f_{j_1-4} + ... + f_{2 \text{vai} 1}$ (*)

Ievērosim, ka

$f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2m} = (f_3 - f_1) + (f_5 - f_3) + (f_7 - f_5) + ... + (f_{2m+1} - f_{2m-1}) = f_{2m+1} - f_1 < f_{2m+1}$

un līdzīgi $f_1 + f_3 + ... + f_{2m+1} < f_{2m+2}$. Tāpēc (*) var turpināt kā $... < f_{j_1+1}$.

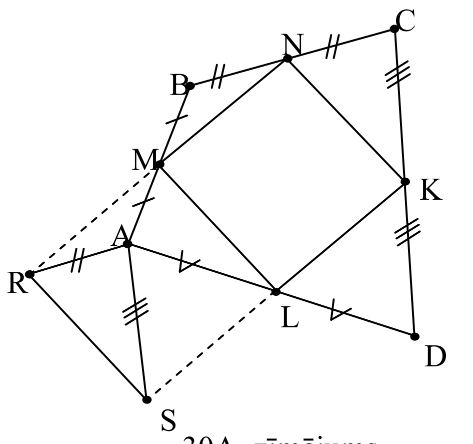
Tāpēc esam ieguvuši $f_{i_1} \leq n < f_{j_1+1}$, kas ir pretruna, jo $i_1 \geq j_1 + 1$. Līdz ar to pieņēmums par n izsacīšanu divos veidos ir nepareizs. Lemma pierādīta.

Latvijas 28. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

28.9.1. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 26.9.1. atrisinājumu.

28.9.2. Pierādījums: (skat. 30A. zīm.)

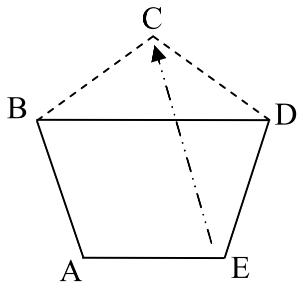


30A. zīmējums

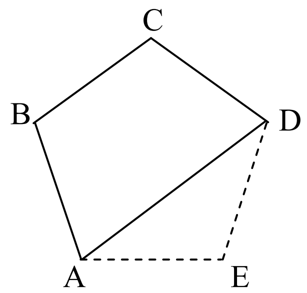
9) M, N, K, L ir četrstūra ABCD malu viduspunkti.
10) $MN \| AC$ pēc viduslīnijas īpašības (viduslīnija paralēla pamatam) trijstūrī ABC. Līdzīgi arī $LK \| AC$ pēc viduslīnijas īpašības trijstūrī ABC. No tā seko, ka $MN \| LK$.
11) $ML \| BD$ pēc viduslīnijas īpašības trijstūrī ABD. Līdzīgi arī $NK \| BD$ pēc viduslīnijas īpašības trijstūrī BCD. No tā seko, ka $ML \| NK$.
12) Tātad četrstūris MNKL ir paralelograms, jo tā malas pa pāriem paralēlas.
13) ΔRAS ir vienāds un paralēli novietots ar ΔNCK.
14) Tātad ML ir vienāds un paralēls ar RS.
15) $\Delta SAL = \Delta KDL$ pēc pazīmes mlm, jo AS=DK kā puses no malas CD un AL=DL kā puses no malas AD, $\angle SAL = \angle KDL$ kā iekšējie šķērsleņķi pie taisnēm AS un KD
16) Līdzīgi, $\Delta RAM = \Delta NBM$ pēc pazīmes mlm, jo AM=BM kā puses no malas AB un RA=NB kā puses no malas BC, $\angle RAM = \angle NBM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie taisnēm RA un BN
17) Esam ieguvuši, ka RMLS ir paralelograms, jo pretējās malas pa pāriem paralēlas un vienādas, un RMLS ir izveidojams no sākotnējā četrstūra „atgrieztajiem” stūriem.

28.9.3. Atbilde: jā, šādu četrstūri var iegūt, savienojot četras regulāra piecstūra virsotnes. Piemēram, četrstūris ABDE (skat. 31A. zīm.)

Pierādījums: apskatīsim četrstūri ABDE. Pagriežot šo četrstūri ap piecstūra centru O, varam iegūt šādus četrstūrus: BCEA, CDAB, DEBC, EACD. Visi 4 četrstūri ir



31A. zīmējums



32A. zīmējums

vienādi ar četrstūri ABDE, jo tie iegūti, pagriežot sākotnējo četrstūri ABDE. No tā seko, ka visi pieci nosauktie četrstūri ir vienādi savā starpā.

Jebkuram no šiem četrstūriem izpildās uzdevumā prasītā īpašība, jo, pārvietojot jebkuru virsotni uz brīvo punktu, iegūsim četrstūri, kas ir iegūstams arī, pagriežot šo četrstūri ap piecstūra centru.

Piemērs: apskatīsim četrstūri ABDE. Lai arī kuru tā virsotni pārvietosim uz punktu C, iegūtais četrstūris būs kāds no kopas {BCEA, CDAB, DEBC, EACD}. Bet jau zināms, ka šie četrstūri ir vienādi savā starpā, jo iegūstami, pagriežot sākotnējo četrstūri ABDE.

28.9.4. Pierādījums: apskatīsim izteiksmi:

$z(xy-z)+y(xz-y)+x(yz-x)=xyz-z^2+xyz-y^2+xyz-x^2=3xyz-x^2-y^2-z^2=3xyz-(x^2+y^2+z^2)$.

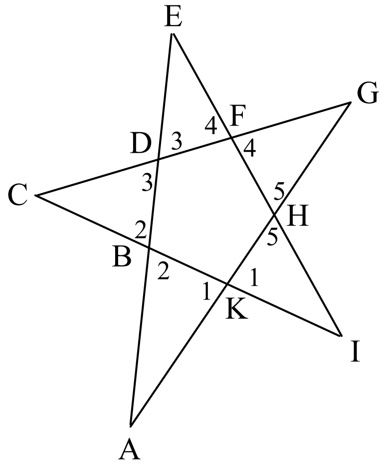
Tā kā xy-z, xz-y un yz-x dalās ar 3 pēc uzdevuma nosacījumiem, tad uzrakstītās vienādības kreisā puse dalās ar 3. No tā, ka vienādības kreisā puse dalās ar 3, seko, ka arī labajai pusei jādalās ar 3. Skaidrs, ka 3xyz dalās ar 3, tātad arī $x^2+y^2+z^2$ dalās ar 3.

28.9.5. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nav iespējams izvēlēties 2 skolēnus tā, lai viņi abi kopā būtu atrisinājuši visus uzdevumus. Tad katram skolēnu pārim ir kāds neatrisināts uzdevums. No 8 skolēniem iespējams izveidot 28 skolēnu pārus (katru no 8 skolēniem var salikt pārī ar jebkuru no atlikušajiem 7, tātad iespējamo kombināciju skaits ir $8 \cdot 7 = 56$, bet, tā katrs pāris ieskaitīts 2 reizes (jo pāris A-B ir tas pats, kas B-A), tad iespējamo kombināciju skaits jādala ar 2. Tātad ir 56:2=28 pāri). Pēc uzdevumā dotā zināms, ka katru uzdevumu atrisināja tieši 5 skolēni, no tā seko, ka katru uzdevumu neatrisināja tieši atlikušie 3 skolēni. Tā kā bija 8 uzdevumi un katru uzdevumu neatrisināja 3 skolēni, tad kopā 8 skolēni neatrisināja $3 \cdot 8 = 24$ uzdevumus. Ir 28 skolēnu pāri un 24 neatrisināti uzdevumi; tā kā 28>24, tad ir vismaz viens uzdevums, kuru neatrisināja vairāk kā 3 (vismaz 4) skolēnu pāri. Vismaz 4 skolēnu pārus veido vismaz 4 skolēni (pamatosim: 3 skolēni – A, B, C – var izveidot lielākais 3 skolēnu pārus – AB, BC, AC. Lai izveidotu 4 skolēnu pārus, būs vajadzīgi vismaz 4 skolēni). Bet, ja vismaz 4 skolēni neatrisināja vienu uzdevumu, tad tā ir pretruna ar uzdevumā doto, ka katru uzdevumu atrisināja 5 skolēni. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepatiess, un mēs noteikti varam izvēlēties 2 skolēnus tā, lai kopā viņi būtu atrisinājuši visus uzdevumus.

10. klase

28.10.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.10.1. atrisinājumu.

28.10.2. Pierādījums:



33A. zīmējums

1. Ar 1, 2, 3, 4, 5 apzīmēsim leņķus, kā parādīts zīmējumā 33A.
2. Atcerēsimies sinusu teorēmu: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, kur a, b, c ir trijstūra malas, bet α, β, γ ir šo malu pretleņķi.
3. Pielietosim sinusu teorēmu trijstūrī KAB, tad $\frac{AB}{\sin\angle 1}=\frac{AK}{\sin\angle 2}$ jeb $\frac{AB}{AK}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}$.
4. Līdzīgi pielietosim sinusu teorēmu trijstūros BCD, DEF, FGH, HIK. Attiecīgi iegūstam, ka $\frac{CD}{CB}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 3}$, $\frac{EF}{ED}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}$, $\frac{GH}{GF}=\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 5}$, $\frac{IK}{IH}=\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 1}$.
5. Sareizinot iegūto vienādību abas puses, iegūstam:
$$\frac{AB}{KA}\cdot\frac{CD}{CB}\cdot\frac{EF}{ED}\cdot\frac{GH}{FG}\cdot\frac{IK}{IH}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}\cdot\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 3}\cdot\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 5}\cdot\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 1}$$
6. Saīsinot vienādos reizinātājus vienādības labajā pusē, iegūstam:
$\frac{AB}{AK}\cdot\frac{CD}{CB}\cdot\frac{EF}{ED}\cdot\frac{GH}{GF}\cdot\frac{IK}{IH}=1$ jeb $AB\cdot CD\cdot EF\cdot GH\cdot IK=BC\cdot DE\cdot FG\cdot HI\cdot KA$.

28.10.3. Atbilde: 41.

Pierādījums: lai pamatotu, ka 41 ir mazākais pirmskaitlis, ko nevar izteikt formā $\left|2^x-3^y\right|$, parādīsim, ka visus pirmskaitļus, kas mazāki par 41, var izteikt formā $\left|2^x-3^y\right|$, un pamatosim, ka 41 šādā formā izteikt nav iespējams. Redzam, ka $2=3^1-2^0$, $3=2^2-3^0$, $5=3^2-2^2$, $7=3^2-2$, $11=3^3-2^4$, $13=2^4-3^1$, $17=3^4-2^6$, $19=3^3-2^3$, $23=3^3-2^2$, $29=2^5-3^1$, $37=2^6-3^3$. Pamatosim, ka 41 nav iespējams izteikt formā $\left|2^x-3^y\right|$. Apskatīsim, kādus atlikumus dod skaitļi

2^n un (-3^n), dalot ar 8, ja n ir nenegatīvs vesels skaitlis. Atcerēsimies, ka atlikums nevar būt negatīvs, tāpēc jābūt uzmanīgiem, meklējot negatīvu skaitļu dalījumu atlikumus. (Piemēram, (-9) dalot ar 8, iegūstam (-2) un atlikumā 7; patiešām, $8\cdot(-2)+7=-16+7=-9$.)

n	2^n	Atlikums, dalot ar 8	-3^n	Atlikums, dalot ar 8
0	1	1	-1	7
1	2	2	-3	5
2	4	4	-9	7
3	8	0	-27	5
4	16	0	-81	7
5	32	0	-243	5

Pēc tabulas redzam, ka 2^n, kad $n\geq 3$, vienmēr dalīsies ar 8 bez atlikuma. Bet atlikumi, kas rodas, (-3^n) dalot ar 8, veidos ciklu „7; 5; 7; 5; 7; ...". Zinām, ka skaitlis 41, dalot ar 8, dod atlikumu 1. Ja 41 varētu uzrakstīt formā $\left|2^x-3^y\right|$, tad arī izteiksmei $\left|2^x-3^y\right|$, dalot ar 8, jādod atlikums 1. Pēc atlikumu tabulas pārbaudīsim, kad $\left|2^x-3^y\right|$, dalot ar 8, varētu dot atlikumu 1:

x	2^x atlikums, dalot ar 8	y	-3^y atlikums, dalot ar 8	$\left|2^x-3^y\right|$ atlikums, dalot ar 8
0	1	2k	7	0
0	1	2k+1	5	6
1	***2***	***2k***	***7***	***1***
1	2	2k+1	5	7
2	4	2k	7	3
2	***4***	***2k+1***	***5***	***1***
>3	0	2k	7	7
>3	0	2k+1	5	5

Apskatīsim gadījumus, kad izteiksmes $\left|2^x-3^y\right|$ atlikums, dalot ar 8, ir 1:

- ja 2 tiek kāpināts kvadrātā, bet 3 – jebkurā nepāra pakāpē. Apskatīsim šo gadījumu:

Y	$\left\|2^2 - 3^y\right\|$
1	$\left\|4-3\right\| = 1$
3	$\left\|4-27\right\| = 23$
5	$\left\|4-243\right\| = 239$

Apskatot gadījumus y=1, y=3 un y=5, skaitli 41 neiegūstam. Nav vērts apskatīt gadījumus, kad y>5. Pamatosim: palielinoties y, palielinās arī starpības modulis, un jau pie y=5 tas ir pārsniedzis 41, tātad nav vērts apskatīt gadījumus, kad y>5.

- ja 2 tiek kāpināts pirmajā pakāpē, bet 3 – jebkurā pāra pakāpē. Apskatīsim šo gadījumu:

y	$\left\|2^1 - 3^y\right\|$
0	$\left\|2-1\right\| = 1$
2	$\left\|2-9\right\| = 7$
4	$\left\|2-81\right\| = 79$

Apskatot gadījumus y=0, y=2 un y=5, skaitli 41 neiegūstam. Nav vērts apskatīt gadījumus, kad y>4. Pamatosim: palielinoties y, palielinās arī starpības modulis, un jau pie y=4 tas pārsniedz 41, tātad nav vērts apskatīt gadījumus, kad y>4.

Tātad esam pierādījuši, ka skaitli 41 nav iespējams izteikt uzdevumā dotajā formā.

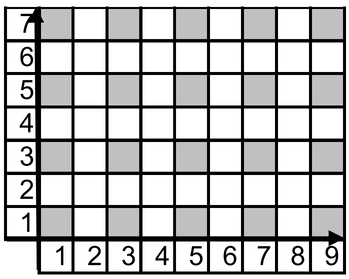
28.10.4.

a) Atbilde: jā, var.

Pierādījums: prasīto acīmredzot iespējams īstenot, no $\frac{8000}{4} = 2000$ katra veida figūrām izveidojot taisnstūri ar izmēriem 80×100.

b) Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums: izveidosim koordinātu tīklu, kur katra iedaļa ir viena vienība. Kvadrātiņus, kuriem abas koordinātas ir nepāra skaitļi, iekrāsosim, kā parādīts zīmējumā 34A.



34A. zīmējums

Lai arī kā koordinātu plaknē novietotu figūriņu 2×2, tā noteikti nosedz vienu iekrāsotu rūtiņu. Tā kā mums ir tieši 2001 šāda figūriņa, tad tās visas kopā nosedz nepāra skaitu iekrāsotu rūtiņu. Apskatīsim figūriņu ar izmēriem 1×4. Tā nosedz vai nu divas iekrāsotas rūtiņas, vai nevienu iekrāsotu rūtiņu. Tātad visas figūriņas ar izmēriem 1×4 kopā noteikti nosedz pāra skaitu iekrāsotu rūtiņu. Tātad varam secināt, ka, izveidojot jebkādu figūru no 2001 kvadrātiņa ar izmēriem 2×2, tā vienmēr nosegs nepāra skaitu iekrāsotu rūtiņu, bet, izveidojot jebkādu figūru no 2001 taisnstūrīša ar izmēriem 1×4, tā vienmēr nosegs pāra skaitu rūtiņu. Bet tas nozīmē, ka šīs izveidotās figūras nevar būt vienādas

Tātad šādas divas vienādas figūras izveidot nav iespējams.

28.10.5. Pierādījums: no izspēlētajām 18 spēlēm izvēlēsimies tādas k spēles, kurās piedalījušās 2k dažādas komandas (katra komanda, kas vispār spēlējusi kādu no šīm k spēlēm, spēlējusi tieši vienu spēli). Skaidrs, ka šādas k spēles varam izvēlēties dažādos veidos. Ar n apzīmēsim **lielāko** no iespējamajiem k. Tātad notikušas n spēles, kurās piedalījušās 2n dažādas komandas. Bet pārējās 24-2n komandas noteikti nav spēlējušas savā starpā. Pamatosim: ja kādas no atlikušajām 24-2n komandām būtu spēlējušas savā starpā, tad mēs varētu izvēlēties n+1 tādu spēli, kurā piedalījušās 2(n+1) dažādas komandas. Esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, ka n ir lielākais no skaitļiem, kas apraksta spēļu skaitu, kuras izspēlējušas dažādas komandas savā starpā. Tātad atlikušās 24-2n komandas nav spēlējušas nevienu spēli savā starpā. Tā kā zināms, ka katra no 24 komandām piedalījusies vismaz vienā no 18 notikušajām spēlēm, tad arī atlikušās 24-2n komandas katra noteikti ir spēlējusi vismaz vienu spēli ar kādu no 2n komandām. Apskatīsim, cik vismaz spēles ir notikušas: zinām, ka notika n spēles starp atrisinājuma sākumā aprakstītajām 2n komandām un vismaz vēl 24-2n citas spēles. Tātad kopā notika vismaz $n + (24 - 2n)$ spēles. No uzdevumā teksta zināms, ka pirmo 3 dienu laikā ir notikušas tieši 18 spēles. Tātad $n + (24 - 2n) \leq 18$ jeb $n \geq 6$. Tātad noteikti var izvēlēties tādas 6 spēles, kurās kopā piedalījušās 12 komandas.

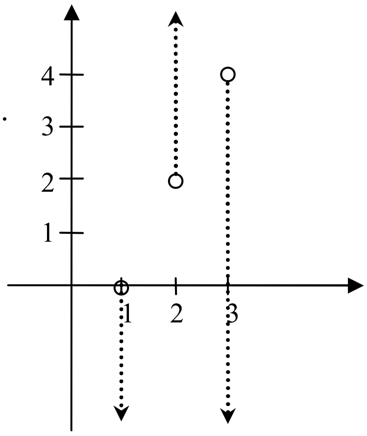
11. klase

28.11.1.

1. variants.

Atbilde: a ir negatīvs skaitlis.

Pierādījums: no uzdevumā dotā zinām, ka $f(1) < 0; f(2) > 2; f(3) < 4$. Izmantojot f(x) definīciju, varam izveidot nevienādību sistēmu $\begin{cases} a + b + c < 0 \\ 4a + 2b + c > 2 \\ 9a + 3b + c < 4 \end{cases}$. Pārveidosim doto sistēmu tai ekvivalentā, otro nevienādību pareizinot ar „-2”. Iegūstam: $\begin{cases} a+b+c<0 \\ -8a-4b-2c<-4 \\ 9a+3b+c<4 \end{cases}$. Viena veida nevienādības drīkst saskaitīt, tātad $(9a+3b+c)+(-8a-4b-2c)+(a+b+c>)<4-4+0$. Savelkot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam: $2a<0$. Tātad a ir negatīvs skaitlis.

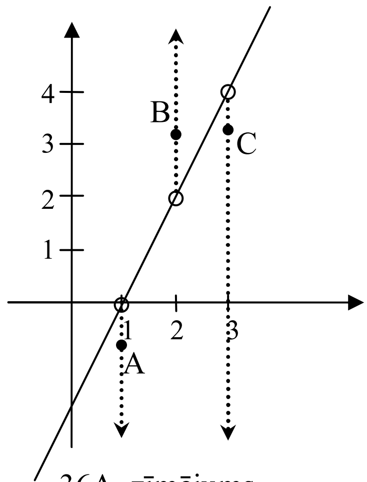


35A. zīmējums

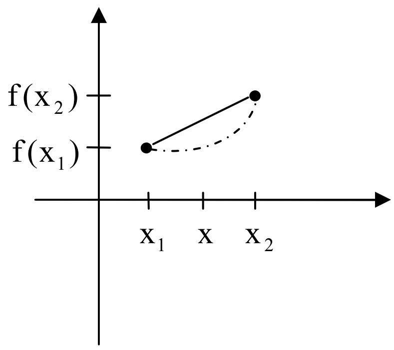
2. variants.

Atbilde: skaitlis a ir negatīvs**.**

Pierādījums: funkcijas $f(x)=ax^2+bx+c$ grafiks ir parabola, ja $a \neq 0$; taisne, ja $a=0$. Apskatīsim zināmās funkcijas vērtības punktos $x_1=1, x_2=2$ un $x_3=3$. Zīm. 35A. attēloti stari, uz kuriem var atrasties attiecīgie funkcijas grafika punkti. Pamatosim, ka funkcijas f(x) grafiks nevar būt taisne. Novilksim taisni y=2(x-1), kā parādīts zīmējumā 36A. Redzam, ka punktos $x_1=1$ un $x_3=3$ funkcijas f(x) vērtības atrodas zem taisnes y, bet punktā $x_2=2$ funkcijas f(x) vērtība ir virs taisnes y. Skaidrs, ka nav iespējams novilkt taisni t caur punktiem A, B un C, jo tad taisnes t un y krustotos 2 punktos Tātad esam pamatojuši, ka funkcijas f(x) grafiks nevar būt taisne jeb, ka $a \neq 0$. Tādā gadījumā funkcijas f(x) grafiks ir parabola. Pamatosim, ka parabolas zari vērsti uz leju (tad a<0). Pieņemsim pretējo, ka parabolas zari vērsti uz augšu un a>0. Apskatīsim brīvi izvēlētus 2 punktus $f(x_1)$ un $f(x_2)$, kas pieder parabolai ar zariem uz augšu. Zinām, ka izpildās īpašība: katram $x \in [x_1; x_2]$ funkcijas vērtība atrodas zem nogriežņa, kas savieno punktus $(x_1; f(x_1))$ un $(x_2; f(x_2))$, skat. zīm. 37A. Tātad, lai funkcijas f(x) grafiks varētu būt parabola, kuras zari vērsti uz augšu,



36A. zīmējums



37A. zīmējums

funkcijas vērtībai punktā x=2 noteikti jāatrodas zem taisnes y=2(x-1). Bet, tā kā zinām, ka f(2)>2, tad tas nav iespējams. Tātad esam ieguvuši pretrunu un funkcijas f(x) grafiks nevar būt parabola, kuras zari vērsti uz augšu. Līdz ar to esam pamatojuši, ka funkcijas f(x) grafiks ir parabola, kuras zari vērsti uz leju, t.i., a<0.

28.11.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.11.2. atrisinājumu.

28.11.3. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast visus skaitļus, kuri varētu būt virknes pirmais elements; otrkārt, pierādīt, ka neviens cits skaitlis nevar būt virknes pirmais elements.

- **Atbilde:** virknes pirmais elements var būt jebkurš pirmskaitlis. **Pierādījums:** apzīmēsim pirmskaitli ar p, tad jebkuram pirmskaitlim virkne būtu šāda: $p, 2, 2, 2, \ldots$. Tā kā ne p, ne 2 nav naturāla skaitļa kvadrāts, tad visi pirmskaitļi var būt virknes pirmie elementi.
- **Pierādījums:** pamatosim, ka neviens cits skaitlis, izņemot pirmskaitļus, nevar būt virknes pirmais elements. Skaitlis 1 nevar būt virknes pirmais elements, jo tas ir naturāla skaitļa kvadrāts.

  Pieņemsim, ka virknes pirmais elements ir skaitlis $n > 2$, kurš nav pirmskaitlis. Tā kā neviens skaitlis k, kas lielāks par 2, nedalās ar skaitli $k-1$, tad nevienam skaitlim k, kas lielāks par 2, nav k dažādu dalītāju. Tas nozīmē, ka virkne ir dilstoša, kamēr virknes locekļi ir lielāki par 2. Skaitlim 2 ir tieši 2 dažādi dalītāji, tāpēc pēc tam, kad skaitlis 2 pirmo reizi parādās virknē, „virkne nemainās" un sastāv tikai no divniekiem. Apskatīsim, kāds skaitlis virknē var atrasties pirms skaitļa 2. Skaidrs, ka pirms skaitļa 2 atrodas skaitlis, kuram ir 2 dalītāji. Bet zinām, ka tikai pirmskaitļiem ir 2 dalītāji. Tā kā pēc pieņēmuma $n > 2$, tad šis pirmskaitlis noteikti ir nepāra skaitlis. Apskatīsim, kāds skaitlis var atrasties virknē pirms nepāra skaitļa. Zinām, ka nepāra skaits dalītāju ir tikai naturālu skaitļu kvadrātiem. Tātad pirms nepāra skaitļa noteikti atrodas kāda naturāla skaitļa kvadrāts, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad mūsu pieņēmums nav patiess un virknes pirmais elements nevar būt skaitlis $n > 2$, kurš nav pirmskaitlis.

Tātad virknes pirmais elements var būt jebkurš pirmskaitlis un nekāds cits skaitlis.

28.11.4.

a) Atbilde: izteiksmes lielākā iespējamā vērtība ir $\frac{1}{4}$.

Pierādījums: ja n=2, tad apskatāmā summa ir $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$. Šo summu varam pārveidot reizinājumā: $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}$. Tā kā pēc uzdevumā dotā zinām, ka $x_1 + x_2 = 1$, tad, saskaitot iegūtos reizinātājus, iegūstam $x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Šī summa ir konstanta (vienmēr $\frac{3}{2}$). Zinām, ka pie konstantas summas reizinājums būs vislielākais, ja reizinātāji būs vienādi. Tātad apskatāmais reizinājums $2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}$ būs vislielākais, ja $x_1 = x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Tā kā šo trīs reizinātāju summa ir $\frac{3}{2}$ un tiem jābūt vienādiem, tad katrs no tiem būs $\frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}$. Patiešām, ja $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, tad arī $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$. Tātad lielākā iespējamā uzdevumā apskatāmās izteiksmes vērtība ir $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

b) Atbilde: lielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir $\frac{4}{27}$.

Pierādījums: varam uzskatīt, ka x_2 ir vidējais no dotajiem skaitļiem; t.i., vai nu $x_1 \le x_2 \le x_3$, vai arī $x_1 \ge x_2 \ge x_3$. Abos gadījumos $(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3) \le 0$,un, tā kā x_1, x_2, x_3 ir nenegatīvi, tad

$(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3) \le 0 \le x_1 x_2$ (1).

Apskatāmo izteiksmi $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$ varam pārveidot šādi:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = x_1^2 x_2 + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3^2 \qquad (2).$$

(Atverot iekavas un savelkot līdzīgos saskaitāmos, var pārliecināties, ka vienādība (2) ir patiesa.) Ievietojot (1) vienādībā (2), iegūstam:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = x_1^2 x_2 + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3^2 \le x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3^2 =$$

(iznesam x_2 pirms iekavām un atdalām binoma kvadrātu)

$$= x_2 (x_1 + x_3)^2. \qquad (3)$$

No uzdevumā dotā zinām, ka $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ jeb $x_1 + x_3 = 1 - x_2$. Tātad izteiksmi (3) varam pārveidot par:

$$x_2(x_1+x_3)^2 = x_2(1-x_2)^2 = \qquad \text{(izdalām un pareizinām ar 4)}$$

$$= 4 \cdot x_2 \cdot \frac{1-x_2}{2} \cdot \frac{1-x_2}{2}.$$

Redzam, ka 3 pēdējo reizinātāju summa ir konstanta, tāpēc reizinājums būs lielākais, kad visi reizinātāji būs vienādi. Visi reizinātāji var būt vienādi, ja $x_2 = \frac{1}{3}$. Tad izteiksmes vērtība ir $\frac{4}{27}$. Dotā izteiksme šādu vērtību sasniedz, piemēram, ja $x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 0.$

28.11.5. Pierādījums: apskatīsim situāciju pēc pabeigta etapa. Skaidrs, ka šādu situāciju pilnībā raksturo monētu sadalījums traukos un tas, no kura trauka mēs gatavojamies izņemt monētas, sākot jaunu etapu. Šādu situāciju sauksim par stāvokli. Skaidrs, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka nākošo stāvokli. Pamatosim, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka arī iepriekšējo stāvokli. No jebkura stāvokļa iepriekšējo stāvokli var atrast, sākot pa vienai salasīt monētas no traukiem pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, kamēr atrodam tukšu trauku. Visas salasītās monētas tiek ievietotas tukšajā traukā.

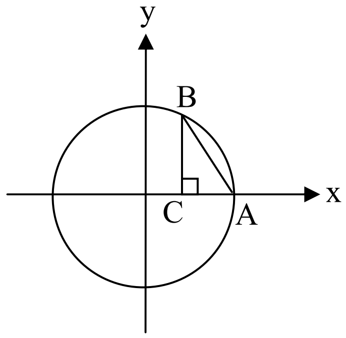
Tā kā monētu un trauku skaits ir galīgs, tad arī dažādu iespējamo stāvokļu skaits ir galīgs. Tas nozīmē, ka stāvokļi sāks atkārtoties. Tā kā katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka iepriekšējo stāvokli, tad noteikti atkārtosies arī sākotnējais stāvoklis. Pamatosim: skaidrs, ka vispār stāvokļiem noteikti būs jāatkārtojas, jo to ir galīgs skaits, bet monētu pārlikšanas process ir bezgalīgs. Apskatīsim vienu no stāvokļiem, kas ir atkārtojies. Pieņemsim, ka tas bijis k-tais stāvoklis. Zinām, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka arī iepriekšējo stāvokli. Tātad pirms atkārtotā stāvokļa k vienmēr atradīsies viens un tas pats stāvoklis k-1. Bet arī pirms k-1 stāvokļa vienmēr atradīsies konkrēts stāvoklis, t.i., k-2. Tā turpinot, nonākam pie secinājuma: lai varētu atkārtoties k-tais stāvoklis, ir jāatkārtojas arī visiem stāvokļiem, kas ir pirms tā. Tātad ir jāatkārtojas arī sākotnējam stāvoklim.

Tā kā katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka arī iepriekšējo stāvokli, tad apskatīsim, kādam stāvoklim ir jābūt pirms sākotnējā stāvokļa, apzīmēsim to ar stāvokli A. Tā kā sākotnējā stāvoklī katrā no n traukiem ir k monētas, tad, lai iegūtu iepriekšējo stāvokli, izvēlamies vienu trauku (tā kā monētu daudzums visos traukos ir vienāds, tad ir vienalga, kuru trauku izvēlamies) un pretēji pulksteņa rādītāja virzienam

salasām monētas, kamēr atrodam tukšu trauku. Skaidrs, ka stāvoklī A būs viens trauks, kurā ir $k \cdot n$ monētas, un pārējie trauki būs tukši.
Iepriekš pamatojām, ka, lai kāds stāvoklis varētu atkārtosies, jāatkārtojas arī visiem stāvokļiem, kas ir pirms tā. No tā seko, ka noteikti jāatkārtojas stāvoklim A. Tātad esam pamatojuši, ka noteikti tiks iegūta situācija, kad vienā traukā ir visas monētas, bet pārējos traukos monētu nav.

12. klase

28.12.1. Pierādījums: zinām, ka funkcija cosx intervālā $[0, \pi]$ ir dilstoša. Tas nozīmē, ka, pieaugot argumenta vērtībām, funkcijas vērtības samazinās jeb $\cos y_1 > \cos y_2$, ja $y_1 < y_2$. Pierādāmajā nevienādībā $y_1 = \sin x$ un $y_2 = x$. Pamatosim, ka intervālā $0 \le x \le \pi$ katram x pastāv nevienādība $\sin x \le x$. Pamatojums: (skat. zīm. 38A.). Izvēlēsimies x, skaidrs, ka x vērtībai atbilst loks, apzīmēsim to ar AB. Bet sinx vērtībai atbilst loka AB projekcija uz y ass, kas vienāda ar nogriezni BC. Apskatām taisnleņķa trijstūri ABC. Skaidrs, ka katete BC ir īsāka nekā hipotenūza AB. Zinām arī, ka horda ir īsāka par loku, kuru tā savelk, tātad hipotenūza AB ir īsāka nekā loks AB, kuru tā savelk. Tātad nogrieznis BC jeb sinx vērtība ir mazāka nekā loka AB garums jeb x vērtība.



38A. zīmējums

Tātad $y_1 \le y_2$ un $\cos y_1 \ge \cos y_2$ jeb $\cos(\sin x) \ge \cos x$.

28.12.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.12.2. atrisinājumu.

28.12.3. Atbilde: $499\frac{1001}{2001}$

Pierādījums: apzīmēsim meklēto summu ar S. Apskatīsim šādu izteiksmi:

A=$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)$.

Šajā izteiksmē atverot iekavas, iegūsim vairāku reizinājumu summu. Katrs reizinājums saturēs 2000 reizinātājus – no katrām iekavām vienu. Tā kā viens no saskaitāmajiem katrās iekavās ir 1 un viens no reizinājumiem radies, sareizinot katru iekavu „pirmos skaitļus”, tad arī A kopējā vērtībā ietilps saskaitāmais 1. Līdzīgi, A kopējā vērtībā ietilps arī saskaitāmie $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{2000}; \frac{1}{2001}$, kuri tiks iegūti, sareizinot „pirmos skaitļus” no 1999 iekavām, bet no vienām ņemot „otro skaitli”. Izteiksmes kopējā vērtībā noteikti ietilps arī visi iespējamie daļskaitļu reizinājumi pa divi. Pamatosim: tā kā A vērtība būs visi reizinājumi, kur no katrām iekavām ņemts viens skaitlis, tad noteikti veidosies arī visi iespējamie reizinājumi, kur no divām iekavām ņemti „otrie skaitļi” (daļas), bet no pārējām iekavām ņemti „pirmie skaitļi” (vieninieki). Līdzīgi, veidosies arī visi iespējamie daļu reizinājumi pa trīs – no trim iekavām ņemti „otrie skaitļi”, bet no pārējām „pirmie skaitļi”. Redzam, ka veidosies visi iespējamie daļu reizinājumi ne tikai pa 2 un pa 3, bet arī pa 4, pa 5, ..., pa 2000.

No uzdevuma formulējuma zinām, ka mums jāaprēķina suma daļskaitļu reizinājumam pa 2, pa 4, ..., pa 2000. Tātad visi daļskaitļu reizinājumi nepāra skaitā (pa 3, pa 5, pa 7, ..., pa 2001) ir jāatņem. Apskatīsim šādu izteiksmi:

A+B=

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)$$

Līdzīgi kā A vērtība arī B vērtība sastāvēs no reizinājumiem:

- viens no reizinājumiem būs 1 (sareizinot visu iekavu „pirmos skaitļus”),
- būs 2000 reizinājumi $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{2000};\frac{1}{2001}$ (sareizinot „pirmos skaitļus” no 1999 iekavām un no vienām iekavām izvēloties „otro skaitli”)
- būs arī visi daļskaitļu reizinājumi pa 2, pa 3, ..., pa 2000, kā pamatots jau iepriekš.

Bet, tā kā visi daļskaitļi rakstīti ar mīnusa zīmi, tad skaidrs, ka visi nepāra skaita daļskaitļu reizinājumi (pa 1, pa 3, pa 5, ..., pa 1999) arī būs ar mīnusa zīmi. Tātad izteiksmē A+B nepāra skaita daļskaitļu reizinājumu nebūs (tie saīsināsies), bet visi pārējie reizinājumi būs ieskaitīti divreiz (no izteiksmes A un no izteiksmes B), tai skaitā divi no reizinājumiem būs vieninieki. Tā kā ar S apzīmējām meklēto daļskaitļu reizinājumu summu, tad A+B=2+2S:

No otras puses, iekavu reizinājumus ir iespējams aprēķināt:

$$B=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1999}{2000}\cdot\frac{2000}{2001}=\frac{1}{2001}$$

un

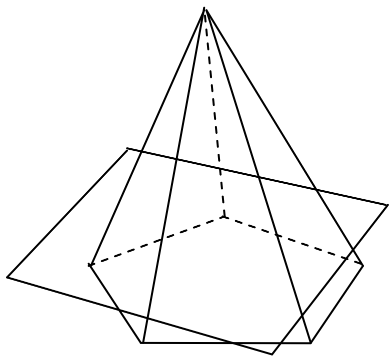
$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2001}{2000}\cdot\frac{2002}{2001}=\frac{2002}{2}=1001\ .$$

Tātad $A + B = 1001 + \frac{1}{2001}$. Esam ieguvuši, ka $2 + 2S = 1001\frac{1}{2001}$ un $S = 499\frac{1001}{2001}$.

28.12.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, pamatot, kāds ir lielākais šķautņu skaits, ko var krustot plakne pēc uzdevuma nosacījumiem; otrkārt, pamatot, ka šāds daudzskaldnis patiešām eksistē, konstruējot piemēru.

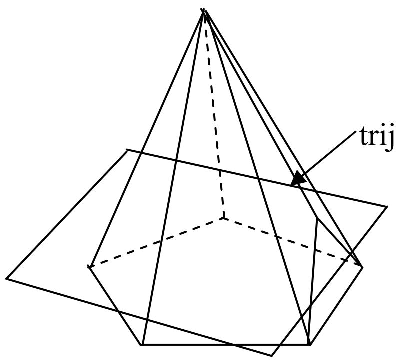
- **Atbilde:** viena plakne var krustot augstākais 66 šķautnes.

  Pierādījums: zinām, ka jebkurā daudzskaldnī katra šķautne pieder divām skaldnēm. Ja daudzskaldnim ir x skaldnes, tad tām kopā ir ne mazāk kā 3x malas. Pamatosim: katra skaldne ir plaknes figūra – daudzstūris. Daudzstūra minimālais malu skaits ir 3. Tātad katrai skaldnei ir vismaz 3 malas, bet x skaldnēm – vismaz 3x malas.

  39A. zīmējums

  Apskatīsim, kāda ir visu skaldņu malu skaitu summa (katru šķautni ieskaitot tik reizes, cik skaldnēm tā pieder). Pēc pamatotā zinām, ka ir vismaz 3x malas. Bet no uzdevuma formulējuma zinām, ka daudzskaldnim ir 100 šķautnes. Tā kā daudzskaldnis ir izliekts, tad katra šķautne pieder divām skaldnēm; tad kopējais skaldņu malu skaits būs $100 \cdot 2 = 200$. Tātad varam rakstīt nevienādību $100 \cdot 2 \geq 3x$ jeb $x \leq 66$. Tā kā daudzskaldnis ir izliekts, tad plakne šķeļ katru tā skaldni pa augstākais vienu nogriezni. Tāpēc šķēlums ir daudzstūris ar ne vairāk kā 66 malām un tātad ar ne vairāk kā 66 virsotnēm. Šķēluma virsotnēm atbilst tie punkti, kuros plakne šķeļ daudzskaldņa šķautnes. Tātad plakne var krustot ne vairāk kā 66 šķautnes.

  40A. zīmējums

- Piemērs: konstruēsim tādu daudzskaldni un plakni, lai plakne krustotu 66 daudzskaldņa šķautnes. Ņemam piecstūra piramīdu un plakni novietojam, kā parādīts zīmējumā 39A. Pavisam tiek krustotas 6 šķautnes. Tālāk pakāpeniski pa vienai pievieno 30 trijstūra piramīdas, kuru pamati ir kāda no iepriekšējām skaldnēm tā, lai šķēlējplakne šķeltu 4 šīs piramīdas šķautnes (tādējādi palielinot šķelto šķautņu skaitu par 2), turklāt ņemot šīs piramīdas tik "plakanas", lai veidotos izliekts daudzskaldnis (vienas trijstūra piramīdas konstruēšanas piemēru skat. 40A. zīm.). Rezultātā iegūsim izliektu daudzskaldni ar 100 šķautnēm, kura 66 šķautnes šķeļ konstruētā plakne.

28.12.5.

a) Pierādījums: pēc uzdevumā aprakstītā skaitļu veidošanas likuma redzam, ka otrajā, trešajā utt. rindās visi skaitļi noteikti būs nenegatīvi (tie apzīmē noteiktu skaitļu skaitu, bet „skaits" noteikti ir naturāls skaitlis vai 0). Skaidrs, ka otrās rindas 10. skaitlis noteikti ir nulle. Pamatosim: tā kā otrās rindas 10. skaitli veido pēc uzdevumā aprakstītā likuma, tad šim skaitlim jābūt vienādam ar to skaitļu skaitu, kas atrodas pa labi no pirmās rindas 10. skaitļa un ir lielāki par to. Tā kā 10. skaitlis ir arī rindas pēdējais skaitlis, tad nav tādu skaitļu, kas atrastos pa labi no tā. Tātad otrās rindas 10. skaitlis ir nulle. Bet, tā kā arī 3 rindas 10. skaitlis apzīmē to skaitļu skaitu, kas atrodas pa labi no otrās rindas 10. skaitļa un ir lielāki par to, tad tas arī ir nulle (nav neviena skaitļa, kas atrastos pa labi no otrās rindas 10. skaitļa un būtu lielāki par to). Tā turpinot, varam pamatot, ka katrā rindā 10. skaitlis ir nulle.

Līdzīgi varam pamatot, ka trešās rindas pēdējie divi skaitļi būs nulles. Pamatosim: skaidrs, ka 10. skaitlis noteikti būs nulle (pamatojām jau iepriekš). Atliek pamatot, ka nulle būs arī trešās rindas 9. skaitlis. Lai arī kāds būtu 2. rindas 9. skaitlis, skaidrs, ka pa labi no tā atrodas tikai 2. rindas 10. skaitlis, bet tas, pēc iepriekš pamatotā, ir nulle. Tātad nav tādu skaitļu, kas būtu lielāki par 2. rindas 9. skaitli un atrastos pa labi no tā. Tāpēc 3. rindas 9. skaitlim ir jābūt nullei.

Tātad esam pierādījuši, ka 2. rindā no labās puses ir vismaz 1 nulle, 3. rindā no labās puses ir vismaz 2 nulles. Skaidrs, ka nuļļu skaits katrā nākamajā rindā pieaug par vienu, tātad 11. rindā noteikti būs 10 nulles. Esam pamatojuši, ka noteikti iegūsim rindu, kura sastāvēs tikai no nullēm.

b) Pierādījums: no a) punktā pierādītā seko, ka nevar būt vairāk par 10 labām rindām, jo 11. rinda vienmēr sastāvēs no 10 nullēm. Parādīsim piemēru, kas ilustrē, ka 10 labas rindas var būt.

Piemērs: Sākot ar rindu

8, 9, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 0, 1

pavisam iegūsim 10 labas rindas:

8, 9, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 0, 1;

1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0;

0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0;

4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0;

0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0;

3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0;

0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;

2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;

0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;

1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

Latvijas 29. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

29.9.1. Pierādījums: zinām, ka $q_1q_2 < 0$, tātad $q_1 < 0$ vai $q_2 < 0$. Pieņemsim, ka $q_1 < 0$, tad $D_1 = p_1^2 - 4q_1$. Tātad $D_1 > 0$ (jo -4 tiek reizināts ar negatīvu skaitli q_1) un 1. vienādojumam ir divas dažādas saknes.

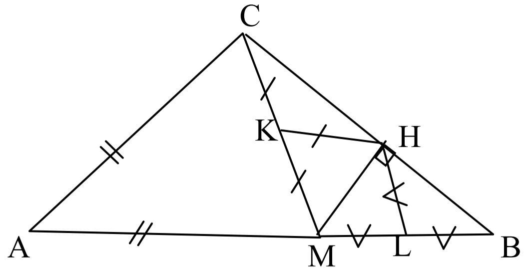
29.9.2. Pierādījums: apskatīsim 2 gadījumus:

a) trijstūris nav vienādmalu.

1) Varam pieņemt, ka AB>AC (skat. 41A. zīm.).

2) Atliekam AM=MC, tad ΔCAM ir vienādsānu.

3) $\angle CMA$ ir šaurs. Pamatosim: pieņemsim pretējo, ka $\angle CMA$ ir plats. Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi. Tātad $\angle CMA = \angle ACM$ un abi leņķi ir plati. Iegūta pretruna, jo trijstūrī nevar būt 2 plati leņķi (plats leņķis lielāks par 90°, bet trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°). Tātad pieņēmums bija nepareizs un $\angle CMA$ ir šaurs.



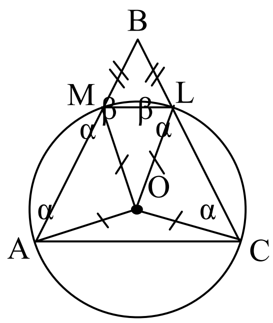
41A. zīmējums

4) Ja $\angle CMA$ ir šaurs, tad $\angle CMB$ ir plats, jo tie ir blakusleņķi.

5) Novelkam $MH \perp BC$ un katru no taisnleņķa trijstūriem CHM un BHM ar mediānu pret hipotenūzu (attiecīgi HK un HL) sadalām divos vienādsānu trijstūros (taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas).

6) Tātad esam ieguvuši šādus trijstūrus: ΔACM, kur AC=AM; ΔCHK, kur CK=KH; ΔHKM, kur KH=KM; ΔMHL, kur ML=HL, un ΔHLB, kur HL=LB.

b) trijstūris ir vienādmalu. (skat. 42A. zīm.)



42A. zīmējums

1) Novelkam riņķa līniju ar centru ΔABC iekšpusē, kas iet caur A un C un krusto malas BA un BC.

2) No riņķa līnijas centra O novilkti 4 rādiusi uz punktiem A, M, L un C.

3) Iegūtie trijstūri AOM, MOL, LOC, COA ir vienādsānu, jo katra trijstūra divas malas ir riņķa līnijas rādiusi.

4) Pierādīsim, ka arī ΔMBL ir vienādsānu.

5) Apzīmēsim ΔMOA leņķus pie pamata ar α.

6) $\angle OAC = \angle BAC - \angle MAO = 60^o - \alpha$, jo ΔABC ir vienādmalu, tātad visi tā leņķi ir 60^o.

7) $\angle OCA = \angle OAC = 60^o - \alpha$, jo ΔCOA vienādsānu un tā leņķi pie pamata vienādi.

8) $\angle LCO = \angle BCA - \angle ACO = 60^o - (60^o - \alpha) = \alpha$, jo ΔABC ir vienādmalu un visi tā leņķi ir 60^o

9) $\angle OLC = \angle LCO = \alpha$, jo ΔLOC vienādsānu un leņķi pie pamata ir vienādi.

10) Apzīmēsim trijstūra MLO leņķus pie pamata ar β.

11) $\angle BML = 180^o - \angle LMO - \angle OMA = 180 - \beta - \alpha$ un arī

$\angle BLM = 180^o - \angle MLO - \angle OLC = 180^o - \beta - \alpha$.

12) No tā seko, ka $\angle BML = \angle BLM$, tātad ΔMBL ir vienādsānu.

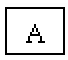
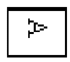
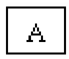
29.9.3. Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 28.9.4. atrisinājumu.

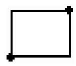
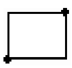
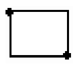
29.9.4. Atbilde: 4. vietā. **Pierādījums:** sadalīsim plakni rūtiņu režģī tā, ka viena rūtiņa ir vienāda ar kuba skaldni. Iekrāsosim rūtiņas šaha galdiņa secībā tā, ka centrālais kubs sākumā stāv uz melnās rūtiņas.

Pierādīsim divas lemmas:

1. lemma. Pēc pāra skaita gājienu kubs atrodas uz tās pašas krāsas rūtiņas, kur sākumā, bet pēc nepāra skaita gājienu – uz pretējas krāsas rūtiņas.

Tā kā rūtiņas izkrāsotas šaha galdiņa secībā, tad kubs var pārvelties tikai no melnas rūtiņas uz baltu un no baltas - uz melnu. Tad skaidrs, ka ik pēc diviem gājieniem kubs atradīsies uz tās pašas krāsas rūtiņas, bet ik pēc viena – uz pretējas krāsas rūtiņas nekā sākumā.

2. lemma. Ja kubs no stāvokļa  pārgājis stāvoklī , tad tas izdarījis nepāra skaita gājienu, bet, ja pārgājis stāvoklī , tad tas izdarījis pāra skaita gājienu.

Iezīmēsim kuba divas virsotnes tā, ka, skatoties no augšas, redzam . Izdarot vienu gājienu, stāvoklis  mainās uz stāvokli  un tad atkal atpakaļ. Līdz ar to arī A burts ir redzams pamīšus: vienu reizi vertikāli, vienu reizi horizontāli.

Sauksim kubiņus par malējiem vai par centrālo atkarībā no to sākuma pozīcijas un par 1., 2., 3., 4., 5. atkarībā no to beigu pozīcijas (no kreisās uz labo). Saskaņā ar 2.

lemmu 2. kubs ir izdarījis nepāra skaitu gājienu, jo pārgājis no vertikālas pozīcijas uz horizontālu. Ja 2. kubs būtu centrālais, tad, ņemot vērā, ka tas sākumā stāv uz melnas rūtiņas un ir izdarījis nepāra skaitu gājienu, tas tagad stāvētu uz baltas rūtiņas. Tā kā 2. rūtiņa ir balta, tad 1. rūtiņa ir melna. Tā kā 2. kubs ir centrālais, tad 1. kubs var būt tikai malējais. Tātad ir kāds malējais kubs, kurš no baltas rūtiņas (tie visi sākumā atradās uz baltām rūtiņām) nonācis uz melnas rūtiņas, pie tam A burts redzams vertikāli. Lai nonāktu no baltas uz melnu rūtiņu, vajadzīgs nepāra skaits gājienu, bet, lai nonāktu no vertikālas pozīcijas uz vertikālu, vajadzīgs pāra skaits gājienu. Tātad iegūta pretruna un 2. kubs nevar būt centrālais. No tā seko, ka 2. kubs ir malējais. Tā kā malējam kubam vajadzīgs nepāra skaits gājienu, lai pārietu no vertikāla stāvokļa uz horizontālu, tad pēc 1. lemmas tas pārgājis no baltas rūtiņas uz melnu. Tā kā laukums izkrāsots šaha galdiņa formā, tad ir vēl tikai viena cita melna rūtiņa – 4. rūtiņa. Centrālais kubs ir pārgājis no vertikālas pozīcijas uz vertikālu, tātad izdarījis pāra skaitu gājienu. Pēc 1. lemmas tas nonācis melnā rūtiņā. Tātad centrālais kubs ir 4. kubs.

29.9.5. Atbilde: bija 11 rūķīšu, 11. rūķītim bija 4 dālderi, 10. rūķītim bija 5 dālderi, ..., 2. rūķītim bija 13 dālderi un 1. rūķītim bija 14 dālderi. **Pierādījums:** pieņemsim, ka sākumā n-tajam rūķītim ir x dālderi. Tad (n-1)-am rūķītim ir x+1 dālderis, (n-2)-am ir x+2 dālderi, ..., 1-ajam ir n+x-1 dālderis.

Pēc 1. apļa 2-ajam rūķītim ir par 1 dālderi mazāk nekā sākumā, jo viņam 1 dālderi iedod 1-ais rūķītis, bet 3-ajam viņš atdod 2 dālderus. Līdzīgi ir arī visiem pārējiem rūķīšiem, izņemot pirmo: ja saņem k dālderus, tad projām atdod k+1, un rezultātā ir par 1 dālderi mazāk, nekā bija sākumā. Pie pirmā rūķīša turpretī nonāk visu citu rūķīšu "zaudētie" n-1 dālderi.

Tātad pēc 1. apļa naudas daudzumi ir 2n+x-2, n+x-3, n+x-4, ..., x+1, x, x-1. Bet pēc 2. apļa naudas daudzumi ir 3n+x-3, n+x-4, n+x-5, ..., x, x-1, x-2. Process beigsies brīdī, kad naudas daudzumi būs x+(x+1)(n-1), n-2, n-3, ..., 2, 1, 0. Vienīgi 1. rūķītim var būt 6 reizes vairāk naudas nekā kaimiņam, jo pārējiem rūķiem ir n-2; n-3; ...; 1; 0 dālderi, kas ir pēc kārtas ņemti veseli skaitļi. Ja 1. rūķītim ir 6 reizes vairāk naudas nekā tā kaimiņam, tad x+(x+1)(n-1)=6(n-2). Risinot vienādojumu, iegūstam x+xn-x+n-1=6n-12 jeb xn=5n-11; izsakot x, iegūstam $x = 5 - \frac{11}{n}$. Tā kā x - naturāls skaitlis, tad n=1 vai n=11. Pēc uzdevuma jēgas nevar būt n=1. Tāpēc n=11 un $x = 5 - \frac{11}{n} = 4$.

10. klase

29.10.1.

a) Atbilde: nē, ne noteikti. **Piemērs:** ievietojot skaitļus $x = 1$ un $y = \frac{1}{10}$ nevienādībā $x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y}$, iegūstam, ka $1 + \frac{1}{1} > \frac{1}{10} + 10$ jeb $2 > 10\frac{1}{10}$, bet šī nevienādība nav patiesa.

b) Atbilde: jā, noteikti. **Pierādījums**: dotajā nevienādībā pārnesot visus saskaitāmos uz kreiso pusi, iegūstam: $x + \frac{1}{x} - (y + \frac{1}{y}) > 0$. Vienādojot saucējus un sadalot reizinātājos, iegūstam:

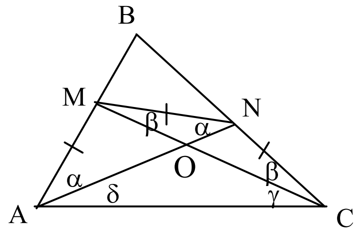
$$x + \frac{1}{x} - (y + \frac{1}{y}) = (x - y) - \frac{x - y}{xy} = (x - y)(1 - \frac{1}{xy}) > 0\,.$$

Apskatām iegūto reizinājumu. Tā kā x>y, tad izteiksme pirmajā iekavās noteikti ir pozitīva un, tā kā x>y>1, tad skaitlis $\frac{1}{xy}$ noteikti mazāks par 1. Līdz ar to izteiksme otrajās iekavās arī noteikti lielāka par 0. Tātad abu iekavu reizinājums noteikti ir pozitīvs un arī sākotnējā nevienādība $x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y}$ ir patiesa.

29.10.2. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 28.10.5. atrisinājumam. Pierādījuma gaita pilnībā sakrīt ar uzdevuma 28.10.5. pierādījuma gaitu. Tikai jāpievērš uzmanība komandu skaitam un apskatāmo spēļu skaitam, kas ir mainīts.

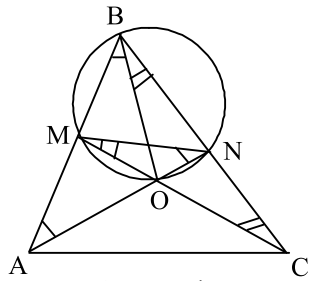
29.10.3. Atbilde: ir jābūt vismaz 4 dažādām krāsām. **Pierādījums:** apskatīsim skaitļus 1; 3; 6; 8. Redzam, ka starpība starp katriem diviem no šiem skaitļiem ir pirmskaitlis. Tātad vismaz 4 krāsas noteikti vajadzēs. Pamatosim, ka ar četrām krāsām noteikti pietiek: nokrāsosim naturālos skaitļus periodiski ar periodu 4. Ja dažādās krāsas apzīmētu ar a, b, c un d, tad naturālo skaitļu virkne izskatītos šādi: a b c d a b c d a b c d a ... . Skaidrs, ka starpība starp katriem diviem vienādi nokrāsotiem skaitļiem dalās ar 4, tātad tā noteikti nav pirmskaitlis. Esam pamatojuši, ka četras krāsas noteikti nepieciešamas un arī pietiekamas, lai izpildītu uzdevuma prasības.

29.10.4. Pierādījums: (skat. 43A. zīm.)



43A. zīmējums

1. Apzīmēsim $\angle ONM = \alpha$, $\angle OMN = \beta$ un $\angle OAC = \delta$, $\angle OCA = \gamma$.
2. ΔAMN un ΔMNC ir vienādsānu, jo pēc dotā AM=MN=NC. Tātad $\angle MAN = \angle MNA = \alpha$ un $\angle NCM = \angle NMC = \beta$ kā vienādsānu trijstūru leņķi pie pamata.
3. Zinām, ka $\alpha + \beta + \angle MON = \delta + \gamma + \angle AOC$, jo trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.
4. Tā kā $\angle MON = \angle AOC$ kā krustleņķi, tad $\alpha + \beta = \delta + \gamma$.
5. Redzam, ka $\angle A + \angle C = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Bet, tā kā $\angle ABC = 60^{\circ}$, tad $\angle A + \angle C = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$. Tātad $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 120^{\circ}$ un tas nozīmē, ka $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 120^{\circ} : 2 = 60^{\circ}$.



44A. zīmējums

6. $\angle MON = 180^{\circ} - (\alpha + \beta) = 120^{\circ}$, jo trijstūra leņķu summa ir 180°.
7. Četrstūrim MBNO var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle MON + \angle ABC = 120^{\circ} + 60^{0} = 180^{0}$. (skat. 44A. zīm.)
8. $\angle MBO = \angle MNO$ un $\angle OMN = \angle OBN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku.
9. Tā kā $\angle MNO = \angle NAM$, tad $\angle MBO = \angle NAM$ un ΔAOB ir vienādsānu.
10. Tā kā $\angle NMO = \angle MCN$, tad $\angle NBO = \angle MCN$ un ΔBOC ir vienādsānu.
11. Vienādsānu trijstūrī sānu malas ir vienādas, tāpēc AO=BO un BO=CO.
12. No tā seko, ka AO=BO=CO, tātad punkts O ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs.
13. Tā kā punkts O ir AN un CM krustpunkts, tad esam pierādījuši, ka AN un CM krustojas ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrā.

29.10.5.

a) Atbilde: nevar. **Pierādījums:** pieņemsim pretējo, ka ir iespējams iegūt polinomu x no uzdevumā dotajiem polinomiem. Ievērosim, ka tāda polinoma vērtība, kas iegūts, saskaitot (arī atņemot vai reizinot) polinomus f un g, ir polinomu f un g vērtību summa (starpība vai reizinājums). Polinoms x jāizsaka no polinomiem $x^2 + x$ un $x^2 + 2$. Apskatīsim gadījumu, ja x=2, tad $x^2 + x = 6$ un arī $x^2 + 2 = 6$.

Tātad abu doto polinomu vērtības pie x=2 dalās ar 3. Atļauto operāciju rezultātā $f+g$, $f-g$ un $f\cdot g$ polinomu vērtību dalāmība ar 3 noteikti saglabāsies (saskaitot, atņemot vai reizinot divus polinomu vērtības, kas dalās ar 3, arī rezultējošā polinoma vērtība noteikti dalīsies ar 3). Tas nozīmē, ka uz tāfeles nekad nevarēsim iegūt polinomu x, jo tā vērtība pie x=2 nedalās ar 3 (x=2 un 2 ar 3 nedalās).

b) Atbilde: nevar. **Pierādījums:** pieņemsim pretējo, ka ir iespējams iegūt polinomu x no uzdevumā dotajiem polinomiem. Ievērosim, ka tāda polinoma vērtība, kas iegūts, saskaitot (arī atņemot vai reizinot) polinomus f un g, ir polinomu f un g vērtības summa (starpība vai reizinājums). Apskatīsim gadījumu, ja $x=\frac{1}{2}$, tad $2x^2+x=1$ un arī $2x=1$. Redzam, ka abu doto polinomu vērtības ir veseli skaitļi, bet tādā gadījumā, izpildot uzdevumā aprakstītās operācijas – saskaitīšanu, atņemšanu un reizināšanu – rezultējošā polinoma vērtība arī būs vesels skaitlis. Tātad esam ieguvuši pretrunu un polinomu x uz tāfeles iegūt nevarēs, jo gadījumā, kad x vērtība ir $x=\frac{1}{2}$, rezultējošā polinoma vērtībai jābūt daļskaitlim.

c) Atbilde: var. **Pierādījums:** apzīmēsim dotos polinomus ar $f=x^2+x$ un $g=x^2-2$. Tad, izpildot reizināšanas, saskaitīšanas un atņemšanas darbības šādi: $(f-g)\cdot(f-g)+2g-3f$, uz tāfeles iegūsim polinomu x. Pārbaudīsim:

$$
\begin{aligned}
&(f-g)(f-g)+2g-3f= \\
&=(x+2)(x+2)+(2x^2-4)-(3x^2+3x)= \\
&=(x^2+4x+4)-x^2-3x-4= \\
&=x.
\end{aligned}
$$

11. klase

29.11.1. Atbilde: divi skaitļi.

Pierādījums: apskatīsim gadījumu, ja neviens no a, b, c, d nav 0. Tā kā reizinājums ir nulle tikai, ja kāds no reizinātājiem ir nulle, tad noteikti jābūt:

$$
\begin{aligned}
&bc+cd+bd=0 \qquad (1)\\
&ac+ad-cd=0 \qquad (2)\\
&ad+ab-bd=0 \qquad (3)\\
&ab+ac-bc=0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Izdalīsim vienādību (1) ar bcd, vienādību (2) ar acd, vienādību (3) ar abd un vienādību (4) ar abc. Iegūstam:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \qquad (5) \qquad\qquad \frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{1}{a}=0 \qquad (7)$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0 \qquad (6) \qquad\qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=0 \qquad (8)$$

Saskaitot vienādības (5), (6), (7) un (8), iegūstam: $\frac{3}{d}+\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{3}{a}=0$ jeb

$$3\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)-\frac{3}{a}=0 \qquad (9)$$

Ievietojot vienādību (5) vienādībā (9), iegūstam, ka $-\frac{3}{a}=0$. Esam ieguvuši pretrunu: neeksistē tāds a, ka $-\frac{3}{a}=0$. Tātad nevar būt, ka neviens no skaitļiem a, b, c vai d nav nulle.

Apskatīsim gadījumu, ja viens no skaitļiem ir 0. Pieņemsim, ka a=0. Ievietojot a=0 uzdevumā dotajā vienādībā, iegūstam, ka $-bcd=0$. Bet tas ir iespējams tikai, ja vēl kāds no skaitļiem b, c vai d ir nulle. Līdzīgi, ja b=0 vai c=0, vai d=0 iegūstam, ka vēl kādam no skaitļiem arī jābūt nullei.

Tātad mazākais nuļļu skaits starp a, b, c, d varētu būt 2.

Pārbaudīsim, vai tad iespējams, ka izpildās uzdevumā dotās vienādības. Izvēlēsimies divus skaitļus vienādus ar nulli, piemēram, $a=b=0$ un $c\neq 0$, $d\neq 0$. Ievietojot redzam, ka uzdevumā dotās vienādības izpildās. Tātad mazākais nuļļu skaits tiešām ir divi.

29.11.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 28.11.4. atrisinājumu.

29.11.3. Pierādījums: uzdevuma atrisinājumu sadalīsim divās daļās:

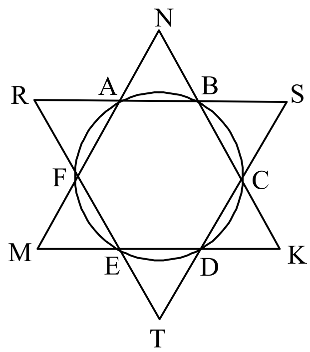
1) pieņemot pretējo, pieņemsim, ka n-1 ir divu tādu naturālu skaitļu reizinājums, kuru starpība ir 2. Šos naturālos skaitļus apzīmējam ar x-1 un x+1, tad ir spēkā vienādība $n-1=(x-1)(x+1)$ jeb $n=x^2$. Bet tas nozīmē, ka pirmskaitlis p, ar kuru dalās n, ir arī x dalītājs. Tad noteikti $p\leq x$. No tā, ka $n=x^2$, seko, ka $p\leq\sqrt{n}$, bet tā ir pretruna ar uzdevumā doto. Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums nebija pareizs un n-1 nav iespējams izteikt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu, kuru starpība ir 2.

2) Līdzīgi pierādīsim, ka n^3-1 arī nav iespējams izteikt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu, kuru starpība ir 2.

Pieņemsim pretējo, ka n^3-1 ir divu tādu naturālu skaitļu reizinājums, kuru starpība ir 2. Šos naturālos skaitļus apzīmējam ar x-1 un x+1, tad ir spēkā vienādība $n^3-1=(x-1)(x+1)$ jeb $n^3=x^2$. Tā kā n dalās ar p, tad n^3 dalās ar p^3. Bet tas nozīmē, ka arī x^2 dalās ar p^3. Ja x kā reizinātāju saturētu tieši vienu pirmskaitli p, tad x^2 saturētu tieši divus pirmskaitļus p un x^2 nedalītos ar p^3. Tātad x kā reizinātājus satur vismaz divus pirmskaitļus p, bet tad x^2 satur p^4. No tā seko, ka x^2 dalās ar p^4, bet tad arī n^3 jādalās ar p^4. Tā kā $p>\sqrt{n}$, tad lielākā skaitļa p pakāpe, ar ko var dalīties n, ir p^1. Tad n^3 var dalīties ar ne augstāku p pakāpi kā p^3. Tātad n^3 nevar dalīties ar p^4. Esam ieguvuši pretrunu. Mūsu sākotnējais pieņēmums bija nepareizs un n^3-1 nevar izteikt kā divu tādu naturālu skaitļu reizinājumu, kuru starpība ir 2.

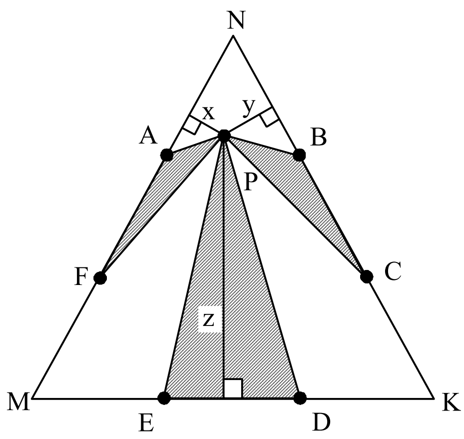
29.11.4. Pierādījums:

1. Skaidrs, ka P noteikti atrodas kādā no regulāriem trijstūriem MNK un RST (skat. 45A. zīm.). Pieņemsim, ka P atrodas trijstūrī MNK.



45A. zīmējums

2. Tā kā ABCDEF ir regulārs sešstūris, tad AB=BC=CD=DE=EF=FA=a (apzīmēsim sešstūru malu ar a).
3. Apskatīsim trijstūri MNK (skat. zīm. 46A.)
4. Trijstūrī MNK perpendikulus no punkta P pret trijstūra malām MN, NK un MK apzīmēsim attiecīgi ar x, y un z.
5. Tad iesvītroto trijstūru laukumu summa ir $\frac{a(x+y+z)}{2}$ (ņemam vērā, ka AF=BC=ED=a).
6. Pieņemsim, ka $x+y+z=3a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Pierādīsim to 11. – 14. darbībā.)
7. Ievietojot $x+y+z=3a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ iesvītroto



46A. zīmējums

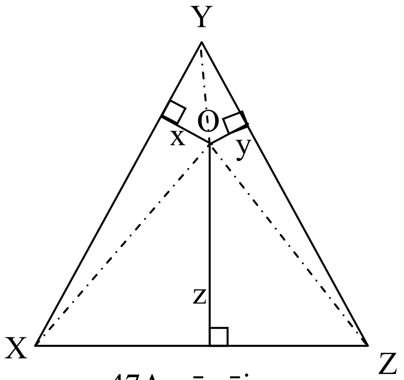
trijstūru laukumu summas formulā, iegūstam, ka trijstūru laukumu summa vienāda ar

$$\frac{a(x+y+z)}{2}=\frac{a\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a\cdot 3a\sqrt{3}}{4}.$$

8. Aprēķināsim sešstūra ABCDEF laukumu. Ar O apzīmēsim sešstūra centru. Skaidrs, ka sešstūra laukumu veido 6 regulāru trijstūru AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA laukumu summa. Katram no 6 trijstūriem laukums ir $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, bet tad sešstūra laukums ir $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

9. Iegūto iesvītroto trijstūru laukumu summas izteiksmi $\frac{a\cdot 3a\sqrt{3}}{4}$ varam pārveidot par tai ekvivalentu $\frac{1}{2}\left(6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$. Redzam, ka zīmējumā 41A. iesvītroto laukumu summa ir puse no sešstūra ABCDEF laukuma.

10. Tā kā visu segmentu laukumi 45A. zīm. ir vienādi, tad daļu PAF, PBC un PED laukumu summa ir puse no riņķa laukuma. Bet no tā seko, ka šo daļu laukumu summa ir vienāda ar PAB, PCD un PEF laukumu summu, k.b.j.



47A. zīmējums

11. Pamatosim, ka $x+y+z=3a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Skat. 47A. zīm.

12. Trijstūra laukumu L(XYZ) var aprēķināt pēc formulas $L(XYZ)=\frac{ah}{2}$.

13. Zinām, ka L(XYZ)=L(XOY)+L(YOZ)+L(ZOX). Ar x, y un z apzīmējam augstumus, kas vilkti no punkta O attiecīgi trijstūros XOY, YOZ, ZOX. Tātad $\frac{ah}{2}=\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}$ jeb $\frac{ah}{2}=\frac{a(x+y+z)}{2}$, bet no šīs vienādības seko, ka h=x+y+z.

14. Tā kā h ir trijstūra MNK augstums un MNK ir regulārs trijstūris ar malas garumu 3a, tad augstums šajā trijstūrī ir $h=3a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tātad patiešām $x+y+z=3a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29.11.5. Pierādījums: pierādīsim, pieņemot pretējo, ka nav tāda rūķīša, kurš būtu visu 2002 biedrību biedrs. Apskatīsim biedrību B ar tās 40 biedriem. Pēc uzdevuma nosacījumiem, šai biedrībai ir kopīgi biedri ar 2001 atlikušo biedrību. Pamatosim, ka noteikti ir tāds rūķītis no biedrības B, kas ir biedrs vēl vismaz 51 citā biedrībā. Pamatojums: pieņemsim pretējo, ka nav tāda rūķīša, kas būtu biedrs biedrībā B un vēl vismaz 51 citā biedrībā. Tas nozīmē, ka katrs no 40 biedrības B biedriem vēl var būt biedrs augstākais 50 citās biedrībās. Tātad biedrībai B būtu kopīgi biedri ar augstākais $40 \cdot 50 = 2000$ citām biedrībām. Esam ieguvuši pretrunu, jo zinām, ka biedrībai B ir kopīgi biedri ar 2001 biedrību. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un ir tāds rūķītis (apzīmēsim to ar R), kas ir biedrs biedrībā B un vēl vismaz 51 citā biedrībā. Tātad rūķītis R ir biedrs biedrībās B un $B_1, B_2, \ldots, B_{51}$. Izvēlēsimies kādu no biedrībām, kurai rūķītis R nav biedrs, apzīmēsim to ar X. Skaidrs, ka arī biedrībai X ir kopīgi biedri ar $B_1, B_2, \ldots, B_{51}$. Bet, tā kā katrā biedrībā ir tieši 40 rūķīši, tad noteikti ir tāds rūķītis, apzīmēsim to ar r, kas ir biedrs X un vēl vismaz divās no biedrībām $B_1, B_2, \ldots, B_{51}$ (ja tā nebūtu, tad katrs rūķītis no X varētu būt biedrs vēl tikai vienā no $B_1, B_2, \ldots, B_{51}$, bet tad biedrībai X būtu kopīgi biedri ar ne vairāk kā 40 no 51 nosauktajām biedrībām; pēc uzdevuma nosacījumiem tā nevar būt). Tātad ir rūķītis r, kas ir biedrs X un vēl vismaz divās no biedrībām $B_1, B_2, \ldots, B_{51}$; apzīmēsim tās ar C un D. (Skaidrs, ka $r \neq R$, jo biedrība X izvēlēta tā, ka R nav tās biedrs.) Atcerēsimies, ka rūķītis R ir biedrs visās biedrībās $B_1, B_2, \ldots, B_{51}$, tātad arī C un D. Bet tas nozīmē, ka biedrībām C un D ir divi kopīgi biedri, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad sākotnējais pieņēmums nebija patiess un eksistē tāds rūķītis, kas ir visu 2002 biedrību biedrs.

12. klase

29.12.1. Pierādījums: lai pierādītu, ka $\left|\sin^3 x + \cos^4 x\right| \leq 1$, pierādīsim, ka $-1 \leq \sin^3 x + \cos^4 x \leq 1$. Tā kā gan $|\sin x|$, gan $|\cos x|$ maksimālā vērtība ir 1, tad ir spēkā nevienādības $\left|\sin^3 x\right| \leq \sin^2 x$ un $\left|\cos^4 x\right| \leq \cos^2 x$. Tātad varam rakstīt, ka $\sin^3 x + \cos^4 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x$. Bet no trigonometrijas pamatidentitātēm zinām, ka $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Tātad $\sin^3 x + \cos^4 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ jeb $\sin^3 x + \cos^4 x \leq 1$.

Tā kā $\cos^4 x$ ir nenegatīva vērtība, tad nevienādība $\sin^3 x + \cos^4 x \geq \sin^3 x$ ir patiesa. No tā, ka $\sin^3 x$ minimālā vērtība ir -1, seko, ka $\sin^3 x \geq -1$. No tā seko, ka $\sin^3 x + \cos^4 x \geq \sin^3 x \geq -1$.

Esam pamatojuši, ka $-1 \leq \sin^3 x + \cos^4 x \leq 1$, kas ir ekvivalenti uzdevumā prasītajam $\left|\sin^3 x + \cos^4 x\right| \leq 1$.

29.12.2. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 28.12.3. atrisinājumam.

Atbilde: $24\frac{51}{101}$

Pierādījums: Atrisinājuma būtība sakrīt ar uzdevuma 28.12.3. atrisinājuma būtību. Pierādot jāņem vērā, ka uzdevumā ar A un B būs apzīmētas šādas izteiksmes:

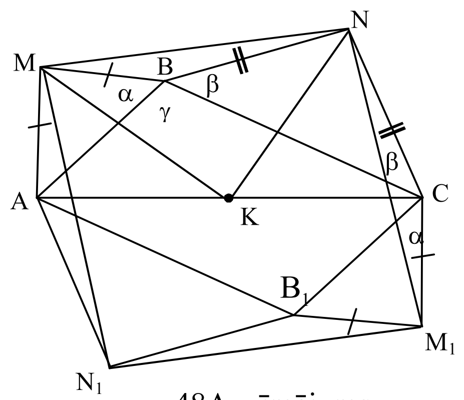
$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{101}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{100} \cdot \frac{102}{101} = \frac{102}{2} = 51.$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

Tad $A + B = 51 + \frac{1}{101}$. Un būsim ieguvuši, ka A+B=2+2S, kā aprakstīts uzdevumā 28.12.3. Tātad $2 + 2S = 51\frac{1}{101}$. Izsakot no šī vienādojuma S, iegūstam, ka visu reizinājumu summa ir $S = 24\frac{51}{101}$.

29.12.3. Pierādījums:

1) Papildināsim zīmējumu, atliekot punktus B_1, N_1 un M_1 simetriski punktiem B, N, M attiecībā pret AC viduspunktu K, kā parādīts zīmējumā 48A.



48A. zīmējums

2) Tad MNM_1N_1 ir paralelograms, jo tā diagonāles krustojoties dalās uz pusēm. Tad tā pretējās malas vienādas un paralēlas pēc konstrukcijas. Paralelograma MNM_1N_1 simetrijas centrs ir punkts K. Tātad K ir arī tā diagonāļu krustpunkts.

3) Pamatosim, ka MNM_1N_1 ir rombs. Tā kā romba diagonāles krustojoties veido 90° leņķi, tad būs pierādīts arī, ka $\angle MKN = 90^\circ$.

4) Pieņemsim, ka esam pamatojuši vienādību $\angle MBN = \angle M_1CN$ (pamatojums 9. – 20. darbībās).

5) Tad $\Delta MBN = \Delta M_1CN$ pēc pazīmes mlm, jo: $MB = MA = M_1C$ pēc konstrukcijas, $BN = CN$ pēc dotā un $\angle MBN = \angle M_1CN$ pēc pieņēmuma.

6) $MN = M_1N$, jo vienādos trijstūros attiecīgie elementi ir vienādi.

7) Tas savukārt nozīmē, ka paralelograma MNM_1N_1 visas malas ir vienādas, no kā seko, ka MNM_1N_1 ir rombs.

8) Tātad diagonāles krustojoties veido 90^o leņķi un $\angle MKN = 90^o$, k.b.j.

9) Pamatosim, ka $\angle MBN = \angle M_1CN$

10) $ABCB_1$ - paralelograms, jo tā diagonāles krustojoties dalās uz pusēm pēc konstrukcijas.

11) $\Delta AMB = \Delta CM_1B_1$, jo tie ir simetriski viens otram pēc konstrukcijas. Tā kā ΔAMB ir vienādsānu, tad arī ΔCM_1B_1 ir vienādsānu. Vienādos leņķus pie pamata apzīmēsim ar α.

12) ΔBNC - vienādsānu. Leņķus pie pamata apzīmēsim ar β.

13) $\angle ABC$ apzīmēsim ar γ, tad $\angle BCB_1 = 180^o - \gamma$.

14) $\angle MBN = 360^o - \angle MBA - \angle NBC - \angle CBA = 360^o - \alpha - \beta - \gamma$.

15) $\angle M_1CN = \angle NCB + \angle M_1CB_1 + \angle B_1CB = \alpha + \beta + 180^o - \gamma$.

16) Lai pierādītu, ka $\angle MBN = \angle M_1CN$, pietiek pierādīt, ka $360^o - \alpha - \beta - \gamma = \alpha + \beta + 180^o - \gamma$ jeb $\alpha + \beta = 90^o$.

17) Pierādīsim, ka $\alpha + \beta = 90^o$. Pārveidosim vienādību šādi

18) $\alpha + \beta = 90^o$ (reizināsim abas vienādības puses ar „-2")

19) $-2\alpha - 2\beta = -180^o$ (pieskaitīsim un atņemsim 180^o vienādības kreisajā pusē)

20) $-2\alpha - 2\beta + 180^o - 180^o = -180^o$ (pārgrupēsim saskaitāmos)

21) $(180^o - 2\alpha) + (180^o - 2\beta) = 180^o$ (*)

22) No ΔAMB zinām, ka $180^o - 2\alpha = \angle AMB$.

23) No ΔBNC zinām, ka $180^o - 2\beta = \angle BNC$.

24) Tātad vienādību (*) varam uzrakstīt šādi: $\angle AMB + \angle BNC = 180^{o}$.

25) Tā kā vienādība $\angle AMB + \angle BNC = 180^{o}$ ir patiesa pēc uzdevumā dotā, tad esam pamatojuši, ka $\angle MBN = \angle M_1CN$.

29.12.4. Atbilde: ar 11 dalās virknes 6k+1-ais loceklis pie k=0; 1; 2; ...

Pierādījums: apskatīsim cik ciparu ir virknes a_n locekļiem. Skaitlim a_1 ir 1 cipars, skaitlim a_2 arī 1 cipars, bet katram nākamajam virknes loceklim ciparu skaits ir iepriekšējo divu locekļu ciparu skaitu summa. Redzam, ka virknes a_n skaitļu ciparu skaits veido virkni 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., kur pie n>2 nākošais loceklis tiek iegūts kā divu iepriekšējo locekļu summa. Šādu virkni sauc par Fibonači skaitļu virkni un apzīmē ar F_n.

Aprakstīsim matemātiski, ko nozīmē skaitlim x pierakstīt pa labi galā skaitli y. Pieņemsim, ka skaitlim x ir k ciparu un skaitlim y ir n ciparu. Lai skaitlim x būtu pierakstīts pa labi galā skaitlis y, skaitlis x jāreizina ar 10^n un jāpieskaita y. Pamatosim: reizinot x ar 10^n, iegūstam skaitli, kura pirmie k cipari veido skaitli x un kuram galā pierakstītas n nulles. Tad, pieskaitot šādam skaitlim y, iegūstam skaitli, kura pirmie k cipari veido skaitli x, bet pārējie n cipari veido skaitli y.

Tā kā zinām, ka skaitļiem $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ir attiecīgi $F_1, F_2, F_3, \ldots$ ciparu, tad „pierakstīšanu otram skaitlim galā" varam pierakstīt vispārīgi:

$a_n = 10^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$ (pieskaitām un atņemam $(-1)^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1}$)

$a_n = 10^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1} - (-1)^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1} + (-1)^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$ (pārgrupējam)

$a_n = [10^{F_{n-2}} - (-1)^{F_{n-2}}]a_{n-1} + [(-1)^{F_{n-2}} a_{n-1} + a_{n-2}]$

Tā kā $10^k - (-1)^k$ dalās ar 10-(-1)=11, tad pirmā kvadrātiekava $[10^{F_{n-2}} - (-1)^{F_{n-2}}]a_{n-1}$ dalās ar 11. Tā kā vienādības abas puses dod vienādus atlikumus, dalot ar konkrētu skaitli, tad no vienādības $a_n = [10^{F_{n-2}} - (-1)^{F_{n-2}}]a_{n-1} + [(-1)^{F_{n-2}} a_{n-1} + a_{n-2}]$ seko, ka a_n, dalot ar 11, dod tādu pašu atlikumu kā $(-1)^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$.

Lai uzzinātu $(-1)^{F_{n-2}}$ vērtību, jānoskaidro skaitļu F_{n-2} pārību. Redzam, ka Fibonači skaitļi F_n, dalot ar 2, dod atlikumus 1; 1; 0; 1; 1; 0; ... (ar periodu 3). Tātad skaitļi a_1, a_2 – nepāra, a_3 – pāra, a_4, a_5 – nepāra, a_6 – pāra utt. (ar periodu 3). No fakta, ka a_n, dalot ar 11, dod tādu pašu atlikumu kā $(-1)^{F_{n-2}} \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$, seko, ka $a_3, a_4, \ldots$, dalot ar 11, dod tādus pašus atlikumus kā attiecīgi

$a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 + a_4, a_4 - a_5, a_5 - a_6, a_6 + a_7, \ldots$ (izteiksmēs "+" un "-" zīmes mainās ar periodu 3). Tā kā a_1 un a_2, dalot ar 11, dod attiecīgi atlikumus 0 un 1, tad iegūstam, ka virknes a_i locekļu atlikumu virkne, dalot ar 11, pie i= 1; 2; 3; ... ir 0; 1; 10; 2; 1; 1; 0; 1; ... . Tā kā a_i atlikums atkarīgs no a_{i-1} un a_{i-2} atlikumiem un šī atkarība ir ar periodu 3, un divi pēc kārtas ņemti atlikumi ir atkārtojušies pēc 6 locekļiem, tad tālāk notiks tāpat. Tāpēc ar 11 dalās virknes 1., 7., 13., ... jeb, vispārīgi runājot, $(6k+1)-\text{ais}$ loceklis pie k=0; 1; 2; ...

29.12.5. Pierādījums: pārklāsim visus n punktus ar riņķi (tas noteikti ir izdarāms, jo punktu skaits ir galīgs). Apzīmēsim šī riņķa rādiusu ar R, bet pašu riņķi ar A. Apskatīsim koncentrisku riņķi B ar rādiusu $R + \frac{m}{2}$.

Ja katram no n punktiem apvilksim riņķi ar rādiusu $\frac{m}{2}$, tad šādiem riņķiem nebūs kopēju iekšēju punktu, jo minimālais attālums starp katriem diviem punktiem no n ir vismaz m, bet attālums starp divu riņķu centriem arī ir vismaz m. Skaidrs, ka visi riņķi ar rādiusu $\frac{m}{2}$ atradīsies riņķa B (ar rādiusu $R + \frac{m}{2}$) iekšpusē.

Riņķa B laukums noteikti ir lielāks nekā visu n riņķu ar rādiusu $\frac{m}{2}$ laukumu summa. Apskatīsim šo nevienādību:

$$\pi \cdot \left(R + \frac{m}{2}\right)^2 > n \cdot \pi \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^2.$$

Saīsinot un velkot kvadrātsakni, iegūstam, ka

$$R + \frac{m}{2} > \sqrt{n} \cdot \frac{m}{2}.$$

No šīs nevienādības varam novērtēt dalījumu $\frac{R}{m}$, t.i., $\frac{R}{m} > \frac{1}{2}(\sqrt{n} - 1)$.

Pareizinot abas nevienādības puses ar $\sqrt{3}$, iegūstam nevienādību:

$$\frac{R\sqrt{3}}{m} > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \qquad (*).$$

Redzam: panākot, ka $R\sqrt{3} \le M$, būsim pierādījuši uzdevumā prasīto nevienādību $\frac{M}{m} > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n} - 1\right)$. Apskatīsim nevienādībai $R\sqrt{3} \le M$ ekvivalentu nevienādību $R \le \frac{M}{\sqrt{3}}$. Tad, lai panāktu, ka $R \le \frac{M}{\sqrt{3}}$, jāpamato, ka n punktus, starp kuriem lielākais attālums ir M, var iekļaut riņķī ar rādiusu $\frac{M}{\sqrt{3}}$.

Iztēlojamies katrā punktā iedurtu adatu un sākotnēji visām adatām apkārt apliktu ļoti lielu riņķi. Sāksim riņķi samazināt un darīsim to tik ilgi, līdz tālāka samazināšana vairs nebūs iespējama. Tas var notikt vairākos gadījumos:

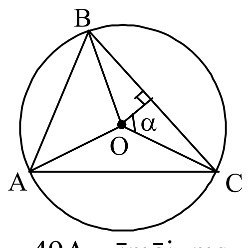
a) uz riņķa robežas ir tieši divas adatas. Tad tās noteikti ir diametra pretējos galos (citādi riņķi varētu vēl samazināt). Savukārt, ja tās ir diametra pretējos galos, tad lielākais attālums starp punktiem ir diametrs jeb M=2R un tāpēc M> $R\sqrt{3}$.

b) uz riņķa robežas ir vismaz 3 adatas un riņķa līnijas centrs ir daudzstūra ārpusē. No k adatām, kas atrodas uz riņķa līnijas, izvēlamies tās 2, apzīmēsim tās ar X un Y, kuru veidotā taisne atdala citas adatas no riņķa centra. Nemainot riņķa rādiusu, pārvietosim riņķi perpendikulāri XY tā, lai nogrieznis XY nonāktu uz diametra. Pēc tam diametru samazināsim, reducējot uzdevumu uz a).

c) uz riņķa robežas ir vismaz 3 adatas un adatas veido daudzstūri, kura centrs atrodas vai nu uz daudzstūra malas, vai daudzstūra iekšpusē.

Sadalām šo daudzstūri ar diagonālēm trijstūros. Viens no trijstūriem noteikti ir tāds, kas satur centru uz kādas no malām vai iekšpusē. Ja riņķa centrs ir uz trijstūra malas, tad tas ir taisnleņķa trijstūris un centrs atrodas hipotenūzas, kas ir arī diametrs, viduspunktā. Tātad šis gadījums reducējas uz gadījumu a).

Ja riņķa centrs O atrodas trijstūra ABC iekšpusē, tad viens no leņķiem AOB, BOC, COA ir vismaz 120° (Pamatosim: leņķi AOB, BOC un COA ir centra leņķi, kas skaitliski vienādi ar lokiem, uz kuriem tie balstās. Ja visi leņķi būtu mazāki par 120°, tad visu loku kopējā summa būtu mazāka par 360°, bet tā nevar būt, jo riņķa līnija ir tieši 360° liela. Tātad vismaz viens leņķis ir vismaz 120°.)



49A. zīmējums

Tālāk skat. 49A. zīm.

Ja $\angle BOC \geq 120^{\circ}$, tad no vienādsānu trijstūra OBC varam izteikt: $BC = 2R\sin\alpha \geq 2R\sin 60^{\circ} = R\sqrt{3}$. Tā kā $BC \leq M$, tad $R\sqrt{3} \leq M$.

Citus gadījumus apskata līdzīgi.

Esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus un ieguvuši, ka vienmēr var panākt $R\sqrt{3} \leq M$. Tātad ir spēkā arī uzdevumā apskatītā nevienādība $\frac{M}{m} > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n} - 1\right)$.

Latvijas 30. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

30.9.1. Uzdevuma atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.9.1. atrisinājumam. **Pierādījums:** Tā kā $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 < 0$, tad vismaz viens no q_1, q_2, q_3 ir negatīvs. Tālāk līdzīgi kā 29.9.1. uzdevumā: pieņemsim, ka $q_1 < 0$, bet tad atbilstošā vienādojuma diskriminants $(p_1)^2 - 4 \cdot q_1$>0. Tātad vienādojumam ir 2 saknes.

30.9.2.

a) Atbilde: jā, var. **Piemērs:** skat. 50A. zīm.

16	1	3	5	7
20	2	4	6	8
48	9	11	13	15
52	16	14	12	10
	28	32	36	40

50A. zīmējums

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** naturālo skaitļu no 1 līdz 16 summa ir $(1+16)+(2+15)+...+(8+9)=17 \cdot 8=136$. Tā kā katrs skaitlis ir gan rindiņā, gan kolonnā, tad visu rindiņu un kolonnu summu summa ir $2 \cdot 136 = 272$. Pēc dotā zināms, ka skaitļu summām visās rindās un kolonnās jābūt dažādām un jādalās ar 8. Tā kā pavisam ir 4 kolonnas un 4 rindiņas, tad visu rindiņu un visu kolonnu summu summa sastāvēs no 8 skaitļiem. Mazākie iespējamie atšķirīgie skaitļi, kas dalās ar 8, ir 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, un to summa ir 8+16+32+...+64=$8 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8) = 8 \cdot 36 = 288$. Iegūta pretruna, jo no vienas puses visu rindiņu un kolonnu summu summa ir vismaz 288, bet no otras puses tā ir 272.

30.9.3. Atbilde: $p_1 = 2$ vai $p_1 = 2$ un $p_2 = 3$. **Pierādījums:** eksistē tikai viens pāra pirmskaitlis – skaitlis 2. Tātad ne vairāk kā viens no skaitļiem $p_1 p_2 p_3 ... p_n$ ir pāra skaitlis. Tātad no skaitļiem $(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_n - 1)$ ne vairāk kā viens ir nepāra skaitlis (ja no pāra skaitļa atņem 1, iegūst nepāra skaitli), bet visi pārēji skaitļi ir pāra (ja no nepāra skaitļa atņem 1, iegūst pāra skaitli). Ja n>3, tad $p_1 p_2 p_3 ... p_n$ nedalās ar 4, jo satur maksimums 1 pāra skaitli – 2, bet $(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_n - 1)$ dalās ar 4, jo satur vismaz 2 pāra skaitļus. Tātad n≤2.

Ja n=1, der tikai p_1=2. Ja p>2, tad pastāv nevienādība $1 < \frac{p}{p-1} < 2$, tātad p nedalās ar (p-1). Pamatosim: pieņemsim, ka p – fiksēts skaitlis un p>2, tad iegūstam $\frac{p}{p-1}$, varam veikt pārveidojumus: $\frac{p-1+1}{p-1}=\frac{p-1}{p-1}+\frac{1}{p-1}=1+\frac{1}{p-1}$ (skaitītājā pieskaitām un atņemam 1, daļas vērtību nemainot, pēc tam sadalām iegūto izteiksmi 2 saskaitāmajos). Iegūtā izteiksme $1+\frac{1}{p-1}$ noteikti lielāka par 1, un, tā kā p>2, tad $\frac{1}{p-1}$ ir nesaīsināma daļa. No tā seko, ka $1<\frac{p}{p-1}<2$.

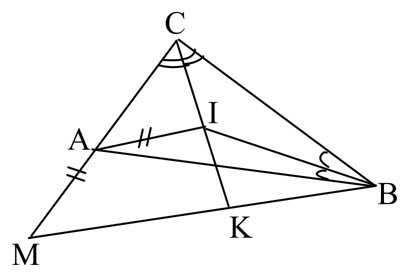
Ja n=2, tad vienam no pirmskaitļiem p_1, p_2 jābūt 2 (nepāra skaitlis p_1p_2 nedalītos ar pāra skaitli $(p_1-1)(p_2-1)$. Pieņemsim, ka $p_1=2$, tad jānoskaidro, kādiem p_2 skaitlis $p_1p_2=2\cdot p_2$ dalās ar p_2-1 (skaitlis $(p_1-1)=1$). Ievērojam, ka $\frac{2p_2}{p_2-1}=\frac{2p_2-2+2}{p_2-1}=\frac{2(p_2-1)+2}{p_2-1}=2+\frac{2}{p_2-1}$. Tātad, lai $2\cdot p_2$ dalītos ar (p_2-1), skaitlim 2 jādalās ar p_2-1. Tā kā skaitlis 2 dalās tikai ar 1 un 2, tad $p_2-1=1$ vai $p_2-1=2$. Tas nozīmē, ka $p_2=2$ vai $p_2=3$, bet, tā kā $p_1=2$ un pirmskaitļiem jābūt dažādiem, tad $p_2\neq 2$ un $p_2=3$. Tātad gadījums n=2 der, un $p_1=2$ un $p_2=3$.

30.9.4. Pierādījums:

1) Atliksim uz CA pagarinājuma AM=AI (skat. 51A. zīm.).

2) CM=CA+AM=CA+AI=CB.

3) ΔMCB – vienādsānu, jo CM=CB.



51A. zīmējums

4) $\angle AMI=\frac{1}{2}\angle CAI=\frac{1}{4}\angle CAB$ pēc ārējā leņķa īpašības vienādsānu trijstūrī MAI un ņemot vērā, ka $\angle CAI=\frac{1}{2}\angle CAB$ (jo trijstūrī ievilktās r.l. centrs atrodas bisektrišu krustpunktā).

5) $\Delta MCI=\Delta BCI$ pēc pazīmes mlm, jo MC=BC, CI – kopīga, $\angle MCI=\angle BCI$, jo CK ir $\angle MCB$ bisektrise.

6) $\angle IBC=\angle IMC$, jo vienādos trijstūros MCI un BCI attiecīgie elementi ir vienādi.

7) no tā seko, ka $\frac{1}{2}\angle ABC=\angle IBC=\angle IMC=\angle IMA=\frac{1}{4}\angle A$.

8) tātad $\angle A=2\cdot\angle B$.

30.9.5.

a) Atbilde: uzvar Juris. **Pierādījums:** Andris izdara pirmo gājienu un apēd tieši 1 konfekti (vismaz 1 jāapēd obligāti, bet ne vairāk kā n, kur n – gājiena kārtas numurs, tātad šoreiz tieši 1). Juris ar otro gājienu ēd 2 konfektes. Kopā tagad apēstas 3 konfektes. Andris var ēst 1, 2 vai 3 konfektes, bet Juris ēd attiecīgi 4, 3 vai 2 konfektes un uzvar.

b) Atbilde: uzvar Andris. **Pierādījums:** Andris spēlē tā, lai pēc viņa gājieniem būtu apēstas $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ konfektes. Parādīsim, kā Andris to var panākt. Skaidrs, ka ar 1.gājienu viņš panācis, ka apēsta 1 konfekte. Pieņemsim, ka ar (2n-1)-o gājienu (n=1; 2; 3;...) viņš panācis, ka apēstas n^2 konfektes. Kārtējā gājienā Juris apēdīs no 1 līdz 2n konfektēm, tātad kopā pēc šī Jura gājiena būs apēstas vismaz n^2+1, bet ne vairāk kā n^2+2n konfektes. Andris grib panākt, lai pēc (2n+1)-ā gājiena (ko izdarīs viņš) būtu apēstas $(n+1)^2 = n^2+(2n+1)$ konfektes. Tā kā $n^2+(2n+1)-(n^2+1)=2n$ un $n^2+(2n+1)-(n^2+2n)=1$, tad viņš šo mērķi var sasniegt, jo ar (2n+1)-o gājienu viņš var ēst no 1 līdz 2n+1 konfektēm. Tātad Andris savu mērķi var realizēt. Tā kā $64=8^2$, tad Andris noteikti apēdīs arī 64-o konfekti.

10. klase

30.10.1.

a) Atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 29.10.1. piemēra a) atrisinājumu.

b) Atrisinājums līdzīgs uzdevuma 29.10.1. piemēra b) atrisinājumam.

Izmaiņas parādās tikai, apskatot sadalījumu reizinātājos:

$\left(x+\frac{4}{x}\right)-\left(y+\frac{4}{y}\right)=(x-y)\left(1-\frac{4}{xy}\right)$, kur jāņem vērā, ka x>y>2.

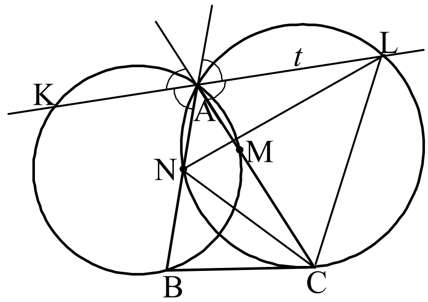
Tā kā xy>4, ja x>y>2, tad $\frac{4}{xy}<1$. No tā seko, ka arī šajā gadījumā otrajās iekavās esošā izteiksme būs pozitīva. Un, tā kā arī pirmajās iekavās esošā izteiksme ir pozitīva, jo x>y, tad arī viss reizinājums ir pozitīvs. Tātad arī $x+\frac{4}{x}>y+\frac{4}{y}$.

30.10.2. Pierādījums: (skat. 52A. zīm.)

1. Apzīmēsim ΔABC ārējo leņķi pie virsotnes A ar 2α .
2. $\angle LAC=\angle KAB=\alpha$, jo taisne t dala ΔABC ārējo leņķi pie virsotnes A uz pusēm.

3. $\angle LNC = \angle LAC = \alpha$, jo tie abi balstās uz loku LC un ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi.

4. $\angle KMB = \angle KAB = \alpha$, jo tie abi balstās uz loku KB un ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi.



52A. zīmējums

5. $\angle CAB = 180^o - 2\alpha$ kā blakusleņķis ārējam leņķim, kas pēc apzīmējumiem vienāds ar 2α.

6. $\angle LAN = \angle BAC + \angle CAL = 180^o - 2\alpha + \alpha. = 180^o - \alpha$.

7. $\angle KAM = \angle BAC + \angle KAB = 180^o - 2\alpha + \alpha. = 180^o - \alpha$

8. Tā kā LANC un KAMB ir riņķī ievilkti četrstūri, tad to pretējo leņķu summas ir 180^o.

9. $\angle LCN = 180^o - (180^o - \alpha) = \alpha$ kā leņķim LAN pretējs leņķis četrstūrī LANC.

10. $\angle KBM = 180^o - (180^o - \alpha) = \alpha$ kā leņķim KAM pretējs leņķis četrstūrī KAMB.

11. Tātad $\angle LCN = \angle LNC = \alpha$, un no tā seko, ka ΔLCN ir vienādsānu.

12. Arī $\angle KMB = \angle KBM = \alpha$, un tad ΔKBM ir vienādsānu.

13. ΔLCN līdzīgs ΔKBM, jo divi leņķi pa pāriem vienādi.

30.10.3.

a) Piemērs: n=40. Patiešām, tad $2n + 1 = 80 + 1 = 81 = 9^2$ un $3n + 1 = 120 + 1 = 121 = 11^2$.

b) Atbilde: nē, nevar. **Pierādījums:** pierādīsim, pieņemot pretējo, ka 5n+3 ir pirmskaitlis. Pēc uzdevuma nosacījumiem zinām, ka 2n+1 un 3n+1 ir veselu skaitļu kvadrāti. Apzīmēsim $2n + 1 = x^2$ un $3n + 1 = y^2$. Izteiksmi 5n+3 sadalīsim reizinātājos. Pārveidojumus sāksim, izsakot 5n+3 ar x^2 un y^2:

$5n + 3 = 5n + 3 + 1 - 1 =$ (5n izteiksim, kā starpību $8n - 3n$)

$= 8n - 3n + 4 - 1 =$ (sagrupēsim saskaitāmos)

$= 8n + 4 - 3n - 1 =$ (pirms iekavām iznesīsim reizinātāju 2 un –1)

$= 2(2n + 1) - (3n + 1) =$ (iekavās esošās izteiksmes aizstāsim attiecīgi ar x^2 un y^2)

$= 4x^2 - y^2 =$ (izmantojam kvadrātu starpības formulu)

$= (2x - y) \cdot (2x + y)$

Tā kā 5n+3 ir pirmskaitlis, tad tas dalās tikai ar 1 un ar 5n+3. Tātad viens no iegūtajiem reizinātājiem ir 1, bet otrs ir 5n+3. Tā kā x un y ir naturāli skaitļi, tad $2x - y < 2x + y$, un no tā seko, ka $2x - y = 1$ (1)

$2x + y = 5n + 3$ (2).

No (1) iegūstam 2x=1+y. Ievietojot vienādībā (2), iegūstam $1 + y + y = 5n + 3$ jeb $2y = 5n + 2$. Kāpinot kvadrātā, iegūstam, ka

$4y^2 = (2y)^2 = (5n + 2)^2 = 25n^2 + 20n + 4$ (3).

Bet no apzīmējumiem zinām, ka $3n + 1 = y^2$, tātad $4y^2 = 4(3n + 1) = 12n + 4$ (4).

No (3) un (4) seko, ka $25n^2 + 20n + 4 = 12n + 4$ jeb $25n^2 + 8n = 0$, kas naturāliem n nav iespējams.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad sākotnējais pieņēmums nav patiess un 5n+3 nevar būt pirmskaitlis.

30.10.4. Atbilde: 233.

Pierādījums: ar a_n apzīmēsim dažādo izvietojumu skaitu, kādos n skolēni var atrasties pēc atļautās pārsēšanās. Skaidrs, ka viena skolēna gadījumā ir tikai viena iespēja – skolēns paliek sēžot savā vietā, tātad $a_1 = 1$. Savukārt, ja ir divi skolēni, tad iespējami divi izvietojumi – abi skolēni paliek sēžot savās vietās vai arī tie samainās vietām, tātad $a_2 = 2$.

Apskatīsim n+2 skolēnus un meklēsim formulu, kas izsaka a_{n+2} ar a_n un a_{n+1}. Visus pārkārtojumus varam iedalīt divās grupās:

1) pirmais skolēns paliek sēžot savā vietā. Tad pārkārtojas pārējie n+1 skolēni. Ja ir n+1 skolēns, tad ir iespējami a_{n+1} dažādi pārkārtojumi.

2) pirmais skolnieks pāriet uz citu krēslu. Pēc uzdevuma nosacījumiem, skolnieks var tikai vai nu palikt savā vietā, vai apsēsties uz krēsla, kas atrodas tai blakus. Tā kā 1. krēslam blakus ir tikai 2. krēsls (uz otru pusi kaimiņa nav), tad 1. skolnieks var pāriet tikai uz otro krēslu. Tad kādam noteikti ir jāpāriet arī uz 1. krēslu, citādi tas paliks tukšs un kādam skolniekam nebūs, kur sēdēt. Tā kā var pārsēsties tikai uz blakus krēslu vai palikt tajā pašā vietā, tad, skaidrs, ka uz 1. krēslu var pāriet

tikai 2. skolnieks (no pārējiem skolniekiem 1. krēsls atrodas vismaz divu krēslu attālumā). Tātad, ja pirmais skolnieks pāriet uz citu krēslu, tad tas noteikti ir 2. krēsls, un tādā gadījumā uz 1. krēslu noteikti pāriet otrais skolnieks. Tad pārējie n skolēni pārkārtojas „savā starpā”. Pēc apzīmējumiem, ja ir n skolēnu, tad ir iespējami a_n dažādi pārkārtojumi.

Tā kā mūs interesē kopējais iespējamais pārkārtojumu skaits, tad jāsaskaita visi iespējamie pārkārtojumi, tātad $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Tā kā $a_1 = 1$ un $a_2 = 2$, tad $a_3 = 1+2=3$, $a_4 = 2+3=5$, $a_5 = 3+5=8$, $a_6 = 5+8=13$, $a_7 = 8+13=21$, $a_8 = 13+21=34$, $a_9 = 21+34=55$, $a_{10} = 34+55=89$, $a_{11} = 55+89=144$, $a_{12} = 89+144=233$.

Tātad 12 skolēnu gadījumā iespējamas 233 dažādas pārkārtošanās.

30.10.5. Atbilde: šādu rūķīti noteikti var atrast, ja m<n vai arī, ja m=n un gan m, gan n ir nepāra skaitļi.

Pierādījums: ar x apzīmēsim to rūķīšu skaitu, kam abi kaimiņi ir šillišallas, ar y - to rūķīšu skaitu, kam abi kaimiņi ir votivapas un ar z - to rūķīšu skaitu, kam viens kaimiņš ir votivapa, bet otrs - šillišalla.

Kopumā ir $\frac{2x+z}{2}$ šilišallas. Pamatosim: katram no x rūķīšiem ir 2 kaimiņi – šillišallas, katram no z rūķīšiem viens kaimiņš ir šillišalla (nevienam no y rūķīšiem kaimiņos nav nevienas šillišallas). Bet, tā kā katrs rūķītis ir kaimiņš diviem citiem rūķīšiem, tad kopējais iegūtais šillišallu skaits 2x+z jādala ar 2. Tātad varam rakstīt, ka 2x+z=2n. Līdzīgi, kopā ir $\frac{2y+z}{2}$ votivapas. Tātad varam rakstīt, ka 2y+z=2m.

Ja rūķīšu ar abiem kaimiņiem šillišallām nebūtu, tad x=0, bet no tā seko, ka z=2n un y=m-n. Tā kā $y \geq 0$, tad no y=m-n seko, ka $m \geq n$.

Tātad, ja m<n, tad noteikti ir vismaz viens tāds rūķītis, kam abi kaimiņi ir šillišallas.

Ja m>n, tad tāda rūķīša varbūt nav. Iespējami šādi izkārtojumi:

v v š š v v š š v v ... š š v v ... v *vai*

v v š š v v š š v v ... š š v v š (v v v ... v).

Apskatīsim gadījumu, kad m=n:

Ja m=n un abi ir pāra skaitļi, arī tad varbūt nav rūķīša, kam abi kaimiņi ir šillišallas. Iespējams šāds izkārtojums: v v š š v v š š ... v v š š.

Ja m=n un abi ir nepāra skaitļi, tad šāds rūķītis noteikti ir. Pamatosim: nokrāsosim krēslus, uz kuriem sēž rūķīši, pamīšus baltus un sarkanus. Tas nozīmē, ka uz vienas krāsas krēsliem šillišallu ir vairāk nekā votivapu. Pieņemsim, ka vairāk šillišallu sēž uz baltajiem krēsliem. Tad eksistē tādi 2 „blakus" esoši balti krēsli, uz kuriem sēž šillišallas. Bet tas nozīmē, ka starp šiem diviem rūķīšiem sēdošajam rūķītim abi kaimiņi ir šillišallas – tas arī būs meklētais rūķītis.

11. klase

30.11.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast, kāda ir lielākā iespējamā z vērtība, un parādīt piemēru, kā tādu var iegūt; otrkārt, pamatot, ka lielāku z vērtību iegūt nevar.

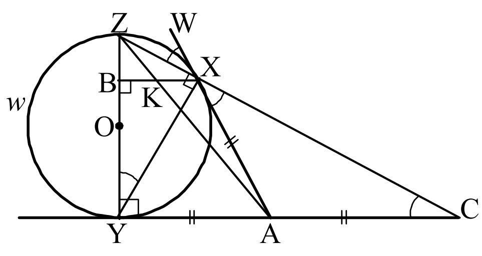
- **Atbilde:** lielākā iespējamā z vērtība ir z=1001,5. **Piemērs:** šādu z vērtību var iegūt, ja z=1001,5, x=z un y=0.
- **Pierādījums:** apskatīsim dotā vienādojuma divus saskaitāmos $|x-y+z|$ un $|-x+y+z|$. No moduļu īpašībām zinām, ka $|x-y+z|+|-x+y+z| \geq |x-y+z-x+y+z| = |2z| = 2|z|$.

  Tātad zinām, ka $2003 = |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z| \geq |x+y-z|+2|z|$ jeb

  $2003 \geq |x+y-z|+2|z|$ (1).

  Tā kā modulis no jebkuras izteiksmes ir lielāks vai vienāds par nulli, tad arī $|x+y-z| \geq 0$; ievietojot šo izteiksmi nevienādībā (1), iegūstam, ka $2003 \geq 0+2|z| \geq 2|z|$, no kurienes $z \leq 1001{,}5$. Tātad esam pamatojuši, ka z nevar būt lielāks par 1001,5.

30.11.2. Pierādījums: (skat. zīm. 53A.)



53A. zīmējums

1) Pagarinām ZX līdz krustpunktam C ar taisni YA.
2) ΔZYC - taisnleņķa trijstūris, kur $\angle ZYC = 90^\circ$, jo pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kas novilkts

pieskaršanās punktā.

3) YX – augstums pret hipotenūzu taisnleņķa trijstūrī ZYC, jo $\angle ZXY = 90^o$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru.

4) $\Delta ZXY \sim \Delta ZYC$, jo $\angle ZXY = \angle ZYC = 90^o$ un $\angle XZY = \angle YZC$ - kopīgs leņķis. Tātad arī $\angle XYZ = \angle YCZ$.

5) Pamatosim, ka $\angle ZYX = \angle ZXW$:

6) ΔYXA – vienādsānu, jo YA=XA kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no punkta A. Tad $\angle XYA = \angle YXA = \alpha$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī.

7) Tā kā $\angle ZYC = \angle YXC = 90^o$, tad $\angle ZYX = \angle CXA = 90^o - \alpha$.

8) Zinām, ka $\angle AXC = \angle ZXW$ kā krustleņķi. No tā seko, ka $\angle ZYX = \angle ZXW$.

9) Ņemot vērā, ka $\angle XYZ = \angle YCZ$ (sekoja no trijstūru līdzības), varam secināt, ka $\angle AXC = \angle ZXW = \angle ZYX = \angle XCY$. Tātad $\angle AXC = \angle XCA$ un ΔAXC - vienādsānu, un AX=AC.

10) AX=AY kā riņķa līnijas pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta.

11) Esam ieguvuši, ka A ir YC viduspunkts, jo YA=AC.

12) Tā kā $XB \| YC$, tad $\Delta ZBK \sim \Delta ZYA$ un $\Delta ZBX \sim \Delta ZYC$ kā taisnleņķa trijstūri, kam leņķis Z kopīgs.

13) Tā kā $\Delta ZBK \sim \Delta ZYA$, tad BK:YA=ZB:ZY (*).

14) Tā kā $\Delta ZKX \sim \Delta ZAC$, tad KX:AC=ZB:ZY (**).

15) No (*) un (**) seko, ka BK:YA=KX:AC jeb BK:KX=YA:AC. Tā kā zinām, ka YA=AC, tad YA:AC=1:1 un no tā seko, ka BK:KX=1:1.

16) Tātad BK=KX jeb taisne AZ dala BX uz pusēm punktā K.

30.11.3. Atbilde: nē, neeksistē.

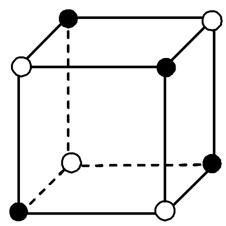
Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds n, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$. Apskatīsim starpību $(6^n - 1) - (4^n - 1)$. Tā kā $6^n - 1$ dalās $4^n - 1$ (pēc pieņēmuma) un skaitlis $4^n - 1$ noteikti dalās pats ar sevi, tad arī šo skaitļu starpībai jādalās ar $4^n - 1$. Apskatāmo skaitļu starpību pārveidosim reizinājumā: $(6^n - 1) - (4^n - 1) = 6^n - 4^n = 2^n(3^n - 2^n)$. Zinām, ka vienādības labajai pusei jādalās ar $4^n - 1$. Tā kā reizinātājs 2^n neiespaido dalīšanos ar nepāra skaitli $4^n - 1$, tad reizinātājam $3^n - 2^n$ noteikti jādalās ar $4^n - 1$. Tas nozīmē, ka jābūt $3^n - 2^n \geq 4^n - 1$. Salīdzināsim šos skaitļus. Tā kā $2^n > 1$ (n ir naturāls skaitlis, tāpēc mazākā iespējamā 2^n vērtība ir $2^1 = 2$), tad $3^n - 2^n < 3^n - 1$, bet noteikti $3^n - 1 < 4^n - 1$. Tātad

$0 < 3^n - 2^n < 4^n - 1$. Esam ieguvuši pretrunu un $3^n - 2^n$ nevar dalīties ar $4^n - 1$. Tātad sākotnējais pieņēmums bija nepareizs un neeksistē tāds naturāls n, lai $6^n - 1$ dalītos ar $4^n - 1$.

30.11.4. Atbilde: jā, var.

Pierādījums: tā kā ir 8 kluba biedri un kubam ir 8 virsotnes, tad varam attēlot kluba biedrus ar kuba virsotnēm. Tādā gadījumā nodibinātās komisijas būs kuba virsotņu kopas. Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem katrā komisijā jābūt 4 biedriem, tad arī katrā virsotņu kopā jābūt 4 virsotnēm. Izvēlēsimies šādas četru virsotņu kopas:

- sešas virsotņu kopas, kas katra sastāv no 4 virsotnēm, kas pieder kādai no kuba skaldnēm.
- sešas virsotņu kopas, kas katra sastāv no 4 virsotnēm, kas pieder kādam kuba diagonālšķēlumam.
- divas virsotņu kopas, kas katra sastāv no 4 tetraedra virsotnēm. Tetraedra virsotnes izvēlamies, kā parādīts zīm. 54A., kur viena tetraedra virsotnes atzīmētas ar baltiem punktiem, bet otra tetraedra virsotnes – ar melniem punktiem.



54A. zīmējums

Skaidrs, ka nekādām divām no aprakstītajām kopām nav vairāk kā divu kopīgu punktu. Tātad nav tādu 3 punktu, kas piederētu divām dažādām kopām vienlaicīgi, jeb nav tādu trīs biedru, kas būtu kopā vairāk kā vienā komisijā. No tā seko, ka visi virsotņu trijnieki, ko satur aprakstītās kopas, ir dažādi. Tā kā pavisam esam izveidojuši 14 komisijas un katrā no tām ir 4 biedri, no kuriem 3 biedru trijnieku var izvēlēties C_4^3 veidos, tad kopā aprakstītās komisijas satur $14 \cdot C_4^3 = 14 \cdot 4 = 56$ dažādus biedru trijniekus. Tātad, izveidojot četru biedru (virsotņu) kopas, kā aprakstījām, iegūstam tieši 56 dažādus biedru trijniekus.

Bet biedru trijniekus no 8 biedriem pavisam var izvēlēties tieši $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ veidos. Tātad esam pamatojuši, ka katri trīs no kluba biedriem ir kopā tieši vienā komisijā. Tātad var nodibināt tādas komisijas, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

30.11.5. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 27.11.5. atrisinājumu.

12. klase

30.12.1. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, pierādīt, ka leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi, zinot, ka līdzīga trijstūra malu garumi ir veseli skaitļi; otrkārt, pierādīt, ka eksistē dotajam trijstūrim līdzīgs ar trijstūra malu garumiem – veseliem skaitļiem, ja zināms, ka dotā trijstūra leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi.

- **Pierādījums:** pierādīsim: leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi, ja zināms, ka līdzīga trijstūra malu garumi ir veseli skaitļi. Pieņemsim, ka līdzīgā trijstūra malu garumi ir a, b un c, bet attiecīgie pretleņķi šīm malām ir α, β, un γ. No kosinusu teorēmas iegūstam $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Tā kā a, b un c ir naturāli skaitļi, tad arī $\cos\alpha$ vērtība ir racionāls skaitlis.

  Līdzīgi iegūstam, ka arī $\cos\beta$ un $\cos\gamma$ racionāli skaitļi.

  Tā kā līdzīgu trijstūru leņķi ir vienādi, tad esam pamatojuši: leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi jebkuram trijstūrim, kas līdzīgs tādam trijstūrim, kura malu garumi ir naturāli skaitļi.

- Pierādīsim: no tā, ka trijstūra leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi, seko, ka noteikti var atrast tādu līdzīgu trijstūri, kura malu garumi ir veseli skaitļi. Apskatīsim trijstūri ABC; pieņemsim, ka cosA, cosB, cosC – racionāli skaitļi. No trigonometrijas zinām, ka $\cos C = -\cos(180^\circ - \angle C)$ (1).

  Tā kā trijstūra visu leņķu summa ir 180°, tad $180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$. Ievietojot vienādībā (1), iegūstam, ka $\cos C = -\cos(\angle A + \angle B)$ (2).

  Savukārt $\cos(\angle A + \angle B)$ var pārveidot kā $\cos(\angle A + \angle B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$. Ievietojot vienādībā (2), iegūstam: $\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$. Tā kā cosA, cosB un cosC ir racionāli skaitļi, tad arī skaitlim $\sin A \cdot \sin B$ ir jābūt racionālam.

  Līdzīgi iegūstam, ka arī $\sin A \cdot \sin C$ un $\sin B \cdot \sin C$ – racionāli skaitļi. Tā kā $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$ un $\sin C \neq 0$, tad iegūtos reizinājumus var dalīt vienu ar otru. Iegūstam, ka $\dfrac{\sin A}{\sin B}$, $\dfrac{\sin B}{\sin C}$ un $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ ir racionāli skaitļi. Apskatāmajam trijstūrim ABC uzrakstīsim sinusu teorēmu: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. Apskatīsim $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$, varam to pārveidot kā $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$. Tā kā $\frac{\sin A}{\sin B}$ ir racionāls skaitlis, tad varam apzīmēt $\frac{a}{b}=\frac{n_1}{m_1}$, kur n_1, m_1 ir naturāli skaitļi. Līdzīgi iegūstam $\frac{b}{c}=\frac{n_2}{m_2}$, kur n_2, m_2 ir naturāli skaitļi.. Vienādību $\frac{a}{b}=\frac{n_1}{m_1}$ varam pārveidot; iegūstam $\frac{a}{b}=\frac{n_1\cdot n_2}{m_1\cdot n_2}$. Vienādību $\frac{b}{c}=\frac{n_2}{m_2}$ pārveidojam, iegūstot $\frac{b}{c}=\frac{n_2\cdot m_1}{m_2\cdot m_1}$. Tātad $a:b:c=n_1n_2:m_1n_2:m_1m_2$. Trijstūris ar malu garumiem n_1n_2, m_1n_2 un m_1m_2 ir meklējamais.

30.12.2. Atbilde: nē, neeksistē.

Pierādījums: izteiksim n formā $n=3^k\cdot a$, kur $k\in Z$ un a nedalās ar 3. Tad $n^2=3^{2k}\cdot a^2$. Skaitļa $n^2=3^{2k}\cdot a^2$ dalītājus var iedalīt divās grupās: tādi, kas dalās ar 3, un tādi, kas nedalās ar 3. Apskatīsim to dalītāju grupu, kuri nedalās ar 3. Skaidrs, ka šie skaitļa $n^2=3^{2k}\cdot a^2$ dalītāji ir tieši a^2 dalītāji (citādi tie kā reizinātāju saturētu 3). Tā kā jebkura skaitļa kvadrātam ir nepāra skaits dalītāju, tad arī skaitlim a^2 ir nepāra skaits dalītāju. Tātad skaitlim $n^2=3^{2k}\cdot a^2$ ir <u>nepāra skaits</u> tādu dalītāju, kas nedalās ar 3.

Skaidrs, ka uzdevumā apskatāmie dalītāji, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, un kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2, veido skaitļa $n^2=3^{2k}\cdot a^2$ dalītāju grupu, kas nedalās ar 3. Jau esam pamatojuši, ka kopumā skaitlim $n^2=3^{2k}\cdot a^2$ šādu dalītāju ir nepāra skaits. Tāpēc abu veidu dalītāji nevar būt vienādā skaitā.

30.12.3. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 29.12.3. atrisinājumu.

30.12.4. Atbilde: x=y=z=u=v=2.

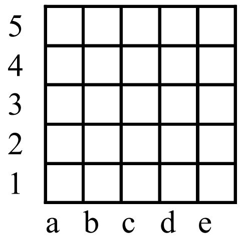
Pierādījums: pieņemsim, ka x ir lielāks vai vienāds par pārējiem četriem mainīgajiem. Tādā gadījumā, ņemot vērā, ka $u\le x$ un $v\le x$, no vienādojuma $x^2=u+v$ seko, ka $x^2=u+v\le x+x$ jeb $x^2\le 2x$. Atrisinot šo nevienādību un zinot, ka x>0, iegūstam, ka $0<x\le 2$.

Līdzīgi pieņemsim, ka y ir mazāks vai vienāds par pārējiem četriem mainīgajiem. Tādā gadījumā, ņemot vērā, ka $v\ge y$ un $x\ge y$, no vienādojuma $y^2=v+x$ seko, ka $y^2=v+x\ge y+y$ jeb $y^2\ge 2y$. Atrisinot šo nevienādību iegūstam, ka $y\le 0$ vai $y\ge 2$. Tā kā y noteikti pozitīvs, tad $y\ge 2$.

Tā kā x ir lielākā vērtība un y – mazākā vērtība, tad no $0 < x \le 2$ un $y \ge 2$ seko, ka x=y=2. Tāpēc arī x=y=z=u=v=2. Pārbaude parāda, ka atrisinājums der.

Skaidrs, ka gadījumos, ja lielākā (mazākā) vērtība ir citam mainīgajam, atbilde nemainās.

30.12.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, jāatrod, kādu lielāko summu S spēlētājs A var sasniegt, un jāparāda piemērs, kā to var izdarīt; otrkārt, jāpamato, ka lielāku summu spēlētājs A sasniegt nevar.



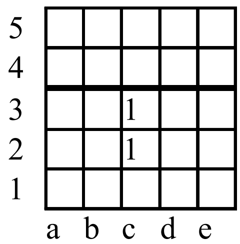
55A. zīmējums

- **Atbilde:** lielākā iespējamā S vērtība ir 6.

Piemērs: apzīmēsim kvadrāta rindas un kolonnas, kā parādīt zīm. 55A. Izteicieni „A raksta rūtiņā c4" utml. nozīmēs, ka spēlētājs A raksta vieninieku rūtiņā, kas atrodas 4. rindas c kolonnā. Kvadrātu, kas sastāv no 3×3 rūtiņām un kura centrālā rūtiņa ir c4, apzīmēsim ar K(c4). Pierādīsim, ka spēlētājs A var panākt, ka vismaz vienā 3×3 rūtiņu kvadrātā summa ir 6.

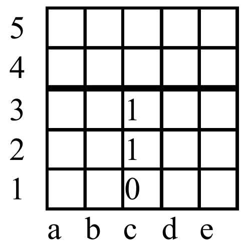
Pirmo gājienu A izdara rūtiņā c3. Ja B atbild ar gājienu 1. vai 2. rindā, tad simetrijas pēc varam pieņemt, ka B izdarījis gājienu 4. vai 5. rindā. Ja B atbild ar gājienu 3. rindā, tad simetrijas pēc varam visas rindas pārsaukt par „a, b, c, d, e", bet visas kolonnas par „1., 2., 3., 4., 5.", tad būsim ieguvuši situāciju, kuru simetrijas pēc varēsim reducēt uz situāciju, kad B izdarījis gājienu 4. vai 5. rindā. Tātad varam pieņemt, ka B noteikti izdarījis gājienu 4. vai 5. rindā.

Otro gājienu spēlētājs A izdara rūtiņā c2 (skat. 56A. zīm.). Apskatīsim divas iespējas:



56A. zīmējums

1) spēlētājs B otro gājienu neizdara rūtiņā c1. Tad vai nu kvadrātā K(b2), vai kvadrātā K(d2) ir ierakstīti tikai divi vieninieki. Bet, ja kvadrātā ir ierakstīti tikai divi vieninieki, tad A noteikti var panākt, lai šajā kvadrātiņā ierakstītā summa būtu vismaz 6. Pamatosim: ja 3×3 rūtiņu kvadrātā ir ierakstīti divi skaitļi, tad palikušas brīvas ir vēl 7 rūtiņas. Tā kā nākamais gājiens ir spēlētājam A, tad skaidrs, ka spēlētājs B nevarēs ierakstīt šajā kvadrātā vairāk par 3 nullēm, bet tādā gadījumā A ierakstīs 4 vieniniekus. Tad kopējā



57A. zīmējums

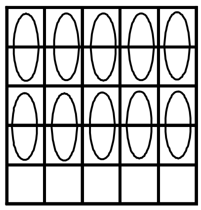
kvadrātiņā ierakstīto skaitļu summa būs 6.

2) spēlētājs B otro gājienu izdara rūtiņā c1 (skat. 57A. zīm.). Tad nākamo gājienu A izdara rūtiņā b3. Redzam, ka spēlētājam B jāatbild ar gājienu kvadrātiņā K(b2), citādi kvadrātiņā K(b2) būs ierakstīti 3 vieninieki un 1 nulle. Pamatosim, ka kvadrātiņā, kurā ierakstīti 3 vieninieki un 1 nulle, spēlētājs A noteikti var sasniegt summu 6. Tā kā kvadrātā palikušas brīvas vēl 5 rūtiņas un gājiens ir spēlētājam A (spēlētājs B izdarīja gājienu rūtiņā, kas nav kvadrātiņā K(b2)), tad redzam, ka A varēs šajā kvadrātiņā uzrakstīt 3 no iespējamajiem 5 skaitļiem, bet B – tikai 2. Tātad A būs uzrakstījis 3+3=6 vieniniekus un ieguvis summā 6. Lai to nepieļautu, spēlētājs B noteikti atbild ar gājienu kvadrātiņā K(b2). Nākošajā gājienā spēlētājs A ieraksta skaitli rūtiņā d3. Līdzīgi, kā pamatots iepriekš, spēlētājam B noteikti jāieraksta skaitlis kādā kvadrātiņa K(d2) rūtiņā, citādi A varēs sasniegs summu 6 šajā kvadrātiņā.
   Tagad apskatīsim kvadrātiņu K(c4). Tajā noteikti ir 3 vieninieki (rūtiņās b3, c3 un d3) un varbūt 1 nulle (atkarībā no tā, kur savu pirmo gājienu izdarīja spēlētājs B). Bet, ja 3×3 rūtiņu kvadrātā ir 3 vieninieki un 1 nulle, tad spēlētājs A noteikti var panākt, lai ierakstīto skaitļu summa būtu 6.

Esam pamatojuši, ka spēlētājs A vienmēr varēs sasniegt summu 6 kādā kvadrātiņā.

▪ **Pierādījums:** pierādīsim, ka spēlētājs B var nepieļaut, ka summa kādā no kvadrātiņiem ir lielāka par 6.

Ievērosim, ka katrs 3×3 rūtiņu kvadrāts satur 3 pilnus 58A. zīm. redzamos rūtiņu pārus. Tāpēc spēlētājs B spēlē tā, lai katrā no šiem rūtiņu pāriem būtu ierakstīta vismaz viena nulle. Spēlētājs B to noteikti var izdarīt šādi: tiklīdz A ieraksta vieninieku vienā no tukša rūtiņu pāra rūtiņām, tā spēlētājs B atbild ar nulli otrā šī pāra rūtiņā. Ja spēlētājs A ieraksta vieninieku rūtiņā, kas nav nevienā no rūtiņu pāriem, tad spēlētājs B izdara patvaļīgu gājienu.



58A. zīmējums

Tā kā katrs 3×3 rūtiņu kvadrāts satur 3 pilnus 58A. zīm. redzamos rūtiņu pārus, tad katrs 3×3 rūtiņu kvadrāts saturēs arī vismaz 3 nulles (katrā no rūtiņu pāriem vismaz vienu). Tātad nevienā kvadrātiņā summa nebūs lielāka par 6.

Latvijas 31. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase.

31.9.1. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka nevienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$ un $x^2+p_2x+q_2=0$ neeksistē atrisinājums. Uzzīmēsim vienādojumu kreisajās pusēs esošo kvadrāttrinomu grafikus. Koeficienti pie x^2 ir 1 un 1>0, tātad abām parabolām zari ir vērsti uz augšu. Lai atrisinājumu nebūtu, tās nekrusto x asi, tātad atrodas virs tās. Tas nozīmē, ka visiem x izpildās $x^2+p_1x+q_1>0$ un visiem x izpildās $x^2+p_2x+q_2>0$. Tā kā $x^2+p_1x+q_1+x^2+p_2x+q_2=2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)$ un $x^2+p_1x+q_1+x^2+p_2x+q_2>0$, tad arī visiem x izpildās $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)>0$. Iegūta pretruna, jo pēc dotā vienādojumam $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)=0$ eksistē atrisinājums. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un vismaz vienam no dotajiem vienādojumiem atrisinājums eksistē.

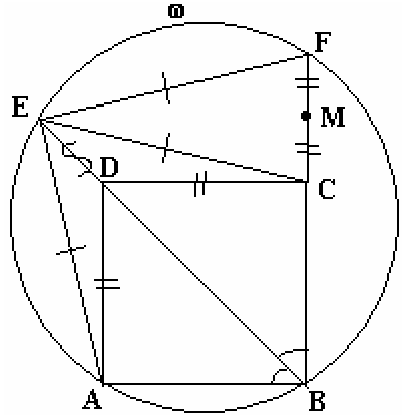
31.9.2. Pierādījums: pieņemsim pretējo, ka neeksistē divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir a vai b. Tā kā a+b ir nepāra skaitlis, tad viens no skaitļiem a un b ir pāra, otrs – nepāra. Pieņemsim, ka a – pāra, b- nepāra.

Pieņemsim, ka punktā 0 dzīvo votivapa. No tā seko, ka punktā $1\cdot a=a$ dzīvo šillišalla (citādi divas votivapas dzīvotu attālumā a viena no otras un uzdevuma prasības izpildītos), bet tādā gadījumā punktā $2\cdot a=2a$ dzīvo votivapa (citādi šillišallas dzīvotu punktos a un 2a, attālums starp tām būtu a un izpildītos uzdevuma nosacījumi). Turpinot spriešanu līdzīgi, punktā 3a dzīvo šillišalla, bet punktā 4a – votivapa, utt. Ievērojam, ka punktos, kas izsakāmi kā pāra skaitļa reizinājums ar a, dzīvo votivapas, bet punktos, kas izsakāmi kā nepāra skaitļa reizinājums ar a, dzīvo šillišallas. Punkts $b\cdot a$ ir nepāra skaitļa reizinājums ar a, tāpēc tajā dzīvo šillišalla.

Tā kā punktā 0 dzīvo votivapa, tad punktā $1\cdot b=b$ dzīvo šillišalla (lai starp 2 votivapām attālums nebūtu b), tad punktā $2\cdot b=2b$ dzīvo votivapa, punktā $3\cdot b$ – šillišalla utt. Redzam, ka punktos, kas izsakāmi kā pāra skaitļa reizinājums ar b, dzīvo votivapas, bet punktos, kas izsakāmi kā nepāra skaitļa reizinājums ar a, dzīvo šillišallas. Tā kā $a\cdot b$ ir pāra skaitļa reizinājums ar b, tad punktā $a\cdot b$ dzīvo votivapa.

Esam ieguvuši, ka punktā $a \cdot b$ dzīvo gan šillišalla, gan votivapa, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja punktā 0 dzīvo šillišalla. Tātad sākotnējais pieņēmums nav pareizs un noteikti ir atrodami divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir a vai b.

31.9.3. Pierādījums: (skat. 59A. zīm.)



59A. zīmējums

1) $\angle ABE = \angle EBF$, jo BD (kas sakrīt ar BE) ir kvadrāta ABCD diagonāle un tāpēc ir arī leņķa $\angle ABC$ bisektrise.
   Līdzīgi $\angle ADB = \angle CDB$, jo BD ir arī kvadrāta ABCD leņķa D bisektrise.
2) EA=EF pēc ievilkto leņķu īpašības, ka vienādi ievilkti leņķi $\angle ABE$ un $\angle EBF$ balstās uz vienādām hordām.
3) $\angle ADE = 180^o - \angle ADB = 180^o - \angle BDC = \angle CDE$, jo blakusleņķu summa ir 180^o un $\angle ADB = \angle CDB$.
4) $\Delta EDA = \Delta EDC$ pēc pazīmes mlm, jo DE – kopīga, AD=CD kā kvadrāta malas, $\angle ADE = \angle CDE$.
5) EA=EC, jo vienādos trijstūros $\Delta EDA = \Delta EDC$ attiecīgie elementi ir vienādi.
6) No tā, ka EA=EC un EA=EF, seko, ka EA=EC=EF.
7) ΔCEF ir vienādsānu, jo CE=EF.
8) Tā kā vienādsānu trijstūrī mediāna ir arī augstums, tad $EM \perp BC$.

31.9.4. Pierādījums: apzīmēsim rūķīti, kurš atnāca pēdējais, ar A, un rūķīti, kurš aizgāja pirmais, ar B. Ja kāds rūķītis C pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus, tas nozīmē, ka pie Sniegbaltītes tajā brīdī bija vismaz n+1 rūķītis (n citi rūķīši un vēl pats C). Ar KA apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no paša A un viņa satiktajiem rūķīšiem, un ar KB apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no B un viņa satiktajiem rūķīšiem. Gan KA, gan KB katrā ir vismaz n+1 rūķītis. Ja KA un KB nebūtu neviena kopīga rūķīša, tad kopā KA un KB sastāvētu no vismaz (n+1)+(n+1)=2n+2 rūķīšiem. Bet pēc uzdevumā dotā pie Sniegbaltītes aizgāja 2n+1 rūķītis, tātad eksistē tāds rūķītis, kas pieder gan KA, gan KB. Apzīmēsim kopīgo rūķīti ar R.

Pierādīsim, ka R satika pilnīgi visus citus rūķīšus. Ja būtu tāds rūķītis X, ko R nesatika, tad ir divas iespējas:

1) X aizgāja agrāk, nekā R atnāca. Ja X ir aizgājis, tad arī B ir aizgājis, jo B ir rūķītis, kurš aizgāja pirmais. Bet tas nozīmē, ka B nav saticis R (jo ir aizgājis, pirms R atnāca). Esam ieguvuši pretrunu, jo R izraudzījāmies tādu, lai viņš būtu saticis B. Tātad nav tāda rūķīša, kurš aizgāja ātrāk, nekā R atnāca.

2) X atnāca vēlāk, nekā R aizgāja. Ja X atnāca vēlāk, nekā R aizgāja, tad arī A atnāca vēlāk, nekā R aizgāja, jo A ir rūķītis, kurš atnāca pēdējais. Bet tas nozīmē, ka A nav saticis R (jo ir atnācis pēc tam, kad R aizgāja). Esam ieguvuši pretrunu, jo R izraudzījāmies tādu, lai viņš būtu saticis A. Tātad nav tāda rūķīša, kurš atnāca vēlāk, nekā R aizgāja.

Esam ieguvuši, ka nav neviena rūķīša, kurš aizgāja agrāk, nekā R atnāca, un nav arī neviena rūķīša, kurš atnāca vēlāk, nekā R aizgāja. Tātad R ir saticis visus rūķīšus.

31.9.5.

a) Atbilde: jā, var izdarīt. **Piemērs:** skat. 60A. zīm.

1	-1	0	-1	-1
1	-1	1	1	2
0	-1	-1	-1	-3
1	1	1	1	4
3	-2	1	0	

60A. zīmējums

b) Atbilde: nē, nevar izdarīt. **Pierādījums:** desmit summām iespējamās vērtības ir $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5$, kopā iespējamas 11 dažādas vērtības. Tātad tieši viena vērtība nav sastopama. Ja rindiņu summas ir r_1, ..., r_5 un kolonu summas ir k_1, ..., k_5, tad visi skaitļi ir ieskaitīti divas reizes (vienreiz pa rindām, vienreiz pa kolonnām), tāpēc $(r_1 + ... + r_5) + (k_1 + ... + k_5)$ ir pāra skaitlis. Tāpēc starp r_1, ..., r_5, k_1, ..., k_5 ir pāra skaits nepāra skaitļu. Tāpēc visas nepāra summas $\pm 1; \pm 3; \pm 5$ ir sastopamas. Ievērosim, ka tabulā var patvaļīgi mainīt savā starpā rindas un savā starpā – kolonnas, saglabājot vajadzīgo īpašību. Varam pieņemt, ka $k_1 = 5$. Tad nevienas rindiņas summa nevar būt –5 (lai rindiņas summa būtu -5, visās rūtiņās jābūt rakstītam -1, bet tas nav iespējams, jo vienā rūtiņā jau noteikti ir +1). Tā kā summai -5 noteikti jābūt, tad tā būs kādā kolonnā. Varam pieņemt, ka $k_2 = -5$. No summām „4” un „-4” obligāti jābūt vismaz vienai, citādi kopumā nesanāk 10 dažādas summas. Varam pieņemt, ka ir summa $k_3 = 4$ (otru gadījumu, kad ir summa (-4), apskata līdzīgi). Vienīgais veids, lai no 5 saskaitāmajiem iegūtu summā 4, izmantojot -1, 0 un 1, ir izteikt 4 kā 1; 1; 1; 1; 0 summu. Tā kā rindu secība nav svarīga, tad varam pieņemt, ka nulle ir rindā r_5 (skat. 61A. zīm.). Patlaban 1. – 4. rindās ierakstīto skaitļu summas ir 1, bet 5. rindā ierakstīto skaitļu summa ir 0, tāpēc nav iespējams, ka r_i = -3. Tā kā visām nepāra vērtībām jābūt, tad (-3) ir kādas

r_1	1	-1	1		
r_2	1	-1	1		
r_3	1	-1	1		
r_4	1	-1	1		
r_5	1	-1	0		
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5

61A. zīmējums

kolonnas summa. Varam uzskatīt, ka k_4=-3. Tātad 4. kolonā ir trīs „-1”. Apskatīsim 2 gadījumus.

1) Tie visi sastopami pirmajās 4 rindās. Tā kā patlaban pirmo 4 rindu summas ir vienādas, tad varam uzskatīt, ka -1 ir pirmajās 3 rindās (skat. 62A. zīm.). Lai pirmajās 3 rindās summas būtu dažādas, tās var būt tikai $-1; 0; 1$. Tāpēc 5. kolonā pirmajās 3 rindās ir skaitļi -1; 0; 1, tad $k_5 \neq 3$ un arī $r_5 \neq 3$. Vērība 3 var būt tikai r_4, tāpēc 4. rindā abi pēdējie skaitļi ir 1. Tā kā k_4=-3, tad 4. kolonas un 5. rindas krustpunktā ir „-1”. Lai kā izvēlētos skaitli x, iegūst pretrunu (tieša pārbaude).

1	-1	1	-1	
1	-1	1	-1	
1	-1	1	-1	
1	-1	1		
1	-1	0		x

62A. zīmējums

2) Ceturtajā kolonā pirmajās 4 rindās ir tikai divi -1 un trešais -1 ir piektajā rindā. Varam uzskatīt, ka situāciju attēlo 63A. zīm. Nevienā rindā summa nevar būt 3, tāpēc k_5=3. Tas iespējams vai nu kā 1+1+1+0+0, vai kā 1+1+1+1+(-1). Jābūt $x \neq y$ un $z \neq t$. Pārbaudot visas iespējas, katrā no tām iegūst pretrunu.

1	-1	1	-1	x
1	-1	1	-1	y
1	-1	1	0	z
1	-1	1	0	t
1	-1	0	-1	

63A. zīmējums

10. klase

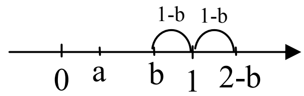
31.10.1.

Uzdevuma atrisinājums sastāv no 2 daļām: pirmkārt, atrast kāda ir mazākā a vērtība, un pamatot, ka uzdevumā aprakstītā īpašība tai izpildās; otrkārt, pierādīt, ka a vērtība nevar būt mazāka par atrasto.

- **Atbilde:** a=1.

  Pierādījums: pamatosim, ka, ja $x > y > 1$, tad izpildās sakarība $x^2 - 2x > y^2 - 2y$. Zinām: ja $x > y > 1$, tad arī $x - 1 > y - 1$. Tā kā x^2 ir augoša funkcija, ja x>0, tad no $x - 1 > y - 1$ seko $(x-1)^2 > (y-1)^2$. Iegūstam: $x^2 - 2x + 1 > y^2 - 2y + 1$ jeb $x^2 - 2x > y^2 - 2y$. Tātad visiem x un y, kam izpildās nosacījums $x > y > 1$, ir spēkā $x^2 - 2x > y^2 - 2y$.

- **Pierādījums:** pamatosim, ka nevar būt a<1. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds a. Tad $0 < a < 1$. Saskaņā ar pieņēmumu nevienādība $x^2 - 2x > y^2 - 2y$ izpildās katriem x un y, kam spēkā $x > y > a$. Pamatosim, ka varam izvēlēties tādus x un y, lai šī nevienādība neizpildītos. Tā kā $0 < a < 1$, tad varam izvēlēties y=b tā, lai a<b<1. Izvēlēsimies x vērtību tā, lai attālums uz skaitļu ass starp 1 un x būtu tāds pats kā starp 1 un y (skat. 64A. zīm.). Tā kā y=b, tad attālums starp y un 1 ir 1-b. Lai iegūtu x vērtību, pie 1 pieskaitām iegūto attālumu 1-b, t.i., x=2-b. Skaidrs, ka izpildās nosacījums x>y, jo x>1 (x=1+(1-b)), bet y<1 (y=b). Lai pārbaudītu, vai izpildās nevienādība $x^2-2x>y^2-2y$, ievietosim x=2-b un y=b:



64A. zīmējums

$(2-b)^2-2(2-b)>b^2-2b$ (kāpinām kvadrātā un atveram iekavas)

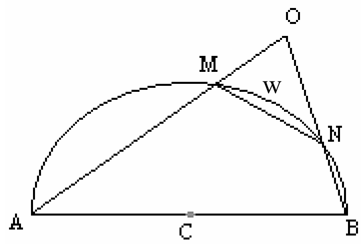
$4-4b+b^2-4+2b>b^2-2b$ (savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$b^2-2b>b^2-2b$

Redzam, ka esam ieguvuši pretrunu, jo $b^2-2b=b^2-2b$, tātad vajadzīgā nevienādība neizpildās. Esam pamatojuši, ka katram 0<a<1 iespējams atrast tādas x un y vērtības, lai nevienādība neizpildītos. Tātad mazākā iespējamā a vērtība ir 1.

31.10.2. Uzdevuma atrisinājums sastāv no vairākām daļām. Pirmkārt, jāievēro, ka staru AM un BN krustpunkts var atrasties vai nu ārpus pusriņķa, vai pusriņķa iekšpusē. Katrā no 2 gadījumiem jāpierāda uzdevumā prasītais, ka ΔMNO apvilktās riņķa līnijas garums nav atkarīgs no hordas MN novietojuma. Otrkārt, tā kā M un N ir patvaļīgi punkti, jāpamato apvilkto riņķa līniju garumu vienādība abos divos iespējamajos gadījumos.

Pierādījums: Apskatīsim gadījumu, kad AM un BN krustpunkts atrodas ārpus pusriņķa (skat. 65A. zīm.)



65A. zīmējums

1) Apzīmēsim hordas MN savilktā loka leņķisko lielumu ar ω.

2) $\angle ABN=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AMN}=\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AM}+\overset{\smile}{MN}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AM}+\omega\right)$, jo $\angle ABN$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz loku AN.

3) $\angle MAB=\frac{1}{2}\overset{\smile}{MNB}=\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BN}+\overset{\smile}{NM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BN}+\omega\right)$, jo $\angle MAB$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz loku MB.

4) $\angle A0B=180^0-\angle OAB-\angle OBA=180^o-\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AM}+\omega\right)-\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BN}+\omega\right)=$

$=180^o-\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AM}+\omega+\overset{\smile}{BN}+\omega\right)$, jo ΔAOB leņķu summa ir 180^o.

5) Tā kā $\overset{\cup}{AM}+\overset{\cup}{MN}+\overset{\cup}{NB}=180^{o}$, jo pusriņķa līnija ir 180^{o} liela, tad arī $\overset{\cup}{AM}+\omega+\overset{\cup}{NB}=180^{o}$.

6) Tātad $\angle AOB=180^{o}-\frac{1}{2}\left(180^{o}+\omega\right)=90^{o}-\frac{\omega}{2}$.

7) Esam ieguvuši, ka leņķa $\angle AOB$ lielums ir atkarīgs tikai no ω, t.i., no MN garuma, nevis no MN novietojuma.

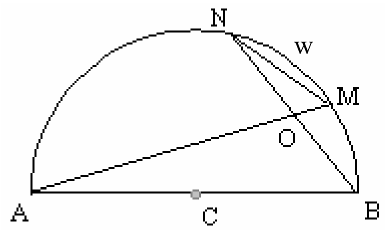
8) Atcerēsimies sinusu teorēmu: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

9) Tātad arī trijstūrī MON ir spēkā vienādība $c=2R\sin\gamma$ jeb $MN=2R\sin\angle MON$.

10) No šīs vienādības izsakot R, iegūstam $R_1=\frac{MN}{2\sin\angle MON}=\frac{MN}{2\sin(10^{o}-\frac{w}{2})}$.

Esam pamatojuši, ka R atkarīgs tikai no MN garuma un nav atkarīgs no tās novietojuma.

Apskatīsim gadījumu, kad staru AM un BN krustpunkts atrodas pusriņķa iekšpusē (skat. zīm. 66A.)



66A. zīmējums

11) $\angle AMN=\frac{1}{2}\overset{\cup}{AN}$, jo $\angle AMN$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz loku AN.

12) $\angle BNM=\frac{1}{2}\overset{\cup}{MB}$, jo $\angle BNM$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz loku MB.

13) Zinām, ka $\overset{\cup}{AN}+\overset{\cup}{NM}+\overset{\cup}{MB}=180^{o}$, jo pusriņķa līnija ir 180^{o} liela. Tad arī $\overset{\cup}{AN}+w+\overset{\cup}{MB}=180^{o}$ jeb $\overset{\cup}{AN}+\overset{\cup}{MB}=180^{o}-w$.

14) $\angle NOM=180^{0}-\angle MNO-\angle NMO=180^{o}-\frac{1}{2}\overset{\cup}{AN}-\frac{1}{2}\overset{\cup}{MB}=180^{o}-\frac{1}{2}(\overset{\cup}{AN}+\overset{\cup}{MB})=$

$=180^{o}-\frac{1}{2}(180^{o}-w)=90^{o}+\frac{w}{2}$, jo trijstūra leņķu summa ir 180^{o}.

15) Esam ieguvuši, ka leņķa $\angle NOM$ lielums ir atkarīgs tikai no ω, t.i., no MN garuma, nevis no MN novietojuma.

16) Tātad arī trijstūrī NOM ir spēkā vienādība $c = 2R\sin\gamma$ jeb $MN = 2R\sin\angle MON$.

17) No šīs vienādības izsakot R, iegūstam, ka $R_2 = \dfrac{MN}{2\sin(90^o + \frac{w}{2})}$. Esam pamatojuši, ka R atkarīgs tikai no MN garuma un nav atkarīgs no tā novietojuma.

Esam pamatojuši, ka katrā no 2 gadījumiem R nav atkarīgs no MN novietojuma. Bet vēl neesam pamatojuši, ka abos gadījumos iegūtie R sakrīt. Pamatosim:

18) Apskatot 1. gadījumu, $\angle MON = 90^o - \frac{w}{2}$, bet, apskatot 2. gadījumu, $\angle MON = 90^o + \frac{w}{2}$.

19) Izsakot R_1 un R_2, tiek aprēķināts $\sin\angle MON$. Bet, tā kā $\sin\left(90^o - \frac{w}{2}\right) = \sin\left(90^o + \frac{w}{2}\right)$, tad iegūtās R_1 un R_2 vērtības ir vienādas.

31.10.3.

a) Pierādījums: Ievērosim, ka $(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25$, bet $(n+6)^2 = n^2 + 12n + 36$.

Redzam, ka $(n+5)^2 < n^2 + 11n + 30 < (n+6)^2$. Tā kā $n^2 + 11n + 30$ atrodas starp diviem pēc kārtas esošiem naturālu skaitļu kvadrātiem, tad tas noteikti nav naturāla skaitļa kvadrāts. Tāpēc $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ nav naturāls skaitlis.

b) Atbilde: pirmais cipars aiz komata ir 4.

Pierādījums: apzīmēsim n+5=x. Tad $x^2 = (n+5)^2 = n^2 + 10n + 25$, bet pētāmo skaitli $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ var izteikt kā $\sqrt{x^2 + x}$. Pamatosim, ka pirmais cipars aiz komata noteikti ir mazāks par 5. Pierādīsim, ka $\sqrt{x^2 + x} < x + 0{,}5$ (tad būsim apskatāmo skaitli $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ novērtējuši no augšas). Lai pārbaudītu šo nevienādību, kāpināsim abas puses kvadrātā. Iegūstam, ka $x^2 + x < x^2 + x + 0{,}25$; redzam, ka nevienādība ir patiesa, tātad arī $\sqrt{x^2 + x} < x + 0{,}5$ ir patiesa. Tagad pierādīsim nevienādību $\sqrt{x^2 + x} > x$ (tad būsim apskatāmo skaitli $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$

novērtējuši no apakšas). Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam, ka $x^2 + x < x^2$. Tā kā x noteikti ir naturāls skaitlis (x=n+5, kur n ir naturāls skaitlis), tad šī nevienādība noteikti izpildās un esam ieguvuši apskatāmā skaitļa $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ novērtējumu $x < \sqrt{n^2 + 11n + 30} < x + 0{,}5$. Tātad šī skaitļa pirmais cipars aiz komata noteikti ir mazāks par 5.

Tagad pamatosim, ka skaitļa $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ pirmais cipars aiz komata ir vismaz 4. Pierādīsim, ka $x + 0{,}4 < \sqrt{x^2 + x}$. Kāpinot kvadrātā abas nevienādības puses, iegūstam, ka $x^2 + 0{,}8x + 0{,}16 < x^2 + x$. Tā kā x ir naturāls skaitlis, tad iegūtā nevienādība ir patiesa. Tātad esam pierādījuši, ka $x + 0{,}4 < \sqrt{x^2 + x}$. Bet no tā seko apskatāmā skaitļa $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ novērtējums no apakšas, t.i., esam pamatojuši, ka skaitļa $\sqrt{n^2 + 11n + 30}$ pirmais cipars aiz komata ir vismaz 4.

Tāpēc meklētais cipars noteikti ir 4.

31.10.4. Atbilde: 11.

Pierādījums: pieņemsim, ka ir x amatieri un x+9 profesionāļi, un amatieri ir n reizes uzvarējuši profesionāļus. Amatieri savā starpā izspēlē $\frac{x(x-1)}{2}$ spēles (katrs no x amatieriem spēlē ar katru no atlikušajiem x-1 amatieriem, bet, tā kā katru spēli esam ieskaitījuši 2 reizes, tad x(x-1) jādala ar 2). Tā kā neizšķirtu nav, tad kopējais amatieru uzvaru skaits ir $\frac{x(x-1)}{2} + n$.

Līdzīgi spriežot, iegūstam: profesionāļi savā starpā ir izspēlējuši $\frac{(x+9)(x+8)}{2}$ spēles, kurās iegūts tāds pats skaits uzvaru. Profesionāļi ar amatieriem ir izspēlējuši $x \cdot (x+9)$ spēles (katrs no x amatieriem ar katru no x+9 profesionāļiem, pie tam neviena spēle netiek ieskaitīta divreiz), kurās izcīnīts tāds pats skaits uzvaru. Bet, tā kā zināms, ka amatieri profesionāļus uzvarējuši n reizes, tad profesionāļi amatierus uzvarējuši $x \cdot (x+9) - n$ reizes. Tātad profesionāļi kopumā izcīnījuši $\frac{(x+9)(x+8)}{2} + x(x+9) - n$ uzvaras.

Ņemot vērā, ka profesionāļi izcīnījuši 9 reizes vairāk uzvaru nekā amatieri, sastādām vienādojumu:

$$9\left(\frac{x(x-1)}{2}+n\right)=\frac{(x+9)(x+8)}{2}+x(x+9)-n.$$

Vienādojot saucējus un savelkot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam $3x^2-22x+10n-36=0$.

Apskatīsim šo vienādojumu kā kvadrātvienādojumu attiecībā pret x. Tā kā vienādojuma atrisinājumam jābūt naturālam skaitlim (x ir amatieru skaits – tam jābūt veselam un pozitīvam), tad diskriminantam jābūt pozitīvam.

Tātad $D=121-3(10n-36)=229-30n\geq 0$ jeb $n\leq 7$ (ņemot vērā, ka n ir uzvaru skaits, tam jābūt veselam skaitlim). Apskatīsim, pie kādām n vērtībām iegūsim x – naturālu skaitli. Sastādīsim tabulu, attiecīgiem n pēc formulas aprēķinot $x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{D}}{3}$.

n	$\sqrt{D}$	x
7	$\sqrt{229-30\cdot 7}=\sqrt{19}$	Tā kā kvadrātsakne no diskriminanta nav vesels skaitlis, tad arī x nevar būt vesels.
6	$\sqrt{229-30\cdot 6}=\sqrt{49}=7$	$x_1=\frac{11-7}{3}=\frac{4}{3}$ - neder, x jābūt veselam skaitlim. $x_1=\frac{11+7}{3}=\frac{18}{3}=6$ - der.
5	$\sqrt{229-30\cdot 5}=\sqrt{79}$	Tā kā kvadrātsakne no diskriminanta nav vesels skaitlis, tad arī x nevar būt vesels.
4	$\sqrt{229-30\cdot 4}=\sqrt{109}$	Tā kā kvadrātsakne no diskriminanta nav vesels skaitlis, tad arī x nevar būt vesels.
3	$\sqrt{229-30\cdot 3}=\sqrt{139}$	Tā kā kvadrātsakne no diskriminanta nav vesels skaitlis, tad arī x nevar būt vesels.
2	$\sqrt{229-30\cdot 2}=\sqrt{169}=13$	$x_1=\frac{11-13}{3}=\frac{-2}{3}$ - neder, x jābūt veselam skaitlim.

		$x_1 = \frac{11+13}{3} = \frac{24}{3} = 8$ - der.
1	$\sqrt{229 - 30 \cdot 1} = \sqrt{199}$	Tā kā kvadrātsakne no diskriminanta nav vesels skaitlis, tad arī x nevar būt vesels.

No tabulas redzam, ka tikai pie divām n vērtībām (n=2 un n=6) x vērtība ir vesels skaitlis. Apskatīsim katru no gadījumiem.

1) ja n=2, tad x=8. Tādā gadījumā „labākajam” amatierim var būt ne vairāk kā 7+2=9 uzvaras. Pamatosim: labākais amatieris var būt uzvarējis visus pārējos 7 amatierus un būt vienīgais, kurš uzvarējis n profesionāļus. Tad kopumā viņš izcīnījis 7+n=7+2=9 uzvaras.
2) Ja n=6, tad x=6. Tādā gadījumā „labākajam” amatierim var būt ne vairāk kā 5+6=11 uzvaras. Pamatosim: labākais amatieris var būt uzvarējis visus pārējos 5 amatierus un būt vienīgais, kurš uzvarējis n profesionāļus. Tad kopumā viņš izcīnījis 5+n=5+6=11 uzvaras.

Redzam, ka lielākais iespējamais uzvaru skaits, ko var izcīnīt kāds amatieris, ir 11 uzvaras. Tas iespējams, ja viņš uzvarējis visus pārējos amatierus un ir vienīgais no amatieriem, kas uzvarējis profesionāļus.

31.10.5. Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums: no 3 dažādiem cipariem pavisam iespējams izveidot 27 dažādus skaitļus (ja trīsciparu skaitli apzīmējam ar $\overline{abc}$, tad skaidrs, ka gan a, gan b, gan c vietā iespējams ievietot katru no 3 dažādajiem cipariem, tātad kopējais dažādo skaitļu skaits ir $3 \cdot 3 \cdot 3$). Ir iespējami tieši 16 dažādi atlikumi, dalot ar 16: tie ir 0, 1, 2, ..., 15. No uzdevuma nosacījumiem zinām, ka, dalot izveidotos skaitļus ar 16, mums jāiegūst visi iespējamie atlikumi (jo izveidoto skaitļu skaits ir 16 un tiem jābūt ar dažādiem atlikumiem), no kuriem 8 ir pāra un 8 – nepāra skaitļi. Tātad arī 8 no izveidotajiem trīsciparu skaitļiem ir pāra un 8 – nepāra. Tāpēc starp 3 izvēlētajiem cipariem (no kuriem izveidosim trīsciparu skaitļus) ir jābūt gan pāra, gan nepāra cipariem.

- Apskatīsim gadījumu, kad ir 2 pāra un 1 nepāra cipars. Pāra ciparus apzīmēsim ar p_1, p_2, bet nepāra ciparu – ar n. Apskatīsim visus iespējamos nepāra skaitļus (beidzas ar n): $p_1p_1n, p_1p_2n, p_1nn, p_2p_1n, p_2p_2n, p_2nn, nnn, np_1n, np_2n$. Skaidrs, ka katru šo divu nepāra skaitļu starpības pēdējais cipars būs 0, jo n-n=0. Apskatīsim divciparu skaitļus, kas izveidoti no nepāra trīsciparu skaitļu pirmajiem diviem cipariem.

Tie būs: $p_1p_1, p_1p_2, p_1n, p_2p_1, p_2p_2, p_2n, np_1, np_2, nn$. Pamatosim, ka izpildās īpašība: ja divu šo divciparu skaitļu starpība dalās ar 8, tad attiecīgo (to skaitļu, no kuriem divciparu skaitļi tika izveidoti) trīsciparu skaitļu starpība dalās ar 16. Pamatojums: apzīmēsim divciparu skaitļu starpību ar a, tad attiecīgo trīsciparu skaitļu starpība būs $a \cdot 10$. Tā kā a dalās ar 8 un 10 dalās ar 2, tad $a \cdot 10$ dalās ar $8 \cdot 2 = 16$.

Tātad, ja pamatosim, ka kādu izveidoto divciparu skaitļu starpība dalās ar 8, tad arī attiecīgo trīsciparu skaitļu starpība dalīsies ar 16. Bet tad būsim ieguvuši pretrunu: ja divu skaitļu starpība dalās ar 16, tad šie skaitļi nevar dot dažādus atlikumus, dalot ar 16.

Tā kā tika izveidoti 9 divciparu skaitļi, tad noteikti būs 2 tādi, kas, dalot ar 8, dos vienādus atlikumus. (Pamatosim: dalot ar 8, iespējami tieši 8 dažādi atlikumi, tātad no 9 skaitļiem vismaz 2 dos vienādus atlikumus.) Bet, ja divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 8, tad šo skaitļu starpība noteikti dalās ar 8.

No jau pierādītā zinām: ja divu izveidoto divciparu skaitļu starpība dalās ar 8, tad attiecīgo (to skaitļu, no kuriem divciparu skaitļi tika izveidoti) trīsciparu skaitļu starpība dalās ar 16. Tātad esam pamatojuši, ka no 9 uzrakstītajiem skaitļiem noteikti ir 2 tādi, ka to starpība dalās ar 16. Tas nozīmē, ka atlikumi, kas iegūti, dalot ar 16, ir vienādi. Tātad gadījumā, kad divi no 3 dotajiem cipariem ir pāra un tikai viens – nepāra, nav iespējams uzrakstīt uzdevumā prasītos 16 skaitļus.

- Apskatīsim otru iespējamo gadījumu, kad divi no dotajiem cipariem ir nepāra un tikai viens – pāra. Līdzīgi izveidosim visus iespējamos pāra skaitļus – tādi pavisam būs 9 dažādi. No iegūto trīsciparu skaitļu pirmajiem diviem cipariem iegūsim 9 divciparu skaitļus. Skaidrs, ka arī diviem no šiem skaitļiem atlikumi, kas iegūti, dalot ar 8, būs vienādi. Tātad divu divciparu skaitļu starpība dalīsies ar 8. Bet tad attiecīgo trīsciparu skaitļu starpība dalīsies ar 16, kas nozīmēs, ka šiem trīsciparu skaitļiem ir vienādi atlikumi, dalot ar 16. Bet tad arī gadījums, kad ir 2 nepāra cipari un viens pāra, nav iespējams.

Esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus un pamatojuši, ka nav iespējams uzrakstīt 16 dažādus trīsciparu skaitļus no 3 dažādiem cipariem tā, lai tie dotu dažādus atlikumus, dalot ar 16.

11. klase

31.11.1. Atbilde: nē, neeksistē.

Pierādījums: pieņemsim, ka $2004^n - 1$ dalās ar $1500^n - 1$. Tad arī šo skaitļu starpībai jādalās ar $1500^n - 1$. (Pamatosim: ja divi skaitļi dalās ar trešo skaitli, tad arī šo skaitļu starpība dalās ar trešo skaitli. Mūsu gadījumā skaitļi $2004^n - 1$ un $1500^n - 1$ dalās ar $1500^n - 1$, tātad arī šo skaitļu starpībai jādalās ar $1500^n - 1$.) Tātad $(2004^n - 1) - (1500^n - 1)$ dalās ar $1500^n - 1$. Apskatāmo starpību varam pārveidot: $(2004^n - 1) - (1500^n - 1) = 2004^n - 1500^n = 2^n(1002^n - 750^n)$. Tā kā 2^n nedalās ar $1500^n - 1$ (skaitļa 2 pakāpe nedalās ar nepāra skaitli $1500^n - 1$), tad $1002^n - 750^n \vdots 1500^n - 1$. Bet tas nav iespējams, jo $1002^n - 750^n < 1500^n - 1$. Tātad esam pamatojuši, ka $(2004^n - 1) - (1500^n - 1)$ nedalās ar $1500^n - 1$, bet tas nozīmē, ka kāds no skaitļiem $2004^n - 1$ vai $1500^n - 1$ nedalās ar $1500^n - 1$. Tā kā $1500^n - 1$ noteikti dalās ar $1500^n - 1$, tad esam pamatojuši, ka $2004^n - 1$ nedalās ar $1500^n - 1$.

31.11.2. Atbilde: 256 dažādi krāsojumi.

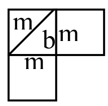
Pierādījums: tā kā diagonāles rūtiņām nav kopīgu malu, tad skaidrs, ka vienas rūtiņas krāsojums uz diagonāles neietekmē tās pašas diagonāles citu rūtiņu krāsojumu. Pamatosim, ka, patvaļīgi nokrāsojot diagonāles rūtiņas, tiek pilnībā noteikts citu rūtiņu krāsojums.

3	2	1	*
2	1	*	1
1	*	1	2
*	1	2	3

67A. zīmējums

Pieņemsim, ka nokrāsota tā kvadrāta diagonāle, kas zīmējumā 67A. atzīmēta ar „*” . Visām rūtiņām, kas zīmējumā atzīmētas ar ciparu 1, ir divas kopīgas malas ar diagonāles rūtiņām. Pamatosim, ka gadījumā, kad vēl nenokrāsotai rūtiņai ir divas kopīgas blakus malas ar jau nokrāsotām rūtiņām, ir noteikts, kādam jābūt nenokrāsotās rūtiņas krāsojumam. Pamatojums:

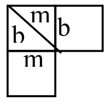
- apskatīsim gadījumu, kad abas blakusesošās rūtiņas ir jau nokrāsotas un tas izdarīts tā, ka abas malas, kas kopīgas vēl nenokrāsotai rūtiņai ar jau nokrāsotajām, ir vienā krāsā (abas melnas vai abas baltas). Pamatosim, ka ir noteikts, kura diagonāle jāvelk un kā jākrāso vēl nenokrāsotā rūtiņa. Jāvelk tā diagonāle, kas kvadrātiņu sadala tā, lai abas nokrāsoto rūtiņu malas būtu vienā trijstūrī, piemēru skat. 68A. zīm. (Ja tā nebūtu, tad novilktā diagonāle sadalītu kvadrātiņu trijstūros tā, ka katra no nokrāsotajām malām ir savā trijstūrī. Bet tad nevarētu



68A. zīmējums

izpildīties abi nosacījumi, ka katriem diviem trijstūriem ar kopīgu malu jābūt dažādās krāsās un vienas rūtiņas abi trijstūri ir dažādās krāsās.) Skaidrs, ka tas trijstūris, kura divas malas ir nokrāsotas vienā krāsā (melnas vai baltas), noteikti jākrāso attiecīgi pretējā krāsā (baltā vai melnā) tā, lai trijstūri ar kopīgām malām būtu dažādās krāsās. Bet otrs trijstūris jākrāso tā, lai izpildītos nosacījums, ka vienas rūtiņas abi trijstūri ir dažādās krāsās. Tātad esam pamatojuši, ka gadījumā, kad abas blakusesošās nokrāsotās rūtiņas ir jau nokrāsotas un malas, kas saskaras ar nenokrāsoto rūtiņu, ir vienā krāsā, tiek noteikts, kura diagonāle ir jāvelk un kā kurš trijstūris jānokrāso.

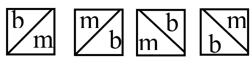
- Apskatīsim gadījumu, kad abas blakusesošās rūtiņas ir jau nokrāsotas un tas izdarīts tā, ka malas, kas kopīgas vēl nenokrāsotai rūtiņai ar jau nokrāsotajām, ir dažādās krāsās (viena melna, otra balta). Pamatosim, ka tad ir arī noteikts, kura diagonāle jāvelk un kā jākrāso vēl nenokrāsotā rūtiņa. Jāvelk tā diagonāle, kas kvadrātiņu sadala tā, lai abas nokrāsoto rūtiņu malas būtu dažādos trijstūros, piemēru skat. 69A. zīm. (ja tā nebūtu, tad novilktā diagonāle sadalītu kvadrātiņu trijstūros tā, ka abas nokrāsotās malas ir vienā trijstūrī. Bet tad šo trijstūri, kam abas malas ir nokrāsotas, nevarētu nokrāsot ne baltu, ne melnu, jo diviem trijstūriem ar kopīgu malu jābūt dažādās krāsās.) Ir noteikts arī nenokrāsotās rūtiņas krāsojums: trijstūris, kura kopīgā mala ar nokrāsoto rūtiņu ir balta, jākrāso melns, bet tas trijstūris, kura kopīgā mala ar jau nokrāsoto rūtiņu ir melna, jākrāso balts. Tātad esam pamatojuši, ka gadījumā, kad blakusesošās rūtiņas ir jau nokrāsotas, bet malas, kas kopīgas ar vēl nenokrāsoto rūtiņu, ir dažādās krāsās, tiek noteikts, kura diagonāle ir jāvelk un kā katrs no trijstūriem jānokrāso.



69A. zīmējums

Tātad pēc diagonāles nokrāsošanas visu to rūtiņu krāsojums, kas zīm. 67A. ir atzīmētas ar 1, ir viennozīmīgi noteikts, jo katrai rūtiņai „1” ir divas kopīgas malas ar rūtiņām, kas apzīmētas ar „*”. Savukārt rūtiņas ar „1” viennozīmīgi nosaka rūtiņu, kas atzīmētas ar „2”, krāsojumu. Bet rūtiņas ar „2” viennozīmīgi nosaka rūtiņu, kas atzīmētas ar „3”, krāsojumu.

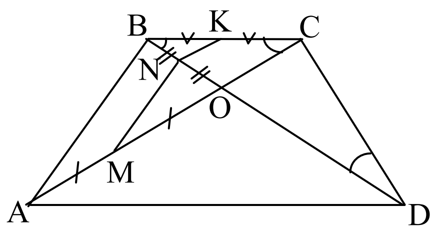
Tātad esam pamatojuši, ka nokrāsota diagonāle viennozīmīgi nosaka pārējo rūtiņu krāsojumu.



70A. zīmējums

Apskatīsim, cik veidos iespējams nokrāsot diagonāli. Skaidrs, ka katru diagonāles rūtiņu iespējams nokrāsot 4 dažādos veidos: skat. 70A. zīm. Bet, tā kā vienas diagonāles rūtiņas nokrāsošana neietekmē pārējo diagonāles rūtiņu krāsošanu, tad kopā iespējami $4^4 = 256$ dažādi diagonāles krāsojumi. Tātad arī kopējais kvadrāta krāsojumu skaits ir 256.

31.11.3. Pierādījums: skat. 71A. zīm.



71A. zīmējums

1) Apzīmēsim AO, BO un BC viduspunktus attiecīgi ar M, N un K.
2) $MN = \frac{1}{2}AB$, jo MN ir trijstūra AOB viduslīnija, kas paralēla malai AB.
3) $KC = \frac{1}{2}BC$, jo K ir malas BC viduspunkts.
4) Tā kā AB=BC pēc uzdevuma dotā, tad no 2) un 3) seko, ka MN=KC.
5) $NK \| OC$: tā kā N un K ir BO un BC viduspunkti, tad NK ir trijstūra BOC viduslīnija, kas paralēla OC.
6) $NK \| MC$, jo $NK \| OC$.
7) MNKC – vienādsānu trapece, jo $NK \| MC$, bet sānu malas MN un KC vienādas (no 4) punkta) un MN nav paralēls KC (tāpēc, ka AB nav paralēls BC).
8) Tā kā katru vienādsānu trapeci var ievilkt riņķa līnijā, tad esam pamatojuši, ka M, N, K un C atrodas uz vienas riņķa līnijas.
9) Pamatosim, ka četrstūrim NKCD var apvilkt riņķa līniju. Četrstūri var ievilkt riņķa līnijā, ja tā pretējo leņķu summa ir 180°. Pamatosim, ka $\angle ODC + \angle NKC = 180^{\circ}$.
10) $\angle ODC = \angle OBC$, jo ΔBCD ir vienādsānu (BC=CD pēc uzdevumā dotā).
11) Pamatosim, ka ΔBNK ir vienādsānu. Pamatojums: $\Delta BNK \sim \Delta BOC$, jo $\angle B$ ir kopīgs, bet $\angle BOC = \angle BNK$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm OC un NK. Bet trijstūris BOC ir vienādsānu, jo vienādsānu trapeces diagonāles ir vienādas un krustojoties veidojas vienādi nogriežņi BO=OC. Tātad arī ΔBOC līdzīgais trijstūris ΔBNK ir vienādsānu.
12) $\angle ODC = \angle OBC = \angle BKN$, jo ΔBNK ir vienādsānu (BN=NK).
13) Tātad $\angle ODC + \angle NKC = \angle OBC + \angle NKC = \angle BKN + \angle NKC = 180^{\circ}$, jo leņķi BKN un NKC ir blakusleņķi.
14) Esam pamatojuši, ka $\angle ODC + \angle NKC = 180^{\circ}$ un tātad četrstūrim NKCD var apvilkt riņķa līniju. Tātad punkti N, K, C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

15) No tā, ka M, N, K un C atrodas uz vienas riņķa līnijas, un no tā, ka N, K, C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas, seko, ka uzdevumā apskatāmie punkti M, K, C, D arī atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pamatosim: tā kā katrs no virsotņu četriniekiem, kas atrodas uz vienas riņķa līnijas, satur punktus N, K, C, kas viennozīmīgi nosaka riņķa līniju, tad arī punkti M un D atrodas uz tās pašas riņķa līnijas.

31.11.4. Pierādījums: logaritmēsim abas nevienādības puses pie bāzes 10. Tā kā bāze 10>1, tad nevienādības veids nav jāmaina uz pretējo.

$lg\left(a^a \cdot b^b\right) \geq lg\left(a^b \cdot b^a\right)$ (izmantojot logaritma īpašības $lg(ab)=lga+lgb$ un $lg\, a^b = b\, lg\, a$)

$a\, lg\, a + b\, lg\, b \geq b\, lg\, a + a\, lg\, b$ (pārnesam visus saskaitāmos uz nevienādības labo pusi)

$a\, lg\, a + b\, lg\, b - b\, lg\, a - a\, lg\, b \geq 0$ (sadalām kreiso nevienādības pusi reizinātājos)

$$(a-b)lg\, a - (a-b)lg\, b \geq 0$$

$$(a-b)(lg\, a - lg\, b) \geq 0 \qquad (1)$$

Tā kā logaritma *lg* bāze ir 10, tad funkcija *lg*x ir augoša. Iespējami 3 varianti:

1) ja $a > b$, tad $lg\, a > lg\, b$, tātad nevienādībā (1) abi reizinātāji ir pozitīvi un nevienādība (1) ir patiesa; esam pierādījuši prasīto.
2) ja $a < b$, tad $lg\, a < lg\, b$, tātad nevienādībā (1) abi reizinātāji ir negatīvi un nevienādība (1) ir patiesa; esam pierādījuši prasīto.
3) Ja a=b, tad nevienādībā (1) abi reizinātāji ir 0 un nevienādība (1) ir patiesa. Tātad esam pierādījuši prasīto.

31.11.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast, kāda ir mazākā iespējamā n vērtība, un parādīt piemēru, kā uzdevuma nosacījums iespējams realizēt; otrkārt, pamatot, ka mazāka n vērtība nav iespējama.

Atbilde: n=6.

Pierādījums: apzīmēsim vienu deputātu ar A. Apskatīsim deputātu A, visus viņa draugus un visus viņa draugu draugus. Pamatosim, ka saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem citu deputātu nav. No uzdevuma nosacījumiem zinām: ja kādi divi deputāti (apzīmēsim tos ar X un Y) nedraudzējas savā starpā, tad noteikti eksistē tāds deputāts, kas draudzējas gan ar X, gan ar Y. Tātad, ja eksistē tāds deputāts B, ar kuru deputāts A nedraudzējas, tad eksistē kāds cits deputāts C, kurš draudzējas gan ar A, gan ar B. Tātad deputāts B ir deputāta A drauga draugs. Esam pamatojuši, ka, apskatot vienu brīvi izvēlētu deputātu A, viņa draugus un viņa draugu draugus, esam apskatījuši visus deputātus.

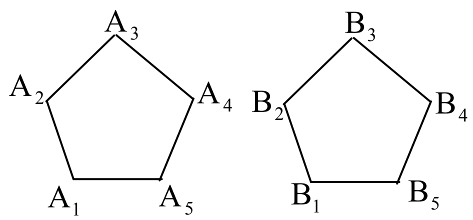
Zinām, ka katram deputātam ir n draugi. Tad deputātam A ir n draugi, bet katram no viņa n draugiem ir vēl n-1 cits draugs. Tātad kopējais deputātu skaits ir 1+n+n(n-1) (tas ir: deputāts A, viņa n draugi un viņa n(n-1) draugu draugi) ir ne mazāks par 25 (iespējams, kādu no deputātiem esam ieskaitījuši vairākkārt). Varam rakstīt:

$1+n+n(n-1)\geq 25$ (*),

no kurienes $n\geq 5$. Pamatosim, ka nav iespējams gadījums n=5. Ja n=5, tad no (*) seko, ka $1+5+5\cdot 4\geq 25$ jeb $26\geq 25$. Lai iegūtu vienādību, šīs nevienādības kreisā puse jāsamazina par 1. Tas nozīmē, ka tieši viens deputāts būtu uzskaitīts 2 reizes. Skaidrs, ka tas nevar būt A draugs, bet var būt A draugu draugs, kurš kā tāds ir pieskaitīts divreiz. Tas nozīmē, ka A pieder ciklam ar garumu 4, t.i., A → A draugs X → A drauga draugs Y → A draugs Z. Bet, tā kā par deputātu A brīvi izvēlējāmies vienu no 25 deputātiem, tad jebkurš deputāts pieder vienam ciklam ar garumu 4. Bet 25 deputāti nevar sadalīties ciklos ar garumu 4. Tātad nav iespējams, ka n=5.

Pamatosim, ka n=6 ir iespējams. Apskatīsim 5 ciklus, katrā pa 5 virsotnēm. Apzīmēsim 2 patvaļīgus ciklus, kā parādīts 72A. zīmējumā. Uzskatīsim, ka deputāti, kas atbilst ar līniju savienotajām virsotnēm, savā starpā draudzējas. Vēl "nodefinēsim" šādas draudzības:

$A_1B_1, A_2B_3, A_3B_5, A_4B_2, A_5B_4$ (t.i., ja A_i un A_j savā starpā draudzējas, tad viņu draugi ciklā B savā starpā nedraudzējas, un otrādi).



72A. zīmējums

Viegli pārbaudīt, ka uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

12. klase

31.12.1. Atbilde: jā, noteikti.

Pierādījums: atcerēsimies identitāti: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$. No tās seko, ka

$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1)$ (*).

Redzam, ka dotās izteiksmes pirmais saskaitāmais $\left(x^n+x^{n-1}+...+x+1\right)^2$ varētu tikt pārveidots, izmantojot (*). Lai to izdarītu, pareizināsim un izdalīsim pirmo saskaitāmo ar $(x-1)^2$:

$$\frac{(x-1)^2\left(x^n+x^{n-1}+...+x+1\right)^2}{(x-1)^2}-x^n=$$ (izmantojam (*), lai pārveidotu skaitītāju)

$$\frac{\left(x^{n+1}-1\right)^2}{(x-1)^2}-x^n \qquad (1).$$

Skaidrs, ka iegūtā izteiksme (1) ir ekvivalenta uzdevumā dotajai izteiksmei. Sadalīsim izteiksmi (1) reizinātājos:

$$\frac{\left(x^{n+1}-1\right)^2}{(x-1)^2}-x^n=$$ (vienādosim saucējus)

$$=\frac{\left(x^{n+1}-1\right)^2-x^n(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$ (vienkāršosim skaitītāju, kāpinot kvadrātā)

$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n}{(x-1)^2}=$$ (savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$$=\frac{x^{2n+2}-x^{n+2}-x^n+1}{(x-1)^2}=$$ (kopīgos reizinātājus iznesīsim pirms iekavām)

$$=\frac{x^{n+2}(x^n-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}=$$ (iznesīsim kopīgo reizinātāju (x^n-1) pirms iekavām)

$$=\frac{(x^n-1)(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}=$$ (katru no skaitītāja reizinātājiem pārveidosim, izmantojot (*))

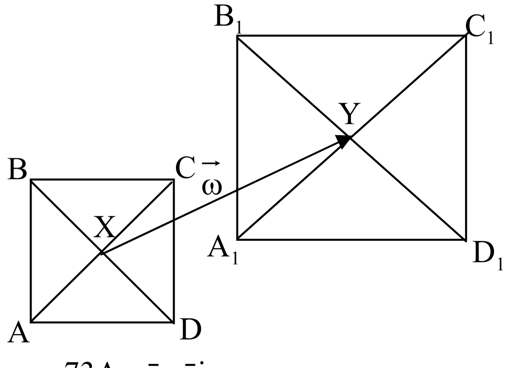
$$=\frac{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\right)(x-1)\left(x^{n+1}+x^n+...+x+1\right)}{(x-1)^2}=$$ (saīsinām)

$$=\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\right)\left(x^{n+1}+x^n+...+x+1\right).$$

Tātad doto izteiksmi ir iespējams sadalīt reizinātājos – polinomos ar pakāpēm, kas nav mazākas par 1.

31.12.2. Pierādījums: skat. 73A. zīm.

1) apzīmēsim kvadrāta ABCD centru ar X un malas garumu ar x, bet kvadrāta $A_1B_1C_1D_1$ centru ar Y un malas garumu ar y. Vektoru $\overrightarrow{XY}$ apzīmēsim ar $\vec{\omega}$.



73A. zīmējums

2) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YA_1}$, pēc vektoru saskaitīšanas likuma.

3) Līdzīgi $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YC_1}$.

4) $AA_1^2 + CC_1^2 = (\overrightarrow{AX} + \vec{\omega} + \overrightarrow{YA_1})^2 + (\overrightarrow{CX} + \vec{\omega} + \overrightarrow{YC_1})^2$.

5) Kāpinot kvadrātā, iegūstam:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = AX^2 + \omega^2 + YA_1^2 + CX^2 + \omega^2 + YC_1^2 +$$
$$+ 2\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{YA_1} + 2\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AX} + 2\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{YA_1} + 2\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{YC_1} + 2\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{CX} + 2\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{YC_1}$$

6) Vienkāršojam iegūto izteiksmi:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = AX^2 + YA_1^2 + CX^2 + YC_1^2 + 2\omega^2 +$$
$$+ 2\vec{\omega}\left(\underbrace{\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{CX}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{YA_1} + \overrightarrow{YC_1}}_{\vec{0}}\right) + 2\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{YA_1} + 2\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{YC_1}$$

Zinām, ka $\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{CX}$ un $\overrightarrow{YA_1} = -\overrightarrow{YC_1}$.

7) $AX = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ un $AX^2 = \frac{2x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$.

8) Līdzīgi $CX^2 = \frac{x^2}{2}$.

9) $AX^2 + CX^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x^2$.

10) Līdzīgi $YA_1^2 + YC_1^2 = \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = y^2$.

11) Tātad apskatāmā summa $AA_1^2 + CC_1^2$ uzrakstāma šādi:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = x^2 + y^2 + 2\omega^2 + 2(\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{YA_1} + \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{YC_1})$$

12) Līdzīgi iegūstam, ka $BB_1^2 + DD_1^2 = x^2 + y^2 + 2\omega^2 + 2(\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{YB_1} + \overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{YD_1})$

13) Tātad, lai pierādītu, ka $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$, jāpierāda, ka

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{YA_1} + \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{YC_1} = \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{YB_1} + \overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{YD_1} \qquad (1).$$

14) Tā kā ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ ir vienādi orientēti kvadrāti, tad $\left|\overrightarrow{AX}\right| = \left|\overrightarrow{CX}\right| = \left|\overrightarrow{BX}\right| = \left|\overrightarrow{DX}\right|$, kā arī $\left|\overrightarrow{YA_1}\right| = \left|\overrightarrow{YC_1}\right| = \left|\overrightarrow{YB_1}\right| = \left|\overrightarrow{YD_1}\right|$.

15) $\angle\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{YA_1}\right) = \angle\left(\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{YC_1}\right) = \angle\left(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{YB_1}\right) = \angle\left(\overrightarrow{DX}, \overrightarrow{YD_1}\right)$, jo leņķis starp vektoriem dažādās paralēlās plaknēs ir leņķis starp šo vektoru projekcijām vienā no

šīm plaknēm. Apskatot šo vektoru projekcijas, redzam, ka visi leņķi sakrīt, jo kvadrāti ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ ir vienādi orientēti.

16) Tātad vienādība (1) ir pareiza.

31.12.3. Atbilde: f(x)=c, kur c – brīvi izvēlēta konstante.

Pierādījums: uzdevuma atrisinājumu sadalīsim divās daļās.

1) Pamatosim, ka der visas konstantās funkcijas. Apzīmēsim konstanti ar c. Tad $f(x) = f(y) = f(x^2 + y^2) = c$ un dotā vienādība pārrakstāma šādi: $x \cdot c + y \cdot c = (x + y) \cdot c$ jeb $(x + y) \cdot c = (x + y) \cdot c$. Acīmredzami, ka vienādība ir pareiza.
2) Pamatosim, ka neviena cita bez jau apskatītajām (konstantajām) funkcijām neder. Pieņemsim pretējo, ka ir tāda funkcija, kas nav konstanta un kurai izpildās dotā vienādība. Tad eksistē tādi x un y, ka f(x)<f(y) (funkcijas vērtības visas nav vienādas). Izvēlēsimies tādus x un y, ka pozitīvā starpība d=f(y)-f(x) ir mazākā no visām šādām starpībām. Šāda **mazākā** starpība noteikti eksistē (d>0), jo eksistē tādi x un y, ka f(x)<f(y), un f vērtības ir naturāli skaitļi.

   Funkcijas vērtību f(x) varam uzrakstīt šādi: $f(x) = \frac{(x + y) \cdot f(x)}{x + y} = \frac{xf(x) + yf(x)}{x + y}$. Bet, ņemot vērā, ka f(x)<f(y), varam pārveidot:

   $$f(x) = \frac{xf(x) + yf(x)}{x + y} < \frac{xf(y) + yf(x)}{x + y} < \frac{xf(y) + yf(y)}{x + y} = \frac{(x + y) \cdot f(y)}{x + y} = f(y). \quad (1)$$

   No uzdevumā dotās vienādības zinām, ka $\frac{xf(y) + yf(x)}{x + y} = f(x^2 + y^2)$. Tātad no (1) seko, ka $f(x) < f(x^2 + y^2) < f(y)$. Esam ieguvuši pretrunu: starpība d=f(y)-f(x) nav mazākā iespējamā pozitīvā starp apskatītajām starpībām, jo, piemēram, starpība $f(x^2 + y^2) - f(x)$ ir pozitīva, bet mazāka. Tātad pieņēmums, ka eksistē tāda funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un nav konstanta, ir aplams.

31.12.4. Pierādījums: ievērosim, ka (n-1)! dalās ar visiem tādiem un tikai tādiem pirmskaitļiem, kas nepārsniedz $n - 1$. Tāpēc pierādījuma daļa „tikai tad” ir triviāla.

Pierādījuma daļai „tad” pieņemsim, ka (n-1)! nedalās ne ar n, ne ar n+2. Skaidrs, ka pie n=3 un n=5 „tad” izpildās, tātad apskatīsim gadījumus, kad $n \geq 7$. Pārbaudīsim, vai iespējams, ka n vai n+2 nav pirmskaitlis. Spriedīsim no pretējā.

1) Apskatīsim gadījumu $n = a \cdot b$, kur $a \neq 1$ un $a \neq n$ un līdzīgi $b \neq 1$ un $b \neq n$. Tātad $1 < a \leq n-1$ un $1 < b \leq n-1$. Tad gan a, gan b sastopami (n-1)!, jo $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Apskatīsim divus gadījumus:

- ja $a \neq b$, tad gan a, gan b sastopami reizinājumā $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$, bet tad (n-1)! dalās ar $n = a \cdot b$. Esam ieguvuši pretrunu, jo pieņēmām, ka (n-1)! nedalās ar n.
- ja a=b, tad $n = a^2$. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad $a \neq 2$, tātad $a \geq 3$. Bet no tā, ka $a \geq 3$ un $n = a^2$, seko, ka $n > 2a$ jeb $2a \leq n-1$. Tātad (n-1)! kā reizinātājus satur gan a, gan 2a, bet no tā seko, ka (n-1)! dalās ar $n = a^2$. Esam ieguvuši pretrunu, jo pieņēmām, ka (n-1)! nedalās ar n.

Tātad nav iespējams, ka n būtu salikts skaitlis.

2) Apskatīsim gadījumu $n + 2 = a \cdot b$, kur $a \neq 1$ un $a \neq n+2$ un līdzīgi $b \neq 1$ un $b \neq n+2$. Tātad $1 < a \leq n+1$ un $1 < b \leq n+1$. Tā kā n ir nepāra pirmskaitlis, tad $3 \leq a, b$, bet, ņemot vērā, ka $n + 2 = a \cdot b$, iegūstam, ka $a, b \leq \frac{n+2}{3}$ Tad gan a, gan b sastopami (n-1)!, jo $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ un pie mūsu apskatāmajiem n pastāv nevienādība $\frac{n+2}{3} \leq n-1$. Pamatosim, ka 2a mazāks vai vienāds par n-1. Ja $a, b \leq \frac{n+2}{3}$, tad $2a \leq \frac{2(n+2)}{3}$. Apskatīsim, pie kādiem n izpildās nevienādība $\frac{2(n+2)}{3} \leq n-1$ jeb $\frac{2n+4}{3} \leq n-1$. Reizinot abas nevienādības puses ar 6, iegūstam: $2n + 4 \leq 3n - 3$. Atrisinot nevienādību, iegūstam $n \geq 7$. Tā kā apskatām tikai gadījumus, kad $n \geq 7$, tad esam pamatojuši, ka $2a \leq n-1$. Līdzīgi varam pamatot, ka $2b \leq n-1$. Apskatīsim divus gadījumus:

- ja $a \neq b$, tad gan a, gan b sastopami reizinājumā $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$, bet tad (n-1)! dalās ar $n + 2 = a \cdot b$. Esam ieguvuši pretrunu, jo pieņēmām, ka (n-1)! nedalās ar n+2.

- ja a=b, tad $n+2=a^2$. Esam pamatojuši, ka (n-1)! kā reizinātājus satur gan a, gan 2a, bet no tā seko, ka (n-1)! dalās ar $n+2=a^2$. Esam ieguvuši pretrunu, jo pieņēmām, ka (n-1)! nedalās ar n+2.

Tātad n+2 nevar būt salikts skaitlis.

31.12.5. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast, kāda ir lielākā iespējamā n vērtība, un parādīt piemēru, kā var izpildīties visi nosacījumi; otrkārt, pierādīt, ka atrastais n ir lielākais iespējamais.

1. eksperts	n	n	n	n	n	n	n
2. eksperts	n	d	d	d	d	n	n
3. eksperts	n	d	d	n	n	d	d
4. eksperts	n	n	n	d	d	d	d
5. eksperts	d	n	d	n	d	n	d
6. eksperts	d	n	d	d	n	d	n
7. eksperts	d	d	n	n	d	d	n
8. eksperts	d	d	n	d	n	n	d

74A. zīmējums

Atbilde: n=7. Piemērs: skat. 74A. zīm., tabula parāda, kā 8 eksperti var novērtēt katru no dalībniekiem, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Pierādījums: pamatosim, ka nevar būt n=8. Pieņemsim pretējo, ka tas ir iespējams. Vienā kolonnā mainot visus vērtējumus „derīgs” – „d” pret „nederīgs” – „n” un attiecīgi „nederīgs”- „n” pret „derīgs” – „d”, uzdevuma nosacījumi saglabājas.

Veiksim vērtējumu maiņu kolonnās tā, lai 1. eksperts nevienu kandidātu nebūtu vērtējis kā „derīgu” jeb lai visa tabulas 1. rinda sastāvētu tikai no „n”.

Ar x_i apzīmēsim vērtējumu „nederīgs” skaitu i-tajā rindā, t.i., 1. rindā ir x_1 jeb 8 vērtējumi „n”, 2. rindā - x_2 vērtējumi „n” , ..., 8. rindā - x_8 vērtējumi „n”. Tā kā kopā katru no 8 kandidātiem 4 eksperti vērtē kā „nederīgu”, tad kopumā tabulā jābūt $8\cdot 4=32$ vērtējumiem „n”. Bet kopējais vērtējumu „n” skaits ir $x_1+x_2+...+x_8$. Tātad ir spēkā vienādība $x_1+x_2+...+x_8=32$. Tā kā x_1=8, tad iegūstam

$$x_2+...+x_8=24 \qquad (1).$$

Zinām, ka i-tajā rindā ir x_i vērtējumi „n” jeb i-tais eksperts x_i kandidātus ir novērtējis, kā „nederīgus”. Apskatīsim, cik pārus i-tajā rindā iespējams izvēlēties no kandidātiem, kas novērtēti kā „nederīgi”. Tātad aprēķināsim, cik veidos no x_i cilvēkiem iespējams izvēlēties 2, t.i., $C_{x_i}^2=\frac{1}{2}x_i(x_i-1)$. Tad kopējo šādu pāru skaitu varam aprēķināt, summējot $\frac{1}{2}x_i(x_i-1)$ pa visām tabulas rindām. Tātad kopējais apskatāmo pāru skaits pēc 2. līdz 8. eksperta vērtējuma (jeb tabulas 2.

līdz 8. rindām) ir $\frac{1}{2}\left(x_2^2+x_3^2+...+x_8^2\right)-\frac{1}{2}\left(x_2+...+x_8\right)$. Ņemot vērā, ka $x_2+...+x_8=24$ un to, ka 1. rindā ir $C_8^2=28$ šādi pāri, kopējais šādu pāru skaits ir:

$$\frac{1}{2}\left(x_2^2+x_3^2+...+x_8^2\right)-\frac{1}{2}\left(x_2+...+x_8\right)+28=\frac{1}{2}\left(x_2^2+x_3^2+...+x_8^2\right)-12+28 \quad (2).$$

No otras puses zinām, ka katrus 2 kandidātus tieši 2 eksperti abus novērtējuši kā „nederīgus". No 8 kandidātiem iespējams izvēlēties tieši $C_8^2=28$ pārus. Tā kā katru pāri kā „nederīgu" novērtējuši 2 eksperti, tad $\frac{1}{2}\left(x_2^2+x_3^2+...+x_8^2\right)-12+28=28\cdot 2$ jeb $x_2^2+x_3^2+...+x_8^2=80$.

Atceramies, ka jābūt spēkā arī vienādībai (1). Tātad jāizpildās

$$(*)\quad \begin{cases} x_2^2+x_3^2+...+x_8^2=80 \\ x_2+x_3+...+x_8=24 \end{cases}.$$

Bet tā ir pretruna ar nevienādību starp vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko, saskaņā ar kuru jābūt $\frac{x_2^2+..x_8^2}{7}\geq\left(\frac{x_2+...+x_8}{7}\right)^2$: pēc $(*)$ iznāk $\frac{80}{7}\geq\left(\frac{24}{7}\right)^2$ jeb $\frac{80}{7}\geq\frac{576}{49}$, bet šī nevienādība nav patiesa. Tātad (*) neizpildās un sākotnējais pieņēmums, ka n=8, nav patiess.

Esam pamatojuši, ka nevar būt n=8. Skaidrs, ka tad nevar būt arī $n>8$.

Latvijas 32. atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

32.9.1. Atbilde: 1222200. **Pierādījums:** ja skaitlis dalās ar 225, tad tā pēdējie 2 cipari ir 25, 50, 75 vai 00. Lai izmantotu skaitļa pierakstā pieļautos ciparus, skaitlim noteikti jābeidzas ar 00. Tā kā $225 = 9 \cdot 25$, tad ciparu summai noteikti jādalās ar 9. Lieku ciparu ieviešana pagarina skaitli, tāpēc ciparu jābūt iespējami maz, un lieku nuļļu pievienošana skaitļa beigās pagarinās skaitli. Cipari summā veido skaitli 9, jo tas ir mazākais skaitlis, kas dalās ar 9. Skaitli 9 no pieļautajiem cipariem var izveidot, sasummējot 1, 2, 2, 2, 2. Cipariem jābūt tieši šādā secībā, lai meklējamais skaitlis būtu pēc iespējas mazāks. Tāpēc meklētais skaitlis ir 1222200.

32.9.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.9.4. atrisinājumu.

32.9.3. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.9.4. atrisinājumu.

32.9.4. Uzdevuma atrisinājums sastāv no divām daļām: pirmkārt, atrast lielāko iespējamo n vērtību un parādīt piemēru, ka tas iespējams; otrkārt, pierādīt, ka lielāka vērtība nav iespējama.

- **Atbilde:** min=-3, max=3. **Piemērs:** minimālo vērtību var sasniegt, ja x=y=z=-1, bet maksimālo, ja x=y=z=1.
- **Pierādījums:** saskaitot dotās nevienādības, iegūstam, ka

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (xy + xz + yz) \le 6 \qquad \textbf{(1)}$$

Jebkuru divu skaitļu starpības kvadrāts ir lielāks vai vienāds par nulli, tāpēc arī $(x-y)^2 \ge 0$, $(x-z)^2 \ge 0$, $(y-z)^2 \ge 0$. Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam, ka $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \ge 0$. Atverot iekavas:

$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \ge 0$ jeb

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \ge 0$.

Pārnesot uz otru nevienādības pusi daļu no saskaitāmajiem un izdalot ar 2, iegūstam:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + xz + yz \qquad \textbf{(2)}$$

Ievietojot nevienādībā (1) nevienādību (2):

$$(xy + xz + yz) + (xy + xz + yz) \le \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (xy + xz + yz) \le 6$$

Tā rīkojoties, pierādāmajā nevienādībā mēs lielāku saskaitāmo $x^2 + y^2 + z^2$ aizstājam ar mazāku $(xy + xz + yz)$. Tātad, ja 6 būtu lielāks par sākotnējo izteiksmi, tad 6 būtu lielāks arī par pārveidoto izteiksmi, kur saskaitāmais pamazināts. Savelkot līdzīgos saskaitāmos:

$2xy + 2xz + 2yz \leq 6$ jeb $xy + xz + yz \leq 3$ **(3).**

Saskaitot nevienādības (1) un (3), iegūstam, ka

$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (xy + xz + yz) + (xy + xz + yz) \leq 3 + 6$ jeb $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \leq 9$, bet šai nevienādībā redzama triju saskaitāmo summas kvadrāta formula, tātad $(x + y + z)^2 \leq 9$ jeb $-3 \leq x + y + z \leq 3$.

Tātad **min=-3** un **max=3**.

32.9.5. Atrisināsim vispirms līdzīgu uzdevumu I, kuram ir divas atšķirības no sākotnējā: 1) diskiem gala situācijā uz stienīša C nav jāatrodas monotonā secībā, 2) diski uz stienīša A var izkārtoties patvaļīgā secībā (tomēr nosacījums par to, ka nekad nedrīkst pārlikt disku uz stienīti B vai C, ja uz tā esošais apakšējais disks ir mazāks par pārliekamo, paliek spēkā). Apzīmēsim minimālo pietiekamo gājienu skaitu šim jaunajam uzdevumam n disku gadījumā ar $\mathrm{p_n}$. Skaidrs, ka $\mathrm{p_1} = 1$.

Lai atrisinātu šo uzdevumu n disku gadījumā ($\mathrm{n} > 1$), acīmredzami nepieciešams veikt tā apakšuzdevumus norādītajā secībā:

a) Pārcelt $\mathrm{n} - 1$ augšējo disku no A uz B,

b) Pārcelt apakšējo disku no A uz C,

c) Pārcelt pārējos n-1 diskus no B uz C.

Apakšuzdevuma b) veikšanai nepieciešama un pietiekama 1 pārcelšana. Apakšuzdevuma c) veikšanai nepieciešamas n-1 pārcelšanas (katram diskam pa vienai); tā kā uz C apakšā jau atrodas vislielākais disks, tad ar n-1 pārcelšanu arī pietiek (par disku izmēriem nav jārūpējas). Apskatīsim apakšuzdevumu a). Padomāsim, vai, rīkojoties optimālākajā veidā, apakšējais disks pirms uzdevuma a) pabeigšanas var būt pārvietojies uz B. Ja tā būtu noticis, tad brīdī, kad apakšējo disku pirmo reizi pārceļ uz B, visiem citiem diskiem jābūt uz C. Bet tādā gadījumā mēs būtu varējuši līdz šim brīdim veiktās operācijas aizstāt ar citām (operāciju, kurā kādu disku pārceļ no /uz B, aizstāt ar operāciju, kurā šo disku pārceļ no/uz C, un otrādi) un iegūt, ka pēc tāda paša operāciju skaita apakšējais disks jau būtu uz C, un nākošās operācijas a) veikšanai vairs nebūtu vajadzīgas; tātad ceļš, kurā apakšējais disks nonāk uz C, nav optimālais.

Tātad, veicot a) optimālajā veidā, apakšējais disks vispār netiek aiztikts.

Tāpēc a) veikšanas laikā mēs rīkojamies ar n-1 sākotnēji augšējiem diskiem, it kā n-tā diska nemaz nebūtu. Minimālais pārcelšanu skaits ir p_{n-1}. Tātad kopā a), b), c) veikšanai minimālais pietiekamais pārcelšanu skaits ir $p_{n-1} + 1 + (n-1) = p_{n-1} + n$. No nosacījuma $p_1 = 1$ un $p_n = p_{n-1} + n$ (n=2; 3; ...) iegūstam $p_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Tagad atrisināsim vēl citu uzdevumu II, kuram ir tikai viena atšķirība no sākotnējā: diskiem gala situācijā uz stienīša C nav jāatrodas monotonā secībā (bet nosacījums par diska pārlikšanu šoreiz ir spēkā gan stienītim A, gan stienītim B, gan stienītim C). Apzīmēsim minimālo pietiekamo pārcelšanu skaitu uzdevumam II n disku gadījumā ar q_n. Tā kā uzdevumā II uz disku pārcelšanu ir stingrāki ierobežojumi nekā uzdevumā I, tad $q_n \geq p_n$; viegli pārbaudīt, ka etapus a), b), c) var veikt attiecīgi ar q_{n-1}, 1 un n-1 pārcelšanām. Tāpēc $q_n \leq q_{n-1} + n$. Līdz ar nosacījumu $q_1 = 1$ tas dod $q_n \leq 1 + 2 + ... + n = p_n$. No nevienādībām $q_n \geq p_n$ un $q_n \leq p_n$ seko, ka $q_n = p_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Tagad beidzot risināsim sākotnējo uzdevumu. Ievērosim sekojošu svarīgu „simetriju": ja no kādas konfigurācijas X ir pieļaujams, pārliekot disku d no stienīša α uz stienīti β, iegūt konfigurāciju Y, tad no konfigurācijas Y, pārliekot disku d no stienīša β uz stienīti α, ir pieļaujams iegūt konfigurāciju X. Šī īpašība seko no tā, ka gan konfigurācijā X, gan konfigurācijā Y pārliekamais disks d nav lielāks par apakšējo disku uz sava stienīša.

Apzīmēsim minimālo pietiekamo gājienu skaitu n disku gadījumā ar x_n. Skaidrs, ka $x_1 = 1$ un pie $n > 1$ n disku gadījumā nepieciešams veikt jau sākumā minētos etapus a), b), c) tieši šādā secībā. Tad, a) etapa gaitā augšējos (n-1) diskus pārceļot uz B, minimālais pārcelšanu skaits ir $q_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Lai veiktu b) etapu, nepieciešama un pietiekama viena pārcelšana. Lai veiktu c) etapu, rīkojamies simetriski tam, kā augšējie n-1diski tika pārcelti no A uz B; ja c) etapu varētu veikt ar mazāk nekā q_{n-1} gājieniem, tad arī sākotnējo pārcelšanu no A uz B varētu veikt ar mazāk nekā q_{n-1}

gājieniem – pretruna. Tāpēc c) etapam nepieciešami un pietiekami q_{n-1} gājieni. Galarezultātā iegūstam $x_n = q_{n-1} + 1 + q_{n-1} = 2q_{n-1} = 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 1 = n^2 - n + 1$.

10. klase

32.10.1.

a) Atbilde: nē, ne noteikti.

Pierādījums: pamatosim, ka apskatāmā nevienādība neizpildās katram x un y, ja x>y>0. Lai to pamatotu, pietiekami atrast vienu piemēru, kad prasītais neizpildās. **Piemērs:** izvēlēsimies x=1 un y=0,1. Skaidrs, ka izpildās nosacījums x>y>0. Lai pārbaudītu, vai apskatāmā nevienādība izpildās ievietosim dotos skaitļus apskatāmajā nevienādībā: $1 + \frac{9}{1} > 0{,}1 + \frac{9}{0{,}1}$ jeb $1 + 9 > 0{,}1 + 90$. Skaidrs, ka esam ieguvuši pretrunu, jo $10 < 90{,}1$. Tātad esam pamatojuši, ka ir tādi x un y, kam izpildās x>y>0, bet neizpildās apskatāmā nevienādība.

b) Atbilde: jā, noteikti.

Pierādījums: pamatosim, ka katram x un y, kam izpildās nosacījums x>y>3, ir spēkā arī nevienādība $x + \frac{9}{x} > y + \frac{9}{y}$. Pārnesot visus saskaitāmos uz nevienādības kreiso pusi, iegūstam dotajai līdzvērtīgu nevienādību $x + \frac{9}{x} - \left(y + \frac{9}{y}\right) > 0$ jeb $x - y + \frac{9}{x} - \frac{9}{y} > 0$. Nevienādības kreiso pusi sadalīsim reizinātājos. Vienādojam saucējus:

$(x - y) + \frac{9y - 9x}{xy} > 0$ (iznesam pirms iekavām kopīgo reizinātāju „–9”)

$(x - y) + \frac{-9 \cdot (x - y)}{xy} > 0$ (iznesam pirms iekavām kopīgo reizinātāju (x-y))

$(x - y)\left(1 - \frac{9}{xy}\right) > 0$.

Pamatosim, ka katrs no reizinātājiem ir pozitīvs. Skaidrs, ka reizinātājs (x-y) ir pozitīvs, jo x>y. Apskatīsim otro reizinātāju $\left(1 - \frac{9}{xy}\right)$. Lai šis reizinātājs būtu pozitīvs, jābūt $\frac{9}{xy} < 1$. Bet, tā kā x>y>3, tad xy>9, un tāpēc patiešām $\frac{9}{xy} < 1$. Esam pamatojuši, ka abi reizinātāji nevienādības kreisajā pusē ir lielāki par nulli. Tātad arī uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa katram x un y, kuriem izpildās x>y>3.

32.10.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.10.2. atrisinājumu.

32.10.3. Atbilde: n=2.

Pierādījums: apskatīsim vairākus gadījumus:

1) ja n=1, apskatāmie skaitļi ir $2^n - 1 = 1$ un $2^n + 1 = 2 + 1 = 3$. Bet skaitlis 1 nav pirmskaitlis, tātad n=1 neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

2) ja n=2, apskatāmie skaitļi ir $2^n - 1 = 3$ un $2^n + 1 = 5$. Tā kā skaitļi 3 un 5 ir pirmskaitļi, tad n=2 atbilst uzdevuma nosacījumiem.

3) ja $n \geq 3$, apskatīsim trīs vienu otram sekojošus naturālus skaitļus $2^n - 1$, 2^n un $2^n + 1$. Tā kā šie skaitļi ir lielāki par 3 un ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi, tad vienam no tiem ir jādalās ar 3. Skaidrs, ka 2^n ar 3 nedalās (2^n kā reizinātājus satur tikai divniekus, tātad dalās tikai ar 2 vai tā pakāpēm), bet tādā gadījumā vai nu $2^n - 1$, vai $2^n + 1$ dalās ar 3. Bet, ja skaitlis dalās ar 3 un ir lielāks par 3, tad tas noteikti nav pirmskaitlis. Tātad neviena n vērtība, kam $n \geq 3$, neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

32.10.4.

a) Atbilde: nē, nav iespējams**.**

Pierādījums: apskatīsim, kādas vērtības var pieņemt $|f(x) - x|$. Tā kā gan funkcijas vērtības f(x), gan mainīgā vērtības x ir no kopas {1; 2; ...; 15}, tad izteiksmes $|f(x) - x|$ mazākā iespējamā vērtība ir 0 (ja x=f(x)), bet lielākā iespējamā vērtība ir 14 (ja x=1 un f(x)=15). Tātad iespējamās moduļa vērtības ir 0; 1; ...; 14 – kopā 15 dažādas vērtības.

Apskatīsim summu: $|f(1) - 1| + |f(2) - 2| + ... + |f(15) - 15|$. Tā kā tiek summēti visi apskatāmie moduļi kopskaitā 15 un tiem jābūt dažādiem, tad tie pieņem visas iespējamās moduļa vērtības 0; 1; ...; 14. Tātad:

$|f(1) - 1| + |f(2) - 2| + ... + |f(15) - 15| = 0 + 1 + 2 + ... + 14$ (*).

Apskatīsim vienādības (*) kreiso pusi. Iespējami divi gadījumi:

1) $f(a) \geq a$, kur $a \in [1;15]$, $f(a) \in [1;15]$, tad moduli $|f(a) - a|$ varam aizstāt ar $f(a) - a$.

2) $f(a) < a$, kur $a \in [1;15]$, $f(a) \in [1;15]$, tad moduli $|f(a)-a|$ varam aizstāt ar $a - f(a)$.

Tā kā funkcijas vērtību kopa ir {1; 2; ...; 15} un visas funkcijas vērtības ir dažādas, tad vienādības (*) kreisajā pusē pēc moduļu $|f(a)-a|$ (katram $a \in [1;15]$) aizstāšanas ar tiem ekvivalentām starpībām katrs skaitlis 1; 2; ...; 15 parādās 2 reizes – kā funkcijas vērtība f(a) un kā a. Ir vairākas iespējas:

1) skaitlis parādās ar koeficientu (+2),

2) skaitlis parādās ar koeficientu (-2),

3) skaitlis saīsinās (parādās ar koeficientu 0).

Tātad redzam, ka vienādības (*) kreisajā pusē esošā summa ir pāra skaitlis, jo sastāv no naturāliem skaitļiem, kas reizināti ar 2; -2 vai 0. Bet labajā vienādības pusē esošo skaitļu summa ir $0+1+...+14=105$, kas ir nepāra skaitlis. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli, tad dotā vienādība nav patiesa. Esam pierādījuši, ka pie n=15 skaitļi $|f(x)-x|$ nevar visi būt dažādi.

b) Atbilde: jā, ir iespējams. **Pierādījums:** parādīsim piemēru, kā izveidot funkciju f, lai izpildītos visi uzdevuma nosacījumi. **Piemērs:** skat. tabulā:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
***f*(*n*)**	16	15	14	13	11	10	9	1	8	7	6	12	5	4	3	2
|*n*-*f*(*n*)|	15	13	11	9	6	4	2	7	1	3	5	0	8	10	12	14

32.10.5. Pierādījums: pieņemsim, ka k-1 kolonnās jau katrā ir visu krāsu kartiņas, bet k-tajā – nav. Pieņemsim, ka k-tajā kolonnā krāsa x sastopama vismaz divas reizes, bet krāsa y nav sastopama vispār. Skaidrs, ka šādas krāsas x un y noteikti eksistē, citādi k-tajā kolonnā jau būtu visu 4 krāsu kartiņas. Katrai kolonnai piekārtosim vienu punktu (iegūstam virkni, kas sastāv no 10 punktiem). Ar i=1; 2; ... 10; apzīmēsim skaitļus, kas uzrakstīti uz kartītēm. Katram i vilksim bultiņu no tās kolonnas punkta, kurā skaitlis i attēlots krāsā x, uz tās kolonnas punktu, kurā skaitlis i attēlots krāsā y. Tādējādi iegūsim 10 bultiņas, jo katrs no 10 skaitļiem uzrakstīts uz vienas x krāsas kartiņas, kas ir bultiņas sākuma punkts, un vienu reizi uzrakstīts uz y krāsas kartiņas, kas ir bultiņas beigu punkts. Tā kā katrā no pirmajām k-1 kolonnām ir visu 4 krāsu kartiņas, tad tur ir arī viena x un viena y krāsas kartiņa. Tas nozīmē, ka pirmo k-1 kolonnu grupas iekšienē katrā kolonnā viena bultiņa ieiet un viena bultiņa iziet.

Tā kā k-tajā kolonnā ir vismaz 2 kartītes krāsā x, tad no tās iziet vismaz 2 bultiņas, bet neviena neieiet. Apskatīsim bultiņu virknes, kas sākas no k-tās kolonnas. Pamatosim, ka sasniedzam kolonnu, kuras kārtas numurs lielāks par k. Ja tā nebūtu, tad mēs būtu

nonākuši pirmo k-1 kolonnu grupā, no kurās ārā vairs nevarētu iziet. Bet tad pirmo k-1 kolonnu grupai būtu vairāk ieejošo nekā izejošo bultiņu, bet tas ir pretrunā ar iepriekš pamatoto. Tātad, apskatot bultiņu virkni, noteikti nonāksim kolonnā, kuras numurs lielāks par k. Izdarot maiņas, kas atbilst šīm bultiņām (maiņas sākam no kolonnas ar numuru, kas lielāks par k), mēs „izlabojam" kolonnu ar numuru k attiecībā uz krāsu y. Izlabojot to, ja vajadzīgs, attiecībā uz citām krāsām, panākam, ka arī k-tā kolonna ir laba.
Līdzīgi izlabojam visas kolonnas.

11. klase

32.11.1. Atbilde: nē, neeksistē.

Pierādījums: skaidrs, ka P(x) nevar būt konstants polinoms, jo tam jābūt vienādam ar $\sin x + 2005$, bet šī summa noteikti nav konstanta. Tātad P(x) ir polinoms, ko vispārīgā veidā varam apzīmēt ar $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, kur $a_0 \neq 0$ un $n \geq 1$. Tad $|P(x)|$ var izsacīt kā $|P(x)| = |a_0x^n| \cdot \left|1 + \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0x^n}\right|$. Ja x pēc moduļa ir ļoti liels (tiecas uz bezgalību), tad saskaitāmie $\frac{a_1}{a_0x}, \frac{a_2}{a_0x^2}, ..., \frac{a_n}{a_0x^n}$ kļūst ļoti mazi (tiecas uz nulli). Skaidrs, ka, varam mainīgo x izvēlēties *tik lielu*, lai saskaitāmie $\frac{a_1}{a_0x}, \frac{a_2}{a_0x^2}, ..., \frac{a_n}{a_0x^n}$ kļūtu *tik mazi*, ka $\left|1 + \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0x^n}\right| > \frac{1}{2}$. Bet tad $|P(x)| \geq |a_0x^n| \cdot \frac{1}{2}$, ja x pietiekoši liels. Izvēloties mainīgā x vietā vēl lielākus skaitļus, iegūsim, ka $|P(x)|$ vērtība kļūst vēl lielāka. Tātad $|P(x)|$ vērtība neierobežoti aug (tiecas uz bezgalību), ja x vietā izvēlamies aizvien lielākus skaitļus.
Apskatīsim dotās vienādības labo pusi $\sin x + 2005$. Zinām, ka funkcija $\sin x$ ir ierobežota: $-1 \leq \sin x \leq 1$, tātad arī funkcija $\sin x + 2005$ ir ierobežota.
Tā kā ierobežota funkcija nevar būt vienāda ar tādu, kas neierobežoti aug, tad esam pamatojuši, ka neeksistē tāds polinoms P(x), ka visiem x ir spēkā uzdevumā dotā vienādība.

32.11.2. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.11.3. atrisinājumu.

32.11.3. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.11.5. atrisinājumu.

32.11.4. Pierādījums: tā kā $a<b\leq c<d$, tad apzīmēsim b=a+n, c=a+m, d=a+p, kur $0<n\leq m<p$. Ievietojot lielumus dotajā vienādībā, iegūstam $a(a+p)=(a+n)(a+m)$. Atverot iekavas un izsakot p, iegūstam $p=m+n+\frac{m\cdot n}{a}$. Tā kā p ir naturāls skaitlis, tad arī daļai $\frac{m\cdot n}{a}$ jābūt naturālam skaitlim (šī daļa nevar būt negatīva vai 0, jo arī skaitļi m, n un a ir naturāli). No tā seko, ka $m\cdot n$ dalās ar a, tātad $a\leq m\cdot n$. Tā kā dalījums $\frac{m\cdot n}{a}$ ir vismaz 1 (mazākais naturālais skaitlis), tad $p\geq m+n+1$ (1).

Skaidrs, ka vienādība $p=m+n+1$ pastāvēs tikai tad, ja $\frac{m\cdot n}{a}=1$ jeb $m\cdot n=a$.

Ievietosim d=a+p dotajā nevienādībā, tad $\sqrt{a+p}-\sqrt{a}\leq 1$ jeb $\sqrt{a+p}\leq 1+\sqrt{a}$. Kāpinot abas nevienādības puses kvadrātā (to drīkstam darīt, jo, tā kā a un p ir naturāli skaitļi, tad zemsaknes izteiksmes ir nenegatīvas), iegūstam, ka

$a+p\leq 1+2\sqrt{a}+a$ jeb

$p\leq 1+2\sqrt{a}$ (2).

No (1) un (2) iegūstam, ka $m+n+1\leq p\leq 2\sqrt{a}+1$. Tā kā $2\sqrt{a}+1\leq 2\sqrt{mn}+1$, jo $a\leq m\cdot n$, tad $m+n+1\leq 2\sqrt{mn}+1$. Šo nevienādību varam pārrakstīt kā $m-2\sqrt{mn}+n\leq 0$. Iegūtās nevienādības kreisajā pusē varam atdalīt binoma kvadrātu, iegūstam $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2\leq 0$. Tā kā binoma kvadrāts nevar būt negatīvs, tad $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2=0$ un no tā seko, ka m=n. Pamatosim, ka jāpastāv arī vienādībai p=m+n+1. Pamatojums: ja p>m+n+1, tad $m+n+1<2\sqrt{mn}+1$ jeb $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2<0$, bet tā nevar būt. Tātad p=m+n+1. Bet, lai būtu p=m+n+1, noteikti jābūt, ka $\frac{m\cdot n}{a}=1$ jeb $a=m\cdot n=m\cdot m=m^2$. Tā kā m ir vesels skaitlis, tad a ir vesela skaitļa kvadrāts.

32.11.5. Pierādījums: apskatām to domino kauliņu Z, kas pārklāj izvēlēto melno rūtiņu R. Uz domino kauliņa uzzīmējam vektoru no R centra uz otras kauliņa Z rūtiņas centru. Skaidrs, ka šis vektors norāda uz kādu citu melnu rūtiņu, kas arī atrodas 1., 3., ..., 2005. rindiņā.

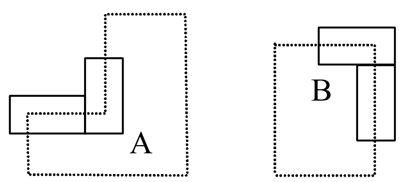
Līdzīgi, kā aprakstīts par kauliņu Z, apskatām kauliņu Y, kas pārklāj melno rūtiņu, uz kuru norāda uzzīmētais vektors. Atkal savienojam abus kauliņa Y rūtiņu centrus. Iegūtais vektors, tāpat kā iepriekš, norāda uz kādu citu melnu rūtiņu, kas arī atrodas kādā no rindām 1., 3, ..., 2005. Turpinot šādi zīmēt vektorus, iegūstam maršrutu pa rūtiņām. Skaidrs: ja uzzīmētais maršruts nonāk rūtiņā, kas sākotnēji nebija pārklāta, tad viss ir kārtībā un iespējams domino kauliņus bīdīt tā, lai nepārklāta paliktu norādītā rūtiņa R. Ja tā nenotiek, tad izveidojas cikls. Ja izdosies pamatot, ka nav iespējams gadījums, kad izveidojas cikls, tad uzdevums būs atrisināts.

Skaidrs: ja veidojas cikls, tad sākotnēji nepārklātā rūtiņa, kas atrodas pie malas, nav tā iekšienē, tāpēc iekšienei jābūt pārklātai ar domino. Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka apskatāmā veida ciklos iekšpusē noteikti atrodas nepāra skaits rūtiņu. Tas būtu pretrunā ar faktu, ka cikla iekšpusē atrodas pāra skaits rūtiņu, kas ir acīmredzams, jo katrs domino kauliņš sastāv no tieši 2 rūtiņām.

Rūtiņas malas garumu apzīmēsim ar 1. Apskatīsim lauztu līniju L, kas savieno ciklā iesaistīto domino kauliņu rūtiņu centrus. Tā kā katra šīs līnijas posma garums ir pāra skaitlis, tad tās iekļautais laukums dalās ar 4.

Šai laukumā ietilpst to domino kauliņu laukumu daļas, caur kurām iet līnija L, un iekšējo domino kauliņu laukums. No katra ar L šķeltā domino kauliņa ir iekļauts laukums 1 plus $\frac{1}{4}$ pie katra A tipa stūra vai mīnus $\frac{1}{4}$ pie katra B tipa stūra (skat. 75A. zīm.). Tā kā B tipa stūru ir par 4 vairāk nekā A tipa stūru, tad šīs korekcijas $\pm\frac{1}{4}$ „samazina” laukumu par 1.

Atliek pamatot, ka domino skaits ciklā ir pāra skaitlis. Tā kā līnija L ir slēgta, tad, apstaigājot to, pa labi virzāmies tikpat lielu attālumu, cik pa kreisi. Tā kā katra L posma garums ir pāra skaitlis, tad horizontālo posmu kopgarums dalās ar 4. Tas pats attiecas uz vertikālajiem posmiem. Tāpēc L kopgarums dalās ar 4. Katra domino iekšienē L garums ir tieši 2, tātad domino skaits ir pāra skaitlis.



75A. zīmējums

Tātad L ietver pāra laukumu; no tā viena daļa – nepāra laukums – ir domino sastāvdaļas. Tātad cikla iekšpusē ir nepāra laukums, t.i., nepāra skaits rūtiņu, k.b.j. Vajadzīgā pretruna iegūta.

12.klase

32.12.1. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 30.12.2. atrisinājumu.

32.12.2. Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums: novilksim taisni, kas nav paralēla nevienas parabolas asij. Tā kā mums ir tieši 2005 parabolas, tad tām kopā ir 2005 simetrijas asis, tāpēc tādu taisni noteikti varēs novilkt. Skaidrs, ka katra no 2005 parabolām krusto šo taisni divos punktos, pieskaras tai vai arī pilnībā atrodas vienā pusē no tās. Tātad starp katras parabolas zariem atrodas vai nu šīs taisnes nogrieznis (ja parabola krusto taisni divos punktos), vai arī starp parabolas zariem neatrodas neviens šīs taisnes punkts (ja parabola pieskaras taisnei vai pilnībā atrodas vienā pusē no taisnes). Tātad uz šīs taisnes noteikti iespējams paņemt tādu punktu, kas neatrodas starp nevienas parabolas zariem. Bet no tā seko, ka nav iespējams plaknē novietot 2005 parabolas tā, lai katrs plaknes punkts atrastos vismaz starp vienas parabolas zariem.

32.12.3. Uzdevuma atrisinājums sakrīt ar uzdevuma 31.12.2. atrisinājumu.

32.12.4. Atbilde: n=2 un n=3.

Pierādījums: apskatīsim iespējamās n vērtības:

1) n=2. Pierādīsim, ka gadījumā, kad n=2, uzdevumā dotā nevienādība $\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{4} \ge \left(\frac{x_1x_2+x_2x_1}{2}\right)^2$ ir patiesa.

Atverot iekavas, iegūstam

$$\frac{x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4}{4} \ge \frac{x_1^2x_2^2+2x_1^2x_2^2+x_1^2x_2^2}{4}$$

(abas nevienādības puses reizinām ar 4, savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$x_1^4-2x_1^2x_2^2+x_2^4 \ge 0$ jeb $\left(x_1^2-x_2^2\right)^2 \ge 0$.

Tā kā nevienādība $\left(x_1^2-x_2^2\right)^2 \ge 0$ ir patiesa, tad esam pierādījuši, ka arī uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa.

2) $n \geq 4$. Pierādīsim, ka varam izvēlēties tādas x_i, $i \in [1; n]$, vērtības, lai uzdevumā dotā nevienādība būtu aplama. Izvēlēsimies $x_1 = x_2 = 0$ un $x_3 = x_4 = .. = x_n = 1$. Skaidrs, ka nevienādības kreisās puses vērtība ir 0, jo pirmais reizinātājs $(x_1^2 + x_2^2) = 0$. Bet nevienādības labās puses vērtība ir pozitīvs skaitlis, jo skaitītājā noteikti ir tāds saskaitāmais, kurš nav nulle, piemēram, $x_3 x_4 = 1 \cdot 1 = 1$, un visi citi saskaitāmie ir nenegatīvi. Bet 0 nevar būt lielāka vai vienāda ar pozitīvu skaitli. Tātad esam pamatojuši, ka iespējams izvēlēties tādas x_i vērtības, lai uzdevumā dotā nevienādība būtu aplama.

3) n=3. Pamatosim, ka uzdevumā dotā nevienādība

$$\frac{(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2)}{2^3} \geq \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{3} \right)^3 \qquad (*)$$

ir identiski patiesa.

Pamatosim, ka nevienādības pareizība vai nepareizība nemainās, ja visus x_i dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli. Pamatojums: apzīmēsim brīvi izvēlētu pozitīvu skaitli ar a. Katru x_i dalām ar a un iznesam pirms iekavām kopīgo reizinātāju:

$$\frac{\frac{1}{a^2} \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left(x_2^2 + x_3^2\right) \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left(x_3^2 + x_1^2\right)}{2^3} \geq \left(\frac{\frac{1}{a^2} x_1 x_2 + \frac{1}{a^2} x_2 x_3 + \frac{1}{a^2} x_3 x_1}{3} \right)^3 \quad \text{jeb}$$

$$\frac{\frac{1}{a^6} \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \left(x_2^2 + x_3^2\right) \cdot \left(x_3^2 + x_1^2\right)}{2^3} \geq \left(\frac{\frac{1}{a^2} (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)}{3} \right)^3$$

(labajā nevienādības pusē izpildām kāpināšanu kubā)

$$\frac{\frac{1}{a^6} \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \left(x_2^2 + x_3^2\right) \cdot \left(x_3^2 + x_1^2\right)}{2^3} \geq \frac{1}{a^6} \cdot \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{3} \right)^3 \quad \text{(dalām ar } \frac{1}{a^6}\text{)}$$

$$\frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \left(x_2^2 + x_3^2\right) \cdot \left(x_3^2 + x_1^2\right)}{2^3} \geq \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{3} \right)^3 \qquad (**).$$

Redzam, ka nevienādība (**) sakrīt ar pierādāmo nevienādību (*). Tātad esam pamatojuši, ka nevienādības pareizība vai nepareizība nemainīsies, ja visus x_i dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli.

Apzīmēsim $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ un $S_3 = x_1x_2x_3$. Tā kā varam visus x_i dalīt ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli, tad dalīšanu veiksim tā, lai $S_2 = 1$. Tātad pierādāmo nevienādību (*) varam uzrakstīt šādi:

$$\frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_2^2 + x_3^2\right)\left(x_3^2 + x_1^2\right)}{8} \geq \frac{1}{27} \qquad (1).$$

Ievērosim: tā kā $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geq 0$, tad, kāpinot kvadrātā un savelkot līdzīgos saskaitāmos, iegūstam, ka $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2S_2 \geq 0$ jeb $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq S_2$. Tā kā $S_2 = 1$, tad $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1$.

Ievērojam arī, ka $S_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2S_2$, bet, tā kā $S_2 = 1$ un $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1$, tad $S_1^2 \geq 3$ jeb $S_1 \geq \sqrt{3}$.

Apskatīsim sakarību starp S_2 un S_3^2. Redzam, ka S_2 ir 3 elementu x_1x_2; x_2x_3 un x_3x_1 summa, bet S_3^2 – šo elementu reizinājums $x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot x_3x_1 = x_1^2x_2^2x_3^2 = S_3^2$. Bet tad S_2 un S_3^2 var tikt novērtēti, izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko 3 elementiem x_1x_2; x_2x_3 un x_3x_1. Atcerēsimies, ka katriem 3 nenegatīviem skaitļiem a_1, a_2, a_3 vidējais aritmētiskais un vidējais ģeometriskais apmierina nevienādību $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$. Tātad S_2 un S_3 apmierina nevienādību $\frac{S_2}{3} \geq \sqrt[3]{S_3^2}$. Tā kā $S_2 = 1$, tad, kāpinot abas nevienādības puses kubā, iegūstam, ka $\frac{1}{27} \geq S_3^2$ un $S_3 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Pārbaudīsim īpašību: katriem 2 skaitļiem ir spēkā nevienādība

$$x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} \qquad (**).$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{2}$$

(reizināsim abas nevienādības puses ar 2)

$2x_1^2 + 2x_2^2 \geq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ (dažus saskaitāmos pārnesīsim uz otru nevienādības pusi)

$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$ (izdalīsim abas nevienādības puses ar 2; ievērosim, ka $x_1x_2 = \sqrt{x_1^2x_2^2}$)

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2x_2^2} .$$

Redzam, ka iegūtā nevienādība ir patiesa, jo tā saista skaitļu x_1^2 un x_2^2 vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko; tātad arī nevienādība (**) ir patiesa.

Zinām, ka pierādāmo nevienādību (*) varam pierakstīt formā (1). Pārveidosim nevienādības (1) kreiso pusi:

$$\frac{(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2)}{8} \geq$$ (katram reizinātājam skaitītājā pielietosim pierādīto īpašību (**))

$$\geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_3 + x_1}{2}\right)^2 =$$ (katrā reizinātājā skaitītāju izsakām kā starpību)

$$= \frac{1}{64}(S_1 - x_3)^2(S_1 - x_1)^2(S_1 - x_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{64}\left[(S_1 - x_1)(S_1 - x_2)(S_1 - x_3)\right]^2 =$$ (atveram iekavas)

$$= \frac{1}{64}\left[S_1^3 - S_1^2(x_1 + x_2 + x_3) + S_1 \cdot S_2 - S_3\right]^2 =$$ (atceramies, ka $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$)

$$= \frac{1}{64}\left(S_1^3 - S_1^3 + S_1S_2 - S_3\right)^2 =$$ (savelkam līdzīgos saskaitāmos)

$$= \frac{1}{64}(S_1S_2 - S_3)^2 =$$ (atceramies, ka $S_2 = 1$)

$$= \frac{1}{64}(S_1 - S_3)^2 =$$ (atceramies, ka $S_1 \geq \sqrt{3}$ un $S_3 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$)

$$\geq \frac{1}{64}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2 =$$ (izpildām aritmētiskās darbības)

$$= \frac{1}{27}$$

Redzam, ka nevienādība (1) ir patiesa, bet tādā gadījumā patiesa ir arī nevienādība (*).

32.12.5. Atbilde: 2. spēlētājs.

Pierādījums: apskatīsim divas no iespējamajām pozīciju klasēm. Ar U apzīmēsim tādu pozīciju klasi, kurā spēlētājiem ir palicis pāra daudzums stieņu un augstākais viens stienis ar pāra garumu. Bet ar Z apzīmēsim tādu pozīciju klasi, kurā spēlētājiem ir palicis nepāra daudzums stieņu un augstākais divi stieņi ar pāra garumu.

Pamatosim, ka ***katrs*** gājiens no pozīciju klases U noteikti ved uz pozīciju klasi Z. Apskatīsim, kādi ir iespējamie gājieni no U klases pozīcijas:

1) viena stieņa sadalīšana divos stieņos. Skaidrs: lai kuru stieni mēs sadalītu, to kopējais skaits palielināsies par 1 un būs nepāra skaitlis. Stieni ar pāra garumu (ja tāds eksistē) iespējams sadalīt 2 stieņos divos veidos:

- lai izveidotos 2 stieņi ar pāra garumu,
- lai izveidotos 2 stieņi ar nepāra garumu.

Skaidrs: abos gadījumos stieņu skaits būs nepāra skaitlis un stieņu skaits ar pāra garumu nebūs lielāks par 2 (šādu stieņu skaits būs tieši 0 vai 2), kas atbilst pozīciju klases Z nosacījumiem.

Ja divos stieņos sadalīsim stieni ar nepāra garumu, tad noteikti izveidojas viens stienis ar pāra garumu, bet viens – ar nepāra garumu. Tātad stieņu skaits ar pāra garumu palielinās par 1 un noteikti nav lielāks par 2, bet kopējais stieņu skaits, protams, ir nepāra skaitlis. Tātad arī šī situācija atbilst pozīciju klasei Z.

2) k stieņu ar garumu k izslēgšana no spēles. Skaidrs: šajā gājienā no spēles nevar tikt izslēgti stieņi ar pāra garumu. Pamatosim: zinām, ka mums ir ne vairāk par vienu stieni ar pāra garumu. Ja stieņa garums ir pāra skaitlis, tad tas noteikti ir lielāks vai vienāds par 2. Lai stieņus varētu no spēles izslēgt, stieņu garumam jābūt vienādam ar stieņu skaitu. Redzam: tas nav iespējams – mums ir augstākais viens stienis ar pāra garumu, bet tā garums ir vismaz 2. Tātad var tikt izslēgti tikai stieņi ar nepāra garumu. Bet, tā kā stieņu garums ir vienāds ar izslēdzamo stieņu skaitu, tad šo stieņu skaits arī noteikti būs nepāra skaitlis. No tā seko, ka pēc šādi izdarīta gājiena būs palicis nepāra skaits stieņu (no pāra skaita stieņu izslēdzot nepāra skaitu stieņu, paliek nepāra skaits stieņu). Kā arī skaidrs, ka būs augstākais viens stienis ar pāra garumu. Tātad iegūtā pozīcija arī pieder pozīciju klasei Z.

Tātad esam pamatojuši, ka ar **katru** gājienu no pozīciju klases U nonākam pozīciju klasē Z.

Pamatosim, ka **vienmēr** ir iespējams izdarīt tādu gājienu no pozīciju klases Z, lai iegūtā pozīcija atbilstu klases U nosacījumiem.

1) ja pozīcijā Z ir vismaz 1 stienis ar pāra garumu, tad sadalām šo stieni 2 stieņos tā, lai abi jaunizveidotie stieņi būtu ar nepāra garumu. Tad stieņu skaits būs palielinājies par 1 (kopējais stieņu skaits būs pāra skaitlis) un būs augstākais 1 stienis ar pāra garumu (ja bija 2 stieņi ar pāra garumu, tad būs palicis 1 stienis ar pāra garumu, kuru nesadalījām, bet, ja bija 1 stienis ar pāra garumu, tad šādu stieņu vairs nebūs). Tātad iegūtā pozīcija atbilst pozīciju klasei U.

2) Ja pozīcijā Z nav neviena stieņa ar pāra garumu, tad sadalām vienu stieni ar nepāra garumu divos stieņos. Skaidrs, ka sadalīšanas rezultātā kopējais stieņu skaits palielinājies par 1. Sadalot iegūstam 1 stieni ar nepāra garumu un vienu stieni ar pāra garumu. Tā kā mums nebija neviens stieņa ar pāra garumu, bet tagad tāds ir tieši 1, tad arī šī iegūtā situācija atbilst pozīciju klases U nosacījumiem.

Esam pamatojuši, ka no pozīcijas Z vienmēr varēs pāriet uz pozīciju U.

Sākuma pozīcija un uzvarošā beigu pozīcija ir U klases pozīcijas. Pamatosim: sākumā mums dots pāra skaits stieņu (2 stieņi) un tieši viens no tiem ir ar nepāra garumu. Tātad sākuma pozīcija pieder klaei U. Pamatosim, ka arī beigu – uzvarošā pozīcija ir U klases pozīcija. Tā kā uzvar tas spēlētājs, kurš izdara pēdējo gājienu, tad apskatīsim iespējas, kāds varētu būt pēdējais gājiens:

1) Apskatīsim iespēju, ka pēdējais gājiens ir stieņa sadalīšana divos stieņos. Atcerēsimies, ka sadalīšana tiek veikt tā, ka tālākie gājieni nebūtu iespējami. Tātad tiek sadalīts viens stienis ar garumu 2 stieņos ar garumiem 1 un 1. Pamatosim: ja sadalot izveidotos vismaz viens stienis ar garumu, kas lielāks par 1, tad šo gabalu noteikti varētu vēl sadalīt divos citos gabalos. Tātad būtu iespējams veikt vēl vienu gājienu, bet tas ir prerunā ar to, ka apskatāmais gājiens ir pēdējais. Savukārt, ja esošais stienis būtu ar garumu, kas lielāks par 2, tad sadalot to daļās vismaz vienas daļas garums noteikti būtu lielāks par 1, tātad būtu iespējams to sadalīt sīkāk – veikt vēl vienu gājienu.

Redzam: sadalīšanas rezultātā izveidojušies divi stieņi ar garumu 1 un ir iespējams veikt vēl vienu gājienu – izslēgt no spēles 1 stieni ar garumu 1. Tātad pēdējais gājiens nevar būt stieņa sadalīšana divos stieņos.

2) Apskatīsim iespēju, kad pēdējais gājiens ir stieņu izslēgšana no spēles. Skaidrs, ka pēc stieņu izslēgšanas nevar palikt neviens stienis ar garumu, kas lielāks par 1, citādi būs iespējams veikt vēl vienu gājienu sadalot šo stieni 2 stieņos. Bet, ja pēc gājiena izdarīšanas paliks vismaz viens stienis ar garumu 1, tad arī būs iespējams veikt vēl vienu gājienu – izslēgt no spēles 1 stieni ar garumu 1.

Tātad pēdējā gājienā no spēles jāizslēdz visi palikušie stieņi. Tātad pēc gājiena izdarīšanas esam nonākuši pozīcijā U – mums ir pāra skaits stienīšu (0 stienīšu) un augstākais viens (mūsu gadījumā - neviens) stienītis ar pāra garumu.

Zinām, ka pirmo gājienu izdara 1. spēlētājs no U klases (sākotnējās) pozīcijas. Apskatīsim 2. spēlētāja stratēģiju: izdarot gājienu no Z klases pozīcijas (tā kā 1. spēlētājs, izdarot 1. gājienu, noteikti nonāk Z klases pozīcijā, tad savu pirmo gājienu 2. spēlētājs noteikti izdara no Z klases pozīcijas) 2. spēlētājs var nonāk U klases pozīcijā. Tad veidojas cikls – 1. spēlētājs vienmēr izdara gājienu no U klases pozīcijas un noteikti nonāk Z klases pozīcijā, bet 2. spēlētājs vienmēr var izdarīt tādu gājienu, lai no Z klases pozīcijas nonāktu U klases pozīcijā. Apskatīsim, kāpēc 2. spēlētājam būtu izdevīgi katrā gājienā no Z klases pozīcijas nonākt U klases pozīcijā. Tā kā pamatojām, ka spēles beigās noteikti tiek iegūta U klases pozīcija, tad spēlētājs, kas izdara pēdējo gājienu, nonāk šajā uzvarošajā U klases pozīcijā. Spēlējot pēc aprakstītās stratēģijas, 2. spēlētājs **vienmēr** ir tas, kura izdarītā gājiena rezultātā izveidojas U klases pozīcija (1. spēlētājs **nekad** nevar izdarīt gājienu, kura rezultātā izveidotos U klases pozīcija). Tā kā spēle nevar būt bezgalīga un uzvar tas spēlētājs, kura gājiena rezultātā izveidojas U klases pozīcija, tad skaidrs, ka agri vai vēlu 2. spēlētājs uzvarēs.

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie sadalīti piecās grupās: skaitļu teorija, algebra, ģeometrija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkāk apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā grāmata ietver 9. – 12. klašu matemātikas olimpiāžu uzdevumus, tad metodes izvēle atkarīga no skolēnu zināšanām.

ALGEBRA

Funkcijas, virknes – 26.10.1., 28.11.1, 29.11.2., 30.11.1., 32.9.4.
Nevienādības – 26.11.5., 28.11.4., 28.12.1., 29.10.1., 29.11.2., 29.12.1., 30.10.1., 31.9.5., 31.10.1., 31.11.4., 31.12.5., 32.10.1., 32.12.4.
Funkcionālvienādojumi – 26.12.2., 27.11.4., 31.12.3.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas – 26.9.1., 26.10.2., 26.12.1., 27.12.1., 29.9.1., 30.9.1., 30.12.4., 31.9.1.
Polinomi – 32.11.1.
Pārveidojumi – 28.12.3., 29.10.5., 29.11.1., 29.12.2., 31.12.1.

ĢEOMETRIJA

Ar riņķa līniju saistīti leņķi – 27.10.3., 27.11.2., 29.10.4., 31.9.3., 31.10.2.
Ģeometriski pārveidojumi – 27.11.2., 28.9.2.
Vienādi trijstūri – 26.9.3., 29.12.3., 30.9.4., 31.9.3.
Laukumi – 29.11.4.
Metriskās sakarības – 26.10.3., 27.9.3., 27.12.3., 28.10.2., 30.11.2., 30.12.1., 31.10.2., 31.12.2.
Līdzība – 30.10.2.
Ģeometriskās nevienādības – 27.12.4.
Figūru sistēmas – 26.12.3., 27.10.4., 27.10.5., 27.11.3., 27.12.4., 28.9.2., 28.9.3., 28.12.4., 29.9.2., 32.12.2.
Dirihlē princips – 32.12.2.
Vektori – 26.11.4., 31.12.2.
Invarianti – 27.10.4., 27.12.3., 28.10.4.

SKAITĻU TEORIJA

Dalītāji, dalāmības pazīmes un īpašības – 28.9.4., 30.9.2., 30.11.3., 30.12.2., 31.9.2., 31.11.1., 32.11.4.
Skaitļa pieraksts –27.10.2., 27.12.5., 31.10.3., 32.9.1.
Atlikumi un kongruences – 26.11.3., 27.11.1., 28.10.3., 29.12.4., 31.9.5., 31.10.5., 32.10.4.
Sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: 26.12.4., 28.11.3., 29.11.3., 30.9.3., 31.12.4., 32.10.3.
Vienādojumi veselos skaitļos – 26.9.2., 27.9.2., 27.9.4., 27.12.2., 30.10.3., 31.10.4.

KOMBINATORIKA

ALGORITMIKA

LITERATŪRA

Vairāki uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

ASV matemātikas olimpiāde: 26.12.2., 29.12.4.

Krievijas matemātikas olimpiāde: 26.12.5., 31.9.4.

Ungārijas matemātikas olimpiāde: 27.9.3.

Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiāde: 28.9.4.

Francijas matemātikas olimpiāde: 28.11.3.

Amerikas Matemātikas Asociācija: 28.11.5., 31.12.1., 32.11.5., 32.12.4., 32.12.5.

Albānijas matemātikas olimpiāde: 30.9.3.

Horvātijas matemātikas olimpiāde: 30.10.5.

Bulgārijas matemātikas olimpiāde: 31.9.5., 31.12.5.

Rumānijas matemātikas olimpiāde: 32.11.4.

A. Engels: 27.10.4., 29.9.4., 29.10.5., 30.10.3.

A. Ambainis: 27.11.5.

V. Berinde: 31.10.3.

R. Rusevs, S.Savčevs: 31.11.3., 31.12.3.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

Redakcijas padome: A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis

Mākslinieciskā noformētāja: L. Kalniņa

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (Latvijas un Islandes Matemātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērzinš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. BērziĦa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.

19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannesons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.