Agnis Andžāns, Aivars Bērziņš, Anna Bērziņa

Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi

1997., 2001.

I daļa

UZDEVUMI

Anotācija

Atklātās matemātikas olimpiādes radās 1974. gadā kā LU Fizikas un matemātikas fakultātes 5. kursa studentu iniciatīva. To mērķis bija radīt iespēju piedalīties Latvijas mēroga sacensībās plašākam skolēnu kontingentam, nekā to pieļauj oficiālo valsts olimpiāžu daudzpakāpju siets, kā arī iesaistīt olimpiāžu kustībā jaunāko klašu skolēnus.

Līdz 1990. gadam pamatskolai atbilst 4. - 8. klases un vidusskolai 9. - 11. klases. No 1990. gada pārgāja uz jaunu klašu sistēmu, kur pamatskolai atbilst 5. - 9. klases un vidusskolai 10. - 12. klases.

1. - 5. atklātajā olimpiādē varēja piedalīties tikai 7.-11. klašu skolēni, 6. olimpiādē 5.-11. klašu skolēni, bet visās turpmākajās olimpiādēs uzdevumi tiek piedāvāti visām pamatskolas un vidusskolas klasēm.

Olimpiādes dalībnieku skaits pakāpeniski pieauga no ~300 dalībniekiem 1. atklātajā olimpiādē līdz ~3000 dalībniekiem 26. atklātajā olimpiādē. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās auglīga un vilinoša; turpmākajos gados līdzīgas sacensības sāka rīkot arī fiziķi, astronomi, filologi utt., kā arī citu valstu izglītības organizatori. Atklātās matemātikas olimpiādes ieguvušas arī starptautisku autoritāti; vairākkārt tajās piedalījušās arī citu valstu delegācijas.

Šajā izstrādnē iekļauti 1. - 28. (1973./74. m.g. - 2000./01. m.g.) atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi ‘(I daļa) līdz ar īsiem atrisinājumiem vai atbildēm (II daļa). Izstrādnē nav iekļauti 25.atklātās matemātikas olimpiādes materiāli.

Saturs

1. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1973./74. m.g.) 3
2. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1974./75. m.g.) 5
3. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1975./76. m.g.) 7
4. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1976./77. m.g.) 10
5. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-11. klasei (1977./78. m.g.) 13
6. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1978./79. m.g.) 16
7. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1979./80. m.g.) 20
8. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1980./81. m.g.) 25
9. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1981./82. m.g.) 31
10. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1982./83. m.g.) 35
11. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1983./84. m.g.) 39
12. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1984./85. m.g.) 44
13. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1985./86. m.g.) 48
14. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1986./87. m.g.) 53
15. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1987./88. m.g.) 57
16. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1988./89. m.g.) 61
17. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1989./90. m.g.) 64
18. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1990./91. m.g.) 69
19. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1991./92. m.g.) 74
20. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1992./93. m.g.) 79
21. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1993./94. m.g.) 84
22. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1994./95. m.g.) 88
23. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1995./96. m.g.) 93
24. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1996./97. m.g.) 97
26. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1998./99. m.g.) 101
27. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1999./2000. m.g.) 106
28. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (2000./2001. m.g.) 111

1. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1973./74. m.g.)

7. klase

1.1. Trijstūra ABC leņķis $\angle ABC = 70°$. Aprēķināt šauro leņķi, kādā krustojas leņķu $\angle BAC$ un $\angle BCA$ bisektrises.

1.2. Dots, ka p ir pirmskaitlis un p>2. Pierādīt, ka $p^2 - 1$ dalās ar 8.

1.3. Ezerā ietek upe. Pie ietekas atrodas ciems A. Pa upi uz augšu atrodas ciems B, bet ezera krastā ciems C. Attālums pa upi starp ciemiem A un B vienāds ar attālumu pa ezeru starp ciemiem A un C. Zvejnieks brauc ar laivu no A uz C un pēc tam atpakaļ. Otrā dienā zvejnieks brauc ar laivu no A uz B un atpakaļ. Kurā dienā zvejnieks braucienam patērēja vairāk laika?

1.4. Rajonā ir 16 ciemi. Visi attālumi starp tiem ir dažādi. Katru ciemu ar tam tuvāko savieno taisns ceļš. Pierādīt, ka ceļu krustojumu ārpus ciematiem nav.

1.5. Ar cirkuļa un lineāla palīdzību konstruēt taisnstūri, kura perimetrs ir 14 cm, bet diagonāle 5 cm gara.

8. klase

1.6. Kārbiņā novietoti vairāki no kartona izgriezti trijstūri, četrstūri un piecstūri. Visu šo figūru kopējais virsotņu skaits ir 150. Četrstūru ir vairāk nekā trijstūru, trijstūru vairāk nekā piecstūru, bet visu piecstūru virsotņu skaits vienāds ar divkāršotu četrstūru skaitu. Cik katra veida figūru ir kārbiņā?

1.7. Kādam nosacījumam jāpastāv starp skaitļiem a un b, lai vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} |x| + y = a \\ |y| + x = b \end{cases}$$

eksistētu atrisinājums?

1.8. Vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$ un $a'x^2 + b'x + c' = 0$ saknes ir atbilstoši x_1, x_2 un x'_1, x'_2. Sastādīt vienādojumu, kura saknes būtu $x_1 + x'_1$ un $x_2 + x'_2$. Izteikt tā koeficientus ar doto vienādojumu koeficientiem.

1.9. Atrast paņēmienu, kā ar cirkuļa un lineāla palīdzību konstruēt 1°lielu leņķi, ja dots 11° liels leņķis.

1.10. Pierādīt, ka katrā trijstūrī mediāna ir lielāka vai vienāda ar bisektrisi, kas vilkta no tās pašas virsotnes.

9.klase

1.11. Divas skudras sāk vienlaicīgi kustēties viena otrai pretī pa taisni. Skudras satikās pēc laika, kas, izsacīts sekundēs, vienāds ar skudru ātrumu starpību, kas izsacīta cm/sek. Līdz satikšanās brīdim viena no skudrām norāpoja a cm. Atrast skudru ātrumus, ja sākumā attālums starp tām bija D cm.

1.12. Logs sastāv no taisnstūra un regulāra trijstūra, kas konstruēts uz vienas no taisnstūra malām. Kādai jābūt taisnstūra malu attiecībai, lai pie dotā perimetra loga laukums būtu vislielākais?

1.13. Izliektā četrstūrī pastāv sakarība $\angle BAD + \angle CDA = 90°$. Malu AD un BC viduspunkti ir M un N. Pierādīt, ka $MN \geq 1/2(AD - BC)$.

1.14. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sqrt{a-x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{y} \\ \sqrt{b-x} + \sqrt{y-x} = \sqrt{y}. \end{cases}$$

1.15. Koordinātu sākumpunktā atrodas prožektors. No punkta (a, b) izrāpo gliemezis un rāpo 1 vienību uz augšu, 1 vienību pa labi, 1 vienību uz augšu, 1 vienību pa labi u.t.t. Dots, ka $a \geq 0$ un $b \geq 0$. Kādu mazāko leņķi jāapgaismo prožektoram, lai gliemezis paliktu apgaismots bezgalīgi ilgi?

10. klase

1.16. Aprēķināt $\sin 54° - \sin 18°$.

1.17. Rindā atrodas 1974 monētas. Viena no tām atrodas ar ciparu, citas -- ar ģērboni uz augšu. Ar vienu gājienu atļauts apgriezt otrādi jebkuras 3 blakus esošās monētas. Vai var panākt, lai visas monētas būtu ar ģērboni uz augšu?

1.18. Vai eksistē 4 atsvari, ar kuriem var nosvērt (ne līdzsvarot !) jebkuru veselu kilogramu skaitu no 1 līdz 42?

1.19. Pierādīt, ka 6 kuba šķautņu viduspunkti atrodas vienā plaknē.

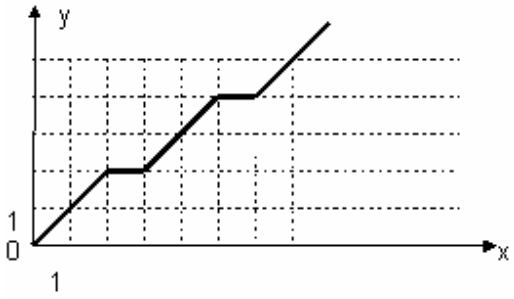
1.20. Konstruēt trijstūri, ja dots tā pamats, augstums un divu pamata pieleņķu starpība.

11. klase

1.21. Trijstūra piramīdā visu šķautņu garumi ir a. Sfēra pieskaras visām šķautnēm. Atrast tās sfēras daļas tilpumu, kas atrodas ārpus piramīdas.

1.22. Trijstūra iekšpusē atrodas k punkti. Tie un trijstūra virsotnes neatrodas pa 3 uz vienas taisnes. Sākam savienot šos k + 3 punktus ar taisnes nogriežņiem, nepieļaujot nogriežņu krustošanos. To turpinām, kamēr vien iespējams.
a) Pierādīt, ka novilkto nogriežņu skaits nav atkarīgs no vilkšanas kārtības,
b) atrast šo skaitu,
c) vispārināt uzdevumu n-stūrim.

1.22. Vai funkciju, kuras grafiks attēlots zīmējumā, var izsacīt kā funkcijas y = ax un periodiskas funkcijas summu, kur a – vesels skaitlis?



1. zīm.

1.24. Plaknē novilktas trīs dažādas riņķa līnijas bez kopīgiem punktiem viena otras ārpusē. Katram pārim novilktas ārējās pieskares. Pierādīt, ka to krustpunkti atrodas uz vienas taisnes.

1.25. Kāds ir mazākais operāciju skaits 3 Hanojas torņu gadījumā ar n diskiem uz pirmā torņa?

2. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1974./75. m.g.)

7. klase

2.1. Vienkāršot izteiksmi $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$ atkarībā no reālā skaitļa x vērtības.

2.2. Atrast divciparu skaitli, ja zināms, ka tas ir piecas reizes lielāks par savu ciparu summu.

2.3. Dots regulārs sešstūris ABCDEF. Izteikt ar vektoriem $\overline{AB} = \bar{a}$ un $\overline{BC} = \bar{b}$ vektorus $\overline{FC}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{CE}$.

2.4. Modinātājs atpaliek par 4 minūtēm stundā. Trīs ar pusi stundas atpakaļ tas tika nostādīts pareizi. Pašlaik pareizs laiks ir 12.00. Pēc cik minūtēm modinātājs rādīs 12.00?

2.5. Vai var uz apaļa šķīvja ar rādiusu 10 cm novietot taisnstūrveida torti ar izmēriem 8 cm x 28 cm, iepriekš sadalot to ar vienu taisni divās daļās? Apgriezt tortes gabalus ar virskārtu uz leju aizliegts.

8.klase

2.6. Dodoties ceļojumā, tūrists paredzēja ceļa izdevumiem 72 rbļ. Pirmo 5 dienu laikā tūrista faktiskie izdevumi sakrita ar paredzētajiem, bet tad viņa izdevumi palielinājās vidēji par 1 rbļ. dienā, un tūrists atgriezās mājās, iztērējis visā ceļojumā par 23 rbļ. vairāk nekā bija paredzēts. Cik dienu ilga ceļojums, ja zināms, ka tūrists atgriezās par 1 dienu vēlāk, nekā bija paredzēts?

2.7. Dots $\angle MON = 60°$. $A \in OM$. Uz tā malas OM ņemts punkts A un vilkts $AB \perp ON$ ($B \in ON$). Savukārt no punkta B vilkts $BA_1 \perp OM$, kur $A_1 \perp OM$, u.t.t. Dots, ka AB = a. Aprēķināt $A_{15}B_{15}$ un $A_{20}A_{21}$.

2.8. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 7z = 0 \\ (x - y - 6)^2 - 4z = 0. \end{cases}$$

2.9. Atrast skaitļa $3^{1975} + 6^{1975} + 8^{1975}$ pēdējo ciparu.

2.10. Skat. 2.5. uzd.

9.klase

2.11. Konstruēt trijstūri, ja dota tā virsotne un apvilktās un ievilktās riņķa līniju centri.

2.12. Pierādīt, ka $4^n + 15n - 1$ dalās ar 9, ja n ir naturāls skaitlis.

2.13. Atrast funkcijas $y = \sqrt{x + 2\left(1 + \sqrt{x+1}\right)} + \sqrt{x + 2\left(1 - \sqrt{x+1}\right)}$ mazāko vērtību.

2.14. Atrast regulāra 10-stūra malas garumu, ja ap to apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir 1. Atbildi izteikt bez trigonometrisko funkciju palīdzības.

2.15. Plkst. 7.00 no punkta A uz punktu B pa straumi izbrauca kuteris un laiva. Kuteris, nonācis punktā B, pagriežas atpakaļ, sastop laivu ne vēlāk par 15.00, nonāk atkal punktā A ne ātrāk kā 23.00. Cikos kuteris nonāca punktā B, ja zināms, ka stāvošā ūdenī kutera ātrums divas reizes lielāks par laivas ātrumu? Visi laiki attiecas uz vienu un to pašu dienu. Laiva nonāk punktā B plkst. 17.00.

10. klase

2.16. Atrast a un b, ja zināms, ka polinoms $x^4 - 3x^3 + 2(a - b)x^2 - a^2x + b^2$ dalās ar trinomu $x^2 - 3x + 4$.

2.17. Pierādīt, ka $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dalās ar 133, ja n ir naturāls skaitlis.

2.18. Skat. 2.11. uzd.

2.19. Katrai trijstūra piramīdai ir 4 augstumi. Aprakstīt tās piramīdas, kurām nekādi 2 augstumi nekrustojas savā starpā.

2.20. Vienādsānu trapeces sānu mala vienāda ar mazāko pamatu. Tās garums ir a. Kādiem jābūt trapeces leņķiem, lai tās laukums būtu maksimālais?

11. klase

2.21. Atrisināt vienādojumu $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = 3/2 \sin 2x$.

2.22. Skat. 2.11. uzd.

2.23. Skat. 2.17. uzd.

2.24. Ja izliektam daudzskaldnim ir s skaldņu, n virsotņu un l šķautņu, tad ir spēkā sakarība s + n - l = 2. Izmantojot šo sakarību, atrast visu skaldņu visu leņķu summu izliektam daudzskaldnim, kuram ir n virsotnes.

2.25. Uz riņķa līnijas atrodas galīgs daudzums loku, kas kopumā pārklāj visu riņķa līniju. Pierādīt, ka no šiem lokiem var atrast dažus tādus, kas kopumā arī pārklāj visu riņķa līniju, bet kuru summa nepārsniedz 720°. Vai uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja sākumā bija dota bezgalīga loku sistēma? (Piezīme. Vienu punktu par loku neuzskata. katrs loks mazāks par 360°)

3. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1975./76. m.g.)

7. klase

3.1. Atrisināt vienādojumu $\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{0{,}75x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8+1{,}75\right]:0{,}05=235$.

3.2. Kvadrātā ABCD, kura mala ir 1 m gara, virsotne A savienota ar virsotni C un ar malas BC viduspunktu C_1. Tālāk nogriežņa AB viduspunkts A_1 savienots ar punktu C_1 un ar C_1B viduspunktu C_2. Tālāk A_1B viduspunkts A_2 savienots ar C_2 un ar C_2B viduspunktu C_3, utt. Aprēķināt trijstūru AA_1C_1, $A_1A_2C_2$ un $A_5A_6B_6$ laukumus.

3.3. Skaitlim 34 pa kreisi un pa labi pierakstīt pa ciparam tā, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 45. Atrast visus variantus.

3.4. Jānis un Andris pēc kārtas pieskaita nullei skaitli no 1 līdz 10. Uzvar tas, kas nosauc 100. Kas uzvar pareizi spēlējot?

3.5. Dots riņķis, kurā novilkti 2 rādiusi. Novilkt hordu, kuru šie rādiusi sadala 3 vienādās daļās.

8. klase

3.6. Četri pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi ir četrciparu skaitļa tūkstošu, simtu, desmitu un vienu cipari. Par cik palielināsies šis skaitlis, ja tā ciparus uzrakstīs apgrieztā kārtībā?

3.7. Kvadrātā ABCD, kura malas garums ir a, novilkta diagonāle AC un patvaļīga taisne, kas paralēla malai AB un krusto kvadrāta malas AD un BC punktos M un N, bet diagonāli AC -- punktā K. Aprēķināt trijstūru KDM un KNC laukumu summu, ja AM = x. Kādam jābūt x, lai šī summa būtu a) vislielākā, b) vismazākā, c) 1/4 no kvadrāta ABCD laukuma?

3.8. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

3.9. Pierādīt vienādību $\sqrt{\underbrace{111\cdots111}_{2n \text{ ciparu}} - \underbrace{222\cdots222}_{n \text{ ciparu}}} = \underbrace{333\cdots333}_{n \text{ ciparu}}$.

3.10. Konstruēt trijstūri ABC, ja dota taisne, uz kuras atrodas mala AC, un punkti M un N, kuros no virsotnēm A un C vilktie augstumi krusto pretējās trijstūra malas BC un AB.

9. klase

3.11. Ja vilciens brauc ar ātrumu 60 km/h, tad tā ekspluatācijas izdevumi stundas laikā ir vienādi ar ienākumiem stundas laikā. Palielinot ātrumu, izdevumi aug proporcionāli ātruma pieauguma kvadrātam, bat ienākumi -- proporcionāli ātruma pieaugumam. Braucot ar ātrumu 80 km/h, izdevumi atkal vienādi ar ienākumiem. Ar kādu ātrumu jābrauc vilcienam, lai tā ekspluatācija stundas laikā būtu visizdevīgākā?

3.12. Pierādīt nevienādību $\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}}_{n \text{ saknes}} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$,

3.13. Noskaidrot, cik atrisinājumu ir vienādojumu sistēmai atkarībā no parametra a vērtības ($a \neq 0$):

$$\begin{cases} 6x^2 - 2y = \left(1 + \dfrac{a}{|a|}\right) \left(x^4 - y - \dfrac{4}{5}\right) \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

3.14. Dots taisnstūris un patvaļīgs punkts M, kurš nesakrīt ar tā virsotnēm. Zināmi trīs attālumi a, b, c no punkta M līdz taisnstūra virsotnēm. Aprēķināt punkta M attālumu līdz ceturtajai taisnstūra virsotnei.

3.15. Divas riņķa līnijas ārēji pieskaras punktā P. Tām novilkta kopējā ārējā piekare MN. Caur punktiem M un P novilktā taisne krusto otru riņķa līniju punktā K. Dots, ka MN = a un MP = b. Aprēķināt PK.

10. klase

3.16. Atrisināt vienādojumu $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|}$.

3.17. Regulāras sešstūra piramīdas sānu skaldnes laukums ir S. Atrast tā šķēluma laukumu, kas vilkts caur piramīdas augstuma viduspunktu paralēli tās sānu skaldnei.

3.18. Atrast visus desmitciparu skaitļus, kuru pirmais cipars vienāds ar nuļļu skaitu šī skaitļa pierakstā, otrais cipars -- ar vieninieku skaitu tā pierakstā,..., desmitais cipars -- ar devītnieku skaitu tā pierakstā.

3.19. Kādām naturālām n vērtībām eksistē slēgta lauzta līnija ar n posmiem, kas katru savu posmu krusto tieši vienu reizi?

3.20. Vai eksistē tādi polinomi $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, $g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ un $h(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ ar veseliem koeficientiem un argumentiem x, y, z, a, b, g, ka visiem x, y, z, a, b, g, ir spēkā identitāte $(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = f^2 + g^2 + h^2$?

11. klase

3.21. Dots regulārs trijstūris, kura mala ir 100 m gara. Tā virsotnēs pulksteņa rādītāju kustības virzienā stāv cilvēki A, B, C. Vienā un tajā pašā laika momentā viņi sāk iet ar ātrumu 1 m/s, turklāt cilvēks A visu laiku iet tieši uz cilvēku B, cilvēks B -- tieši uz cilvēku C, bet cilvēks -- tieši uz cilvēku A. Kur viņi sastapsies? Cik garu ceļu katrs no viņiem būs nogājis līdz sastapšanās brīdim?

3.22. Vai uz riņķa līnijas var uzrakstīt skaitļus 1, 2, 3,..., 11, 12, 13 tā, lai katru divu blakus esošo skaitļu starpība būtu vai nu 3, vai 4, vai 5? (Pieļaujamas dažādas starpības.)

3.23. Ap šaurleņķa trijstūri apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir *R*. Ap trijstūri, ko veido tā augstumu pamati, apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir r. Pierādīt, ka R = 2 r.

3.24. Dots izliekts daudzskaldnis ar tukšu iekšpusi. Katra tā skaldne izstaro gaismu perpendikulāri sev daudzskaldņa iekšpusē. Daudzskaldnī lido muša. Vai var gadīties, ka muša atrod tādu punktu, kurš nebūtu apgaismots?

3.25. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

4. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 7.-11. klasei (1976./77. m.g.)

7. klase

4.1. Atrisināt nevienādību $\frac{(7-x)(x+5)}{x-3} > 0$.

4.2. Uz papīra lapas uzzīmēts šaurleņķa trijstūris. Vienai no malām atzīmēts viduspunkts. Kā, lietojot cirkuli un lineālu, konstruēt augstumu pret abām pārējām malām? Cirkuli drīkst lietot tikai vienu reizi.

4.3. Par kādu naturālu skaitli zināms tikai tas, ka tajā ir vairāk par vienu ciparu. Pierādīt, ka šī skaitļa ciparu reizinājums ir mazāks par pašu skaitli.

4.4. Jānim pieder akmeņu kolekcija. Zināms, ka neviens akmens nesver vairāk par 500 gramiem. Bez tam zināms, ka, jebkurā veidā sadalot kolekciju divās daļās, vismaz viena no šīm daļām nesver vairāk par 500 gramiem. Kāds ir lielākais iespējamais Jāņa kolekcijas kopējais svars?

4.5. Vai var uzzīmēt tādu slēgtu lauztu līniju, kas katru savu posmu krusto tieši 1 reizi un kurai ir a) 6 posmi, b) 1976 posmi, c) 1977 posmi?

8. klase

4.6. Skaitļi x, y, z veido ģeometrisko progresiju. Skaitļi z-1, y, x veido aritmētisko progresiju. Skaitļi x, y, 3x arī veido aritmētisku progresiju. Aprēķināt x, y, z.

4.7. Plaknē dots punkts P un taisne k. Atrast visu to taišņu t kopu, kurām piemīt īpašība: pagriežot taisni t ap punktu P par leņķi a un pagriešanas rezultātā iegūto taisni atspoguļojot simetriski attiecībā pret k, iegūst taisni, kas paralēla taisnei t.

4.8. Dots šaurs leņķis. Starp tā malām doti divi punkti. Izmantojot cirkuli un lineālu, konstruēt vienādsānu trijstūri, kura pamats atrodas uz vienas leņķa malas, virsotne pieder pie otras leņķa malas, bet katrs no diviem dotajiem punktiem pieder pie savas trijstūra sānu malas.

4.9. Plakne nokrāsota 3 dažādās krāsās tā, ka katrs punkts nokrāsots vienā un tikai vienā krāsā. Pierādīt, ka šajā plaknē var atrast tādu taisnleņķa trijstūri, kura visas virsotnes ir nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā.

4.10. Uzzīmēt Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmā to punktu kopu, kuru koordinātas apmierina sakarību

$$0 \le \left[1{,}5\left\{\frac{x-1}{3}\right\}\right] + 2\left[\frac{x+1}{3}\right] - y \le 3\left[1{,}5\left\{\frac{x-1}{3}\right\}\right] + 1.$$

9.klase

4.11. Cik ir tādu septiņciparu skaitļu, kas dalās ar 4 un kuru decimālajā pierakstā nav ciparu 4 un 8?

4.12. Skat. 4.8. uzd.

4.13. Divas riņķa līnijas pieskaras viena otrai ārēji, un abas iekšēji pieskaras trešajai. Visu trīs riņķa līniju centri atrodas uz vienas taisnes k. Novilkta vēl ceturtā riņķa līnija, kas pieskaras visām trim dotajām riņķa līnijām. Tās centrs atrodas no taisnes k attālumā a. Atrast šīs riņķa līnijas rādiusu.

4.14. Ar kādām parametra a vērtībām nevienādību sistēmas

$$\begin{cases} x^2 + 6x + \alpha + 7 \le 0 \\ x^2 + 4x + 7 \le 4\alpha \end{cases}$$

atrisinājumi veido uz skaitļu ass nogriezni, kas nav īsāks par 1?

4.15. Šaha galdiņa rūtiņās no kreisās uz labo pusi, no augšas uz apakšu ierakstīti skaitļi no 1 līdz 64. Pēc tam dažās rūtiņās skaitļiem priekšā novietoja ‘‘-’’ zīmi tā, ka katrā horizontālē un katrā vertikālē bija 4 pozitīvi un 4 negatīvi skaitļi. Pierādīt, ka tagad visu ierakstīto skaitļu summa ir 0.

10. klase

4.16. Dotas trīs riņķa līnijas, kas visas krustojas vienā punktā A. Otrās un trešās riņķa līnijas centri atrodas uz pirmās riņķa līnijas. Pierādīt, ka otrās riņķa līnijas centrs, otrās un trešās riņķa līnijas krustpunkts, kas nav A, un pirmās un trešās riņķa līnijas krustpunkts, kas nav A, atrodas uz vienas taisnes.

4.17. Atrisināt rēbusu sistēmu (zīm.), ja zināms, ka vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, bet dažādiem līdzskaņiem -- dažādi cipari.

$I+P+K=EA$

$$\begin{array}{r} K\ O\ P\ A \\ -\ T\ E\ L\ P \\ \hline T\ P\ K\ S \end{array} \qquad \begin{array}{r} P\ I\ L\ N\ A \\ +\quad I\ L\ N\ A \\ \quad K\ O\ P\ A \\ \hline \quad\quad P\ A \\ \hline T\ E\ L\ P\ A \end{array}$$

4.18. Vai funkcijas $f=\dfrac{\sin x}{1+\sqrt{2}\ \sin^2 x}$ un $g=\dfrac{\sin x}{1+\sin^2\left(\sqrt{2}\ x\right)}$ ir periodiskas? Apgalvojumus pamatot.

4.19. Skat. 4.9. uzdevumu.

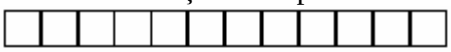
4.20. Kāda valsts izveidota okeānā uz 1977 salām. No dažām salām uz dažām citām iet satiksmes kuģi; katrs pārbrauciens ilgst vienu dienu.Turklāt no katras salas var aizbraukt uz katru citu salu (varbūt vairākās dienās). Valstī dzīvo detektīvs un laupītājs, un katrs no viņiem vienmēr zina, kur atrodas otrs. Pierādīt, ka detektīvs var noķert laupītāju, ja detektīvs brauc katru dienu, bet laupītājs svētdienās atpūšas.

11. klase

4.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1 \\ \cos x+\cos y=\sqrt{3}. \end{cases}$$

4.22. Dota rindiņa, kas sastāv no 12 rūtiņām (2. zīm.). Divi spēlētāji pēc kārtas ieraksta pa ciparam jebkurā vienā vēl neaizņemtā rūtiņā. Tas, kas izdara gājienus kā otrais, grib, lai iegūtais divpadsmitciparu skaitlis dalītos ar 77. Vai viņš to var panākt?



2. zīm.

4.23. Trijstūra piramīdā divas šķērsas šautnes ir savstarpēji perpendikulāras. To garumi ir a un b , bet to kopējā perpendikulāra garums ir c. Piramīdā ievilkts kubs tā, ka uz katras piramīdas skaldnes atrodas pa divām kuba virsotnēm. Aprēķināt kuba šķautnes garumu.

4.24. Dota koka lode, cirkulis un lineāls. Kā konstruēt uz papīra nogriezni, kura garums ir vienāds ar lodes rādiusa garumu? Uz lodes virsmas drīkst vilkt riņķus un mērīt ar cirkuli, bet ar lineālu tur nedrīkst darīt neko.

4.25. Dots, ka a, b un c ir nenegatīvi skaitļi un a + b + c = 1. Pierādīt, ka $a^2b+b^2c+c^2a\le\dfrac{4}{27}$.

5. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-11. klasei (1977./78. m.g.)

5. klase

5.1. Kādus ciparus jāieraksta skaitlī 42*7* zvaigznīšu vietā, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 15? Atrodiet visas atbildes/

5.2. Noskaidrojiet, vai taisnstūri ar izmēriem 7 cm × 9 cm var sagriezt 3 tādās daļās, no kurām var salikt kvadrātu, kura malas ir veselu skaitu centimetru garas? Saliekot kvadrātu, daļas nedrīkst pārklāties.

5.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 4 × 4 rūtiņas. Ierakstiet tā rūtiņās skaitļus no 1 līdz 16 tā, lai katrā horizontālajā rindiņā ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati. Summas skaitļiem, kas ierakstīti vertikālajās rindiņās, var būt dažādas. Katru skaitli drīkst ierakstīt tikai vienā rūtiņā.
5.4. Plkst. 12.00 gliemezis sāk rāpties stabā, kura augstums ir 3 m. Gliemezis rāpjas ar nemainīgu ātrumu -- 10 cm min, vispirms viņš 3 minūtes rāpjas uz augšu, pēc tam 2 minūtes uz leju, tad atkal 3 minūtes uz augšu un 2 minūtes uz leju, utt. Cikos gliemezis sasniegs staba augšējo galu?

5.5. Cik simetrijas asu ir kubam? Norādiet tās visas! (Pierādījumi nav vajadzīgi.)

6. klase

5.6. Atrisiniet vienādojumu $\frac{2x+1}{3} = \frac{0{,}5x+2}{5}$.

5.7. Televīzijas torņa augstums ir 200 m, tas sver 20 000 tonnas. Cik sver šī torņa precīzs modelis, kas izgatavots no tā paša materiāla un kura augstums ir 20 cm?

5.8. Plaknē doti punkti A,B,C,D,E. Dots, ka |AB|=1 cm, |BC|=3 cm |CD|=8 cm, |DE|=2 cm, |AE|=14 cm. Atrast nogriežņa BD garumu.

5.9. Konstruēt vienādsānu trijstūri, ja dots tā pamata garums un augstuma pret sānu malu garums.

5.10. Jānim ir 7 kartiņas. Uz katras no tām viņš uzrakstījis vienu skaitli -- vai nu ‘‘+1’’, vai ‘‘-1’’. Ar vienu jautājumu Andris var par jebkurām trim uzzināt uz tām uzrakstīto skaitļu reizinājumu (bet pašus skaitļus Jānis viņam nesaka).
Pierādīt, ka ar 2 jautājumiem Andris nevar uzzināt visu 7 uz kartiņām uzrakstīto skaitļu reizinājumu.
Notiekt, kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Andris var uzzināt visu 7 uz kartiņām uzrakstīto skaitļu reizinājumu.

7. klase

5.11. Sastādīt nevienādību, kuras atrisinājumu kopa ir

$(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$.

5.12. Atrast divus pēc kārtas sekojošus veselus skaitļus, starp kuriem atrodas izteiksmes $\sqrt{42}+\sqrt{43}$ vērtība.

5.13. Pierādiet, ka no 10 pēc kārtas ņemtiem veseliem pozitīviem skaitļiem ne vairāk kā 5 ir pirmskaitļi. Vai 5 no šādiem skaitļiem var būt pirmskaitļi?

5.14. Izliektu 10-stūri pilnīgi jāpārklāj ar trijstūriem, kas neiziet ārpus 10-stūra. Paši trijstūri savā starpā var pārklāties. Noteikt
a) kā to izdarīt ar 8 trijstūru palīdzību,
b) kāds ir mazākais trijstūru skaits, ar kuru to var izdarīt?

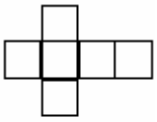
5.15. Dota taisne l un uz tās punkts M. Dots tikai lineāls, kam abas malas paralēlas, un zīmulis. Kā konstruēt perpendikulu pret taisni l punktā M?

8. klase

5.16. Virkni (a_k) definē ar formulu $a_k = k^2 + 2k + 3$, bet virkni (b_k) -- ar formulu $b_k = a_{k+1} - a_k$. Pierādīt, ka (b_k) ir aritmētiskā progresija un atrast tās diferenci.

5.17. Trapecei, kurā ievilkta riņķa līnija ar rādiusu *r*, sānu malas ar vienu no pamatiem veido leņķus a un b. Aprēķināt trapeces laukumu.

5.18. 3. zīmējumā parādīts viens no iespējamiem kuba virsmas izklājumiem. Uzzīmēt citus iespējamos kuba virsmas izklājumus, kas sastāv no 6 kvadrātiņiem.



3. zīm.

5.19. Skaitli sauc par līdzsvarotu, ja kāds tā sākuma fragments decimālajā pierakstā sakrīt ar kādu beigu fragmentu decimālajā pierakstā. Piemēram skaitļi 20320, 1971, 46146 ir līdzsvaroti. Pierādīt, ka eksistē skaitlis, kas kļūst līdzsvarots, ja tam labajā pusē pieraksta
a) jebkuru no cipariem 1 vai 2,
b) jebkuru no cipariem 1, 2, 3, 4, 5,
c) jebkuru ciparu.

5.20. Dots, ka $a > 0$, $b > 0$, $a^3 + b^3 = a - b$. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 < 1$.

9. klase

5.21. f(x), g(x), h(x), v(x) ir funkcijas, kurām eksistē atvasinājums. Ar simbolu $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ sapratīsim izteiksmi ad - bc. Pierādīt, ka

$$\begin{vmatrix} f(x) & h(x) \\ g(x) & v(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'(x) & h'(x) \\ g(x) & v(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & h(x) \\ g'(x) & v'(x) \end{vmatrix}.$$

5.22. Pierādīt, ka jebkuru trijstūra piramīdu var paralēli projicēt plaknē tā, lai projekcijā izveidotos paralelograms.

5.23. Attēlot koordinātu plaknē Oxy to punktu (x, y) kopu, kas apmierina sakarības $y > x^2 - 2$ un $|x + y| < 1$.

5.24. Virkni (a_n) veido šādi: a_1 izvēlas patvaļīgi, bet katram veselam pozitīvam n $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n$. Noteikt,
a) vai var tā izvēlēties a_1, lai virknes (a_n) robeža būtu skaitlis 3,
b) kādi skaitļi var būt virknes (a_n) robeža?

5.25. Telpā doti 4 punkti, kas neatrodas vienā plaknē. Cik ir tādu paralēlskaldņu, kuriem šie 4 punkti ir virsotnes?

10. klase

5.26. Atrisināt vienādojumu 1 + sin x + cos x = 0.

5.27. Atrast funkcijas y = x×cos x atvasinājumu,
a) izmantojot atvasināšanas pamatformulas un teorēmu par reizinājuma atvasinājumu,
b) izmantojot tikai atvasinājuma definīciju.

5.28. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y ir spēkā nevienādība
$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geq 4.$
Ar kādām x un y vērtībām pastāv vienādība?

5.29. Ar a_n apzīmējam skaitlim $\sqrt{2n}$ tuvāko veselo skaitli (n -- vesels pozitīvs skaitlis). Piemēram, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 3$. Atrast
a) virknes (a_n) pirmos desmit locekļus,
b) noskaidrot cik reizes virknē (a_n) atkārtojas skaitlis 1978.

5.30. Trijstūra piramīdas ABCD katrai virsotnei atrodam 3 punktus, kas tai simetriski attiecībā pret pārējām piramīdas virsotnēm. Aplūkojam izliektu daudzskaldni ar virsotnēm iegūtajos 12 punktos. Piramīdas tilpums ir V. Aprēķināt minētā daudzskaldņa tilpumu.

11. klase

5.31. Atrisināt nevienādību $\sin 2x > \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

5.32. Dotas k aritmētiskas progresijas, k³ 2. Katram m (m = 1, 2,..., k) un katram veselam pozitīvam n m-tās progresijas pirmo n locekļu summa ir $m \times n^2$.
a) Atrast m-tās progresijas diferenci (m = 1, 2,..., k).
b) Noskaidrot, vai visu k progresiju diferenču summa var būt vesela skaitļa kvadrāts.

5.33. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$\left(\log_7 16807 - 1\right)^{x^5+y^5+z^5+u^5+1} = \left(\frac{\lg 225}{\lg 3 + \lg 225 \cdot \log_{225} 5}\right)^{10xyzu}.$$

5.34. Sadalīt plaknes punktus divās kopās tā, lai katrs šīs plaknes nogrieznis saturētu punktus gan no vienas kopas, gan no otras.

5.20. Planētu sauc par apgaismotu, ja katrs tās virsmas punkts ir apgaismots. Noteikt
a) kāds ir mazākais punktveida sauļu skaits, kas var apgaismot vienu lodveida planētu,
b) kāds ir mazākais punktveida sauļu skaits, kas var apgaismot n lodveida planētas?
Gan saules, gan planētas var novietot visizdevīgākajā stāvoklī, lai sauļu skaitu varētu minimizēt.

6. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1978./79. m.g.)

4. klase

6.1. Atrast lielāko veselo četrzīmju skaitli, kas dalās ar 6 un dalījumā dod trīszīmju skaitli.

6.2. Gar taisnu ceļu vienādos attālumos cits no cita aug koki. Attālums no 1. līdz 10. kokam ir 10 metru. Cik liels ir attālums no 1. līdz 100. kokam?

6.3. Pašapkalpošanās veikalā Jānis no stenda paņēma krāsu komplektu par 1 rbl. 16 kap., papīru par 40 kap., kā arī 6 vienādus zīmuļus, kuru cena mums nav zināma (katrs zīmulis maksā veselu skaitu kapeiku). Kasieris pieprasīja no zēna 3 rbļ. 94 kap. Noskaidrojiet, vai viņš nav kļūdījies.

6.4. Vai kvadrātu, kas sastāv no 4x4 rūtiņām, var sagriezt gabalos tā, lai izveidotos viena figūra un piecas figūras ?

6.5. Atzīmēt plaknē sešus punktus tā, lai būtu iespējams novilkt 12 nogriežņus, kuru galapunkti ir atzīmētajos punktos un kuriem nav citu kopīgu punktu kā galapunkti.

5. klase

6.6. Atrisināt vienādojumu

$$4-(3-(2-3(2-x)))=2x\,.$$

6.7. Noskaidrot, kuri no skaitļiem 42171, 68975, 683, 1010101 ir pirmskaitļi, kuri nav.

6.8. Koordinātu plaknē atzīmēti punkti A(0;0), B(0;1), C(0;2), D(1;0), E(1;1), F(1;2), G(2;0), H(2;1), I(2;2). Katram nogrieznim, kas savieno divus no šiem punktiem, konstruēts viduspunkts. Cik dažādu viduspunktu ir konstruēti?

6.9. Attēlot koordinātu plaknē punktu kopu M, kas sastāv no 20 punktiem un apmierina šādas īpašības:
a) $M \cup M_1$ sastāv no 24 punktiem; šeit M_1 ir punktu kopa, kas iegūta, paralēli pārnesot kopu M par 1 vienību pa labi;
b) $M \cup M_2$ sastāv no 25 punktiem; šeit M_2 ir punktu kopa, kas iegūta, paralēli pārnesot kopu M par 1 vienību uz augšu.

6.10. Futbolkomandā ir 11 spēlētāju. Trijiem no tiem ir uzvārds Alksnis, četriem Bērziņš, diviem Dimants un diviem Egle. Četriem ir vārds Andris, trim Bruno, trim Didzis un vienam Ervīns. Vārtsargu sauc Didzis Egle. Komandā nav divu spēlētāju, kam sakristu gan vārdi, gan uzvārdi. Kā sauc pārējos spēlētājus?

6. klase

6.11. Skolā zilacainu skolēnu skaits attiecas pret brūnacainu skolēnu skaitu kā 4:1, bet zilacainu skolēnu skaits attiecas pret melnacainu skolēnu skaitu kā 8:1. Skolēnu ar citu acu krāsu skolā nav. Vai iespējams, ka skolā ir 700 skolēnu?

6.12. Kvadrātā, kura izmēri ir 4×4 rūtiņas, iekrāsot 10 rūtiņas tā, lai iekrāsotajai figūrai būtu simetrijas centrs. Vai iespējams šajā kvadrātā iekrāsot 11 rūtiņas tā, lai iekrāsotajai figūrai būtu simetrijas centrs?

6.13. Dota taisne t un punkti A un B dažādās pusēs no tās. Izmantojot cirkuli un lineālu, konstruēt uz taisnes t tādu punktu C, lai stari CA un CB veidotu vienādus leņķus ar taisni t.

6.14. Ja dota x vērtība, tad x^5 vērtību var aprēķināt, izmantojot četras reizināšanas: $x \times x = x^2$, $x^2 \times x = x^3$, $x^3 \times x = x^4$, $x^4 \times x = x^5$. Tomēr to pašu var izdarīt, izmantojot tikai trīs reizināšanas: $x \times x = x^2$, $x^2 \times x^2 = x^4$, $x^4 \times x = x^5$. Pacenšaties atrast pēc iespējas mazāku reizināšanu skaitu, ar kuru palīdzību var aprēķināt x^{47}, ja dota x vērtība. (Aizliegts lietot dalīšanas un kāpināšanas operācijas.)

6.15. Uzrakstīt skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 rindā tādā kārtībā, lai nekādu divu uzrakstīto skaitļu a un b summas puse nebūtu vienāda ne ar vienu skaitli, kas rindā uzrakstīts starp a un b.

7. klase

6.16. Atrisināt nevienādību $\frac{x-1}{x-3} \geq 0$.

6.17. Četrstūra diagonāļu garumi ir 8 un 10 cm. Kāds ir lielākais iespējamais šī četrstūra laukums?

6.18. a) Uz divām trijstūra malām kā uz diametriem konstruētas riņķa līnijas. Pierādīt, ka nav neviena trijstūra punkta, kas atrastos ārpus abām riņķa līnijām;
b) uz katras četrstūra malas kā uz diametra konstruēta riņķa līnija. Pierādīt, ka nav neviena četrstūra punkta, kas atrastos ārpus visām četrām riņķa līnijām;
c) vai līdzīgu apgalvojumu var pierādīt par jebkuru piecstūri?

6.19. Pierādīt identitāti:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ \cdots\ +\frac{20}{x^2-100}=$$
$$11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\ \cdots\ +\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right)$$

6.20. No vesela pozitīva četrciparu skaitļa atņēma tā ciparu summu, no rezultāta atkal atņēma šī skaitļa ciparu summu, no iegūtā rezultāta -- tāpat, utt. Pierādīt, ka pēc 1000 atņemšanām iegūstam 0.

8. klase

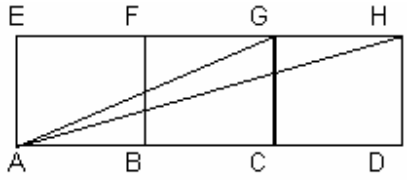
6.21. Ģeometriskās progresijas trešais loceklis ir 24, septītais loceklis ir 384, bet ceturtā un piektā locekļa summa ir 48. Aprēķināt progresijas astoto locekli.

6.22. Attēlot koordinātu plaknē Oxy to punktu (x, y) kopu, kas apmierina nevienādību $(x + 1 - y)(x + 1 + y)(x - 1 + y) > 0$.

6.23. Funkcijas $y = x^2$ grafiku krusto divas paralēlas taisnes. Pirmā taisne krusto parabolu punktos M un N, otrā -- punktos K un L. Pierādīt, ka taisne, kas iet caur nogriežņu MN un KL viduspunktiem, ir perpendikulāra Ox asij.

6.24. Pierādīt, ka $31^{11} < 17^{14}$.

6.25. Dots, ka AEFB, BFGC, CGHD ir kvadrāti (skat. 4. zīm.). Pierādīt, ka
$\angle AGE + \angle AHE = 45°$.



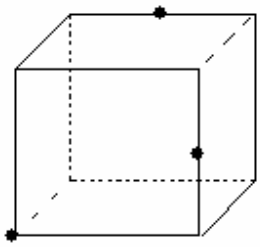
4. zīm.

9. klase

6.26. Skaitļu virknē (x_n) pirmais loceklis $x_1 = \frac{1}{1979}$, bet katru nākamo locekli aprēķina pēc formulas $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, ja $n \geq 1$. Pierādīt, ka

1) (x_n) ir dilstoša virkne;
2) visi tās locekļi ir pozitīvi;
3) eksistē $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; aprēķināt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6.27. Konstruēt kuba šķēlumu ar plakni, kas iet caur trim dotajiem punktiem uz kuba šķautnēm (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

6.28. Apskatām taisni t, kas pieskaras funkcijas $y = \frac{1}{x}$ grafikam punktā *M* (*M* atrodas I kvadrantā). Pieņemsim, ka t krusto koordinātu asis punktos A un B. Pierādīt, ka MA = MB.

6.29. Kā zināms, lai noskaidrotu, vai skaitlis N dalās ar 3 vai ar 9, nav svarīga skaitļa N ciparu kārtība, bet tikai šo ciparu summa. Vai ir vēl kādi citi naturāli skaitļi bez 3 un 9, dalīšanās ar kuriem nav atkarīga no dalāmā ciparu kārtības? Kādi tie ir?

6.30. Apskatām rūtiņu lapu. Rūtiņas malas garums ir 1. Atrast minimālo perimetru izliektam 32-stūrim, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs.

10. klase

6.31. Pierādīt identitāti $\cos^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x + \cos^2 4x = -2\sin x \sin 2x \cos 5x$.

6.32. Kvadrāta malas garums ir 1. Konstruēti četri riņķi ar centriem kvadrāta virsotnēs un rādiusu garumiem 1. Aprēķināt šo riņķu kopējās daļas laukumu.

6.33. Dots, ka cos x = y un cos y = x. Pierādīt, ka
1) x > 0 un y > 0;
2) x = y.

6.34. Viena trijstūra piramīda atrodas otras iekšpusē. Vai iekšējās piramīdas šķautņu garumu summa vienmēr ir mazāka nekā ārējās piramīdas šķautņu garumu summa?

6.35. Kādā valstī ir vairākas pilsētas. Katra pilsēta savienota ar dažām citām ar abpusējiem aviosakariem (ja ir reiss no A uz B, tad ir arī reiss no B uz A). Turklāt 1) no katras pilsētas bez pārsēšanās var aizlidot ne vairāk kā uz trim citām pilsētām;
2) no katras pilsētas uz katru var aizlidot vai nu bez pārsēšanās, vai izdarot vienu pārsēšanos.
Pierādīt, ka šajā valstī nav vairāk kā 10 pilsētu. Vai var būt, ka tajā ir 10 pilsētas?

11. klase

6.36. Atrisināt vienādojumu $\sin^4 x + \sin^4 2x + \sin^4 3x = \cos^4 x + \cos^4 2x + \cos^4 3x$.

6.37. Atrisināt vienādojumu $x^2 = 2^x$, ja $x > 0$. Cik tam ir atrisinājumu, ja $x \leq 0$?

6.38. Dota rūtiņu papīra lapa, kuras rūtiņas malas garums ir 1. Aplūkojam trijstūri, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs.

1) Vai šī trijstūra laukums var būt $4\frac{1}{3}$?

2) Kāds ir mazākais iespējamais šāda trijstūra laukums?

6.39. Naturāliem skaitļiem a_1, a_2,... a_n pa pāriem nav kopīgu dalītāju, kas lielāki nekā 1; visi skaitļi a_1, a_2,... a_n ir lielāki par 1 un mazāki par $(2n - 1)^2$. Pierādīt, ka vismaz viens no tiem ir pirmskaitlis.

6.40. Trijstūra piramīdas iekšpusē ņemts punkts O. Caur O paralēli katrai piramīdas šķautnei vilkta taisne. Aplūkosim šo taišņu nogriežņus, kas atrodas piramīdas iekšpusē un katra šāda nogriežņa garuma attiecību pret tam paralēlās šķautnes garumu. Pierādīt, ka visu sešu šādu attiecību summa ir 3.

7. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1979./80. m.g.)

4. klase

7.1. Ir uzrakstīts sešciparu skaitlis, kura pēdējie trīs cipari ir 261. Zināms, ka tas dalās ar 29;
a) kāds ir dalījuma pēdējais cipars?

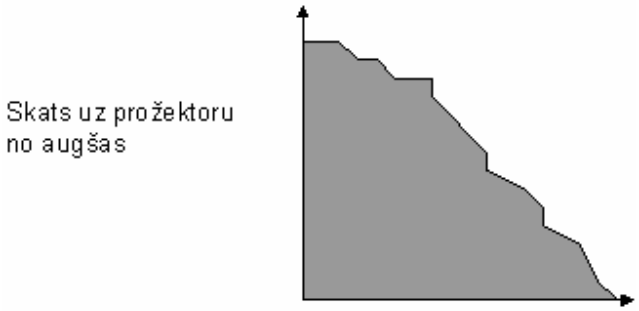
b) atrodiet kaut vienu tādu sešciparu skaitli, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

7.2. Taisnstūra paralēlskaldnis ar izmēriem 5 cm × 6 cm × 8 cm salikts no baltiem kubiņiem, kuru izmēri ir 1 cm × 1 cm × 1 cm. Paralēlskaldņa ārpuse nokrāsota melnā krāsā. Cik ir tādu kubiņu, kuriem kaut viena skaldne nokrāsota melna?

7.3. Starp ceļotāju kluba biedriem ir 50 tādi, kas zina angļu valodu, 50 tādi, kas zina vācu valodu, un 50 tādi, kas zina spāņu valodu. No šiem cilvēkiem ir 18 tādi, kas zina tikai vācu valodu, un 14 tādi, kas zina tikai spāņu valodu, 12 biedri zina vācu un spāņu valodas, bet nezina angļu valodu; 2 biedri zina visas valodas. Cik klubā ir biedru, kas zina tikai angļu valodu?

7.4. Trīsciparu skaitlī pārlika ciparus citā kārtībā un iegūto skaitli saskaitīja ar sākotnējo. Vai varēja gadīties, ka rezultātā iznāca 999? Vai izdarot tādu pašu operāciju ar četrciparu skaitli, varēja gadīties, ka rezultāts iznāca 9999?

7.5. Lielu lauku ceļu šķērso taisns ceļš. Laukā ieraktas četras vertikālas asis, katrā pusē ceļam divas, un uz katras ass uzmontēts prožektors, kas apgaismo taisnu leņķi (skat. 6. zīm.). Pierādīt, ka neatkarīgi no tā, kurās vietās ieraktas asis, prožektorus var pagriezt tā, lai viss lauks būtu apgaismots. Pieņemsim, ka nekādas ēnas nerodas.

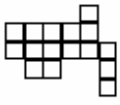


6. zīm.

5. klase

7.6. Cik ir tādu veselu skaitļu, kuri ir lielāki par 9123135678 un reizē mazāki par 11564122251 un katram no kuriem tā pēdējie 7 cipari ir savā starpā vienādi?

7.7. Kā sagriezt 7. zīmējumā attēloto figūru 3 daļās, no kurām var salikt kvadrātu? Saliekot daļas nedrīkst pārklāties.



7. zīm.

7.8. Piecas pilsētas katru ar katru savieno ceļš. No viena ceļa uz otru var nogriezties tikai pilsētās. Autoinspekcija grib, lai pa katru ceļu kustība notiktu tikai vienā virzienā. Vai kustības virzienus

uz ceļiem var izvēlēties tā, lai no katras pilsētas uz katru varētu aizbraukt, vai nu pa vienu, vai pa diviem ceļiem?

7.9. Dotas 2 sarkanas, 2 zilas, 2 baltas un 2 melnas lodītes. Divi spēlētāji pēc kārtas novieto pa vienai lodītei kuba virsotnēs. Turklāt tas spēlētājs, kas izdara gājienus otrais, grib, lai nekādas divas vienā krāsā nokrāsotas lodītes neatrastos uz vienas šķautnes. Vai viņš to noteikti var panākt (pat ja pirmais spēlētājs cenšas viņam traucēt)?

7.10. Uz galda atrodas 101 pēc ārējā izskata pilnīgi vienādas monētas. No tām 51 ir īstas, bet 50 -- viltotas. Visu īsto monētu svars ir vienāds (nav zināms, kāds), bet dažas viltotās monētas ir par 1 g smagākas nekā īstās, citas -- par 1 g vieglākas nekā īstās; nav zināms, cik viltoto monētu ir smagākas un cik -- vieglākas par īstajām. Jāņa rīcībā ir svari ar diviem svaru kausiem un ciparnīcu, kas parāda uz kausiem uzlikto smagumu starpību gramos. Andris norāda Jānim uz vienu monētu un lūdz noskaidrot, vai tā ir īsta vai viltota. Kā Jānis to var izdarīt, veicot tikai vienu svēršanu? (Ja uz kāda svaru kausa kaut kas tiek mainīts, tā jau skaitās cita svēršana.)

6. klase

7.11. Sastādīt vienādojumu, kura sakņu kopa ir {0; 1; 2}.

7.12. Uzrādīt kopu, kas sastāv no četriem dažādiem veseliem skaitļiem un kurai piemīt īpašība : lai cik un lai kurus šīs kopas skaitļus izvēlētos, izvēlēto skaitļu summa dalīsies ar to skaitu bez atlikuma. Pamatot to, ka atrastajai kopai piemīt prasītā īpašība. Vai var atrast šādu kopu, kas sastāv tikai no nepāra skaitļiem?

7.13. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai kvadrātā, kas sastāv no 8x8 rūtiņām, pie tam nedrīkst iekrāsot rūtiņu, kurai ir kopīga mala ar kādu jau iekrāsotu. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš uzvar -- vai tas, kas izdara pirmo gājienu, vai tas, kas izdara otro gājienu, ja abi spēlētāji izvēlas sev visizdevīgākās stratēģijas? Atbildiet uz šo jautājumu arī, ja kvadrāta izmēri ir 9x9 rūtiņas.

7.14. Izteiksmē x^2+ * x + * divi spēlētāji pēc kārtas zvaigznīšu vietā ieraksta pa veselam skaitlim (tātad katrs ieraksta vienu skaitli). Pierādīt, ka otrais var panākt, lai iegūtā izteiksme sadalītos reizinātājos (x+a)(x+b), kur a un b -- veseli skaitļi.

7.15. Kāds ir lielākais iespējamais daļu skaits, kādā plakni var sadalīt 10 taisnes?

7. klase

7.16. Punkti A, B, C un D atrodas vienā plaknē. Nogriežņu AB, BC un CD vidusperpendikuli krustojas vienā punktā O. Pierādīt, ka arī nogriežņa AD vidusperpendikuls iet caur punktu O.

7.17. Punkts E atrodas uz trapeces ABCD pamata AD. Dots, ka trijstūru ABE, BEC un CED perimetri ir savā starpā vienādi. Pierādīt, ka E ir malas AD viduspunkts.

7.18. Izmantojot tikai ciparus 1, 2, 3, 4 un 5, Uzrakstīt 21-ciparu skaitli, kura pierakstā divi vienādi cipari nekur nestāv blakus un visi blakus stāvošo ciparu pāri ir dažādi.
Vai var uzrakstīt garāku skaitli ar šādām īpašībām, izmantojot tikai ciparus no 1 līdz 5?

7.19. Atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka

$$90 < a + b < 100 \text{ un } 0{,}9 < a / b < 0{,}91.$$

Jāatrod visas atbildes un jāpierāda, ka citu bez atrastajām nav.

7.20. Dots, ka skaitļu kopā S starp citiem tās elementiem ietilpst visi veselie skaitļi un skaitlis $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Bez tam dots, ka, ja kopai S pieder kaut kādi skaitļi x un y, tad tai pieder arī skaitļi xy un x + y.

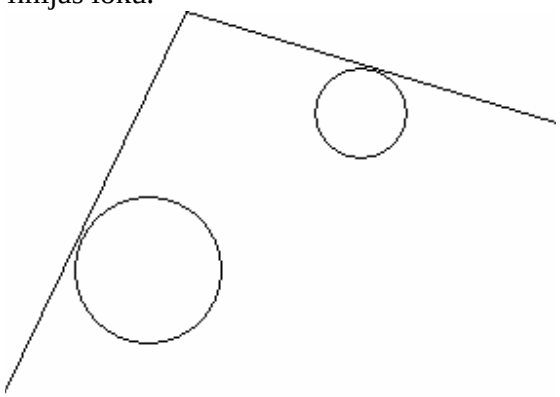
Pierādīt, ka skaitlis $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ pieder kopai S.

8. klase

7.21. Cik ir veselu pozitīvu trīsciparu skaitļu, kas sastādīti no ciparieem 1, 2 un 3 un kuriem nekādi divi blakus stāvošie cipari neatšķiras vairāk kā par 1? Cik ir tādu sešciparu skaitļu?

7.22. ABCDEF ir regulārs sešstūris, M -- malas BC viduspunkts, N - malas CD viduspunkts, O -- nogriežņa AN un FM krustpunkts. Pierādīt, ka trijstūra AOF un četrstūra MCNO laukumi ir vienādi.

7.23. Plaknē dotas divas riņķa līnijas. Leņķis, kas izgatavots no caurspīdīga materiāla, slīd tā, ka tā malas katra pieskaras savai riņķa līnijai (8. zīm.). Pierādīt, ka eksistē tāds leņķa punkts, kas šajā kustībā apraksta riņķa līnijas loku.



8. zīm.

7.24. Dots, ka $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dots arī, ka vienādojumam f(x) = x nav atrisinājuma. Pierādīt, ka arī vienādojumam f(f(x)) = x nav atrisinājuma.

7.25. Veselam pozitīvam skaitlim n ir 22 cipari. Tā pirmie 10 cipari ir vienīnieki, nākošie 11 cipari ir divnieki. Bez tam zināms, ka n ir kāda vesela skaitļa kvadrāts. Aprēķināt n pēdējo ciparu un noskaidrot, kāda skaitļa kvadrāts tas ir.

9. klase

7.26. Kā izteikt skaitli 99 kā a) divu; b) triju veselu pozitīvu saskaitāmo summu tā, lai to reizinājums būtu vislielākais iespējamais? Atbildi pamatot.

7.27. Izvēloties uz kuba šķautnes virzienu, iegūstam vektoru. Vai var izvēlēties virzienu uz visām 12 kuba šķautnēm tā, la visu 12 iegūto vektoru summa būtu nulles vektors? Vai virzienus var izvēlēties tā, lai visu vektoru summa būtu nulles vektors, bet nevienā skaldnē esošo 4 vektoru summa nebūtu nulles vektors? (Katra vektora garums vienāds ar kuba šķautnes garumu.)

7.28. Skaitļu virknē (a_n) pirmais loceklis $a_1 > 0$, bet visiem naturāliem n pastāv vienādība $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$.

1. Aprēķināt $\lim_{n\to\infty} a_n$, ja atļauts izmantot faktu, ka šī robeža eksistē.
2. Pierādīt, ka $\lim_{n\to\infty} a_n$ eksistē.
3. Pierādīt, ka virknē ir vismaz viens iracionāls loceklis.

7.29. Dots, ka $0 < a < b < c < d$. Pierādīt, ka $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} > \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$.

7.30. Tabula sastāv no n x n rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds burts. Tabulas katras divas rindiņas atšķiras viena no otras vismaz vienā vietā.
Pierādīt, ka tabulā ir tāda kolonna, kuru izsvītrojot, atlikušajā tabulas daļā joprojām katras divas rindiņas atšķiras viena no otras vismaz vienā vietā.

10. klase

7.31. Divi spēlētāji pēc kārtas ieraksta izteiksmē $x^3 + *x^2 + *x + *$ zvaigznīšu vietā veselus skaitļus. (Tātad pirmais spēlētājs ieraksta divus skaitļus, otrais -- vienu.) Pierādīt, ka pirmais spēlētājs var panākt, lai izteiksme sadalītos reizinātājos $(x + a)(x + b)(x + c)$ ar veseliem skaitļiem a, b un c.

7.32. Pierādīt, ka visiem x pastāv nevienādība $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$.

7.33. Izvēloties uz trijstūra piramīdas šķautnes virzienu, iegūstam vektoru. Vai ir tāda piramīda, uz kuras šķautnēm var izvēlēties virzienus tā, lai visu 6 iegūto vektoru summa būtu nulles vektors? (Katra vektora garums vienāds ar atbilstošās šķautnes garumu.)

7.34. Andris ierakstījis katrā šaha galdiņa rūtiņā naturālu skaitli no 1 līdz 64 (katrā citu). Jānis ar vienu jautājumu par jebkuru rūtiņu kopu var uzzināt to skaitļu kopu, kas ierakstīti norādītajās rūtiņās. (Bet ne to, kurš skaitlis kurā rūtiņā ierakstīts.) Kāds vismazākais jautājumu skaits Jānim jāizmanto, lai uzzinātu par visiem skaitļiem no 1 līdz 64, kurā rūtiņā kurš skaitlis ierakstīts?

7.35. Dots, ka $0 < a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n < 90°$ un $(1 + \cos a_1) + (1 + \cos a_2) + \ldots + (1 + \cos a_n)$ -- nepāra skaitlis. Pierādīt, ka $\sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n \geq 1$.

11. klase

7.36. Uzrakstīt nevienādību, kuras atrisinājumu kopa ir
$(-\infty ; -3] \cup \{2; 4\} \cup (6; 8) \cup [10; +\infty)$.

7.37. Atrisināt vienādojumu $\sin x + \sin 1 = \sin (x + 1)$.

7.38. Divplakņu kakta skaldnes ir P un Q, bet šaurais leņķis ir a; kakta šķautne ir taisne l. Skaldnē P novilkta taisne t, kas ar l veido leņķi b. Cik lielu leņķi ar l veido taisnes t projekcija skaldnē Q?

7.39. Funkcija f(x) ir definēta visām reālām x vērtībām. Bez tam visām reālām a un x vērtībām ir spēkā nosacījums: ja $a < x < a + 100$, tad $a < f(x) < a + 100$.
Atrast visas funkcijas f(x), kas apmierina šos nosacījumus.

7.40. Skaitļu virkni (a_n) veido šādi:

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2^2,\quad a_3 = 3^{3^3},\quad a_4 = 4^{4^{4^4}},\cdots, a_n = \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{n \text{ reizes}},\ldots ;$$

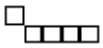
b_n ir skaitļa a_n pēdējais cipars. Noskaidrot,
a) kādas skaitliskās vērtības var būt virknes (b_n) locekļiem;
b) vai (b_n) ir periodiska, un, ja ir, tad atrast tās mazāko periodu.

8. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1980./81. m.g.)

4. klase

8.1. Uzzīmēt astoņus taišņu nogriežņus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši divus citus. Vai var uzzīmēt astoņus nogriežņus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši trīs citus? Nekādi trīs nogriežņi nedrīkst krustoties vienā punktā.

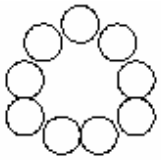
8.2. Uzzīmēt visas dažādas figūras, kas sastāv no 5 rūtiņām. Figūru un tās spoguļattēlu uzskatām par vienādām figūrām; katrai figūrai jāsastāv no viena gabala; nav pieļautas figūras, kuru atsevišķas daļas savienotas tikai ar rūtiņu stūriem kā 9. zīmējumā.



9. zīm.

8.3. Jānis saka Andrim, ka viņš (Jānis) ir saskaitījis trīs dažādus veselus pozitīvus skaitļus, un paziņo Andrim iegūto rezultātu. Zinot šo rezultātu, Andris var precīzi noskaidrot, kādus skaitļus Jānis saskaitījis, neko viņam nejautājot. Kāds varēja būt Jāņa iegūtais rezultāts? Norādiet visas iespējamās atbildes un pierādiet, ka citu bez Jūsu uzrādītajām nav.

8.4. Vai var ierakstīt 10. zīmējumā attēlotajā figūrā katrā aplītī pa vienam ciparam no 1 līdz 9 (katrā aplītī -- citu ciparu) tā, lai nekādos divos blakus aplīšos ierakstīto ciparu summa nebūtu pāra skaitlis?



10. zīm.

8.5. Tabulā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, katrā rūtiņā ierakstīta ‘‘ + ‘‘ zīme. Ar vienu gājienu var izvēlēties jebkuru kvadrātu, kas sastāv no 2×2 rūtiņām, un šajā kvadrātā mainīt visas zīmes uz pretējām. Parādīt, kā pēc kārtas izpildot vairākus gājienus, no sākuma dotās tabulas var iegūt tabulu, kas attēlota 11. zīmējumā.

-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-

11. zīm.

5. klase

8.6. Trīs futbolkomandas -- A, B un C -- katra ar katru nospēlēja vienu spēli. A uzvarēja vienā spēlē; C vienu spēli beidza neizšķirti. A visā turnīrā iesita 4 vārtus, bet C visā turnīrā iesita 2 vārtus; B visā turnīrā iesita 3 vārtus, bet nezaudēja nevienu. Atrast visu spēļu rezultātus.

8.7. Atrast kaut vienu sešciparu skaitli, kas satur ciparus 1, 2, 3, 4, 5, 6 (katru ciparu vienu reizi) un kam piemīt šāda īpašība: tā pirmo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2, pirmo triju ciparu veidotais skaitlis dalās ar 3, pirmo četru ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4, pirmo piecu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5, bet pats skaitlis dalās ar 6.

8.8. Uz riņķa līnijas atzīmēts 21 punkts. Andris izvēlas vienu no tiem un, sākot ar to, numurē punktus ar skaitļiem 1, 2, 3, 4,..., 21 pulksteņa rādītāja virzienā. Jānis izvēlas citu atzīmes punktu un, sākot ar to, veic tādu pašu numerāciju, tikai pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Pierādīt, ka var atrast punktu, kuram abi zēni piešķīruši vienādus numurus.

8.9. Aplūkosim taisnstūrveida tabulu, kas sastāv no 63×37 rūtiņām. No tās kreisā augšējā stūra A uz labo apakšējo stūri B novilkts taisnes nogrieznis. Zināms, ka tas neiet caur citiem rūtiņu stūriem, izņemot A un B. Cik rūtiņu šķērso šis nogrieznis?

8.10. Atrast 6 tādus skaitļus, lai katru veselu pozitīvu skaitli no 1 līdz 50 ieskaitot varētu izsacīt kā summu, kuru veido daži (varbūt viens pats) no šiem 6 skaitļiem. Pie tam katrā summā nevienu no 6 izvēlētajiem skaitļiem par saskaitāmo nedrīkst izmantot vairāk nekā vienu reizi.
Pietiek uzrādīt vienu šādu skaitļu sistēmu un pierādīt, ka tā apmierina uzdevuma prasības.
Vai var atrast 5 skaitļus ar tādu īpašību?

6. klase

8.11. Ierakstiet 12. zīmējumā attēlotajā tabulā tukšajās rūtiņās skaitļus tā, lai iegūtajā tabulā visas rindiņas būtu savā starpā proporcionālas.

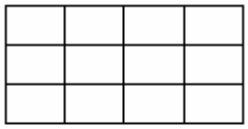
1		4
	6	12
4		

12. zīm.

8.12. Cik malu var būt divu izliektu četrstūru šķēlumam? Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu iespēju bez uzrādītajām nav.

8.13. Pierādiet, ka no 12 pēc kārtas ņemtiem veseliem pozitīviem skaitļiem vismaz viens ir mazāks par visu savu pozitīvo dalītāju summu (pašu skaitli pie dalītājiem nepieskaitām).

8.14. Vai 13. zīm. attēlotās tabulas rūtiņās var ierakstīt pa ciparam tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas prasības:
a) vismaz vienā rūtiņā ierakstīta 0,
b) neviens cipars nav ierakstīts vairāk nekā divas reizes,
c) rindiņās ierakstīto ciparu summas ir vienādas,
d) katrā kolonnā ierakstīto ciparu summa ir lielāka par 16, bet vismaz vienā kolonnā -- lielāka par 21.



13. zīm.

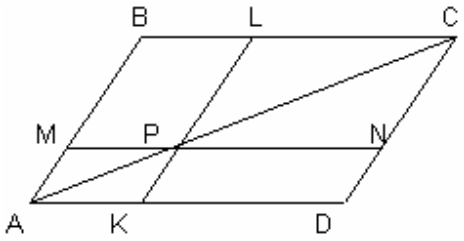
8.15. Dots, ka 25 punkti izvietoti kvadrātiska režģa veidā. Kāds ir mazākais iespējamais posmu skaits lauztā līnijā, kas iet caur visiem šiem punktiem? Visiem lauztās līnijas posmiem jābūt paralēliem kvadrāta malām.

7. klase

8.16. Atrisināt nevienādību
$x(x+1)+(x+2)(x+3)<x(x+3)+(x+1)(x+2)$.

8.17. Izliektā četrstūrī ABCD tā iekšējo leņķu A, B un C bisektrises krustojas vienā punktā O. Pierādīt, ka arī leņķa D bisektrise iet caur punktu O.

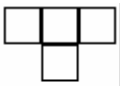
8.18. Paralelogramā ABCD caur diagonāles AC patvaļīgu punktu P novilktas taisnes MN un KL paralēli paralelograma malām (skat. 14. zīm.). Pierādīt, ka trijstūru CMN un CKL laukumi ir vienādi.



14. zīm.

8.19. Ja automātā A ievada veselu skaitli x, tad automāts izdod ārā skaitli 3x; šī operācija maksā 5 kap. Ja automātā B ievada veselu skaitli x, tad automāts izdod ārā skaitli x + 4; šī operācija maksā 2 kap. Nekādas citas operācijas ar automātiem izdarīt nevar.
No sākuma dots skaitlis 1. Kā ar šādām operācijām, izmantojot tikai automātus A un B, no tā var iegūt 1979, lai kopējā izmaksa būtu viszemākā?

8.20. Dota kvadrātveida tabula ar 8×8 rūtiņām. Vai var katrā tās rūtiņā ierakstīt veselu skaitli no 1 līdz 64 (katrā rūtiņā -- citu skaitli) tā, lai katrā figūrā, kāda parādīta 15. zīmējumā, ierakstīto skaitļu summa dalītos ar 10? (Figūru drīkst novietot arī citā stāvoklī.)



15. zīm.

8. klase

8.21. Atrast mazāko no tiem veselajiem pozitīvajiem skaitļiem, kas dalās ar 99 un kura pierakstā nav neviena cipara 9.

8.22. Ja automātā A ievada skaitli x ($x \neq 0$), tad automāts izvada skaitli $\frac{1}{x}$. Ja automātā B ievada skaitļus x un y ($x \neq y$), tad automāts B izvada skaitli x + y, bet, ja automātā B ievada divus vienādus skaitļus, tad salūzt un vairs nav lietojams.

Sākumā dots skaitlis 2. Kādus skaitļus no tā var iegūt, izmantojot tikai automātus A un B? (Jaunu skaitļu iegūšanā var izmantot arī pirms tam ar automātu iegūtos skaitļus.)

8.23. Dots trijstūris, kura visas malas ir dažāda garuma. Pierādīt, ka to var sagriezt divās daļās tā, ka no tām var salikt četrstūri, ap kuru var apvilkt riņķa līniju.

8.24. Vai eksistē bezgalīga augoša aritmētiskā progresija, kuras visi locekļi ir veselu skaitļu kvadrāti?

8.25. Rūtiņu lapā rūtiņas malas garums ir 1. šajā lapā atzīmētas piecas rūtiņu virsotnes tā, ka nekādas trīs no tām neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka no atzīmētajām virsotnēm var izvēlēties trīs virsotnes, kas veido trijstūri, kura laukums ir vesels skaitlis.

9. klase

8.26. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$. Ar [x] apzīmēta skaitļa x veselā daļa.

8.27. Plaknē doti 10 vektori. Katru 9 vektoru summas garums mazāks par visu 10 vektoru summas garumu. Pierādīt, ka eksistē tāda ass, uz kuras visu 10 vektoru projekcijas ir pozitīvas.

8.28. Dota bezgalīga skaitļu virkne (x_n). Katram naturālam a > 1 virknes x_a, x_{2a}, x_{3a}, x_{4a},... robeža ir 0. Vai no tā var secināt, ka arī virknes (x_n) robeža ir 0?

8.29. Izliektā piecstūrī ABCDE visas malas ir vienādas. Bez tam dots, ka $\angle BAE = 2\angle CAD$. Aprēķināt $\angle BAE$.

8.30. Plaknē doti 10 punkti. Aplūkojam visus taišņu nogriežņus, kas savieno kaut kādus divus no šiem punktiem. Dots, ka to visu garumi lielāki vai vienādi par 1 cm. pierādīt, ka starp šiem nogriežņiem nevar būt vairāk kā 30 tādu, kuru garums ir tieši 1 cm.

10. klase

8.31. Pierādīt identitāti $\sin^2 2x - \sin x \times \sin 3x = \sin^2 x$.

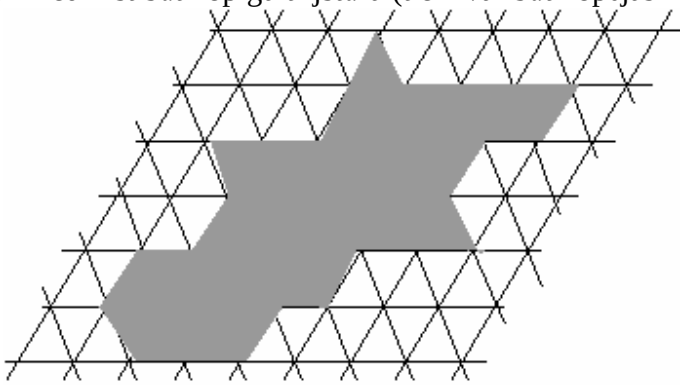
8.32. Dotas divas trijstūra piramīdas. Katrai no tām šķautņu garumi ir 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm un 8 cm. Pierādīt, ka šīs piramīdas ir vienādas.

8.33. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = z \\ \sin z = x. \end{cases}$$

8.34. Polinoma P(x) vērtības ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja x ir vesels skaitlis. Atrast visus tādus P(x) un pierādīt, ka citu bez atrastajiem nav.

8.35. Regulāru trijstūru režģī 100 trijstūri nokrāsoti melni tā, ka no katra melnā trijstūra var aiziet uz katru citu, ejot tikai caur melno apgabalu, un no viena trijstūra uz otru pārejot malu viduspunktus (16. zīm.).
Pierādīt, ka var izgriezt vismaz 33 melnus rombus, no kuriem katrs sastāv no 2 trijstūriem. Protams, šiem rombiem nedrīkst būt kopīgu trijstūru (tiem var būt kopējas malas vai virsotnes).



16. zīm.

11. klase

8.36. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-16} = 15$.

8.37. Uzzīmēt lauztu līniju (ne obligāti noslēgtu), kas katru savu posmu krusto tieši divas reizes.

8.38. Dots, ka f(x) ir nepārtraukta funkcija, un
$\int_0^1 f(x)dx = 0, \quad \int_0^1 x \cdot f(x)dx = 0$.
Pierādīt, ka intervālā [0; 1] eksistē vismaz divi tādi dažādi skaitļi a un b, kuriem f(a) = 0 un f(b) = 0.

8.39. Dots kubs, kura šķautnes garums ir 1. Tā iekšpusē atrodas izliekts daudzskaldnis M, kura ortogonālā projekcija uz katru kuba skaldni sakrīt ar šo skaldni. Minēt piemēru, kad M tilpums ir $\frac{1}{3}$. Vai M tilpums var būt mazāks nekā $\frac{1}{3}$?

8.40. Direktoram kabinetā ir seifs. Direktors var izraudzīties jebkuru racionālu skaitli un noregulēt seifa slēdzeni tā, ka seifs atveras tādā un tikai tādā gadījumā, ja tā priekšā skaļi nosauc šo skaitli. Ja turpretī skaļi nosauc kādu citu skaitli, tad seifu vispār vairs nevar atvērt.
Direktors dodas komandējumā. Viņam ir četri vietnieki. Direktors grib, lai **nekādi divi** vietnieki, pat rīkojoties kopīgi nevarētu atvērt seifu, bet lai **katri trīs** vietnieki, savstarpēji vienojoties, to

varētu izdarīt. Kā direktors var izvēlēties šifru un kādu informāciju sniegt saviem vietniekiem, lai šīs prasības būtu apmierinātas?

9. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1981./82. m.g.)

4. klase

9.1. Vai var novietot plaknē 5 taisnes tā, lai katras divas no tām krustotos un kopā būtu tieši 6 krustpunkti?

9.2. Dzīvoklis izvietots vienā stāvā. Starp katrām divām blakus telpām ir ne vairāk kā vienas durvis, un no katras telpas ne vairāk kā vienas durvis ved ārā no dzīvokļa. Pavisam dzīvoklī ir 12 durvis.
Pierādiet, ka šāds dzīvoklis ar 4 telpām nav iespējams.
Uzzīmējiet tāda dzīvokļa plānu, kurā ir 5 taisnstūrveida telpas un kas apmierina minētos nosacījumus.

9.3. Aizvietojiet zvaigznītes ar cipariem (katru zvaigznīti -- ar citu ciparu) tā, lai iegūtu piecas pareizas vienādības:

* − * = 1
* − * = 2
* − * = 3
* − * = 4
* − * = 5

Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

9.4. 17. zīm. attēlotajā tabulā atļauts patvaļīgi apmainīt rindiņas savā starpā un kolonnas savā starpā (vienu un otru var darīt pamīšus un vairākas reizes). Pierādiet, ka nevar iegūt 18. zīm. attēloto tabulu.

x	x		
	x	x	x
	x	x	
x			x

17. zīm.

	x	x	
x	x		x
	x		
x		x	x

18. zīm.

9.5. Parādiet, ka katru veselu pozitīvu skaitli no 10 līdz 20 var izsacīt kā 3x + 4y, kur x un y -- kaut kādi veseli pozitīvi skaitļi vai 0.
Pierādiet, ka šādā veidā var izsacīt arī visus veselos pozitīvos skaitļus, kas lielāki par 20.

5. klase

9.6. Plaknē doti divi kvadrāti. Pierādīt, ka noteikti var novilkt taisni, kas dala katra kvadrāta laukumu uz pusēm.

9.7. Doti 8 litri 75% spirta šķīduma, 6 litri 50% spirta šķīduma un 20 litri 25% spirta šķīduma. Vai var pagatavot maisījumu, kurā būtu 22 litri 55% šķīduma?

9.8. Četri draugi A, B, C un D spēlēja galda tenisu -- dubultspēles. Vispirms A un B spēlēja pret C un D, pēc tam A un C pret B un D, pēc tam A un D pret B un C.
Pierādīt, ka pēc visu spēļu nospēlēšanas var atrast vai nu tādu draugu, kas visas 3 spēles uzvarējis, vai arī tādu draugu, kas visas 3 spēles zaudējis.

9.9. Pierādiet, ka zvaigznītes nevar aizstāt ar cipariem (katru zvaigznīti ar citu ciparu) tā, lai iegūtu piecas pareizas vienādības:

* − * = 1
* − * = 2
* − * = 3
* − * = 4
* − * = 6

9.10. Parādiet, ka kvadrātveida tabulā ar izmēriem 5×5 rūtiņas katrā rūtiņā var ierakstīt pa skaitlim tā, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa būs pozitīva, bet katrā kvadrātā ar izmēriem 2×2 rūtiņas ierakstīto skaitļu summas būs negatīvas.

6. klase

9.11. Trijstūra divu malu garumi ir 7 cm un 13 cm, bet trešās malas garums izsakās ar veselu skaitu centimetru.
Cik gara var būt trešā mala, ja skaitļi, kas izsaka centimetros tās garumu un visu malu garumu summu, abi ir pirmskaitļi?

9.12. Plaknē doti 6 punkti, no kuriem nekādi trīs neatrodas uz vienas taisnes. Novilkt 9 nogriežņus tā, ka katrs nogrieznis savieno divus no dotajiem punktiem un nevar atrast trijstūri, kam visas malas novilktas un visas virsotnes atrodas dotajos punktos.

9.13. Samainot vesela pozitīva skaitļa ciparus vietām, iegūst 3 reizes lielāku skaitli. Pierādiet, ka iegūtais skaitlis dalās ar 27.

9.14. Vienā pārgājienā zēnu bija 60% no dalībnieku skaita, otrā -- 75%. (Daži skolēni varbūt piedalījās abos pārgājienos.) Gada noslēgumā visi, kas piedalījušies kaut vienā pārgājienā, sapulcējās pie eglītes. Citu cilvēku pie eglītes nebija. Pierādiet, ka zēnu bija ne mazāk kā meiteņu. Vai var gadīties, ka zēnu pie eglītes bija tikpat, cik meiteņu.

9.15. Dots, ka neviens no skaitļiem a, b, c, d, e, f, g, h, I nav nulle;
a) pierādiet, ka vismaz viens no skaitļiem ab, bc, - ac ir negatīvs.
b) pierādiet, ka vismaz viens no skaitļiem aei, bfg, dhc, - gec, - bdi, -hfa ir negatīvs.

7. klase

9.16. Dots kubs. Novilktas visas taisnes, kas iet caur divām no kuba virsotnēm. Kāds ir lielākais taišņu skaits, ko no šīm taisnēm var izvēlēties tā, lai nekādas divas izvēlētās taisnes nebūtu paralēlas?

9.17. Neviens no skaitļiem a, b, c nav 0. Dots, ka

$$\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}.$$

Pierādīt, ka vai nu a + b + c = 0, vai arī a = b = c.

9.18. Astoņi dažādi naturāli skaitļi visi mazāki par 2000. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus tādus, kuru attiecība mazāka par 3. (Apskatām lielākā skaitļa attiecību pret mazāko.)

9.19. Vai eksistē tāda funkcija f(x) = ax + b (a un b -- konstantes), ka vienlaicīgi izpildās nevienādības

$$|f(0)-1|<1,\ |f(1)-2|<1,\ |f(2)-7|<1?$$

9.20. Dots, ka m un n -- naturāli skaitļi un $m^2 - n^2$ dalās ar 2. Pierādīt, ka $m^2 - n^2$ dalās ar 4.

8. klase

9.21. Divi vienādi kvadrāti šķeļas. Pierādīt, ka taisne, kas iet caur abu kvadrātu centriem, dala uz pusēm kvadrātu kopējās daļas laukumu, ja viena pirmā kvadrāta mala ir paralēla vienai otrā kvadrāta malai.

9.22. Klases vakarā piedalījās 30 skolēni, starp tiem n meitenes M_1, M_2,... , M_n. Meitene M_1 dejoja ar 5 zēniem, M_2 -- ar 6 zēniem, M_3 -- ar 7 zēniem,... , M_n - ar visiem zēniem. Cik meiteņu un zēnu piedalījās klases vakarā?

9.23. Trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts O. Dots, ka visi trijstūri AOB, BOC, COA ir vienādsānu trijstūri (nav zināms, kuras malas katrā trijstūrī ir vienādas). Pierādīt, ka O ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs.

9.24. Kvadrātveida tabula sastāv no n × n rūtiņām. Dažas rūtiņas atzīmētas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā atzīmētas tieši 2 rūtiņas. Pierādīt, ka atzīmētās rūtiņas var izkrāsot divās krāsās tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā sastopamas abas krāsas (katru rūtiņu krāso vienā krāsā).

9.25. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y(x+y)^2=9 \\ y(x^3-y^3)=7. \end{cases}$$

9. klase

9.26. Kvadrātveida tabula sastāv no 5 × 5 kvadrātiskām rūtiņām. Parādiet, kā atzīmēt 16 rūtiņu centrus tā, lai neviens atzīmētais centrs neatrastos tieši vidū starp citiem atzīmētajiem centriem. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

9.27. Rūtiņu lapā tieši 25 rūtiņas nokrāsotas melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast 7 melnas rūtiņas tā, ka nekādām divām no šīm 7 rūtiņām nav ne kopīgas malas, ne kopīgas virsotnes.

9.28. Apskatām tos 25 vektorus, kas savieno regulāra 25-stūra centrus ar tā virsotnēm. Kādu mazāko vektoru skaitu no tiem var izvēlēties tā, lai izraudzīto vektoru summa būtu nulles vektors?

9.29. Dots, ka (x_n) ir augoša virkne. Zināms, ka $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Vai noteikti eksistē galīga robeža $\lim_{n\to\infty} x_n$?

9.30. Ar P(x) apzīmēsim polinomu $P(x) = 1\times x^{1982} + 2 \times x^{1981} + 3 \times x^{1980} +... + 1981 \times x^2 + 1982 \times x + 1983$. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu $a_1, a_2, a_3,...$, ka skaitļu $P(a_1)$, $P(a_2)$, $P(a_3)$,... ciparu summas ir savā starpā vienādas.

10. klase

9.31. Dots, ka ABCD ir rombs, kas nav kvadrāts. Taisnstūra MNKL mala MN atrodas uz romba malas BC, bet mala KL atrodas uz romba malas AD. Pierādīt, ka MNKL nav kvadrāts.

9.32. a, b un g ir pirmā kvadranta leņķi.
a) Dots, ka tga × tgb = 1. Kāda ir lielākā iespējamā sina × sinb vērtība?
b) Dots, ka tga × tgb × tgg = 1. Kāda ir lielākā iespējamā sina × sinb × sing vērtība?

9.33. Plaknes a un b nav paralēlas. Telpā atrodas līnija t , kuras ortogonālās projekcijas plaknēs a un b abas ir taisnes. Vai t noteikti ir taisne?

9.34. Plaknē dots regulārs 6-stūris, kura malas garums ir 1. Izmantojot tikai lineālu, konstruēt taisnes nogriežņus, kuru garums ir a) $\sqrt{7}$; b) 8; c) $\sqrt{19}$.

9.35. No skaitļiem 1; 2;... ; n izveidotas visas iespējamās virknes garumā 3 (virknē var būt arī vienādi skaitļi). Katrai virknei atrodam tās mazāko elementu. Pierādīt, ka visu mazāko elementu summa ir $1^3 + 2^3 +... + n^3$.

11. klase

9.36. Dots, ka a un b ir šauri leņķi un $\sin^2 a + \sin^2 b = \cos^2 a + \cos^2 b$. Pierādīt, ka a + b = 90°.

9.37. Dots, ka n ir naturāls skaitlis, kas, dalot ar 6, dod atlikumu 1. Pierādīt, ka n^2 -1 dalās ar 24.

9.38. Apskatām tādu bezgalīgu kvadrātu virkni, kuru malu garumi ir $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\cdots$. Pierādīt, ka pirmajā kvadrātā var ielikt visus pārējos kvadrātus bez savstarpējās pārklāšanās.

9.39. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi n un m, ka $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m < \sqrt{4n+2}$?

9.40. Trijstūra piramīdā SABC pamats ABC ir regulārs trijstūris. Bez tam dots, ka $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$. Pierādīt, ka piramīda ir regulāra.

10. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1982./83. m.g.)**

4. klase

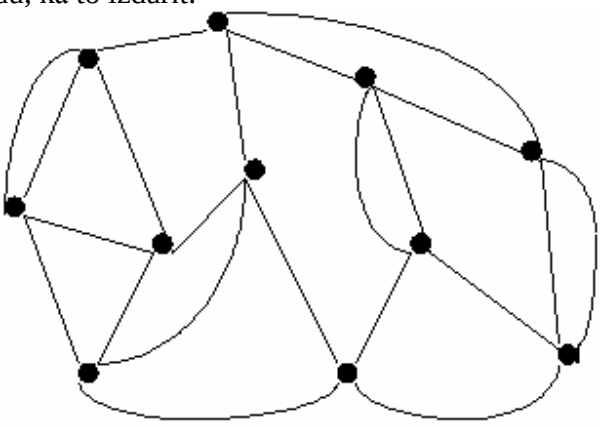
10.1. Cik kopīgu punktu var būt kvadrāta un trijstūra kontūrām?
Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām iespējām nav.

10.2. Starp veseliem skaitļiem no 1 līdz 20 uzrādiet 10 skaitļus tā, lai katriem diviem no uzrādītajiem būtu kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1.
Pierādiet, ka, lai arī kā uzrādītu 11 skaitļus, noteikti starp tiem atradīsies divi tādi, kuriem nav kopīga dalītāja, kas lielāks par 1.

10.3. Taisnstūra izmēri ir 10 cm × 12 cm. Parādiet, kā to var sagriezt 5 taisnstūros, kuru izmēri ir 2 cm × 3 cm, 3 cm × 6 cm, 4 cm × 7 cm, 4 cm × 8 cm un 6 cm × 6 cm.

10.4. Atrast mazāko veselo pozitīvo skaitli, kura ciparu reizinājums ir 840 un kas dalās ar 9.

10.5. Uz katras no 19. zīmējumā norādītajām līnijām starp 2 punktiem norādīt ar bultiņu virzienu tā, lai no katra punkta 2 bultiņas izietu un 2 tajā ieietu.
Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



19. zīm.

5. klase

10.6. Kvadrāts sadalīts 10×10 rūtiņās. Iezīmēt dažās rūtiņās pa vienam krustiņam tā, lai katrā kvadrātā, kas satur 3×3 rūtiņas, būtu iezīmēts tieši viens krustiņš.

10.7. Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka visu veselo pozitīvo skaitļu no 1 līdz n (ieskaitot) reizinājums beidzas tieši ar 198 nullēm (ne vairāk un ne mazāk)?

10.8. Ja kvadrātveida istabas vidū novieto sveci, tā pilnībā apgaismo visas šīs istabas sienas. Uzzīmējiet tādu istabu, kurai būtu 15 sienas un visu sienu pilnīgai apgaismošanai nepieciešamas vismaz 5 sveces. Pamatojiet savu risinājumu.

10.9. Katras divas no 7 pilsētām A, B, C, D, E, F, G savienotas ar citu ceļu. Vai var uz ceļiem izvēlēties vienvirziena kustību tā, lai no A varētu aizbraukt vismaz 3 virzienos, no B -- vismaz 2, no C -- vismaz 4, no D -- vismaz 3, no E -- vismaz 4, no F -- vismaz 2 un no G -- vismaz 2 virzienos?

10.10. Pa apli stāv 10 cilvēki. Visiem kopā ir 10 rubļi. Katram cilvēkam ir divas reizes mazāk naudas nekā viņa labajam un kreisajam kaimiņam kopā.
Pierādiet, ka katram cilvēkam ir tieši 1 rublis.

6. klase

10.11. Dots, ka n naturāls skaitlis, bet n^2 beidzas ar ciparu 6. Kāds var būt skaitļa n^2 priekšpēdējais cipars? Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām iespējām nav.

10.12. Pozitīvā divciparu skaitlī neviens no cipariem nav 0. Pierādiet, ka dalot šo skaitli ar tā ciparu reizinājumu, nevar iegūt mazāku dalījumu kā $\frac{11}{9}$.

10.13. Pierādiet, ka kvadrātu var sagriezt
a) 5,
b) 6,
c) 1983 piecstūros, no kuriem neviens nav izliekts.

10.14. Divos trijstūros katras malas garums ir 1 m. Tie novietoti tā, ka to kontūras krustojas 6 punktos. Pierādīt, ka trijstūru kopējās daļas kontūra garums mazāks par 3 m. Vai taisnība, ka tas noteikti mazāks par 2,9 m?

10.15. Plaknē novietoti vairāki vienādu izmēru riņķi. Daži savā starpā pieskaras, bet nekādi divi riņķi nekrustojas. Vai šos riņķus noteikti var izkrāsot ar 3 krāsām tā, ka katrs riņķis nokrāsots vienā krāsā un divi vienādi nokrāsoti riņķi nekur nesaskaras?

7. klase

10.16. Kādām veselām n vērtībām skaitlis $\frac{3n+6}{2n+1}$ ir vesels?

10.17. Cik daļās plakni var sadalīt 3 riņķa līnijas, no kurām nekādas divas nesakrīt? Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu iespēju bez atrastajām nav.

10.18. Atrast izteiksmes | x - 1| + | x - 3| + | x - 5| + | x - 7| + | x - 11| mazāko iespējamo vērtību.

10.19. Dots, ka ABCD -- trapece, bet O -- viduslīnijas viduspunkts. Caur O novilktā taisne krusto pamatu AD punktā L un sānu malu CD punktā K. Kuras daļas laukums lielāks -- ABCKL vai LKD? Atbildi pamatot, neizdarot mērījumus.

10.20. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Četras rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vienu rindiņu vai vienu kolonnu un mainīt tajā krāsojumu uz pretējo -- melnās rūtiņas pārkrāsot baltas, bet baltās -- melnas.
a) Vai var gadīties, ka kvadrātā paliek tieši 3 melnas rūtiņas?
b) Vai melno rūtiņu skaits kvadrātā var kļūt mazāks par 4?

8. klase

10.21. Atrast visu to naturālo skaitļu summu, kas lielāki par 1000, mazāki par 2000 un dalās ar 7.

10.22. Riņķī ievilkts 7-stūris. Tā visi leņķi ir vienādi. Pierādīt, ka šis 7-stūris ir regulārs.

10.23. Trijstūra malu garumi ir a, b un c, turklāt $a \le b \le c$. Trijstūra laukums ir S. Atrast izteiksmes $\frac{S}{b^2}$ lielāko iespējamo vērtību.

10.24. Apskatām visus iespējamos reizinājumus, kas sastādīti no skaitļiem 1, 2, 3,..., 10, ņemot vienu, divus,... , desmit reizinātājus. (Piemērs: no skaitļiem 1; 2; 3 var izveidot 7 šādus reizinājumus: 1, 2, 3, 1×2, 2×3, 1×3, 1×2×3.) Atrast šo reizinājumu apgriezto lielumu summu.

(Piemērs: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=3$.)

10.25. Sadalīt skaitli 2^{1982} + 1 divos veselos reizinātājos,
a) kas abi lielāki par 1,
b) kas abi lielāki par 1000.
Risinājumu pamatot.

9. klase

10.26. Caur kuba centru novilkta plakne. Vai tās šķēlums ar kubu var būt piecstūris? Atbildi pamatot.

10.27. Doti 50 veseli skaitļi, kuru summa ir 0. No tiem jāizvēlas 2 skaitļi tā, lai to summa nebūtu negatīva. Pierādīt, ka to var izdarīt vismaz 49 veidos. Vai to noteikti var izdarīt 50 veidos?

10.28. Šaurleņķa trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts O. Taisne AO krusto BC punktā A_1, taisne BO krusto AC punktā B_1, taisne CO krusto AB punktā C_1. Dots $AO \times OA_1 = BO \times OB_1 = CO \times OC_1$. Pierādīt, ka AA_1, BB_1, CC_1 ir trijstūra ABC augstumi.

10.29. Uz taisnes t ņemts punkts O. No tā atlikti 1983 vienības vektori tā, ka to galapunkti visi atrodas vienā pusē no t. Pierādīt, ka šo vektoru summas garums lielāks nekā 1. Vai taisnība, ka tas noteikti lielāks nekā 1,1? Vai uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja vektoru skaits ir 1982?

10.30. Skaitļu virknē (a_n) katru nākamo locekli iegūst no iepriekšējā ar formulu $a_{n+1} = \left[\frac{3a_n}{2}\right] + 1$, n = 1, 2, 3,.... Vai var tā izvēlēties a_1, lai virknes pirmie 4 locekļi būtu pāra skaitļi, bet piektais loceklis -- nepāra skaitlis?
Vai var tā izvēlēties a_1, lai virknes pirmie 1983 locekļi būtu pāra skaitļi, bet 1984. loceklis -- nepāra skaitlis?

10. klase

10.31. Kurš no skaitļiem $\frac{\sin 2}{2}$ vai $\frac{\sin 3}{3}$ ir lielāks? Pamatot atbildi, neizmantojot tabulas vai kalkulatoru.

10.32. Kādām naturālām n vērtībām $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ir pirmskaitlis?

10.33. Apskatām visus tādus trijstūrus, kam visas 3 virsotnes atrodas dota regulāra 217-stūra virsotnēs. No šiem trijstūriem izvēlamies trijstūri ar vislielāko laukumu. Atrast tā leņķu lielumus.

10.34. Pierādīt, ka telpā iespējams konstruēt 9 posmu slēgtu lauztu līniju tā, ka tās visi posmi ir vienāda garuma un ik divi blakus esošie posmi ir savstarpēji perpendikulāri.

10.35. Apzīmējam ar $x_i = \frac{i}{11}$, i = 0, 1, 2,... , 11. Aprēķināt

$$\frac{x_0^3}{1-3x_0+3x_0^2} + \frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \cdots + \frac{x_{11}^3}{1-3x_{11}+3x_{11}^2}.$$

11. klase

10.36. Atrast izteiksmes $\sin^8 x + \cos^8 x$ iespējamo vērtību kopu.

10.37. Trijstūra piramīdā novilktas visu skaldņu mediānas. Katras divas mediānas, kas beidzas vienā un tai pašā šķautnes viduspunktā, ir vienādas. Pierādīt, ka visas piramīdas skaldnes ir vienādas.

10.38. Regulāra n-stūra iekšpusē ņemts punkts O. No tā novilkti perpendikuli pret visām n-stūra malām; perpendikulu pamati ir malu iekšējie punkti. Perpendikulu pamati un n-stūra virsotnes sadala tā kontūru 2n nogriežņos. Sanumurēsim tos pēc kārtas ar skaitļiem 1; 2; 3;...; 2n. Pierādīt, ka to nogriežņu garumu summa, kuru numuri ir pāra skaitļi, vienāda ar to nogriežņu garumu summu, kuru numuri ir nepāra skaitļi, ja a) n = 6; b) n = 5; c) vispārīgajā gadījumā.

10.39. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x! + 15 = y^2$.

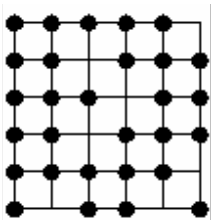
10.40. Uz plaknes novietota trijstūra piramīda, kuras visas šķautnes vienādas. Ar vienu gājienu atļauts piramīdu ‘‘pārvelt’’ pār vienu pamata šķautni tā, ka tagad tā balstās plaknē ar skaldni, kas iepriekš bija sānu skaldne. Vai pēc 1983 gājieniem piramīda var atrasties sākotnējā pozīcijā?

11. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1983./84. m.g.)**

4. klase

11.1. Jānis no grāmatas bija izlasījis 50 lappuses, kad šo pašu grāmatu sāka lasīt Andris. Turpmāk Jānis katru dienu izlasīja pa 15 lappusēm, bet Andris -- pa 25 lappusēm. Abi zēni grāmatu lasīt beidza vienlaicīgi. Cik lappušu grāmatā?

11.2. Kvadrātisku rūtiņu režģī dažas virsotnes atzīmētas (sk. 20. zīm.). Cik ir tādu kvadrātu, kam malas paralēlas režģa līnijām un visas virsotnes atzīmētas?



20. zīm.

11.3. Vai eksistē 6 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, no kuriem nevienam ciparu summa nedalās ar 4? Vai eksistē 7 tādi skaitļi?

11.4. Kvadrāts sadalīts 8×8 kvadrātiskās rūtiņās. Labajā augšējā rūtiņā atrodas figūriņa. Divi spēlētāji pēc kārtas pārbīda figūriņu uz blakus esošu rūtiņu, pie tam aizliegts iebīdīt figūriņu tādā rūtiņā, kurā tā jau reiz bijusi. (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.) Tas, kam

nav kur izdarīt gājienu, zaudē. Pierādīt, ka spēlētājs, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt, lai kā arī spēlētu pretinieks.

11.5. Katrs no 12 strādniekiem (tie apzīmēti ar numuriem no 1 līdz 12) prot strādāt ar diviem instrumentiem (instrumenti apzīmēti ar burtiem no A līdz L). Kurš no strādniekiem kurus instrumentus pārvalda, redzams tabulā.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A, G	C, L	J, C	D, K	L, H	E, J	B, A	G, D	H, I	F, B	I, E	K, F

Pierādīt, ka šie strādnieki var vienlaicīgi strādāt katrs ar savu instrumentu. Cik dažādos veidos tas iespējams?

5. klase

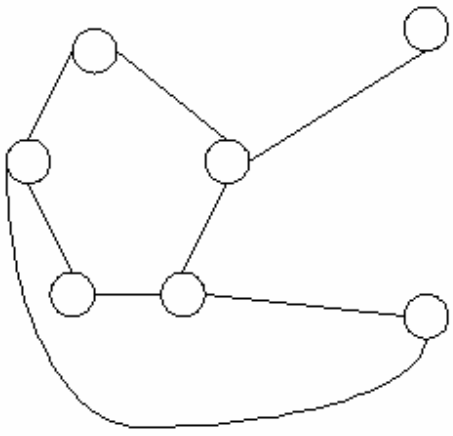
11.6. Grāmatnīcā A ir par 10% vairāk grāmatu nekā grāmatnīcā B. Grāmatnīca A pārdeva 11% savu grāmatu, bet grāmatnīca B pārdeva 10% savu grāmatu. Kurā grāmatnīcā palika vairāk grāmatu?

11.7. Plaknē atzīmēja punktus A (-1; 4), B (1; 2) un C (-3; -6). Pēc tam koordinātu asis nodzēsa; palika tikai punkti A, B un C. Kā izmantojot cirkuli un lineālu, atjaunot vismaz vienu no koordinātu asīm?

11.8. Uz tāfeles uzrakstīti 1983 skaitļi ‘‘- 1’’ un 1984 skaitļi ‘‘+ 1’’. Atļauts nodzēst jebkurus divus uz tāfeles uzrakstītos skaitļus, to vietā uzrakstot viņu abu reizinājumu. Tā turpina, kamēr uz tāfeles paliek tikai divi skaitļi. Kādi tie būs? Kāpēc?

11.9. Kvadrāts sadalīts 5×5 rūtiņās. Kādu lielāko rūtiņu daudzumu var iekrāsot tā, lai nevienā kvadrātā 2×2 nebūtu triju iekrāsotu rūtiņu?

11.10. 21. zīmējumā aplīšos ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai katriem diviem skaitļiem, kas savienoti ar līniju, būtu kopīgs dalītājs, lielāks par 1, bet katriem diviem skaitļiem, kas nav savienoti ar līniju, lielākais kopīgais dalītājs būtu 1. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



21. zīm.

6. klase

11.11. Atrast visas tās veselās k vērtības, pie kurām (k - 2) (k +4) ir pirmskaitlis, un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

11.12. Punkts B atrodas trijstūra ADC iekšpusē. Pierādīt, ka leņķis ABC lielāks par leņķi ADC.

11.13. Dota kartīte, uz kuras uzrakstīts skaitlis 2, un divi automāti A un B. Ja automātam A padod kartīti, uz kuras uzrakstīts skaitlis x, viņš atpakaļ atdod šo kartīti un otru kartīti, uz kuras uzrakstīts x^3. Ja automātam B padod kartīti, uz kuras uzrakstīts skaitlis x, viņš atpakaļ atdod šo kartīti un otru kartīti, uz kuras uzrakstīts x/8. Vai, izmantojot šos automātus, var iegūt kartīti, uz kuras uzrakstīts
a) 2^{1983},
b) 2^{1984}?

11.14. Bērnudārza grupā ir 12 bērni. Kāds ir lielākais iespējamais dienu skaits, kurā šie bērni var staigāt pa pāriem tā, ka neviens pāris neatkārtojas? Vienas dienas laikā pāri nemainās.

11.15. Plaknē doti 4000 punkti. Nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādiet, ka var izveidot 1000 četrstūrus tā, ka katram no tiem visas virsotnes atrodas dotajos punktos, bet nekādiem diviem četrstūriem nav kopīgu punktu.

7. klase

11.16. Dots, ka n un $n^2 + 9$ ir pirmskaitļi. Atrast visas iespējamās n vērtības un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

11.17. Atrisināt vienādojumu

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}}=\frac{53}{37}$$

11.18. Doti 8 nogriežņi. Neviens no tiem nav īsāks par 1 cm un neviens nav garāks par 20 cm. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar trim no dotajiem nogriežņiem.

11.19. Regulārs 12-stūris sagriezts paralelogramos. Pierādiet, ka vismaz 3 no šiem paralelogramiem ir taisnstūri.

11.20. Dotas vairākas pēc ārējā izskata vienādas monētas, kuru masas visas ir dažādas. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Vienā svēršanas reizē atļauts uzlikt uz katra kausa pa vienai monētai un noskaidrot, kura no uzliktajām ir smagāka.
a) Monētu ir 4. Kā ar 5 svēršanām sakārtot tās svaru pieaugšanas kārtībā?

b) Monētu ir 8. No tām jāatdala 4 smagākās, bet nav noteikti jāuzzina, kura ir pati smagākā, kura ir otra smagākā, u.t.t. Pacentieties izstrādāt metodi, kā to izdarīt ar iespējami mazāku svēršanu skaitu.

8. klase

11.21. Dots, ka x + y = a + b un xy = ab. Pierādīt, ka vai nu x = a un y = b, vai arī x = b un y = a.

11.22. Kvadrāts sastāv no 16×16 rūtiņām. Viena no tām nokrāsota melna. Pierādīt, ka pārējo daļu var sagriezt tādos apgabalos, katrs no kuriem vienāds ar šādu figūru .

11.23. Pierādīt, ka izliekta sešstūra ABCDEF perimetrs ir lielāks par $\frac{2}{3}(AD + BE + CF)$.

11.24. Pulksteņa ciparnīca tās centrā piestiprināta pie tāfeles un var pagriezties par jebkuru leņķi 30°×k, k -- vesels skaitlis. Blakus katram ciparnīcas skaitlim 1; 2; 3;... ; 12 uz tāfeles uzrakstīja nulli. Pēc tam ciparnīcu pagrieza un katram uz tāfeles uzrakstītajam skaitlim pieskaitīja to ciparnīcas skaitli, kas nonāca tam blakus. To atkārtoja vairākas reizes. Vai var iznākt tā, ka visi skaitļi uz tāfeles ir vienādi ar 1984?

11.25. Riņķī, kura rādiuss ir r, ievilkts daudzstūris ar laukumu S; riņķa centrs atrodas daudzstūra iekšpusē. Uz katras daudzstūra malas ņemts pa punktam, kas nav virsotne, un šie punkti pēc kārtas savienoti ar taisnes nogriežņiem. Šie nogriežņi veido jaunu, ‘‘iekšējo’’ daudzstūri. Pierādīt, ka ‘‘iekšējā’’ daudzstūra perimetrs ir vismaz $\frac{2S}{r}$.

9. klase

11.26. Apskatām divas skaitļu virknes (a_n) un (b_n). Dots, ka $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ un $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n + b_n) = 0$. Pierādīt, ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

11.27. Figūra atrodas plaknē. Tās ortogonālā projekcija uz katru taisni šajā plaknē ir nogrieznis, kas īsāks par 1 cm. Vai šo figūru noteikti var ievietot
a) riņķī ar diametru 1 cm;
b) riņķī ar diametru 1,5 cm?

11.28. No trīsciparu naturāla skaitļa atņem tā ciparu kubu summu.
a) Kāda ir iegūtās starpības lielākā iespējamā vērtība?
b) Kāda ir iegūtās starpības mazākā iespējamā pozitīvā vērtība?

11.29. Aplūkojam nevienādību $\left|x^2 + px + q\right| \le 2$, kur p un q ir konstantes. Pierādīt, ka to Ox ass intervālu garumu summa, kuros šī nevienādība ir spēkā, nepārsniedz 4.

11.30. Plauktā novietoti 30 sējumu kopotie raksti numuru pieaugšanas kārtībā. Andris pārlika 1. sējumu aiz trīsdesmitā, pārējo sējumu kārtību nemainot. Jānis ar vienu gājienu drīkst mainīt vietām jebkurus divus sējumus. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru Jānis var atjaunot pareizo kārtību? Kāds tas būtu gadījumā, ja Andris aiz trīsdesmitā sējuma būtu novietojis 1., 2., 3. sējumus (tieši šādā kārtībā)?

10. klase

11.31. Vai var gadīties, ka trīsplakņu kaktā triju virsotnes leņķu summa vienāda ar visu divplakņu kaktu leņķu summu?

11.32. Pierādīt, ka starp skaitļiem 6n + 3, kur n -- naturāls skaitlis, ir bezgalīgi daudz naturālu skaitļu kvadrātu..

11.33. Dots, ka kopa M satur skaitli 1. Bez tam zināms, ka izpildās šādas divas īpašības:
1) ja M satur x, tad M satur arī 4x;
2) ja M satur x, tad M satur arī $\left[\sqrt{x}\right]$. Pierādīt, ka a) M satur skaitli 17; b) M satur visus naturālos skaitļus.

11.34. Valsts teritorijai ir kvadrāta forma, kvadrāta malas garums 1000 km. Valstī ir 51 pilsēta. Transporta ministrijai pietiek līdzekļu, lai uzbūvētu dzelzceļu 11 000 km garumā. Vai var uzbūvēt dzelzceļu tā, lai no katras pilsētas uz katru varētu aizbraukt ar vilcienu?

11.35. Plaknē dotas 6 taisnes. Apskatām visus regulāros trijstūrus, kuru malas atrodas uz taisnēm. Kāds ir lielākais iespējamais šādu trijstūru skaits, starp kuriem nav vienādu trijstūru?

11. klase

11.36. Pierādīt nevienādību $\sin^6 x + \cos^6 x \ge \sin^8 x + \cos^8 x$. Kad pastāv vienādība?

11.37. Regulāra trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts O. Taisne AO krusto BC punktā A_1, taisne BO krusto AC punktā B_1, taisne CO krusto AB punktā C_1. Pierādīt, ka $OA_1 + OB_1 + OC_1 < a$, kur a -- trijstūra ABC malas garums.

11.38. Uz 50 kartītēm uzrakstīti dažādi skaitļi, uz katras kartītes viens skaitlis. Kartītes izkārtoja taisnstūra formā 5 rindās un 10 kolonās. Katrā rindā kartītes sakārtoja tā, ka skaitļi pieaug no kreisās uz labo pusi. Pēc tam katrā kolonnā kartītes pārkārtoja tā, ka katrā kolonnā skaitļi pieaug no augšas uz leju. Pierādīt, ka pēc tam joprojām katrā rindā skaitļi pieaug no kreisās uz labo pusi.

11.39. Trijstūra piramīdas ABCD skaldnē BCD ņemts punkts A_1, skaldnē ACD -- punkts B_1, skaldnē ABD -- punkts C_1 un skaldnē ABC -- punkts D_1. Neviens no tiem nepieder piramīdas šķautnēm. Zināms, ka katri divi no punktiem A_1, B_1, C_1, D_1 atrodas vienā plaknē ar divām piramīdas virsotnēm. Pierādīt, ka taisnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 krustojas vienā punktā.

11.40. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka 2^n beidzas ar cipariem a) 84; b) 984?

12. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1984./85. m.g.)**

4. klase

12.1. Kurš skaitlis lielāks: 93875632 + 4365 vai 93875637 + 4361?

12.2. Atrast mazāko veselo pozitīvo skaitli, kas satur ciparus 1, 9, 8 un 5 (un varbūt vēl citus) un dalās ar 9.

12.3. No kubiņiem, kur izmēri ir 1×1×1, salikts taisnstūra paralēlskaldnis, kura izmēri ir 10×11×12. Paralēlskaldņa kreisā skaldne, priekšējā un virsējā skaldne nokrāsotas. Cik ir tādu kubiņu, kuriem nokrāsota kaut viena skaldne?

12.4. Cik veidos skaitli 7 var izsacīt kā vieninieku un divnieku summu? (Veidi, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, tiek uzskatīti par dažādiem.)

12.5. Divpadsmit draugi katrs uzzinājuši pa vienam jaunumam (katrs citu). Katru vakaru viņi sapulcējās pa trim četrās dažādās vietās, un visi trīs, kas sapulcējušies vienā vietā, apmainās jaunumiem. Kāds ir mazākais vakaru skaits, pēc kura visi draugi var uzzināt jaunumus? (Citas iespējas nodot informāciju viņiem nav.) Draugu ‘‘trijnieki’’ dažādos vakaros var būt dažādi.

5. klase

12.6. Vai var uzzīmēt 7 nogriežņus tā, lai būtu 12 pāri savstarpēji perpendikulāru nogriežņu? Vai šādu pāru skaits var pārsniegt 12?

12.7. Dots, ka a + b > 0 un ab > 0. Pierādīt, ka a > 0 un b > 0.

12.8. 17 no klases skolēniem dejo, 17 skolēni dzied, 20 skolēni zīmē. Ir 3 skolēni, kas gan dejo, gan dzied. Ir 4 skolēni, kas gan dzied, gan zīmē. Ir 5 skolēni, kas gan dejo, gan zīmē. Ir tikai viens skolēns, kas gan dejo, gan dzied, gan zīmē.
Cik skolēnu ir klasē? (Zināms, ka katrs skolēns nodarbojas ar vismaz vienu no trim minētajiem vaļaspriekiem.)

12.9. Plaknē atrodas divu izliektu četrstūru kontūras. Cik daļās tās var sadalīt plakni?

12.10. Doti četri veseli skaitļi a, b, c un d. Ar vienu gājienu no tiem iegūst skaitļus $|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|$. Ar jaunajiem četriem skaitļiem izdara to pašu, utt. Pierādīt, ka pēc kāda laika noteikti iegūsim četras nulles.

6. klase

12.11. Kādu leņķi veido pulksteņa minūšu un stundu rādītājs plkst. 13.40?

12.12. a) Dots, ka daļa $\frac{a}{b}$ ir saīsināma. Pierādīt, ka daļa $\frac{a-b}{a+b}$ arī ir saīsināma.

b) Vai no tā, ka $\frac{a-b}{a+b}$ ir saīsināma daļa, var secināt, ka $\frac{a}{b}$ arī noteikti ir saīsināma?

12.13. Izteikt reizinājumu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ kā divu tādu izteiksmju kvadrātu summu, kas izveidotas no burtiem a, b, x un y, izmantojot reizināšanas, saskaitīšanas un atņemšanas operācijas.

12.14. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli no 1 līdz 36 tā, lai visi skaitļi būtu dažādi un katrā 22**.** zīmējumā parādītajā figūriņā ierakstīto skaitļu summa dalītos ar 9?

22. zīm.

12.15. Kādu lielāko dambretes dāmu skaitu var novietot uz 8×8 dambretes galdiņa melnajiem laukumiņiem tā, lai katru dāmu apdraudētu vismaz viena cita?

7. klase

12.16. Atrisināt nevienādību $(3x - 1985)(7x - 4624) < 0$.

12.17. Vai skaitlis, kura pierakstā ir 101 vienīnieks un nav nekādu citu ciparu, dalās ar 101?

12.18. a) Doti trijstūra malu viduspunkti. Kā konstruēt trijstūri?
b) Doti izliekta piecstūra malu viduspunkti. Kā konstruēt piecstūri?

12.19. Plaknē atzīmēti 5 dažādi punkti, kuru abas koordinātas ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka starp šiem punktiem var atrast tādus divus punktus, ka to veidotā nogriežņa viduspunkta abas koordinātas arī ir veseli skaitļi.

12.20. Izliektā astoņstūrī katra mala un katra diagonāle jānokrāso vienā krāsā. Turklāt nogriežņiem, kas nokrāsoti vienādās krāsās, nedrīkst būt kopīgu punktu. Ar kādu mazāko krāsu skaitu to var izdarīt?

8. klase

12.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82 \\ 3x + 4y = 31. \end{cases}$$

12.22. Pierādīt, ka izteiksmes

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right)\left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right)$$

vērtība nemainās, ja abās iekavās nosvītro daļas (apskatām tikai gadījumu $x \geq 2$).

12.23. Doti 6 kvadrātvienādojumi $x^2 + p_i x + q_i = 0$ (i = 1; 2;... ; 6). Visi skaitļi p_1, p_2,... , p_6 ir dažādi. Katram vienādojumam ir 2 dažādas saknes. Pavisam visiem vienādojumiem kopā ir 4 dažādas saknes. Atrast šo dažādo sakņu summu.

12.24. Plakne sadalīta regulāru trijstūru režģī. Par attālumu starp diviem trijstūriem sauksim mazāko gājienu skaitu, kāds vajadzīgs, lai no viena trijstūra aizietu uz otru, ar katru gājienu šķērsojot vienu malu (bet neejot caur virsotni). Katrs trijstūris nokrāsots vienā no trim dažādām krāsām. Pierādīt, ka var atrast divus trijstūrus attālumā 4, kas nokrāsoti vienā un tajā pašā krāsā.

12.25. Šaurleņķa trijstūrī no katras malas viduspunkta novilkti perpendikuli pret abām pārējām malām. Pierādīt. ka tā sešstūra laukums, kuru ierobežo šie perpendikuli, vienāds ar pusi no trijstūra laukuma.

9. klase

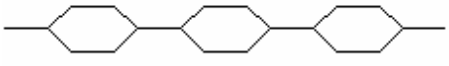
12.26. Vienā un tajā pašā riņķa līnijā ievilkts regulārs trijstūris un regulārs deviņstūris. Kuram no tiem visu malu kvadrātu summa ir lielāka?

12.27. Pierādīt, ka skaitļiem a, b un c ir vienādas zīmes tad un tikai tad, ja pastāv nevienādības $ab + bc + ac > 0$ un $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} > 0$.

12.28. Ar kādu vislielāko divnieka pakāpi dalās reizinājums
$(n + 1)(n + 2)... (2n - 1)(2n)$, $n \in N$?

12.29. Pa apli izrakstīti vairāki skaitļi, viens no tiem ir 1, citi 0. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties trīs pēc kārtas uzrakstītus skaitļus, no kuriem vidējais ir 1, un mainīt tos visus trīs: 1 aizstāt ar 0, bet 0 ar 1. Atkārtojot šādus gājienus, gribam panākt, lai uz apļa būtu tikai nulles. Vai to var izdarīt, ja sākumā ir a) 1985 skaitļi; b) 1986 skaitļi?

12.30. Dzelzceļa mezgla shēma redzama 23. zīmējumā**.** No kreisās puses mezglam tuvojas 8 lokomotīves, kas var kustēties tikai no kreisās uz labo pusi (kustības ātrums var mainīties). Pierādīt, ka lokomotīves var pārkārtoties jebkurā kārtībā. (Katrs posms ir pietiekoši garš, lai uzņemtu kaut visas lokomotīves reizē.)



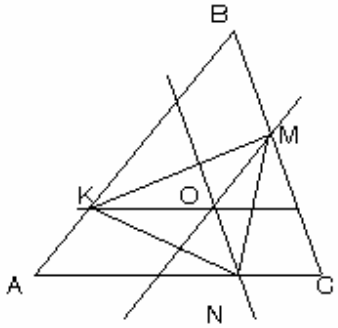
23. zīm.

10. klase

12.31. Vai eksistē tāds a, ka vienlaikus izpildās nevienādības sina > 0, sin2a < 0, sin3a > 0, sin4a < 0, sin5a > 0?

12.32. Pierādīt, ka dalot pirmskaitli ar 30, atlikumā atkal iegūst pirmskaitli vai 1.

12.33. Caur punktu O trijstūra ABC iekšpusē novilktas trīs taisnes paralēli trijstūra malām (skat. 24. zīm.). Pierādiet, ka trijstūra MNK laukums nepārsniedz trešdaļu no trijstūra ABC laukuma.



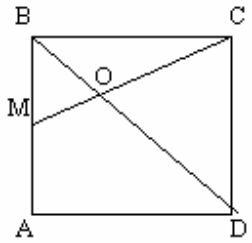
24. zīm.

12.34. Izsacīt skaitli 1985 formā $1985 = a_0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + \ldots + a_n \times 2^n$, kur katrs no skaitļiem a_0, a_1, a_2,... , a_n ir 0, 1 vai -1, turklāt $a_0a_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \ldots = a_{n-1}a_n = 0$.

12.35. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Vispirms A nokrāso vienu rūtiņu zilu, pēc tam B -- kādu vēl nenokrāsotu rūtiņu sarkanu. Arī turpmāk viņi pēc kārtas krāso pa vienai vēl nenokrāsotai rūtiņai (A -- zilā krāsā, B -- sarkanā), turklāt A drīkst krāsot tikai tādu rūtiņu, kurai ar kādu zilu rūtiņu ir kopīga mala, bet B drīkst krāsot jebkuru rūtiņu. Vai B var panākt, lai A pietrūktu gājienu?

11. klase

12.36. Kvadrātā ABCD punkts M ir malas AB viduspunkts. Aprēķināt trijstūra BMO laukumu, ja AB = 1 (25. zīm.).



25. zīm.

12.37. Plaknē jānovieto n punkti tā, lai visi attālumi starp tiem būtu pa pāriem dažādi un pieņemtu visas vērtības 1; 2; 3;...; $\frac{n(n-1)}{2}$. Vai to var izdarīt, ja a) n = 4; b) n = 1985?

12.38. Vai $2^{70} + 3^{70}$ dalās ar 13?

12.39. Pierādīt, ka nevienādībai $|a + b \cdot \cos x + c \cdot \cos 2x + d \cdot \cos 3x| \geq |b + d|$ eksistē atrisinājums, lai kādi arī būtu skaitļi a, b, c un d.

12.40. Pierādīt, ka plaknē var atzīmēt 4 punktus tā, lai
a) nekādi 3 no tiem nebūtu uz vienas taisnes;
b) visi attālumi starp tiem būtu pa pāriem dažādi;
c) katrai 4 posmu slēgtai lauztai līnijai, kuras visas virsotnes atrodas šajos punktos, būtu viens un tas pats garums.
Kā šo rezultātu var vispārināt telpā?

13. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1985./86. m.g.)**

4. klase

13.1. Cipari no 9 līdz 1 uzrakstīti rindā: 987654321. Ievietojot starp dažiem no tiem aritmētisko darbību zīmes un iekavas, var iegūt rezultātā dažādus skaitļus. Piemēram, (987 - 65) × (4 - 3) : 2 +1 = 462.
Kā iegūt skaitļus a) 20; b) 100; c) 1986?

13.2. Naturāls skaitlis n satur tikai ciparus 0, 1 un 2, turklāt vienīnieku tā pierakstā ir par 1 vairāk nekā divnieku. Pierādīt, ka n + 1986 nedalās ar 3.

13.3. Plaknē novilktas 4 dažādas taisnes. Cik dažādu krustpunktu tām var būt? Atrast visas iespējas un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

13.4. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Vai var nokrāsot tajā dažas rūtiņas tā, lai katrā horizontālē , katrā vertikālē un katrā diagonālē būtu nokrāsots pāra skaits rūtiņu? (Par diagonālēm sauc ne tikai abas lielās diagonāles, kas katra sastāv no 6 rūtiņām, bet arī tām ‘‘paralēlās’’ rūtiņu virknes, kas

sastāv no 5, 4, 3, 2 vai 1 rūtiņas (stūra rūtiņas); tātad šajā uzdevumā minētajai tabulai ir 22 diagonāles.)

13.5. Dots ar ūdeni piepildīts trauks, kura tilpums ir 21 litrs. Doti arī tukši 6 litru un 12 litru trauki. Uz traukiem nav nekādu iedaļu. Vai izmantojot tikai šos traukus, var vienā no tiem atdalīt a) 3 litrus; b) 5 litrus?

5. klase

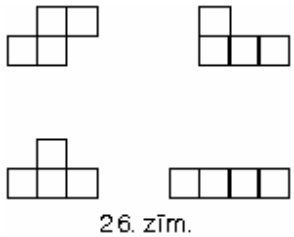
13.6. Septiņdesmitvietīgā autobusā brauc ekskursanti. Trešā daļa no tiem prot angļu valodu, ceturtā daļa -- vācu valodu, piektā daļa -- franču valodu. Cik vietas autobusā ir neaizņemtas?

13.7. Pa apli izrakstīti 1986 skaitļi. Katru skaitli pareizināja ar tam sekojošu skaitli pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Vai var gadīties, ka no iegūtajiem reizinājumiem
a) tieši 993 ir pozitīvi un 993 negatīvi;
b)tieši 1000 pozitīvi un 986 negatīvi?

13.8. Kubs sastādīts no 10×10×10 maziem kubiņiem. Cik taisnu leņķu uz kuba virsmas veido mazo kubiņu šķautnes?

13.9. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt pa skaitlim tā, lai visu ierakstīto skaitļu summa būtu pozitīva, bet katrā 2×2 rūtiņu lielajā kvadrātā ierakstīto skaitļu summa -- negatīva?

13.10. 7×7 rūtiņas lielā kvadrātā nokrāsot 20 rūtiņas tā, lai neviena figūra, kas parādīta 26. zīmējumā nesastāvētu tikai no nenokrāsotām rūtiņām, neatkarīgi no tā, kādā stāvoklī tā ir novietota kvadrāta iekšpusē.

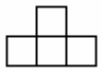


26. zīm.

6. klase

13.11. Atrisināt vienādojumu $\frac{x+1}{x+2}=\frac{2x+1}{2x+2.}$

13.12. Vai taisnstūri ar izmēriem a) 50×51; b) 20×20; c) 10×10 rūtiņas var sagriezt tādās figūrās, kāda attēlota 27.zīmējumā?



27. zīm.

13.13. Jānis grib uzrakstīt četrus skaitļus uz zilām kartītēm un četrus -- uz sarkanām tā, lai izpildītos šāda īpašība: aprēķinot visos iespējamos veidos divu skaitļu summu, no kuriem viens ir uz zilās, bet otrs -- uz sarkanās kartītes, jāiegūst 16 pēc kārtas ņemti veseli pozitīvi skaitļi. Vai Jānis to var izdarīt?

13.14. Plaknē jāatzīmē n zili punkti tā, lai attālumā 1 cm no zilā punkta atrastos tieši 3 citi zili punkti. Kāds ir mazākais n, kad to var izdarīt?

13.15. Vai taisnstūrī, kas sastāv no 3×6 kvadrātiskām rūtiņām, var daļu rūtiņu nokrāsot melnas un atlikušās baltas tā, lai nekādu četru vienā krāsā nokrāsotu rūtiņu centri neatrastos tāda taisnstūra virsotnēs, kura malas paralēlas dotā taisnstūra malām?

7. klase

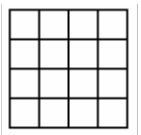
13.16. Atrisināt nevienādību $x(x+1)(x+2) > 0$.

13.17. Izliektā sešstūrī ABCDEF diagonāles AD, BE un CF krustojas vienā punktā O, bet sešstūra pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Pierādīt, ka O ir sešstūra simetrijas centrs.

13.18. Vai visu naturālo skaitļu 1 līdz 50 reizinājums dalās ar 2^{50}?

13.19. Doti 5 skaitļi, kuru summa ir 0. Pierādīt, ka tos var apzīmēt ar burtiem a, b, c, d un e tā, lai vienlaikus būtu spēkā nevienādības $a \geq 0$, $a + b \geq 0$, $a + b + c \geq 0$, $a + b + c + d \geq 0$.

13.20. Vai kvadrātisku režģi, kas attēlots 28. zīmējumā, var uzzīmēt, novelkot
a) 5 lauztas līnijas, katru ar garumu 8;
b) 8 lauztas līnijas, katru ar garumu 5?
Katras rūtiņas malas garums ir 1.



28. zīm.

8. klase

13.21. Aritmētiskā progresijā a_1, a_2, a_3, a_4,... dots, ka $a_{100} + a_{200} = 1986$. Aprēķināt $a_{50} + a_{250}$. Vai var aprēķināt $a_{100} + a_{300}$?

13.22. Regulāra astoņstūra ABCDEFGH malas garums ir 1. Apskatām tos trijstūrus, kuros diagonāles BH, BG, BF, BE, BD sadala trijstūri ABC. Pierādīt, ka katrā no šiem trijstūrīšiem vienas malas garums ir vienāds ar abu pārējo malu garumu reizinājumu.

13.23. Trijstūra laukums un to malu garumi ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka tam līdzīgu trijstūri var uzzīmēt rūtiņu lapā tā, ka visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs. (Rūtiņu malas garums ir 1.)

13.24. Par naturāla skaitļa n fragmentu sauc katru skaitli, kuru iegūst, nosvītrojot vienu vai vairākus skaitļa n pēdējos ciparus. Piemēram, 1986 fragmenti ir 198, 19 un 1. Pierādīt šādu apgalvojumu: ja no naturāla skaitļa atņem deviņkāršotu visu fragmentu summu, tad iegūst sākotnējā skaitļa ciparu summu.

13.25. n kastēs kaut kā izvietotas 2n konfektes. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienai konfektei. Pierādīt, ka otrais spēlētājs var rīkoties tā, lai abas pēdējās vēl nepaņemtās konfektes paliktu vienā kastē.

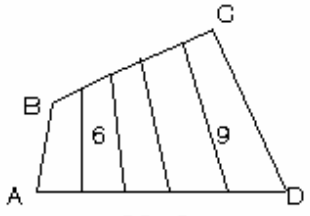
9. klase

13.26. Funkcija f(x) ir nepārtraukta un definēta visiem x. Bez tam katram x pastāv vienādība f(2x) = f(x). Atrast visas šādas funkcijas.

13.27. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumus
a) $2^x + 1 = y^{2n}$;
b) $2^x + 1 = y^{n+1}$.

13.28. Skaitļu virkni x_1, x_2, x_3,... definē šādi: $x_1 = 3$; $\sqrt{x_{n+1}} = 2\sqrt{x_n} + \sqrt{3(1+x_n)}$, ja $n \geq 1$. Pierādīt, ka visi tās locekļi ir veseli skaitļi.

13.29. Četrstūra ABCD divas pretējās malas sadalītas katra 5 vienādos nogriežņos un dalījuma punkti savienoti taišņu nogriežņiem. Divu izveidojušos četrstūrīšu laukumi ir doti (29. zīm.). Atrast ABCD laukumu.



29. zīm.

13.30. Pa apli kaut kādā kārtībā novietotas 15 melnas un 15 baltas figūriņas. Ar vienu gājienu var izvēlēties divas figūriņas un mainīt tās vietām. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru garantēti var panākt, ka nevienā vietā divas vienas krāsas figūriņas neatrodas blakus?

10. klase

13.31. Atrisināt vienādojumu sinx × sin2x = cosx × cos2x.

13.32. Atrast visu dažādo starpību $\left(\sqrt[i]{i} - \sqrt[j]{j}\right)$ reizinājumu, ja 1 < i < j < 1986, i un j ir naturāli skaitļi.

13.33. Funkcija f(x) ir periodiska ar periodu 64. Definējam funkciju virkni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... : $f_1(x) = f(x)$; $f_{n+1}(x) = f_n(x - 1) \times f_n(x + 1)$, ja $n \geq 1$. Pierādīt, ka $f_{1986}(x) \geq 0$ visiem x.

13.34. Vai var konstruēt daudzskaldni M un punktu O šī daudzskaldņa iekšpusē tā, lai O ortogonālā projekcija pret katru M skaldni atrastos nevis pašā skaldnē, bet tās turpinājumā?

13.35. Trijstūrī ievilka riņķa līnija w ar rādiusu r. Bez tam novilktas trīs dažādas riņķa līnijas, katra no tām pieskaras w un divām trijstūra malām. Pierādīt, ka šo triju riņķa līniju rādiusu summa nav mazāka par r.

11. klase

13.36. Vai funkcija a) $\sin x + \sin\frac{1986}{1985}x$, b) $\sin x + \cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{3}x$ ir periodiska?

13.37. Dots, ka a -- pāra skaitlis, $a \geq 2$. Pierādīt, ka skaitlis $a^{2^n} - 1$ dalās ar vismaz n dažādiem pirmskaitļiem.

13.38. Lodes iekšpusē fiksēts punkts M. Caur M novilktas trīs savstarpēji perpendikulāras šīs lodes hordas. Pierādīt, ka šo hordu garumu kvadrātu summa nav atkarīga no tā, kādas hordas novilktas.

13.39. Daudzskaldņa M katra šķautne nokrāsota vienā no n krāsām. Katrā virsotnē ieejošās šķautnes nokrāsotas dažādās krāsās. Starp krāsām ir sarkanā un zilā, turklāt sarkano šķautņu ir vairāk nekā zilo. Pierādīt, ka šķautnes var nokrāsot citā veidā tā, ka sarkano šķautņu skaits par 1 samazinās, zilo šķautņu skaits par 1 palielinās un joprojām katrā virsotnē ieejošās šķautnes visas nokrāsotas dažādās krāsās.

13.40. Kongresā piedalās 1986 zinātnieki. Katrs no tiem runā ne vairāk kā 5 valodās. Zināms, ka starp katriem trim zinātniekiem var atrast divus, kas runā vienā un tajā pašā valodā. Pierādīt, ka var atrast 200 zinātniekus, kas runā vienā un tajā pašā valodā.

14. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1986./87. m.g.)**

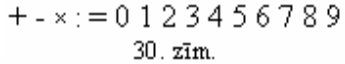
4. klase

14.1. Uzzīmēt piemēru, kas parāda, ka taisne var sadalīt astoņstūri a) 2 daļās; b) 3 daļās; c) 4 daļās; d) 5 daļās.

14.2. Cik ir tādu divciparu skaitļu, kas nesatur ne ciparu 0, ne ciparu 9? Atrast visu šādu skaitļu summu.

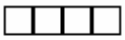
14.3. Naturāla skaitļa n pierakstā ir tikai cipari 0, 1 un 2, turklāt vienīnieku ir par 1 vairāk nekā divnieku. Pierādīt, ka n + 198619871988 nedalās ar 6.

14.4. Pa Ziedu pilsētas telegrāfu var noraidīt 30. zīmējumā attēlotās zīmes. Pārraidot skaitlisku vienādību, vienā zīmē tika pieļauta kļūda un tika pārraidīta vienādība 9 × 5 + 1038 = 1983. Kādu vienādību patiesībā vajadzēja pārraidīt?



30. zīm.

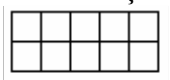
14.5. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Tās visas sākumā ir baltas. Kāds vismazākais daudzums rūtiņu jānokrāso melnas tā, lai katra 31. zīmējumā attēlotā figūra, lai kā tā arī būtu novietota kvadrāta iekšpusē, saturētu vismaz vienu melnu rūtiņu?



31. zīm.

5. klase

14.6. Tabulā ir 2 rindiņas un 5 kolonnas (32.zīm.). Katrā rindiņā jāieraksta skaitļi no 1 līdz 5 (katrā rūtiņā -- citu skaitli) tā, lai ierakstīto skaitļu starpības visās kolonnās būtu dažādas (dažādu skaitļu starpību atrod, no lielākā skaitļa atņemot mazāko).
Vai to var izdarīt?
Vai līdzīgu uzdevumu var atrisināt tabulai ar 2 rindiņām un 10 kolonnām?



32. zīm.

14.7. Pa apli uzrakstīti 1987 skaitļi. Katru skaitli pareizināja ar tam sekojošu pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Vai var gadīties, ka
a) no iegūtajiem reizinājumiem tieši 994 ir pozitīvi un tieši 993 -- negatīvi;
b) no iegūtajiem reizinājumiem tieši 1001 ir pozitīvi un tieši 986 -- negatīvi?

14.8. Istabā vienmērīgi nosēžas putekļi -- katru diennakti 1 g. Mazgājot grīdu, putekļu daudzums samazinās par 90%, bet slaukot par 50%. Grīdu mazgā reizi nedēļā. Minimāli cik reižu nedēļā

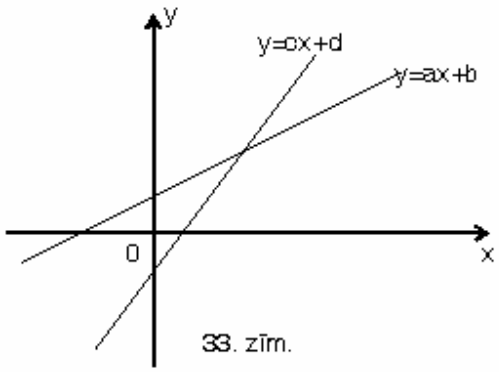
grīda jāslauka, lai nevienu brīdi uz grīdas nebūtu vairāk par 4 g putekļu? Pirmās nedēļas sākumā istaba ir tīra.

14.9. Vai var uzcelt mūra sienu astoņstūra formā un ārpus tās nostādīt sargkareivi tā, lai viņš nevienu no astoņiem taisnajiem sienas posmiem neredzētu pilnībā?

14.10. Karalim ir 33 bruņinieki; katru vakaru karalis sūta sardzē 9 vai 10 no tiem (pēc savas izvēles). Kāds ir mazākais vakaru skaits, pēc kura var gadīties, ka visi bruņinieki devušies sardzē vienādu reižu skaitu?

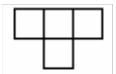
6. klase

14.11. Koordinātu plaknē konstruēti funkciju y = ax + b un y = cx + d grafiki (33. zīm.). Pierādīt, ka (c - a)(b - d) > 0.



33. zīm.

14.12. Vai iespējams taisnstūri ar izmēriem a) 50x51; b) 20x20; c) 10x10 rūtiņas sagriezt tādās figūrās, kāda attēlota 34.zīmējumā?


34. zīm.

14.13. Vai var uzcelt mūra sienu sešstūra kontūra formā un tās iekšpusē nostādīt sargkareivi tā, lai viņš nevienu no sešiem taisnajiem sienas posmiem neredzētu pilnībā?

14.14. Vai kvadrātu var sagriezt mazākos kvadrātos tā, lai starp griežot iegūtajiem kvadrātiem būtu tieši 5 dažādi kvadrāti? Bet tieši 1987 dažādi?

14.15. Uz šaha galdiņa novietoti vairāki torņi tā, ka katrs neaizņemtais lauciņš ir pa sitienam vismaz vienam tornim. Pierādīt, ka daļu torņu var noņemt no galdiņa tā, ka uz tā paliek tikai 8 torņi un arī tagad katrs neaizņemtais lauciņš ir pa sitienam vismaz vienam tornim. (piezīme: tos 8 torņus, kas paliek uz galdiņa, aizliegts pārvietot uz citiem lauciņiem.)

7. klase

14.16. Atrisināt nevienādību $x(x + 1)(x + 2) > 0$.

14.17. Vai var uz skaitļu ass atzīmēt 3 nogriežņus tā, ka katra nogriežņa garums ir pāra skaitlis, bet katru divu nogriežņu kopējās daļas garums -- nepāra skaitlis?

14.18. No 1987 vienādiem kubiņiem jāsaliek taisnstūra paralēlskaldnis. Kubiņa izmēri ir 1 cm × 1 cm × 1 cm. Kādi var būt paralēlskaldņa izmēri?

14.19. Sešciparu skaitļa $\overline{abcdef}$ ciparus pārlika citā kārtībā un ieguva skaitli $\overline{fdebca}$. Dotā un iegūtā skaitļu starpība dalās ar 271. Pierādīt, ka b = d un c = e.

14.20. Jānim ir 6 atsvaru komplekts. Ar atsvariem no šī komplekta var līdzsvarot a + 1 gramus, a + 2 gramus, a + 3 gramus,... , a + 63 gramus, kur a -- kaut kāds vesels skaitlis (atsvarus liek tikai uz viena svaru kausa). Atrast, cik sver Jāņa atsvari.

8. klase

14.21. Taisnleņķa trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir 10 cm, ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir 2 cm. Atrast trijstūra malu garumus.

14.22. Dota bezgalīga aritmētiskā progresija a_1, a_2, a_3,.... Zināms, ka $a_{113} + a_{161} > a_{120} + a_{153}$. Pierādīt, ka progresijā noteikti ir skaitlis, kas lielāks par 1987.

14.23. Izliektā piecstūrī novilktas visas diagonāles, kas sadala piecstūri 11 daļās. Pierādīt, ka visu 11 daļu laukumi nevar būt vienādi.

14.24. Pierādīt, ka jebkurā izteiksmju sistēmā

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 * 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 * 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 * 0 \end{cases}$$

zvaigznītes var aizstāt ar ‘‘>‘‘ vai ‘‘<‘‘ zīmēm tā, lai iegūtajai nevienādību sistēmai nebūtu atrisinājuma (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 -- skaitliski koeficienti).

14.25. Uz tāfeles uzrakstīti veseli pozitīvi skaitļi no 1 līdz n ieskaitot. Divi spēlētāji pēc kārtas nodzēš pa vienam skaitlim, kamēr uz tāfeles paliek tikai divi skaitļi. Ja tiem ir kopējs dalītājs, kas lielāks par 1, tad uzvar otrais spēlētājs; pretējā gadījumā uzvar pirmais spēlētājs. Kas uzvar, pareizi spēlējot, ja a) n = 1986; b) n = 1987?

9. klase

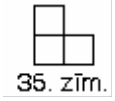
14.26. Atrisināt vienādojumu $\cos 2x = \sin x$.

14.27. Dots, ka $0 < y < 1$. Pierādīt, ka y var izsacīt kā 10 bezgalīgu decimāldaļu summu, katrai no kurām aiz komata ir tikai cipari 0 un 7 (varbūt arī tikai viens no tiem).

14.28. Dots, ka $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Aprēķināt summu

$$f\left(\tfrac{1}{100}\right)+f\left(\tfrac{2}{100}\right)+\ldots+f\left(\tfrac{99}{100}\right)+f\left(\tfrac{100}{100}\right)+f\left(\tfrac{100}{99}\right)+\ldots+f\left(\tfrac{100}{2}\right)+f\left(\tfrac{100}{1}\right).$$

14.29. Kāds mazākais daudzums tādu figūru, kas parādītas 35.zīmējumā, jāievieto kvadrātā 8×8 rūtiņas, lai tajā vairs nevarētu novietot nevienu tādu figūru bez pārklāšanās ar jau novietotajām? Figūru kontūras iet pa kvadrāta malām vai rūtiņu līnijām.



35. zīm.

14.30. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta pa vienam veselam pozitīvam skaitlim (tiem visiem deviņiem ir jābūt dažādiem) tā, lai visās trijās rindiņās un visās trijās kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi.
a) Pierādīt, ka to var izdarīt.
b) Pierādīt, ka to var izdarīt tā, lai visi reizinājumi būtu vienādi ar 120.
c) Vai var panākt, lai reizinājumi būtu mazāki par 120?

10. klase

14.31. Atrisināt vienādojumu $\cos 2x = \sin x + \cos x$.

14.32. Trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts O. Taisnes AO, BO, CO sadala ABC sešos mazos trijstūrīšos. Ir zināms, ka piecu trijstūrīšu laukumi ir vienādi. Pierādīt, ka sestā trijstūrīša laukums ir tāds pats.

14.33. Tenisa turnīrā piedalījās 10 tenisisti. Katrs spēlēja ar katru citu vienu spēli (neizšķirtu nav). Pirmais spēlētājs guva x_1 uzvaras un piedzīvoja y_1 zaudējumus, otrais guva x_2 uzvaras un piedzīvoja y_2 zaudējumus, utt. Pierādīt, ka

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

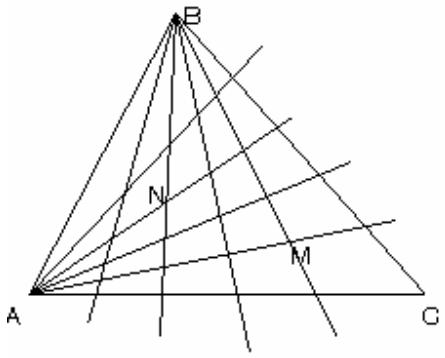
14.34. Vai kubu, kura izmēri ir 6×6×6, var sagriezt 20 daļās tā, lai no tām varētu salikt taisnstūra paralēlskaldni, kura izmēri ir 1×1×216?

14.35. Divi spēlētāji pēc kārtas raksta uz tāfeles naturālus skaitļus, kas nepārsniedz 10. Aizliegts rakstīt tādus skaitļus, kas ir jau uzrakstīto skaitļu dalītāji. Zaudē tas, kas nevar izdarīt gājienu. Noskaidrot, kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija, un atrast to.

11. klase

14.36. Kādiem naturāliem n skaitlis $2^n + 65$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

14.37. Trijstūrī ABC leņķi A un B sadalīti katrs 5 vienādās daļās. Pierādīt, ka $\angle AMN = \angle BMN$ (36.zīm.)



36. zīm.

14.38. Pierādīt, ka katrā trijstūrī, kura leņķa lielumi ir a, b un g, pastāv nevienādība $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g > \frac{3}{4}$.

14.39. Kvadrāts sastāv no n×n rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis; neviens ierakstītais skaitlis nav lielāks par 1 un nav mazāks par -1. Bez tam zināms, ka katrā kvadrātā, kas sastāv no 2×2 rūtiņām, ierakstīto skaitļu summa ir 0. Kāda vislielākā vērtība var būt visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summai?

14.40. Divas vienādas regulāras četrstūra piramīdas novietotas tā, ka to pamati sakrīt, bet virsotnes nesakrīt. Apskatām tās astoņas plaknes, kurās atrodas šo piramīdu sānu skaldnes. Cik daļās šīs plaknes sadala telpu?

15. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1987./88. m.g.)

4. klase

15.1. Vai visu veselo pozitīvo skaitļu summa no 1 līdz 1988 ieskaitot ir pāra vai nepāra skaitlis? Atbildi pamatot!

15.2. Uzrakstīt decimāldaļskaitli, kura ciparu summa ir tieši 20 un kas atšķiras no 0,5 mazāk nekā par 0,00000000008.

15.3. Vai ar diviem cipariem ‘‘1’’ un četriem cipariem ‘‘0’’ var uzrakstīt skaitli, kuram ir tieši divi dažādi dalītāji? Atbildi pamatot!

15.4. Dots, ka a + b = 10, c + d =10, e + f = 10. Aprēķināt izteiksmes ac + de + bd + ce + bc + df + ae + cf + be + ad + bf + af vērtību.

15.5. Katra kuba skaldne sadalīta četros vienādos kvadrātos. Vai šos kvadrātus var nokāsot ar a) divām; b) trim krāsām tā, lai vienādā krāsā nokrāsotiem kvadrātiem nebūtu kopējas malas? Atbildi pamatot!
Piezīme: katru kvadrātu krāso vienā krāsā.

5. klase

15.6. Sakārtot pēc lieluma skaitļus $\frac{16}{17};\frac{442}{439};\frac{11}{12};\frac{391}{389};\frac{21}{23}$.

15.7. Atrast naturālu skaitli, kuram ir tieši a) divi; b) seši; c) simts dažādi dalītāji.

15.8. Plaknē novilkts stars ar sākumpunktu O. Andris sāk pakāpeniski zīmēt citus starus ar sākumpunktu O; katrs nākamais stars tiek iegūts no iepriekšējā, pagriežot to par 210° pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Cik dažādus starus Andrim izdosies uzzīmēt?

15.9. Pa apli stāv 1001 cilvēks. Katrs nosauc naturālu skaitli. Pēc tam katrs saskaita tos abus skaitļus, ko nosaukuši viņa kaimiņi. Pierādīt, ka vismaz viens rezultāts atšķirsies no 999.

15.10. Andris iedomājies vienu no skaitļiem 1; 2; 3. Juris drīkst viņam uzdot jautājumus, uz kuriem iespējamas atbildes ‘‘jā’’, ‘‘nē’’, ‘‘nezinu’’. Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Juris var uzminēt Andra iedomāto skaitli?

6. klase

15.11. Koordinātu plaknē atzīmēti visi tie punkti (x, y), kuru koordinātas apmierina sakarību $x^2 + y^2 = 25$. Vai radusies līnija ir kādas funkcijas grafiks?

15.12. Sadalīt izteiksmi $a^9 + b^9$ trijos reizinātājos ar veseliem koeficientiem.

15.13. Viena trijstūra divas malas un augstums no to kopējās virsotnes attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un augstumu no to kopējās virsotnes. Vai šie trijstūri noteikti ir vienādi?

15.14. Klasē katra meitene draudzējas ar 10 zēniem un katrs zēns -- ar 10 meitenēm. Pierādiet, ka klasē ir vienāds skaits zēnu un meiteņu!

15.15. Izliekta sešstūra virsotnes nokrāsotas sarkanas. Kāds ir mazākais zilo punktu skaits, ko var atzīmēt sešstūra iekšpusē tā, lai katrā trijstūrī ar trim sarkanām virsotnēm iekšpusē atrastos vismaz viens zils punkts?

7. klase

15.16. Dots, ka $a > b$ un $x > y$. Pierādīt, ka $ax + by > ay + bx$.

15.17. Rūtiņas malas garums ir 1. Rūtiņu lapā novilktas divas paralēlas taisnes. Starp tām neatrodas nevienas rūtiņas virsotne. Kāds ir lielākais iespējamais attālums starp abām šīm taisnēm?

15.18. Dots, ka a un b -- naturāli skaitļi un $\frac{a}{b}$ -- bezgalīga periodiska decimāldaļa. Pierādīt, ka tās periods nesatur vairāk kā b - 1 ciparus.

15.19. Vai eksistē tāds trijstūris, kuram visas malas ir dažādas un kuru var sagriezt divos vienādos trijstūros?

15.20. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Katrā rūtiņā dzīvo pa vabolei. Pēc signāla visas vaboles vienlaikus pārrāpo uz citām rūtiņām -- katra uz tādu jaunu rūtiņu, kurai ar iepriekšējo mājvietu ir kopējs stūris (bet ne kopēja mala). Var gadīties tā, ka vairākas vaboles aizrāpo uz vienu un to pašu rūtiņu.
Kāds ir mazākais iespējamais rūtiņu skaits, kas pēc pārvietošanās paliek tukšas?

8. klase

15.21. Dots, ka skaitļi a_1, a_2, a_3,... , a_n veido aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka skaitļi $2^{a_1};2^{a_2};\cdots;2^{a_n}$ veido ģeometrisku progresiju.

15.22. Dots, ka x > 1, x -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka skaitlim x^{12} - 1 ir vismaz 10 dažādi dalītāji.

15.23. Dots izliekts četrstūris ABCD. Uz tā malām AB, BC, CD un DA atzīmēti attiecīgi punkti M, N, K un L tā, ka MN || AC, NK || BD, KL || AC. Pierādīt, ka ML || BD.

15.24. Dots, ka $a^5 - a^3 + a = 2$. Pierādīt, ka $a^6 > 3$.

15.25. Kādā valstī dažas pilsētas savienotas ar aviolīnijām. Pa katru aviolīniju var lidot abos virzienos; nevienai aviolīnijai nav citu nosēšanās vietu kā vienīgi galapunktos. Zināms, ka no galvaspilsētas iziet tieši 31 aviolīnija, no Tullas -- tieši viena aviolīnija, no visām citām pilsētām -- tieši pa 16 aviolīnijām.
Pierādīt, ka no galvaspilsētas var aizlidot uz Tullu (varbūt ar pārsēšanos).

9. klase

15.26. Dots, ka sin x = sin 2x. Vai no tā var secināt, ka sin x = sin 3x?

15.27. Izliektā sešstūrī ABCDEF no sešu trijstūru ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB laukumiem četri ir vienādi. Pierādīt, ka viena no šī sešstūra malām ir paralēla kādai no tā diagonālēm..

15.28. Pierādīt, ka katrā bezgalīgā decimāldaļā var tā pārkārtot ciparus, lai iegūtu bezgalīgu periodisku decimāldaļu.

15.29. Rūtiņu lapā uzzīmēta riņķa līnija ar rādiusu R un ar centru kādas rūtiņas virsotnē. Uz šīs riņķa līnijas atrodas tieši 1988 rūtiņu virsotnes; rūtiņas malas garums ir 1. Pierādīt, ka vai nu R, vai $R\sqrt{2}$ ir naturāls skaitlis.

15.30. Dots, ka x un y -- racionāli skaitļi un $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$. Pierādīt, ka (1 - xy) ir racionāla skaitļa kvadrāts.

10. klase

15.31. Dots, ka funkcijām $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ eksistē atvasinājumi. Pierādīt, ka

$$\left(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4\right)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot f_4 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \cdot f_4 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4'.$$

15.32. Dots, ka $a + b = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Atrast izteiksmes ab^2 lielāko iespējamo vērtību.

15.33. Vai eksistē tāds izliekts daudzskaldnis ar 8 skaldnēm, kura visas skaldnes ir četrstūri?

15.34. Izliektā piecstūrī ABCDE punkti M, K, N, L ir attiecīgi malu AB, BC, CD, DE viduspunkti; X ir MN viduspunkts, Y ir KL viduspunkts. Pierādīt, ka $XY = \frac{1}{4}AE$.

15.35. Rūtiņu lapā uzzīmēts daudzstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs un visu malu garumi ir veseli skaitļi (rūtiņas malas garums ir 1). Pierādīt, ka šī daudzstūra perimetrs ir pāra skaitlis.

11. klase

15.36. Vai eksistē tāds x, ka trīs no skaitļiem sin x; cos x; tg x; ctg x ir savā starpā vienādi?

15.37. Dots, ka summa 1 + 2 + 3 +... + (n - 1) + n dalās ar 1988. Atrast
a) kaut vienu tādu n;
b) mazāko tādu n.

15.38. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3 = x_3^3 + x_4 = x_4^3 + x_5 = x_5^3 + x_1 = 10.$$

15.39. Regulāra trijstūra ABC iekšpusē izraudzīti divi punkti M un N. Vai noteikti var konstruēt trijstūra piramīdu, kuras šķautņu garumi ir AM, BM, CM, AN, BN, CN?

15.40. Dotas regulāra 1988-stūra virsotnes. Uzzīmēta slēgta lauzta līnija ar 1988 posmiem, kuras visas virsotnes ir dotie punkti. Vai var gadīties, ka nekādi divi šīs līnijas posmi nav paralēli?

16. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 4.-11. klasei (1988./89. m.g.)**

4. klase

16.1. Vai vienādība a (b + c) +b (c +d) + c (d +a) + d (a + b) = 8 (a + b + c + d) pastāv visām iespējamām burtu a, b, c, d vērtībām? Atbildi pamatot.

16.2. Dots, ka a dalās ar b, b -- ar c, c -- ar d, d -- ar a. Pierādīt, ka a + b + c + d dalās ar 4.

16.3. Rindā uzrakstīti visi veselie pozitīvie skaitļi no 1 līdz 1989 ieskaitot. Atrast visu uzrakstīto ciparu summu.

16.4. Uz 27 kartiņām uzrakstīti visi iespējamie trīsciparu skaitļi, kas sastāv tikai no cipariem 1, 2 un 3 (uz katras kartiņas uzrakstīts cits skaitlis; daži skaitļi satur tikai divus dažādus ciparus, dažiem visi cipari vienādi). Katra kartiņa ielikta vienā no kastītēm A, B un C. Zināms, ka kartiņas 111 un 122 ir ieliktas kastē A, kartiņa 222 -- kastē B, bet kartiņa 333 -- kastē C. Turklāt nekādas divas kartiņas, kurām atšķiras gan vienu, gan desmitu, gan simtu cipari, nav ieliktas vienā un tajā pašā kastē. Parādīt, kā var salikt kastēs pārējās kartiņas, lai šis nosacījums būtu izpildīts. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

16.5. Valstī ir 9 pilsētas. Katras divas no tām savienotas ar ceļu, kas citās pilsētās neieiet. Ceļu krustojumu ārpus pilsētām nav. Vai var uz visiem ceļiem noteikt vienvirziena kustību tā, lai katrā pilsētā pa četriem ceļiem varētu iebraukt un pa četriem -- no tās izbraukt?

5. klase

16.6. Atrast visu veselo skaitļu summu no -1000 līdz 1005 ieskaitot.

16.7. Dotas dažas zilas taisnas nūjiņas un dažas sarkanas taisnas nūjiņas. Gan zilo, gan sarkano nūjiņu kopgarums ir 1 metrs. Pierādīt, ka nūjiņas var salauzt sīkākos gabalos tā, ka visu zilo gabalu garumi ir dažādi un katram zilajam gabalam varēs atrast tāda paša garuma sarkano gabalu.

16.8. Uz riņķa līnijas pa vienai reizei izrakstīti naturāli skaitļi 1; 2; 3;... ; 1989. Katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem aprēķināsim to starpības moduli. Pierādīt, ka vismaz divi moduļi ir vienādi.

16.9. a) Plaknē novilktas n taisnes, kas kopā veido k krustpunktus. Vai noteikti var uzzīmēt n taisnes nogriežņus, kas kopā veido k krustpunktus?
b) Plaknē uzzīmēti x taisnes nogriežņi, kas kopā veido y krustpunktus. Vai noteikti var novilkt x taisnes, kas kopā veido y krustpunktus?

16.10. Uz 27 kartiņām uzrakstīti visi iespējamie trīsciparu skaitļi, kas sastāv tikai no cipariem 1, 2 un 3 (uz katras kartiņas uzrakstīts cits skaitlis; daži skaitļi satur tikai divus dažādus ciparus, dažiem visi cipari vienādi). Katra kartiņa ielikta vienā no kastēm A, B vai C. Pie tam zināms, ka kartiņas 111 un 122 ieliktas kastē A, kartiņa 222 -- kastē B, bet kartiņa 333 -- kastē C. Turklāt nekādas divas kartiņas, kurām atšķiras gan vienu, gan desmitu, gan simtu cipari, nav ieliktas vienā kastē. Kurā kastē ielikta kartiņa 312? Atbildi pamatot.

6. klase

16.11. Četrstūra ABCD diagonāles AC un BD krustojas punktā O. Dots, ka $\Delta AOB = \Delta COD$. Pierādīt, ka $\Delta COB = \Delta AOD$.

16.12. Dots, ka x, y, a, b, c, d -- pozitīvi skaitļi un $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Pierādīt, ka $\frac{x+a}{y+b} = \frac{x+a+c}{y+b+d}$.

16.13. Atrast skaitļa $\underbrace{999\cdots9}_{1989 \text{ cipari}}^{2}$ ciparu summu.

16.14. Plaknē novilktas 100 taisnes. Nekādas trīs no tām neiet caur vienu punktu. Pierādīt, ka katru no krustpunktiem var nokrāsot baltā, melnā vai sarkanā krāsā tā, lai ne uz vienas taisnes divi blakus esoši krustpunkti nebūtu nokrāsoti vienādi.

16.15. Bokas jaunkundzei ir 8x8 rūtiņu paliktnis, kas pārklāts ar dažiem 2x2 rūtiņu lieliem šokolādes gabaliņiem un dažiem 1x4 rūtiņu lieliem šokolādes gabaliņiem (atsevišķi gabaliņi savā starpā nepārklājas; neviena rūtiņa nav brīva). Kamēr jaunkundze izgāja no istabas, Karlsons apēda vienu 2x2 rūtiņas lielo gabaliņu. Lai to noslēptu, Brālītis no saviem krājumiem atnesa vietā vienu 1x4 rūtiņas lielu gabalu. Vai var gadīties, ka Brālītim un Karlsonam izdosies pārklāt paliktni pilnībā? Gabalus lauzt nedrīkst.

7. klase

16.16. Vai var atrast tādus veselus skaitļus m un n, ka $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$?

16.17. Uz taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūzas AB ņemts punkts M. No M novilkti perpendikuli ME un MF pret katetēm (E un F ir šo perpendikulu pamati). Kur jāizvēlas punkts M, lai nogriežņa EF garums būtu mazākais iespējamais?

16.18. Katrs no skaitļiem x_1; x_2; x_3;... ; x_{1989} ir vai nu +1, vai -1. Kāda lielākā un kāda mazākā vērtība var būt izteiksmei $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{1988}x_{1989} + x_{1989}x_1$?

16.19. Kādam četrciparu skaitlim visi cipari ir dažādi. Pierādīt, ka tā ciparus var salikt tādā kārtībā, ka iegūtais skaitlis nav pirmskaitlis.

16.20. Ir zināms, ka $59^2 - 43 \times 9^2 = -2$. Atrodiet tādus naturālus skaitļus x un y, ka $x^2 - 43y^2 = 1$. Pietiek atrast vienu šādu skaitļu pāri (x, y).

8. klase

16.21. Regulāra trijstūra un kvadrāta perimetri ir vienādi. Kuram no tiem ir lielāks laukums?

16.22. Atrast visu to naturālo skaitļu summu, kas nepārsniedz 1000 un nedalās ne ar 2, ne ar 5.

16.23. Visi skaitļi $x_1; x_2;... ; x_n$ pēc moduļa mazāki par 1. Dots, ka
$|x_1| + |x_2| + |x_3| +... + |x_n| = 10 + | x_1 + x_2 +... + x_n|$. Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

16.24. Dots leņķis un uz tā malas punkts A, kas nesakrīt ar leņķa virsotni. Tiek aplūkoti visi iespējamie trijstūri ABC, kuru virsotnes B un C atrodas uz vienas leņķa malas, bet apvilktā riņķa līnija pieskaras otrai leņķa malai punktā A. Pierādīt, ka visos šajos trijstūros ievilkto riņķa līniju centri atrodas uz vienas taisnes.

16.25. Kastes izmēri ir 25×89×1989. Vai to var piepildīt ar klucīšiem, kuru izmēri ir 1×5×5? Kastē nedrīkst palikt tukšas vietas; klucīši nedrīkst daļēji sniegties ārā no kastes.

9. klase

16.26. Dots, ka $\sin 3x = \sin 5x = 0$. Pierādīt, ka $\sin x = 0$.

16.27. Izmantojot aritmētisko operāciju zīmes, kvadrātsaknes un absolūtās vērtības (moduļa) zīmes, ka arī nevienādības zīmes, uzrakstīt nevienādību, kuras atrisinājumu kopa ir visu pozitīvo skaitļu pāri (x, y).

16.28. Vai regulāra 64-stūra virsotnes var savienot pa pāriem ar taisnes nogriežņiem tā, lai katra virsotne būtu savienota tieši ar vienu citu un visi 32 nogriežņi būtu dažāda garuma?

16.29. Uz taisnleņķa trijstūra ABC katetēm AC un BC ņemti attiecīgi iekšējie punkti E un F. Pierādīt, ka to perpendikulu pamati, kas no C vilkti pret taisnēm AB, AF, BE, EF, atrodas uz vienas riņķa līnijas.

16.30. Dots, ka a, b un c pozitīvi skaitļi. Pierādīt nevienādību
$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c \le a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$.

10. klase

16.31. Dots, ka $\sin x = \sin y$. Vai noteikti $\sin 2x = \sin 2y$? Vai noteikti

|sin 2x| = |sin 2y|?

16.32. Dots, ka a, b, c un d ir pozitīvi skaitļi un $a^2 < b$, $b^2 < c$, $c^2 < d$, $d^2 < a$. Pierādīt, ka visi skaitļi a, b, c un d nevar būt lielāki par 1.

16.33. Trijstūra ABC malas AC viduspunkts ir M; E un F ir malu AB un BC iekšējie punkti. Pierādīt, ka trijstūra EFM laukums mazāks par trijstūra AEM un MFC laukumu summu.

16.34. Taisnleņķa trijstūra ABC malu garumi ir veseli skaitļi; M -- tā mediānu krustpunkts. Pierādīt, ka trijstūru ABM, BCM, ACM laukumi ir pāra skaitļi.

16.35. Uz tāfeles cits aiz cita uzrakstīti 4 skaitļi: 9725, 7461, 6966, 9. Aiz šiem skaitļiem pierakstām to summu; ja tā ir piecciparu skaitlis, atmetam desmittūkstošu ciparu. Pēc tam pirmo skaitli nodzēšam, bet ar atlikušajiem atkārtojam tādu pašu operāciju, utt. Vai pienāks brīdis, kad uz tāfeles būs četri skaitļi 1989, 1989, 1989, 1989?

11. klase

16.36. Atrisināt vienādojumu sin x + cos x = cos 2x.

16.37. Kādiem naturāliem n skaitlis $n^2 + 1$ dalās ar n + 1?

16.38. Kādu maksimālo daudzumu torņu var novietot uz šaha galdiņa tā, lai katru torni apdraudētu ne vairāk kā viens cits? (Divi torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas vienā vertikālē vai vienā horizontālē un starp tiem neatrodas citas figūras.)

16.39. Dots, ka n -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka eksistē tādi veseli skaitļi a un b, kuriem ir spēkā nevienādības $n \le a^2 + b^2 \le n + 3\sqrt[4]{n}$.

16.40. Trijstūrveida lapas laukums ir 1. Pierādīt, ka šo lapu var vienreiz pārlocīt tā, lai, noliekot salocīto lapu uz galda, tās pārklātais laukums būtu mazāks par $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

17. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1989./90. m.g.)**

5. klase

17.1. Vai vienādība a (b + c) + b (c + d) + c (d +a) + d (a + b) = 18 (a + b +c + d) ir spēkā visām iespējamām burtu a, b, c, d vērtībām? Atbildi pamatot.

17.2. Kvadrāts sastāv no 6x6 rūtiņām. Pierādīt, ka tajā var novietot 12 domino kauliņus (katrs kauliņš pārklāj tieši divas rūtiņas) tā, lai nevienu citu domino kauliņu kvadrātā novietot vairs nevarētu.

17.3. Divciparu skaitli pareizināja vispirms ar tā pirmo ciparu, bet iegūto rezultātu pareizināja ar sākotnējā skaitļa otro ciparu. Ieguva trīsciparu skaitli, kuram visi cipari vienādi. Atrast sākotnējo divciparu skaitli.

17.4. Pa vienai reizei uzrakstīta katrs veselais pozitīvais skaitlis no 1 līdz 1990 ieskaitot. Cik reizes uzrakstīts cipars 1?

17.5. Doti trīs desmitciparu skaitļi A, B un C. Andris vispirms saskaitīja A un B, bet pēc tam rezultātam pieskaitīja C. Abās saskaitīšanās kopā radās 5 pārnesumi no vienas šķiras nākamajā. Juris vispirms saskaitīja B un C, bet pēc tam rezultātam pieskaitīja A. Vai var gadīties, ka abās viņa veiktajās saskaitīšanās kopā radās 4 pārnesumi no vienas šķiras nākamajā?

6. klase

17.6. Koordinātu plaknē atzīmēti 5 punkti; neviens no tiem neatrodas ne uz vienas no koordinātu asīm. Pierādīt, ka no tiem punktiem var izvēlēties divus tā, lai gan to abscisu, gan ordinātu reizinājums būtu pozitīvs.

17.7. Atrast divus naturālus skaitļus, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 2, bet mazākais kopīgais dalāmais ir 960. (Pietiek atrast vienu šādu skaitļu pāri.)

17.8. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Parādīt, kā visas 16 rūtiņas var pārsvītrot ar 3 taisnēm. (Uzskata, ka taisne pārsvītro rūtiņu, ja tā iet caur kādu rūtiņas iekšējo punktu.)

17.9. Uz skaitļu ass atzīmēti ar sarkanu krāsu 10 veseli punkti, bez tam atzīmēti vēl divi veseli punkti A un B. Vai var būt, ka attālumu summa no sarkanajiem punktiem līdz A ir 1990, bet līdz B -- 991?

17.10. Parādīt, ka taisnstūri, kura izmēri ir 5×9 rūtiņas, var sagriezt 15 šādos stūrīšos.

7. klase

17.11. Dotas divas funkcijas $f(x) = ax + b$ un $g(x) = cx + d$. Zināms, ka katrai veselai x vērtībai pastāv nevienādība $f(x) > g(x)$. Noskaidrot, vai a - c ir pozitīvs, negatīvs skaitlis vai nulle.

17.12. Pierādīt, ka ne skaitlis 3599, ne skaitlis 359999 nav pirmskaitlis.

17.13. Vai eksistē 12-stūris, kuru var pārklāt ar diviem trijstūriem? (Trijstūri nedrīkst iziet ārpus 12-stūra robežām.) Vai eksistē tāds 13-stūris?

17.14. Trijstūra iekšpusē atzīmēti 10 punkti. Tie savienoti ar nogriežņiem savā starpā un ar trijstūru virsotnēm tā, ka novilktie nogriežņi nekrustojas un nevienu citu nogriezni bez

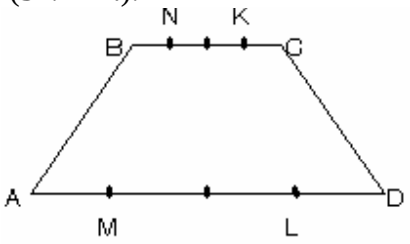
krustošanās ar jau novilktajiem vairs nevar novilkt. (Zināms, ka nekādi 3 no apskatāmajiem 13 punktiem -- 10 atzīmētajiem un 3 virsotnēm -- neatrodas uz vienas taisnes.)
Cik trijstūros sadalījies sākotnējais trijstūris? Pierādīt, ka atbilde visiem zīmējumiem ir viena un tā pati.

17.15. Ievai ir 100 konfekšu kastes: vienā ir viena konfekte, vienā -- divas, vienā -- trīs,..., vienā -- 100 konfektes. Katru dienu Ieva izvēlas vairākas kastes un no visām izraudzītajām kastēm apēd vienādu daudzumu konfekšu. Kāds ir mazākais dienu skaits, kuru laikā Ieva var apēst visas konfektes?

8. klase

17.16. Pierādīt, ka a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1$;
b) $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}=1.$

17.17. Vienādsānu trapeces ABCD pamati BC un AD katrs sadalīti 4 vienādās daļās. Pierādīt, ka MNKL arī ir vienādsānu trapece (37. zīm.).



37. zīm.

17.18. Atrisināt vienādojumu $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = 0$.

17.19. Desmit komandas katra ar katru spēlē vienu reizi (neizšķirtu nav). Pēc turnīra noslēguma izrādījās, ka visām komandām ir dažāds uzvaru skaits. Komandai A bija sešas, bet komandai B -- piecas uzvaras. Kas uzvarēja spēlē starp A un B?

17.20. Skaitļi x_1; x_2; x_3;... ; x_{10} visi ir dažādi, un to vērtības ir naturāli skaitļi no 1 līdz 10. Kāda ir izteiksmes $|... |||x_1 - x_2| - x_3| - x_4| -...- x_{10}|$ mazākā vērtība?

9. klase

17.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^4 + y^4 = 5. \end{cases}$$

17.22. Andris sareizināja 10 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai var būt, ka rezultātā ieguva skaitli, kas sastāv no trim devītniekiem, pieciem astotniekiem, sešiem četriniekiem, astoņiem vieniniekiem un vienas nulles?

17.23. Kādām naturālām a vērtībām vienādojuma $x^2 - ax + 9a = 0$ saknes ir naturāli skaitļi?

17.24. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 4 ir īstas (visas ar vienādu svaru) un 4 viltotas (arī visas ar vienādu svaru); īstās monētas ir smagākas par viltotajām. Kā ar 6 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast visas īstās monētas?

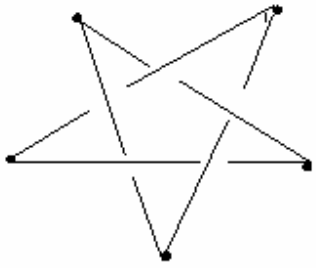
17.25. Doti četri punkti. Konstruēti divi dažādi kvadrāti, katram no tiem uz katras malas (ne virsotnēs) atrodas viens no dotajiem punktiem. Konstruēts vēl viens taisnstūris, kuram uz katras malas (ne virsotnēs) atrodas viens no dotajiem punktiem. Pierādīt, ka šis taisnstūris ir kvadrāts.

10. klase

17.26. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\cos x = \cos 2x = \cos 3x = \ldots = \cos nx = 0$.

17.27. Doti 27 kubiņi, kuru izmēri ir 1×1×1, deviņi no tiem ir balti, deviņi -- sarkani, deviņi zaļi. Vai no tiem var izveidot kubu ar izmēriem 3×3×3 tā, lai katrā no 27 triju kubiņu stabiņiem, kas paralēli kādai no kuba šķautnēm, būtu tieši divu dažādu krāsu kubiņi?

17.28. Pieci taisni stienīši savienoti ar galiem tā, kā parādīts 38. zīm. Vai tas iespējams? Atbildi pamatot.



38. zīm.

17.29. Vai Andris var nosaukt 5 veselus skaitļus, kas neviens nav 0, tā, lai patvaļīgā kārtībā ierakstot tos zvaigznīšu vietā vienādībā

$$*x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0,$$

iegūtajam vienādojumam būtu vismaz viena vesela sakne?

17.30. Koordinātu plaknē Oxy uzzīmēti 100 kvadrāttrinomu grafiki $y = a_n x^2 + b_n x + c_n$ (n = 1; 2; 3;...; 100). Kāds ir lielākais daļu skaits, kurā šie grafiki var sadalīt plakni?

11. klase

17.31. Vai eksistē tāds polinoms P(x), kas nav konstante un kas katram x apmierina nevienādību $P(x) > 100 \times P'(x)$?

17.32. Apskatīsim 12 kuba šķautnes un tā skaldņu 12 diagonāles. Cik no šiem 24 nogriežņiem var izveidot savstarpēji perpendikulāru nogriežņu pārus?

17.33. Doti 4 atsvari; katrs no tiem sver vai nu 9 g, vai 10 g. Mūsu rīcībā ir svari ar graduētu skalu. Kā ar trim svēršanām noteikt katra atsvara svaru?

17.34. Atrast lielāko iespējamo laukumu četrstūrim, kura triju malu garumi ir 1 m, bet viens leņķis ir taisns.

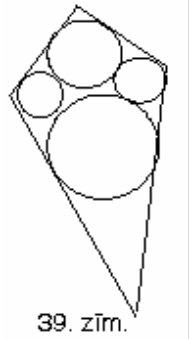
17.35. Rindā stāv 15 ziloņi; katrs no tiem sver veselu skaitu kilogramu. Ja katra ziloņa svaram (izņemot pašu labējo) pieskaitām divkāršotu tā ziloņa svaru, kas stāv no viņa pa labi, iegūstam 15 tonnas. Atrast, cik sver katrs no 15 ziloņiem.

12. klase

17.36. Ar kādu ciparu beidzas skaitļi a) 2^{1990}; b) $2^{3^{1990}}$?

17.37. Doti 4 skaitļi, neviens no tiem nav 0. Ir zināms, ka tie ir sin x, cos x, tg x un ctg x vērtības kādam x, kur $0 < x < 2p$. Nav dots, kurš skaitlis ir kura vērtība. Vai var gadīties, ka x vērtība nav viennozīmīgi nosakāma?

17.38. Četras riņķa līnijas pa pāriem pieskaras tā, kā parādīts 39. zīm**.** Konstruēts izliekts četrstūris; katra tā mala pieskaras divām riņķa līnijām. Zināms, ka šajā četrstūrī var ievilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka diviem no sākotnēji dotajiem četriem riņķiem rādiusi ir vienādi.



39. zīm.

17.39. Vai eksistē izliekts daudzskaldnis, kuram eksistē trijstūrveida šķēlums, kas neiet ne caur vienu virsotni, un turklāt no katras daudzskaldņa virsotnes iziet tieši 5 šķautnes?

17.40. Saimniece izcepa torti. Tā jāsagriež gabalos jau pirms viesu atnākšanas. Zināms, ka viesos atnāks vai nu p, vai q ciemiņi (p un q -- savstarpēji pirmskaitļi). Kādā mazākajā skaitā gabalu jāsagriež torte, lai neatkarīgi no tā, cik ciemiņu atnāks, torti visiem varētu sadalīt vienādā daudzumā? (Gabaliem nav noteikti jābūt vienādiem.)

18. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1990./91. m.g.)**

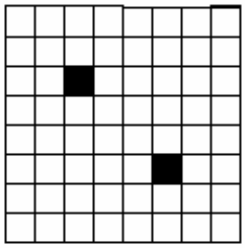
5. klase

18.1. Divciparu skaitli pareizināja vispirms ar tā pirmo ciparu, bet iegūto rezultātu -- ar sākotnējā skaitļa otro ciparu. Ieguva trīsciparu skaitli, kuram visi cipari vienādi. Atrast sākotnējo divciparu skaitli.

18.2. Uzzīmēt tādus sešus nogriežņus, kuriem visiem kopā ir pavisam seši dažādi galapunkti. Vai divi no šiem nogriežņiem var savā starpā krustoties?

18.3. Uz 10 sarkanām kartiņām uzrakstīti skaitļi 1, 2,... , 10 (uz katras kartiņas -- cits skaitlis). Uz 10 zilām sarkanām kartiņām uzrakstīti skaitļi 11, 12,... , 20 (uz katras kartiņas -- cits skaitlis). Katru skaitli, kas uzrakstīts uz kādas sarkanas kartiņas, pareizināja ar katru skaitli, kas uzrakstīts uz kādas zilas kartiņas. Atrast visu iegūto reizinājumu summu.

18.4. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Divas rūtiņas no tā izgrieztas (40. zīm.). Vai atlikušās rūtiņas var apstaigāt, uz katras nonākot tieši vienu reizi un ar katru gājienu pārejot uz tādu jaunu rūtiņu, kurai ar iepriekšējo ir kopīga mala?



40. zīm.

18.5. Jānis augšējā rindiņā uzrakstīja vienu ciparu 1, bet pēc tam pēc kaut kāda likuma sāka veidot nākošās rindiņas. Pirmās 7 rindiņas iznāca šādas:

1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
1 3 1 1 2 2 2 1
...
Kāda pēc Tavām domām būs nākošā rindiņa?
Pacenties atrast iespējami vienkāršāku likumu, kas izskaidro rindiņu veidošanu, un uzraksti to.

6. klase

18.6. Vai var atrast 1991 īstus daļskaitļus, kuru summa lielāka par 1990?

18.7. Koordinātu plaknē atzīmēti 5 punkti; neviens no tiem neatrodas ne uz vienas no koordinātu asīm. Pierādīt, ka no tiem punktiem var izvēlēties divus tā, lai gan to abscisu, gan ordinātu reizinājums būtu pozitīvs.

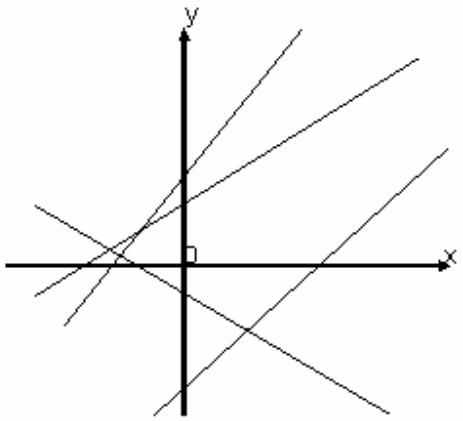
18.8. Doti 5 naturāli skaitļi. Katru 3 skaitļu summa dalās ar 5. Pierādīt, ka katrs no šiem skaitļiem dalās ar 5.

18.9. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus +1, 0, -1 (katrā rūtiņā pa vienam skaitlim) tā, lai visās rindās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu dažādas?

18.10. Uzzīmējiet divus piecstūrus tā, lai viena piecstūra malas ar otra piecstūra malām krustotos iespējami daudzos punktos.

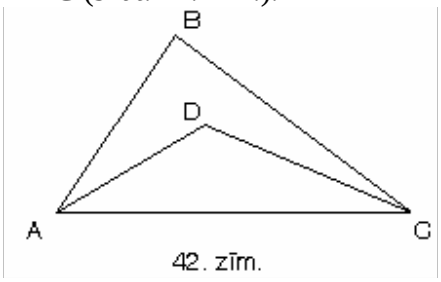
7. klase

18.11. Vai var būt, ka 41. zīm. attēlotās taisnes ir funkciju y = ax + b, y = bx + c, y = cx +d, y = dx + a grafiki?



41. zīm.

18.12. Pierādīt, ka $\angle ABC < \angle ADC$ (skat. 42. zīm.).



42. zīm.

18.13. Vai var uz 5 kartiņām uzrakstīt skaitļus tā, lai, ņemot kartiņas pa 3, sešos gadījumos uz tām uzrakstīto skaitļu summa būtu 0? Neviens no skaitļiem, kas uzrakstīts uz kartiņām, pats nedrīkst būt 0.

18.14. Pa apli stāv 100 bērni: 50 zēni un 50 meitenes. Divi zēni stāv blakus 17 vietās. Cik vietās blakus stāv divas meitenes?

18.15. Kāds ir mazākais laidņu skaits, kurus var novietot uz šaha galdiņa tā, lai visi lauciņi būtu apdraudēti? Uzskatām, ka laidnis apdraud arī to lauciņu, uz kura pats atrodas.

8. klase

18.16. Dots, ka $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ un $\frac{e}{f} > \frac{g}{h}$ (visi burti apzīmē pozitīvus veselus skaitļus). Vai noteikti $\frac{a+e}{b+f} > \frac{c+g}{d+h}$? Atbildi pamatot.

18.17. Vai kvadrātu var sagriezt a) 8, b) 1991 trapecēs?

18.18. Jānis aprēķināja $\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-d}+\sqrt{d-a}$ vērtību. Kāda tā ir?

18.19. Atrisināt vienādojumu $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = 0$.

18.20. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādi atsvari, kuru masas ir 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g. Uz atsvariem ir uzrakstīts ir 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g (varbūt daži pareizi, bet daži -- nepareizi). Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem var noskaidrot, vai visi uzraksti ir pareizi? (Ja daži uzraksti ir nepareizi, tad nav jānoskaidro, kuri tie ir.)

9. klase

18.21. Apskatām kvadrātvienādojumus $x^2 + nx + n = 0$, n -- vesels skaitlis. Cik no tiem ir tādu, kam nav atrisinājumu?

18.22. Dots, ka a, b un c ir trīs dažādi nenulles cipari? Vai var gadīties, ka trīsciparu skaitļi $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ veido aritmētisku progresiju?

18.23. Taisnleņķa trijstūrī ABC $\angle$ C = 90°. Uz AB ņemts punkts M un uz AC -- punkts N tā, ka AM = AC un taisnes nogrieznis MN dala trijstūri ABC divās daļās ar vienādiem laukumiem. Pierādīt, ka $MN = \frac{1}{2}AB$.

18.24. Plaknē doti 8 punkti ar veselām koordinātēm; nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes, Vai noteikti var izvēlēties trīs no šiem punktiem tā, lai to veidotā trijstūra mediānu krustpunkta koordinātas būtu veseli skaitļi?

18.25. Kāds ir mazākais laidņu skaits, kurus var novietot uz šaha galdiņa tā, lai visi lauciņi būtu apdraudēti? Uzskatām, ka laidnis apdraud arī to lauciņu, uz kura pats atrodas.

10. klase

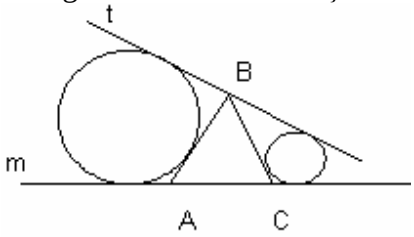
18.26. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 19 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}.$$

18.27. Vai eksistē tāda x vērtība, ka katram naturālam n pastāv nevienādība

$$\sin nx > 0?$$

18.28. Dots, ka ABC -- regulārs trijstūris; taisne t iet caur virsotni B, nekrustojot trijstūri. Riņķa līnijas katra pieskaras taisnēm m un t un vienai trijstūra ABC malai (sk. 43. zīm.). Pierādīt, ka šo riņķa līniju rādiusu summa nav atkarīga no taisnes t stāvokļa.



43. zīm.

18.29. Naturālie skaitļi no 1 līdz 96 ieskaitot sadalīti divās daļās. Pierādiet, ka viena no daļām satur trīs dažādus skaitļus x, y un z, ka xy = z.

18.30. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām. Vai tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus +1, 0, -1 (katrā rūtiņā pa vienam skaitlim) tā, lai visās rindās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu dažādas?

11. klase

18.31. Cik atrisinājumu ir vienādojumam

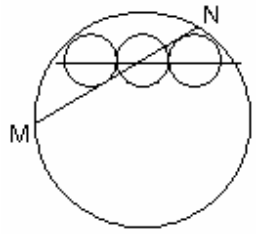
$$\operatorname{tg} x = x?$$

18.32. Vai pastāv tādas funkcijas F(x) un G(x), ka visiem reāliem x izpildās nevienādības $F(x) < G(x)$ un $F'(x) > G'(x)$?

18.33. Atrisināt racionālos skaitļos vienādojumu

$$x^2 + y^2 + xy = 2\,.$$

18.34. Triju mazo riņķa līniju rādiusi ir r; to centri atrodas uz vienas hordas, tās pieskaras viena otrai, un malējās bez tam pieskaras lielajai riņķa līnijai ar rādiusu R. Horda MN iet caur vidējās mazās riņķa līnijas centru un pieskaras abām malējām riņķa līnijām (sk. 44. zīm.). Pierādīt, ka MN = R + 3r.



44. zīm.

18.35. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Tas jāsagriež gabalos, katrs no kuriem ir vai nu formā , vai formā .

a) Pierādīt, ka to var izdarīt;

b) pierādīt, ka kvadrāts ir tikai viens.

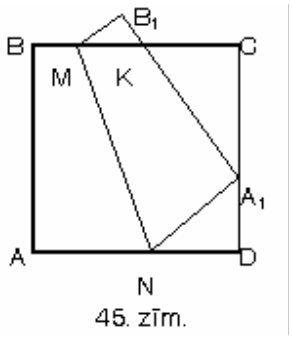
12. klase

18.36. Dots, ka x, y, z -- naturāli skaitļi, pie tam x^3 dalās ar y^2z, y^3 dalās ar z^2x, z^3 dalās ar x^2y. Pierādīt, ka x = y = z.

18.37. Atrisināt vienādojumu

$$(2\sin x + 1)(\mathrm{tg}x - 1) = 2, \qquad \text{ja} \quad x \in [0, \pi].$$

18.38. Kvadrātiska papīra lapa ABCD pārlocīta pa nogriezni MN tā, ka virsotne A nonāk stāvoklī A_1 uz malas CD (sk. 45. zīm.). Pierādīt, ka B_1K vienāds ar trijstūrī KCA_1 ievilktās riņķa līnijas rādiusu.



45. zīm.

18.39. Vai vienādojumam

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2 = 18x_1x_2\cdots x_{18}$$

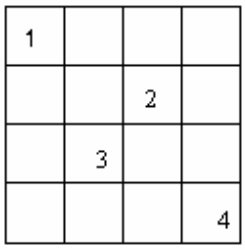
eksistē atrisinājums naturālos skaitļos, kur visu mainīgo vērtības pārsniedz 1991?

18.40. Šaurleņķa trijstūris ABC ievilkts riņķī. Tā bisektrišu pagarinājumi krusto riņķa līniju punktos M, N un K. Pierādīt, ka trijstūra MNK laukums nav mazāks par trijstūra ABC laukumu.

19. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1991./92. m.g.)**

5. klase

19.1. Vai 46. zīm. attēlotās tabulas tukšajās rūtiņās var ierakstīt ciparus 1, 2, 3, 4 (katrā rūtiņā -- vienu ciparu) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā visi ierakstītie cipari būtu dažādi?

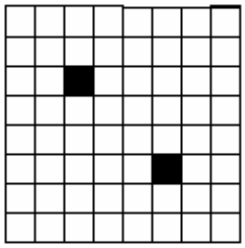


46. zīm.

19.2. Ar cipariem 1, 2,... , 9, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi, uzrakstīt trīs trīsciparu skaitļus tā, lai otrais no tiem būtu divas reizes lielāks par pirmo, bet trešais -- trīs reizes lielāks par pirmo. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

19.3. Kuba virsotnēs ierakstīts pa naturālam skaitlim. Katras šķautnes vidū uzrakstīta tās galos esošo skaitļu summa; katras skaldnes centrā uzrakstīta tās stūros esošo skaitļu summa. Vai visu 26 skaitļu summa var būt 1992?

19.4. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Divas rūtiņas no tā izgrieztas (47. zīm.). Vai atlikušās rūtiņas var apstaigāt, uz katras nonākot tieši vienu reizi un ar katru gājienu pārejot uz tādu jaunu rūtiņu, kurai ar iepriekšējo ir kopīga mala?



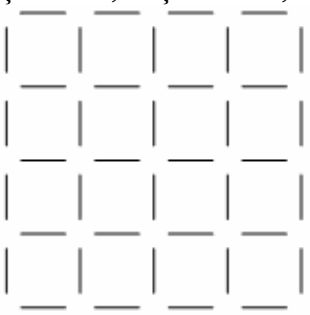
47. zīm.

19.5. Vienpadsmit skolēniem kopā ir 110 mācību grāmatas; nekādiem diviem nav vienāds grāmatu skaits. Pierādiet, ka var atrast 5 skolēnus, kuriem kopā ir vismaz 65 grāmatas.

6. klase

19.6. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Ieraksti rūtiņās pa naturālam skaitlim (tie var būt arī vienādi) tā, lai rindiņās ierakstīto skaitļu summas savā starpā attiektos kā 1 : 2 : 3, bet kolonnās ierakstīto skaitļu summas savā starpā attiektos kā 2 : 3 : 5. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

19.7. No 40 sērkociņiem izveidots 48. zīm. parādītais kvadrātiskais režģis (katra mazā kvadrātiņa mala ir 1 sērkociņš). Parādīt, kā var noņemt 9 sērkociņus, lai neviena kvadrāta (ne no vienas, ne no vairākām rūtiņām sastāvoša) kontūra nepaliktu vesela. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.
Ja nevarat tikt galā ar 9 sērkociņu noņemšanu, noņemiet 10, 11,... -- iespējami mazāk sērkociņu.



48. zīm.

19.8. a) Atrast kaut vienu tādu veselu skaitli, kura reizinājums pašam ar sevi beidzas ar trim četriniekiem;
b) pierādīt, ka tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

19.9. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus +1, 0, -1 (katrā rūtiņā pa vienam skaitlim) tā, lai visās rindās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu dažādas?

19.10. Kādu lielāko daudzumu ‘‘dubulttrijstūru’’, kāds parādīts 49. zīm., var izgriezt no 50. zīm. attēlotās figūras?

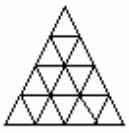
49. zīm.

50. zīm.

7. klase

19.11. Dotas divas funkcijas y = ax + b un y = cx + d. Vai var gadīties, ka pie x=3 un x=5 pirmās funkcijas vērtība lielāka par otrās funkcijas vērtību, bet pie x=4 otrās funkcijas vērtība lielāka par pirmās funkcijas vērtību?

19.12. Vai 51. zīm. attēlotajā figūrā trijstūrīšos var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā trijstūrītī -- citu skaitli) tā, lai katros divos trijstūrīšos ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa būtu pirmskaitlis?



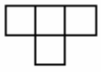
51. zīm.

19.13. Sakārtojiet pasta indeksos izmantojamos ciparus pēc to uzzīmēšanai nepieciešamo līniju garuma (52. zīm.).

52. zīm.

19.14. Pa apli stāv 100 bērni: 50 zēni un 50 meitenes. Divi zēni stāv blakus 17 vietās. Cik vietās blakus stāv divas meitenes?

19.15. Vai taisnstūri, kas sastāv no a) 19×30, b)16×16, c) 10×10 rūtiņām, var sagriezt tādās figūrās, kādas attēlotas 53. zīm.?



53. zīm.

8. klase

19.16. Jānis aprēķināja $\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-d}+\sqrt{d-a}$ vērtību. Kāda tā ir?

19.17. Četrstūrī ABCD pastāv vienādības AB=AD un CB=CD. Pierādīt, ka šo četrstūri var sagriezt 3 daļās, no kurām var salikt trapeci.

19.18. Jānis uzzīmēja visus dažādos trijstūrus, kuru malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru un perimetrs ir 36 cm, bet Pēteris -- visus dažādos trijstūrus, kuru malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru un perimetrs ir 39 cm. Kuram no zēniem iznāca uzzīmēt vairāk trijstūru?

19.19. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Tā rūtiņās ierakstīts pa nenulles ciparam. Apskatām 8 četrciparu skaitļus, kas iegūstami, lasot rindiņas no kreisās uz labo pusi un kolonnas no augšas uz leju. Dots, ka 7 no šiem skaitļiem dalās ar 17. Pierādīt, ka arī astotais skaitlis dalās ar 17.

19.20. Kvadrāts sastāv no 12×12 rūtiņām. Kādu mazāko domino kauliņu daudzumu tajā var novietot, lai vairs nepaliktu vietas nevienam citam domino kauliņam? (Katrs domino kauliņš pārklāj tieši divas rūtiņas.)

9. klase

19.21. Pierādīt, ka nav tādu skaitļu x un y, kas vienlaicīgi apmierina abas sakarības:

$$x = y^2 + 1 \text{ un } y = x^2 + 1.$$

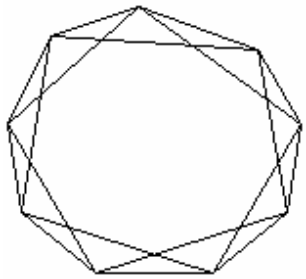
19.22. Paralelograma ABCD leņķi nav ne 60°, ne 120° lieli. Uz malām AB un BC kā uz pamatiem ārpus paralelograma konstruēti vienādmalu trijstūri ABM un BCN. Pierādīt, ka DMDN ir

a) vienādsānu, b) vienādmalu.

19.23. Zināms, ka $0 \le a \le b \le c \le d \le e$ un $a + b + c + d + e = 100$. Kādu mazāko vērtību var pieņemt summa $a + c + e$?

19.24. Taisnleņķa trijstūrī ACB ievilktā riņķa līnija pieskaras hipotenūzai AB punktā S. Stars CS krusto hipotenūzas vidusperpendikulu punktā M. Kā savā starpā saistīti punkta M attālums līdz hipotenūzai un trijstūra ACB perimetrs?

19.25. Deviņstūrī novilktas 9 diagonāles (sk. 54.zīm.). Vai var virsotnēs ierakstīt 9 dažādus veselus skaitļus no 0 līdz 18 tā, lai, aprēķinot starpības starp katras malas un katras novilktās diagonāles galos ierakstītajiem skaitļiem, visu starpību moduļi būtu dažādi?

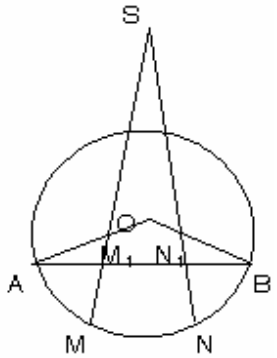


54. zīm.

10. klase

19.26. Kādiem naturāliem n skaitlis $n^2 + 2$ dalās ar $n + 2$?

19.27. Horda AB nav diametrs. Punkti M un N sadala mazāko no lokiem AB trīs vienādās daļās, bet punkti M_1 un N_1 sadala hordu AB trīs vienādās daļās. Dots, ka O ir riņķa centrs un MM_1 krusto NN_1 punktā S. Pierādīt, ka $\angle ASB = \frac{1}{3}\angle AOB$. (sk. 55. zīm.)



55. zīm.

19.28. Taisnleņķa trijstūra katetes ir a un b, bet hipotenūza c. Pierādīt, ka

$$c^3 + (a+b)(ab+c^2) > 6abc\,.$$

19.29. Dots, ka f(t) ir monotoni augoša funkcija, kas definēta visām t vērtībām. Bez tam visiem x un y pastāv vienādība

$$f(f(x)+y) = f(x+y) + f(0)\,.$$

Atrast visa šādas funkcijas f(t).

19.30. Ap apaļu galdu brokastīs sēdēja 1992 cilvēki. Vakarā visi nosēdās ap šo pašu galdu citā kārtībā. Pierādīt, ka var atrast divus tādus cilvēkus, starp kuriem gan brokastīs, gan vakariņās sēdēja vienāds galdabiedru skaits.

11. klase

19.31. Dots, ka k -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $7^k + 7$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

19.32. Trijstūra ABC leņķu A, B un C bisektrises krusto apvilkto riņķa līniju atbilstoši punktos A_1, B_1, C_1. Pierādīt, ka $AA_1 \perp B_1C_1$.

19.33. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x(1+y+y^2) &= 3(1+y^4) \\ 2y(1+z+z^2) &= 3(1+z^4) \\ 2z(1+x+x^2) &= 3(1+x^4) \end{cases}$$

19.34. Doti 1992 iracionāli skaitļi. Pierādīt, ka tos var sakārtot virknē tā, ka pirmo divu, pirmo triju,... , pirmo 1991 virknes locekļu summas arī ir iracionāli skaitļi.

19.35. Gar viensliežu dzelzceļa posmu novietoti n stopsignāli (n ³ 2). Vilciens nedrīkst pabraukt garām stopsignālam, ja starp šo un nākošo stopsignālu pārvietojas kāds cits vilciens (tad signālā deg sarkanā gaisma). Pie katra signāla var vienlaicīgi gaidīt neierobežots skaits vilcienu (tiem katram garums ir 0).

Kustības sākumā pie pirmā stopsignāla nostājās k vilcieni; katra vilciena ātrums ir konstants, un tie visi ir atšķirīgi. Pierādiet, ka neatkarīgi no tā, kādā kārtībā vilcieni sakārtoti, paies viens un tas pats laika posms no brīža, kad pirmais vilciens pabrauc garām pirmajam stopsignālam, līdz brīdim, kad pēdējais vilciens ierodas pie pēdējā stopsignāla. Protams, ka katrs vilciens vienmēr uzsāk vai turpina kustību, tiklīdz attiecīgais stopsignāls to pieļauj. Vilcienu kārtība kustības laikā nemainās.

12. klase

19.36. Kādiem naturāliem n skaitlis (n - 1)! dalās ar n + 1?

19.37. Uz trijstūra ABC malām AB un AC ņemti attiecīgi punkti P un Q, kas nesakrīt ar virsotnēm, pie tam BP : PQ : QC = AC : CB : BA, Pierādīt, ka punkti P, Q, A atrodas uz vienas riņķa līnijas ar trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centru.

19.38. Funkcija f(t) definēta visiem $-1 \le t \le 1$; tās vērtības pēc moduļa nepārsniedz 1. Visām pieļaujamām x un y vērtībām pastāv nevienādība

$$\left|xf(y) - yf(x)\right| \ge x - y .$$

Atrast visas šādas funkcijas f(t).

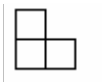
19.39. Telpā dots punkts A un galīgs skaits nogriežņu, kuru garumu summa ir 1992. Pierādīt, ka var novilkt plakni, kurai nav kopīgu punktu ne ar vienu no šiem nogriežņiem un kuras attālums no A nepārsniedz 600.

19.40. Uz seifa durvīm atrodas trīs slēdži; katrs no tiem var atrasties 8 dažādos stāvokļos neatkarīgi no pārējiem. Paredzēts, ka seifs atveras, ja katrs slēdzis atrodas vienīgajā sev pareizajā stāvoklī. Mehānisma defekta dēļ seifs patiesībā atveras, ja jebkuri 2 slēdži atrodas pareizos stāvokļos, neatkarīgi no trešā slēdža stāvokļa.
Kāds mazākais skaits kombināciju jāpārbauda, lai garantēti atvērtu seifu? (No katras slēdžu kombinācijas var uzreiz pāriet uz jebkuru citu.)

20. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1992./93. m.g.)**

5. klase

20.1. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Izgriežam tā centrālo rūtiņu. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādos ‘‘stūrīšos’’, kādi parādīti 56. zīm. (stūrīši var būt pagriezti arī citādi)?



56. zīm.

20.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Parādi, ka tā rūtiņās var ierakstīt ciparus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā -- citu ciparu) tā, lai nekādās divās blakus rūtiņās ierakstīto ciparu summa nepārsniegtu 11.

Vai var panākt, lai neviena no šīm summām nepārsniegtu 107. (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala)

20.3. Kuba virsotnēs ierakstīja pa naturālam skaitlim. Katras šķautnes vidū ierakstīja tās galos esošo skaitļu summu; katras skaldnes centrā ierakstīja tās stūros esošo skaitļu summu. Vai visu 26 skaitļu summa var būt 1993?

20.4. Kāds atlikums rodas, dalot $\underbrace{111\ldots11}_{1993\ \text{reizes}}$ ar 1001?

20.5. Uz galda atrodas 2 kaudzītes konfekšu (katrā ne vairāk par 8 konfektēm). Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Ar vienu gājienu var vai nu apēst patvaļīgu daudzumu konfekšu no vienas (jebkuras) kaudzītes, vai arī apēst vienādus daudzumus konfekšu no abām. (Katrā gājienā jāēd vismaz viena konfekte.) Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Atrodiet visas tās sākuma pozīcijas, kurās otrais spēlētājs var uzvarēt, lai kā arī pirmais necenstos viņam traucēt.

6. klase

20.6. No visiem 9 nenulles cipariem jāizveido trīs trīsciparu skaitļu decimālie pieraksti, katru ciparu lietojot tieši vienu reizi.
a) Kāda ir lielākā iespējamā iegūto skaitļu summas vērtība?
b) Cik dažādos veidos šo summu var iegūt? (Divi veidi skaitās dažādi, ja vienā no tiem izmanto saskaitāmo, kādu neizmanto otrajā.)

20.7. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Parādīt, ka tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā -- citu skaitli) tā, lai nekādās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa nepārsniegtu 19. Vai var panākt, lai neviena no šīm summām nepārsniegtu 18? (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

20.8. a) Atrast kaut vienu tādu veselu skaitli, kura reizinājums pašam ar sevi beidzas ar trim četriniekiem.
b) Pierādīt, ka tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

20.9. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir atšķirīgas. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Izstrādāt metodi, kas ļautu sakārtot monētas masu pieaugšanas secībā, izmantojot ne vairāk kā a) 8, b) 7 svēršanas.

20.10. Uzzīmēt četrstūri un piecstūri tā, lai to kopīgā daļa būtu daudzstūris ar iespējami lielāku malu skaitu (lielākais iespējamais skaits ir 12).

7. klase

20.11. Pierādīt, ka

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16}+ b^{16}) = a^{32} - b^{32}.$$

20.12. Pa apli stāv 100 bērni: 50 zēni un 50 meitenes. Divi zēni stāv blakus 17 vietās. Cik vietās blakus stāv divas meitenes?

20.13. Uz 17 sarkanām kartītēm uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 17 (uz katras kartītes -- cits skaitlis). Tas pats izdarīts ar 17 baltām kartītēm. Pierādīt, ka kartītes var sadalīt pa pāriem tā, lai katrā pārī būtu viena sarkana un viena balta kartīte un pāros esošo kartīšu numuru summas būtu 17 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.

20.14. Uzzīmējiet izliektu desmitstūri, kas nav nekādu 4 trijstūru kopējā daļa.

20.15. Plaknē ir atzīmēti 8 punkti un novilkti visi nogriežņi, kuriem galapunkti ir ik 2 no šiem punktiem. Zināms, ka 22 nogriežņu vidusperpendikuli krustojas vienā punktā. Pierādīt, ka arī pārējo nogriežņu vidusperpendikuli iet caur šo punktu!

8. klase

20.16. Pierādīt, ja starp skaitļiem a, b, c nav savstarpēji pretēju, tad

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} + \frac{b^2 - c^2}{b + c} + \frac{c^2 - a^2}{c + a} = 0.$$

20.17. Jānis uzzīmēja visus dažādos trijstūrus, kuru malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru un perimetrs ir 36 cm, bet Pēteris -- visus dažādos trijstūrus, kuru malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru un perimetrs ir 39 cm. Kuram no zēniem iznāca uzzīmēt vairāk trijstūrus?

20.18. Tabula sastāv no 10×10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala, tad tajās ierakstītie skaitļi atšķiras ne vairāk kā par 1. Pierādiet, ka vismaz viens skaitlis ierakstīts tabulā ne mazāk kā 6 reizes.

20.19. Naturālos skaitļus no 1 līdz 10 sadalīja pa pāriem; katra skaitļa pāriem atrada lielāko kopīgo dalītāju. Ar S apzīmējam visu piecu lielāko kopīgo dalītāju summu. Atrast lielāko un mazāko iespējamo S vērtību.

20.20. Izliektā sešstūrī ABCDEF pretējās malas pa pāriem vienādas un paralēlas. Pierādīt, ka trijstūra ACE laukums ir vienāds ar pusi no sešstūra laukuma.

9. klase

20.21. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes ir a un b. Atrodiet kvadrātvienādojumu, kura saknes ir 2a un 2b (jaunā kvadrātvienādojuma koeficientus jāizsaka ar p un q).

20.22. Četrstūris ABCD apvilkts ap riņķa līniju, un tā diagonāles AC un BD ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka AB × CD = AD × BC.

20.23. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Ar vienu gājienu var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un uzrakstīt to vietā |a - b| un a + b. Vai var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos
a) septiņi skaitļi 6,
b) septiņi skaitļi 16?

20.24. Izliektā četrstūrī diagonāļu AC un BD viduspunkti M un N ir dažādi. Taisne MN krusto malas AB un CD atbilstoši punktos R un S. Pierādīt, ka trijstūru ABS un CDR laukumi ir vienādi.

20.25. Dots, ka n -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka

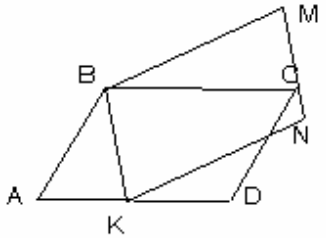
$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1.$$

10. klase

20.26. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{47}{21}.$$

20.27. Paralelogramiem ABCD un BMNK ir kopīga virsotne B; C atrodas uz malas MN, K -- uz malas AD (57. zīm). Pierādīt, ka abu paralelogramu laukumi ir vienādi.



57. zīm.

20.28. Izliekta daudzstūra visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs; nevienas malas garums nepārsniedz 4 (rūtiņas malas garums ir 1). Kāds lielākais malu skaits var būt šādam daudzstūrim?

20.29. Ar p_1, p_2,..., p_n apzīmējam augošā kārtībā pirmos n pirmskaitļus. Pierādīt, ka $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

20.30. Uz tāfeles sākumā uzrakstīti 1993 vieninieki. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst jebkurus 2 uzrakstītus skaitļus(apzīmēsim tos ar a un b) un to vietā uzrakstīt skaitli $\sqrt{2ab}$. Tā turpinām, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.
Pierādīt, ka tas nepārsniedz 45.

11. klase

20.31. Kāds ir mazākais naturālais n ar īpašību: skaitļa n^n decimālais pieraksts satur vismaz 201 ciparu?

20.32. Kubs sastāv no 4×4×4 maziem vienādiem kubiņiem. Saka, ka taisne krusto kubiņu, ja tā iet caur šī kubiņa iekšējo punktu. Kādu lielāko mazo kubiņu skaitu var krustot viena taisne?

20.33. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x + y)^2.$$

20.34. Vai regulāru trijstūri var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros, no kuriem tieši 2 (ne vairāk un ne mazāk) ir regulāri?

20.35. Boksa sacensībās bokseri sadalīti 12 svara kategorijās un pavisam pārstāv 6 komandas. Pierādīt: var atrast vismaz 7 tādus bokserus, kas komandas biedru čempionātā ir vairāk nekā sāncenšu viņu svara kategorijā.

12. klase

20.36. Atrisināt vienādojumu

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

20.37. Plaknē doti 2n punkti; nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka caur diviem no tiem var novilkt taisni tā, lai katrā pusē no tās atrastos tieši n - 1 no dotajiem punktiem.

20.38. Šaurleņķa trijstūrī ABC punkti F, D, E ir atbilstoši malu AB, BC, CA viduspunkti. H ir trijstūra ABC augstumu krustpunkts. Riņķa līnija ar centru H krusto taisni DE punktos P un Q, taisni EF punktos R un S, taisni FD punktos T un U. Pierādīt, ka

$$CP = CQ = AR = AS = BT = BU.$$

20.39. Ar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ apzīmēsim skaitļu 1; 2;...; n izkārtojumu virknē kaut kādā kārtībā. Kādiem n iespējams, ka

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = \ldots = |a_n - n| \neq 0?$$

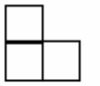
20.40. Dots, ka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ -- pozitīvi skaitļi un $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n = 1$.
Pierādīt, ka naturāliem k pastāv nevienādība

$$(k + x_1)(k + x_2)\ldots(k + x_n) \geq (k + 1)^n.$$

21. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1993./94. m.g.)**

5. klase

21.1. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Izgriežam tā centrālo rūtiņu. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādos ‘‘stūrīšos’’, kādi parādīti 58. zīm. (stūrīši var būt pagriezti arī citādi)?



58. zīm.

21.2. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 40 var izrakstīt rindā (katru vienu reizi) tā, lai katri divi blakus uzrakstītie skaitļi atšķirtos vismaz par 20?

21.3. Klasē ir 10 filatēlisti. Sākoties jaunajam mācību gadam, katrs nosūtīja apsveikumu pieciem citiem. Vai var gadīties, ka nekādi divi filatēlisti nenosūtīja apsveikumu viens otram?

21.4. Katrā kuba virsotnē sēž pa mušai. Vai tās var pacelties gaisā un atkal nosēsties katrā virsotnē pa vienai tā, lai nekādas divas mušas, kas agrāk atradās uz vienas šķautnes, tagad uz vienas šķautnes neatrastos?

21.5. Ierakstiet 59. zīm. parādītās tabulas 9 rūtiņās pa veselam pozitīvam skaitlim (daži no tiem var būt arī vienādi; 16 rūtiņas paliek tukšas) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonā ierakstīto skaitļu summa būtu tāda, kāda pierakstīta tabulā pie attiecīgās rindiņas vai kolonnas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

	3	7	4	5	7
1					
4					
2					
4					
15					

59. zīm.

6. klase

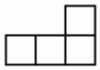
21.6. Cik nepāra skaitļu no 1 līdz 100 dalās ar 3?

21.7. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Parādīt, ka tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā -- citu skaitli) tā, lai nekādās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa nepārsniegtu 19. Vai var panākt, lai neviena no šīm summām nepārsniegtu 18? (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

21.8. Pierādīt, ka

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{63}+\frac{1}{64}>4\,.$$

21.9. Katra rūtiņu lapas rūtiņa nokrāsota vienā krāsā. Pie tam jebkurā tādā figūrā, kāda redzama 60. zīm. (tā var būt novietota arī citādi) visas četras krāsas ir dažādas. Pierādīt, ka izmantotas vismaz 7 krāsas. Lapas izmēri ir 30×40 rūtiņas.



60. zīm.

21.10. Ap galdu sēž A, B un C. C paziņo: ‘‘Es esmu iedomājies divus viens otram sekojošus skaitļus. Viens no tiem ir...’’ (iečukst ausī A), ‘‘bet otrs ir...’’ (iečukst ausī B).
Pēc tam starp A un B notiek šāda saruna.
A: ‘‘Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.’’
B: ‘‘Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.’’
A: ‘‘Tagad es zinu iedomātos skaitļus.’’
Kādus skaitļus bija iedomājies C? (Visi izsacītie apgalvojumi ir pareizi.)

7. klase

21.11. Dots, ka $a^2+b^2+c^2+d^2=2ab+2cd$. Cik dažādu skaitļu var būt starp skaitļiem a, b, c un d?

21.12. Uz taisna leņķa malām ņemti punkti X un Y (katrs uz savas malas), kas nav leņķa virsotne; uz tā bisektrises ņemts punkts O. Zināms, ka $\angle$ XOY = 90°. Pierādīt, ka OX = OY. (Arī O nav leņķa virsotne.)

21.13. Uz 17 sarkanām kartītēm uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 17 (uz katras kartītes -- cits skaitlis). Tas pats izdarīts ar 17 baltām kartītēm. Pierādīt, ka kartītes var sadalīt pa pāriem tā, lai katrā pārī būtu viena sarkana un viena balta kartīte un pāros esošo kartīšu numuru summas būtu 17 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.

21.14. Naturāla skaitļa A ciparus pārlika citā kārtībā un ieguva skaitli B. Vai var būt, ka $A\cdot B=\underbrace{111\ldots11}_{111\ \text{reizes}}$?

21.15. Katra rūtiņu lapas rūtiņa nokrāsota vienā krāsā. Pie tam jebkurā tādā figūrā, kāda redzama 61. zīm. (tā var būt novietota arī citādi) visas četras krāsas ir dažādas. Pierādīt, ka izmantotas vismaz 8 krāsas. Lapas izmēri ir 30×40 rūtiņas.

61. zīm.

8. klase

21.16. Vai eksistē tādi skaitļi A, B un C, ka vienlaicīgi $A^2 < B^2 < C^2$ un $A^3 > B^3 > C^3$?

21.17. Riņķa līnija ar 16 punktiem sadalīta 16 vienādos lokos. Vai var novilkt 8 dažāda garuma hordas, kam visi galapunkti atrodas dalījuma punktos un nekādi divi galapunkti nesakrīt?

21.18. Tabula sastāv no 10×10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala, tad tajās ierakstītie skaitļi atšķiras ne vairāk kā par 1. Pierādiet, ka vismaz viens skaitlis ierakstīts tabulā ne mazāk kā 6 reizes.

21.19. Tabula sastāv no 6×6 rūtiņām. Vai tajā var ierakstīt 36 dažādus veselus skaitļus tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu 0?

21.20. Starp naturāla skaitļa cipariem ir a) 5, b) 4 dažādi. Pierādīt, ka skaitļa ciparus var pārlikt citā kārtībā tā, lai iegūtu skaitli, kas nav pirmskaitlis.

9. klase

21.21. Vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas dažādas saknes. Vai vienādojumam $cx^2 + bx + a = 0$ ari noteikti ir divas dažādas saknes?

21.22. Četrstūris ABCD apvilkts ap riņķa līniju, un tā diagonāles AC un BD ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka AB × CD = AD × BC.

21.23. Kādā valstī ir 10 pilsētas un 37 aviolīnijas. Katra aviolīnija savieno divas pilsētas abos virzienos, neiegriežoties citās; nekādas divas aviolīnijas nesavieno vienu un to pašu pilsētu pāri. Pierādiet, ka no katras pilsētas var aizlidot uz katru citu ar ne vairāk kā vienu pārsēšanos.

21.24. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas vienā punktā O un vēl pa divām punktos A, B un C, kas neatrodas uz vienas taisnes. Pierādiet, ka O ir trijstūra ABC augstumu krustpunkts.

21.25. Vai eksistē n veseli skaitļi (daži no tiem var būt vienādi), kuru summa ir 0, bet reizinājums ir n? Atrisiniet šo uzdevumu, ja a) n = 1992, b) n = 1994.

10. klase

21.26. Dots, ka a, b, c -- pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

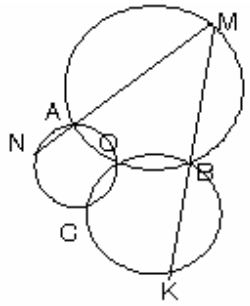
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>1.$$

Vai var pierādīt, ka nevienādības kreisā puse lielāka par 1,01?

21.27. Ar p_1, p_2,..., p_n apzīmējam augošā kārtībā pirmos n pirmskaitļus. Pierādīt, ka $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

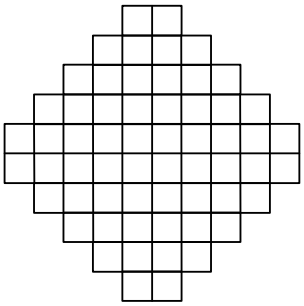
21.28. Vai daļa 0,1491625... , kuru iegūst, izrakstot aiz komata pēc kārtas visu naturālo skaitļu kvadrātus, izsaka racionālu vai iracionālu skaitli?

21.29. Trīs riņķa līnijas krustojas vienā punktā O un bez tam vēl pa divām punktos A, B, C (62. zīm.). Zināms, ka M, A, N atrodas uz vienas taisnes un M, B, K -- tāpat. Pierādīt, ka N, C, K atrodas uz vienas taisnes.



62. zīm.

21.30. Kādā mazākajā gabalu skaitā jāsagriež 63. zīm. redzamā figūra, lai neviens gabals nesaturētu kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas? Griezumi jāizdara tikai pa rūtiņu līnijām.


63. zīm.

11. klase

21.31. Pierādīt, ka vienādojuma $x^2 - 3x - 1 = 0$ saknes ir arī vienādojuma

$$(x^2 - 2x - 1)^2 - 2(x^2 - 2x - 1) - x - 1 = 0$$

saknes.

21.32. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x + y)^2.$$

21.33. Dots, ka a, b, c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ un $\frac{b+c}{a}$ ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}<9.$$

21.34. Kubs sastāv no 1994×1994×1994 vienādiem kubiņiem. Pierādīt, ka kubiņos var ierakstīt dažādus veselus skaitļus tā, lai katrā 1994 kubiņu veidotā ‘‘stabiņā’’, kas paralēls kādai no kuba šķautnēm, ierakstīto skaitļu summa būtu 0.

21.35. Regulārā 100-stūrī atzīmēti visu malu un visu diagonāļu viduspunkti. Kāds ir lielākais daudzums atzīmēto punktu, kas atrodas uz vienas riņķa līnijas?

12. klase

21.36. Atrisināt vienādojumu

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

21.37. Pierādīt, ka starp katriem 10 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem var atrast vienu, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem pārējiem.

21.38. Šaurleņķa trijstūrī augstums no virsotnes A vienāds ar mediānu no virsotnes B un bisektrisi no virsotnes C. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs.

21.39. Naturāli skaitļi no 1 līdz 1994 izrakstīti virknē kaut kādā kārtībā (katrs skaitlis vienu reizi). Atrast mazāko n ar īpašību: noteikti var izsvītrot n skaitļus no virknes tā, ka atlikušie skaitļi veido vai nu augošu, vai dilstošu virkni.

21.40. Kāds mazākais punktu skaits plaknē jāatzīmē, lai pie i = 1, 2, 3,... , n eksistētu vismaz viena taisne, uz kuras ir tieši i atzīmētie punkti.

22. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1994./95. m.g.)**

5. klase

22.1. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta vienciparu naturāls skaitlis (tie var būt vienādi), tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu a) 19, b) 29. Vai to var izdarīt?

22.2. Kvadrāts sastāv no a) 5×5, b) 7×7 rūtiņām. Parādīt, kā no tā var izgriezt vienu rūtiņu un atlikušo daļu sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×3 rūtiņas. Gan vienā, gan otrā gadījumā, pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

22.3. Kuba izmēri ir 6×6×6. Tā virsma nokrāsota. Pēc tam kubu sagrieza mazos kubiņos ar izmēriem 1×1×1. Cik ir tādu mazo kubiņu, kam daļa virsmas nokrāsota?

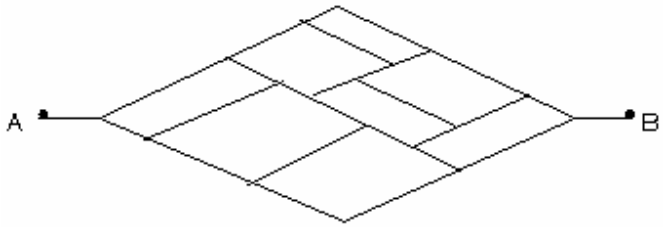
22.4. Matemātikas pulciņā ir 12 dalībnieki. Lieldienās katrs no viņiem uzdāvināja pa olai 6 citiem dalībniekiem. Vai var gadīties, ka nekādi divi dalībnieki neuzdāvināja olas viens otram?

22.5. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 1995 ieskaitot. Vai starp tiem ir vairāk tādu skaitļu, kam ciparu summa ir nepāra skaitlis, vai tādu, kam šī summa ir pāra skaitlis? Par cik vairāk?

6. klase

22.6. Ar cik dažādiem naturāliem skaitļiem dalās skaitlis 1995?

22.7. Cik dažādos veidos pa 64. zīm. attēlotajiem ceļiem var aiziet no A uz B, ja zīmējumā visu laiku jāizvirzās no kreisās uz labo pusi?

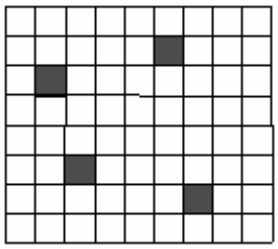


64. zīm.

22.8. Pa apli izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 1995 ieskaitot kaut kādā kārtībā, katrs vienu reizi. Pierādīt, ka var atrast tādus divus blakus uzrakstītus skaitļus, kuru summa ir pāra skaitlis.

22.9. Vai taisnība, ka $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{61}+\frac{1}{63}>1$**?**

22.10. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām, iesvītrotās rūtiņas no tā izgrieztas (sk. 65. zīm.). Kādu lielāko daudzumu tādu figūru, kas sastāv no 2 blakus esošām rūtiņām vai var izgriezt no palikušās kvadrāta daļas?

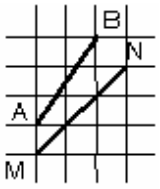

65. zīm.

7. klase

22.11. Kuras no vienādībām ir pareizas ar visām iespējam x un y vērtībām? Kāpēc?
a) $(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$,

b) $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 9x^3y^2 + 11x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

22.12. Rūtiņu lapā uzzīmēti divi nogriežņi AB un MN (skat. 4. zīm.). Kurš no tiem garāks? Atbidi pamatot.

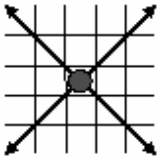


67. zīm.

22.13. Uz galda atrodas n konfektes. Divi spēlētāji pēc kārtas ēd vai nu pa 2, vai pa 4 konfektēm. Kurš nevar izdarīt gājienu - zaudē. Kas uzvar, pareizi spēlējot -- pirmais vai otrais spēlētājs? Atbildiet uz šo jautājumu, ja a) n=18, b) n=19, c) n=1995.

22.14. Naturālā skaitlī A pārlika ciparus citā kārtībā un ieguva naturālu skaitli B. Vai var gadīties, ka $A \cdot B = \underbrace{111\ldots11}_{1995 \text{ vienīnieki}}$?

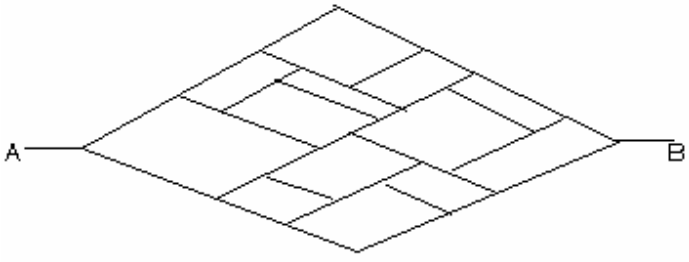
22.15. Kādu mazāko laidņu skaitu jānovieto uz šaha galdiņa ar izmēriem 8x8 rūtiņas tā, lai visas neaizņemtās rūtiņas būtu apdraudētas?
Laidnis apdraud visas rūtiņas, kas atrodas ar to vienā diagonālē (skat. 68. zīm.).


68. zīm.

8. klase

22.16. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 20 ieskaitot var sadalīt divās grupās tā, lai abās grupās skaitļu reizinājumi būtu vienādi?

22.17. Cik dažādos veidos pa 69. zīm. attēlotajiem ceļiem var aiziet no A uz B, ja visu laiku jāvirzās no kreisās uz labo pusi?



69. zīm.

22.18. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņam. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala, tajās ierakstītie skaitļi atšķiras ne vairāk kā par 1. Pierādiet, ka ir skaitlis, kas ierakstīts vismaz 5 rūtiņās.

22.19. Vasaras brīvdienās 6 draugi nolēma apciemot cits citu. Katru nedēļu daži draugi dzīvo mājās, bet citi brauc pie viņiem ciemos; nedēļas laikā neviens draugs savu nodarbošanos nemaina. Nedēļas laikā var apmeklēt vairākus draugus. Kāds ir mazākais nedēļu skaits, ar kādu pietiek, lai katrs draugs varētu apciemot katru citu?

22.20. Vai var plaknē atzīmēt galīgu skaitu punktu zilā krāsā tā, lai attālumā 1 cm no katra zilā punkta būtu tieši a) 3, b) 5 zili punkti? Atbildi pamatot.

9. klase

22.21. Vienādojumiem $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ un $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ katram ir divas dažādas saknes. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 + 2cx + a^{-2} = 0$ sakņu nav.

22.22. Apskatām naturālus skaitļus no 1 līdz 1995 ieskaitot. Izvēlamies no tiem kaut kādus 998 skaitļus. Pierādiet, ka starp izvēlētajiem noteikti ir divi tādi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

22.23. Trijstūra malu garumi ir a, b, c, pie tam $a \le b \le c$; tā laukums ir 2. Pierādīt, ka $b \ge 2$.

22.24. Naturālu skaitli sauc par līdzsvarotu, ja kāds tā sākuma fragments vienāds ar kādu beigu fragmentu. Piemēram, līdzsvaroti ir skaitļi 23023 , 45634.
Pierādīt, ka eksistē skaitlis, kurš kļūst līdzsvarots, ja tam galā pieraksta
a) jebkuru no cipariem 1, 2, 3,
b) jebkuru no cipariem 1, 2, 3, 4, 5,
c) jebkuru nenulles ciparu.

22.25. Uz trijstūra ABC malām AB, AC, BC ņemti attiecīgi punkti M, N, K. Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem AMN, BMK, CNK, krustojas vienā punktā.

10. klase

22.26. Divi krēgi, trīs terbuki un pieci dilleri kopā maksā 53 santīmus, bet trīs krēgi, pieci terbuki un deviņi dilleri kopā maksā 91 santīmu. Cik kopā maksā viens krēgs, viens terbuks un viens dillers?

22.27. Naturāla skaitļa ciparu summu apzīmēsim ar S(x). Pierādīt, ka
a) katram naturālam n pastāv nevienādība

$$S(8n) \ge \frac{1}{8} \cdot S(n) \ ,$$

b) bezgalīgi daudziem naturāliem n pastāv vienādība

$$S(8n) = \frac{1}{8} \cdot S(n) .$$

22.28. Uz šaurleņķa trijstūra ABC malām kā pamatiem ārpus ABC konstruēti regulāri trijstūri. Pierādīt, ka ap šiem regulārajiem trijstūriem apvilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

22.29. Dotas 5 bezgalīgas augošas aritmētiskas progresijas, kas sastāv no naturāliem skaitļiem. To diferences ir a, b, c, d, e, pie tam pastāv nevienādība

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} < 1.$$

Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis, kurš nepieder nevienai no šīm progresijām.

22.30. Caur trijstūra ABC virsotnēm vilktas savstarpēji paralēlas taisnes līdz krustpunktiem ar pretējām malām vai to pagarinājumiem. Pierādīt, ka tā trijstūra laukums, kura virsotnes ir šie krustpunkti, ir divas reizes lielāks par trijstūra ABC laukumu.

11. klase

22.31. Pierādīt, ka neatkarīgi no tā, kādi ir skaitļi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 (zināms, ka neviens no tiem nav 0), sistēmā

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \quad * \quad c_1 \\ a_2x + b_2y \quad * \quad c_2 \\ a_3x + b_3y \quad * \quad c_3 \end{cases}$$

katras zvaigznītes vietā var ievietot zīmi ‘‘<‘‘ vai ‘‘>‘‘ tā, lai iegūtajai nevienādību sistēmai nebūtu atrisinājuma.

22.32. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x(x+1) = y^7 .$$

22.33. Telpā doti 4 punkti, kas neatrodas vienā plaknē. Cik ir tādu paralēlskaldņu, kam šie 4 punkti ir virsotnes?

22.34. Uz izliekta četrstūra ABCD malām AB, BC, CD, DA atrodas attiecīgi punkti M, N, P, Q. Zināms, ka MNPQ ir kvadrāts un MN = NC = PD = QA. Pierādīt, ka ABCD ir kvadrāts.

22.35. Kvadrātiska tabula sastāv no n×n rūtiņām, $n \geq 2$. Katrā rūtiņā ierakstīts kaut kāds burts. Zināms, ka katras divas rindiņas atšķiras viena no otras vismaz vienā vietā.
Pierādīt, ka var izsvītrot vienu kolonnu tā, ka palikušajā tabulā katras divas rindiņas atšķirsies viena no otra vismaz vienā vietā.

12. klase

22.36. Atrisināt vienādojumu

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1.$$

22.37. Izliektam daudzskaldnim visas skaldnes ir trijstūri. Cik tam var būt skaldņu?

22.38. Vai eksistē divu argumentu polinoms P(x, y), kam vienlaicīgi piemīt sekojošas divas īpašības:
a) katram x un y P(x, y) > 0,
b) katram pozitīvam skaitlim c eksistē tādi x un y, ka P(x, y) = c.

22.39. Ar S(x) apzīmēsim naturāla skaitļa x ciparu summu. Pieņemsim, ka A ir patvaļīgs fiksēts skaitlis. Pierādīt, ka ir tikai galīgs skaits tādu naturālu n, ka $S(2^n) < A$.

22.40. Četru vienādu riņķa līniju centri atrodas kvadrāta virsotnēs. Kā jāizvēlas punkti A, B, C, D, lai katrs no tiem piederētu savai riņķa līnijai un četrstūra ABCD laukums būtu maksimāli liels?

23. **ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1995./96. m.g.)**

5. klase

23.1. Augošā kārtībā rindā izrakstīti visi naturālie skaitļi, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3. Kāds skaitlis atrodas a) 100-ajā, b) 1996-ajā vietā?

23.2. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām; centrālā rūtiņa izgriezta. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādos ‘‘stūrīšos’’, kādi parādīti 70. zīm.?

70. zīm.

23.3. Kuba izmēri ir 8×8×8. Tā virsma nokrāsota. Pēc tam kubu sagrieza mazos kubiņos ar izmēriem 1×1×1. Cik ir tādu mazo kubiņu, kam daļa virsmas nokrāsota?

23.4. Kādā mājā ir 1996 stāvi. Tajā ir divi lifti. Ar vienu liftu var braukt 3 stāvus uz augšu; ar otru liftu var braukt 5 stāvus uz leju.. Katru liftu var izsaukt uz jebkuru stāvu. Citu pārvietošanās līdzekļu starp stāviem nav.
Pierādīt, ka no katra stāva var nokļūt uz katru citu.

23.5. Kādā valstī runā 1996 dažādās valodās. Kāds ir mazākais vārdnīcu skaits, lai ar to palīdzību varētu tulkot no katras valodas uz katru citu (pieļaujamas vairākkārtīgas tulkošanas)? Ar katru vārdnīcu tulko tikai vienā virzienā.

6. klase

23.6. Taisnstūris sastāv no 4×5 rūtiņām. Tas jāsagriež četrās dažādās figūrās, kas katra sastāv no 5 rūtiņām (griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām). Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

23.7. Pa apli izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 6991 ieskaitot kaut kādā kārtībā, katrs vienu reizi. Pierādīt, ka var atrast tādus divus blakus uzrakstītus skaitļus, kuru summa ir pāra skaitlis.

23.8. Cik ciparu ir skaitlim, kuru iegūst, aprēķinot summas $1+2+3+\cdots+1000$ vērtību?

23.9. Dotas 10 kartiņas; uz tām uzrakstīts pa vienam ciparam (visi cipari dažādi). Kādu mazāko daudzumu kartiņu uz labu laimi jāpaņem, lai no šīm kartiņām noteikti varētu sastādīt skaitli, kas dalās ar 9? (Skaitļa sastādīšanā var izmantot arī tikai daļu paņemto kartiņu.)

23.10. Rindā uzrakstīti 1996 vienīnieki. Ar vienu gājienu nosvītro divus pirmos vēl nenosvītrotos skaitļus un rindas galā pieraksta to summu. Tā turpina, kamēr paliekj viens vienīgs nenosvītrots skaitlis.
a) Kāds tas ir?
b) Cik skaitļu (nosvītroto un nenosvītroto) kopā šai brīdī uzrakstīts?

7. klase

23.11. Iedomāsimies, ka tiek atvērtas iekavas izteiksmē $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$.
a) Cik saskaitāmo radīsies, ja līdzīgus locekļus nesavilks?
b) Cik saskaitāmo paliks, ja savilks visus līdzīgos locekļus?

23.12. Daudzstūri ar vienu taisnu griezienu sagrieza divās daļās -- piecstūrī un sešstūrī. Cik virsotņu varēja būt sākotnējam daudzstūrim?

23.13. Uz galda ir konfektes. Divi spēlētāji pēc kārtas ēd vai nu pa 2, vai pa 4 konfektēm. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kas uzvar, pareizi spēlējot -- pirmais vai otrais spēlētājs? Atbildēt uz šo jautājumu, ja a) n = 18, b) n = 1996.

23.14. Uz tāfeles uzrakstīti 5 dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties trīs skaitļus tā, lai izvēlēto skaitļu summa dalītos ar 3.

23.15. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 2; 3; 4; 5; 6. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkurus divus uzrakstītus skaitļus a un b, nodzēst tos un to vietā uzrakstīt skaitļus a + b un a × b.
Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos 1993; 1994; 1995; 1996; 1997?

8. klase

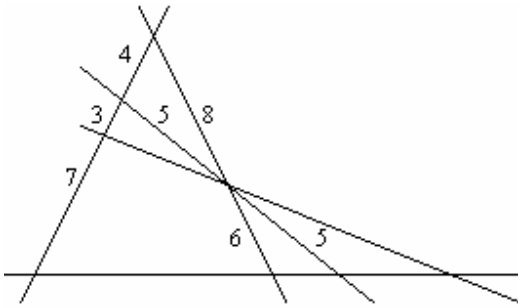
23.16. Vienādojumu $x^2 + ax + b = 0$ un $x^2 + px + q = 0$ saknes ir naturāli skaitļi; abas pirmā vienādojuma saknes lielākas par abām otrā vienādojuma saknēm. Pierādīt, ka $a < p$ un $b > q$.

23.17. Andris izvēlējās 6 dažādus naturālus skaitļus un aprēķināja to summas pa diviem. Vai 10 no iegūtajām summām var būt pirmskaitļi?

23.18. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala, tad tajās ierakstītie skaitļi atšķiras viens no otra ne vairāk kā par 1. Pierādīt, ka ir skaitlis, kas ierakstīts vismaz 5 rūtiņās.

23.19. Nezinītim ir 15 pēc ārējā izskata vienādas lodītes; uz tām uzrakstīts attiecīgi ‘‘1g’’, ‘‘2g’’,... , ‘‘15g’’. Ir zināms, ka ne vairāk kā triju lodīšu masa norādītas nepareizi. Kā viņš var noskaidrot, vai lodīte ar uzrakstu ‘‘1g’’ tiešām sver vienu gramu, lietojot sviras svarus bez atsvariem?

23.20. Novilktas 5 taisnes (skat. 71. zīm.). Vai nogriežņu garumi var būt tādi, kā norādīti zīmējumā?



71. zīm.

9. klase

23.21. Kādām n vērtībām vienādojumam $x^2 + nx + 6n = 0$ eksistē vismaz viena sakne?

23.22. Trijstūra malu garumi ir a, b, c; pie tam $a \le b \le c$. Tā laukums ir 2. Pierādīt, ka $b \ge 2$.

23.23. Uz tāfeles uzrakstīti 50 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus (varbūt vienu pašu) tā, lai izvēlēto skaitļu summa būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

23.24. Riņķī ievilkts sešstūris ABCDEF. Tā diagonāles AD, BE, CF krustojas vienā punktā. Pierādīt, ka $AB \times CD \times EF = BC \times DE \times FA$.

23.25. Darbnīcā strādā 7 strādnieki; tajā ir 5 dažādi darbgaldi. Katru dienu darbā ierodas tikai 5 strādnieki. Apmācīt vienu strādnieku strādāt uz viena darbgalda izmaksā 100 latus. Kādas ir mazākās apmācības izmaksas, ar kurām var garantēt, ka visi darbgaldi varēs strādāt neatkarīgi no tā, kuri strādnieki ieradīsies darbā? (Katrs strādnieks vienlaicīgi strādā tikai pie viena darbgalda.)

10. klase

23.26. Apskatām visus vienādojumus $x^2 + px + q = 0$, kur p un q -- naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 10. Cik starp tiem ir tādu, kam ir vismaz viena sakne?

23.27. Uz šaurleņķa trijstūra ABC malām kā pamatiem ārpus ABC konstruēti regulāri trijstūri. Pierādīt, ka šiem regulārajiem trijstūriem apvilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

23.28. Vai var atrast tādus 5 dažādus naturālus skaitļus, lai katru četru summa dalītos ar piekto? Vai var atrast tādus 1996 dažādus naturālus skaitļus, lai katru 1995 skaitļu summa dalītos ar atlikušo?

23.29. Izveidojam no skaitļiem 1; 2; 3;...; n visas iespējamās virknes garumā 4 (pieļaujamas arī virknes, kurās daži vai visi locekļi ir vienādi).
Pierādīt, ka visu virkņu minimālo elementu summa ir $1^4 + 2^4 + ... + n^4$.

23.30. Ar a(n) apzīmējam skaitlim $\sqrt{2n}$ tuvāko veselo skaitli.
Aprēķināt summu $\frac{1}{a(1)} + \frac{1}{a(2)} + \cdots + \frac{1}{a(1996)}$.

11. klase

23.31. Kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes x_1 un x_2. Izsacīt izteiksmes $x_1^6 x_2^2 + x_1^2 x_2^6$ vērtību ar p un q palīdzību, nelietojot kvadrātsaknes zīmi.

23.32. Dots, ka $a + b + c > 0$, $ab + ac + bc > 0$ un $abc > 0$. Pierādīt, ka a, b, c visi ir pozitīvi skaitļi.

23.33. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2 + x = y^7$.

23.34. Dots, ka ABC ir šaurleņķa trijstūris un $\angle BAC = 60°$. Novelkam taisnes, uz kurām atrodas trijstūra augstumi, kas vilkti no virsotnēm B un C. Pierādīt, ka DABC apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas vienādos attālumos no tām.

23.35. Trīs valstīs katrā dzīvo pa n zinātniekiem. Katram no viņiem abās pārējās valstīs kopā ir tieši n +1 paziņas. (Uzskatām: ja A pazīst B, tad B pazīst A.) Pierādīt: var izvēlēties katrā valstī pa vienam zinātniekam tā, ka trīs izvēlētie katrs pazīst katru.

12. klase

23.36. Atrisināt vienādojumu sinxsin2x = sin3xsin4x.

23.37. Izliektam daudzskaldnim ir n skaldnes; tās visas ir trijstūri. Kāds var būt n?

23.38. a) Vai eksistē tādi pirmskaitļi x, y un z, ka $x^2 + y^2 = z^2$?
b) Vai eksistē tādi pirmskaitļi x, y, z ,u, v, ka $x^2 + y^2 = z^2 + u^2 + v^2$?

23.39. Šaurleņķa trijstūrī ABC bisektrise no virsotnes A, mediāna no virsotnes B un augstums no virsotnes C krustojas vienā punktā.
Pierādīt, ka $\angle BAC \geq 45°$.

23.40. Viesībās piedalās 2n cilvēki; katrs no viņiem pazīst vismaz n citus (ja A pazīst B, tad B pazīst A). Pierādīt: viesus var nosēdināt ap apaļu galdu tā, lai katram abās pusēs sēdētu viņa paziņas.

24. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1996./97. m.g.)

5. klase

24.1. Andris paziņo: ‘‘ Aizvakar man bija 11 gadi, bet nākošgad man paliks 14 gadi.’’ Vai tas ir iespējams?

24.2. Rindā aug 16 ābeles. Katrās divās blakus augošās ābelēs ābolu daudzumi viens no otra atšķiras par 1. Vai var būt, ka visās ābelēs kopā ir tieši 1997 āboli?

24.3. Cik ir tādu naturālu skaitļu no 1 līdz 1997, kam ciparu summa dalās ar 5?

24.4. Kādā mājā ir 1996 stāvi. Tajā ir 2 lifti. Ar vienu liftu var braukt 3 stāvus uz augšu; ar otru liftu var braukt 5 stāvus uz leju. Katru liftu var izsaukt uz jebkuru stāvu. Citu pārvietošanās līdzekļu starp stāviem nav.
Pierādīt, ka no katra stāva var nokļūt uz katru citu, nepieciešamības gadījumā lietojot liftus vairākas reizes.

24.5. Kādā salā dzīvo 100 cilvēku. Daži no viņiem vienmēr runā patiesību, citi vienmēr melo. Katram mājās paslēpts zelta, sudraba vai vara naudas pods (tieši viens!). Katram cilvēkam uzdeva 3 jautājumus:
a) vai Tev mājās ir zelta nauda?
b) vai Tev mājās ir sudraba nauda?
c) vai Tev mājās ir vara nauda?
Uz pirmo jautājumu ‘‘jā’’ atbildēja 70, uz otro -- 60, uz trešo -- salinieku. Cik salā meļu?

6. klase

24.6. Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt vienu no burtiem A, B, C, D tā, lai nevienā rindā un nevienā kolonnā nebūtu ierakstīti 2 vienādi burti?

24.7. Dotas 10 kartiņas; uz tām uzrakstīts pa vienam ciparam (visi cipari dažādi). Kādu mazāko daudzumu kartiņu uz labu laimi jāpaņem, lai no šīm kartiņām noteikti varētu sastādīt skaitli, kas dalās ar 9? (Skaitļa sastādīšanā var izmantot arī tikai daļu paņemto kartiņu.)

24.8. Rindā izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz100 ieskaitot, katrs tieši vienu reizi. Vai var katram no tiem priekšā pierakstīt ‘‘ + ‘‘ vai ‘‘ - ‘‘ zīmi tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 0?

24.9. Rīmu ciemā dzīvo 7 rīmas. Pirmais no tiem var apēst milzu torti 3 dienās, otrais -- 4 dienās,... , septītais -- 9 dienās.
Kādam mazākajam daudzumam rīmu jāķeras pie ēšanas, lai, ēdot vienlaicīgi, apēstu torti ne ilgākā laikā kā 1 diena?

24.10. Vai šaha zirdziņš var pa šaha galdiņu veikt noslēgtu ceļu (t.i., tādu, kas beidzas tai pašā rūtiņā, kurā sācies) nonākot katrā vertikālē un katrā horizontālē tieši vienu reizi? (Uzskatām, ka kopējā sākumā -- beigu pozīcijā zirdziņš nonāk vienreiz.)

7. klase

24.11. Izsacīt reizinājumu $2^{197}\times 8^{97}$ kā
a) divnieka pakāpi,
b) četrinieka pakāpi.

24.12. Daudzstūri ar vienu taisnu griezienu sagrieza divās daļās -- piecstūrī un sešstūrī. Cik virsotņu varēja būt sākotnējam daudzstūrim?

24.13. Ievietot izteiksmē 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu 7. Centieties atrast 3 dažādus veidus, kā to izdarīt.

24.14. Trijstūrī viena mala trīs reizes īsāka par abu pārējo malu garumu summu. Pierādīt, ka tā ir īsākā trijstūra mala.

24.15. Karnevāla zālē karājas 6 spuldzes. Izņemot vienu spuldžu pāri, kas nav savā starpā savienotas ar lentu, katras divas spuldzes savienotas savā starpā vai nu ar baltu, vai sarkanu lentu. Pierādīt: var gadīties, ka nav tādu 3 spuldžu, kas visas savā starpā savienotas ar vienas un tās pašas krāsas lentām.
Vai tā var gadīties, ja ir 7 spuldzes?

8. klase

24.16. Dots, ka a + b + c = 0 un $a \neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c = 0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izsacīt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

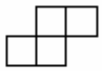
24.17. Nezinītim ir 15 pēc ārējā izskata vienādas lodītes; uz tām uzrakstīts attiecīgi ‘‘1g’’, ‘‘2g’’,... , ‘‘15g’’. Ir zināms, ka ne vairāk kā triju lodīšu masa norādītas nepareizi. Kā viņš var

noskaidrot, vai lodīte ar uzrakstu ‘‘1g’’ tiešām sver vienu gramu, lietojot sviras svarus bez atsvariem?

24.18. Trīs riņķa līnijas pa pāriem ārēji pieskaras 3 dažādos punktos A, B, C. Tām novilktas kopējās iekšējās pieskares. Vai šīs pieskares var cita ar citu krustoties 3 dažādos punktos?

24.19. Atrast kaut vienu naturālu skaitli, kas dalās ar 13, kura ciparu summa un divi pēdējie cipari ir 1 un 3 (pēdējais cipars ir 3).

24.20. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. No tā izgrieztas četras stūra rūtiņas. Vai atlikušo daļu var sagriezt tādās figūrās, kāda redzama 72. zīmējumā?



72. zīm.

9. klase

24.21. Atrast sešus dažādus naturālus skaitļus, kuru reizinājums ir 1152. Pietiek uzrādīt vienu šādu skaitļu komplektu.

24.22. Pierādīt: neatkarīgi no tā, kādi ir skaitļi a un b, vienādojumam $x^2 - 2(a+b)x + (2ab + a + b - \frac{1}{2}) = 0$ ir sakne.

24.23. Uz tāfeles uzrakstīti 50 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus (varbūt vienu pašu) tā, lai izvēlēto skaitļu summa būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

24.24. Punkts M ir paralelograma ABCD malas AD viduspunkts. Punkts K ir tā perpendikula pamats, kas no B novilkts pret taisni CM. Pierādīt, ka AB = AK.

24.25. Kādām naturālām n vērtībām vienādmalu trijstūri ar malas garumu n var sagriezt trapecēs, katrai no kurām malu garumi ir 1; 1; 1; 2?

10. klase

24.26. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1997. \end{cases}$$

24.27. Uz šaurleņķu trijstūra ABC malām kā pamatiem ārpus ABC konstruēti regulāri trijstūri. Pierādīt, ka šiem regulārajiem trijstūriem apvilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

24.28. Dots, ka skaitļi x un y atšķiras no nulles. Pierādīt, ka

$$x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2} \geq 4.$$

24.29. a) Atrast kaut vienu naturālu piecciparu skaitli, kas sastāv tikai no cipariem 1 un 2 un dalās ar 32;
b) atrast kaut vienu naturālu desmitciparu skaitli, kas sastāv tikai no cipariem 1 un 2 un dalās ar 1024.

24.30. Spēlētāji A un B spēlē sekojošu spēli. Vispirms A nokrāso vienu plaknes punktu sarkanu. Pēc tam B nokrāso 1997 vēl nenokrāsotus plaknes punktus melnus. Pēc tam A nokrāso vienu vēl nenokrāsotu plaknes punktu sarkanu. Pēc tam B nokrāso 1997 vēl nenokrāsotus plaknes punktus melnus, utt. Spēlētājs A grib, lai kādreiz izveidotos vienādmalu trijstūris, kam visas virsotnes ir sarkanas; B viņam traucē. Vai A noteikti var sasniegt savu mērķi?

11. klase

24.31. Atrast kaut vienu naturālu nepāra skaitli, kas, dalot ar 5, dod atlikumā 4, bet, dalot ar 7, dod atlikumā 6.
Cik pavisam ir šādu skaitļu?

24.32. Apskatām vienādojumu $x^2 - y = \sqrt{x - y} - \frac{1}{2}$

a) atrast vienu tā atrisinājumu,
b) pierādīt, ka vienādojumam ir tikai viens atrisinājums.

24.33. Kāds kvadrāts sagriezts taisnleņķa trijstūros, katram no kuriem katešu garumi ir 3 un 4.
a) Pierādīt kaut vienu veidu, kā to var izdarīt,
b) pierādīt, ka trijstūru skaits noteikti ir pāra skaitlis.

24.34. Dots, ka ABC ir šaurleņķa trijstūris un $\angle BAC = 60°$. Novelkam taisnes, uz kurām atrodas trijstūra augstumi, kas vilkti no virsotnēm B un C. Pierādīt, ka trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas vienādos attālumos no tām.

24.35. Katrā no diviem šaha turnīriem piedalās vieni un tie paši 2n šahisti; katrs šahists katrā turnīrā ar katru citu spēlē vienu reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Ir zināms, ka katram spēlētājam abos turnīros iegūto punktu summas atšķiras viena no otras vismaz par n. Pierādīt, ka katram spēlētājam šīs summas atšķiras viena no otras tieši par n.

12. klase

24.36. Dots, ka $\sin x = \sin y$ un $\cos x \neq 0$. Pierādīt, ka $|\operatorname{tg} x| = |\operatorname{tg} y|$.

24.37. Vai eksistē tādi pirmskaitļi x, y un z, ka $x^2 + y^2 = z^2$?

24.38. Vai var četras no kuba virsotnēm nokrāsot baltas, bet atlikušās četras -- melnas tā, lai nevienā plaknē neatrastos 4 vienas krāsas virsotnes?

24.39. Izliektā sešstūrī AXBYCZ pastāv vienādības AX = AZ, BX = BY, CY = CZ un $\angle A + \angle B + \angle C = \angle X + \angle Y + \angle Z$.
Pierādīt, ka trijstūra ABC laukums ir puse no sešstūra AXBYCZ laukuma.

24.40. Ballē ieradušies n zēni un n + 1 meitene. Kādām n vērtībām iespējams, ka visas meitenes pazīst dažādu skaitu zēnu, bet visi zēni pazīst vienu un to pašu skaitu meiteņu?

26. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1998./99. m.g.)

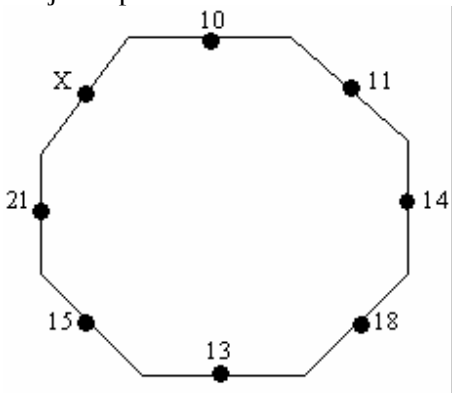
5. klase

26.1. Andris, Bruno, Didzis un Edgars kopā apēda 40 konfektes, katrs vismaz vienu. Bruno un Didzis kopā apēda vismaz 25 konfektes; Andris apēda vairāk konfektes nekā jebkurš cits no zēniem.
Cik konfektes apēda Edgars?

26.2. Cik no 1 līdz 1999 ieskaitot ir tādu naturālu skaitļu, kuru ciparu summa dalās ar 5?

26.3. Apskatām taisnstūrus, kuru malu garumi ir veseli skaitļi un augstums nepārsniedz platumu. Vai vairāk ir dažādu izmēru taisnstūru ar perimetru 200 vai dažādu izmēru taisnstūru ar perimetru 202?

26.4. Astoņstūra virsotnēs ierakstīja pa naturālam skaitlim. Katras malas viduspunktā uzrakstīja tās galos esošo skaitļu summu. Pēc tam nodzēsa skaitļus visās virsotnēs un vienas malas viduspunktā *X*; ieguva 26.1. zīmējumā parādīto ainu. Kāds skaitlis bija ierakstīts punktā *X?*



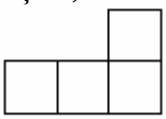
26.1. zīm.

26.5. Konferencē piedalījās 17 zinātnieki. Katrs no viņiem konstatēja, ka konferencē vismaz 8 zinātnieki ir viņa radinieki. Pierādīt, ka visi 17 zinātnieki ir radinieki.

6. klase

26.6. Pieci bērni apēd 5 mandarīnus 5 minūtēs. Cik bērni apēd 50 mandarīnus 25 minūtēs?
(Visi mandarīni ir vienādi, visi bērni ēd vienādi ātri.)

26.7. Katra kuba skaldne sadalīta 4 vienādās kvadrātiskās rūtiņās. Vai kuba virsmu var pilnībā aplīmēt ar sešām tādām figūrām, kāda parādīta 26.2. zīm.?
(Katra figūra sastāv no 4 tādām pašām rūtiņām, kādās sadalītas kuba skaldnes)



26.2. zīm.

26.8. Kādas vērtības var pieņemt ciparu summa naturālam skaitlim, kas dalās ar 7?

26.9. Pa apli kaut kādā kārtībā uzrakstīti visi nenulles cipari, katrs vienu reizi. Apskatām visus deviņus trīsciparu skaitļus, kas iegūstami, nolasot trīs pulksteņa rādītāja kustības virzienā pēc kārtas uzrakstītos ciparus. Aprēķināt šo 9 skaitļu summu.

26.10. a) Uz riņķa līnijas atzīmēti 10 punkti. Vai tajos var ierakstīt burtus A, B, C, D, E (katrā punktā vienu burtu) tā, lai vienādi burti nekur neatrastos blakus un lai visi blakus esošo burtu pāri būtu dažādi? (Pārus, kas atšķiras tikai ar burtu kārtību, uzskatām par vienādiem).
b) Atrisināt līdzīgu uzdevumu, ja 15 punktos jāizvieto burti A, B, C, D, E, F .

7. klase

26.11. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu, kas dalās ar 3, var uzrakstīt, lietojot katru nenulles ciparu tieši vienu reizi?

26.12. Rindā stāv *n* dažāda auguma skolnieki. Pats kreisais no tiem ir īsāks par pašu labējo. Vai noteikti atradīsies tāds skolnieks, kura kaimiņš pa kreisi īsāks nekā viņa kaimiņš pa labi?
Atrisināt uzdevumu, ja
a) $n = 10$,
b) $n = 11$.

26.13. Dots, ka a, b, c, d -- naturāli skaitļi un $a + b = c + d$. Pierādīt, ka skaitli $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ var izsacīt kā triju veselu skaitļu kvadrātu summu.

26.14. Dots, ka *ABC* ir vienādmalu trijstūris. Uz malas *BC* ņemts punkts *M*, kas nav trijstūra *ABC* virsotne. Taisnes, kas caur *M* vilktas paralēli *AB* un *AC*, krusto malas *AC* un *AB* atbilstoši punktos *E* un *F*. Dots, ka *K* un *L* ir atbilstoši *BE* un *CF* viduspunkti. Pierādīt, ka *MKL* ir vienādmalu trijstūris.

26.15. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 2 svēršanu palīdzību noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām?
(Pašu monētu atrast nav nepieciešams).

8. klase

26.16. Dots, ka $a+b+c=0$ un $a\neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izsacīt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

26.17. Dots, ka *ABC* ir vienādsānu trijstūris, $AB=BC$. Uz malas *AC* ņemts punkts *M*, kas nesakrīt ne ar *A*, ne ar *C*. Caur *M* vilkta taisne *t*, kas perpendikulāra *AC*; tā krusto taisni *AB* punktā *X* un taisni *BC* – punktā *Y*. Pierādīt, ka lieluma $MX+MY$ vērtība nav atkarīga no punkta *M* izvēles uz *AC*.

26.18. Jānis raksta uz tāfeles skaitļus. Pirmais skaitlis ir 23, katrs nākošais ir divas reizes lielāks par iepriekšējo. (Tātad pirmie uzrakstītie skaitļi ir 23; 46; 92; 184;...) Vai starp Jāņa uzrakstītajiem skaitļiem atradīsies divi tādi skaitļi, kuru pirmie cipari ir vienādi, otrie – arī vienādi, priekšpēdējie – arī vienādi? (Uzskatām, ka Jānis turpina rakstīšanu neierobežoti ilgi).

26.19. Rindā kaut kādā kārtībā jāizraksta naturālie skaitļi no 1 līdz 13, katrs tieši vienu reizi. Zināms, ka pirmajam skaitlim jābūt 13, otrajam jābūt 1, un katram skaitlim, sākot ar otro, jābūt visu pirms tam uzrakstīto skaitļu summas dalītājam. Kuru skaitli var rakstīt kā trešo?

26.20. Uz lapas rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 20:

1 2 3 4 ... 19 20.

Divi spēlētāji pēc kārtas ieraksta pa vienai "+", "-" vai "·" zīmei jebkurā vēl brīvā atstarpē starp blakus uzrakstītajiem skaitļiem. Spēle beidzas, kad ierakstītas visas 19 zīmes.
Pierādīt, ka spēlētājs, kas izdara pirmo gājienu, var panākt, lai iegūtās aritmētiskās izteiksmes vērtība būtu pāra skaitlis.

9.klase

26.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2+y=1 \\ x+y^2=1. \end{cases}$$

26.22. Dots, ka k ir naturāls skaitlis. Pierādīt:

a) ja $k = m + 2mn + n$, kur m un n – naturāli skaitļi, tad $2k+1$ nav pirmskaitlis,

b) ja $2k+1$ nav pirmskaitlis, tad eksistē tādi naturāli skaitļi m un n, ka $k = m + 2mn + n$.

26.23. Punkts M ir paralelograma $ABCD$ malas AD viduspunkts. Punkts I ir tā perpendikula pamats, kas vilkts no B pret taisni CM. Pierādīt, ka $AB = AK$.

26.24. Uz riņķa līnijas atzīmēti n punkti, $n > 3$. Pakāpeniski novelkam pa vienam nogrieznim, kas savieno divus no dotajiem punktiem, pie tam neviens no jauna novilkts nogrieznis nekrusto nevienu no iepriekšējiem. Pirmo novilkto nogriezni krāso baltu, otro – sarkanu, trešo – baltu, ceturto – sarkanu, utt. Nogriežņus turpina vilkt, kamēr vien tas iespējams; vilkšanas secība var būt patvaļīga. Kādā krāsā būs pēdējais novilktais nogrieznis.

26.25. Vairākās kaudzēs kopā ir n konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 2 kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums).
Vai taisnība, ka konfektes var apvienot vienā visas kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja

a) $n = 64$,

b) $n = 100$?

10.klase

26.26. Dots, ka $x^2 + y^2 = 1$, x un y – pozitīvi skaitļi. Kādas vērtības var pieņemt reizinājums xy?

26.27. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$\left(x^2 + x + 1\right)^3 + \left(x^2 - 2x - 2\right)^3 = \left(2x^2 - x - 1\right)^3.$$

26.28. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BD. Trijstūrim BDC apvilktā riņķa līnija krusto malu AB punktā E, bet trijstūrim ABD apvilktā riņķa līnija krusto malu BC punktā F. Pierādīt, ka $AE = CF$.

26.29. Uz tāfeles uzrakstīti 1999 naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Ar vienu gājienu atļauts nodzēst divus skaitļus un to vietā uzrakstīt nodzēsto skaitļu lielāko kopīgo dalītāju un mazāko kopīgo dalāmo.
Pierādīt, ka izdarot šādus gājienus pietiekami ilgi, uz tāfeles uzrakstītie skaitļi kādreiz pārstās mainīties.

26.30. Jānis uzrakstījis naturālus skaitļus no 1 līdz 20 (katru vienu reizi) rindā kaut kādā kārtībā; Andris šo kārtību nezina. Ar vienu gājienu Andris var nosaukt jebkurus 10 skaitļus, un Jānis viņam pasacīs, kādā secībā šie 10 skaitļi atrodas rindā. Izdomājiet paņēmienu, kas ļauj

Andrim atrast Jāņa uzrakstīto virkni, izmantojot iespējami maz jautājumu. **Nav jāpierāda**, ka Jūsu atrastais jautājumu skaits ir vismazākais iespējamais.

11.klase

26.31. Doti sviras svari bez atsvariem un sešas pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir dažādas. Andris norāda Jānim uz divām monētām. Izdomājiet paņēmienu, kas Jānim ar iespējami mazu svēršanu skaitu ļauj noskaidrot, vai šīs monētas atrastos blakus, ja visas sešas monētas saliktu rindā masu pieaugšanas secībā. **Nav jāpierāda**, ka Jūsu atrastais svēršanu daudzums ir mazākais iespējamais.

26.32. Smaragda pilsētas armijā ir *n* karavīri. Cik dažādos veidos var sarīkot paaugstināšanu dienesta pakāpē un ordeņa piešķiršanu, ja jāievēro divi nosacījumi:

a) katru, kas saņem ordeni, paaugstina arī dienesta pakāpē

b) ir karavīri, kurus dienesta pakāpē gan paaugstina, bet ordeni viņi nesaņem.

26.33. Dots, ka $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, kur x, y, z, t – naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem x, y, z, t var būt pāra skaitļi?

26.34. Dots, ka $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ – regulārs *n*-stūris. Tā virsotnēs atbilstoši dzīvo skudras $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Kādu rītu skudra S_1 sastādīja plānu, kādā secībā viņa apmeklēs visas pārējās skudras, katru vienu reizi; pieņemsim, ka šī secība bija $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{n-1}}$. Sastādījusi plānu, S_1 nekavējoties sāka rāpot virsotnes A_{i_1} virzienā. Norāpojusi pusceļu, viņa pārdomāja, pagriezās un sāka rāpot virsotnes A_{i_2} virzienā. Norāpojusi trešdaļu ceļa, viņa pagriezās un sāka rāpot virsotnes A_{i_3} virzienā. Norāpojusi ceturtdaļu ceļa, viņa pagriezās un sāka rāpot virsotnes A_{i_4} virzienā, utt. Kur atradīsies skudra S_1 pēc tam, kad tā būs pēdējo reizi mainījusi savas domas un norāpojusi $1/n$ attāluma līdz virsotnei $A_{i_{n-1}}$?

26.35. Dots, ka $a + b + c + d = 0$ un $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Pierādīt, ka
$-1 \le ab + bc + cd + da \le 0$.

12.klase

26.36. Cik atrisinājumu reālos skaitļos ir vienādojumam
$x^3 + x^2 + 1 = 0$ **?**

26.37. Funkcija $f(x)$ definēta visiem reāliem *x* un pieņem reālas vērtības. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas divas īpašības:

a) visiem reāliem *x* pastāv nevienādība $f(x) \le x$,

b) visiem reāliem *x* un *y* pastāv nevienādība

$$f(x+y) \le f(x) + f(y).$$

Atrast visas šādas funkcijas $f(x)$ un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

26.38. Vai telpā var novietot 5 punktus tā, lai vienlaicīgi izpildītos sekojošas īpašības:

a) nekādi 4 no tiem neatrodas vienā plaknē,

b) visi attālumi starp tiem ir dažādi,

c) visām 5 posmu slēgtām lauztām līnijām, kuru virsotnes ir šie 5 punkti, garumi savā starpā ir vienādi?

26.39. Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 2^n atrodam lielāko nepāra skaitli, ar kuru tas dalās. Atrodiet šo lielāko nepāra dalītāju summu.

26.40. Koordinātu plaknē punktos ar veselām koordinātēm atrodas 4 figūriņas. Ar vienu gājienu var izvēlēties trīs figūriņas *A*, *B*, *C* un pārbīdīt figūriņu *A* par nogriezni, kas vienāds un paralēls ar *BC*.

Andris norāda uz divām figūriņām. Pierādīt, ka ar šādu gājienu palīdzību norādītās 2 figūriņas var sabīdīt vienā punktā.

27. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (1999./2000. m.g.)

5. klase

27.1. Cik no 1 līdz 2000 ieskaitot ir tādu naturālu skaitļu, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 5?

27.2. Atrast, kādi cipari saskaitīšanas piemērā aizstāti ar burtiem, ja vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi – ar dažādiem:

```
 A   U   D   I
     A   U   D
         A   U
             A
----- ----- ----- -----
 4   3   2   1
```

27.3. Pasaku mežā dzīvoja triju ķildīgu cilšu rūķīši: votivapas, šillišallas un pukkas. Sākot ar pirmdienas rītu, katru dienu notika sekojošais:

a) brokastlaikā katrs mežā palikušais votivapa padzina no meža vienu šillišallu (katrs citu),

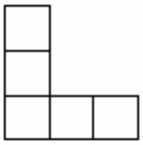
b) pusdienlaikā katrs mežā vēl palikušais pukka padzina no meža vienu votivapu (katrs citu),

c) vakariņu laikā katrs mežā vēl palikušais šillišalla padzina no meža vienu pukku (katrs citu)

Ceturtdien pēc vakariņām mežā palika tikai viens rūķītis. Cik katras cilts rūķīšu bija mežā pirmdien pirms brokastīm?

27.4. Trīsdesmit zēni nostājušies taisnstūrī piecās rindās un sešās kolonnās. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Jāni, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Jāni, nav īsāks par viņu. Tas pats paliek spēkā, ja vārdu "Jānis" aizstāj ar vārdu "Pēteris". Pierādiet, ka Jānis un Pēteris ir vienāda auguma.

27.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām.
Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 27.1. zīm. attēlotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?



27.1. zīm.

6.klase

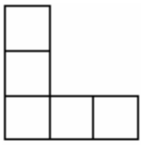
27.6. Cik nepāra ciparu uzrakstīts, ja pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100 ieskaitot?

27.7. Kādas vērtības var pieņemt ciparu summa naturālam skaitlim, kas dalās ar 7?

27.8. Parlamentā ir 100 deputāti. Tajā nodibinātas 17 komisijas (katrs deputāts var piedalīties vairākās komisijās). Lai novērstu grūtības balsošanā, katrā komisijā ir nepāra skaits locekļu. Pierādīt, ka vismaz viens deputāts ir iesaistījies pāra skaitā komisiju (deputāts, kurš nav nevienā komisijā, ir pāra skaitā komisiju).

27.9. Kuba virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 8, katrs vienu reizi. Visās skaldnēs ierakstīto 4 skaitļu summas ir vienādas.
a) Atrodiet kaut vienu skaitļu izvietojumu ar šo īpašību.
b) Atrodiet trīs dažādus skaitļu izvietojumus ar šo īpašību.
(Divi izvietojumi skaitās dažādi, ja var atrast divus skaitļus, kas vienā izvietojumā atrodas uz vienas šķautnes, bet otrā – nē).

27.10. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām.
Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 27.2. zīm. attēlotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?



27.2. zīm.

7.klase

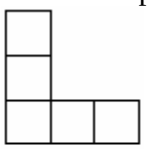
27.11. Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi un $ab = cd$. Pierādīt, ka skaitli $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu. Vai to noteikti var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu?

27.12. Atrast mazāko naturālo skaitli, kam visi cipari ir vienādi un kas dalās ar 49?

27.13. Dots, ka *ABC* ir vienādmalu trijstūris. Uz malas *BC* ņemts punkts *M*, kas nav trijstūra *ABC* virsotne.
Taisnes, kas caur *M* vilktas paralēli *AB* un *AC*, krusto malas *AC* un *AB* atbilstoši punktos *E* un *F*. Dots, ka *K* un *L* ir atbilstoši *BE* un *CF* viduspunkti. Pierādīt, ka *MKL* ir vienādmalu trijstūris.

27.14. Vai naturālos skaitļus
a) no 1 līdz 12 ieskaitot,
b) no 1 līdz 50 ieskaitot
var tā sadalīt pa pāriem, lai visas pāros ieejošo skaitļu summas būtu dažādas un katra no tām būtu pirmskaitlis?
(Piemēram, skaitļus no 1 līdz 6 varētu sadalīt tā: $1+2=3, 3+4=7, 5+6=11$).

27.15. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu figūru, kas vienādas ar 7.3. zīm. redzamo, var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas nevienu citu tādu figūru izgriezt nevarētu? Griezumi pieļaujami tikai pa rūtiņu robežām.



27.3. zīm.

8.klase

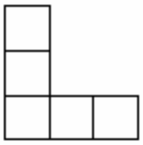
27.16. Dots, ka $a+b+c=0$ un $a\neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izsacīt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

27.17. a) Vai eksistē tāds trijstūris *ABC*, ka $AB = 2\cdot AC$ un $\angle CAB = 2\cdot\angle ABC$?
b) Trijstūrī *ABC* zināms, ka $AB = 2\cdot AC$ un $\angle CAB = 2\cdot\angle ABC$. Aprēķināt $\angle ACB$.

27.18. Uz katras no vairākām kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi); uz visām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa ir 100. Vai noteikti var atrast tādas kartītes (varbūt vienu pašu), uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 50, ja kartīšu skaits ir
a) 50,
b) 51?

27.19. Riņķa līnija ar 2000 punktiem sadalīta 2000 vienādos lokos. Puse no dalījuma punktiem ir balti, puse – sarkani. Novilktas visas hordas, kas savieno dalījuma punktus.
Pierādīt, ka to hordu garumu summa, kurām abi gali ir balti, ir vienāda ar to hordu garumu summu, kurām abi gali ir sarkani.

27.20. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām.
Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 27.4. zīm. attēlotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?



27.4. zīm.

9.klase

27.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1. \end{cases}$$

27.22. Vai skaitli

a) skaitli 2,

b) skaitli $\frac{1}{8}$

var izsacīt kā četriem dažādiem naturālu skaitļu kvadrātiem apgriezto lielumu summu?

27.23. Caur taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru novilktas taisnes paralēli tā malām. Šīs taisnes sadala katru no trijstūra malām trīs nogriežņos. Pierādīt, ka hipotenūzas vidējā nogriežņa garums vienāds ar katešu vidējo nogriežņu summu.

27.24. Apskatām pirmos *n* naturālos skaitļus. No tiem jāizvēlas divus tā, lai to reizinājums būtu vienāds ar visu pārējo skaitļu summu. Vai tas ir iespējams, ja

a) $n=10$,

b) $n=15$?

27.25. Karnevāla zālē katras divas lampas savienotas ar baltu vai sarkanu vītni (tikai vienu).
Pierādīt, ka zirneklītis var izvēlēties vienu no šīm krāsā tā, ka, rāpojot tikai pa izvēlētās krāsas vītnēm, viņš var nokļūt no jebkuras lampas uz jebkuru citu, pa ceļam apmeklējot augstākais 3 no pārējām lampām.

10.klase

27.26. Dots, ka $x^2 + y^2 = 1,\ x > 0$ un $y > 0$. Kādas vērtības var pieņemt reizinājums xy?

27.27. Divu pirmskaitļu starpība ir 100. Uzrakstot pirmo galā otrajam, atkal iegūst pirmskaitli. Atrast šos pirmskaitļus un pierādīt, ka citu bez Jūsu atrastajiem nav.

27.28. Šaurleņķa trijstūrim *ABC* apvilkta riņķa līnija. Punkts *D* atrodas uz riņķa līnijas tā loka *BC*, kas nesatur *A* (*D* nesakrīt ne ar *B*, ne ar *C*). Punkts *E* ir simetrisks punktam *D* attiecībā pret *BC*; punkts *M* ir *AE* viduspunkts.
Pierādīt, ka *M* atrodas uz tās riņķa līnijas, kas iet caur trijstūra *ABC* malu viduspunktiem.

27.29. Kvadrāts sastāvēja no $n \times n$ kvadrātiskām rūtiņām. Tās četras stūra rūtiņas (katru savā stūrī) izgrieza. Atlikušo daļu jāsagriež figūrās, kas visas vienādas ar 27.5. zīm. attēloto. Vai to var izdarīt, ja

a) $n = 6$,
b) $n = 7$,
c) $n = 8$.

27.5. zīm.

27.30. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. To centrus savieno slēgta lauzta līnija, kuras posmi paralēli kvadrāta malām; līnijas virsotnes atrodas tikai rūtiņu centros, un tā iet caur katras rūtiņas centru tieši vienu reizi.

a) Uzzīmēt šādu līniju ar iespējami daudzām virsotnēm,
b) pierādīt, ka tādai līnijai ir ne vairāk kā 60 virsotnes,
c) pierādīt, ka tādai līnijai ir ne vairāk kā 56 virsotnes.

11.klase

27.31. Dots, ka $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, kur x, y, z, t – naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem x, y, z, t var būt pāra skaitļi?

27.32. Paralelograma *ABCD* iekšpusē atrodas punkts *M*. Ir zināms, ka $\angle AMB + \angle CMD = 180°$. Pierādīt, ka $\angle CBM = \angle CDM$.

27.33. Izliekta *n*-stūra $A_1A_2 \ldots A_n$ iekšēju punktu *P* sauc par īpašu, ja stari $A_1P, A_2P, \ldots, A_nP$ krusto dažādas *n*-stūra malas to iekšējos punktos.
Pierādīt:

a) Izliektā 2000-stūrī nav neviena īpaša punkta,
b) eksistē 9-stūris, kurā nav neviena īpaša punkta.

27.34. Funkcijas $f(x)$ argumenti un vērtības ir naturāli skaitļi. Katram naturālam *x* izpildās vienādība

$f(f(x))+f(x)=2x$.

Atrast visa šādas funkcijas $f(x)$ un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

27.35. Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1}-3$ komandas (n – naturāls skaitlis), katra ar katru spēlē tieši vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt, ka pēc turnīra beigām var izvēlēties n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām n komandām.

12.klase

27.36. Cik atrisinājumu reālos skaitļos ir vienādojumam

$x^3+x^2+1=0$ **?**

27.37. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$(2a+b)\cdot(2b+a)=2^c$ **.**

27.38. Trijstūra piramīdas šķautņu garumi ir 17, 18, 19, 20, 21, 23. Vai eksistē lode, kas pieskaras visām tās šķautnēm.

27.39. Riņķī ar rādiusu 1 atrodas 2000 punkti. Novilkti visi iespējamie nogriežņi, katrs no kuriem savieno kaut kādus divus no dotajiem 2000 punktiem. Kāds lielākais skaits šo nogriežņu var būt garāki par $\sqrt{3}$?

27.40. Naturālu skaitļu virkni sauc par *F*-virkni, ja tā ir augoša, bezgalīga un katrs tās loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo locekļu summu. Vai eksistē

a) galīgs daudzums,

b) bezgalīgs daudzums

F-virkņu ar īpašību: katrs naturāls skaitlis pieder tieši vienai no tām.

28. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE 5.-12. klasei (2000./2001. m.g.)

5. klase

28.1. Andrim ir daži ozola klucīši, daži liepas klucīši, daži dzelzs klucīši un viens bronzas klucītis. Tieši 6 klucīši nav ozola; tieši 7 klucīši nav dzelzs; tieši 3 klucīši nav koka.
Cik ir ozola klucīšu?

28.2. Pareizā vienādībā $4\times 4=16$ var katru ciparu izmainīt tieši par 1 un atkal iegūt pareizu vienādību: $5\times 5=25$.

a) Atrodiet kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un trīsciparu skaitli.

b) Atrodiet kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un divciparu skaitli, turklāt sākotnējā vienādībā ir uzrakstīti vismaz 4 dažādi cipari.

28.3. Trīsdesmit zēni nostājušies taisnstūrī piecās rindās un sešās kolonnās. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Jāni, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Jāni, nav īsāks par viņu. Neviens zēns, kas ir vienā rindā ar Andri, nav garāks par viņu, un neviens zēns, kas ir vienā kolonnā ar Andri, nav īsāks par viņu. Pierādiet, ka Jānis un Pēteris ir vienāda auguma.

28.4. Ir 8 kartiņas. Uz katras no tām uzrakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 8 (uz katras kartiņas cits skaitlis). Andris un Bruno pēc kārtas ņem pa vienai kartiņai; pirmais ņem Andris. Andris grib, lai tad, kad visas kartiņas būs paņemtas, uz viņa paņemtajām četrām kartiņām uzrakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis. Vai viņš to noteikti var panākt, pat ja Bruno centīsies viņam traucēt?

28.5. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Dažās rūtiņās novilkts pa vienai diagonālei. Nekādām divām novilktajām diagonālēm nav kopīga galapunkta. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto diagonāļu skaits?

6. klase.

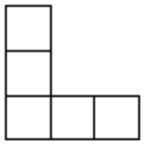
28.6. Kuri piecciparu skaitļi apmierina īpašību: katrs cipars (izņemot pēdējo) ir lielāks par visu tam sekojošo ciparu summu?

28.7. Sauksim naturālu skaitli par īpašu, ja tas dalās ar visu to savu ciparu reizinājumu, kuri nav vienādi ar 0. (Par viencipara skaitļa ciparu reizinājumu sauc tā vienīgo ciparu). Piemēram, skaitļi 7 un 102 ir īpaši, bet skaitļi 77 un 1004 – nav.

a) Vai eksistē 12 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kas visi ir īpaši?

b) Vai eksistē 14 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kas visi ir īpaši?

28.8. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām.
Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 28.1. zīm. attēlotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?



28.1. zīm.

28.9. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 123. Andris un Pēteris pēc kārtas izdara pa vienam gājienam; pirmais iet Andris. Andris ar katru savu gājienu vai nu nedara neko, vai arī samaina uz tāfeles esošā skaitļa ciparus vietām, uzraksta jauniegūto skaitli un nodzēš iepriekšējo. (Ja viens vai vairāki cipari ir nulles, viņš arī drīkst tās novietot skaitļa sākumā un nodzēst, tādejādi samazinot skaitļa ciparu skaitu; piemēram, no 100 viņš drīkst iegūt 001 jeb 1).

Pēteris ar savu gājienu pieskaita uz tāfeles esošajam skaitlim 102, uzraksta iegūto summu un nodzēš iepriekšējo skaitli. Vai Andris var panākt, lai uz tāfeles nekad neparādītos četrciparu skaitlis?

28.10. Autobusā brauca 60 skolēni. Lai kurus 10 skolēnus no tiem izvēlētos, vismaz 3 no izvēlētajiem mācās vienā skolā. Pierādīt, ka vismaz 15 no autobusā braucošajiem skolēniem mācās vienā skolā.

7.klase

28.11. Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi un $ab = cd$. Pierādīt, ka skaitli $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu. Vai to noteikti var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu?

28.12. Naturālu skaitli sauc par simetrisku, ja tā pēdējais cipars nav 0 un, uzrakstot tā ciparus apgrieztā secībā, skaitlis nemainās. Piemēram, skaitlis 1221 ir simetrisks, bet 1231 – nav.

a) Pierādiet apgalvojumu: ja simetrisks sešciparu skaitlis dalās ar 13, tad tas dalās arī ar 7.

b) Vai taisnība, ka katrs simetrisks sešciparu skaitlis, kas dalās ar 7, dalās arī ar 13?

28.13. Trijstūrī ABC zināms, ka $AB = 2\,\text{cm}$, $AC = 3\,\text{cm}$, $\angle BAC = 60°$ un M ir malas AB viduspunkts. Pierādīt, ka $CM = CB$.

28.14. Uz riņķa līnijas atzīmēti 6 dažādi punkti A, B, C, D, E, F un novilkti taisnes nogriežņi AB, BC, CD, DE, EF, FA. Kāds lielākais krustpunktu skaits var rasties?

28.15. Uz pieņemšanu pie Šerloka Holmsa atnācis Puaro un vēl 99 citi viesi; Holmss nepazīst nevienu atnācēju. Puaro zina, kā sauc jebkuru no pārējiem viesiem, bet neviens no pārējiem viesiem nezina, kā sauc Puaro. Holmsam ir atļaut pieiet pie jebkura viesa, norādīt tam uz citu viesi un jautāt: "Vai Jūs zināt, kā viņu sauc?" Visas atbildes ir patiesas. Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Holmss var garantēti noskaidrot, kurš no viesiem ir Puaro?

8.klase

28.16. Dots, ka $a + b + c = 0$ un $x + y + z = 0$. Pierādīt, ka

$$x^2bc + y^2ac + z^2ab = 0.$$

28.17. Šaurleņķu trijstūrī ABC pastāv vienādība $\angle BAC = 3 \cdot \angle ABC$. Pierādīt, ka trijstūri ABC var sagriezt 3 vienādsānu trijstūros tā, ka visas 6 to sānu malas vienādas savā starpā.

28.18. Andrim vajadzēja sareizināt divus trīsciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais sešciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu sešciparu skaitli Andris uzrakstīja?

28.19. Riņķa līnija ar 2000 punktiem sadalīta 2000 vienādos lokos. Puse no dalījuma punktiem ir balti, puse – sarkani. Novilktas visas hordas, kas savieno dalījuma punktus.
Pierādīt, ka to hordu garumu summa, kurām abi gali ir balti, ir vienāda ar to hordu garumu summu, kurām abi gali ir sarkani.

28.20. Ap apaļu galdu sēž *n* cilvēki. Katram no viņiem starp klātesošajiem ir tieši 2 draugi, un tie sēž viens otram blakus. Nav tādu divu cilvēku, kam abiem būtu vieni un tie paši divi draugi. Vai tas ir iespējams, ja

a) $n = 12$,

b) $n = 9$.

Piezīme: ja *A* draudzējas ar *B*, tad arī *B* draudzējas ar *A*.

9.klase

28.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1. \end{cases}$$

28.22. Pierādīt, ka katru izliektu četrstūri var sagriezt 5 daļās, no kurām iespējams izveidot divus paralelogramus tā, ka nekādas divas daļas nepārklājas.

28.23. Vai eksistē četrstūris ar īpašību: jebkuru tā virsotni var pārvietot uz citu vietu (pārējo 3 virsotņu stāvokli nemainot) tā, ka jauniegūtais četrstūris ir vienāds ar sākotnējo?

28.24. Dots, ka *x, y, z* – naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem $xy - z$, $xz - y$ un $yz - x$ dalās ar 3.
Pierādiet, ka $x^2 + y^2 + z^2$ dalās ar 3.

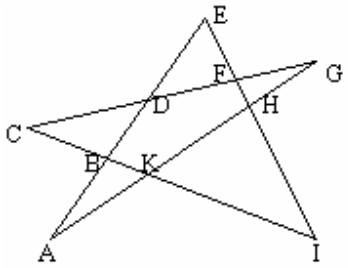
28.25. Matemātikas pulciņā piedalās 8 skolēni. Uz mājām tika uzdoti 8 uzdevumi (visiem skolēniem vieni un tie paši). Ir zināms, ka katru uzdevumu atrisināja tieši 5 skolēni. Pierādīt, ka var izvēlēties 2 skolēnus tā, ka katru uzdevumu atrisinājis vismaz viens no viņiem abiem.

10.klase

28.26. Dots, ka $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$ un $y > 0$. Kādas vērtības var pieņemt reizinājums xy?

28.27. Piecstaru zvaigzne izveidota no pieciem taisnes nogriežņiem, kas krustojas savā starpā (skat. 28.2. zīm.). Pierādīt, ka

$$AB \cdot CD \cdot EF \cdot GH \cdot IK = BC \cdot DE \cdot FG \cdot HI \cdot KA.$$



28.2. zīm.

28.28. Kāds ir mazākais pirmskaitlis *p*, kuram nevar atrast tādus nenegatīvus veselus skaitļus *x* un *y*, $p = \left|2^x - 3^y\right|$?

28.29. Doti *n* kvadrāti ar izmēriem 2×2 un *n* taisnstūri ar izmēriem $1 \cdot 4$. Izmantojot tos visus, jāsaliek divas vienādas plaknes figūras tā, ka gabali nepārklājas. Vai to var izdarīt, ja

a) $n = 2000$,
b) $n = 2001$.

28.30. Volejbola svētkos piedalās 24 komandas. Pirmo triju dienu laikā tika izspēlētas 18 spēles, pie tam katra komanda piedalījās vismaz vienā no tām. Pierādīt, ka starp izspēlētajām spēlēm var izvēlēties tādas sešas, kurās kopā piedalījušās12 dažādas komandas.

11.klase

28.31. Apzīmēsim $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zināms, ka $f(1) < 0$, $f(2 > 2)$, $f(3) < 4$. Vai skaitlis *a* ir pozitīvs, negatīvs vai 0.

28.32. Paralelograma *ABCD* iekšpusē atrodas punkts *M*. Ir zināms, ka $\angle AMB + \angle CMD = 180°$. Pierādīt, ka $\angle CBM = \angle CDM$.

28.33. Skaitļu virknes elementi ir naturāli skaitļi. Pirmo elementu izvēlas patvaļīgi, bet katrs nākošais elements ir vienāds ar iepriekšējā elementa naturālo dalītāju skaitu.
Piemēram, ja virknes pirmais elements ir 14, tad virkne ir

14, 4, 3, 2, 2, 2, ...

Kāds var būt virknes pirmais elements, ja neviens tās elements nav naturāla skaitļa kvadrāts?

28.34. Dots, ka nenegatīvu skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa ir 1. Atrast izteiksmes

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_{n-1}^2 x_1$$

lielāko iespējamo vērtību, ja

a) $n = 2$,
b) $n = 3$.

28.35. Pa apli novietoti *n* trauki, katrā no tiem ir *k* monētas (*n* un *k* ir naturāli skaitļi). Izņemam no viena trauka visas monētas un pa vienai liekam tās pēc kārtas traukos, kas ir nākošie

pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Kad visas monētas ieliktas, atkārtojam procesu, izņemot visas monētas no trauka, kurā ielikām pēdējo monētu.
Pierādīt, ka agri vai vēlu visas monētas vienlaicīgi atradīsies vienā traukā.

12.klase

28.36. Dots, ka $0 \le x \le \pi$. Pierādīt, ka $\cos(\sin x) \ge \cos x$.

28.37. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu
$(2a+b)\cdot(2b+a)=2^c$**.**

28.38. Aplūkojam skaitļus $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2000}, \frac{1}{2001}$ un aprēķinām to reizinājumu summu pa 2, pa 4, pa 6, ..., pa 1998, pa 2000. Atrodiet visu šo reizinājumu summu.

28.39. Izliektam daudzskaldnim ir 100 šķautnes. Kādu lielāko šķautņu skaitu var krustot viena plakne? (Plakne krusto nogriezni, ja nogriežņa galapunkti atrodas plaknes dažādās pusēs)

28.40. Rindā uzrakstīti 10 veseli skaitļi. Zem katra no tiem uzraksta jaunu skaitli saskaņā ar šādu likumu: zem *x* raksta to sākotnējās rindas skaitļu skaitu, kas uzrakstīti pa labi no *x* un ir lielāki par *x*. Tādejādi iegūst otru skaitļu rindu, kas arī sastāv no 10 veseliem skaitļiem. Piemēram:

3	4	8	4	3	6	5	2	1	1
5	3	0	2	2	0	0	0	0	0

Līdzīgā veidā no otrās rindas iegūst trešo, no trešās – ceturto, utt.

a) Pierādīt, ka ar laiku iegūsim rindu, kas sastāv tikai no nullēm.

b) Sauksim rindu par labu, ja tajā vismaz viens skaitlis nav 0. Kāds ir lielākais iespējamais labu rindu skaits?

Agnis Andžāns, Aivars Bērziņš, Anna Bērziņa

Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi

1997., 2001.

II daļa

ATRISINĀJUMI

Anotācija

Atklātās matemātikas olimpiādes radās 1974. gadā kā LU Fizikas un matemātikas fakultātes 5. kursa studentu iniciatīva. To mērķis bija radīt iespēju piedalīties Latvijas mēroga sacensībās plašākam skolēnu kontingentam, nekā to pieļauj oficiālo valsts olimpiāžu daudzpakāpju siets, kā arī iesaistīt olimpiāžu kustībā jaunāko klašu skolēnus.

Līdz 1990. gadam pamatskolai atbilst 4. - 8. klases un vidusskolai 9. - 11. klases. No 1990. gada pārgāja uz jaunu klašu sistēmu, kur pamatskolai atbilst 5. - 9. klases un vidusskolai 10. - 12. klases.

1. - 5. atklātajā olimpiādē varēja piedalīties tikai 7.-11. klašu skolēni, 6. olimpiādē 5.-11. klašu skolēni, bet visās turpmākajās olimpiādēs uzdevumi tiek piedāvāti visām pamatskolas un vidusskolas klasēm.

Olimpiādes dalībnieku skaits pakāpeniski pieauga no ~300 dalībniekiem 1. atklātajā olimpiādē līdz ~3000 dalībniekiem 26. atklātajā olimpiādē. Atklāto olimpiāžu ideja izrādījās auglīga un vilinoša; turpmākajos gados līdzīgas sacensības sāka rīkot arī fiziķi, astronomi, filologi utt., kā arī citu valstu izglītības organizatori. Atklātās matemātikas olimpiādes ieguvušas arī starptautisku autoritāti; vairākkārt tajās piedalījušās arī citu valstu delegācijas.

Šajā izstrādnē iekļauti 1. - 28. (1973./74. m.g. - 2000./01. m.g.) atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi ‘(I daļa) līdz ar īsiem atrisinājumiem vai atbildēm (II daļa). Izstrādnē nav iekļauti 25.atklātās matemātikas olimpiādes materiāli.

Saturs.

1. atklātā olimpiāde (1973./74. m.g.) 3
2. atklātā olimpiāde (1974./75. m.g.) 6
3. atklātā olimpiāde (1975./76. m.g.) 9
4. atklātā olimpiāde (1976./77. m.g.) 13
5. atklātā olimpiāde (1977./78. m.g.) 17
6. atklātā olimpiāde (1978./79. m.g.) 23
7. atklātā olimpiāde (1979./80. m.g.) 31
8. atklātā olimpiāde (1980./81. m.g.) 37
9. atklātā olimpiāde (1981./82. m.g.) 44
10. atklātā olimpiāde (1982./83. m.g.) 51
11. atklātā olimpiāde (1983./84. m.g.) 58
12. atklātā olimpiāde (1984./85. m.g.) 65
13. atklātā olimpiāde (1985./86. m.g.) 70
14. atklātā olimpiāde (1986./87. m.g.) 76
15. atklātā olimpiāde (1987./88. m.g.) 81
16. atklātā olimpiāde (1988./89. m.g.) 86
17. atklātā olimpiāde (1989./90. m.g.) 90
18. atklātā olimpiāde (1990./91. m.g.) 94
19. atklātā olimpiāde (1991./92. m.g.) 99
20. atklātā olimpiāde (1992./93. m.g.) 103
21. atklātā olimpiāde (1993./94. m.g.) 109
22. atklātā olimpiāde (1994./95. m.g.) 113
23. atklātā olimpiāde (1995./96. m.g.) 117
24. atklātā olimpiāde (1996./97. m.g.) 122
26. atklātā olimpiāde (1998./99. m.g.) 127
27. atklātā olimpiāde (1999./2000. m.g.) 137
28. atklātā olimpiāde (2000./2001. m.g.) 150

1. atklātā olimpiāde (1973./74. m.g.)

1.1. Bisektrišu krustpunktu apzīmēsim ar O . Tad
$\angle AOC = 180° - \angle OAC - \angle OCA = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) =$
$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 180° - \frac{1}{2}(180° - 70°) = 125°$, bet šaurais leņķis, ko veido norādīto leņķu bisektrises ir $180° - 125° = 55°$.

1.2. Pirmskaitlis, kas lielāks par 2 ir nepāra skaitlis. Tātad p = 2k + 1,
$p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Tā kā no skaitļiem k un k + 1 viens dalās ar 2, tad $p^2 - 1$ dalās ar 8.

1.3. Apzīmēsim attālumu no A līdz B (arī C) ar S, laivas ātrumu ar x, upes straumes ātrumu ar y. Pierādīsim, ka otrajā dienā zvejnieks patērēja vairāk laika. Tātad jāpierāda nevienādība

$$\frac{S}{x} + \frac{S}{x} < \frac{S}{x+y} + \frac{S}{x-y}.$$

Izdalot ar S un saskaitot daļas, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$\frac{2}{x} < \frac{2x}{x^2 - y^2}, \quad \text{jeb} \quad x^2 - y^2 < x^2,$$

kas vienmēr izpildās.

1.4. Pieņemsim pretējo, ka divi ceļi -- tuvākais no A un tuvākais no B (starp ciematiem A un C un ciematiem B un D) krustojas. Tad

$$AC + BD = (AO + OD) + (BO + OC) > AD + BC.$$

Taču šī nevienādība ir pretrunā ar nevienādībām $AC \le AD$ un $BD \le BC$, kas seko no tā, ka C ir tuvākais ciems ciemam A un D ir tuvākais ciems ciemam B. Iegūtā pretruna pierāda uzdevuma apgalvojumu.

1.5. Jākonstruē taisnstūris ar malām 3 cm un 4 cm.

1.6. Kārbiņā ir 10 trijstūri, 20 četrstūri un 8 piecstūri.

1.7. Tā kā $|x| \ge x$ un $|y| \ge y$, tad, sasummējot dotās nevienādības, iegūstam, ka $a + b \ge 0$. Ja šī nevienādība izpildās, tad var atrast atbilstošās x un y vērtības.

1.9. Atliekot 131 reizi 11° lielu leņķi, mēs iegūsim $131 \cdot 11° = 1441° = 360° \cdot 4 + 1°$ lielu leņķi, jeb 1° lielu leņķi.

1.10. Ja trijstūris nav vienādsānu, tad bisektrise atrodas starp mediānu un augstumu.

1.11. Apzīmējam 1. skudras ātrumu ar v_1 un 2. skudras ātrumu ar v_2. Sastādām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{v_1+v_2} = v_1 - v_2 \\ v_1(v_1 - v_2) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1^2 - v_2^2 = \Delta \\ v_1^2 - v_1 v_2 = a \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{\Delta - a} \Rightarrow v_1 = \frac{a v_2}{\Delta - a}.$$

Atbilde: $v_1 = \sqrt{\dfrac{\Delta^2 - 2\Delta a + a^2}{2a - \Delta}}$, $v_2 = \sqrt{\dfrac{\Delta(\Delta^2 - 2\Delta a + a^2)}{2a - \Delta}}$.

1.12. Apzīmēsim taisnstūra malas ar x un y. Tad tā perimetrs ir 2x + 3y, bet loga laukums ir $xy + \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$. Tātad jāatrod šīs funkcijas maksimums, ja 2x + 3y = c. Ievietojot, iegūstam, ka jāatrod funkcijas $\left(\frac{c-3y}{2}\right)y + \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$ maksimālā vērtība. Tā atrodas punktā $y = \dfrac{-c}{\sqrt{3} - 6}$. Malu attiecība šajā punktā ir $\dfrac{2}{3 - \sqrt{3}}$.

1.13. Pagarināsim malas AB un DC līdz to krustpunktam K. Tad AKD ir taisnleņķa trijstūris, un $MK = \frac{1}{2}AD$, $NK = \frac{1}{2}BC$. No trijstūra nevienādības seko, ka

$$MN \geq MK - NK = \tfrac{1}{2}(AD - BC).$$

1.14. Pārrakstīsim vienādojumu sistēmu šādā formā:

$$\begin{cases} \sqrt{a - x} = \sqrt{y} + \sqrt{y - x} \\ \sqrt{b - x} = \sqrt{y} - \sqrt{y - x} \end{cases} \quad \text{d.a.} \quad a - x \geq 0, b - x \geq 0, y \geq 0, y - x \geq 0.$$

No nevienādības $\sqrt{y} - \sqrt{y - x} \geq 0$ seko, ka $x \geq 0$. Tātad sistēmai var būt atrisinājumi tikai, ja $a \geq 0$ un $b \geq 0$. Aplūkosim šo gadījumu un sareizināsim abus vienādojumus. Iegūsim

$$\sqrt{(a - x)(b - x)} = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ab}{a + b}.$$

Ievietojot x vērtību abos vienādojumos un tos saskaitot, iegūsim

$$\sqrt{\frac{a^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a + b}} = 2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a + b}{4}.$$

Pārbaude parāda, ka šī atbilde ir derīga.

1.15. Ja $b \geq a$, tad jāapgaismo leņķis $\operatorname{arctg}\frac{b+1}{a} - 45°$; ja b < a, tad $45° - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

1.16. Aplūkosim vienādsānu trijstūri ABC ar leņķiem $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$, $\angle C = 72°$., un novilksim bisektrisi BD. Apzīmēsim DC = 1 un BC = x. Tad no trijstūru ABC un BCD līdzības seko vienādība $\dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{x}{1}$, jo BC = BD = AD. No šejienes seko, ka $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ un $\sin 18° = \frac{1}{2}DC : BC = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Tad

$\sin 54° = \cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Līdz ar to iegūstam, ka

$\sin 54° - \sin 18° = \frac{1}{2}$.

1.17. Rindā atrodas 3k monētas. Sākumā ar ciparu uz augšu atrodas viena monēta. Var pārbaudīt, ka pēc katra pārveidojuma monētu skaits, kas atrodas ar ģerboni uz augšu nedalās ar 3. Tātad nevar panākt lai visas monētas būtu ar ģerboni uz augšu.

1.18. Nē tāds svaru komplekts neeksistē. Ja tāds svaru komplekts eksistētu, tad būtu iespējams panākt atsvaru starpību no - 42 līdz + 42 -- tātad 85 dažādas vērtības. Taču maksimālais iespējamais atsvaru kombināciju skaits ir 3^4 = 81, jo jebkuru no četriem atsvariem var likt vai nu kreisajā pusē, vai labajā, vai neizmantot.

1.19. Var pierādīt, ka kuba ABCD $A_1B_1C_1D_1$ šķautņu AB, AD, BB_1, DD_1, B_1C_1. D_1C_1 viduspunkti atrodas vienā plaknē.

1.20. Mums jākonstruē trijstūris ABC, kuram AB = a, augstums CH = h un $\angle CBA - \angle CAB = \alpha$. Caur punktu C vilksim taisni l, kas paralēla AB, un aplūkosim punktu B_1, kas ir simetrisks punktam B attiecībā pret taisni l. Tad $\angle B_1CA = 180° - \alpha$. No šejienes seko konstrukcijas gaita.

1.21. Prasītais tilpums sastāv no četriem lodes segmentiem. Apzīmēsim ar R lodes rādiusu, ar d attālumu no lodes centra līdz piramīdas skaldnei, ar H nošķeltā segmenta augstumu, ar r šķēluma riņķa rādiusu. Izmantojot Pitagora teorēmu, pakāpeniski aprēķinām

$$R = \frac{1}{\sqrt{8}}a, \quad d = \frac{1}{\sqrt{24}}a, \quad H = \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{24}}\right)a, \quad r = \frac{1}{2\sqrt{3}}a.$$

Izmantojot lodes segmenta tilpuma formulu $V = \frac{\pi H}{6}\left(3r^2 + H^2\right)$, aprēķinām prasīto.

Atbilde: prasītais tilpums ir $\frac{3\sqrt{3}-4}{18\sqrt{6}}\pi a^3$.

1.22. Procesa beigās viss trijstūris būs sadalīts s trijstūros. Šo trijstūru leņķi atrodas vai nu atzīmētajos k punktos, vai trijstūra virsotnēs. Summējot šos leņķus, iegūstam vienādību $s \cdot 180° = k \cdot 360° + 180°$, jeb s = 2k + 1. Apzīmēsim ar m novilkto nogriežņu skaitu; tad, saskaitot visu trijstūru malu skaitu, iegūstam vienādību $3s = 2m + 3$ no kurienes seko, ka novilkto nogriežņu skaits ir 3k.
Patvaļīga n-stūra gadījumā novilkto nogriežņu skaits ir $3k + n - 3$.

1.23. Nē, nevar. Funkcijai $f(x) - ax$ būtu jābūt periodiskai, taču tā pieņem vērtību 0 punktā 0, bet nepieņems vērtību 0 , ja x > 2.

1.24. Aplūkojam sfēras, kurām šīs riņķa līnijas ir ekvatori, un novilksim plakni, kas pieskaras visām šīm sfērām. Šī plakne krusto doto plakni pa taisni, uz kuras atrodas visi norādītie krustpunkti.

1.25. Apzīmēsim nepieciešamo gājienu skaitu, lai pārkrāmētu n diskus, ar f(n). Lai pārkrāmētu n + 1 disku no pirmā torņa uz otro, mēs vispirms pārkrāmējam n diskus no pirmā torņa uz trešo, tad pārliekam apakšējo disku no pirmā torņa uz otro, un pēc tam pārkrāmējam n diskus no trešā torņa uz otro. Rezultātā iegūstam sakarību

$$f(1) = 1, \quad f(n+1) = 2f(n) + 1.$$

Apzīmēsim g(n) = f(n) + 1; tad g(1) = 1 un g(n+1) = 2g(n). Tātad $g(n) = 2^n$, un prasītais soļu skaits f(n) ir vienāds ar $2^n - 1$.

2. atklātā olimpiāde (1974./75. m.g.)

2.1 Aplūkosim trīs gadījumus (doto izteiksmi apzīmējam ar f):

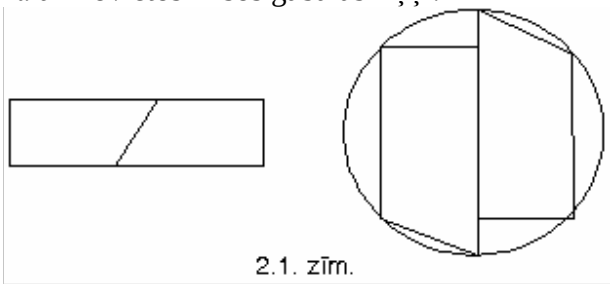
- ja $x \in (-\infty, 0]$, tad $f = \frac{1}{1-x}$;
- ja $x \in (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1]$, tad $f = \frac{1}{3x-1}$;
- ja $x \in (1, \infty)$, tad $f = \frac{1}{x-1}$.

2.2. Dotais skaitlis x dalās ar 5; tātad tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.
Ja $x = \overline{a0}$, tad prasītā vienādība 10a = 5(a + 0) neizpildās.
Ja $x = \overline{a5}$, tad iegūstam 10a + 5 = 5(a+5), a = 4. Tātad meklējamais skaitlis ir 45.

2.3. $\overline{FC} = 2\overline{a}, \overline{CD} = \overline{b} - \overline{a}, \overline{EF} = -\overline{b}, \overline{EF} = \overline{b} - 2\overline{a}$.

2.4. Noskaidrosim cik ilgā laikā nepareizais pulkstenis noies 3,5 stundas. Paies $\frac{210}{56} = 3\frac{3}{4}$ stundas. Tātad modinātājs rādīs 12.00 pēc 15 minūtēm.

2.5. Sagriezīsim torti divās trapecēs. kuru augstumi ir 8 cm, bet pamati 16 un 12 cm kā parādīts 2.1. zīmējumā un novietosim šos gabalus riņķi.



2.1. zīm.

2.6. Ar x apzīmēsim ceļojumam paredzēto dienu skaitu un sastādām vienādojumu

$$5 \cdot \tfrac{72}{x} + (x-4)\left(\tfrac{72}{x} + 1\right) = 95.$$

To atrisinot, iegūstam x = 3 vai x = 24. Der tikai otrā vērtība.
Atbilde: ceļojums ilga 25 dienas.

2.7. Aplūkosim divus pēc kārtas vilktus nogriežņus AB un BA_1. AA_1B ir taisnleņķa trijstūris ar leņķi A = 30°; tātad $\frac{A_1B}{AB} = \frac{1}{2}$. Iegūstam, ka $A_{15}B_{15} = \frac{1}{2^{30}}$ un $A_{20}A_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{20}B_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2^{41}}$.

2.8. No dotajiem vienādojumiem iegūstam

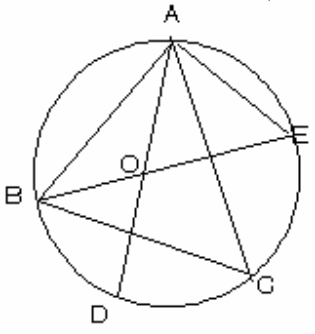
$$\begin{cases} z = -\frac{1}{7}(x+y)^2 \le 0 \\ z = \frac{1}{4}(x-y-6)^2 \ge 0 \end{cases}.$$

Tātad z = 0, x + y = 0, $x - y - 6 = 0$.
Atbilde: x=3, y = - 3, z = 0.

2.9. Virknes 3^n pēdējie cipari veido periodisku virkni ar periodu (3, 9, 7, 1). Skaitļa 6^n pēdējais cipars vienmēr ir 6. Virknes 8^n pēdējie cipari veido periodisku virkni ar periodu (8, 4, 2, 6). Tā kā 1975 = 4 × 493 + 3, tad dotā skaitļa pēdējais cipars ir skaitļa 7 + 6 + 2 pēdējais cipars, tātad cipars 5.

2.10. Skat. 2.5. uzd. atrisinājumu.

2.11. Pieņemsim, ka dotais trijstūris ABC konstruēts (skat. 2.2. zīm.).



2.2. zīm.

O ir ievilktās riņķa līnijas centrs, AD un BE bisektrises. Tad
$\angle AOE = \angle ABE + \angle BAD = \angle EBC + \angle DAC = \angle EAC + \angle DAC = \angle EAO$.
Tātad AEO ir vienādsānu trijstūris. No šejienes seko konstrukcijas gaita.
Konstruējam apvilkto riņķa līniju un velkam bisektrisi AO līdz tās krustpunktam D ar riņķa līniju. Punktu E konstruējam kā nogriežņa AO vidusperpendikula krustpunktu ar riņķa līniju. Velkam taisni EO līdz tās krustpunktam B ar riņķa līniju. Līdzīgi konstruē punktu C.

2.12. Apgalvojumu pierādīsim ar indukciju, apzīmējot $4^n + 15n - 1$ ar x_n.
Tad x_1 = 18 dalās ar 9.

Lai pierādītu induktīvo pāreju no n uz n + 1, mums ir jāpierāda, ka $x_{n+1} - x_n = 3 \cdot 4^n + 15 = 3(4^n + 5)$ dalās ar 9, jeb $4^n + 5$ dalās ar 3. Pēdējā īpašība seko no tā, ka $4^n + 5 \equiv 1^n + 5 \equiv 0 \pmod 3$.

2.13. Ievērosim, ka zemsaknes izteiksmes ir pilni kvadrāti, un tāpēc

$$y = \left(\sqrt{x+1}+1\right) + \left|\sqrt{x+1}-1\right|.$$

Aplūkojot gadījumus $x \in (-1, 0]$ un $x > 0$, redzam, ka $y \geq 2$ visām x vērtībām. Vērtību $y = 2$ mēs varam iegūt, ja $x \leq 0$.

2.14. Šāda daudzstūra malas garums ir $2r \times \sin 18° = r\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. (Skat 1.16. uzd. atrisinājumu).

2.15. Kuteris nonāca punktā B plkst. 13.00.

2.16. Atlikumā iegūsim polinomu $\left(-a^2 + 3(2a - 2b - 4)\right)x + \left(b^2 - (2a - 2b - 4)\right)$, kura koeficienti jāpielīdzina nullei.

2.17. Apgalvojumu pierādīsim ar indukciju.
Ja n = 0, tad $11^2 + 12 = 133$ dalās ar 133.
Pieņemsim, ka $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ dalās ar 133. Tad

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11\left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right) - 11 \cdot 12^{2k+1} + 12^{2k+3} = 11\left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right) + 133 \cdot 12^{2k+1}$$

arī dalās ar 133. Apgalvojums pierādīts.

2.18. Skat. 2.11. uzd. atrisinājumu.

2.19. Nekādas divas piramīdas pretējās šķautnes nevar būt perpendikulāras.

2.20. Trapeces laukums ir $a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha = a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$. Tātad jāatrod funkcijas $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ minimālā vērtība intervālā $[0, \frac{\pi}{2}]$. Jāpārbauda funkcijas vērtības nogriežņa galapunktos un punktos, kuros atvasinājums ir nulle.
$y' = \cos x + \cos 2x = 0$, ja $x = p/3$. Tas arī ir meklētais leņķis.

2.21. Apzīmēsim $t = \sin x + \cos x$. Tad doto vienādojumu var uzrakstīt formā

$$1 + t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(t^2 - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)\left(t^2 - 2t + 5\right) = 0.$$

Tā kā izteiksme otrajās iekavās nevar būt vienāda ar 0, tad jāatrisina vienādojums $\sin x + \cos x + 1 = 0$.
Atbilde: $x = p + 2pk$, $k \in Z$; $x = -p/2 + 2pk$, $k \in Z$.

2.22. Skat. 2.11. uzd. atrisinājumu.

2.23. Skat. 2.17. uzd. atrisinājumu.

2.24. Apzīmēsim daudzskaldņa skaldņu malu skaitus ar a_1, a_2, ... , a_s. Tad visu leņķu summu var aprēķināt šādi:

$$180°\cdot((a_1-2)+(a_2-2)+\ldots+(a_s-2))=180°\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_s-2s)=$$
$$180°\cdot(2l-2s)=360°(l-s)=360°\cdot(n-2).$$

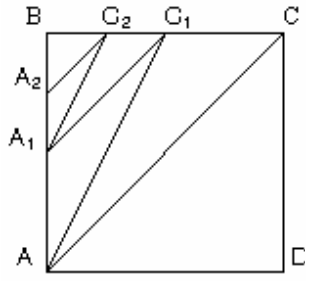
$a_1+a_2+\ldots+a_s=2l$, jo, skaitot visu skaldņu malas, mēs katru daudzskaldņa šķautni ieskaitām divas reizes.

2.25. Ja no loku kopas ir iespējams izmest kādu loku tā, ka atlikušie loki pārklāj visu riņķa līniju, tad izmetīsim to. Turpināsim šo procesu, kamēr tas ir iespējams. Pierādīsim, ka rezultātā katru punktu pārklāj ne vairāk kā divi loki. No tā, protams, seko, ka šo loku summa nepārsniedz 720°
Tiešām, ja kādu punktu A pārklāj trīs loki, tad no tiem izvēlēsimies loku ar vistālāko ‘‘kreiso’’ galapunktu un loku ar vistālāko ‘‘labo’’ galapunktu (tas var būt arī viens loks). Atlikušo loku (vai abus atlikušos) var izmest no loku sistēmas, bet tā nevar būt, jo visi šādi loki jau ir izmesti.

3. atklātā olimpiāde (1975./76. m.g.)

3.1. $x=4\frac{2}{3}$.

3.2.



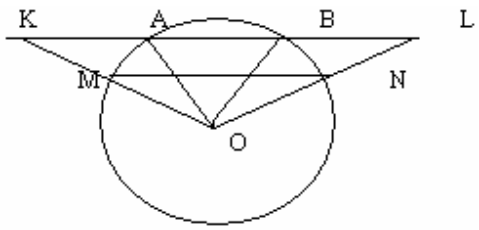
3.1.zīm.

$S_{AA_1C_1}=\frac{1}{2}AA_1\cdot BC_1=\frac{1}{8}$. No trijstūru līdzības iegūstam, ka $S_{A_1A_2C_2}=\frac{1}{4}S_{AA_1C_1}=\frac{1}{32}$. $S_{A_5A_6C_6}=\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot S_{AA_1C_1}=\frac{1}{2^{13}}$.

3.3. Iegūtajam skaitlim jādalās ar 5 un 9; tātad tā pēdējais cipars ir 0 vai 5. Pirmo ciparu summa jāizvēlas tā, lai ciparu summa dalītos ar 9.
Atbilde: 2340, 6345.

3.4. Uzvar pirmais spēlētājs. Viņš nosauc skaitli 1, un pēc jebkurām otrā spēlētāja atbildēm, skaitļus 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

3.5.



3.2. zīm.

Dotie rādiusi ir OA un OB (skat. 3.2. zīm.). Uz taisnes AB atliekam punktus K un L tā, lai KA = AB = BL. Savienojot K un L ar O, iegūstam prasītās hordas MN galapunktus.

3.6. Apzīmēsim šos četrus ciparus ar n, n +1, n + 2, n + 3. Meklējamā starpība ir
$1000(n+3)+100(n+2)+10(n+1)+n-(1000n+100(n+1)+10(n+2)+n+3)=$
1111 n + 3210 - (1111n + 123) = 3087.

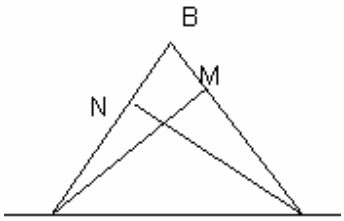
3.7. $S_{KDM}+S_{KNC}=\frac{1}{2}(a-x)x+\frac{1}{2}(a-x)^2=\frac{1}{2}a(a-x)$.
Summa ir vislielākā, ja x = 0;
vismazākā, ja x = a;
$\frac{1}{2}a(a-x)=\frac{1}{4}a^2$, ja $x=\frac{a}{2}$.

3.8. Summējot dotās vienādības iegūstam $3(x_1 + ... + x_8) = 0$.
$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) = 6 - 3 = 3$. Tātad $x_7 + x_8 = - 3$.
$x_6 = (x_6 + x_7 + x_8) - (x_7 + x_8) = - 6 - (- 3) = - 3$.
$x_1 = (x_7 + x_8 + x_1) - (x_7 + x_8) = - 2 - (- 3) = 1$.
Līdzīgi
$(x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7) = 9 - 9 = 0$. Tātad $x_8 + x_1 = 0$; $x_7 = - 2$, $x_2 = 2$.
Turpinot, iegūstam atbildi.
Atbilde: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = - 4$, $x_6 = - 3$, $x_7 = - 2$, $x_8 = - 1$.

3.9. Ievērosim, ka skaitli $\underbrace{111\cdots111}_{n}$ var izteikt šādi $\frac{10^n-1}{9}$. Tātad jāpierāda vienādība

$\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2=\frac{10^{2n}-1}{9}-2\frac{10^n-1}{9}$, ko pārbauda kāpinot kreisās puses izteiksmi kvadrātā.

3.10. Punkti A, N, M un C atrodas uz riņķa līnijas, kuras diametrs ir AC, bet centrs O atrodas uz dotās taisnes. Punktu O atrodam kā nogriežņa MN vidusperpendikula krustpunktu ar doto taisni. Velkot riņķa līniju ar centru punktā O un rādiusu ON, atrodam punktus A un C. B konstruē kā taišņu AN un CM krustpunktus (3.3. zīm.)



3.3. zīm.

3.11. Vilciens brauc ar ātrumu 70 km/h.

3.12. Pierādīsim apgalvojumu ar indukciju.

n = 1, $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{4c}}{2} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

Pieņemsim, ka nevienādība izpildās, n = k, t.i.

$$a = \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{\text{k saknes}} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}.$$

Jāpierāda, ka $\sqrt{c+a} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

Kāpinot kvadrātā, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$c + a < \frac{4c+2+2\sqrt{4c+1}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$, kas izpildās pēc pieņēmuma.

3.13. Atkarībā no tā, $a < 0$ vai $a \geq 0$, ir jāizpēta sistēmas

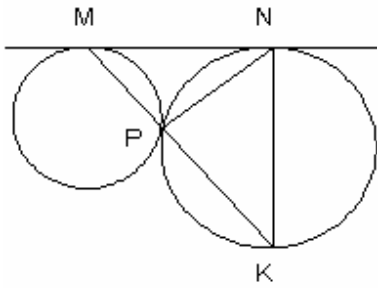
$$\begin{cases} 6x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} 5x^4 - 15x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}.$$

3.14. Dots, ka MA = a, MB = b, MC = c. Attālumus no M līdz taisnēm AB, BC, CD un AD apzīmēsim atbilstoši ar x, y, z un v, tad

$$a^2 = x^2 + v^2$$
$$b^2 = x^2 + y^2$$
$$c^2 = y^2 + z^2$$
$$d^2 = z^2 + v^2,$$

no kurienes $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, un meklējamo attālumu atradīsim kā $d = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

3.15. No leņķa $\angle MNP$ un $\angle MKN$ vienādības seko, ka trijstūri MNP un MKN ir līdzīgi, tātad $\frac{MN}{MP} = \frac{MK}{MN}$. Līdz ar to $MK = \frac{MN^2}{MP} = \frac{a^2}{b}$ un $PK = \frac{a^2}{b} - b$.



3.4. zīm.

3.16. Aplūkojam divus gadījumus.

(1) $x \geq 0$; $tg^2x = \frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ $\qquad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

$\sin^2 x = 1 - \cos x - \cos x \sin x + \sin x$

$(1- \cos x)(1+ \cos x) = (1 - \cos x)(1+ \sin x)$

$(1- \cos x)(\cos x - \sin x) = 0.$

(2) $x < 0$; $tg^2x = \frac{1-\cos x}{1+\sin x}$ $\qquad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$

$(1- \cos x)(\cos x + \sin x) = 0.$

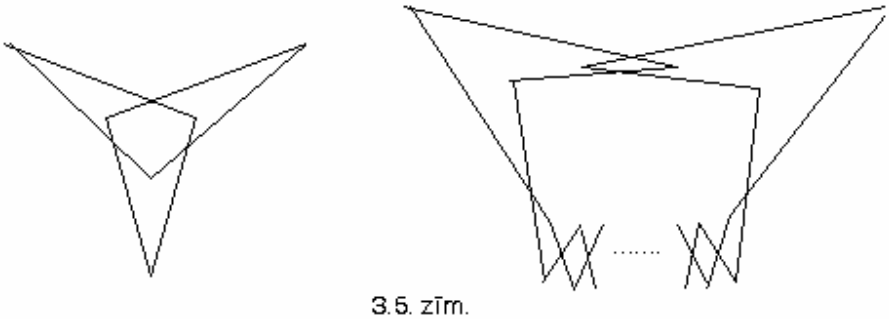
Atbilde: $x = 2pk$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \{0, 1, 2, ...\}$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, k ir vesels negatīvs skaitlis.

3.17. Šķēlums ir trapece, kuras laukums ir $\frac{5}{4}S$.

3.18. Šis skaitlis ir 6210001000.

3.19. Tādas līnijas eksistē, ja $n \geq 6$ ir pāra skaitlis . Līnija, ja $n = 6$ un $n > 6$ attēlota zīm. 3.5.



3.5. zīm.

Nepāra skaitļiem n to nevar izdarīt, jo šāda konstrukcija sadala visus līnijas posmus pa pāriem (posmi, kuri krustojas savā starpā). Vēl jāpamato, ka nav šādas līnijas ar 2 un 4 posmiem.

3.20. Ja šāda vienādība pastāvētu, tad ievietosim $x = y = z = 1$ un $a = 1, b = 2, g = 0$; tad $3 \times 5 = a^2 + b^2 + c^2$, kur $a, b, c \in Z$; taču šādu veselu skaitļu nav. Tātad prasītā polinoma nav.

3.21. Pēc $66\frac{2}{3}$ sekundēm tie satiksies trijstūra centrā, jo katrā sekundē tie tuvojas viens otram par $\frac{3}{2}$ m.

3.22. Skaitļi 1, 2, 3, 11, 12, 13 nevar atrasties viens otram blakus, tātad starp tiem atrodas citi skaitļi, veidojot 5 spraugas pa 1 skaitlim un 1 spraugu ar 2 skaitļiem. Skaitļiem 4 un 10 var būt tikai viens no norādītajiem kaimiņiem; tātad tie atrodas spraugā no 2 elementiem -- t.i. blakus, bet tā nevar būt. Tātad izvietot šādi norādītos skaitļus nevar.

3.23. Aplūkosim riņķa līniju, kas iet caur dotā trijstūra DABC malu viduspunktiem A_1, B_1, C_1. Pierāda, ka šī riņķa līnija iet arī caur dotā trijstūra augstuma pamatiem. Tā kā DABC un $DA_1B_1C_1$ ir līdzīgi ar līdzības koeficientu 2, tad ap DABC apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir 2 reizes lielāks nekā ap $DA_1B_1C_1$ apvilktās riņķa līnijas rādiuss, t.i. R = 2r.

3.24. Nē, nevar. Katram punktam P daudzskaldņa iekšpusē izvēlēsimies skaldni, kas atrodas **vistuvāk** punktam P. Perpendikuls, kas vilkts no punkta P pret šo skaldni, krusto plakni skaldnes iekšpusē (citādi atrastos kāda tuvāka skaldne; pamatojiet to!). Līdz ar to pierādīts, ka katrs punkts ir apgaismots.

3.25. Pārveidosim doto vienādojumu šādā formā:

$$4(x^2 + x^3 + x^2 + x) + 1 = (2y + 1)^2.$$

Ja $|x| \geq 3$, tad izpildās nevienādība

$$(2x^2 + x)^2 < 4(x^2 + x^3 + x^2 + x) + 1 < (2x^2 + x + 1)^2.$$

Tātad $4(x^2 + x^3 + x^2 + x) + 1$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. Pārbaudot atlikušās x vērtības, atrodam sekojošus atrisinājumus: {(-1, -1); (-1, 0); (0, -1); (0,0); (2, -6); (2, 5)}.

4. atklātā olimpiāde (1976./77. m.g.)

4.1. Atbilde: $x \in (-\infty, -5) \cup (3, 7)$.

4.2. Dots trijstūris ABC un malas AB viduspunkts M. Velkam riņķa līniju ar centru punktā M un rādiusu MA. Šīs riņķa līnijas krustpunktus ar malām AC un BC apzīmēsim ar K un L. Tad BK un AC ir trijstūra ABC augstumi, jo $\angle$AKB un $\angle$ALB balstās uz novilktās riņķa līnijas diametru.

4.3. Aplūkosim skaitli $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Tad

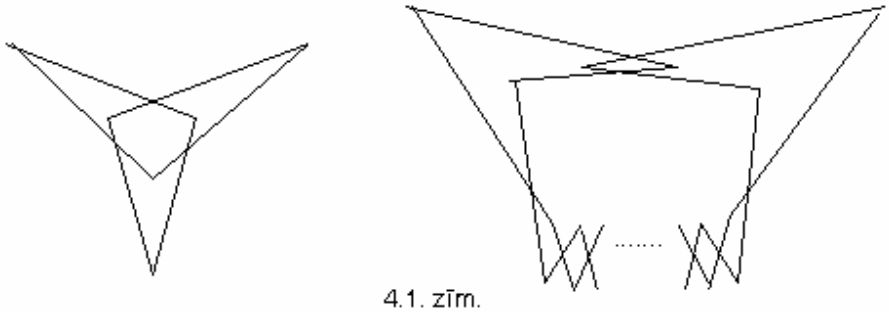
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a_1 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9 < a_1 \cdot 10^{n-1} = \overline{a_1 0 \ldots 0} \leq \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = A,$$

kas arī bija jāpierāda.

4.4. Apzīmēsim akmeņu svarus ar $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Ņemsim vienā kaudzē akmeņus $s_1, s_2, \ldots, s_m$ tā, lai $s_1 + s_2 + \ldots + s_{m-1} \leq$ 500 g, bet $s_1 + s_2 + \ldots + s_m > 500$ g. Tad no uzdevuma nosacījumiem seko, ka $s_{m+1} + \ldots + s_k \leq 500$ g. Visu akmeņu kopējais svars $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = (s_1 + s_2 + \ldots + s_{m-1}) + s_m + (s_{m+1} + \ldots + s_k) \leq 500 + 500 + 500 = 1500$ g.

Kolekcija ar svaru 1500 g ir iespējama; tajā ir trīs akmeņi ar svaru 500 g katrs.

4.5. Slēgtas lauztas līnijas ar 6 un 1976 posmiem attēlotas 4.1. zīmējumā. Līnija ar 1977 posmiem neeksistē. Līnijai jāsatur pāra skaits posmu, jo visus posmus var sadalīt pa pāriem (tie kuri krustojas savā starpā).



4.1. zīm.

4.6. No uzdevuma nosacījumiem seko vienādības

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ 2y = x + z - 1 \\ y^2 = x \cdot 3x \end{cases}$$

No šejienes z = 3x, $y = \sqrt{3}x$, $2\sqrt{3}x = 4x - 1$, $x = \dfrac{1}{4 - 2\sqrt{3}}$.

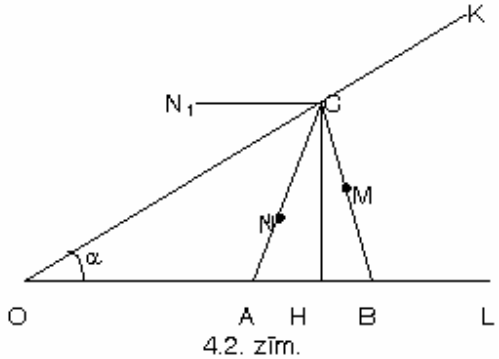
Atbilde: $x = \dfrac{1}{4 - 2\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{3}{4 - 2\sqrt{3}}$.

4.7. Tās ir taisnes, kas veido ar taisni k leņķi $\dfrac{\alpha}{2}$.

4.8. Dots leņķis $\angle KOL = a$ un punkti N un M. Konstruēsim punktu N_1, kas simetrisks punktam N pret taisni OK; $CH \perp OB$. Tad

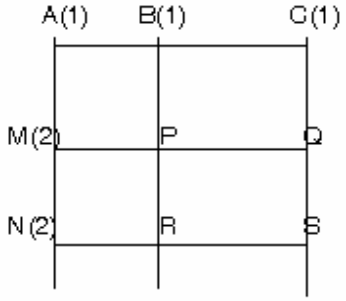
$$\angle N_1CM = 2\angle OCH = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha ,$$

un punktu C atrod kā riņķa līnijas loka (tie ir punkti, no kuriem dotais nogrieznis MN_1 redzams dotajā leņķī 180° - 2a) un taisnes OK krustpunktu. Velkot taisnes CN un CM, atrodam to krustpunktus A un B ar taisni OL. ABC ir meklētais trijstūris.



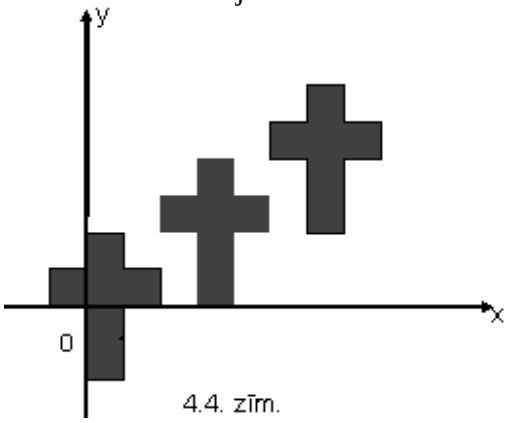
4.2. zīm.

4.9. Izvēlēsimies 3 punktus A, B, C, kas atrodas uz vienas taisnes un nokrāsoti vienā (teiksim 1.) krāsā un vilksim trīs taisnes, kas iet caur šiem punktiem perpendikulāri AB. Ja uz kādas no šīm taisnēm atrodas punkts D, kas nokrāsots 1. krāsā, tad veidojas taisnleņķa trijstūris ar 1. krāsas virsotnēm.
Pretējā gadījumā uz šīm taisnēm ir tikai 2. un 3, krāsas punkti. Uz vienas no šīm taisnēm (skat. 4.3. zīm.) izvēlēsimies punktus M un N, kas nokrāsoti vienā (teiksim 2.) krāsā. Caur šiem punktiem vilksim taisnes paralēli AB; tās krusto pārējās taisnes punktos P, Q, R un S. Ja kāds no punktiem P, Q, R, S ir nokrāsots 2. krāsā, tad veidojas taisnleņķa trijstūris ar 2. krāsas virsotnēm. Pretējā gadījumā PQR ir taisnleņķa trijstūris ar 3. krāsas virsotnēm.



4.3. zīm.

4.10. Prasītā punktu kopa attēlota 4.4. zīmējumā



4.4. zīm.

4.11. Šāda 7-ciparu skaitļa pirmais cipars var būt jebkurš no cipariem 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 (7 iespējas); otrais, trešais, ceturtais, piektais -- jebkurš no cipariem 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 (8 iespējas). Lai skaitlis dalītos ar 4, pēdējos divus ciparus var izvēlēties 13 veidos: 00, 20, 60, 12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92, 96.
Pavisam kopā ir $7 \cdot 8^4 \cdot 13$ šādi skaitļi.

4.12. Skat. 4.8. uzdevuma atrisinājumu.

4.13. Riņķa rādiuss ir $\frac{a}{3}$.

4.14. Atbilde: a = 1.

4.15. Virs tabulas kolonām ierakstīsim skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, bet blakus katrai rindiņai skaitļus 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56. Katrā rūtiņā ir ierakstīta šo skaitļu summa, kas ierakstīti vienā kolonā un vienā rindiņā ar izvēlēto rūtiņu.
Aprēķinot summu ar ierakstītajām zīmēm, katrs no šiem skaitļiem tiks pieskaitīts tikpat reižu cik atņemts; tātad summā būs nulle.

4.16. Pierādījumā jāizmanto teorēma par ievilktajiem leņķiem.

4.17. Atbilde: A = 0, E = 1, I = 2, P = 2, T = 3, O = 4, N = 4, L = 5, K = 6, S = 8.

4.18. Funkcija f ir periodiska ar periodu 2p; funkcija g nav periodiska.

4.19. Skat. 4.9. uzd. atrisinājumu.

4.20. Pieņemsim, ka detektīvs dotajā momentā atrodas uz salas A, bet laupītājs uz salas B. Tad sākumā viņam jāpārbrauc uz salu B, bet pēc tam jāturpina laupītāja maršruts. Tā kā laupītājs katru svētdienu atpūšas, tad katru nedēļu detektīvs viņam tuvosies par vienu pārbraucienu un rezultātā kādā svētdienā nonāks uz salas, kurā atrodas laupītājs.

4.21. Kāpinot kvadrātā dotās vienādības un summējot, iegūstam vienādību

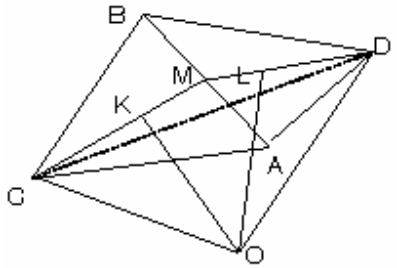
$$2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y + 2 = 4, \text{ jeb } \cos(x - y) = 1.$$

Tātad x = y + 2pk, un sin x = sin y, cos x = cos y. Rezultātā iegūstam vienādības sin x = sin y = $\frac{1}{2}$, $\cos x = \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Atbilde: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, y = \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad k,m \in Z$.

4.22. Otrais spēlētājs to var panākt. Viņš ievēro, ka skaitlis 1001 dalās ar 77, un tāpēc visas rūtiņas sadala pāros (ar vienādiem burtiem apzīmējot viena pāra rūtiņas) šādā veidā a b c a b c d e f d e f. Katru reizi, kad pirmais spēlētājs ieraksta kādā rūtiņā ciparu, viņš rūtiņā ar tādu pašu apzīmējumu ieraksta to pašu ciparu, ko ierakstīja pirmais spēlētājs. Rezultātā viņš panāk, ka uzrakstīts skaitlis $\overline{abcabcdefdef}$, kurš dalās ar 1001, tātad arī ar 77.

4.23. Kuba šķautnes garums ir $\frac{abc}{ab + ac + bc}$. Pamēģiniet attēlot pareizu zīmējumu!

4.24. Uz lodes izvēlēsimies divus punktus A un B un novilksim divas riņķa līnijas. Pirmo ar centru punktā A un rādiusu r = AB, otro ar centru punktā B un rādiusu r. Tās krustojas punktos C un D. Mums ir jākonstruē ap piramīdu ABCD apvilktās sfēras rādiuss.
Ar M apzīmēsim nogriežņa AB viduspunktu un aplūkosim plakni CMDO (O ir lodes centrs). Plaknē konstruēsim trijstūri CMD; attālumu CD izmēra uz lodes, CM = MD atrod kā regulāra trijstūra ABC (ar malu r) augstumu (skat. 4.5. zīm). Tālāk atzīmējam punktus K un L (trijstūru ABC un ABD centri), kas dala nogriežņus NC un MD attiecībā 1: 2. Velkam perpendikulu pret CM punktā K un perpendikulu pret MD punktā L. Šo perpendikulu krustpunkts ir punkts O. Lodes rādiuss ir nogrieznis OC.



4.5. zīm.

4.25. Aplūkosim doto izteiksmi $a^2b + b^2c + c^2a$. Var pierādīt, ka, ja mazākais no skaitļiem a, b, c nav 0, tad dotās izteiksmes vērtību var palielināt. Tātad var uzskatīt, ka a = 0 un b + c =1. Mums ir jāpierāda, ka $b^2c \le \frac{4}{27}$. Uzrakstīsim nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko skaitļiem b, b un 2c. Iegūsim

$$\sqrt[3]{2b^2c} \le \frac{b+b+2c}{3}, \text{ jeb } \quad 2b^2c \le \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 (b+c)^3 = \frac{8}{27}.$$

Tātad $b^2c \le \frac{4}{27}$, un prasītais pierādīts.

5. atklātā olimpiāde (1977./78. m.g.)

5.1. Lai skaitlis dalītos ar 3 un 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0 vai 5 un ciparu summai jādalās ar 3. Tātad der šādi skaitļi: 42270, 42570, 42870, 42075, 42375, 42675, 42975.

5.2. Nē, nevar. Iegūtā kvadrāta laukums būtu 63 cm^2, taču vesela skaitļa kvadrāts nevar būt 63.

5.3. Viens no atrisinājumiem parādīts 5.1. zīmējumā.

1	8	9	16
2	7	10	15
3	6	11	14
4	5	12	13

5.1. zīm.

5.4. Katrās 5 minūtēs gliemezis parāpjas 10 cm uz augšu. Tātad 270 cm augstumu tas sasniegs $\frac{270 \cdot 5}{10} = 135$ minūtēs. Vēl pēc trim minūtēm tas sasniegs staba augšējo galu. Tas notiks plkst. 14.18.

5.5. Kubam ir 9 simetrijas asis: trīs taisnes, kas iet caur pa pāriem ņemtu pretējo skaldņu centriem, un sešas taisnes, kas iet caur pa pāriem ņemtu pretējo šķautņu viduspunktiem.

5.6. Iegūstam $5(2x+1) = 3(0{,}5x+2)$, $8{,}5x = 1$, $x = \frac{2}{17}$.

5.7. Līdzīgu no viena materiāla izgatavotu figūru svari attiecas kā to tilpumi, bet tilpumi -- kā lineāro izmēru trešās pakāpes. Tāpēc, ja modeļa svaru apzīmējam ar x tonnām, tad $\frac{x}{20000} = \left(\frac{20}{20000}\right)^3$, $x = 20 \cdot 10^{-6}$. Tātad modelis sver 20 gramus.

5.8. Pēc dotā AE = AB + BC + CD + DE. Šāda vienādība var izpildīties tikai, ja A, B, C, D, E atrodas uz vienas taisnes tieši šādā secībā. Tāpēc BD = BC + CD = 11cm.

5.9. Ja dotais augstuma garums ir lielāks par pamata garumu vai ir vienāds ar to, atrisinājumu nav. Ja nē, tad konstruējam taisnleņķa trijstūri ABC, kura hipotenūza AB ir vienāda ar konstruējamā trijstūra pamatu, bet katete AC -- ar doto augstumu. AB vidusperpendikula krustpunktu ar taisni BC apzīmējam ar O. Tad AOB ir meklējamais trijstūris.

5.10. 1) Ar vienu jautājumu Andris var aptvert augstākais 6 skaitļus. Tātad būs vismaz viena kartiņa, par kuru Andris nezin neko. Tātad viņš nevar neko pateikt par visu skaitļu reizinājumu, jo, mainot zīmi šajā kartiņā, mainītos arī visu skaitļu reizinājuma zīme.
2) Apzīmēsim uz kartiņām uzrakstītos skaitļus ar a, b, c, d, e, f, g. Andris uzdod Jānim jautājumus par šādiem reizinājumiem: abc, ade, afg. Šo skaitļu reizinājums

$$abc \cdot ade \cdot afg = abcdefg \cdot a^2 = abcdefg$$

ir vienāds ar visu doto skaitļu reizinājumu, jo $a^2 = 1$.

5.11. Tāda nevienādība ir, piemēram, $\frac{x}{x-3} > 0$.

5.12. Tā kā $6 < \sqrt{42} < 7$ un $6 < \sqrt{43} < 7$, tad $12 < \sqrt{42} + \sqrt{43} < 14$. Jānoskaidro, kas lielāks: $\sqrt{42} + \sqrt{43}$ vai 13. Izdarīsim ekvivalentus pārveidojumus.

$$\sqrt{42} + \sqrt{43} > 13 \Leftrightarrow 42 + 43 + 2\sqrt{42 \cdot 43} > 169 \Leftrightarrow \sqrt{42 \cdot 43} > 42 \Leftrightarrow$$

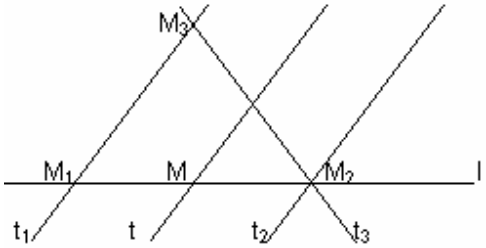
$$42 \cdot 43 > 42^2 \Leftrightarrow 43 > 42.$$

Tātad dotās izteiksmes vērtība atrodas starp skaitļiem 13 un 14.

5.13. Ja pirmais no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem ir 1, tad grupā ir četri pirmskaitļi: 2, 3, 5 un 7. Ja pirmais no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem ir 2, tad grupā ir pieci pirmskaitļi: 2, 3, 5, 7 un 11. Ja pirmais no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem ir lielāks par 2, tad puse no tiem ir pāra skaitļi un tie visi nav pirmskaitļi. Tātad pirmskaitļu ir ne vairāk par pieciem.

5.14. Ar 8 trijstūriem to var izdarīt, piemēram, novelkot visas 10-stūra diagonāles, kas iziet no vienas virsotnes. Tās sadala 10-stūri 8 trijstūros.
Pierādīsim, ka ar mazāku trijstūru skaitu iztikt nevar. Katru 10-stūra virsotni ir jāpārklāj ar trijstūru iekšējiem leņķiem. Tā kā 10-stūra iekšējo leņķu summa ir $180° \cdot (10 - 2) = 180° \cdot 8$, bet viena trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°, tad pārklāšanā jāizmanto vismaz 8 trijstūri.

5.15. Novietosim lineālu tā, ka viena tā mala iet caur punktu M, bet otra krusto taisni l punktā M_1, un novilksim divas taisnes t un t_1 gar lineāla malām. Pēc tam novietosim lineālu tā, lai viena mala sakristu ar taisni t, bet otra krustotu l punktā M_2, un novilksim taisni t_2 gar otru lineāla malu (skat. 5.2. zīm.).
Novietosim tagad lineālu tā, lai tā viena mala ietu caur M, otra -- caur M_2, bet malas nesakristu ar taisnēm t un t_2, un novilksim taisni t_3 caur M_2 gar lineāla malu līdz krustpunktam M_3 ar taisni t_1.
MM_3 ir vajadzīgais perpendikuls. Pierādiet to, izmantojot to, ka M ir vienādsānu trijstūra $M_1M_2M_3$ pamata viduspunkts.

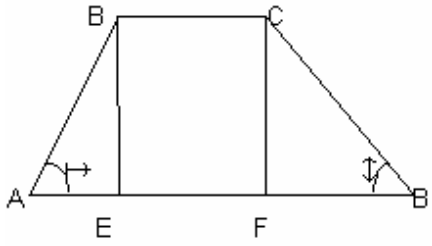


5.2. zīm.

5.16. Aprēķinām $b_k = a_{k+1} - a_k = (k+1)^2 + 2(k+1) + 3 - k^2 - 2k - 3 = 2k + 3$. Tātad $b_{k+1} - b_k = 2(k+1) + 3 - 2k - 3 = 2$, un (b_k) ir aritmētiska progresija ar diferenci 2.

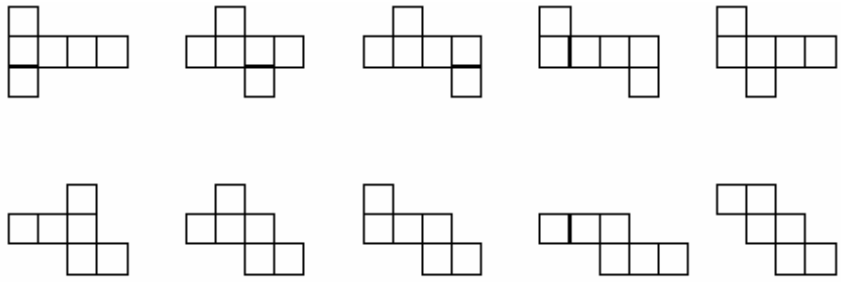
5.17. No taisnleņķa trijstūra AEB (skat. 5.3. zīm.) izriet, ka $AB = \frac{2r}{\sin\alpha}$. Līdzīgi $CD = \frac{2r}{\sin\beta}$. Tā kā trapecē var ievilkt riņķa līniju, tad AB + CD = BC + AD. Tāpēc

$$L = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2r = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$



5.3. zīm.

5.18. Citi iespējamie kuba virsmas izklājumi, kas sastāv no 6 kvadrātiņiem, parādīti 5.4. zīm.



5.4. zīm.

5.19. Skaitlis 121 apmierina a) punkta prasību. Tiešām līdzsvarots ir gan skaitlis 1211, gan skaitlis 1212.
Skaitlis 1213121 kļūst līdzsvarots, ja tam labajā pusē pieraksta jebkuru no cipariem 1, 2, 3.
Skaitlis 121312141213121 kļūst līdzsvarots, ja tam labajā pusē pieraksta jebkuru no cipariem 1, 2, 3, 4.
Beidzot, skaitlis 12131214121312151213121412131 21 kļūst līdzsvarots, ja tam labajā pusē pieraksta jebkuru no cipariem 1, 2, 3, 4, 5; tātad tas apmierina b) punkta prasību.
Turpinot šādu konstrukciju, mēs iegūsim skaitli, kurš kļūst līdzsvarots, ja tam labajā pusē pieraksta jebkuru ciparu.

5.20. Tā kā $a^3 + b^3 > 0$, tad arī $a - b > 0$. Tātad $a^3 - b^3 < a^3 + b^3 = a - b$, $(a-b)(a^2+ab+b^2) < (a-b)$, $a^2 + ab + b^2 < 1$, $a^2 + b^2 < 1 - ab < 1$, ko arī vajadzēja pierādīt.

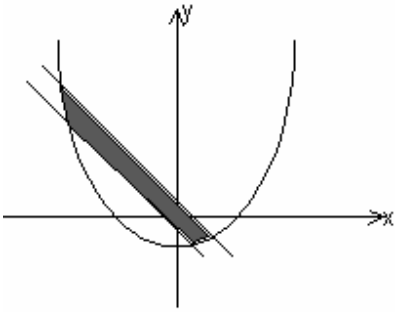
5.21. Izmantojot funkciju summas, starpības un reizinājuma atvasinājumu formulas, iegūstam

$$\begin{vmatrix} f & h \\ g & v \end{vmatrix}' = (fv - hg)' = (fv)' - (hg)' = f'v + fv' - h'g - hg' = (f'v - h'g) + (fv' - hg') =$$

$$\begin{vmatrix} f' & h' \\ g & v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & h \\ g' & h' \end{vmatrix}.$$

5.22. Izvēlamies trijstūra piramīdas SABC pamata ABC plaknē tādu punktu D, ka ABCD ir paralelograms. Ja projekcijas virziens ir paralēls taisnei SD, tad piramīdas SABC projekcija plaknē ABC būs paralelograms ABCD.

5.23. Koordinātu plaknē uzzīmēsim parabolu $y = x^2 - 2$ un taisnes $y = -x + 1$, $y = -x - 1$. Meklējamā punktu kopa ir iezīmētais apgabals (5.5. zīm.).



5.5. zīm.

5.24. Pieņemsim, ka pie kaut kādas fiksētas a_1 vērtības virknei eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Tādā gadījumā

$$c = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 - 3a_n\right) = c^2 - 3c$$

Tas nozīmē, ka $c^2 - 4c = 0$, no kurienes seko, ka vai nu c = 0, vai nu c = 4. Tātad skaitlis 3 nevar būt virknes robeža.
Parādīsim, ka virknes robeža var būt gan 0, gan 4.
Tiešām, ja $a_1 = 0$, tad $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ... , $a_n = 0$, un $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Savukārt, ja $a_1 = 4$, tad $a_2 = 4$, $a_3 = 4$, ... , $a_n = 4$, un $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

5.25. Atbilde: pavisam iespējami 29 šādi paralēlskaldņi.

5.26. Izdarot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$(1+\cos x) + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Ja $\cos\frac{x}{2} = 0$, tad x = p + 2pn (n ∈ Z).

Ja $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0$, tad, izdalot ar $\cos\frac{x}{2}$ $\left(\cos\frac{x}{2} \neq 0\right)$, iegūstam $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$;
x = - p/2 + pk (k ∈ Z).

5.27. a) $\left(x\cos x\right)' = x'\cos x + x\left(\cos x\right)' = \cos x - x\sin x$.

b) $\left(x\cos x\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)\cos(x+\Delta x) - x\cos x}{\Delta x} =$

$\left(x\cos x\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)(\cos x\cos\Delta x - \sin x\sin\Delta x) - x\cos x}{\Delta x} =$

$$x\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}-x\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x-\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\sin\Delta x=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\left(-\sin\tfrac{\Delta x}{2}\right)-x\sin x+\cos x-0=\cos x-x\sin x.$$

Pārveidojumos izmantota formula $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$

5.28. Aplūkosim koordinātu sistēmā četrus punktus A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1). Dotā izteiksme ir attālumu summa no punkta M(x,y) līdz šiem četriem punktiem. Tātad (MA + MC) + (MB + MD) ≥ AC + BD = 4, un vienādība pastāv tad un tikai tad, kad punkts M pieder nogriežņiem AC un BD. Šo nogriežņu krustpunkts ir punkts O(0,0); tātad vienādība izpildās tikai skaitļiem x = 0, y = 0.

5.29. Aprēķini parāda, ka $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = a_5 = a_6 = 3$, $a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 4$.
Pierādīsim, ka katrs naturāls skaitlis m virknē (a_n) atkārtojas tieši m reizes. Lai to pierādītu, mums ir jāparāda, ka nevienādībai

$$m-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<m+\frac{1}{2}$$

ir tieši m atrisinājumu naturālos skaitļos n (m -- fiksēts parametrs). Šī nevienādība ir ekvivalenta ar sekojošu nevienādību:

$$m(m-1)+\frac{1}{4}<2n<m(m+1)+\frac{1}{4}.$$

Tātad ir jānosaka, cik pāra skaitļu atrodas starp pāra skaitli m(m-1) (neieskaitot) un pāra skaitli m(m+1) (ieskaitot). Tādu skaitļu pavisam ir $\frac{m(m+1)-m(m-1)}{2}=m$.

Tātad skaitlis 1978 dotajā virknē sastopams 1978 reizes.

5.30. Ar X_y apzīmēsim punktu, kas simetrisks punktam X attiecībā pret Y.
Iegūtais daudzskaldnis sastāv no šādiem daudzskaldņiem:
a) četrām piramīdām, kas ir vienādas ar sākotnējo (pa vienai pie katras no sākotnējās piramīdas virsotnēm) ; viena no tām ir $AB_AC_AD_A$,
b) četrām nošķeltām piramīdām (pa vienai pie katras no sākotnējās piramīdas skaldnēm); $BCDA_BA_CA_D$,
c) sešiem daudzskaldņiem (pa vienam pie katras piramīdas šķautnes); $ABC_AD_AD_BC_B$.
Aprēķinot visu šo daudzskaldņu kopīgo tilpumu, iegūstam, ka tas vienāds ar 63V.
Daudzskaldņa $ABC_AD_AD_BC_B$ tilpumu aprēķina, papildinot to ar piramīdu $AB_AC_AD_A$ līdz prizmai.

5.31. Tā kā $\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\cos x$, tad dotā nevienādība ir ekvivalenta ar nevienādību

$$\sin 2x>\cos x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos x-\cos x>0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\left(\sin x-\tfrac{1}{2}\right)>0.$$

Ja $\cos x > 0$ un $\sin x > \frac{1}{2}$, tad $x \in (p/6 + 2pn, p/2 + 2pn)$, $n \in Z$.

Ja cosx < 0 un $\sin x < \frac{1}{2}$, tad x $\in$ ($\frac{5\pi}{6}$ + 2pn, $\frac{3\pi}{2}$ + 2pn), n $\in$ Z.

5.32. Apzīmēsim ar S_n^l l-tās progresijas pirmo n locekļu summu, ar a_n^l -- l-tās progresijas n-to locekli, ar d^l -- l-tās progresijas diferenci. Tad

$$a_n^l = S_n^l - S_{n-1}^l = l\cdot n^2 - l\cdot(n-1)^2 = l\cdot(2n-1),$$

$$d^l = l\cdot(2n-1) - l\cdot(2(n-1)-1) = 2l.$$

Visu k diferenču summa ir $2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \cdots + 2\cdot k = k(k+1)$. Šis skaitlis nav vesela skaitļa kvadrāts, jo k^2 < k(k +1) < $(k+1)^2$, bet starp diviem sekojošiem naturālu skaitļu kvadrātiem nevar atrasties naturāla skaitļa kvadrāts.

5.33. Tā kā 16807 = 7^5, tad $\log_7 16807 - 1 = 4$;

$$\frac{\lg 225}{\lg 3 + \lg 225\cdot\log_{225} 5} = \frac{\lg 225}{\lg 3 + \lg 5} = \frac{\lg 225}{\lg 15} = \log_{15} 225 = 2.$$

Tāpēc doto vienādojumu var pārrakstīt formā

$$4^{x^5+y^5+z^5+u^5+1} = 2^{10xyzu} \quad \Leftrightarrow \quad 4^{x^5+y^5+z^5+u^5+1} = 4^{5xyzu} \quad \Leftrightarrow$$

$$x^5 + y^5 + z^5 + u^5 + 1 = 5xyzu \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + u^5 + 1}{5} = \sqrt[5]{x^5\cdot y^5\cdot z^5\cdot u^5\cdot 1}.$$

Atceroties, ka n pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais vienmēr ir lielāks vai vienāds ar šo pašu n skaitļu vidējo ģeometrisko, un vienādība pastāv tad un tikai tad, kad visi skaitļi savā starpā vienādi, no pēdējās vienādības iegūstam, ka

$x^5 = y^5 = z^5 = u^5 = 1$ un x = y = z = u = 1.

5.34. Izvēlēsimies plaknē vienu fiksētu punktu O. Visus plaknes punktus sadalīsim divās kopās X un Y. Kopā X iekļausim visus punktus, kuru attālums līdz punktam O ir racionāls skaitlis. Kopā Y iekļausim visus punktus, kuru attālums līdz punktam O ir iracionāls skaitlis. Skaidrs, ka katrs plaknes punkts pieder tieši vienai no šīm kopām.
Pārbaudiet, ka šīs kopas apmierina uzdevuma nosacījumus.

5.35. 1) Izvēlēsimies trijstūra piramīdu, kuras iekšienē atrodas lodveida planēta. Novietojot katrā piramīdas virsotnē pa punktveida saulei, visa planēta būs pilnīgi apgaismota. Pierādīsim, ka ar trim saulēm nepietiek. Pieņemsim, ka saules atrodas punktos A, B, C, un apskatīsim lodveida planētu S. Novilksim planētai S pieskarplakni, kas paralēla plaknei ABC; no abām šādām plaknēm izvēlēsimies to, kas atrodas tālāk no plaknes ABC. Tad neviena no trim saulēm neapgaismo pieskaršanās punktu. Tātad minimālais punktveida sauļu skaits, kas var apgaismot vienu lodveida planētu, ir 4.
2) Var pierādīt, ka pie jebkura naturāla n var tā novietot n lodveida planētas un 4 punktveida saules, ka visas n planētas ir pilnīgi apgaismotas.

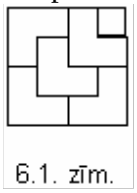
6. atklātā olimpiāde (1978./79. m.g.)

6.1. Tāds skaitlis ir $999 \times 6 = 5994$, jo 999 ir lielākais trīsciparu skaitlis.

6.2. Starp pirmo un 10 koku ir 9 atstarpes, tātad attālums starp diviem kokiem ir $\frac{10}{9}$ m. Attālums starp 1. un 100. koku ir $99 \cdot \frac{10}{9} = 110$ m.

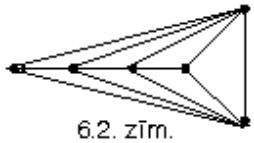
6.3. Jāņa pirkuma kopējā cena dalās ar 3, bet 394 ar 3 nedalās. Tātad kasieris ir kļūdījies.

6.4. Jā, var. Viens no iespējamiem veidiem parādīts 6.1. zīm.



6.1. zīm.

6.5. Viens no iespējamajiem punktu izvietojumiem parādīts 6.2. zīm.

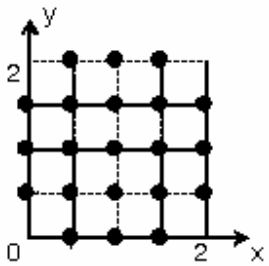


6.2. zīm.

6.6. x = 3.

6.7. 42171 nav pirmskaitlis, jo tas dalās ar 3 (tā ciparu summa dalās ar 3); 68975 nav pirmskaitlis, jo tas dalās ar 5; 1010101 nav pirmskaitlis, jo tas dalās ar 101.
Skaitlis 683 ir pirmskaitlis; pārbaudām, ka tas nedalās ar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23; t.i., ar visiem pirmskaitļiem no 2 līdz 23. Ja šis skaitlis dalītos ar kādu pirmskaitli p, kas lielāks par 23 (tātad ne mazāks kā 29), tad tam būtu arī dalītājs $q = \frac{683}{p} < \frac{841}{29} = 29$, bet tādu šim skaitlim nav.

6.8. Visi 6.3. zīm. atzīmētie punkti ir aplūkojamo nogriežņu viduspunkti. Citu punktu nav. Tātad to skaits ir 21.



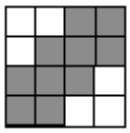
6.3. zīm.

6.9. Šāda kopa varētu būt, piemēram, visu tādu punktu (x, y) kopa, kur $0 \le x \le 4$ un $0 \le y \le 3$; x un y -- veseli skaitļi.

6.10. Komandā ir šādi spēlētāji: Andris Alksnis, Andris Bērziņš, Andris Dimants, Andris Egle, Bruno Alksnis, Bruno Bērziņš, Bruno Dimants, Didzis Alksnis, Didzis Bērziņš, Didzis Egle, Ervīns Bērziņš.

6.11. Apzīmēsim melnacaino skolēnu skaitu ar x. Tad zilacaino skolēnu skaits ir 8x, bet brūnacaino skolēnu skaits ir 2x. Iegūstam vienādojumu 8x + 2x + x = 700. No šejienes $x = \frac{700}{11} = 63\frac{7}{11}$, bet tā nevar būt, jo skolēnu skaits ir vesels skaitlis.

6.12. 10 rūtiņas var iekrāsot, piemēram, tā kā parādīts 6.4. zīm.; 11 rūtiņas tā iekrāsot nevar.



6.4. zīm.

6.13. Aplūkosim gadījumu, kad nogrieznis AB nav perpendikulārs taisnei t (pretējo gadījumu aplūkojiet patstāvīgi). Šajā gadījumā var uzkonstruēt divus tādus punktus C, kuriem izpildās uzdevuma nosacījumi.
1) Pirmajā gadījumā punktu C konstruējam kā nogriežņa AB un taisnes t krustpunktu.
2) Otrajā gadījumā konstruējam punktu A_1, kas ir simetrisks punktam A attiecībā pret taisni t. Punktu C atrodam kā nogriežņa A_1B un taisnes t krustpunktu (ja punkti A un B atrodas vienādā attālumā no taisnes t, tad šis gadījums izpaliek).
Pierādiet, ka abos gadījumos izpildās prasītā leņķu vienādība.

6.14. Parādīsim, kā x^{47} var aprēķināt, izmantojot 8 reizināšanas.

$$1)\ x\cdot x = x^2, \quad 2)\ x\cdot x^2 = x^3, \quad 3)\ x^3\cdot x^2 = x^5, \quad 4)\ x^5\cdot x^5 = x^{10},$$
$$5)\ x^{10}\cdot x^{10} = x^{20}, \quad 6)\ x^{20}\cdot x^3 = x^{23}, \quad 7)\ x^{23}\cdot x^{23} = x^{46}, \quad 8)\ x^{46}\cdot x = x^{47}.$$

6.15. Skaitļus var uzrakstīt, piemēram, šādā kārtībā: 1, 5, 3, 7, 2, 6, 4, 8.

6.16. $x \in (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$.

6.17. Novērtēsim četrstūra ABCD laukumu (skat. 6.5. zīm.).

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \tfrac{1}{2}BD\cdot h_1 + \tfrac{1}{2}BD\cdot h_2 = \tfrac{1}{2}BD\cdot(h_1 + h_2) \le$$
$$\tfrac{1}{2}BD\cdot(AO + OC) = \tfrac{1}{2}BD\cdot AC = 40\ \text{cm}^2.$$

Vienādība izpildās, ja $BD \perp AC$.

6.18. a) Pieņemsim, ka riņķa līnijas konstruētas uz trijstūra ABC malām AB un AC. Novilksim augstumu AH. Tad trijstūri AHB un AHC pārklāj trijstūri ABC. Punkts H pieder abām riņķa līnijām (teorēma par ievilkto leņķi), tātad divi dotie riņķi pārklāj trijstūrus AHB un AHC, tātad arī trijstūri ABC.
b) Sadalīsim četrstūri ar diagonāli divos trijstūros. Tagad apgalvojums seko no uzdevuma a) punkta, jo katru no trijstūriem pārklāj atbilstošie divi riņķi.

c) Nē, tas neizpildās, piemēram, regulāram piecstūrim.

6.19. Ievērosim, ka pierādāmās identitātes kreisā puse ir vienāda ar

$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}\right),$$

bet labā ar

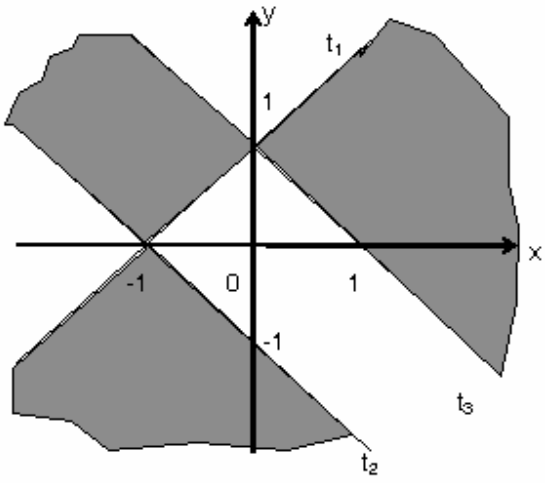
$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Redzam, ka tās sastāv no vieniem un tiem pašiem saskaitāmajiem; tātad tās ir vienādas.

6.20. Apgalvojums būs pierādīts, ja mēs pierādīsim, ka ne vēlāk kā pēc 999 atņemšanām iegūsim viencipara skaitli. Ievērosim, ka, atņemot no skaitļa, kam ir vairāk par vienu ciparu, tā ciparu summu, šī skaitļa pilno desmitu skaits samazinās. Tiešām, mēs atņemam skaitļa pēdējo ciparu un vēl kādu pozitīvu skaitli. Tā kā sākotnējā skaitļa pilno desmitu skaits nepārsniedz 999, tad apgalvojums pierādīts.

6.21. Apzīmēsim progresijas pirmo locekli ar a, bet kvocientu ar q. Pēc dotā $aq^2 = 24$, $aq^6 = 384$. Izdalot otro vienādību ar pirmo, iegūstam $q^4 = 16$, $q = \pm 2$.
Ja q = 2, tad a = 6, $a_4 = 48$, $a_5 = 96$, un $a_4 + a_5 \neq 48$; šī q vērtība neder.
Ja $q = -2$, tad a = 6, $a_4 = -48$, $a_5 = 96$, un $a_4 + a_5 = 48$; tātad $q = -2$ der, un progresijas astotais loceklis ir -768.

6.22. Ar t_1, t_2 un t_3 apzīmēsim taisnes, kuru vienādojumi ir attiecīgi $x+1-y=0$, $x+1+y=0$ un $x-1+y=0$. Tās sadala koordinātu plakni sešos apgabalos. Katrā no apgabaliem izteiksmju $x+1-y$, $x+1+y$ un $x-1+y$ zīmes nemainās, tāpēc prasītā nevienādība vai nu izpildās visā apgabalā, vai neizpildās tajā. Pārbaudot pa vienam punktam no katra apgabala, atrodam vajadzīgos . Tie ir 6.6. zīmējumā iesvītrotie apgabali.

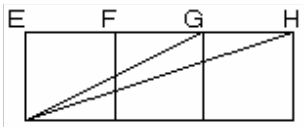


6.6. zīm.

6.23. Ja taisne y = kx + b krusto parabolu $y = x^2$ punktos M un N, tad krustpunktu abscisas x_M un x_N atrod no vienādojuma $x^2 = kx + b$, jeb $x^2 - kx - b = 0$. Nogriežņa MN viduspunkta abscisa ir $\frac{x_M + x_N}{2} = \frac{k}{2}$ (pēc Vjeta teorēmas), tātad nav atkarīga no koeficienta b. Tā kā paralēlu taišņu vienādojumi $y = kx + b_1$ un $y = kx + b_2$ atšķiras tikai ar brīvo locekli, tad abu nogriežņu MN un KL viduspunktu abscisas ir vienādas, un taisne, kas iet caur šiem punktiem ir perpendikulāra Ox asij.

6.24. $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$.

6.25. Apzīmēsim $\angle AGE = a$, $\angle AHE = b$ (skat. 6.7. zīm.). Tad $0 < a < 45°$, $0 < b < 45°$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ un $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$; tātad $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1$. Tā kā $0 < a + b < 90°$, tad $a + b = 45°$.

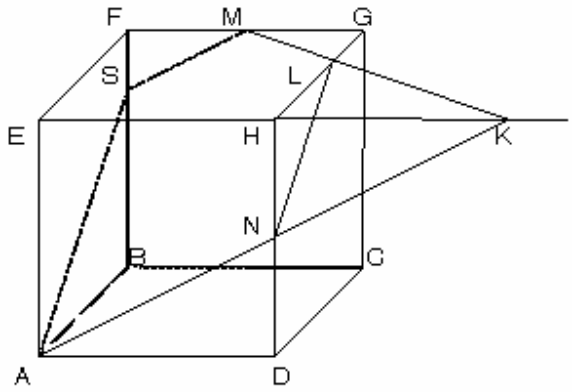


6.7. zīm.

6.26. (1) Pierādīsim, ka neviens virknes loceklis nav 1.
Pirmais loceklis x_1 nav 1. Ja $x_{k+1} = x_k - x_k^2 = 1$, tad x_k ir kvadrātvienādojuma $x^2 - x + 1 = 0$ sakne, bet šim vienādojumam nav sakņu.
(2) Neviens virknes loceklis nav 0.
x_1 nav 0. Pieņemsim, ka x_{k+1} ir <u>pirmais</u> loceklis, kas ir vienāds ar 0. Tad $x_{k+1} = x_k(1 - x_k) = 0$. Tā kā $x_k \neq 0$, tad $x_k = 1$, bet tas ir pretrunā ar (1).
(3) Dotā virkne ir dilstoša.
Tā kā $x_k \neq 0$, tad $x_{k+1} = x_k - x_k^2 < x_k$.
(4) Visi virknes locekļi ir pozitīvi.
Jau pierādīts, ka neviens virknes loceklis nav 0. Pieņemsim, ka x_k ir <u>pirmais</u> negatīvais virknes loceklis; tad $k > 1$ un $x_{k-1} > 0$. Tā kā dotā virkne ir dilstoša, tad $0 < x_{k-1} < x_1 < 1$. Taču tādā gadījumā $x_k = x_{k-1}(1 - x_{k-1}) > 0$, un iegūta pretruna.
(5) Tā kā dotā virkne ir dilstoša un ierobežota no apakšas, tad tai eksistē robeža pēc Veijerštrassa teorēmas.
(6) Apzīmēsim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$; tad

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(x_n - x_n^2) = c - c^2,\ c^2 = 0,\ c = 0.$$

6.27. Konstrukcijas gaita (skat. 6.8. zīm).
1) Atrodam taišņu AN un EH krustpunktu K.
2) Atrodam taišņu KM un HG krustpunktu L.
3) Caur M velkam taisni paralēli AN līdz krustpunktam S ar taisni BF.
Piecstūris ASMLN ir meklējamais šķēlums.

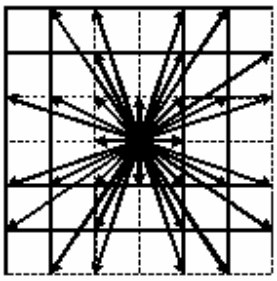


6.8. zīm.

6.28. Apzīmēsim punkta M koordinātes ar x_0 un y_0; $y_0 = \frac{1}{x_0}$. Pieskares t vienādojums ir $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, jeb $y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Pieskares krustpunktu ar asi Ox atrod, ievietojot pieskares vienādojumā y = 0. Iegūstam $x = 2x_0$. Tātad punkta B koordinātes ir ($2x_0$, 0). Līdzīgi, ievietojot vienādojumā $x = 0$, atrodam punkta A koordinātes (0, $\frac{2}{x_0}$). Tātad $\overline{AM} = \overline{MB} = \left(x_0, -\frac{1}{x_0}\right)$, un, protams, nogriežņi AM un MB ir vienādi.

6.29. Pieņemsim, ka M ir tāds skaitlis, dalīšanās ar kuru nav atkarīga no dalāmā ciparu kārtības.
1) M nedalās ar 2. Starp skaitļiem Mk var atrast skaitli, kura pirmais cipars ir 1. Pārliekot to uz skaitļa beigām, iegūsim skaitli, kurš nedalās ar 2, tātad nedalās ar M; skaitlim M prasītā īpašība neizpildās.
Pareizinot nepāra skaitli ar k var iegūt skaitli kM, kura pēdējais cipars ir 1 (pārbaudiet to). Skaitlis $10k \cdot M = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n 10}$ dalās ar M. Tātad arī skaitlim $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n 01}$ jādalās ar M. Arī šo skaitļu starpībai -- skaitlim 9 ir jādalās ar M. Tātad M var būt 9, 3 vai 1.

6.30. Apskatīsim jebkuru izliektu 32-stūri $A_1A_2...A_{32}$, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs. Aplūkosim vektorus $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ... , $\overrightarrow{A_{31}A_{32}}$, $\overrightarrow{A_{32}A_1}$. Tā kā apskatāmais daudzstūris ir izliekts, tad visi šie vektori ir dažādi, un starp tiem nav paralēlu vienādi vērstu vektoru. Atliksim visus šos vektorus no vienas rūtiņas virsotnes O; to galapunktiem jānonāk atšķirīgās virsotnēs. 6.9. zīm. parādīts, kādiem jābūt šiem vektoriem, lai to garumu summa būtu vismazākā (izmantoti visi īsākie vektori). To garumu summa, un tātad minimālais 32-stūra perimetrs ir $4 + 4\sqrt{2} + 8\left(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13}\right)$. Ievērosim, ka šo vektoru summa ir 0. tātad tie kalpo par izliekta 32-stūra malu vektoriem.



6.9. zīm.

6.31. $\cos^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x + \cos^2 4x =$
$\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} =$
$\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x) - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6x) =$
$\cos 5x(\cos 3x - \cos x) = -2\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x .$

6.32. Meklējamais laukums ir $p/3 + 1 - \sqrt{3}$.

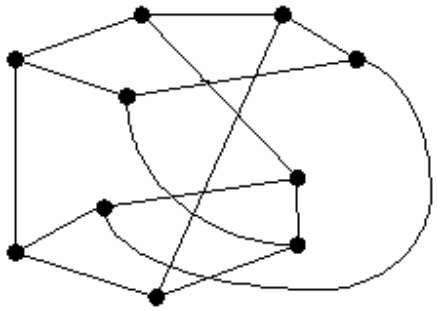
6.33. Tā kā $-1 \le \cos x \le 1$, tad $-1 \le y \le 1$, un x = cosy > 0. Līdzīgi pierāda, ka y > 0. Tātad esam pierādījuši, ka 0 < x ≤ 1 un 0 < y ≤ 1. Pieņemsim pretējo, ka $x \neq y$, piemēram, x > y. Tad $x - y = \cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, jeb

$$\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{x+y}{2}} > 1,$$

bet tas ir pretrunā ar zināmo nevienādību sinx ≤ x, ja x ≥ 0. Apgalvojums pierādīts.

6.34. Nē, ne vienmēr. Izvēlēsimies regulāru ārējo piramīdu ABCD, kuras pamata malas AB, AC, BC ir ļoti mazas salīdzinot ar sānu šķautnēm. Punktu M izvēlēsimies uz šķautnes CD ļoti tuvu punktam D. Tad iekšējās piramīdas ABMD šķautņu garumu summa būs lielāka par ārējās piramīdas ABCD šķautņu garumu summu.

6.35. Aplūkosim kādu pilsētu A. Ir ne vairāk kā 3 pilsētas, uz kurām no A var aizlidot bez pārsēšanās. Noskaidrosim, cik var būt tādu pilsētu, uz kurām no A var aizlidot ar vienu pārsēšanos. Tādu ir ne vairāk kā 3 × 2 = 6, jo no katras pilsētas, kurās mēs ielidojam no A ne vairāk kā 2 reisi ved uz citām pilsētām (viens reiss ved uz A). Tātad kopējais pilsētu skaits valstī nepārsniedz 1 + 3 + 6 = 10. Zīmējumā 6.10. redzams, ka valstī var būt 10 pilsētas tā, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos.



6.10. zīm.

6.36. Pakāpeniski pārveidojot vienādojumu, iegūstam

$$\cos^4 x - \sin^4 x + \cos^4 2x - \sin^4 2x + \cos^4 3x - \sin^4 3x = 0,$$

$$\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 2x + \sin^2 2x\right) + \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) +$$

$$\left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right)\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) = 0,$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0, \quad \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0.$$

x = p/8 + p × n / 4, n ∈ Z; x = ± 2p / 3 + 2pn, n ∈ Z.

6.37. Vienādojumam ir divi atrisinājumi x = 2 un x = 4, ja x > 0, un viens atrisinājums, ja $x \le 0$.

6.38. Katru trijstūri, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, var iekļaut mazākajā taisnstūrī, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Visos gadījumos trijstūra laukums ir starpība starp taisnstūra laukumu (veselu skaitli) un vairāku taisnleņķa trijstūru laukumiem, kuru katetes iet pa rūtiņu līnijām un kuru garumi ir veseli skaitļi. Šādu trijstūru laukumi ir veseli skaitļi, dalīti ar 2. Tātad arī aplūkojamā trijstūra laukums ir vesels skaitlis, dalīts ar 2, un tas nevar būt vienāds ar $4\frac{1}{3}$. Mazākais tāda trijstūra laukums var būt $\frac{1}{2}$, un šādu trijstūri ir viegli konstruēt.

6.39 Pieņemsim pretējo, ka neviens no skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nav pirmskaitlis. Tad katrs no šiem skaitļiem satur vismaz 2 pirmreizinātājus (varbūt arī vienādus), turklāt atšķirīgi skaitļi satur atšķirīgus pirmreizinātājus. Katram skaitlim a_i piekārtosim tā mazāko pirmreizinātāju b_i. Tad $b_i^2 \le a_i$, tātad $b_i < 2n-1$, un visi pirmskaitļi b_i ir dažādi. Taču ir ne vairāk kā n -1 pirmskaitļu, kas mazāki par 2n - 1, jo visi pirmskaitļi, izņemot 2, ir nepāra skaitļi. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka uzdevuma apgalvojums ir patiess.

6.40. Izmantojot līdzīgus trijstūrus vispirms pierādiet uzdevuma analogu plaknē.
Dots trijstūris ar malu garumiem a, b, c. Caur punktu O tā iekšpusē novilktas taisnes paralēli trijstūra malām. Šo taišņu nogriežņu garumus trijstūra iekšpusē apzīmēsim ar l_a, l_b, l_c. Pierādīt, ka $\frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} = 2$.

7. atklātā olimpiāde (1979./80. m.g.)

7.1. Reizinot 29 ar visiem cipariem pēc kārtas, redzam, ka tikai 29 reizinājumā ar 9 pēdējais cipars ir 1. Tātad dalījuma pēdējais cipars ir 1. Tā kā 29 × 9 = 261, tad skaitlis 261261 dalās ar 29. Dalījums ir 9009.

7.2. Paralēlskaldnis sastāv no $5 \cdot 6 \cdot 8 = 240$ kubiņiem. Noņemot visus nokrāsotos kubiņus (katras skaldnes virsējo kārtu), iegūsim paralēlskaldni, kas sastāv no $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ kubiņiem. Tātad nokrāsoto kubiņu ir $240 - 72 = 168$.

7.3. Apzīmēsim X kluba biedru skaitu, kas zina valodu X, bet ar $\overline{X}$ -- biedru skaitu, kas nezina valodu X. Piemēram, $A\overline{V}\overline{S}$ norāda biedru skaitu, kas zina tikai angļu valodu. Dots, ka $A = V = S = 50$, $\overline{A}V\overline{S} = 18$, $\overline{A}\overline{V}S = 14$, $\overline{A}VS = 12$, $AVS = 2$. No vienādības

$$50 = S = AVS + \overline{A}VS + \overline{A}\overline{V}S + A\overline{V}S = 2 + 12 + 14 + A\overline{V}S$$

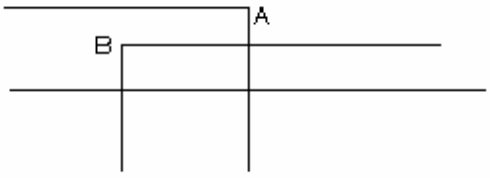
iegūstam, ka $A\overline{V}S = 22$. Līdzīgi, aplūkojot visus vācu valodas pratējus, atrodam, ka $AV\overline{S} = 18$. Tagad aplūkosim visus angļu valodas pratējus:

$$50 = A = AVS + AV\overline{S} + A\overline{V}S + A\overline{V}\overline{S} = 2 + 18 + 22 + A\overline{V}\overline{S}.$$

Redzam, biedru skaits, kas zina tikai angļu valodu $A\overline{V}\overline{S}$ ir $50 - 2 - 18 - 22 = 8$.

7.4. Summā skaitli 999 iegūt nevar. Ja doto skaitli apzīmēsim ar $\overline{abc}$, bet skaitli ar pārkārtotajiem cipariem ar $\overline{xyz}$, tad izpildās vienādības c + z = b + y = a + x = 9. Saskaitot šīs vienādības, iegūsim $27 = a + b + c + x + y + z = 2(a + b + c)$, jo x, y, z ir tie paši cipari a, b, c, tikai ņemti citā secībā. Bet tā ir pretruna, jo 27 ir nepāra skaitlis.
Skaitli 9999 var iegūt, piemēram šādi: 3456 + 6543 = 9999.

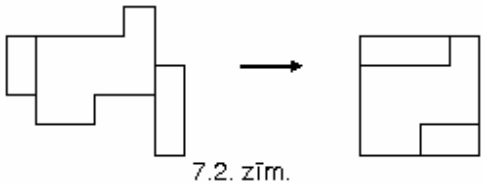
7.5. Divus prožektorus A un B, kas atrodas ceļa vienā pusē, pagriezīsim tā, kā parādīts 7.1. zīmējumā. Tad visa lauka daļa, kas atrodas ceļa pretējā pusē būs apgaismota. Ar pārējiem diviem prožektoriem līdzīgi apgaismosim otru lauka pusi.



7.1. zīm.

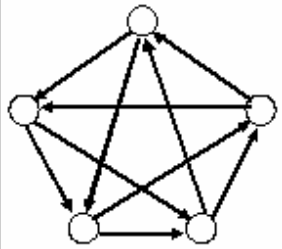
7.6. Ja naturālu skaitļu kopas M = {9123, 9124, ... , 11562, 11563} katram skaitlim labajā pusē pieraksta 6 ciparus, kas vienādi ar šī skaitļa pēdējo ciparu (piemēram, 9123 $\rightarrow$ 9123333333), tad iegūst visus prasītos veselos skaitļus. Tātad šādu skaitļu pavisam ir $11563 - 9122 = 2441$.

7.7. To var izdarīt daudzos veidos; piemēram, kā parādīts 7.2. zīm.



7.2. zīm.

7.8. Viens no iespējamiem variantiem parādīts 7.3. zīmējumā.



7.3. zīm.

7.9. Otrais spēlētājs to noteikti var panākt. Viņam jārīkojas sekojoši: katrā gājiena jāņem tās krāsas lodīte, kādu pirms viņa paņēma pirmais spēlētājs, un jāievieto kuba virsotnē, kas ir diametrāli pretēja virsotnei, kurā šīs pašas krāsas lodīti ievietoja pirmais spēlētājs. Jāatzīmē, ka to vienmēr varēs izdarīt.

7.10. Andra norādītā monēta ir jāatliek malā, bet atlikušās 100 jānovieto pa 50 uz katra no svaru kausiem. Ja svaru starpība ir pāra skaitlis, tad norādītā monēta ir īsta, ja nepāra skaitlis, tad -- viltota. Pamatojiet to !

7.11. Piemēram, $x(x-1)(x-2)=0$.

7.12. Ņemsim četrus skaitļus $a=b=c=d=1$. Protams, jebkuru šīs kopas skaitļu summa dalās ar to skaitu, jo šie skaitļi ir vienādi. Tikai uzdevumā bija prasīti dažādi skaitļi. Tā kā skaitļu skaits var būt 1, 2, 3 vai 4, un 12 dalās ar visiem šiem skaitļiem, tad, pieskaitot jebkuram no sākotnējiem skaitļiem skaitļa 12 daudzkārtni, prasītā īpašība saglabāsies. Tāpēc mēs varam izvēlēties, piemēram, šādus skaitļus: 1, 13, 25, 37.

7.13. Uzvar otrais spēlētājs. Katru reizi, kad pirmais spēlētājs iekrāso kādu rūtiņu A, otrais iekrāso rūtiņu, kas ir simetriska rūtiņai A attiecībā pret kvadrāta centru.
Ja kvadrāta izmēri ir 9×9, tad uzvar pirmais spēlētājs, vispirms iekrāsojot centrālo rūtiņu, bet pēc tam spēlējot tāpat (simetriski pret centru) kā pirmajā gadījumā otrais spēlētājs.

7.14. Iegūtā izteiksme sadalīsies reizinātājos (x+a)(x+b), ja iegūtajam polinomam x^2+px+q būs divas veselas saknes. Rīkosimies tā, lai viena no saknēm būtu -1. Tādā gadījumā jāizpildās vienādībai $(-1)^2+p(-1)+q=1-p+q=0$, jeb $p=q+1$. Tātad, ja pirmais spēlētājs ieraksta pirmās zvaigznītes vietā skaitli n, tad otrais ieraksta otrās zvaigznītes vietā skaitli $n-1$; ja pirmais spēlētājs ieraksta otrās zvaigznītes vietā skaitli m, tad otrais ieraksta pirmās zvaigznītes vietā skaitli m +1. Rezultātā abos gadījumos iegūstam polinomu $x^2+(m+1)x+m$, kuru var sadalīt reizinātājos $(x+1)(x+m)$.

7.15. Ja plaknē jau novilktas n taisnes, tad, velkot jaunu taisni, tā krustojas ar ne vairāk kā n taisnēm, tātad sadala divos apgabalos ne vairāk kā n + 1 no iepriekšējiem apgabaliem; t.i., palielina apgabalu skaitu ne vairāk kā par n + 1.
Viena taisne sadala plakni 2 apgabalos, otrā taisne palielina apgabalu skaitu lielākais par 2, trešā -- par 3, ... , desmitā -- par 10. Tātad lielākais iespējamais apgabalu skaits ir 2 + 2 + 3 + 4 + ...+ 10 = 56. Tāds skaits ir iespējams, ja, vilksim katru nākošo taisni tā, lai tā krustotos ar visām iepriekšējām dažādos punktos.

7.16. No teorēmas par nogriežņa vidusperpendikulu seko, ka
$OA = OB = OC = OD$; tātad punkts O pieder nogriežņa AD vidusperpendikulam.

7.17. Vilksim taisni caur punktu E paralēli AB līdz tās krustpunktam ar taisni BC. Tad ABKE ir paralelograms, un trijstūri ABE un KEB ir vienādi. Tā kā trijstūru ABE un BCE perimetri ir vienādi, tad vienādi ir arī trijstūru BKE un BCE perimetri. No šejienes seko, ka KC + CE = KE, ja K pieder nogrieznim BC, vai CK + KE = CE, ja C pieder nogrieznim BK. Abos gadījumos iegūta pretruna ar trijstūra nevienādību trijstūrim KCE. Tātad punkts K sakrīt ar punktu C, un EC || AB. Līdzīgi pierāda, ka EB || DC. Redzam, ka ABCE un EBCD ir paralelogrami; tātad $AE = BC = ED$.

7.18. No 5 cipariem var izveidot 20 dažādus pārus, kuros abi cipari ir dažādi. Ja uzrakstītais skaitlis saturētu vairāk par 21 ciparu, tad tas saturētu vairāk par 20 blakusstāvošu ciparu pāriem, un starp tiem būtu vienādi.
21-ciparu skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir, piemēram, šāds:
121314152324253435451.

7.19. No otrās nevienādības seko, ka $0{,}9b < a < 0{,}91b$. Tātad

$$a + b > 0{,}9b + b > 90,\ 1{,}9b > 90,\ b > \frac{90}{1{,}9} > 47;$$

$$a + b < 0{,}91b + b < 100,\ 1{,}91b < 100,\ b < \frac{100}{1{,}91} < 53.$$

Tātad b var pieņemt vērtības 48, 49, 50, 51, 52. Ievietojot, šīs b vērtības nevienādībā $0{,}9b < a < 0{,}91b$, iegūstam divus atrisinājumus veselos skaitļos: $a = 46,\ b = 51$ un $a = 47,\ b = 52$. Pārbaude parāda, ka šie skaitļu pāri apmierina visas dotās nevienādības.

7.20. Tā kā kopai S pieder skaitļi 10, - 1 un $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, tad tai pieder arī skaitlis
$10 + (-1)\cdot\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = 5 - 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$, un arī skaitlis
$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

7.21. Apzīmēsim ar a_n (b_n, c_n) to n-ciparu skaitļu skaitu, kuriem izpildās uzdevuma nosacījumi un kas sākas ar ciparu 1 (2, 3). Šādu skaitļu kopas apzīmēsim attiecīgi ar A_n, B_n, C_n. Katru kopas A_{n+1} elementu iegūst no kopas A_n vai B_n, pierakstot tam priekšā

ciparu 1. Tāpēc $a_{n+1} = a_n + b_n$. Līdzīgi pierāda sakarības $b_{n+1} = a_n + b_n + c_n$ un $c_{n+1} = b_n + c_n$. Izmantojot šīs sakarības un to, ka $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, pakāpeniski aizpildām tabulu:

n	a_n	b_n	c_n
1	**1**	**1**	**1**
2	**2**	**3**	**2**
3	**5**	**7**	**5**
4	**12**	**17**	**12**
5	**29**	**41**	**29**
6	**70**	**99**	**70**

Tātad trīsciparu skaitļu skaits, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $5 + 7 + 5 = 17$, bet sešciparu skaitļu skaits ir $70 + 99 + 70 = 239$.

7.22. Viegli redzēt, ka četrstūri ABMF un BCNA ir vienādi. Atņemot no to laukumiem to kopīgās daļas ABMO laukumu, iegūstam prasīto vienādību.

7.23. Caur katru riņķa līnijas centru O_1 un O_2 novelkam taisni, paralēlu tai leņķa malai, kura pieskaras šim riņķim. Šo taišņu krustpunkts M ir meklētais. Tiešām, leņķa O_1AO_2 malas ir paralēlas dotā fiksētā leņķa malām, tātad $\angle O_1AO_2$ = a (a -- dotā leņķa lielums). Atliek atcerēties, ka punkti, no kuriem dotais nogrieznis O_1O_2 redzams konstantā leņķi, ir divu loku apvienojums.

7.24. Ja vienādojumam f(x)=x nav atrisinājumu, tad vai nu visiem x izpildās nevienādība f(x) > 0, vai f(x) < 0 (izmantojam to, ka funkcija f(x) - x ir nepārtraukta). Aplūkosim pirmo gadījumu. Tad $f(f(x)) > f(x) > x$ visiem x, un vienādojumam $f(x) = x$ atrisinājumu nav. Līdzīgi aplūko otro gadījumu.

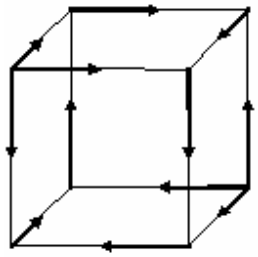
7.25. Var pārbaudīt, ka $\underbrace{11\ldots1}_{10}\underbrace{22\ldots2}_{11}5 = \underbrace{33\ldots3}_{10}5^2$.

7.26. Lemma. Ja divu skaitļu summa ir konstanta, tad to reizinājums ir jo lielāks, jo to starpības modulis ir mazāks.

Apgalvojums seko no vienādības $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$.

Tātad a) gadījumā jāizvēlas skaitļi 44 un 45; to starpības modulis ir mazākais iespējamais; b) gadījumā jāizvēlas skaitļi 33, 33 un 33, jo, izvēloties jebkurus citus trīs skaitļus, atrastos divi, kuru starpība ir lielāka par 1. Tad, palielinot par 1 mazāko no tiem un pamazinot par 1 lielāko, skaitļu reizinājums palielinātos.

7.27. Jā, var. 7.4. zīmējumā attēlota atbilde uz abiem jautājumiem.



7.4. zīm.

7.28. 1) Ja eksistē $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, tad

$$c = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 1} = \sqrt{c+1},\ \ c^2 - c - 1 = 0,\ \ c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

2) Robežas eksistence seko no tā, ka virkne ir monotona un ierobežota.

7.30. Pieņemam pretējo, ka izmetot jebkuru kolonu, tabulā atradīsies divas vienādas rindiņas. Tā kā kolonu skaits ir n, tad no atbilstošo rindiņu pāriem var izveidot šādu ciklu: rindiņas r_1 un r_2 atšķiras tikai kolonā k_1, rindiņas r_2 un r_3 atšķiras tikai kolonā k_2, ... , rindiņas r_m un r_1 atšķiras tikai kolonā k_m. Tas nozīmē, ka kolonā k_m šādās rindiņās ir ierakstīti vienādi burti: rindiņās r_1 un r_2, rindiņās r_2 un r_3, ... , rindiņās r_{m-1} un r_m. Tātad kolonā k_m rindiņās r_m un r_1 ir ierakstīti vienādi burti, bet tas ir pretrunā ar to, ka rindiņas r_m un r_1 atšķiras tikai kolonā k_m. Apgalvojums pierādīts.

7.31. Ierakstot pēdējās zvaigznītes vietā 0, pirmais spēlētājs nodrošina reizinātāja $(x+0)$ eksistenci. Mēs iegūstam izteiksmi $x\left(x^2 + * x + *\right)$. Tālāk pirmajam spēlētājam jārīkojas tā, kā rīkojās otrais spēlētājs 7.14. uzdevuma atrisinājumā.

7.32. $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$.

7.33. Nē, tādas piramīdas nav. Aplūkosim taisni, kas perpendikulāra piramīdas ABCO pamata plaknei O un visus vektorus noprojicēsim uz šo taisni. Tad pamata plaknes vektoru projekcijas būs nulles vektori, bet vektori, kas atbilst šķautnēm AO, BO, CO, projicēsies par vienāda garuma vektoriem uz taisnes. Skaidrs, ka trīs vienāda garuma vektori uz taisnes summā nevar dot nulles vektoru. Ja vektoru projekciju summa nav nulles vektors, tad arī pašu vektoru summa nav nulles vektors.

7.34. Pierādīsim, ka mazākais iespējamais jautājumu skaits ir 6.
Vispirms parādīsim, kā to izdarīt ar 6 jautājumiem. Atzīmēsim, ka Jānim pietiek noskaidrot, kādi skaitļi ierakstīti katrā kolonā un katrā rindiņā; tad katrā rūtiņā atrastos vienīgais skaitlis, kas atrodas gan tajā rindiņā, gan tajā kolonā, kas satur norādīto rūtiņu. Parādīsim, kā ar 3 jautājumiem noskaidrot, kādi skaitļi ierakstīti katrā rindiņā (protams, ar kolonām var rīkoties līdzīgi).
Ar pirmo jautājumu Jānis noskaidro, kādi skaitļi ierakstīti 1., 2., 3. un 4. rindiņā; ar otro -- 1., 2., 5. un 6. rindiņā; ar trešo -- 1., 3., 5. un 7. rindiņā. Tagad Jānim ir skaidrs skaitļu

izvietojums pa rindiņām. Piemēram, pirmajā rindiņā atrodas skaitļi, kas pieder visām nosauktajām grupām, otrajā -- kas pieder pirmajai un otrai grupai, bet nepieder trešajai grupai, u.t.t.
Tagad pierādīsim, ka ar 5 jautājumiem nepietiek. Katra rūtiņa var vai nu piederēt rūtiņu grupai, par kuru uzdots jautājums, vai nu nepiederēt tai. Tā kā uzdoti 5 jautājumi, tad katrai rūtiņai ir iespējami $2^5 = 32$ dažādi stāvokļi attiecībā uz piederību jautājumu rūtiņu kopām. Tā kā rūtiņu ir pavisam 64, tad noteikti atradīsies divas rūtiņas, kuras katrai jautājuma kopai pieder vai nepieder vienlaicīgi. Tādā gadījumā, samainot skaitļus, kas ierakstīti šajās rūtiņās, vietām, Andra atbildes nemainīsies, un Jānis precīzi noskaidrot situāciju nevarēs.

7.35. Aplūkojot taisnleņķa trijstūri ar hipotenūzu 1 un leņķi a, secinām, ka visiem $0 < a < 90°$ izpildās nevienādība $\cos a + \sin a > 1$. Tāpēc
$(\cos a_1 + \cos a_2 + ... + \cos a_1) + (\sin a_1 + \sin a_2 + ... + \sin a_1) > n$. (*)
No nevienādības $\cos \le 1$seko, ka
$(1 + \cos a_1) + (1 + \cos a_2) + ... + (1 + \cos a_n) \le 2n$,
bet, ņemot vērā, ka kreisās puses izteiksme ir nepāra skaitlis, iegūstam nevienādību
$(1 + \cos a_1) + (1 + \cos a_2) + ... + (1 + \cos a_n) \le 2n - 1$.
Tātad $\cos a_1 + \cos a_2 + ... + \cos a_n \le n - 1$. (**)
Atņemot no nevienādības (*) nevienādību (**), iegūsim prasīto.

7.36. Der, piemēram, nevienādība

$$\frac{(x+3)(x-10)(x-2)^2(x-4)^2}{(x-6)(x-8)} \ge 0.$$

7.37. Pārveidojot, iegūstam
$2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x-1}{2} = 2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{x+1}{2}\left(\cos\frac{x-1}{2} - \cos\frac{x+1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$
$2\sin\frac{x+1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x+1}{2} = 0$ vai $\sin\frac{x}{2} = 0$.
$x = 2pn - 1$, $n \in Z$; $x = 2pk$, $k \in Z$.

7.38. Izvēlēsimies uz taisnes t punktu A un novilksim no tā perpendikulu AB pret skaldni Q. No B novilksim perpendikulu BC pret l skaldnē Q. Taišņu t un l krustpunktu apzīmēsim ar D. Pēc triju perpendikulu teorēmas $DC \perp CA$. Apzīmēsim $AB = h$; tad
$AC = \frac{h}{\sin\alpha}$, $BC = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $DC = AC \cdot \operatorname{ctg}\beta = \frac{h \cdot \operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha}$ un
$\operatorname{tg}\angle BDC = \frac{CB}{DC} = \operatorname{tg}\beta\cos\alpha$. Tāpēc meklējamais leņķis ir $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\beta\cos\alpha)$.

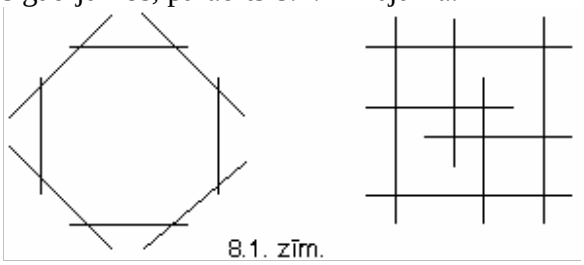
7.39. Viena no funkcijām, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $f(x) = x$. Pierādīsim, ka citu tādu funkciju nav.
Pieņemsim, ka f(x) ir cita funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tad vai nu eksistē tāds x_0, ka $x_0 < f(x_0)$, vai arī eksistē tāds x_0, ka $x_0 > f(x_0)$. Pirmajā gadījumā izvēlēsimies skaitli a tā, ka $a < x_0 < a + 100 < f(x_0)$. To var izdarīt, piemēram, ņemot par a + 100 mazāko no skaitļiem $x_0 + 1$ un $\frac{x_0 + f(x_0)}{2}$. Tad $a < x_0 < a + 100$, bet

nevienādība $f(x_0) < a + 100$ neizpildās; tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Līdzīgi aplūko otru gadījumu.

7.40. Virknes b_n locekļi pieņem visas vērtības no kopas {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9}.
Virkne ir periodiska ar perioda garumu 20, un tas sastāv no cipariem
7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0, 1, 6.

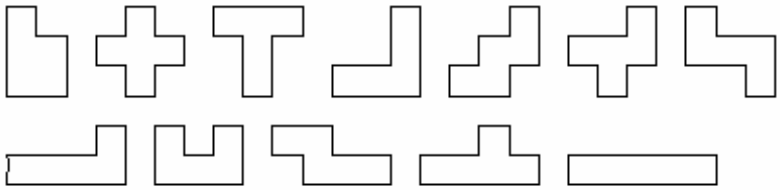
8. atklātā olimpiāde (1980./81. m.g.)

8.1. Kā to izdarīt abos gadījumos, parādīts 8.1. zīmējumā.



8.1. zīm.

8.2. Visas iespējamās figūras attēlotas 8.2. zīmējumā.

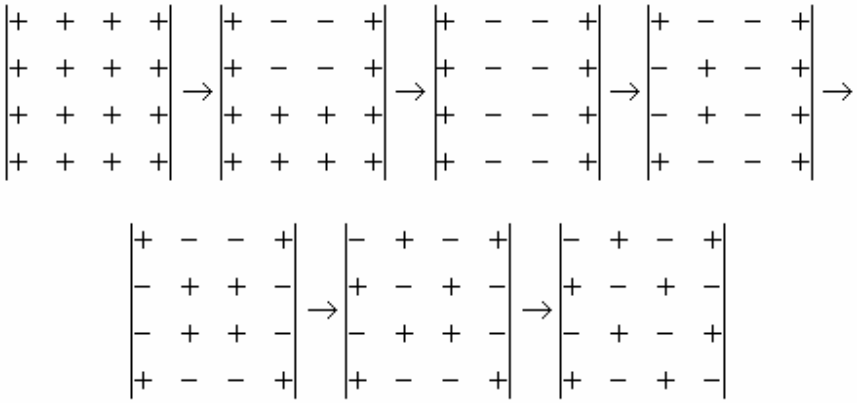


8.2. zīm.

8.3. Uzdevumā prasīts atrast visus tos veselos pozitīvos skaitļus, kurus tikai vienā veidā var izteikt kā triju dažādu veselu pozitīvu skaitļu summu.
Vismazākais skaitlis, kurš ir triju dažādu pozitīvu skaitļu summa ir $6 = 1 + 2 + 3$. Atzīmēsim, ka arī skaitli 7 var izteikt kā dažādu skaitļu summu tikai vienā veidā: $7 = 1 + 2 + 4$. Ja vesels skaitlis x lielāks par 7, tad to var izteikt kā trīs dažādu veselu pozitīvu skaitļu summu vismaz divos veidos: $x = 1 + 2 + (x - 3)$ un $x = 1 + 3 + (x - 4)$. Tātad Jāņa rezultāts varēja būt 6 vai 7.

8.4. Nē, nevar. Lai blakus esošo aplīšu skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, pa riņķi aiz katra pāra skaitļa ir jāseko nepāra skaitlim, bet aiz katra nepāra skaitļa -- pāra skaitlim. Riņķī, kurā ierakstīts kāds nepāra skaitlis, sauksim par pirmo; tad otrajā riņķītī ierakstīts pāra skaitlis, trešajā -- nepāra, ceturtajā -- pāra, ... , devītajā -- nepāra skaitlis. Tas nozīmē, ka divi nepāra skaitļi (pirmajā un devītajā aplītī) atrodas blakus, bet tā nedrīkst būt.

8.5. Viens no iespējamajiem atrisinājumiem parādīts 8.3. zīm.



8.3. zīm.

8.6. Tā kā B iesita trīs vārtus un nezaudēja nevienu, tātad B nevienā spēlē nezaudēja un vismaz vienā spēlē uzvarēja. B nevarēja uzvarēt abās spēlēs, jo no visām trim spēlēm vienā uzvarēja A, bet vēl viena spēle beidzās neizšķirti. Tātad B vienā spēlē uzvarēja ar 3 : 0, bet otrajā spēlēja neizšķirti 0 : 0. Tā kā A neuzvarēja B, tad A uzvarēja C; tas nozīmē, ka C spēlēja neizšķirti 0 : 0 ar B, bet A zaudēja 0 : 3 pret B. Atlikušajā spēlē A ar rezultātu 4 : 2 uzvarēja C (jo spēlēs pret B šīs komandas vārtus neguva).

8.7. Ir divi šādi skaitļi: 321654 un 123654.

8.8. Uzskatīsim, ka punkti izvietoti regulāra 21-stūra virsotnēs.
Ja abi zēni vieniniekus pierakstījuši pie viena punkta, tad apgalvojums izpildās. Pretējā gadījumā šie vieninieki sadala riņķa līniju divos lokos; uz viena no šiem lokiem atrodas nepāra skaits atlikušo punktu (jo kopā tādu ir 19). Šī loka viduspunkts ir viens no atzīmētajiem punktiem, un tam abi zēni ir piešķīruši vienādus numurus, jo vienādos attālumos no vieniniekiem pretējos virzienos zēni pieraksta vienādus numurus.

8.9. Tabulas iekšienē atrodas 62 vertikālas un 36 horizontālas līnijas. Dotais nogrieznis (diagonāle) krusto visas šīs 62 + 36 = 98 līnijas. Katru reizi, krustojot kādu līniju, tas ieiet citā rūtiņā. Sākot no kreisās augšējās rūtiņas, tas, krustojot 98 līnijas, iegāja vēl 98 rūtiņās. Tātad pavisam šis nogrieznis šķērso 99 rūtiņas.

8.10. Viena no iespējamajām kopām ir $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.
Piecus šādus skaitļus atrast nevar, jo izmantojot 5 skaitļus, var sastādīt tikai 31 summu (pārbaudiet to!), un 50 dažādus skaitļus tādā veidā iegūt nevar.

8.11. Tabulu viegli aizpildīt, ievērojot, ka otrā rindiņa ir vienāda ar pirmo, pareizinātu ar 3, bet trešā -- ar pirmo, pareizinātu ar 4. Atrisinājums parādīts 8.4. zīmējumā.

1	2	4
3	6	12
4	8	16

8.4. zīm.

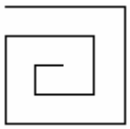
8.12. Pieņemsim, ka šo četrstūru šķēlums nav tukša kopa, punkts vai nogrieznis. Tādā gadījumā tas ir izliekts daudzstūris, kuram ir ne vairāk kā 8 malas, jo katra daudzstūra

mala atrodas uz kādas no doto četrstūru malām, un tādas kopā ir 8 (dažādas daudzstūra malas nevar atrasties uz vienas taisnes -- četrstūra malas). Uzzīmējiet piemērus, kuros būtu redzams, ka daudzstūra malu skaits var būt 3, 4, 5, 6, 7, 8.

8.13. No 12 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem izvēlēsimies to, kas dalās ar 12. Šim skaitlim 12a ir dalītāji a, 2a, 3a, 4a, 6a (varbūt arī vēl citi). Tātad visu dalītāju summa ir ne mazāka kā $a + 2a + 3a + 4a + 6a = 16a$, t.i., lielāka par izvēlēto skaitli.

8.14. Trīs kolonās ierakstīto skaitļu summām ir jābūt ne mazākām par 17, bet vienā kolonā summai jābūt ne mazākai par 22. Tātad visu skaitļu summa tabulā ir ne mazāka par $3 \cdot 17 + 22 = 73$. Tā kā visās rindiņās ierakstīto skaitļu summām ir jābūt vienādām, tad ciparu summa katrā rindiņā ir ne mazāka par 73 / 3 = $24\frac{1}{3}$, tātad ne mazāka par 25. Izvēlēsimies kolonu un rindiņu, kurās ierakstīts skaitlis 0. Pārējo 5 skaitļu summai, kas atrodas izvēlētajās rindiņā un kolonā, ir jābūt ne mazākai par 17 + 25 = 42. Taču pieci lielākie skaitļi, kas var būt ierakstīti ir 9, 9, 8, 8, 7, bet to summa ir mazāka par 42. Tātad šāda tabula nav iespējama.

8.15. Mazākais posmu skaits lauztajai līnijai ir 9 (skat. 8.5. zīm.). Pierādīsim, ka ar 8 posmiem nepietiek. Ja līnijas posmu skaits būtu 8, tad tā saturētu 4 horizontālus un 4 vertikālus posmus. Tā kā pavisam ir 5 rindiņas un 5 kolonas, tad atrastos tāda rindiņa a un tāda kolona b, kuras nesatur līnijas posmus. Tad caur punktu, kas atrodas a un b krustpunktā, lauztā līnija neietu.



8.5. zīm.

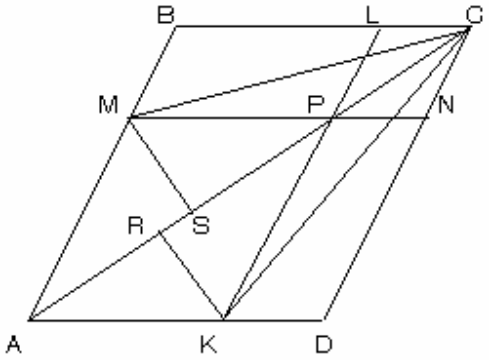
8.16. Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam

$$2x^2 + 6x + 6 < 2x^2 + 6x + 2, \text{ jeb } 6 < 2.$$

Atbilde: x $\in$ Ø.

8.17. Tā kā punkts O atrodas uz leņķa A bisektrises, tad tas atrodas vienādos attālumos no taisnēm AB un AD. Līdzīgi, tas atrodas vienādos attālumos no BA un BC, kā arī no CB un CD. Tātad punkts O atrodas arī vienādos attālumos no taisnēm DC un DA; līdz ar to pierādīts, ka tas pieder leņķa D bisektrisei.

8.18. Skat. 8.6. zīm.



8.6. zīm.

$S_{CMN} = S_{CPN} + S_{CPM}$, $S_{CKL} = S_{CPL} + S_{CPK}$. Diagonāle CP dala paralelogramu PLCN divos vienādos trijstūros CPN un CPL. Tātad atliek pierādīt, ka trijstūru CPM un CPK laukumi ir vienādi. Tā kā tiem ir kopīgs pamats PC, tad atliek pierādīt, ka to augstumi MS un KR ir vienādi. Tas seko no tā, ka MS un KR ir divu vienādu trijstūru PAM un APK atbilstošie augstumi. Apgalvojums pierādīts.

8.19. Vislētākā operāciju virkne maksā 37 kap., un tā ir šāda:

$1 \to 5 \to 15 \to 19 \to 23 \to 69 \to 73 \to 219 \to 657 \to 1971 \to 1975 \to 1979$.

Atrast šo virkni var, pārveidojot skaitli 1979 ar apgrieztajām operācijām par skaitli 1. No visiem iespējamajiem ceļiem, kurus jāattēlo grafa veidā, jāizvēlas vislētākais.

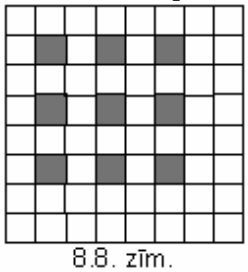
8.20. Pieņemsim, ka tabula aizpildīta tā, ka prasītās īpašības izpildās. Aplūkosim kvadrātu 3 x 3 (skat. 8.7. zīm.).

	a	
b	c	d
	e	

8.7. zīm.

Skaitļi $b + c + d + a$ un $b + c + d + e$ dalās ar 10; arī to starpība $a - e$ dalās ar 10. Tātad skaitļu a un e pēdējie cipari ir vienādi. Līdzīgi pierāda, ka skaitļu b un d pēdējie cipari ir vienādi.

No šejienes izriet, ka skaitļiem, kas ierakstīti iesvītrotajās rūtiņās (8.8. zīm), pēdējie cipari ir vienādi, taču tas nav iespējams, jo starp skaitļiem no 1 līdz 64 var izvēlēties ne vairāk kā 7, kuru pēdējie cipari ir vienādi. Tātad prasītajā veidā tabulu aizpildīt nevar.


8.8. zīm.

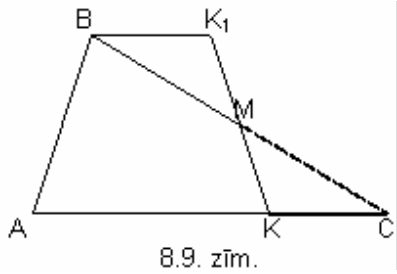
8.21. Mazākais šāds skaitlis ir 1188.

8.22. Izmantojot automātus A un B var iegūt visus pozitīvos racionālos skaitļus un tikai tos.

Vispirms atzīmēsim, ka nevar iegūt citādus skaitļus, jo automāti A un B, saņemot pozitīvus racionālus skaitļus, rezultātā izdod arī pozitīvus racionālus skaitļus, un sākumā dotais skaitlis 2 ir pozitīvs un racionāls.
Parādīsim, kā iegūt visus pozitīvos racionālos skaitļus.
1) Skaitli 1 var iegūt šādi:
$2 \xrightarrow{A} \frac{1}{2}$; $\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{B} 2\frac{1}{2}$; $\left(2\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{B} 3$; $\left(3\ ,\ \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{B} 3\frac{1}{2}$;
$\left(3\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{B} 4$; $4 \xrightarrow{A} \frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\right) \xrightarrow{B} \frac{3}{4}$; $\left(\frac{3}{4}\ ,\ \frac{1}{4}\right) \xrightarrow{B} 1$.
2) Jebkuru naturālu skaitli n > 2 var iegūt, skaitlim 2 pieskaitot n - 2 reizes skaitli 1.
3) Skaitli $\frac{m}{n}$ (m, n -- naturāli skaitļi) iegūst šādi:

- m = 1; $n \xrightarrow{A} \frac{1}{n}$.
- m = 2; $2n \xrightarrow{A} \frac{1}{2n}$; $\left(\frac{1}{n}\ ,\ \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow{B} \frac{3}{2n}$; $\left(\frac{3}{2n}\ ,\ \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow{B} \frac{2}{n}$.
- m > 2; $\frac{m}{n}$ iegūst no $\frac{2}{n}$, atkārtoti pieskaitot $\frac{1}{n}$.

8.23. Uzskatīsim, ka trijstūrī ABC leņķi A un C ir šauri un BC > BA. Ar M apzīmēsim malas BC viduspunktu, un uz malas AC ņemsim tādu punktu K, ka $\angle BAC = \angle MKA$ (skat. 8.9. zīm.). Izdarīsim griezumu pa nogriezni MK un pārvietosim trijstūri MKC stāvoklī MK_1B. Iegūsim vienādsānu trapeci ABK_1K, ap kuru, kā zināms, var apvilkt riņķa līniju.



8.9. zīm.

8.24. Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka tāda progresija eksistē, un tās diference ir d (naturāls skaitlis). Tad katrā skaitļu ass intervālā (sākot no noteiktas vietas, teiksim pirmā progresijas locekļa), kurš satur vismaz d naturālus skaitļus, atradīsies kāds progresijas loceklis. Taču intervālā $\left(d^2,(d+1)^2\right)$ atrodas 2d > d naturāli skaitļi, kas nav veselu skaitļu kvadrāti, jo starp diviem pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu kvadrātiem vesela skaitļa kvadrāts nevar atrasties. Tātad aritmētiskās progresijas loceklis, kurš noteikti atrodas šajā intervālā, nebūs vesela skaitļa kvadrāts.

8.25. Rūtiņu lapā ievedīsim koordinātu sistēmu tā, ka koordinātu sākumpunkts atrodas rūtiņas virsotnē, koordinātu asis iet pa rūtiņu līnijām un vienas rūtiņas malas garums ir 1. Tad visu 5 atzīmēto punktu koordinātas ir veseli skaitļi. Katra punkta koordinātas var pieņemt šādas paritātes: (p, p), (p, n), (n, p), (n, n) (p -- pāra skaitlis, n -- nepāra skaitlis). Tā kā punktu ir 5, bet iespējas četras, tad atradīsies divi punkti ar vienādām koordinātu paritātēm. Apzīmēsim šos punktus ar A un B un aplūkosim trijstūri ABC, kur C ir jebkurš no atlikušajiem punktiem. Malas AB viduspunktu apzīmēsim ar M. Atzīmēsim, ka M koordinātas arī ir veseli skaitļi. Tad trijstūra AMC laukums ir naturāls skaitlis, dalīts ar 2

(skat. 6.38. uzd. atrisinājumu). Trijstūra ABC laukums ir 2 reizes lielāks par trijstūra AMC laukumu un, tātad, ir vesels skaitlis.

8.26. Ar $\{x\}$ apzīmēsim skaitli $x-[x]$. Protams, $0 \le \{x\} < 1$. No šejienes seko, ka $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\{x\}}{x}=0$ un $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{\{x\}}{x}\right)=1-0=1.$

8.27. Apzīmēsim ar $\overline{S}$ visu doto vektoru $\overline{v}_i$ summu. Jebkuru 9 vektoru summu var atrast, atņemot no $\overline{S}$ vienu no dotajiem vektoriem. Tātad visiem i izpildās nevienādība $\left|\overline{S}-\overline{v}_i\right|<\left|\overline{S}\right|$. No šejienes seko, ka $\overline{S}\neq 0$. Par projekcijas ass virzienu izvēlēsimies vektora $\overline{S}$ virzienu. No uzrakstītās nevienādības seko, ka projicējot uz šo asi, iegūsim nevienādību $pr\left(\overline{S}-\overline{v}_i\right)<pr(\overline{S})$. Tātad

$$pr(\overline{v}_i)=pr(\overline{S})-pr\left(\overline{S}-\overline{v}_i\right)>0,$$

kas arī bija jāpierāda.

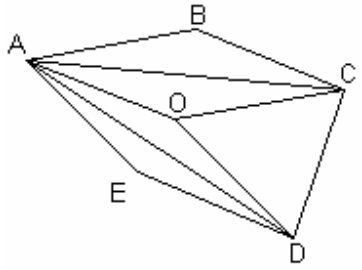
8.28. Nē, nevar. Aplūkosim virkni

$$x_n=\begin{cases}1, & \text{ja } n \text{ ir pirmskaitlis,}\\ 0, & \text{ja } n \text{ nav pirmskaitlis.}\end{cases}$$

Tādā gadījumā

- Virknei x_n robeža neeksistē, jo patvaļīgi tālu tajā būs sastopami abi skaitļi 0 un 1.
- Katram naturālam skaitlim a > 1 virknes x_a, x_{2a}, x_{3a}, ... robeža ir 0, jo visi tās locekļi, sākot ar otro ir vienādi ar 0 (skaitlis k×a ir salikts, ja k >1 un a >1).

8.29. Novilksim nogriežņus $AO \parallel BC$ un $CO \parallel BA$ (skat. 8.10. zīm.). Iegūsim rombu ABCD, jo tā pretējās malas ir paralēlas, un AB = BC.



8.10. zīm.

Tātad $\angle BAO = 2\angle CAO$. Atņemot no dotās vienādības $\angle BAE = 2\angle CAD$ šo vienādību, iegūstam $\angle EAO = 2\angle DAO$, un $\angle DAO = \angle DAE$. No šejienes izriet, ka trijstūri AED un AOD ir vienādi (AE = AO, AD -- kopīga mala, $\angle DAO = \angle DAE$). Ņemot vērā, ka AED (tātad arī AOD) ir vienādsānu trijstūris, secinām, ka AODE ir rombs. DOC ir vienādmalu trijstūris, jo OD = AO = OC = CD. Tātad $\angle DOC = 60°$; tā kā leņķa $\angle BAE$ malas paralēlas leņķa ĻDOC malām, tad $\angle BAE = 60°$.

8.30. Pieņemsim pretējo, ka ir vairāk nekā 30 nogriežņu, kuru garumi ir tieši 1 cm.

Aplūkosim šo nogriežņu galapunktus; to ir vairāk nekā 60, un tie atrodas 10 punktos. Tātad ir tāds punkts, no kura iziet vismaz 7 vienības nogriežņi. Apzīmēsim šo punktu ar O. Šo 7 nogriežņu otrie galapunkti atrodas uz vienības riņķa līnijas un sadala to 7 lokos. Vismaz viens no lokiem ir ne lielāks par $\frac{360^\circ}{7}$, tātad mazāks par 60°. Tā galapunktus apzīmēsim ar A un B. Trijstūrī OAB malas AB pretleņķis ir mazāks par 60°, tātad AB ir mazāka par pārējām trijstūra malām, kuras ir 1 cm garas, jo to pretleņķi ir lielāki par 60°. Tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumu, ka visi nogriežņi ir lielāki vai vienādi par 1 cm. Apgalvojums pierādīts.

8.31. $\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 3x = 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin x(\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x) =$
$\sin^2 x(4\cos^2 x - 2\cos^2 x - \cos 2x) = \sin^2 x(2\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)) = \sin^2 x.$

8.32. Piramīdas ABCD malu, kura ir 2 cm gara uzskatīsim par AB. Neviens no nogriežņiem. kas iziet no punktiem A vai B nevar būt 8 cm garš, jo tad veidotos trijstūris ar malām 2, x, 8. No trijstūra nevienādības seko, ka 2 + x > 8, x > 6, bet tādu šķautņu piramīdai nav. Tātad CD = 8. Nogriežņu AB un CD galapunktus, kurus savieno 3 cm garais nogrieznis sauksim par A un C; t.i. AC = 3. Lai trijstūrim ACD izpildītos trijstūra nevienādība AC + AD > CD , nepieciešams, lai AD = 6. Nogrieznis BD nevar būt 4 cm garš, jo tad trijstūra ADB malu garumi būtu 2, 4 un 6, bet tas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Tātad BD = 5, un BC = 4. Trijstūra piramīdas malu garumi (tātad arī pati piramīda) viennozīmīgi noteikti. Tas nozīmē, ka abas piramīdas ar dotajiem malu garumiem ir vienādas.

8.33. Lemma. Ja $x \neq 0$, tad |x| > |sinx|. Pierādiet to, aplūkojot gadījumus x>0, x<0.
Sareizinot dotās vienādības, iegūsim

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = x \cdot y \cdot z. \qquad (*)$$

Ja $x \neq 0$, $y \neq 0$ un $z \neq 0$, tad no lemmas seko, ka

$$|\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z| < |x \cdot y \cdot z|,$$

un vienādība (*) neizpildās. Ja kāds no nezināmajiem (piemēram, x) vienāds ar 0, tad iegūstam: $x = 0$, $y = \sin x = \sin 0 = 0$, $z = \sin y = \sin 0 = 0$. Tas arī ir sistēmas vienīgais atrisinājums.

8.34. Uzdevuma nosacījumus apmierina šādi polinomi:

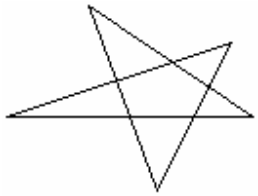
- $P(x) = x + a$, $a \in Z$;
- $P(x) = -x + a$, $a \in Z$.

8.35. Izvēlēsimies patvaļīgi vienu no iekrāsotajiem trijstūriem un ierakstīsim tajā skaitli 0. Tālāk katrā no iekrāsotajiem trijstūriem ierakstīsim skaitli m, kas norāda minimālo soļu skaitu, ejot no trijstūra ar numuru 0 uz šo trijstūri (no viena trijstūra var pāriet uz otru, ja tiem ir kopīga mala). Pieņemsim, ka lielākais ierakstītais numurs ir n. Tad izvēlēsimies vienu no trijstūriem ar numuru n - 1, kuram blakus atrodas 1 vai 2 (vairāk būt nevar) trijstūri ar numuriem n. Izmetīsim šos 2 vai 3 trijstūrus, izgriežot vienu rombu. Atlikusī iekrāsotā figūra ir sakarīga (pamatojiet to), un ar to atkārtojam iepriekšējo procedūru.

Katru reizi, izmetot ne vairāk kā 3 trijstūrus, tiek izgriezts viens rombs. Tātad kopā būs izgriezti vismaz 33 rombi.

8.36. $\sqrt{x-16} = 15 - \sqrt{x-1} \Rightarrow x - 16 = 225 - 30\sqrt{x-1} + x - 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 8 \Rightarrow x = 65$.
Pārbaude parāda, ka šī x vērtība der.

8.37. Vienu no iespējamiem uzdevuma atrisinājumiem skat. 8.11. zīmējumā.



8.11. zīm.

8.38. Vispirms pierādīsim, ka eksistē vismaz viens punkts a, kuram f(a) = 0. Pretējā gadījumā f(x) > 0 visiem x ∈ [0. 1] (gadījumu f(x) < 0 aplūko analoģiski). Taču tad $\int_0^1 f(x)dx > 0$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu.

Tagad pieņemsim, ka punkts a, kuram f(a) = 0 ir tikai viens. Tad f(x) > 0 visiem $x \in [0, a]$, un f(x) < 0 visiem $x \in [a, 1]$ (otru gadījumu aplūko analoģiski). Tas nozīmē, ka funkcija $(a - x)f(x)$ ir pozitīva visiem $x \in [0, a] \cup [a, 1]$. Tātad

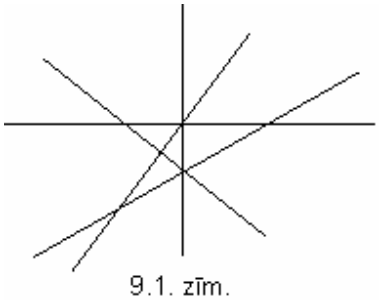
$\int_0^1 (a - x)f(x)dx > 0$; taču pēc dotā $\int_0^1 (a - x)f(x)dx = a\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx = 0$. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka punktu, kuros f(x)=0 ir vismaz divi.

8.39. Kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iekšpusē var izvēlēties trijstūra piramīdu ACB_1D_1, kuras tilpums ir $\frac{1}{3}$ un ortogonālā projekcija uz katru kuba skaldni sakrīt ar šo skaldni.
Daudzskaldņa M tilpumu samazināt nevar.

8.40. Direktors noregulē seifa slēdzeni tā, lai tā atveras, ja nosaukts sešciparu skaitlis abcde. Pirmajam vietniekam tiek paziņoti cipari abc, otrajam -- ade, trešajam -- bdf, ceturtajam -- cef. Pārbaudiet, ka uzdevuma prasības izpildītas.

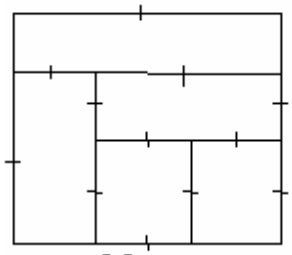
9. atklātā olimpiāde (1981./82. m.g.)

9.1. Jā, var. Viens no veidiem, kā to izdarīt, parādīts 9.1. zīmējumā.



9.1. zīm.

9.2. Dzīvoklis ar 5 telpām var būt tāds, kāds parādīts 9.2. zīmējumā.



9.2. zīm.

Pierādīsim, ka tāds dzīvoklis ar 4 telpām, par kādu runāts uzdevuma nosacījumos, nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka tāds dzīvoklis ir iespējams. Apzīmēsim tā telpas ar A, B, C, D. Tad no vienas istabas otrā var vest ne vairāk kā 6 durvis: A -- B, A -- C, A -- D, B -- C, B -- D, C -- D. Ne vairāk kā 4 durvis ved ārā no dzīvokļa. Tātad dzīvoklī ir ne vairāk kā 10 durvis, bet uzdevuma nosacījumā teikts, ka tajā ir 12 durvis. Iegūtā pretruna parāda, ka mūsu pieņēmums ir nepareizs.

9.3. Viens no iespējamiem veidiem, kā to izdarīt, ir šāds:

$$9-8=1$$
$$3-1=2$$
$$7-4=3$$
$$6-2=4$$
$$5-0=5$$

9.4. Izpildot norādītās operācijas nemainās krustiņu skaita sadalījums pa rindiņām. Pirmajā tabulā ir viena rindiņa ar 3 krustiņiem un trīs rindiņas ar 2 krustiņiem. Arī pēc patvaļīga skaita norādīto operāciju izpildes šī situācija nemainīsies, un otru tabulu iegūt nevarēs, jo tajā ir divas rindiņas ar trim krustiņiem un pa vienai ar diviem un vienu krustiņu.

9.5. Viegli redzēt, ka $10=3\cdot 2+4\cdot 1,\quad 11=3\cdot 1+4\cdot 2,\quad 12=3\cdot 4+4\cdot 0$.

Ja šādā veidā ir izteikts skaitlis $n=3x+4y$, tad arī skaitli n + 3 var izteikt prasītajā formā: $n+3=3(x+1)+4y$. Tā kā prasītajā veidā jau ir izteikti skaitļi 10, 11, 12, tad arī visus turpmākos skaitļus var izteikt prasītajā formā, jo 13 = 10 + 3, $14=11+3,\quad 15=12+3,\quad 16=13+3$, u.t.t.

9.6. Ievērosim, ka katra taisne, kas iet caur kvadrāta centru, dala tā laukumu uz pusēm. Tāpēc taisne, kas iet caur abu kvadrātu centriem, dala uz pusēm gan viena, gan otra kvadrāta laukumu.

9.7. Skaidrs, ka maisījumam būs vislielākā spirta koncentrācija, ja mēs izmantosim šķīdumus ar augstāko spirta koncentrāciju. Tā kā jāiegūst 22 litri maisījuma, tad ņemsim visus 8 litrus 75% šķīduma, visus 6 litrus 50% šķīduma un 8 litrus 25% šķīduma. Kopā šķīdumā būs $\frac{3}{4}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{4}\cdot 8=11$ litri tīrā spirta, tātad būs iegūts 50% spirta šķīdums. Augstāku spirta koncentrāciju 22 litros šķīduma iegūt nevar, un tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

9.8. Pieņemsim, ka spēlētājs A nav ne uzvarējis, ne zaudējis visās spēlēs. Pieņemsim, ka viņam ir divas uzvaras (gadījumu ar vienu uzvaru aplūko analoģiski), un viņa pārinieki šajās spēlēs bija B un C (skaidrs, ka burtu izvēlei nav nozīmes). Tādā gadījumā A un B uzvarēja C un D; A un C uzvarēja B un D; A un D zaudēja B un C. Kā redzam, D ir zaudējis visās spēlēs. Prasītais pierādīts.

9.9. Pieņemsim pretējo, ka zvaigznītes aizstātas ar cipariem tā, ka izpildās uzdevuma prasības:

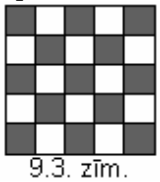
$$a-b=1$$
$$c-d=2$$
$$e-f=3$$
$$g-h=4$$
$$i-j=6$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$(a+c+e+g+i)-(b+d+f+h+j)=16 \quad \Leftrightarrow$$
$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j)-2(b+d+f+h+j)=16 \quad \Leftrightarrow$$
$$45-2(b+d+f+h+j)=16,$$

jo iekavās ierakstītie 10 skaitļi faktiski ir visi cipari no 0 līdz 9. Taču pēdējā vienādība nav iespējama, jo kreisajā pusē uzrakstīts nepāra skaitlis, bet labajā -- pāra skaitlis.

9.10. Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas tā, kā parādīts 9.3. zīmējumā.



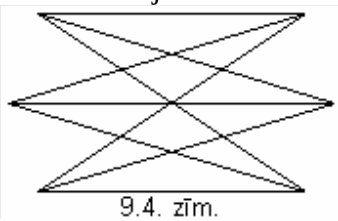
9.3. zīm.

Katrā melnajā rūtiņā ierakstīsim skaitli 100, bet katrā baltajā rūtiņā skaitli -101. Tad katrā kvadrātā ar izmēriem 2×2 skaitļu summa būs $2\cdot 100-2\cdot 101=-2<0$, bet visā kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būs $13\cdot 100-12\cdot 101=88>0$. Uzdevuma prasības izpildītas.

9.11. Lai izpildītos trijstūra malu nevienādības, trešās malas garumam ir jābūt lielākam par 6 un mazākam par 20. Šajā intervālā pirmskaitļi ir 7, 11, 13, 17, 19. Aprēķinot katram

no šiem skaitļiem visu malu summu, redzam, ka tā ir pirmskaitlis tikai, ja trešās malas garums ir 11 cm vai 17 cm.

9.12. To var izdarīt tā, kā parādīts 9.4. zīmējumā.



9.4. zīm.

9.13. Apzīmēsim doto skaitli ar x, bet pēc ciparu samainīšanas iegūto skaitli ar y. Pēc dotā $y = 3x$. Tātad y dalās ar 3; tas nozīmē, ka y ciparu summa dalās ar 3. Bet skaitļu x un y ciparu summas ir vienādas; tātad arī x ciparu summa un pats skaitlis dalās ar 3. Tagad no vienādības $y = 3x$ seko, ka y dalās ar 9; tātad arī y ciparu summa dalās ar 9, un skaitļa x ciparu summa un pats skaitlis dalās ar 9. Vēlreiz izmantojot vienādību $y = 3x$ secinām, ka y dalās ar 27, ko arī vajadzēja pierādīt.

9.14. Apzīmēsim zēnu un meiteņu skaitu pirmajā pārgājienā ar Z_1 un M_1, otrajā pārgājienā ar Z_2 un M_2, bet pie eglītes ar Z un M. Pēc dotā $M_1 = \frac{2}{3}Z_1$ un $M_2 = \frac{1}{3}Z_2$.
Tā kā pie eglītes bija tikai tās meitenes, kas piedalījās kaut vienā pārgājienā, tad $M \le M_1 + M_2$. Tā kā katrs zēns, kas piedalījās kaut vienā pārgājienā, bija pie eglītes, tad $Z_1 \le Z$ un $Z_2 \le Z$. Tāpēc

$$M \le M_1 + M_2 = \tfrac{2}{3}Z_1 + \tfrac{1}{3}Z_2 \le \tfrac{2}{3}Z + \tfrac{1}{3}Z = Z,$$

kas arī bija jāpierāda.
Zēnu un meiteņu skaits pie eglītes var būt vienāds, ja pirmajā pārgājienā piedalījās 3n zēni un 2n meitenes, bet otrajā tie paši 3n zēni un citas n meitenes.

9.15. a) Trīs aplūkojamo skaitļu reizinājums $(ab)(ac)(-ac) = -(abc)^2$ ir negatīvs skaitlis; tāpēc vismaz viens no reizinātājiem ir negatīvs.
b) Sešu aplūkojamo skaitļu reizinājums $-(abcdefghi)^2$ ir negatīvs skaitlis; tāpēc vismaz viens no reizinātājiem ir negatīvs.

9.16. Aplūkosim kubu ABCDEFGH (ABCD -- pamata plakne, E atrodas virs A). Var izvēlēties lielākais 13 taisnes, kas iet caur divām kuba virsotnēm un nav paralēlas savā starpā: AB, AD, AE, AF, BE, AH, DE, AC, BD, AG, DF, CE, BH. Pārbaudiet, ka starp šīm taisnēm nav paralēlu, un jebkura cita taisne, kas iet caur divām kuba virsotnēm, ir paralēla kādai no norādītajām.

9.17. Pieskaitot visām trim izteiksmēm skaitli 2, iegūsim

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Ja a + b + c = 0, tad izpildās viena no uzdevuma formulējumā minētajām iespējām. Ja a + b + c ≠ 0, tad, izdalot vienādības ar a + b + c, iegūsim $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, no kurienes seko, ka $a = b = c$. Uzdevums atrisināts.

9.18. Sakārtosim šos skaitļus augošā secībā $a < b < c < d < e < f < g < h$.
Pieņemsim pretējo, ka visas šo skaitļu attiecības ir ne mazākas par 3. Tad $a \geq 1;\ b \geq 3$, jo $b/a \geq 3$; c ≥ 9, jo $c/b \geq 3$; d ≥ 27; e ≥ 81; f ≥ 243; g ≥ 729; h ≥ 2187. Pēdējā nevienādība ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

9.19. Uzdevuma nosacījumus var pierakstīt šādi:
(1) $|b-1| < 1$,
(2) $|a+b-2| < 1$,
(3) $|2a+b-7| < 1$.
No pirmās nevienādības seko, ka $-1 < b-1$; no trešās $-1 < 2a+b-7$. Saskaitīsim šīs nevienādības. Iegūstam $-2 < 2a+2b-8$, jeb $1 < a+b-2$, bet tas ir pretrunā ar otro nevienādību. Tātad prasītā funkcija neeksistē.

9.20. Dots, ka $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ dalās ar 2. Tātad viens no skaitļiem m + n un $m-n$ ir pāra skaitlis, bet tādā gadījumā arī otrs ir pāra skaitlis, jo šo skaitļu paritātes ir vienādas, bet divu pāra skaitļu reizinājums dalās ar 4.

9.21. Daļas, kādās dotā taisne sadala kvadrātu kopējo daļu, ir centrāli simetriskas; tātad to laukumi ir vienādi.

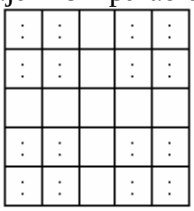
9.22. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka meitene M_n dejoja ar n + 4 zēniem. Tātad klasē ir n + 4 zēni. Iegūstam vienādību n + (n + 4) = 30; n = 13. Tātad klasē ir 13 meitenes un 17 zēni.

9.23. No trim leņķiem $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ vismaz divi ir plati, pretējā gadījumā tie nevarētu dot summa 360°. Tātad vismaz diviem no vienādsānu trijstūriem AOB, BOC, COA punkts O ir virsotnes leņķis. Pieņemsim, ka šie trijstūri ir AOB un BOC. Tad AO = BO = CO, t.i., O ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs.

9.24. Izvēlēsimies jebkuru atzīmēto rūtiņu (r_1, k_1) (rūtiņa atrodas rindiņā r_1 un kolonnā k_1) un iekrāsosim to sarkanā krāsā. Pēc tam šajā rindiņā atradīsim otru atzīmēto rūtiņu (r_1, k_2) un nokrāsosim to zilu. Kolonnā k_2 atradīsim otru atzīmēto rūtiņu (r_2, k_2) un nokrāsosim to sarkanu. Turpināsim šo procesu, kamēr nenonāksim kādā rindiņā vai kolonā, kuras rūtiņas jau bija iekrāsotas. Viegli redzēt, ka tā ir rindiņa r_1, jo pārējās rindiņās un kolonās procesa gaitā tiek iekrāsotas abas atzīmētās rūtiņas. Tātad pēdējā rūtiņa, ko mēs iekrāsosim būs (r_1, k_m), un mēs to iekrāsosim zilu.
Rezultātā tabulas rindiņās r_1, r_2, ... , r_m un kolonnās k_1, k_2, ... , k_m būs pareizi iekrāsotas visas atzīmētās rūtiņas. Izvēlēsimies tagad vēl neiekrāsotu atzīmēto rūtiņu un līdzīgā veidā aizkrāsosim nākošo ciklu. Tā turpināsim, kamēr būs nokrāsotas visas atzīmētās rūtiņas.

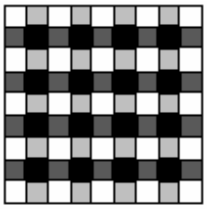
9.25. Atbilde: x = 2, y = 1.

9.26. Viens no iespējamajiem atrisinājumiem parādīts 9.5. zīmējumā.



9.5. zīm.

9.27. Sadalīsim visas rūtiņu lapas rūtiņas 4 grupās tā, kā parādīts 9.6. zīmējumā (vienas grupas rūtiņas nokrāsotas vienādi).



9.6. zīm.

No 25 iekrāsotajām rūtiņam vismaz 7 atradīsies vienā grupā (citādi to skaits nebūtu lielāks par 6×4 = 24). No zīmējuma redzams, ka vienas grupas rūtiņām nav kopīgu malu un virsotņu. Tātad varam izvēlēties šīs 7 virsotnes no vienas grupas, un uzdevuma nosacījumi būs izpildīti.

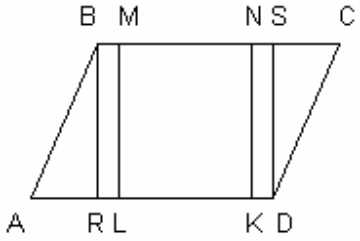
9.28. No regulāra 25-stūra virsotnēm var izvēlēties 5, kas veido regulāru piecstūri. Velkot vektorus uz šīm virsotnēm, iegūsim 5 vektorus, kuru summa ir nulles vektors. Mazāku vektoru skaitu izvēlēties nevar.

9.29. Nē, ne noteikti.

Aplūkosim virkni $x_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}+\cdots}_{n}$. Redzams, ka tā ir augoša, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, bet tai neeksistē galīga robeža.

9.30. Var izvēlēties, piemēram, šādus skaitļus $a_1 = 10^4$, $a_2 = 10^5$, ... , $a_n = 10^{n-3}$, ...
Tad visu skaitļu $P(a_k)$ ciparu summas būs vienādas ar $1+2+3+\cdots+1983$.

9.31. Pieņemsim, ka A ir romba ABCD šaurā leņķa virsotne. Romba malu apzīmēsim ar a. No punktiem B un D vilksim perpendikulus BR un DS pret malām AD un AC (skat. 9.7. zīm.).



9.7. zīm.

Tad ML > AB - AR = AD - AR > KL, un taisnstūris MNKL nevar būt kvadrāts.

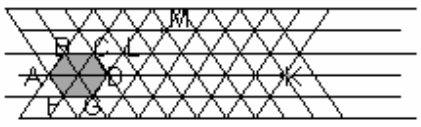
9.32. Abu punktu atrisinājums seko no šāda vispārīga apgalvojuma: ja a_1, a_2, ... , a_n ir pirmā kvadranta leņķi, kam izpildās sakarība $tga_1 \times tga_2 \times ... \times tga_n = 1$, tad $sina_1 \times sina_2 \times ... \times sina_n \le \frac{1}{\sqrt{2}^n}$, un vienādība izpildās tikai tad, kad $a_1 = a_2 = ... = a_n = p/4$. Tiešām, pēc dotā

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n = \sqrt{(\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n)^2} =$$
$$\sqrt{(\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n)(\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \cos\alpha_n)} =$$
$$\sqrt{\frac{1}{2^n}\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin 2\alpha_n} \le \frac{1}{\sqrt{2}^n},$$

pie tam vienādība izpildās tikai tad, kad $\sin 2a_k = 1$, tātad $a_k = p/4$.

9.33. Nē, ne noteikti. Varam izvēlēties jebkuru līniju, kas atrodas plaknē, perpendikulārā plakņu a un b šķēluma taisnei.

9.34. Izmantojot lineālu un doto regulāro sešstūri ABCDEF var uzzīmēt plaknē regulāru trijstūru režģi (skat. 9.8. zīm.). Tad, izmantojot kosinusu teorēmu var pierādīt, ka AK = 8, $AL = \sqrt{7}$, $AM = \sqrt{19}$.



9.8. zīm.

9.35. Apzīmēsim ar $N(\ge k)$ virkņu skaitu, kuru mazākais elements ir k. Tātad mums ir jāaprēķina summa $N(\ge n) + N(\ge n-1) + ... + N(\ge 1)$. Pamatojiet, ka $N(\ge n-i) = i + 1$. Tad pierādāmā vienādība kļūst acīmredzama.

9.36. Doto vienādību var pārveidot formā

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - b) = 0.$$

Tā kā šauriem leņķiem a un b vienādība cos(a - b) = 0 nav iespējama, tad izpildās vienādība cos(a + b) = 0. Šauriem leņķiem a un b tas iespējams tikai, ja a + b = 90°.

9.37. Pēc dotā n = 6m + 1, m -- vesels skaitlis. Tad n^2 - 1 = 12m(3m +1). Pierādāmais apgalvojums seko no tā, ka m un (3m + 1) ir dažādas paritātes skaitļi; tātad to reizinājums dalās ar 2.

9.38. Doto vienības kvadrātu sadalīsim joslās ar augstumiem $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$. Kvadrātus ar malu garumiem no $\frac{1}{2^k}$ līdz $\frac{1}{2^{k+1}-1}$ ievietosim joslā, kuras platums ir $\frac{1}{2^k}$. Jāpierāda, ka atbilstošajā joslā šie kvadrāti var novietoties.

9.39. Pieņemsim pretējo, ka šādi skaitļi eksistē. Tad, kāpinot doto nevienādību kvadrātā, iegūstam

$$n + 2\sqrt{n(n+1)} + n + 1 < m^2 < 4n + 2 .$$

No šejienes, ņemot vērā, ka $\sqrt{n(n+1)} > n$, seko nevienādības

$$4n + 1 < m^2 < 4n + 2 ,$$

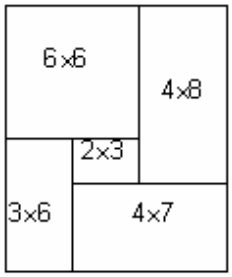
taču starp diviem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem 4n + 1 un 4n + 2 nevar atrasties vesels skaitlis m^2. Iegūtā pretruna pierāda uzdevuma apgalvojumu.

9.40. Apgalvojumu pierāda aplūkojot piramīdas izklājumu plaknē.

10. atklātā olimpiāde (1982./83. m.g.)

10.1. Var būt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 vai bezgalīgi daudz kopīgu punktu.
Šādus piemērus nav grūti uzkonstruēt. Jāpamato, ka nevar būt galīgs punktu skaits, kas ir lielāks par 6. Ja tā būtu, tad kādai no trijstūra malām būtu vismaz trīs kopīgi punkti ar kvadrāta kontūru. Taču tādā gadījumā kāda no kvadrāta malām ietu pa šo trijstūra malu, un kvadrāta kontūrai ar trijstūra kontūru būtu bezgalīgs skaits kopīgu punktu.

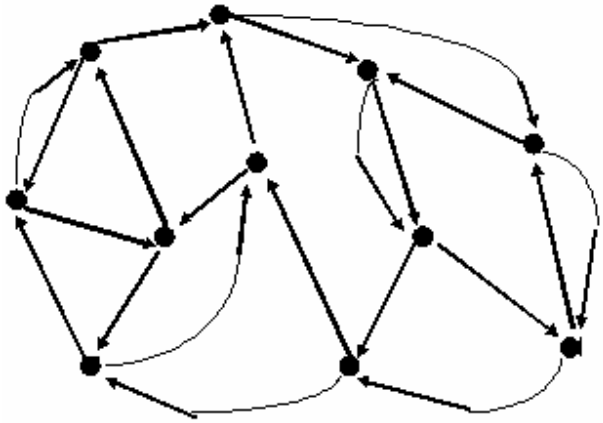
10.2. Var ņemt visus pāra skaitļus 2, 4, 6, ... , 20.
Ja izvēlēti 11 skaitļi, tad vismaz divi no tiem atradīsies blakus (citādi izvēlēto skaitļu skaits plus pa skaitlim katrā atstarpē pārsniegtu 20). Blakusstāvošu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Tiešām, ja d dala n un n+1, tad d dala arī šo skaitļu starpību - skaitli 1; tātad d ir 1.
10.3. Atrisinājums parādīts 10.1. zīmējumā.



10.1. zīm.

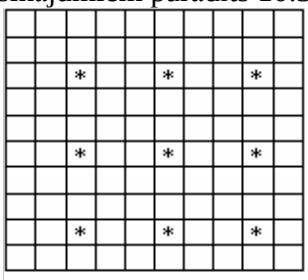
10.4. Meklējamais skaitlis ir 11113578.

10.5. Viens no atrisinājumiem parādīts 10.2. zīmējumā.



10.2. zīm.

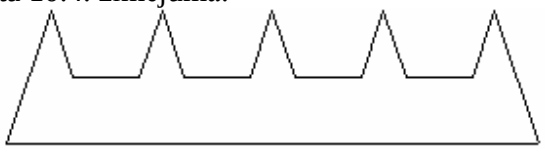
10.6. Viens no iespējamiem atrisinājumiem parādīts 10.3. zīmējumā.



10.3. zīm.

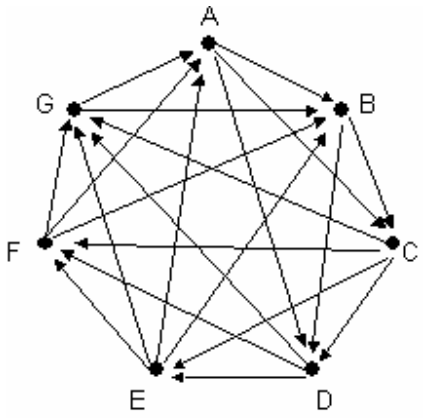
10.7. Tāds skaitlis neeksistē, jo naturālu skaitļu reizinājums no 1 līdz 799 beidzas ar 197 nullēm, bet naturālu skaitļu reizinājums no 1 līdz 800 beidzas ar 199 nullēm.

10.8. Tāda istaba attēlota 10.4. zīmējumā.



10.4. zīm.

10.9. Kā to izdarīt, parādīts 10.5. zīmējumā.



10.5. zīm.

10.10. Izvēlēsimies cilvēku A ar vislielāko naudas daudzumu (ja tādi ir vairāki, tad jebkuru no tiem). Apzīmēsim viņa naudas daudzumu ar x, bet viņa kaimiņu naudas daudzumu ar y un z. Tad $y \le x$, $z \le x$, un pēc dotā $2x = y + z$. Saskaitot nevienādības, iegūstam, ka $y + z \le 2x$, un vienādība izpildās tikai, ja $y = x$ un $z = x$. Tātad A kaimiņiem B un C ir tikpat daudz naudas kā A. Līdzīgi arī B un C kaimiņiem ir tikpat daudz naudas kā A. Turpinot šo spriedumu, redzam, ka visiem cilvēkiem ir vienāds naudas daudzums, tātad katram tieši 1 rublis.

10.11. Skaitļa n^2 pēdējais ir 6, ja n pēdējais cipars ir 4 vai 6. Tā kā skaitļa n^2 pēdējie divi cipari ir atkarīgi tikai no skaitļa n pēdējiem diviem cipariem, tad jāaprēķina kādi ir divi pēdējie cipari šādu skaitļu kvadrātiem: 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94, 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96.
Pārbaudot, redzam, ka tie var būt šādi: 16, 36, 56, 76, 96. Tātad, ja naturāla skaitļa kvadrāta pēdējais cipars ir 6, tad tā priekšpēdējais cipars var būt 1, 3, 5, 7 vai 9.

10.12. Doto divciparu skaitli uzrakstīsim formā 10a + b, kur a un b ir nenulles cipari. Tad izpildās nevienādība

$$\frac{10a+b}{ab} = \frac{10}{b} + \frac{1}{b} \ge \frac{10}{9} + \frac{1}{9} = \frac{11}{9},$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

10.13. Jebkuru taisnstūri var sadalīt divos un piecos neizliektos piecstūros tā, kā parādīts 10.6. zīmējumā.

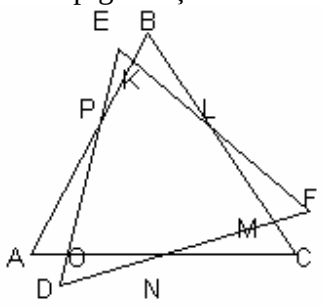
10.6. zīm.

Tātad

- kvadrātu var sadalīt 5 neizliektos piecstūros;

- kvadrātu var sadalīt 6 neizliektos piecstūros, sadalot to 3 taisnstūros un katru no tiem divos piecstūros;
- kvadrātu var sadalīt 1983 neizliektos piecstūros, sadalot to 990 taisnstūros (parādiet kā!); 989 no tiem sadala divos piecstūros un vienu piecos piecstūros.

10.14. Doto trijstūru ABC un EFD kopīgās daļas kontūra ir KLMNOP (skat. 10.7. zīm.)



10.7. zīm.

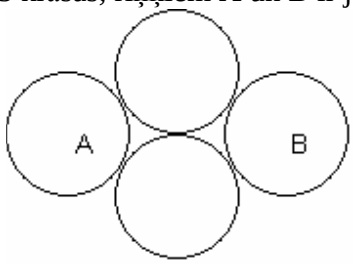
No trijstūru nevienādības seko, ka $KL < KB + BL$, $MN < MC + CN$, $OP < OA + AP$. Tātad

$$KL + LM + MN + NO + OP + PK < KB + BL + LM + MC + CN + NO + OA + AP + PK = AB + BC + CA = 3,$$

kas arī bija jāpierāda.

Kontūra garums var būt lielāks par 2,9 m; piemēram, ja trijstūri EFD iegūst no trijstūra ABC, pagriežot to ap centru par ‘‘ļoti’’ mazu leņķi.

10.15. Nē, ne noteikti. Pretpiemērā izmantojam to, ka četru riņķu konfigurācijā (skat. 10.8. zīm), ja izmantotas tikai 3 krāsas, riņķiem A un B ir jābūt nokrāsotiem vienā krāsā.



10.8. zīm.

No šādiem četriniekiem izveidojam ķēdi, kuras sākuma un beigu riņķi savā starpā saskaras.

10.16. Doto izteiksmi pārveidojam

$$\frac{3n+6}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{6n+3+9}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{9}{2n+1}\right).$$

Tātad 2n + 1 ir skaitļa 9 dalītājs, t.i. 2n +1 var pieņemt vērtības -9, -3, -1, 1, 3, 9. Pārbaude parāda, ka visas atbilstošās n vērtības -5, -2, -1, 0, 1, 4 ir derīgas.

10.17. Trīs riņķa līnijas plakni var sadalīt 4, 5, 6, 7 vai 8 daļās.

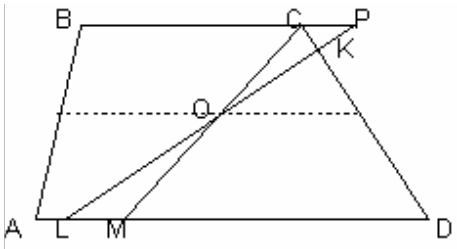
10.18. Ievērosim, ka

$$|x-1|+|x-11|=|x-1|+|11-x|\ge|(x-1)+(11-x)|=10,$$
$$|x-3|+|x-7|=|x-3|+|7-x|\ge|(x-3)+(7-x)|=4.$$

Tātad dotās izteiksmes vērtība jebkurai x vērtībai ir ne mazāka par 14. Ja x = 5, tad izteiksmes vērtība ir 14; tā arī ir izteiksmes mazākā iespējamā vērtība.

10.19. Novilksim taisni CO līdz tās krustpunktam M ar malu AD (skat. 10.9. zīm.). Tad trapeces BCMA laukums ir vienāds ar trijstūra MCD laukumu, jo tiem ir vienādi augstumi un viduslīnijas. Tā kā trijstūri OML un OCP ir vienādi, tad $S_{OLM} > S_{OCK}$; no šejienes seko, ka

$$S_{LKD} = S_{MCD} + S_{OML} - S_{OCK} > S_{MCD} = S_{BCMA} > S_{ABCKL}.$$



10.9. zīm.

10.20. Sadalīsim kvadrāta rūtiņas 4 grupās A, B, C, D. Katrā no šīm grupām, izpildot norādītos pārveidojumus, nemainās melno rūtiņu skaita paritāte. Tā kā sākumā katrā grupā ir tieši viena melna rūtiņa, tad arī beigās katrā grupā būs vismaz viena melna rūtiņa (precīzāk viena vai trīs), un kopā to būs ne mazāk kā 4.

A	B	A	B
A	B	A	B
C	D	C	D
C	D	C	D

10.10. zīm.

10.21. Tādu skaitļu pavisam ir $\left[\frac{2000}{7}\right]-\left[\frac{1000}{7}\right]=285-142=143$.

10.22. Tā kā septiņstūra ABCDEFG visi leņķi ir vienādi, tad tie visi savelk vienādus lokus. Arī šo loku papildinājumi līdz pilnai riņķa līnijai ir vienādi. Tātad izpildās vienādības

$$\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{BC}=\overset{\smile}{BC}+\overset{\smile}{CD}=\overset{\smile}{CD}+\overset{\smile}{DE}=\overset{\smile}{DE}+\overset{\smile}{EF}=\overset{\smile}{EF}+\overset{\smile}{FG}=\overset{\smile}{FG}+\overset{\smile}{GA}=\overset{\smile}{GA}+\overset{\smile}{AB}.$$

No šīm vienādībām seko, ka $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{CD}=\overset{\smile}{EF}=\overset{\smile}{GA}=\overset{\smile}{BC}=\overset{\smile}{DE}=\overset{\smile}{FG}$. Vienādas ir arī hordas, kas savelk šos lokus; tātad vienādas ir visas septiņstūra malas, un septiņstūris ir regulārs.

10.23. Ievērosim, ka $S = \frac{1}{2}ah_a \le \frac{1}{2}ab \le \frac{1}{2}b^2$. Tātad patvaļīgam trijstūrim $\frac{S}{b^2} \le \frac{1}{2}$. Vienādība izpildās taisnleņķa trijstūrim, kura katetes ir vienādas. Tas nozīmē, ka prasītās izteiksmes lielākā iespējamā vērtība ir $\frac{1}{2}$.

10.24. Visus prasītos saskaitāmos (un tikai tos) iegūstam, atverot iekavas izteiksmē

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\tfrac{1}{10}\right)-1.$$

Pārveidojot šo izteiksmi, iegūstam atbildi $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{10}-1=11-1=10$.

10.25. Uzdevumā izmanto izteiksmes $4a^4 + b^4$ sadalījumu reizinātājos, ko iegūst šādi:

$$4a^4+b^4 = 4a^4+4a^2b^2+b^4-4a^2b^2 = \left(2a^2+b^2\right)^2-(2ab)^2 =$$

$$\left(2a^2+2ab+b^2\right)\left(2a^2-2ab+b^2\right).$$

Tātad $2^{1982}+1=4\cdot\left(2^{495}\right)^4+1^4=\left(2^{991}+2^{496}+1\right)\left(2^{991}-2^{496}+1\right)$. Viegli redzēt, ka abi reizinātāji ir lielāki par 1000.

10.26. Nē, nevar. Dotais šķēlums ir centrāli simetrisks daudzstūris, bet šādam daudzstūrim malu skaits ir pāra skaitlis (katrai malai atbilst otra -- simetriskā).

10.27. Sadalīsim dotos skaitļus 25 pāros. Skaidrs, ka vismaz vienā pārī skaitļu summa nav negatīva, jo pretējā gadījumā, saskaitot visas šīs summas, mēs iegūtu, ka visu doto skaitļu summa ir negatīva, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
Lai pierādītu uzdevuma apgalvojumu, jāizveido 49 tādi skaitļu sadalījumi pa pāriem, kuros neviens pāris neatkārtojas. Tad no katra šāda sadalījuma var ņemt pa pārim un iegūt prasītos 49 pārus.
Vairāk nekā 49 pārus, kuros abu skaitļu summa nebūtu negatīva, var arī neizdoties atrast. Piemēram, ja ņemam vienu skaitli 49 un pārējos -1, tad ir tikai 49 iespējas izvēlēties pāri ar nenegatīvu summu.

10.28. No dotajām vienādībām seko, ka $\frac{AO}{BO}=\frac{OB_1}{OA_1}$; līdz ar to trijstūri BOA_1 un AOB_1 ir līdzīgi. Tātad $\angle OAB_1 = \angle OBA_1$ un $\angle OB_1A = \angle OA_1B$. Līdzīgi pierāda vienādības $\angle C_1AO = \angle A_1CO$, $\angle OC_1A = \angle OA_1C$, $\angle C_1BO = \angle B_1CO$, $\angle OC_1B = \angle OB_1C$. Tā kā $\angle BC_1O + \angle OC_1A = 180°$ un $\angle CB_1O + OB_1A = 180°$, bet $\angle CB_1O = \angle BC_1O$, tad vienādi arī otri saskaitāmie: $\angle OC_1A = \angle OB_1A$. Šiem leņķiem attiecīgi vienādi ir leņķi $\angle CA_1O$ un $\angle BA_1O$, kuri summā dod 180°, un tādēļ šie leņķi ir taisni. Tātad nogriežņi BB_1 un CC_1 ir augstumi (protams arī nogrieznis AA_1 ir augstums).

10.29. Apgalvojumu pierāda ar indukciju pēc vektoru skaita.

10.30. Ja izvēlamies $a_1 = 2^n - 2$, tad dotās virknes pirmie n locekļi ir pāra skaitļi, bet a_{n+1} ir nepāra skaitlis.

10.31. Tā kā funkcija y = sin x intervālā [p/2, p] ir dilstoša un pozitīva, tad $\sin 2 > \sin 3 > 0$. No šejienes seko nevienādība

$$\frac{\sin 2}{2} > \frac{\sin 3}{2} > \frac{\sin 3}{3}.$$

10.32. Aplūkosim trīs gadījumus:

- n = 3k; tad $\left[n^2\right] = 3k^2$ ir pirmskaitlis tikai, ja k = 1, t.i. n = 3.
- n = 3k +1; tad $\left[n^2\right] = \left[\frac{9k^2 + 6k + 1}{3}\right] = 3k^2 + 2k = k(3k + 2)$ var būt pirmskaitlis tikai, ja k = 1; pārbaudām, ka šī n vērtība 4 ir derīga.

n = 3k - 1; tad $\left[n^2\right] = \left[\frac{9k^2 - 6k + 1}{3}\right] = 3k^2 - 2k = k(3k - 2)$ var būt pirmskaitlis tikai, ja k = 1, taču arī šī vērtība neder, jo tad $[n^2] = 1$ nav pirmskaitlis.
Atbilde: $n \in \{3, 4\}$.

10.33. Trijstūra leņķi ir $\frac{6}{17}\pi, \frac{6}{17}\pi, \frac{5}{17}\pi$. Ja izvēlamies citādu trijstūri, tad palielinot mazāko leņķī un pamazinot lielāko par $\frac{1}{17}\pi$, mēs iegūsim trijstūri ar lielāku laukumu.

10.34. Uz kuba trīs skaldnēm novilksim diagonāles, kas veido regulāru trijstūri, un uz šīm diagonālēm uz kuba ārpusi konstruēsim kvadrātus (viena mala ir izvēlētā diagonāle), kuru plaknes ir perpendikulāras atbilstošajām kuba skaldnēm.
Konstruēto kvadrātu pārējās trīs malas veido 9 posmu lauztu līniju, kurai visi posmi ir vienāda garuma un blakusstāvošie posmi ir perpendikulāri.

10.35. Apzīmēsim $a_i = \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^3}$. Pārveidojot iegūstam, ka $a_i = \frac{i^3}{(11-i)^3 + i^3}$. No šejienes seko, ka $a_i + a_{11-i} = 1$. Apvienojot pa pāriem dotās summas locekļus, redzam, ka dotā summa ir vienāda ar 6.

10.36. Doto izteiksmi var pārveidot formā $1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$. Tā kā funkcijas $y = \sin^2 2x$ vērtību kopa ir nogrieznis [0, 1], tad mums ir jāatrod kādas vērtības pieņem funkcija $y = 1 - t + \frac{1}{8}t^2$ nogrieznī [0, 1]. Izpētot funkcijas grafiku, secinām, ka vērtību kopa ir $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$.

10.37. Dotajā trijstūra piramīdā ABCD aplūkojam šķautņu AB un CD viduspunktus E un F. EF ir vienādsānu trijstūra DEC mediāna, tātad arī augstums. Līdzīgi pierāda, ka AB perpendikulārs EF.
Pagriezīsim piramīdu ABCD ap nogriezni EF par 180°. Tad mainīsies vietām virsotnes A un B, kā arī C un D. Tātad AD = BC un AC = BD. Līdzīgi pierāda, ka AB = CD. No šejienes seko, ka piramīdas visas skaldnes ir vienādas.

10.38. Vispirms atzīmēsim, ka norādītās garumu summas ir vienādas, ja O ir regulārā daudzstūra centrs. Pēc tam pierāda, ka šo summu starpība nemainās, ja punktu O pārvieto perpendikulāri kādai no daudzstūra malām (tas seko no simetrijas). Uzdevuma apgalvojums tagad seko no tā, ka ar šādiem pārvietojumiem punktu O var pārvietot uz jebkuru vietu.

10.39. Ja $x \geq 6$, tad x! dalās ar 9; tātad x! + 15 dalās ar 3, bet nedalās ar 9, un nevar būt vesela skaitļa kvadrāts. Pārbaudot pārējās x vērtības, atrodam atrisinājumu x = 1, y = 4.

10.40. Nē, nevar. Visu bezgalīgo plakni sadalīsim regulāros trijstūros, kurus iekrāsosim divās krāsās, kā parādīts 10.11. zīmējumā. Ja piramīda sākumā stāv uz melnā trijstūra, tad pēc viena gājiena tā stāvēs uz baltā trijstūra, pēc diviem -- uz melnā trijstūra, ... , pēc 1983 gājieniem tā stāvēs uz baltā trijstūra; tātad neatradīsies savā pozīcijā.

10.11. zīm.

11. atklātā olimpiāde (1983./84. m.g.)

11.1 Ar x apzīmēsim cik dienas abi zēni lasīja grāmatu. Iegūstam vienādību

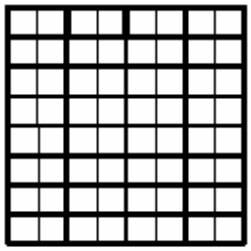
$$25\,x = 50 + 15\,x\,,$$

no kuras seko, ka x = 5. Tātad grāmatā ir 125 lappuses.

11.2. Skaitīsim kvadrātus, kuru malu garumi ir 1; tādu kvadrātu (ar atzīmētajām rūtiņām) ir 9. Kvadrātu ar malu garumu 2 ir 7. Kvadrātu ar malu garumu 3 ir 5. Kvadrātu ar malu garumu 4 ir 1. Citu kvadrātu nav. Tātad kopā ir 22 kvadrāti, kuru virsotnes ir atzīmētas.

11.3. Tādi 6 skaitļi eksistē. Piemēram, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002.
Tādi 7 skaitļi neeksistē. Tiešām, no 7 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem vismaz 4 atradīsies vienā desmitniekā (t.i. mainīsies tikai skaitļu pēdējais cipars). Šo 4 skaitļu ciparu summas būs 4 sekojoši naturāli skaitļi; tātad viena no šīm ciparu summām dalīsies ar 4.

11.4. Visu kvadrātu pirmais spēlētājs sadala lauciņos pa divām blakusstāvošām rūtiņām kā parādīts 11.1. zīmējumā.



11.1. zīm.

Katrā savā gājienā pirmais spēlētājs iebīda figūru iezīmētā lauciņa otrā rūtiņā; otrajam spēlētājam vienmēr jāieiet jaunā lauciņā, un pienāks brīdis, kad viņš to vairs nevarēs izdarīt. Pirmais spēlētājs savu gājienu var izdarīt vienmēr, jo lauciņa otra rūtiņa nevar būt aizņemta.

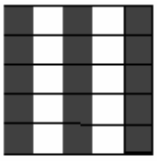
11.5. To var izdarīt 4 veidos. Viens no veidiem ir šāds: 1 - A, 2 - C, 3 - J, 4 - D, 5 - L, 6 - E, 7 - B, 8 - G, 9 - H, 10 - F, 11 - I, 12 - K.

11.6. Grāmatnīcā B bija x grāmatu; palika 0,9x grāmatu.
Grāmatnīcā A bija 1,1x grāmatu; palika 0,89 × 1,1x = 0,979x grāmatu.
Tātad grāmatnīcā A palika vairāk grāmatu.

11.7. Konstruēsim nogriežņa AB viduspunktu M; tā koordinātes ir (-1, -2). Konstruēsim nogriežņa MB viduspunktu O; tā koordinātes ir (0, 0). Caur punktu O vilksim taisni paralēli nogrieznim AM; tā ir koordinātu ass Oy.

11.8. Šajā procesā nemainās visu uzrakstīto skaitļu reizinājums. Sākumā tas ir vienāds ar -1, tātad arī beigās tas būs -1. Tātad pēdējie divi skaitļi būs 1 un -1.

11.9. Var iekrāsot 15 rūtiņas tā kā parādīts 11.2. zīmējumā.

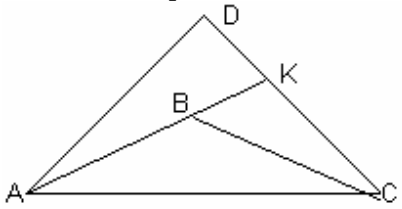


11.2. zīm.

11.10. Uz katra no lokiem ierakstiet atšķirīgu pirmskaitli, bet katrā aplītī to pirmskaitļu reizinājumu, kādi loki ienāk šajā aplītī. Tad visi uzdevuma nosacījumi izpildīsies.

11.11. Ja k > 3 vai k < -5, tad dotais skaitlis nav pirmskaitlis, jo tas sadalās divos reizinātājos |k - 2| un |k + 4|, kas abi ir lielāki par 1. Pārbaudot pārējās k vērtības, atrodam, ka der tikai k vērtības - 5 un 3.

11.12. Turpināsim taisni AB līdz tās krustpunktam K ar malu CD (skat. 11.3. zīm.).



11.3. zīm.

Tad $\angle ABC = \angle BKC + \angle KCB > \angle BKC = \angle ADK + \angle DAK > \angle ADK$, kas arī bija jāpierāda. Mēs izmantojām to, ka trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar pārējo divu iekšējo leņķu summu.

11.13. Skaitļus pierakstīsim formā 2^a. Tad automāts A skaitli a pārveido par 3a, bet automāts B pārveido a par a - 3. Sākumā dots skaitlis 1; to jāpārveido par skaitli 1983 pirmajā gadījumā, un par 1984 otrajā gadījumā.
Skaitli 1983 var iegūt. No sākuma, izmantojot automātu A, iegūsim skaitli 3^n , kas ir lielāks par 1983. Pēc tam, izmantojot automātu B, iegūsim visus skaitļus, kas dalās ar 3 un ir mazāki par 3^n; tajā skaitā arī skaitli 1983.
Skaitli 1984 nevar iegūt. Atzīmēsim, ka, ja kaut vienu reizi tiek izmantots automāts A, tad mēs iegūstam skaitli, kas dalās ar 3, un visi turpmākie skaitļi arī dalās ar 3. Tā kā 1984 ar 3 nedalās, tad, lai iegūtu skaitli 1984, automātu A nedrīkst izmantot. Taču, izmantojot automātu B, skaitlis tikai samazinās, un rezultātā no skaitļa 1 nevar iegūt skaitli 1984.

11.14. Aplūkosim vienu no bērniem A. Tā kā atlikuši ir 11 bērni, tad vairāk kā 11 dienas bērns A nevarēs atrast sev pārī atšķirīgus bērnus. Tātad iespējamais dienu skaits nepārsniedz 11. Tabulā (11.4 zīm.) parādīts, kā sadalīt pa pāriem bērnus 11 dienu laikā. Tabulas rūtiņā ierakstītais numurs i norāda, ka i-tajā dienā bērni no atbilstošās kolonas un rindiņas būs vienā pārī; piemēram, 2. un 3. bērns vienā pārī būs 8. dienā.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	+	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	11
2	0	+	8	7	6	5	4	3	2	1	11	9
3	9	8	+	6	5	4	3	2	1	11	10	7
4	8	7	6	+	4	3	2	1	11	10	9	5
5	7	6	5	4	+	2	1	11	10	9	8	3
6	6	5	4	3	2	+	11	10	9	8	7	1
7	5	4	3	2	1	11	+	9	8	7	6	10
8	4	3	2	1	11	10	9	+	7	6	5	8
9	3	2	1	11	10	9	8	7	+	5	4	6
10	2	1	11	10	9	8	7	6	5	+	3	4
11	1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	+	2
12	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	+

11.4. zīm.

11.15. Izvēlēsimies taisni tā, ka nekādi no dotajiem punktiem neatrodas uz šai taisnei paralēlas taisnes. Šo taisni novietosim tā, ka visi dotie punkti atrodas vienā pusē no šīs taisnes; un sāksim to bīdīt punktu virzienā tā, ka tās virziens nemainās. Tiklīdz taisne virzoties atdalīs no visiem dotajiem punktiem 4 punktus, mēs no šiem punktiem izveidosim četrstūri un turpināsim bīdīt taisni. Tiklīdz taisne atdalīs nākošos 4 punktus, mēs no šiem punktiem izveidosim jaunu četrstūri, u.t.t. Rezultātā visi punkti būs sadalīti pa četriniekiem, kas veido nešķeļošus četrstūrus.

11.16. Ja n ir nepāra skaitlis, tad $n^2 + 9$ ir pāra skaitlis; tātad nav pirmskaitlis, jo $n^2 + 9 > 2$. Atliek vienīgā iespēja n = 2; šajā gadījumā arī $n^2 + 9 = 13$ ir pirmskaitlis.

11.17. Atbilde: x = 1.

11.18. Sakārtosim šos nogriežņus nedilstošā secībā:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6 \le a_7 \le a_8 .$$

Pieņemsim pretējo, ka nekādi trīs no šiem nogriežņiem neveido trijstūra malas. Tad $a_{k+2} > a_{k+1} + a_k$. Tātad $a_1 \ge 1$, $a_2 \ge 1$, $a_3 \ge 2$, $a_4 \ge 3$, $a_5 \ge 5$, $a_6 \ge 8$, $a_7 \ge 13$, $a_8 \ge 21$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tas nozīmē, ka vienmēr var izvēlēties prasītos trīs nogriežņus.

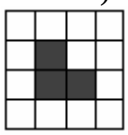
11.19. No katras 12-stūra malas uz tai pretējo ved ceļš no paralelogramiem. Arī perpendikulārā virzienā ir šāds ceļš. To krustpunktā atradīsies taisnstūris. Izvēloties vēl divus virzienus, atradīsim arī abus pārējos taisnstūrus.

11.20. Sadalot dotās 4 monētas 2 pāros noskaidrojam, ka a < b un c < d. Tālāk salīdzinām a ar c. Tā kā abi gadījumi ir līdzvērtīgi, uzskatīsim, ka a < c. Tātad $a < c < d$ un $a < b$. Atliek atrast monētas b vietu rindā a, c, d, ko var atrast ar atlikušajām divām svēršanām, salīdzinot b ar c un b ar d.

11.21. Apzīmējam x + y = a + b = p un xy = ab =q. Saskaņā ar Vjeta teorēmu (x, y) un (a, b) ir kvadrātvienādojuma t^2 - pt + q sakņu pāri; no šejienes seko uzdevuma apgalvojums.

11.22. Apskatīsim kvadrātu, kas sastāv no 2×2 rūtiņām. Ja tajā iekrāsota viena rūtiņa, tad atlikušās veido stūrīti.

Apskatīsim kvadrātu no 4×4 rūtiņam, kurā iekrāsota viena rūtiņa. Sadalīsim kvadrātu četros 2×2 rūtiņu kvadrātos; melnā rūtiņa atrodas vienā no tiem. Varam pieņemt, ka tā atrodas augšējā labajā kvadrātā (skat. 11.5. zīm.).



11.5. zīm.

Izgriežot vienu stūrīti, kā redzams zīmējumā, katra kvadrāta 2×2 atlikušās rūtiņas veido stūrīti. Esam pierādījuši, ka, ja no kvadrāta 4×4 izmet vienu rūtiņu, tad atlikušās var noklāt ar stūrīšiem. Līdzīgi pierāda tādu pašu apgalvojumu par kvadrātu 8×8, sadalot to četros kvadrātos 4×4, un par kvadrātu 16×16.

11.23. No trijstūra nevienādības seko, ka AB + BC + CD > AC + CD > AD. Līdzīgi pierāda, ka AF + FE + ED > AD; tātad perimetrs P > 2 AD. Tāpat pierāda nevienādības P > 2 BE un P > 2 CF. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $3P > 2(AD + BE + CF)$, no kurienes seko prasītais.

11.24. Nē, tā nevar būt. Ja tā būtu, tad rezultātā visu skaitļu summa būtu palielinājusies par $1984 \cdot 12$. Katru reizi summai tika pieskaitīts skaitlis $1 + 2 + \ldots 12 = 78$, tātad pieskaitīšana būtu notikusi $\frac{1984 \cdot 12}{78}$, bet šis skaitlis nav vesels skaitlis, un tā ir pretruna.

11.25. Ārējais daudzstūris sadalās četrstūros, viens no kuriem OMAN ir attēlots 11.6. zīmējumā. Tā kā četrstūra laukums nepārsniedz pusi no diagonāļu reizinājuma, tad $S_{OMAN} \le \frac{1}{2} r \cdot MN$. Saskaitot šīs nevienādības visiem sadalījuma četrstūriem, iegūstam $S \le \frac{1}{2} r \cdot P$, jeb $P \ge \frac{2S}{r}$, ko arī vajadzēja pierādīt (P ir iekšējā daudzstūra perimetrs).

11.26. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}((2a_n + b_n) - (a_n + b_n)) = 0 - 0 = 0;$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}((a_n + b_n) - a_n) = 0 - 0 = 0.$

11.27 a) Nē. Apskatīsim regulāru trijstūri ar malas garumu 0,9 cm. Tā ortogonālā projekcija uz katras taisnes ir mazāka par 1; tomēr mazākais riņķis, kurš ietver šo figūru, ir trijstūrim apvilktais riņķis ar diametru $0{,}9 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} > 1\text{cm}$.

b) Jā. Projicējot šo figūru uz divām savstarpēji perpendikulārām taisnēm, redzam, ka figūru var ievietot kvadrātā ar malu 1 cm. Šādu kvadrātu savukārt var ievietot riņķī ar diametru $\sqrt{2} < 1{,}5\text{ cm}$.

11.28. Apzīmēsim doto trīsciparu skaitli ar $\overline{abc} = x$. Mums ir jāpēta izteiksme.

$$x - (a^3 + b^3 + c^3) = (100a - a^3) + (10b - b^3) + (c - c^3).$$

Pārbaude parāda, ka $100a - a^3$ vislielāko vērtību pieņem, ja a = 6; $10b - b^3$ vislielāko vērtību pieņem, ja b =2; $c - c^3$ vislielāko vērtību pieņem, ja c = 0. Tātad starpības vislielākā vērtība tiek sasniegta skaitlim 620, un tā ir 396.

Pierādīsim, ka šī starpība vienmēr dalās ar 3. Tiešām

$$\overline{abc} - (a^3 + b^3 + c^3) \equiv (a - a^3) + (b - b^3) + (c - c^3) \equiv 0 \pmod 3.$$

Tātad mazākā pozitīvā vērtība nav mazāka par 3. Vērtība 3 ir iespējama, piemēram, skaitlim 437.

11.29. Pirmkārt, ievērojam, ka, bīdot parabolu x ass virzienā, nemainās aplūkojamo intervālu garumu summa, tāpēc varam uzskatīt, ka tiek aplūkota nevienādība

$$\left|x^2 - c\right| \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad c - 2 \le x^2 \le c + 2.$$

Atsevišķi jāaplūko gadījumi c < -2, $-2 \le c \le 2$ un $2 < c$.

- c < - 2; atrisinājumu nav;
- $-2 \le c \le 2$; $x \in \left[-\sqrt{c+2}, -\sqrt{c+2}\right]$; maksimālais nogriežņa garums ir 4, ja c=2.
- $2 < c$; $x \in \left[-\sqrt{c+2}, -\sqrt{c-2}\right] \cup \left[\sqrt{c-2}, \sqrt{c+2}\right]$. Nogriežņu garumu summa ir $2\left(\sqrt{c+2} - \sqrt{c-2}\right)$; tā nepārsniedz 4, jo

$$2\left(\sqrt{c+2} - \sqrt{c-2}\right) = \frac{8}{\sqrt{c+2} + \sqrt{c-2}} \le \frac{8}{\sqrt{2+2} + \sqrt{2-2}} = 4.$$

11.30. To var izdarīt ar 29 gājieniem: Jānis var pakāpeniski mainīt 1. sējumu ar 30., 29., 28., ..., 3., 2. sējumu.

11.31. Jā, var. Apskatām, piemēram, trijplakņu kaktu kuba stūrī: abas apskatāmās summas ir 270°.

11.32. Ievērosim, ka 6n + 3 = 3(2n+1). Šī izteiksme būs kvadrāts, ja 2n + 1 būs trīskāršots nepāra skaitļa kvadrāts; t.i., $2n+1 = 3(2k+1)^2$, jeb $n = 6k^2 + 6k + 1$, $k \in N$.

11.33. 1) Skaitli 17 var iegūt šādi:

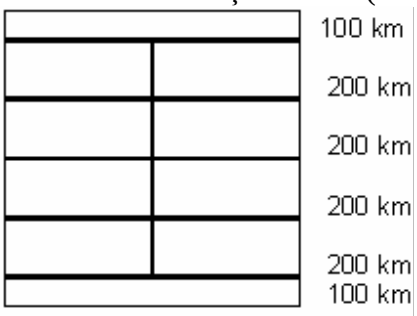
$$1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{[\sqrt{x}]} 2 \xrightarrow{\times 4} 8 \xrightarrow{\times 4} 32 \xrightarrow{[\sqrt{x}]} 5 \xrightarrow{\times 4} 20 \xrightarrow{\times 4} 80 \xrightarrow{\times 4} 320 \xrightarrow{[\sqrt{x}]} 17.$$

2) Ja $a^{2^k} \le x < (a+1)^{2^k}$, tad, pielietojot skaitlim x otro operāciju k reizes, iegūsim skaitli a. Tātad mums pietiek pierādīt, ka katram naturālam a eksistē tādi naturāli skaitļi n un k, kuriem izpildās nevienādības

$$a^{2^k} \le 4^n < (a+1)^{2^k} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k \cdot \log_4 a \le n < 2^k \cdot \log_4 (a+1).$$

Izvēlēsimies tik lielu k, lai $2^k \cdot \log_4 (a+1) - 2^k \cdot \log_4 a$ būtu lielāks par 1. Tad intervālā $[2^k \cdot \log_4 (a+1), 2^k \cdot \log_4 a)$ atradīsies naturāls skaitlis n, un prasītais ir pierādīts.

11.34. Vispirms uzbūvēsim valstī šādu dzelzceļu sistēmu (skat. 11.5. zīm.).

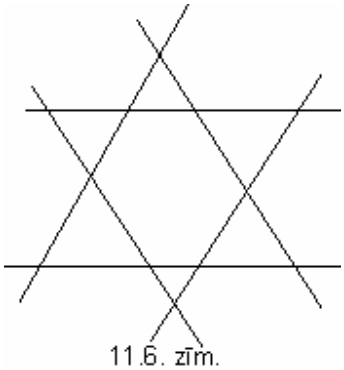


11.5. zīm.

No katras pilsētas līdz uzbūvētajām līnijām var uzbūvēt līniju ne garāku kā 100 km (vertikālā virzienā). Kopējais dzelzceļa garums nepārsniegs

$$51 \cdot 100 + 5 \cdot 1000 + 800 < 1100 \text{ km}.$$

11.35. Lielākais iespējamais regulāro trijstūru skaits ir 8 (skat. 11.6. zīm.).



11.6. zīm.

11.36. Pārveidojam doto nevienādību:

$$\sin^6 x\left(1-\sin^2 x\right)+\cos^6 x\left(1-\cos^2 x\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\geq 0.$$

Visi reizinātāji ir nenegatīvi, tātad nevienādība izpildās. Tā kā sinx un cosx vienlaicīgi nav 0, tad vienādība izpildās, ja sinx = 0 vai cosx = 0, t.i., ja $x=\frac{\pi}{2}n, \quad n\in Z.$

11.37. Ievērosim, ka $\frac{0A_1}{a}<\frac{OA_1}{AA_1}=\frac{S_{BOC}}{S_{BAC}}$ (pamatojiet vienādību !). Līdzīgi pierāda, ka $\frac{OB_1}{a}<\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$ un $\frac{OC_1}{a}<\frac{S_{BOA}}{S_{BCA}}$. Summējot šīs nevienādības, iegūstam prasīto.

$$\frac{OA_1+OB_1+OC_1}{a}<\frac{S_{BOC}+S_{AOC}+S_{BOA}}{S_{ABC}}=1.$$

11.38. Pierādiet apgalvojumu, aplūkojot tikai divas blakusstāvošās kolonas.

11.39. Vispirms pierāda, ka vienā plaknē atrodas punkti A, B, A_1, B_1; A, C, A_1, C_1; A, D, A_1, D_1; B, C, B_1, C_1; B, D, B_1, D_1; C, D, C_1, D_1.
Apzīmēsim taišņu AA_1 un BB_1 krustpunktu ar K. Taisne CC_1 krusto abas taisnes AA_1 un BB_1, un tā kā nepieder plaknei ABA_1B_1, tad iet caur punktu K. Līdzīgi pierāda, ka arī taisne DD_1 iet caur punktu K. Tātad visas norādītās taisnes krustojas punktā K.

11.40. Aplūkojot virknes 2^n pēdējos divus (trīs) ciparus, tātad rēķinot pēc moduļa 100 vai 1000, atrodam, ka skaitļa 2^{14} pēdējie divi cipari ir 84, bet skaitļa 2^{54} pēdējie trīs cipari ir 984.

12. atklātā olimpiāde (1984./85. m.g.)

12.1. Otrais skaitlis par 1 lielāks nekā pirmais skaitlis.

12.2. Ciparu 1, 9, 8 un 5 summa ir 23. Lai skaitļa ciparu summa dalītos ar 9, tai jāpieskaita vēl cipars 4. Mazākais skaitlis, ko var izveidot no šiem cipariem ir 14589. Ja cipara 4 vietā ņemtu vairākus ciparus, tad iegūtajam skaitlim būtu vairāk ciparu par uzrakstīto, un tas būtu lielāks.

12.3. Ja atmetīsim nokrāsotās skaldnes, tad iegūsim paralēlskaldni ar izmēriem $9 \times 10 \times 11$. Tātad nokrāsotas ir $10 \cdot 11 \cdot 12 - 9 \cdot 10 \cdot 11 = 330$ skaldnes.

12.4. Ar a_n apzīmēsim cik veidos var skaitli n izsacīt kā vieninieku un divnieku summu. Tad $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, jo katra summa, kas izsaka n-1 sākas ar 1 vai 2; pirmo summu skaits ir a_{n-1}, otro summu skaits ir a_{n-2}.
Tālāk aprēķinām $a_3 = a_1 + a_2 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$. Tātad meklējamais veidu skaits ir 21.

12.5. Vispirms atzīmēsim, ka 2 dienās draugi nevar noskaidrot visus jaunumus, jo pirmajā dienā katrs no viņiem uzzina 3 jaunumus (ieskaitot savu), bet otrajā var uzzināt vēl ne vairāk kā 6 jaunumus.
Parādīsim kā 3 dienu laikā tie var uzzināt visus jaunumus. Pirmajā dienā tie apvienojas grupās (1, 2 , 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12), otrajā dienā -- grupās (1, 5, 9), (2, 6, 10), (3, 7, 11), (4, 8, 12), bet trešajā atkal tādās pašās grupās kā pirmajā dienā. Tādā veidā viņi uzzinās visus jaunumus. Piemēram, pirmās grupas pārstāvji otrajā dienā uzzināja visus jaunumus no pārējām grupām: pirmais no grupas (4, 5, 6), otrais no grupas (10, 11, 12), trešais no grupas (7, 8, 9). Trešajā dienā tie dalījās savstarpēji ar visiem jaunumiem. Līdzīgi notika arī citās grupās.

12.6. Jā, var. Jāuzzīmē trīs paralēli nogriežņi un četri tiem perpendikulāri nogriežņi. Skaidrs, ka tas ir lielākais iespējamais pāru skaits.

12.7. No nevienādības $ab > 0$ seko, ka skaitļiem a un b ir vienādas zīmes. Ja tie abi būtu negatīvi, tad neizpildītos nevienādība $a + b > 0$. Tātad tie abi ir pozitīvi.

12.8. Klasē ir 17 + 17 - 3 = 31 skolēns, kas dejo vai dzied. Atradīsim cik ir skolēnu, kas zīmē, bet nedejo un nedzied. Tādu ir 20 - 5 - 4 +1 = 12. Kopā klasē ir 43 skolēni.

12.9. Daļu skaits var būt no 3 līdz 10.

12.10. Uzskatīsim, ka visi dotie skaitļi ir nenegatīvi (pēc pirmā soļa tā noteikti būs). Ar s apzīmēsim lielāko no grupas skaitļiem. Ja grupā nav skaitļa 0, tad pēc viena gājiena lielums s samazinās. Ja kaut viens no skaitļiem ir 0, tad lielums s samazinās vismaz pēc 4 gājieniem (pārbaudiet to). Tātad rezultātā visi skaitļi kļūs vienādi ar 0.

12.11. Tie veido 80° leņķi.

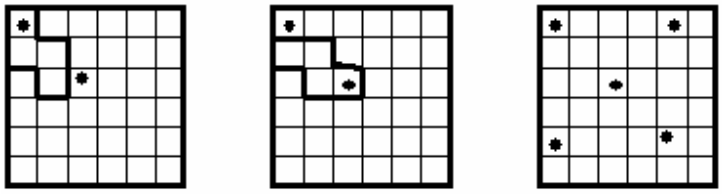
12.12. a) Ja daļa $\frac{a}{b}$ ir saīsināma ar skaitli k, tad arī daļa $\frac{a-b}{a+b}$ ir saīsināma ar skaitli k.

b) Nē, nevar. Piemēram, daļa $\frac{5}{3}$ nav saīsināma, bet daļa $\frac{5-3}{5+3}=\frac{2}{8}$ ir saīsināma.

12.13. $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2=$

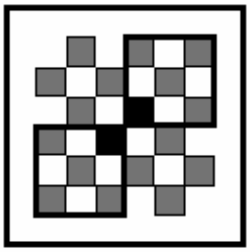
$\left(a^2x^2-2abxy+b^2y^2\right)+\left(a^2y^2+2abxy+b^2x^2\right)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2$.

12.14. Aplūkojot divas figūras (skat. 12.1. zīm.), secinām, ka skaitļi, kas ierakstīti atzīmētajās rūtiņas dod vienādus atlikumus dalot ar 9. Līdzīgi pierāda, ka visi 5 atzīmētie skaitļi dod vienādus atlikumus dalot ar 9. Bet tā nevar būt, jo starp skaitļiem no 1 līdz 36 var atrast lielākais 4 skaitļus, kas dod vienādus atlikumus dalot ar 9.



12.1. zīm.

12.15. Vispirms atzīmēsim, ka dāma var būt apdraudēta, ja atrodas uz kāda no 18 atzīmētajiem lauciņiem (skat. 12.2. zīm.). Katrā no diviem apvilktajiem kvadrātiem vismaz viena dāma ir jāizmet, citādi vidējā nebūs apdraudēta. Tātad var būt ne vairāk kā 16 dāmu. Izvietot 16 dāmas var, ja izmetam divas dāmas no centrālajiem atzīmētajiem lauciņiem.



12.2. zīm.

12.16. Atbilde $x\in\left(660\frac{4}{7},661\frac{2}{3}\right)$.

12.17. Nē, nedalās. Tā kā skaitlis 1111 dalās ar 101, tad arī skaitlis $\underbrace{11\ldots10}_{100}$ dalās ar 101.

Skaidrs, ka sekojošais aiz viņa skaitlis nevar dalīties ar 101.

12.18. Pieņemsim, ka doti trijstūra ABC malu viduspunkti A_1, B_1, C_1. Tad taisni AB konstruē, velkot taisni caur C_1 paralēli A_1B_1. Līdzīgi konstruē pārējās malas.

Pieņemsim, ka A, B, C, D, E ir dotā piecstūra malu viduspunkti. Ņemsim patvaļīgu punktu X un konstruēsim punktus $Y = S_A(X)$, $Z = S_B(Y)$, $U = S_C(Z)$, $V = S_D(U)$, W =

$S_E(U)$ (Ar $S_A(X)$ apzīmējam punktam X simetrisku punktu pret punktu A). Tad nogriežņa XW viduspunkts ir dotā piecstūra virsotne. Pārējās virsotnes atrod, izmantojot šīs pašas simetrijas.

12.19. No dotajiem 5 punktiem atradīsim divus punktus A un B, kuriem ir vienādas abu koordinātu paritātes (tādus var atrast, jo paritāšu kombinācijas ir 4, bet punkti ir 5). Tad nogriežņa AB viduspunkta M koordinātas ir veseli skaitļi, jo $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ un $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ ir veseli skaitļi.

12.20. Tā kā no vienas virsotnes A izejošajiem 7 nogriežņiem (malām un diagonālēm) ir jābūt vienādi nokrāsotiem, tad nepieciešamas vismaz 7 krāsas. Ar 7 krāsām pietiek, ja vienādā krāsā krāsojam tās 8-stūra malas un diagonāles, kas ir savā starpā paralēlas (ir 7 šādu paralēlu nogriežņu grupas).

12.21. Atbilde: $\left\{\left(-\frac{14}{25}, \frac{223}{25}\right), (9,1)\right\}$.

12.22. Nosvītrojot daļas, dotais reizinājums palielinās par

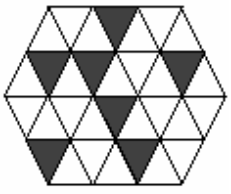
$$-\frac{2(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x+1} + \frac{2(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x-1} - \frac{4}{(x-1)(x+1)} =$$

$$-2x^3 - 2x + 2x^3 + 2x - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{(x-1)(x+1)} = 0,$$

tātad nemainās.

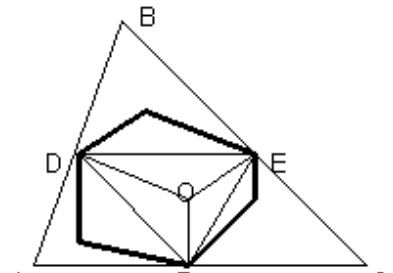
12.23. Tā kā no 4 skaitļiem var izvēlēties tieši 6 pārus, un katrs skaitlis ieiet tieši 3 pāros, tad katra no vienādojumu saknēm 3 reizes pieņem katru no norādītajām 4 vērtībām. Tātad šo 4 vērtību (4 dažādo sakņu) summa ir $-\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)$.

12.24. Aplūkojot 12.3. zīmējumā atzīmētos trijstūrus, redzam, ka tie nevar būt nokrāsoti trīs krāsās tā, lai attālumā 4 neatrastos vienādi nokrāsoti trijstūri.



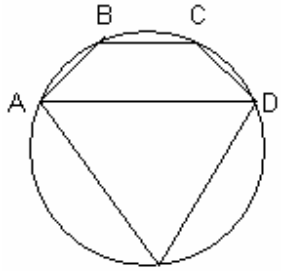
12.3. zīm.

12.25. Ar O apzīmēsim trijstūra DEF augstumu krustpunktu (skat. 12.4. zīm.) un novilksim nogriežņus OD, OE, OF. Aplūkojamais sešstūris ir sadalīts trīs paralelogramos; šo paralelogramu puses veido trijstūri DEF. Tātad aplūkojamā sešstūra laukums ir $2S_{DEF} = 2 \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABD}$ (trijstūri DEF un ABC ir līdzīgi ar līdzības koeficientu 2).



12.4. zīm.

12.26. Aplūkosim trīs deviņstūra malas AB = BC = CD = a un trijstūra malu AD (skat. 12.5. zīm.). Tā kā leņķi $\angle ACD$ un $\angle ABD$ ir plati, tad no kosinusu teorēmas seko nevienādības $AD^2 > AC^2 + DC^2 > AB^2 + BC^2 + CD^2 = 3a^2$; t.i. vienas regulārā trijstūra malas kvadrāts ir lielāks par 3 regulārā 9-stūra malu kvadrātu summu. Tātad arī visu 3 trijstūra malu kvadrātu summa ir lielāka par visu 9 9-stūra malu kvadrātu summu.



12.5. zīm.

12.27. Ja doto skaitļu zīmes ir vienādas, tad ab > 0, ac > 0, bc > 0, un prasītās nevienādības izpildās.
Apzīmējot ab = x, ac = y un bc = z, pierāda, ka no dotajām nevienādībām seko, ka ab > 0, ac > 0, bc > 0; tātad visu skaitļu a, b, c zīmes ir vienādas.

12.28. Ar $\mathrm{ord}_2 k$ apzīmēsim ar kādu lielāko divnieka pakāpi dalās skaitlis k. Iegūstam

$$\mathrm{ord}_2((n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)) = \mathrm{ord}_2 2n! - \mathrm{ord}_2 n! =$$

$$\left(\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{2^2}\right]+\left[\frac{2n}{2^3}\right]+\cdots\right)-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots\right)=$$

$$\left(n+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots\right)-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots\right)=n.$$

12.29. a) Jā, var. Parādiet kā !
b) Nē, nevar. Visu skaitļu vietas uz riņķa līnijas sadalīsim trīs grupās periodiski: 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 ... . Pēc katra gājiena vieninieku skaits katrā grupā maina paritāti, jo mainās pa vienam skaitlim no katras grupas. Sākumā vienā grupā ir nepāra skaits vieninieku (viens), bet divās citās pāra skaits vieninieku (nulle). Tātad arī beigās visās grupās vieninieku skaita paritātes nebūs vienādas, un visas nulles iegūt nevarēs.

12.30. Apzīmēsim lokomotīves ar cipariem no 1 līdz 8, kas norāda kādā secībā tām jāpienāk galapunktā. Pirmajā posmā lokomotīves ar numuriem 5, 6, 7, 8 laidīsim pa augšējo līniju un aizturēsim, panākot, ka lokomotīvju grupa (5, 6, 7, 8) (patvaļīgā secībā) brauc aiz grupas (1, 2, 3, 4) (patvaļīgā secībā). Otrajā posmā, aizturot lokomotīves (3, 4) no pirmās grupas un (7, 8) no otrās grupas, panāksim ka tās virzās secībā (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8) (pāros secība nav noteikta). Pēdējā pārbrauktuvē sakārtojam pārus pareizā secībā.

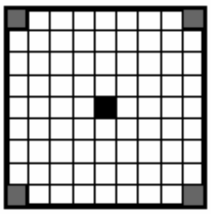
12.31. Der, piemēram, a = 150°.

12.32. Ja p < 30, tad, dalot ar 30, tas dod atlikumā p, un apgalvojums pierādīts. Uzskatīsim, ka p ≥ 30. Dalot ar 30, tas nevar dot atlikumā pāra skaitli (citādi tas pats būtu pāra skaitlis un nebūtu pirmskaitlis. Līdzīgi pamato, ka tas nevar dot atlikumā skaitli, kas dalās ar 3 vai 5. Atlikumi, kas nedalās ar 2, 3 vai 5 ir šādi: 1, 7, 11, 13, 17,19, 23, 29. Tie visi ir pirmskaitļi vai 1.

12.33. Apzīmēsim attālumu no punkta O līdz taisnei AB ar r(O, AB). Ievedam apzīmējumus $x = \frac{r(O, BC)}{r(A, BC)}$, $y = \frac{r(O, AC)}{r(B, AC)}$, $z = \frac{r(O, AB)}{r(C, AB)}$. Ar šiem lielumiem izsakām trijstūra MNK laukumu, un, ņemot vērā vienādību x + y + z = 1, algebriski pierāda prasīto nevienādību.

12.34. $1985 = 2^{11} - 2^6 + 2^0$.

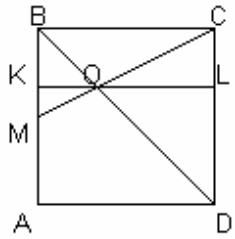
12.35. Iezīmēsim rūtiņu, ko A pirmajā gājienā iekrāsoja zilu, un aplūkosim kvadrātu, kura centrs ir šī rūtiņa (skat. 12.6. zīm.).



12.6. zīm.

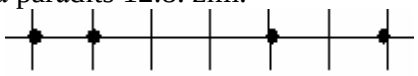
Nākošajos 4 gājienos B nokrāso sarkanas kvadrāta stūra rūtiņas. Ar savu 5 gājienu A vēl nevar iziet ārpus iezīmētā kvadrāta robežām. Tālākā B stratēģija ir šāda. Tiklīdz A iekrāso kvadrāta malējo rūtiņu, B krāso blakus esošo ārējo rūtiņu. Skaidrs, ka B neizlaidīs A no uzzīmētā kvadrāta.

12.36. Tā kā trijstūri BMO un DCO ir līdzīgi ar līdzības koeficientu $\frac{DC}{BM} = 2$, tad to augstumu OL un OK attiecība ir 2, bet summa 1 (skat. 12.7. zīm.). Tātad $OK = \frac{1}{3}$, un $S_{BMO} = \frac{1}{2} BM \cdot KO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.



12.7. zīm.

12.37. a) Jā; piemēram, tā kā parādīts 12.8. zīm.



12.7. zīm.

b) Nē, nevar. Vispirms pierādīsim, ka visiem punktiem būtu jāatrodas uz vienas taisnes. Tiešām, izvēlēsimies punktus A un B, starp kuriem attālums ir 1. Tad, ņemot jebkuru citu punktu C, kas neatrodas uz taisnes AB, mēs iegūtu, ka $|AC - BC| < 1$. Tā kā AC un BC veseli skaitļi, tad AC = BC, bet tā nevar būt. Tālāk pierāda, ka arī uz taisnes nevar izvietot 1985 punktus, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

12.38. Jā, dalās. Izmantosim īpašību, ka nepāra skaitlim n $a^n + b^n$ dalās ar a + b. Iegūstam , ka $2^{70} + 3^{70} = 4^{35} + 9^{35}$ dalās ar $4 + 9 = 13$.

12.39. Ja x = 0, tad dotās izteiksmes vērtība ir $|a + b + c + d|$. Ja x = p, tad dotās izteiksmes vērtība ir $|a - b + c - d|$. No nevienādības

$$|a + b + c + d| + |a - b + c - d| \geq |(a + b + c + d) - (a - b + c - d)| = 2|b + d|$$

seko, ka vismaz viena no dotajām vērtībām ir ne mazāka par $|b + d|$.

12.40. Novilksim plaknē 4 riņķus ar dažādiem rādiusiem, kas ārēji pieskaras viens otram. Šo četru riņķu centri apmierina uzdevuma nosacījumus. Tiešām, visi attālumi starp punktiem ir dažādi, un katras slēgtas lauztas līnijas garums ir $2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$, kur r_1, r_2, r_3, r_4 ir novilkto riņķu rādiusi.

13. atklātā olimpiāde (1985./86. m.g.)

13.1 $98 - 76 - 5 + 4 - 3 + 2:1 = 20$;

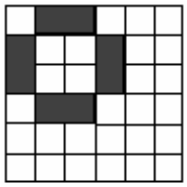
$(98 - 76) \cdot 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 100$;

$(987 + 6) \cdot (5 - 4 + 3 - 2 \cdot 1) = 1986$.

13.2. Tā kā 1986 dalās ar 3, tad jāpierāda, ka n nedalās ar 3. Skaitļa n ciparu summa $2k + (k + 1) = 3k + 1$ nedalās ar 3, tātad arī skaitlis n nedalās ar 3.

13.3. Iespējami 0, 1, 3, 4, 5, 6 krustpunkti.

13.4. Jā, var. Piemēram, tā, kā parādīts 13.1. zīmējumā.



13.1. zīm.

13.5. Izmantojot 6 l trauku, no 21 litra trīs reizes atlejam 6 litrus, iegūstot atlikumā 3 l ūdens.
Nevar iegūt 5 l, jo ūdens daudzums litros visos traukos dalās ar 3; tāpēc katrā traukā vienmēr ielietā ūdens daudzums litros dalīsies ar 3, bet 5 nedalās ar 3.

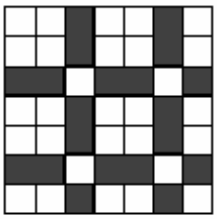
13.6. Pasažieru skaits dalās ar 3, 4 un 5, tātad dalās ar 60. Redzam, ka pasažieru ir 60, un ir 10 brīvas vietas.

13.7. Ejot pa riņķi, skaitīsim cik reizes mainās skaitļa zīme. Tā mainās, ja reizinājums ir negatīvs. Apejot riņķi, pirmā skaitļa zīme nemainījās, tāpēc zīmju maiņu skaits ir pāra skaitlis. Tas nozīmē, ka negatīvo reizinājumu skaits nevar būt 993. Tas var būt 986; piemēram, uzrakstot pa riņķi skaitļus +1, -1, +1, -1, ... , +1 (kopā 987 skaitļi) un pārējos +1.

13.8. Taisni leņķi veidojas katrā skaldnes iekšējā punktā 4×81×6 (katrā punktā 4 leņķi, skaldnes ir 6, katrā skaldnē 81 punkts); uz katras šķautnes 4×9×12; virsotnēs 3×8. Kopā 4×81×6 + 4×9×12 + 3×8 = 2390.

13.9. Jā, var. Sadalīsim kvadrāta rūtiņas 41 melnā rūtiņā un 40 baltās rūtiņās, kā uz šaha galdiņa. Ierakstīsim skaitli a melnajās rūtiņās un skaitli b baltajās rūtiņās. Ir jāizpildās nevienādībām 41a + 40 b > 0 un 2a + 2b < 0. Var izvēlēties, piemēram, skaitļus a = 41, b= - 42.

13.10. To var izdarīt šādi (skat. 13.2. zīm.).



13.2. zīm.

13.11. x = 0.

13.12. a) Nevar, jo rūtiņu skaits nedalās ar 4.
b) Var, sadalot kvadrātu 20×20 kvadrātos ar izmēriem 4×4. Katru kvadrātu 4×4 var sadalīt šādās figūrās.

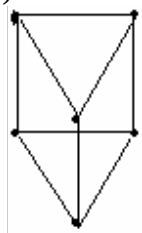
c) Nevar. Iekrāsosim kvadrātu 10×10 divās krāsās kā šaha galdiņu. Tad dotās figūras var iedalīt divās grupās: n figūras, kas nosedz 3 baltos lauciņus un m figūras, kas nosedz 3 melnos lauciņus. Iegūstam vienādības

$$\begin{cases} 3n+m=50 \\ n+3m=50 \end{cases}$$

No šejienes seko, ka n = m = 12,5, bet tā nevar būt, jo n un m ir veseli skaitļi.

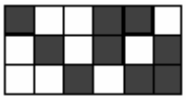
13.13. Jā, var. Uz zilajām kartiņām jāuzraksta skaitļi 0, 4, 8, 12, bet uz sarkanajām skaitļi 1, 2 , 3, 4.

13.14. Mazākais n ir 6 (skat. 13.3. zīm.).



13.3. zīm.

13.15. Jā, var (skat. 13.4. zīm.).



13.4. zīm.

13.16. $x \in (-2,-1) \cup (0,\infty)$.

13.17. No dotā seko, ka šādi trijstūru pāri ir līdzīgi: AOB un DOE, BOC un EOF, COD un FOA. no šejienes seko vienādības

$$\frac{AO}{DO}=\frac{FO}{CO}=\frac{EO}{BO}=\frac{DO}{AO}.$$

Tātad AO = DO, un punkti A un D ir simetriski pret O. Līdzīgi pierāda, ka simetriski ir punkti B un E, C un F.

13.18. Nē, nedalās, jo $\operatorname{ord}_2 50! = \left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{2^2}\right]+\left[\frac{50}{2^3}\right]+\left[\frac{50}{2^4}\right]+\left[\frac{50}{2^5}\right]+\ldots = 47 < 50$.

13.19. Sakārtosim dotos skaitļus augošā secībā $a \ge b \ge c \ge d \ge e$. Tad visas prasītās nevienādības izpildās. Pierādīsim vienu no tām, piemēram, a + b + c≥ 0. Ja šī nevienādība neizpildītos, tad c < 0; līdz ar to d < 0 un e < 0. Bet tādā gadījumā a + b + c +d + e < 0, kas ir pretrunā ar doto.

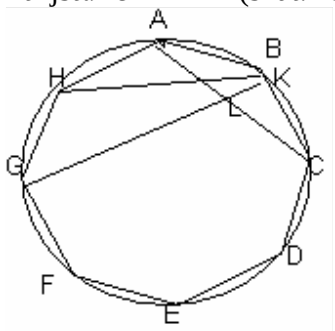
13.20. Režģī ir 12 virsotnes, no kurām iziet tieši 3 nogriežņi. Katrā šādā virsotnē ir jābūt līnijas galapunktam; tātad to skaits ir vismaz 6, un ar 5 līnijām nepietiek. Ar 8 līnijām režģi uzzīmēt var. Parādiet kā !

13.21. Apzīmēsim aritmētiskās progresijas diferenci ar d. Tad

$$a_{50} + a_{250} = (a_{100} - 50d) + (a_{200} + 50d) = a_{100} + a_{200} = 1986.$$

Izteiksme $a_{100} + a_{300} = (a_{100} + a_{200}) + 100d = 1986 + 100d$ var pieņemt patvaļīgu vērtību.

13.22. Aplūkosim vienu no šiem trijstūriem BKL (skat. 13.5. zīm.).



13.5. zīm.

Trijstūri BKL un ABL ir līdzīgi (pierādiet to !). Tātad $\frac{BL}{KL} = \frac{AB}{BK} = \frac{1}{BK}$, un BL × BK = KL. Līdzīgi pierāda pārējās vienādības.

13.23. Ar c_1 un c_2 apzīmēsim malu a un b projekcijas uz malas c, bet ar h trijstūra augstumu, kas vilkts pret malu c. Vispirms pierāda, ka šie skaitļi ir racionāli. Pareizinot šos skaitļus ar to kopsaucēju, iegūstam veselus skaitļus. Trijstūri ar šādiem parametriem var novietot plaknē tā, ka visu virsotņu koordinātes ir veseli skaitļi, t.i. rūtiņu virsotnēs.

13.24. Aplūkosim, piemēram, četrciparu skaitli $\overline{abcd}$. Tad

$$\overline{abcd} - 9\left(\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a}\right) = 1000a + 100b + 10c + d - 999a - 99b - 9c = a + b + c + d$$

Līdzīgi apgalvojumu pierāda patvaļīgam n-ciparu skaitlim.

13.25. Otrais spēlētājs sev labvēlīgu rezultātu var panākt sekojoši: viņš vienmēr ņems konfekti no kastītes, kurā ir nepāra skaits konfekšu, turklāt vispirms no tādas, kurā ir viena konfekte (ja tāda kastīte ir).

13.26. Tā kā dotā funkcija ir nepārtraukta, tad visiem x izpildās vienādība

$$f(x) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) = f\left(\tfrac{x}{2^2}\right) = \ldots = f\left(\tfrac{x}{2^n}\right) = \ldots = f(0),$$

jo, kad $n \to \infty$, tad $\frac{x}{2^n} \to 0$. Tātad f(x) ir konstanta funkcija.

13.27. a) Vienādojumu pārveidojam formā

$$2^x = \left(y^n - 1\right)\left(y^n + 1\right).$$

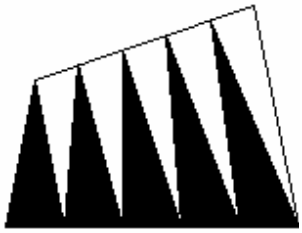
Abi labās puses reizinātāji ir divnieka pakāpes ar veseliem nenegatīviem kāpinātājiem. To starpība ir 2; tātad $y^n - 1 = 2, y^n + 1 = 4; y^n = 3, y = 3, n = 1, x = 3$.
b) Ja n=2k-1, tad iegūstam a) punkta vienādojumu; tātad n =1, x = 3, y = 3.
Ja n = 2k, tad vienādojumu pārveidojam formā

$$2^x = (y-1)\left(y^{2k} + y^{2k-1} + \ldots + 1\right).$$

Otrā iekava ir nepāra skaitlis, kas lielāks par 1, tātad nevar būt divnieka pakāpe; šājā gadījumā atrisinājumu nav.

13.28. Pārbaudām, ka $x_1 = 3$, $x_2 = 48$ un $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n + 6$. No šejienes seko, ka visi virknes locekļi ir veseli skaitļi.

13.29. Sadalīsim katru no četrstūriem divos trijstūros, un sadalīsim šos trijstūrus divās grupās -- melnajos un baltajos (skat. 13.6. zīm.).



13.6. zīm.

Katrā grupā trijstūru pamati ir vienādi, bet augstumi veido aritmētisku progresiju; tātad trijstūru laukumi katrā grupā veido aritmētisku progresiju. Tā kā, saskaitot divas aritmētiskās progresijas, arī iegūstam aritmētisku progresiju, tad doto četrstūru laukumi veido aritmētisku progresiju; tā ir 5, 6, 7, 8, 9. Tātad ABCD laukums ir 35.

13.30. Visas 30 vietas sadalīsim 2 grupās: 1., 2., 1., 2, ... Pieņemsim, ka 1. grupā melno figūru skaits ir lielāks (vismaz 8 melnās figūras). Ar vienu gājienu melno figūru skaits 1. grupā nevar palielināties vairāk kā par 1. Tātad vismaz 7 gājieni ir jāizpilda, jo iespējama sākotnējā situācija, kad 1. grupā ir tieši 8 melnās figūras. Var redzēt, ka gadījumā, ja visas melnās figūras neatrodas 1. grupas lauciņos, tad vienā gājienā var melno figūru pārvietot uz 1. grupas lauciņu, izmetot no tās balto figūru; tas nozīmē, ka vienā gājienā var palielināt melno figūru skaitu 1. grupas lauciņos par 1. Rezultātā pierādīts, ka ar 7 gājieniem vienmēr pietiek.

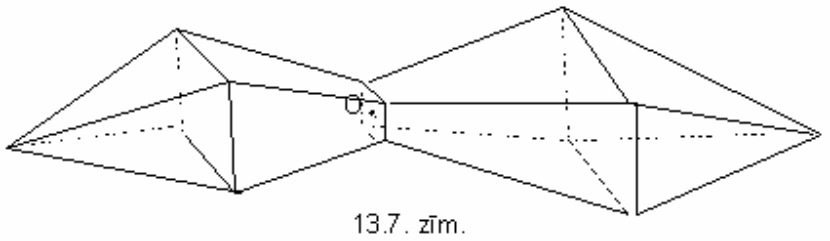
13.31. Vienādojumu pārveidojam formā $\cos x(4\cos^2 x - 3) = 0$. No šejienes

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z /$$

13.32. Viena no šīm starpībām ir $\sqrt[2]{2} - \sqrt[4]{4} = 0$. Tātad reizinājuma vērtība ir 0.

13.33. Ar indukciju pierāda, ka $f_{2^n+1}(x) = f(x-2^n)f(x+2^n)\cdot c^2(x)$. Tātad $f_{33}(x) = f(x-32)\cdot f(x+32)\cdot c^2(x) = f^2(x-32)\cdot c^2(x) \geq 0$. Līdz ar to arī visas nākošās funkcijas $f_{34}(x)$, $f_{35}(x)$, ... , $f_{1986}(x)$ ir nenegatīvas.

13.34. Nevar konstruēt tādu izliektu daudzskaldni. Katram punktam O jāaplūko skaldne, kas atrodas vistuvāk šim punktam. Tad projekcija pret šo skaldni atradīsies skaldnē.
Taču iespējams konstruēt šādu neizliektu daudzskaldni (skat. 13.7. zīm.).



13.7. zīm.

13.35. Novilksim riņķa līnijai w trīs pieskares paralēli trijstūra malām. Atšķeltajos trijstūrīšos ievilksim pa riņķa līnijai ar rādiusiem r_1, r_2, r_3. Protams, šo riņķa līniju rādiusi nav mazāki, par uzdevuma nosacījumos minēto 3 riņķa līniju rādiusiem. Pierāda, ka $r_1 + r_2 + r_3 = r$. No šejienes seko uzdevuma apgalvojums.

13.36. a) Šī funkcija ir periodiska ar periodu 1985 × 2p.
b) Dotā funkcija nav periodiska. Pierādījumā izmanto to, ka funkcijai, kuras periods ir T, arī atvasinājums ir periodiska funkcija ar periodu T.

13.37. Doto skaitli uzrakstīsim šādi:

$$a^{2^n} - 1 = \left(a^{2^{n-1}} + 1\right)\left(a^{2^{n-2}} + 1\right)\ldots\left(a^{2^0} + 1\right)\left(a^{2^0} - 1\right).$$

Pirmajās n iekavās uzrakstīti savstarpēji pirmskaitļi (pamatojiet to !). Katram no šiem skaitļiem ir vismaz viens pirmreizinātājs, un tie visi ir dažādi. Esam ieguvuši n dotā skaitļa dalītājus, kas visi ir pirmskaitļi.

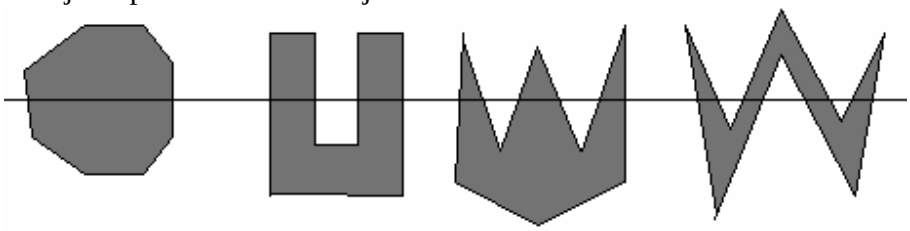
13.38. Ievedot telpā Dekarta koordinātu sistēmu ar asīm, kas paralēlas dotajām hordām , pierāda, ka hordu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar 12 R^2 - 80 r^2, kur R ir lodes rādiuss, bet r ir attālums no punkta M līdz lodes centram.

13.39. Aplūko virknītes, kas sastāv no sarkanām un zilām šķautnēm, pārmaiņus sekojošām viena otrai. Virknē, kurā ir nepāra skaits posmu, un sarkano ir par 1 vairāk nekā zilo, maina krāsas uz pretējām.

13.40. Pieņemsim, ka starp šiem 1986 zinātniekiem ir divi tādi A un B, kuri nerunā vienā valodā. Apskatīsim visus iespējamos 1984 trijniekus A, B, C. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka vismaz 992 zinātnieki (no C) runā vienā valodā ar A (vai B). Tā kā A prot ne vairāk kā 5 valodas, tad vismaz 199 zinātnieki no apskatāmajiem 992 zina viņiem visiem un A kopīgu valodu x. Šajā valodā runā vismaz 200 zinātnieki.
Līdzīgi aplūko gadījumu, kad nav zinātnieku pāra A, B, kas nerunā vienā valodā.

14. atklātā olimpiāde (1986./87. m.g.)

14.1. Atrisinājumi parādīti 14.1. zīmējumā.



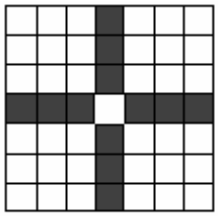
14.1. zīm.

14.2. Tā kā katru ciparu var izvēlēties 8 veidos, tad šādu skaitļu ir 64. Tos var sadalīt pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir 99. Tātad visu šādu skaitļu summa ir 99×32 = 3168.

14.3. Skaitlis 198619871988 dalās ar 3, bet skaitlis n ar 3 nedalās, jo tā ciparu summa ir 2k + (k +1) = 3k + 1. Tas nozīmē, ka skaitlis n + 198619871988 nedalās ar 3; tātad nedalās arī ar 6.

14.4. Vajadzēja pārraidīt vienādību 945 + 1038 = 1983.

14.5. Kvadrātā 7×7 var novietot 12 taisnstūrus 1×4 bez kopīgiem kvadrātiņiem (parādiet kā !). Tātad jānokrāso vismaz 12 rūtiņas. Tas, ka ar 12 rūtiņām pietiek, parādīts 14.2. zīmējumā.



14.2. zīm.

14.6. To var izdarīt šādi:

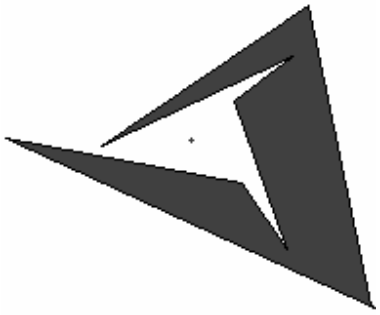
1	2	3	4	5
3	5	2	4	1

Ar 10 kolonnām šādu tabulu sastādīt nevar. Starpībām būtu jāpieņem visas vērtības no 0 līdz 9; to summa ir 45, bet šai summai ir jābūt pāra skaitlim. Pamatojiet to !

14.7. Ejot pa riņķi, skaitīsim cik reizes mainās skaitļa zīme. Tā mainās, ja reizinājums ir negatīvs. Apejot riņķi, pirmā skaitļa zīme nemainījās, tāpēc zīmju maiņu skaits ir pāra skaitlis. Tas nozīmē, ka negatīvo reizinājumu skaits nevar būt 993. Tas var būt 986; piemēram, uzrakstot pa riņķi skaitļus +1, -1, +1, -1, ... , +1 (kopā 987 skaitļi) un pārējos +1.

14.8. Tas jādara 2 reizes nedēļā.

14.9. Jā, var (skat. 14.3. zīm.).



14.3. zīm.

14.10. Ja katrs bruņinieks sardzē bijis k reizes, m reizes tie sūtīti pa 9, bet n reizes pa 10, tad 33k = 9m + 10n. Ja k = 1, tad šādus skaitļus atrast nevar. Ja k = 2, tad m = 4 un n = 3. Tātad mazākais iespējamais vakaru skaits ir 7. To var izdarīt 7 vakaros, nostādot bruņiniekus aplī un katru vakaru sūtot 10 vai 9 sekojošos pa apli bruņiniekus.

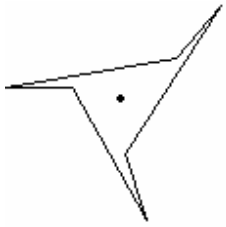
14.11. No zīmējuma redzams, ka c > a un b > 0 > d. Tātad c - a > 0, b - d > 0, un šo skaitļu reizinājums lielāks par 0.

14.12. a) Nevar, jo rūtiņu skaits nedalās ar 4.
b) Var, sadalot kvadrātu 20×20 kvadrātos ar izmēriem 4×4. Katru kvadrātu 4×4 var sadalīt šādās figūrās.
c) Nevar. Iekrāsosim kvadrātu 10×10 divās krāsās kā šaha galdiņu. Tad dotās figūras var iedalīt divās grupās: n figūras, kas nosedz 3 baltos lauciņus un m figūras, kas nosedz 3 melnos lauciņus. Iegūstam vienādības

$$\begin{cases} 3n + m = 50 \\ n + 3m = 50 \end{cases}$$

No šejienes seko, ka n = m = 12,5, bet tā nevar būt, jo n un m ir veseli skaitļi.

14.13. Jā, var; skat. 14.4. zīmējumu.



14.4. zīm.

14.14. Jā, var. Ar indukciju var pierādīt, ka dažādo izmēru skaits var būt patvaļīgs naturāls skaitlis. Sadalīsim kvadrātu n kvadrātos tā, lai mazāko kvadrātu skaits būtu lielāks par 1.
Ja n = 1, tad to izdarīt var, sadalot kvadrātu 4 vienādos kvadrātos.
Pieņemsim, ka kvadrāts sadalīts kvadrātos, starp kuriem ir tieši k dažādi un mazāko kvadrātu skaits ir lielāks par 1. Tad, sadalot vienu mazāko kvadrātu 4 vienādos kvadrātos, mēs iegūstam sadalījumu, kurā ir tieši k +1 dažādi kvadrāti, un mazāko kvadrātu skaits ir lielāks par 1.

14.15. Pierādīsim, ka torņi izvietoti tā, ka izpildās vismaz viena no šādām iespējām: a) katrā kolonnā ir tornis, b) katrā rindiņā ir tornis. Tiešām, ja neizpildās abi punkti, tad atradīsies kolonna, kurā nav torņa, un rindiņa, kurā nav torņa. Tad šīs kolonnas un rindiņas krustpunktā būs lauciņš, kas nav apdraudēts, bet tā nevar būt.
Ja izpildās iespēja a), tad atstāsim pa vienam tornim katrā kolonnā; ja izpildās b), tad atstāsim pa vienam tornim katrā rindiņā.

14.16. $x \in (-2, -1) \cup (0, \infty)$.

14.17. Nē, nevar. Apzīmēsim nogriežņu galapunktus ar a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3. Tā kā nogriežņu garumi ir pāra skaitļi, tad skaitļu a_k un b_k paritātes ir vienādas. Starp skaitļiem a_1, a_2, a_3 atradīsies divi vienādas paritātes skaitļi (piemēram, a_1 un a_2). Tad visu skaitļu a_1, b_1, a_2, b_2 paritātes ir vienādas, un šo divu nogriežņu kopīgās daļas garums ir pāra skaitlis.

14.18. Tā kā 1987 ir pirmskaitlis, tad to var sadalīt trīs naturālu skaitļu reizinājumā tikai šādā veidā $1987 = 1\times1\times1987$. Tādi arī būs paralēlskaldņa izmēri.

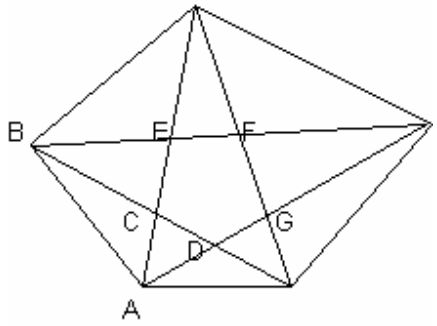
14.19. Dots, ka $99999(a - f) + 9900(b - d) + 990(c - e)$ dalās ar 271. Tā kā 99999 dalās ar 271, tad arī skaitlim $990(10(b-d)+(c-e))$ jādalās ar 271. Tā kā 990 un 271 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $10(b - d) + (c - e)$ dalās ar 271. Tā kā uzrakstītā izteiksme nepārsniedz 100, tad $10(b - d) + (c - e) = 0$; tas ir iespējam tikai, ja $b = d$ un $c = e$.

14.20. Jāņa atsvari sver 1, 2, 4, 8, 16, 32 gramus.

14.21. No dotā seko, ka $a^2 + b^2 = c^2 = 400$ un $a + b - 4 = c = 20$. Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam atbildes:
$a = 12 \pm 2\sqrt{14}$, $b = 12 \mp 2\sqrt{14}$.

14.22. No dotā seko, ka $a_1 + 112d + a_1 + 160d > a_1 + 119d + a_1 + 152d$; no tā izriet, ka $d > 0$. Tāpēc progresija ir augošā, un tā satur patvaļīgi lielus locekļus.

14.22. Pieņemsim pretējo, ka visi laukumi ir vienādi. Tad no vienādības $S_{ABC} = S_{ACD}$ seko, ka BC = CD, jo šo trijstūru augstumi ir vienādi (skat. 14.5. zīm.). Tātad $S_{BEC} = S_{CDE}$, jo vienādi ir šo trijstūru pamati (BC un CD) un augstumi. Iegūstam $S_{BEC} = S_{CDE} < S_{CEFGD}$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Apgalvojums pierādīts.



14.5. zīm.

14.24. Ģeometriski vienādojums ax + by + c = 0 apraksta taisni koordinātu plaknē, bet nevienādība izpildās pusplaknē. Izvēloties nevienādības zīmi, mēs izvēlāmies vienu no pusplaknēm. Trīs taisnes sadala plakni augstākais 7 daļās, bet iespējams zīmes nevienādībās izvēlēties 8 veidos. Izvēloties zīmes tā, ka nevienādības neizpildās nevienā no sadalījuma apgabaliem, mēs iegūstam nevienādību sistēmu, kurai nav atrisinājumu.

14.25. a) Uzvar otrais spēlētājs, dzēšot visu laiku nepāra skaitļus, izņemot 3 un 9. Ja pirmais nodzēš skaitli 3 vai 9, otrais spēlētājs nodzēš atlikušo no šiem skaitļiem. Beigās atliks vai nu divi pāra skaitļi, vai skaitļi 3 un 9. Abos gadījumos tie nav savstarpēji pirmskaitļi.
b) Uzvar pirmais spēlētājs. Pirmajā gājienā viņš nodzēš skaitli 1. bet pārējos skaitļus domās sadala pāros: (2, 3), (4, 5), ... ,(1986, 1987). Tālāk, tiklīdz otrais spēlētājs nodzēš skaitli no kāda pāra, pirmais spēlētājs nodzēš otru šī pāra skaitli. Rezultātā pirmais spēlētājs panāks, ka atlikušie skaitļi ir no viena pāra, bet divi sekojoši skaitļi vienmēr ir savstarpēji pirmskaitļi.

14.26. Vienādojumu pārveidojam formā

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

No šejienes $\sin x = -1$ vai $\sin x = \frac{1}{2}$. Abu vienādojumu atrisinājumus var apvienot un uzrakstīt formā $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, \quad n \in Z$.

14.27. Skaitli $\frac{y}{7}$ izteiksim kā 9 bezgalīgu decimāldaļu summu, katrai no kurām aiz komata ir tikai cipari 0 vai 1 (pamatojiet, ka to var izdarīt !). Tad, katru no šīm daļām pareizinot ar 7, iegūsim prasītās daļas.

14.28. Pārbaudām, ka $f\left(\frac{k}{100}\right) + f\left(\frac{100}{k}\right) = 1$ un $f(1) = \frac{1}{2}$. Tāpēc meklējamā summa ir $99\frac{1}{2}$.

14.29. Sadalīsim kvadrātu ar izmēriem 8×8 16 kvadrātos ar izmēriem 2×2. Katrā no šiem kvadrātiem jābūt aizņemtām vismaz 2 rūtiņām (citādi šajā kvadrāta var ievietot stūrīti). Tātad kopā jābūt aizņemtām vismaz 32 rūtiņām; tas nozīmē, ka jāievieto vismaz 11 stūrīši (jo 10 × 3 < 32). Parādiet zīmējumā, ka ar 11 stūrīšiem pietiek.

14.30. a) un b) punktu atrisinājums redzams tabulā

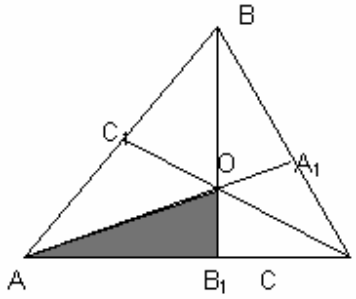
10	4	3
12	2	5
1	15	8

14.31. Vienādojumu pārveidojam šādi:

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0.$$

Atbilde: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

14.32. Pieņemsim, ka vienādi ir piecu neiezīmēto trijstūru laukumi (skat. 14.6. zīm.).



14.7. zīm.

No trijstūru AOC_1 un BOC_1 laukumu vienādības seko, ka $AC_1 = BC_1$; no trijstūru BOA_1 un COA_1 laukumu vienādības seko, ka $BA_1 = CA_1$. Tātad AA_1 un CC_1 ir mediānas, O ir mediānu krustpunkts; BB_1 arī ir mediāna, $AB_1 = CB_1$ un tāpēc $S_{AOB_1} = S_{COB_1}$.

14.33. Pierakstīsim formulu veidā divus šādus apgalvojumus:

- katrs spēlētājs izspēlēja 9 spēles: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \ldots = x_{10} + y_{10}$;
- uzvaru kopskaits ir vienāds ar zaudējumu kopskaitu:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}.$$

Pierādāmo vienādību var pārveidot formā

$(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) + \ldots + (x_{10} - x_{10})(x_{10} + x_{10}) = 0$, jeb $(x_1 - y_1) + \ldots + (x_{10} - y_{10}) = 0$

Šī vienādība seko no otrās vienādības.

14.34. Nē, nevar. Katrā daļā, kas izgriezta no kuba, lielākais attālums starp punktiem nepārsniedz $6\sqrt{3}$ (kuba diagonāles garums). Ja savienosim šīs 20 daļas, tad lielākais attālums starp punktiem nepārsniegs $120\sqrt{3} < 216$, un taisnstūri ar izmēriem $1 \times 1 \times 216$ iegūt nevar.

14.35. Pirmais spēlētājs var uzvarēt. Ar savu pirmo gājienu viņš uzraksta skaitli 6; pēc tam spēlē drīkst izmantot tikai skaitļus 4, 5, 7, 8, 9, 10. Domās viņš sadala šos skaitļus pāros (9, 7), (8, 10), (4, 5). Uz katru otrā spēlētāja uzrakstīto skaitli a viņš atbild, uzrakstot to skaitli, kas ir vienā pārī ar a. Redzams, ka šādi spēlējot, pirmais spēlētājs uzvarēs.

14.36. Ja n ir nepāra skaitlis, tad $2^n + 65$ pēc moduļa 5 nav kvadrāts; tātad $2^n + 65$ nav vesela skaitļa kvadrāts. Tātad jāaplūko gadījums, kad n = 2k. Iegūstam vienādojumu $2^{2k} + 65 = y^2$, ko pārveidojam šādi:

$$65 = \left(y - 2^k\right)\left(y + 2^k\right).$$

Ņemot vērā, ka $y - 2^k < y + 2^k$, pastāv šādas iespējas:

$$\begin{cases} y - 2^k = 1 \\ y + 2^k = 65 \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} y - 2^k = 5 \\ y + 2^k = 13 \end{cases}.$$

Katrai sistēmai ir viens atrisinājums, kuriem atbilst n vērtības 10 un 4.

14.37. Atzīmēsim, ka AN un BN ir trijstūra ABM bisektrises; tātad N ir bisektrišu krustpunkts; no tā seko, ka arī MN ir trijstūra ABM bisektrise. No šejienes seko prasītā leņķu vienādība.

14.38. Ievietojot g = p - (a + b), ar identiskiem pārveidojumiem pārveidojam pierādāmo nevienādību par

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \left(1 - \cos(\alpha - \beta)\right) < \tfrac{1}{4}.$$

Ja $\cos(a + b) \le 0$, tad šī nevienādība ir acīmredzama.
Pretējā gadījumā nevienādību pierāda izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

14.39. Ja n = 2k, tad sadalīsim doto kvadrātu k^2 kvadrātos ar izmēriem 2×2. Tā kā katrā mazajā kvadrātā ierakstīto skaitļu summa ir 0, tad arī kopīgā visu ierakstīto skaitļu summa ir 0.
Ja n = 2k + 1, tad sadalīsim kvadrātu 2k + 1 joslā pa horizontālēm. Pirmajā joslā ierakstīsim +1, otrajā ierakstīsim -1, trešajā ierakstīsim +1, u.t.t. .Tabulā izpildīsies uzdevuma nosacījumi, un visu tabulas skaitļu summa būs vienāda ar n.
Ar indukciju pierāda, ka šī summa nevar būt lielāka par 2k + 1.

14.40. Telpa sadalās 59 daļās.

15. atklātā olimpiāde (1987./88. m.g.)

15.1. Tā kā intervālā no 1 līdz 1988 ir pāra skaits (994) nepāra skaitļu, tad visa summa ir pāra skaitlis.

15.2. Tāds, piemēram, ir skaitlis 0,5000000000555.

15.3. Nē, nevar. Ja skaitlim ir tieši divi dalītāji, tad tas ir pirmskaitlis. Tā kā pirmskaitļa pēdējais cipars nav 0 (citādi tas dalītos ar 2), tad atliek vienīgi skaitlis 100001. Taču arī šis skaitlis nav pirmskaitlis, jo tas dalās ar 11.

15.4. Dotā izteiksme ir vienāda ar
$(a+b)(c+d)+(a+b)(e+f)+(c+d)(e+f)=10\cdot10+10\cdot10+10\cdot10=300$.

15.5. a) Nevar, jo trim kvadrātiņiem, kas atrodas pie vienas virsotnes ir jābūt nokrāsotiem dažādās krāsās.
b) Var; uzzīmējiet kā !

15.6. $\frac{21}{23}\le\frac{11}{12}\le\frac{16}{17}\le\frac{391}{389}\le\frac{442}{439}$.

15.7. a) 2; b) 2^5; c) 2^{99}.

15.8. Skaitot leņķus pretēji pulksteņa rādītāja virzienam, tiks uzzīmēti stari šādos virzienos: 0°, 150°, 300°, 90°, 240°, 30°, 180°, 330°, 120°, 270°, 60°, 210°. Tālāk tie sāks atkārtoties. Kopā iznāk 12 stari.

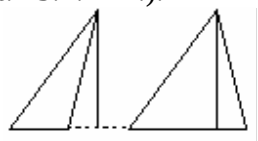
15.9. Ja visas summas būtu vienādas ar 999, tad jebkuru divu cilvēku, starp kuriem atrodas viens cilvēks, nosauktie skaitļu būtu ar dažādu paritāti. Uzskatīsim, ka pirmais cilvēks nosauca pāra skaitli (apzīmēsim 1 -- p). Tad iegūstam 3 -- n, 5 -- p, ... , 999 -- n, 1001 -- p, 2 -- n, 4 -- p, ... , 1000 -- p, 1 -- n. Iegūtā pretruna pierāda apgalvojumu.

15.10. Juris noskaidro iedomāto skaitli ar vienu šādu jautājumu:
‘‘ Andri, es iedomājos vienu no skaitļiem 1 vai 2. Vai tavs iedomātais skaitlis ir lielāks par manu iedomāto ?’’
Atbilde ‘‘nē’’ nozīmē, ka Andris iedomājies skaitli 1; atbilde ‘‘jā’’, ka Andris iedomājies skaitli 3; atbilde ‘‘nezinu’’, ka Andris iedomājies skaitli 2.

15.11. Nē, nav, jo vienai x vērtībai atbilst vairākas y vērtības.

15.12. $a^9+b^9=(a+b)(a^2-ab+b^2)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right)$.

15.13. Nē, ne noteikti; vienam no trijstūriem augstuma pamats var atrasties uz malas, bet otram uz malas pagarinājuma (skat. 15.1. zīm.).



15.1. zīm.

15.14. Ja klasē ir z zēnu un m meiteņu, tad saskaitot draudzīgo pāru skaitu, iegūsim, ka tas ir vienāds ar 10z un arī ar 10m. (Pirmajā gadījumā mēs skaitām draudzīgos pārus, uzskaitot zēnus, otrajā -- uzskaitot meitenes). No vienādības 10z = 10m seko, ka z = m.

15.15. Pietiek atzīmēt 6 punktus katras malas viduspunkta tuvumā.

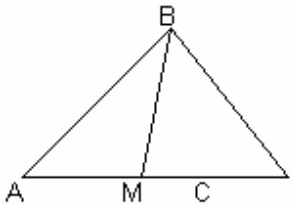
15.16. Tas seko no nevienādības

$$(ax + by) - (ay + bx) = (a - b)(x - y) > 0.$$

15.17. Ņemot divas rūtiņu lapas blakuslīnijas, mēs iegūstam paralēlas taisnes, attālums starp kurām ir 1, un neviena rūtiņu virsotne starp tām neatrodas. Šo attālumu palielināt nevar. Tiešām, ja joslas platums būtu lielāks par 1, tad aplūkosim kādu no rūtiņu lapas līnijām, kas krusto šo joslu. Nogriežņa garums, kas atradīsies joslā būs lielāks par 1, un uz šī nogriežņa atradīsies kāda rūtiņu virsotne; šī virsotne piederēs joslai.

15.18. Dalot ar b, mēs katru reizi iegūstam atlikumu mazāku par b. Šis atlikums nav 0, jo tad mēs neiegūtu periodisku decimāldaļu, jo dalīšanas process beigtos. Tātad iespējamo atlikumu skaits ir b - 1, un, tiklīdz atlikumi ir vienādi, sākas atkārtošanās. Tas nozīmē, ka atkārtošanās sāksies ne vēlāk kā pēc b - 1 soļa, t.i., periods satur ne vairāk kā b -1 ciparu.

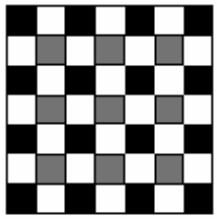
15.19. Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka trijstūris ABC sagriezts divos vienādos trijstūros ar nogriezni BM (skat. 15.2. zīm.).



15.2. zīm.

Tad leņķis $\angle AMB$ ir vienāds ar vienu no leņķiem $\angle MBC$, $\angle MCB$ vai $\angle BMC$. Tā kā $\angle AMB \neq \angle MBC$ (no vienādības sekotu, ka AC || BC), un $\angle AMB \neq \angle MCB$ (no vienādības sekotu, ka BM || BC), tad $\angle AMB = \angle BMC$. Tas nozīmē, ka BM ir trijstūra ABC augstums; tas sadala trijstūri divos vienādos taisnleņķa trijstūros; to hipotenūzas AB un BC ir vienādas, bet tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka sākotnējam trijstūrim visas malas ir dažādas.

15.20. Atzīmētajās 16 melnajās rūtiņās vabole var ierāpot tikai no 9 pelēkajām rūtiņām (skat. 15.3. zīm.).



15.3. zīm.

Tātad vismaz 7 no melnajām rūtiņām paliks tukšas. Atliek parādīt, ka vaboles var pārvietoties tā, ka tukšas paliks tieši 7 rūtiņas. Sadalīsim visas baltās rūtiņas pa pāriem un 9 melnās pa pāriem ar 9 pelēkajām rūtiņām (vienā pārī rūtiņas ar kopīgu stūri). Vaboles no viena pāra samainīsies vietām; atlikušās 7 var iet kur tām patīk. Redzam, ka brīvas paliks tikai 7 rūtiņas.

15.21. Ja aritmētiskās progresijas diference ir d, tad skaitļi $2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_n}$ veido ģeometrisko progresiju ar kvocientu 2^d, jo

$$\frac{2^{a_{k+1}}}{2^{a_k}} = 2^{a_{k+1}-a_k} = 2^d .$$

15.22. Skaitlim $y = x^{12} - 1$ ir dalītāji $x-1, x^2-1, x^3-1, x^4-1, x^6-1$. Pārējos piecus dalītājus iegūst izdalot y ar katru no norādītajiem dalītājiem. Pamatojiet, ka visi norādītie dalītāji ir dažādi!

15.23. No Talesa teorēmas seko, ka $\frac{MB}{MA} = \frac{NB}{NC} = \frac{KD}{KC} = \frac{LD}{LA}$. No vienādības $\frac{MB}{MA} = \frac{LD}{LA}$ un Talesa teorēmas seko, ka ML || BD.

15.24. Doto vienādību varam pārrakstīt formā $a\left(a^4 - a^2 + 1\right) = 2$. Tā kā $a^4 - a^2 + 1 > 0$ visiem a, tad arī a > 0. Vienādību var pārveidot formā $a \cdot \frac{a^6+1}{a^2+1} = 2$. No šejienes $a^6 = 2 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 > 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

15.25. Aplūkosim visas pilsētas, uz kurām var aizlidot no galvaspilsētas (arī ar pārsēšanos). Pieņemsim pretējo, ka šajā grupā nav Tullas. No galvaspilsētas iziet 31 aviolīnija, no pārējām k šīs grupas pilsētām -- 16 aviolīnijas. Pavisam kopā šajā grupā ir $\frac{1}{2}(31+16k) = 8k + 15\frac{1}{2}$ aviolīnijas (dalām ar 2, jo katru aviolīniju ieskaita divas reizes). Iegūta pretruna, jo aviolīniju skaitam jābūt veselam skaitlim. Apgalvojums pierādīts.

15.26. Nē. Ņemot x = 60°, pirmā vienādība izpildās, bet otrā nē.

15.27. No 4 trijstūriem, kuru laukumi ir vienādi, atradīsies divi ar kopīgu malu. Uzskatīsim, ka tie ir trijstūri ABC un BCD. Šiem trijstūriem ir vienādi laukumi un kopīga mala BC; tātad arī atbilstošie augstumi ir vienādi. Tas nozīmē, ka punkti A un D atrodas vienādā attālumā no taisnes BC; tātad sešstūra mala BC ir paralēla diagonālei AD.

15.28. Ciparus, kuri sastopami bezgalīgajā decimāldaļā A tikai galīgu skaitu reižu uzrakstīsim jaunās decimāldaļas B sākumā. Pārējie cipari a, b, ... , c sastopami decimāldaļā A bezgalīgu skaitu reižu. Turpināsim decimāldaļu B, atkārtoti rakstot ciparus ab...cab...cab...c... . Redzam, ka decimāldaļa B ir periodiska (periods ab...c) un iegūta no A pārkārtojot ciparus.

15.29. Ievedīsim rūtiņu lapā koordinātu sistēmu ar sākumpunktu dotā riņķa centrā un asīm paralēlām rūtiņu līnijām. Pieņemsim, ka kāda rūtiņu virsotne P(x, y) pieder dotajai riņķa līnijai. Tad, šai riņķa līnijai pieder 8 rūtiņu virsotnes ar koordinātēm $(\pm x, \pm y), (\pm y, \pm x)$ (virsotne P ieskaitīta). Pieņemsim, ka visos gadījumos katrā šajā 8 punktu grupā visi punkti ir dažādi. Tad visas rūtiņu virsotnes uz dotās riņķa līnijas apvienojas grupās pa 8 punktiem, bet tas nozīmē, ka šo virsotņu skaits dalās ar 8. Tā kā

1988 nedalās ar 8, tad kādā no grupām dažiem punktiem ir jāsakrīt. Tas iespējams tikai šādos gadījumos: x = 0, y= 0 vai $x = \pm y$. Pirmajos divos gadījumos punkts P atrodas uz koordinātu ass; tas nozīmē, ka R ir vesels skaitlis. Pēdēja gadījumā punkts P atrodas uz koordinātu asu leņķu bisektrises; tas nozīmē, ka $R\sqrt{2}$ ir vesels skaitlis.

15.30. Kāpināsim doto vienādību kvadrātā. Iegūsim

$$x^{10} + 2x^5y^5 + y^{10} = 4x^4y^4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^4y^4(1 - xy) = \left(x^5 - y^5\right)^2.$$

Ja xy = 0, tad 1- xy = 1^2.

Ja xy $\neq$ 0, tad $1 - xy = \left(\frac{x^5 - y^5}{2x^2y^2}\right)^2$.

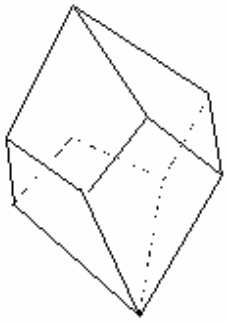
15.31. Prasīto pierāda, atkārtoti pielietojot funkciju reizinājuma atvasinājuma formulu.

15.32. Pielietosim nevienādību par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko skaitļiem 2a, b un b. Iegūsim

$$\sqrt[3]{2ab^2} \le \frac{2a + b + b}{3} = \frac{2}{3}(a + b) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad ab^2 \le \frac{4}{27}.$$

Vienādība izpildās, ja $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$.

15.33. Tāds daudzskaldnis attēlots 15.4. zīmējumā.



15.4. zīm.

15.34. Izvēlēsimies patvaļīgu punktu O, un vektoru $\overline{OX}$ apzīmēsim ar x (X ir patvaļīgs burts). Tad

$$m = \frac{1}{2}(a + b), n = \frac{1}{2}(c + d), k = \frac{1}{2}(b + c), l = \frac{1}{2}(d + e),$$

$$x = \frac{1}{2}(m + n) = \frac{1}{4}(a + b + c + d), y = \frac{1}{2}(k + l) = \frac{1}{4}(b + c + d + e),$$

$$\overline{XY} = y - x = \frac{1}{4}(e - a) = \frac{1}{4}\overline{AE}$$

Protams, arī vektoru garumiem izpildās atbilstošā vienādība.

15.35. Ja A_1A_2 ... A_n ir dotais daudzstūris, tad aplūkosim vektorus $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_nA_1}$. To koordinātes apzīmēsim ar (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n), bet garumus ar a_1, a_2, ...

, a_n. Mums jāpierāda, ka $\sum a_k$ ir pāra skaitlis. Izmantojot acīmredzamu kongruenci $u^2 \equiv u \pmod 2$ un to, ka aplūkoto vektoru summa ir 0, iegūstam prasīto.

$$\sum a_k \equiv \sum a_k^2 \equiv \sum x_k^2 + \sum y_k^2 \equiv \sum x_k + \sum y_k = 0 \pmod 2.$$

15.36. Ja trīs no dotajiem skaitļiem ir vienādi, tad vai nu sin x = cos x, vai arī tg x = ctg x. Šādas vienādības var izpildīties tikai, ja $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. Nevienai no šīm x vērtībām trīs no dotajiem skaitļiem nav vienādi.

15.37. Dotā summa $\frac{n(n+1)}{2}$ dalās ar 1988 = 4 × 7 × 71, ja n(n+1) dalās ar 8 × 7× 71. No tā, ka 71 dala n(n+1) seko, ka 71 dala n vai 71 dala n +1. Tātad skaitli n var izteikt vai nu formā 71k vai 71k - 1. Pārbaudot k vērtības augošā secībā, atrodam, ka mazākais n, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi ir 8 × 71 -1 = 567.

15.38. Pieņemam, ka $x_1 > x_2$. Tad no vienādības $x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3$ seko, ka $x_2 < x_3$, jo $x_3 - x_2 = x_1^3 - x_2^3 > 0$. Līdzīgi iegūstam, ka $x_3 > x_4$, $x_4 < x_5$, $x_5 > x_1$, $x_1 < x_2$. Iegūta pretruna. Analoģiski iegūstam pretrunu, ja $x_1 < x_2$. Tātad $x_1 = x_2$; no šejienes seko, ka visi nezināmie ir vienādi. Apzīmēsim to kopīgo vērtību ar x. Tad $x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x + 5) = 0$; x = 2.
Atbilde: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$.

15.39. Nē, ir iespējams izvēlēties punktus tā, ka no norādītajiem nogriežņiem nevar izveidot trijstūra piramīdu. Punktu M izvēlas netālu no trijstūra centra, bet tā, lai nogriežņi MA, MB, MC būtu dažādi un atšķirtos ne mazāk kā par e. Punktu N izvēlamies tā, ka NA < e. Tā kā NA ir viena no trijstūra piramīdas šķautnēm, tad tā ieiet divos trijstūros, bet tas nav iespējams, jo izsauc pretrunu ar trijstūra nevienādību.

15.40. Vispirms atzīmēsim, ka nogriežņi, kas savieno regulāra 1988-stūra virsotnes veido 1988 virzienus plaknē. Tātad lauztās līnijas posmi, kas veido 1988 nogriežņus, satur nogriežņus no visiem 1988 virzieniem. Jāpierāda, ka tas nav iespējams.

16. atklātā olimpiāde (1988./89. m.g.)

16.1. Nē, ne visām. Piemēram, ja a = b = c = 0, bet d = 1, tad iegūstam pretrunīgu vienādību 0 = 8.

16.2. No dotā a | b, b | c, c | d seko, ka a | d. Tā kā arī d | a, tad a = d. Līdzīgi pierāda, ka visi skaitļi a, b, c, d ir vienādi. Tātad a + b + c + d = 4a dalās ar 4.

16.3. Šī summa ir vienāda ar $\frac{1989 \cdot 1990}{2}$.

16.4. Kastītē A ieliksim visas kartiņas, kuru pirmais cipars ir 1; kastītē B -- kartiņas, kuru pirmais cipars ir 2; kastītē C -- kartiņas, kuru pirmais cipars ir 3. Redzam, ka uzdevuma nosacījumi izpildās.

16.5. Jā, var. Ievedīsim kustības virzienu šādi:

$1 \to 2, 3, 4, 5$; $2 \to 3, 4, 5, 6$; $3 \to 4, 5, 6, 7$; $4 \to 5, 6, 7, 8$; $5 \to, 6, 7, 8, 9$;

$6 \to 7, 8, 9, 1$; $7 \to 8, 9, 1, 2$; $8 \to 9, 1, 2, 3$; $9 \to 1, 2, 3, 4$.

16.6. Tā kā veselie skaitļi no - 1000 līdz 1000 summā dod 0 (jo visi nenulles saskaitāmie saīsinās), tad meklējamā summa ir vienāda ar

$$1001 + 1002 + 1003 + 1004 + 1005 = 5015.$$

16.7. Uz dotā 1 m gara nogriežņa atzīmējam punktus, kādos to sadala izvietotie zilie un sarkanie nogriežņi. Atliekam papildus punktus tā, lai visi nogriežņi, kādos sadalīts 1 m nogrieznis būtu dažādi. Visus sākotnējos nogriežņus sadalām tā, kā atzīmēts uz 1 m nogriežņa. Redzams, ka uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

16.8. Iespējamie starpības moduļi pieņem vērtības no 1 līdz 1988; tātad pieņem 1988 vērtības. Pavisam ir 1989 pāri, kuru starpības moduli aprēķina. No Dirihlē principa seko, ka vismaz divi starpību moduļi būs vienādi.

16.9. a) Jā, var. Uz katras no dotajām taisnēm jāņem tik gari nogriežņi, kas satur visus taišņu krustpunktus. Tad taišņu un nogriežņu krustpunktu skaits būs vienāds.
b) Nē, ne noteikti. Var uzzīmēt 4 nogriežņus, kas krustojas 2 punktos, bet nevar uzzīmēt 4 taisnes, kas krustojas 2 punktos.

16.10. Aplūkosim kartiņu 211. Tā nevar atrasties kastē A, jo kastē A atrodas kartīte 122, ar kuru tai nesakrīt neviens cipars; tā nevar atrasties arī kastē B, jo tajā atrodas kartiņa 333. Tātad kartiņa 122 atrodas kastē B. Līdzīgi pamato, ka kartīte 311 atrodas kastē B (neatrodas kastē A, jo nav kopīgu ciparu ar 122; neatrodas kastē B, jo nav kopīgu ciparu ar 222); kartīte 211 atrodas kastē B; kartīte 133 atrodas kastē A; kartīte 233 -- kastē B; kartīte 312 -- kastē C.

16.11. Trijstūru COB un AOD vienādība seko no trijstūru vienādības 2. pazīmes. Tiem ir vienādi leņķi $\angle COB = \angle AOD$ un vienādas leņķa C piemalas.

16.12. Apzīmēsim attiecību $\frac{x}{y}$ ar t. Tad x = ty, a = tb, c = td. No šejienes seko, ka

$$\frac{x+a}{y+b} = \frac{t(y+b)}{y+b} = t = \frac{t(y+b+d)}{y+b+d} = \frac{x+a+c}{y+b+d}.$$

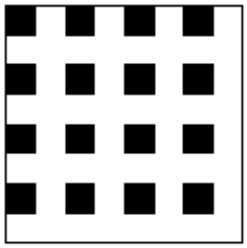
16.13. Kāpinot kvadrātā doto skaitli, iegūstam

$$\underbrace{99\ldots9}_{1989}^{2} = \underbrace{99\ldots9}_{1988}8\underbrace{00\ldots0}_{1988}1.$$

Šāda skaitļa ciparu summa ir 9×1989.

16.14. Apgalvojumu pierādām ar indukciju pēc taišņu skaita n.
Pieņemam, ka k taišņu krustpunkti jau nokrāsoti prasītajā veidā. Tad novelkot nākošo taisni, tā krusto dažās no iepriekšējām. Ja A ir kāds no šiem krustpunktiem, tad to nokrāsojam krāsā, kas nesakrīt ar blakus esošo krustpunktu krāsām. Apgalvojums pierādīts.

16.15. Viņiem to neizdosies izdarīt. Aplūkosim kvadrātu 8×8, kurā atzīmētas rūtiņas tā, kā tas parādīts 16.1 zīm.



16.1. zīm.

Katrs kvadrāts 2×2 pārklāj tieši vienu melno rūtiņu, bet katrs taisnstūris 1×4 pārklāj pāra skita melno rūtiņu. Tāpēc, lai pārklātu šo kvadrātu vajag pāra skaitu kvadrātu 2×2. Ja šādu kvadrātu skaitu izmaina par 1, tad to vairs izdarīt nevar.

16.16. Nē nevar. Pieņemsim, ka skaitļi m un n ir savstarpēji pirmskaitļi, kuriem izpildās dotā vienādība; tad $3n^2 = m^2$. Tātad m dalās ar 3; m = 3k. Ievietojot vienādībā, iegūstam $n^2 = 3k^2$. Tātad arī n dalās ar 3, un n un m nav savstarpēji pirmskaitļi. Iegūtā pretruna pierāda, ka dotā vienādība nekad neizpildās.

16.17. Tā kā CFME ir taisnstūris, tad FE = CM. Attālums CM no punkta C līdz taisnes AB punktam būs vismazākais, ja CM būs perpendikuls pret taisni AB. Tātad par punktu M ir jāizvēlas augstuma pamats, kas vilkts no virsotnes C.

16.18. Lielāko vērtību dotā izteiksme sasniedz, ja visi x_k ir vienādi ar 1; tā ir 1989. Lai noskaidrotu, kāda ir mazākā izteiksmes vērtība, atzīmēsim, ka visi summas reizinājumi $x_k x_{k+1}$ nevar būt vienādi ar -1. Ja tas būtu tā, tad skaitļu x_k un x_{k+1} būtu pretējas visiem k. Tas nozīmē, ka tās būtu vienādas visiem pāra skaitlim k un visiem nepāra skaitļiem k; bet tādā gadījumā $x_{1989}\, x_1 = -1$. Tātad summā ir vismaz viens skaitlis - 1; un visa summa ir - 1987. Tādu summu var iegūt, ņemot $x_i = (-1)^I$.

16.19. Ja kāds no dotā četrciparu skaitļa cipariem ir pāra skaitlis vai 5, tad, novietojot to beigās, iegūsim skaitli, kas dalās ar 2 vai 5; šis skaitlis nebūs pirmskaitlis. Atliek 4 cipari 1, 3, 7, 9. Tā kā dotā skaitļa visi cipari ir dažādi, tad skaitlis sastāv tieši no šādiem cipariem. Tad izvēlēsimies skaitli 1397, kas nav pirmskaitlis, jo dalās ar 11.

16.20. Tāds pāris ir (3482, 531).

16.21. Ja figūras perimetrs ir P, tad regulāra trijstūra laukums ir $\frac{\sqrt{3}}{36}P^2$, bet kvadrāta laukums ir $\frac{1}{16}P^2$. Salīdzinot šos skaitļus, redzam, ka kvadrāta laukums ir lielāks.

16.22. Skaitļus, kas nepārsniedz 1000 un nedalās ar 2 vai 5 var uzrakstīt formā

$$10k+1,\quad 10k+3,\quad 10k+7,\quad 10k+9,\quad 0\le k\le 99.$$

Aprēķinot šādu 4 aritmētisko progresiju summu, iegūsim atbildi 200 000.

16.23. Ja n < 10, tad prasītā nevienādība neizpildās, jo vienādības kreisā puse mazāka par 10, bet kreisā ir ne mazāka par 10. Vērtība n = 10 der, jo varam ņemt šādas mainīgo vērtības $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1, x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = -1.$

16.24. Ar S apzīmēsim dotā leņķa virsotni, ar O -- trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru. Pierāda, ka $\angle SAO$ lielums ir fiksēts.

16.25. Nē, nevar. Pieņemsim pretējo, ka to izdevies izdarīt. Tādā gadījumā kastes skaldne ar izmēriem 89×1989 pārklāta ar ar klucīšu skaldnēm, kuru izmēri ir 1×5 vai 5×5. Tātad skaldnes laukumam būtu jādalās ar 5, bet tas tā nav. Iegūta pretruna.

16.26. Pakāpeniski iegūstam

$$\sin 2x = \sin(5x-3x) = \sin 5x\cdot\cos 3x - \cos 5x\cdot\sin 3x = 0;$$

$$\sin x = \sin(3x-2x) = \sin 3x\cdot\cos 2x - \cos 3x\cdot\sin 2x = 0.$$

16.27. Piemēram, tā: $(x+|x|)\cdot(y+|y|) > 0$.

16.28. Jā, var. Savienosim ar hordām virsotnes ar numuriem
1 - 33, 2 - 32, 3 - 31, ... , 16 - 18; 34 - 63, 35 - 62, ... , 40 - 57;
43 - 56, 44 - 55, ... , 48 - 51; 17 - 50; 41 - 42; 49 - 64.

16.29. Pierādījums balstās uz teorēmu par ievilktajiem leņķiem.

16.30. Varam uzskatīt, ka $a\le b\le c$. Pierādāmo nevienādību iegūstam, saskaitot divas acīmredzamas nevienādības $a(b-a)(c-a)\ge 0$ un $(c-b)^2(c+b-a)\ge 0$.

16.31. 1) Nē; piemēram, tas tā nav, ja x = 30° un y = 150°.
2) Jā, jo $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\sin^2 y}$, un tāpēc $|2\sin x\cos x| = |2\sin y\cos y|$.

16.32. Dotās nevienādības sareizinot un rezultāta abas puses izdalot ar abcd, iegūstam abcd < 1. Tas nevar būt, ja skaitļi a, b, c, d visi ir lielāki par 1.

16.33. Uz malas AC izvēlamies punktus T un V tā, ka ET || FV un TM = MV. Tad TEFV ir trapece, M -- malas TV viduspunkts. Tātad

$$S_{EFM} = S_{ETM} + S_{FMV} < S_{AEM} + S_{MFC}.$$

16.34. Apzīmēsim dotā trijstūra malas ar a, b, c. Tad visu aplūkojamo trijstūru ABM, BCM, ACM laukumi ir vienādi ar $\frac{1}{6}ab$. Tātad mums ir jāpierāda, ka veseliem skaitļiem

a, b, c, kuriem $a^2 + b^2 = c^2$, skaitlis ab dalās ar 12. Atsevišķi pierāda, ka ab dalās ar 3 un ar 4.

16.35. Aplūkosim procesu, kas sākas ar skaitļiem 1989, 1989, 1989, 1989. Pārbaudiet, ka pēc dažiem soļiem mēs iegūsim skaitļus 9725, 7461, 6966, 9 ! Tā kā aprakstītais process ir ciklisks, tad skaitļu grupa 1989, 1989, 1989, 1989 atkal atkārtosies. Tas nozīmē ka no skaitļiem 9725, 7461, 6966, 9 pēc kāda laika tiks iegūta skaitļu grupa 1989, 1989, 1989, 1989.

16.36. Vienādojumu pārveido formā $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$.

16.37. Ja skaitlis $n^2 + 1$ dalās ar $n + 1$, tad arī skaitlis $2 = (n^2 + 1) - (n - 1)(n + 1)$ dalās ar $n + 1$. Tātad $n = 1$.

16.38. Parādiet, ka 10 torņus var izvietot tā, ka uzdevuma nosacījumi izpildās.
Pierādīsim, ka lielāku torņu skaitu izvietot nevar. Ja torņu skaits būtu lielāks par 10, tad atrastos trīs horizontāles, katrā no kurām ir 2 torņi. Tiem visiem jāatrodas dažādās vertikālēs. Šajās 6 vertikālēs citu torņu nav; atlikušajās 2 vertikālēs var novietot ne vairāk par 4 torņiem. Kopā iznāk ne vairāk kā 10 torņi.

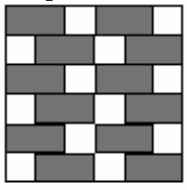
16.39. Izvēlamies tādu skaitli a, kuram $a^2 \le n < (a+1)^2$, un tādu skaitli b, kuram $(b-1)^2 < n - a^2 < b^2$. Pārbaudiet, ka šiem skaitļiem izpildās prasītās nevienādības.

16.40. Trijstūri jāpārloka pār vienu no tā bisektrisēm. Ja trijstūra malu garumi ir $a \le b \le c$, tad iegūto figūru laukumi būs $\frac{b}{a+b}$, $\frac{c}{a+c}$, $\frac{c}{b+c}$. Jāpierāda, ka vismaz viens no šiem skaitļiem ir mazāks par $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

17. atklātā olimpiāde (1989./90. m.g.)

17.1. Nē, ne visām. Piemēram, ja a = b = c = 0, bet d = 1, tad iegūstam pretrunīgu vienādību 0 = 8.

17.2. To var izdarīt ,piemēram, tā, kā tas parādīts 17.1 zīmējumā.



17.1. zīm.

17.3. Tā kā rezultātā iegūtais skaitlis dalās ar 37 (jo dalās ar 111), tad arī sākotnējais skaitlis dalās ar 37. Pārbaude parāda, ka der tikai skaitlis 37. Tiešām,
$37 \times 3 \times 7 = 777$; $74 \times 7 \times 4 = 2072$.

17.4. Cipars 1 uzrakstīts 1580 reizes.

17.5. Nē, nevar būt.

17.6. No 5 punktiem vismaz divi atradīsies vienā no četriem koordinātu plaknes kvadrantiem. Šiem punktiem gan abscisu, gan ordinātu reizinājums ir pozitīvs.

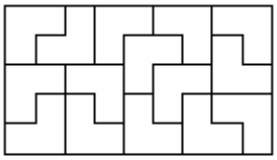
17.7. Tādi, piemēram, ir skaitļi 2 un 960.

17.8. Ar vienu taisni var pārsvītrot rūtiņas, kas iezīmētas vienā krāsā (skat. 17.2. zīm.).

17.2. zīm.

17.9. Nē, šīm summām ir jāatšķiras par pāra skaitli.

17.10. Skat. 17.3. zīm.

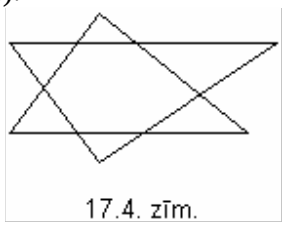


17.3. zīm.

17.11. No dotā seko, ka šo funkciju grafiki ir taisnes bez kopīgiem punktiem -- tātad paralēlas taisnes. To virzienu koeficienti a un c ir vienādi; tātad a - c = 0.

17.12. $3599 = 60^2 - 1 = (60-1)(60+1)$; $359999 = 600^2 - 1 = (600-1)(600+1)$.
Tātad šie skaitļi nav pirmskaitļi.

17.13. Jā, eksistē (skat. 17.4. zīm.).



17.4. zīm.

Tāds 13-stūris neeksistē, jo ne vairāk kā divas daudzstūra malas var atrasties uz vienas no pārklājuma trijstūra malām; tātad daudzstūrim nevar būt vairāk par 12 malām.

17.14. Saskaitot visu izveidoto k trijstūru leņķus, iegūstam vienādību

$$k \cdot 180° = 10 \cdot 360° + 180°.$$

No šejienes iegūstam, ka trijstūru skaits ir 21.

17.15. Ar a_i apzīmēsim cik dažādas vērtības pieņem konfekšu skaits kastītēs pēc i-tās dienas. Sākumā $a_0 = 100$. Izpildās nevienādība $a_{i+1} \geq \left[\frac{a_i}{2}\right]$ (pamatojiet to!). Tātad $a_1 \geq 50$, $a_2 \geq 25$, $a_3 \geq 12$, $a_4 \geq 6$, $a_5 \geq 3$, $a_6 \geq 1$. Redzam, ka nepieciešamas vismaz 7 dienas, lai apēstu visas konfektes.

Septiņās dienās to izdarīt var: apēdot pirmajā dienā 50 konfektes no visām kastītēm, kurās to ir vismaz 50; otrajā 25 no visām kastītēm, kurās to ir vismaz 25; trešajā -- 13 ; ceturtajā -- 6; piektajā -- 3; sestajā -- 2; septītajā -- vienu.

17.16. Pierādāmās vienādības seko no vienādības $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

17.17. Apgalvojums seko no tā, ka trapece MNKL ir simetriska attiecībā pret trapeces ABCD pamatu vidusperpendikulu.

17.18. Vienādojumu pārveidojam formā $x(x+1)(x^2 + x + 3) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

17.19. Tā kā ir 10 komandas un iespējamo uzvaru skaits var pieņemt 10 vērtības no 0 līdz 9, tad visas šīs vērtības realizējas. Tas nozīmē, ka ir komanda A_1, kas uzvarējusi visās 9 spēlēs. Komanda A_2, kurai ir 8 uzvaras, ir zaudējusi komandai A_1, tātad uzvarējusi visas pārējās; Komanda A_3, kurai ir 7 uzvaras, ir zaudējusi komandām A_1 un A_2, tātad uzvarējusi visas pārējās; utt. Rezultātā iegūstam, ka katra komanda ir uzvarējusi visas tās komandas, kurām ir mazāk uzvaru. Tātad spēlē starp A un B uzvarēja komanda A.

17.20. Tā kā skaitļu |x - y| un x + y paritātes ir vienādas, tad dotās izteiksmes paritāte sakrīt ar skaitļa 1 + 2 + ... + 10 = 55 paritāti. Tātad izteiksmes vērtība ir nepāra skaitlis, un tā ir ne mazāka kā 1. Parādiet, kā jāizvēlas mainīgo x_k vērtības, lai izteiksmes vērtība būtu vienāda ar 1.

17.21. Ievedam jaunus mainīgos $u = x^2$, $v = y^2$.

Atbilde: $\left\{\left(\pm 1, \pm\sqrt{2}\right), \left(\pm\sqrt{2}, 1\right)\right\}$.

17.22. Nē, nevar. Divi no sareizinātajiem skaitļiem dalās ar 5, bet pieci -- ar 2. Tātad reizinājums dalās ar 100 un nevar saturēt savā pierakstā tikai vienu nulli.

17.23. Apzīmēsim saknes ar x_1 un x_2. No Vjeta teorēmas $x_1 + x_2 = a$ un $x_1 \cdot x_2 = 9a$; tātad $x_1 x_2 = 9(x_1 + x_2)$, no kurienes iegūstam

$$(x_1 - 9)(x_2 - 9) = 81.$$

Atrisinot šo vienādojumu un veicot pārbaudi, atrodam, ka der a vērtības 36, 48, 100.

17.24. Izdarām sekojošas svēršanas: A ar B, A ar C, A ar D, A ar E, A ar F, A ar G. Rezultātā mēs noskaidrojam, kuras no šīm 7 monētām ir īstas (paskaidrojiet kā!). Tā kā mums zināms īsto monētu skaits, tad par atlikušo monētu H mēs arī varam pateikt kāda tā ir.

17.25. Pierādījumā izmantojam pagriezienu par 90°.

17.26. Ja n = 1, tad $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Ja n > 1, tad vienlaicīgi izpildās vienādības $\cos x = 0$ un $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 0$, kas nav iespējams.

17.27. To var izdarīt.

17.28. Novilksim plakni p caur punktiem A,C un D. Aplūkojot nogriezni BE, redzam, ka B atrodas virs p, bet E -- zem p. Aplūkojot nogriezni CE secinām, ka E atrodas virs p, bet tā ir pretruna.

17.29. Andris to var izdarīt, nosaucot 5 veselus skaitļus, kas summā dod 0. Tad, neatkarīgi no tā, kā kādā veidā tie tiks ievietoti zvaigznīšu vietā, vienādojumam būs sakne 1.

17.30. Atrisinot vienādojumu sistēmu, secinām, ka diviem grafikiem ir ne vairāk kā 2 krustpunkti. Ar indukciju pierāda, ka tādā gadījumā n grafiki sadala plakni ne vairāk kā $2 + (3 + 5 + 7 + \ldots (2n-1)) = n^2 + 1$ apgabalos.
Šāds apgabalu skaits tiek sasniegts, ja katrs grafiks krusto katru citu 2 punktos un nekādi trīs grafiki nekrustojas vienā punktā. Tātad 100 šādi grafiki var sadalīt plakni 10001 apgabalos.

17.31. Jā, tāds, piemēram, ir polinoms $P(x) = x^2 + 10001$. Mums jāpārbauda nevienādība $x^2 + 10001 > 100 \cdot 2x$, kas seko no tā, ka atbilstošā kvadrāttrinoma $x^2 - 200x + 10001$ diskriminants ir mazāks par 0.

17.32. Katra šķautne perpendikulāra 8 citām šķautnēm; tātad pavisam ir $\frac{8 \cdot 12}{2} = 18$ savstarpēji perpendikulāru šķautņu pāri. Katra skaldnes diagonāle perpendikulāra 2 citām skaldņu diagonālēm; tātad pavisam ir 12 šādi pāri. Katra šķautne ir perpendikulāra 4 diagonālēm; tātad pavisam ir 12 × 4 = 48 šādi pāri.
Tātad meklējamo pāru kopskaits ir 48 + 48 + 12 = 108.

17.33. Apzīmēsim atsvarus (un to svarus) ar a, b, c, d. Pirmajā svēršanā nosveram kopā a un b. Ja a + b = 18 vai a + b = 20, tad par atsvariem a un b viss noskaidrots, un ar atlikušajām divām svēršanām nosveram atsevišķi c un d.
Atliek aplūkot gadījumu, kad a + b = 19. Tad nosveram kopā b un c. Ja svars ir 18 vai 20, tad par atsvariem a, b, c viss noskaidrots. Ar pēdējo svēršanu noskaidrojam atsvara d svaru.

Atliek aplūkot gadījumu, kad a + b = 19 un b + c = 19. Tad nosveram kopā a, c un d. Tā kā a = c, tad mēs faktiski esam nosvēruši 2a + d. Atsvara d svaru mēs tagad nosakām, zinot skaitļa 2a + d paritāti. Tālāk nosakām a no pēdējā rezultāta; c -- no vienādības c = a; b -- no vienādības a + b = 19.

17.34. Tāda četrstūra lielākais iespējamais laukums ir $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

17.35. Katra ziloņa svars ir 5 tonnas.

17.36. Virkne 2^n (mod 10) ir periodiska ar periodu (2, 4, 8, 6).
Tātad skaitļa 2^{1990} pēdējais cipars ir 4.
Tā kā 3^{1990}, dalot ar 4, dod atlikumā 1, tad $2^{3^{1990}}$ pēdējais cipars ir 2.

17.37. Jā, var gadīties. Pieņemsim, ka doti skaitļi $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tie var atbilst gan vērtībai x = p/6, gan vērtībai x = p/3.

17.38. Pierādījumā tiek izmantota formula, ka divu savstarpēji pieskarošu riņķa līniju ar rādiusiem R un r kopīgās pieskares garums ir $2\sqrt{Rr}$. Vispirms pierādiet šo apgalvojumu.

17.39. Jā, eksistē. Ņemot par pamatu regulāru trijstūra prizmu, uz katra tās pamata izveidojam grafu tā, lai no katras virsotnes izietu tieši 5 šķautnes.

17.40. Torte jāsagriež p + q - 1 gabalos. To var izdarīt, sagriežot torti p vienādos gabalos, un, sākot no tās pašas vietas, q vienādos gabalos.

18. atklātā olimpiāde (1990./91. m.g.)

18.1. Tā kā rezultātā iegūtais skaitlis dalās ar 37 (jo dalās ar 111), tad arī sākotnējais skaitlis dalās ar 37. Pārbaude parāda, ka der tikai skaitlis 37. Tiešām,
$37 \times 3 \times 7 = 777$; $74 \times 7 \times 4 = 2072$.

18.2. Jā, var. Piemēram, tā, kā parādīts zīmējumā

18.1. zīm.

18.3. Ja visu skaitļu summu, kas uzrakstīta uz zilajām kartiņām, pareizināsim ar visu skaitļu summu, kas uzrakstīta uz sarkanajām kartiņām, tad iegūsim prasīto summu: $(1+2+\cdots+10)(11+12+\cdots+20) = 8525$.

18.4. Nē, nevar. Ja rūtiņu kvadrātu iekrāsosim šahveida formā, tad atlikušajā daļā būs 32 baltas un 30 melnas rūtiņas; apstaigājot rūtiņas, katru reizi mainās lauciņa krāsa, tātad balto un melno rūtiņu skaitam būtu jābūt vienādam.

18.5. Nākošā rindiņa būs šāda: 1113213211, kas veidojās, lasot iepriekšējās rindiņas ciparus šādā veidā: viens vieninieks, viens trijnieks, divi vieninieki, trīs divnieki, viens vieninieks.

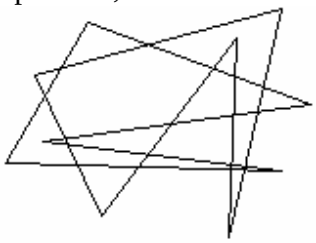
18.6. Jā, var. Piemēram, saskaitot 1991 reizi daļas $\frac{1991}{1992}$, iegūstam skaitli, kas lielāks par 1990, jo $1991\cdot\frac{1991}{1992}>1991\cdot\frac{1990}{1991}=1991.$

18.7. No 5 punktiem vismaz divi atradīsies vienā no četriem koordinātu plaknes kvadrantiem. Šiem punktiem gan abscisu, gan ordinātu reizinājums ir pozitīvs.

18.8. Apzīmēsim dotos skaitļus ar a, b, c, d, e. No dotajām kongruencēm $a+c+d\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ un $b+c+d\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ seko, ka $a\equiv b(\mathrm{mod}\,5)$. Līdzīgi iegūstam, ka $a\equiv c(\mathrm{mod}\,5)$. Tātad $3a\equiv a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, un skaitlis a dalās ar 5. Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie skaitļi dalās ar 5.

18.9. Nē, nevar.

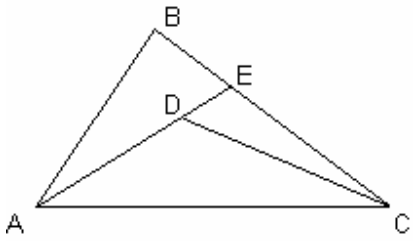
18.10. Piecstūri var krustoties 18 punktos, kā tas redzams 18.2 zīmējumā.



18.2. zīm.

18.11. Trīs no taišņu virziena koeficientiem ir pozitīvi skaitļi, bet viens negatīvs. Tātad, starp skaitļiem a, b, c, d tieši trīs ir pozitīvi skaitļi. Aplūkojot taišņu krustpunktus ar Oy asi, redzam, ka no taišņu vienādojumu brīvajiem locekļiem (skaitļiem a, b, c, d) divi ir negatīvi. Iegūta pretruna, kas norāda, ka zīmējumā attēlotās taisnes nevar būt doto funkciju grafiki.

18.12. Taisnes AD krustpunktu ar BC apzīmēsim ar E (skat. 18.3. zīm.).



18.3. zīm.

Tā kā trijstūra DEC ārējais leņķis $\angle ADC$ ir vienāds ar $\angle AEC$ un $\angle ECD$ summu, tad $\angle ADC > \angle AEC$. Līdzīgi, aplūkojot trijstūri ABE, secinām, ka $\angle AEC > \angle ABC$. No šejienes seko prasītā nevienādība.

18.13. Jā, var. Uz vienas kartiņas uzrakstīsim skaitli 2, bet uz pārējām -- ‘‘-1’’.

18.14. Apzīmēsim ar x pāru skaitu, kuros stāv blakus divi zēni; ar y -- pāru skaitu, kuros stāv blakus meitene un zēns un ar z -- pāru skaitu, kuros stāv blakus divas meitenes. Tā kā katrs bērns ieskaitīts divos pāros, tad iegūstam vienādības $100 = 2x + y$ un $100 = 2z + y$. No šejienes seko, ka x = z. Tātad divas meitenes stāv blakus 17 vietās.

18.15. Mazākais laidņu skaits ir 8. Tos var novietot, piemēram, uz ceturtās horizontāles. Pierādīsim, ka ar mazāku laidņu skaitu visus lauciņus apdraudēt nevar. Laidņi iedalās divās grupās: melnie, tie, kas apdraud melnos lauciņus un baltie, tie, kas apdraud baltos lauciņus. Pierādīsim, ka nepieciešami vismaz 4 melnie (baltie) laidņi. Aplūkosim 14 melnās rūtiņas, kas atrodas pie šaha galdiņa malas. Katrs laidnis var apdraudēt ne vairāk kā 4 no tām. Tātad trīs melnie laidņi nevar apdraudēt visas šīs rūtiņas. Līdz ar to vajadzīgi vismaz 4 melnie un vismaz 4 baltie laidņi.

18.16. Nē, nevar būt. Piemēram, $\frac{10}{21} > \frac{1}{3}$ un $\frac{3}{4} > \frac{21}{30}$, bet $\frac{13}{25} < \frac{22}{33}$.

18.17. Jā, var. Taisnstūri vat sagriezt divās vai trīs trapecēs (skat. 18.4. zīm.).

18.4. zīm.

a) Ar taisnēm, kas paralēlas vienai kvadrāta malai, sadalām kvadrātu četros taisnstūros un katru no tiem divās trapecēs.
b) Ar taisnēm, kas paralēlas vienai kvadrāta malai, sadalām kvadrātu 995 taisnstūros, 994 taisnstūrus sadalām divās trapecēs un vienu -- 3 trapecēs.

18.18. Tā kā skaitļu $(a-b), (b-c), (c-d), (d-a)$ summa ir 0, un katrs no šiem skaitļiem ir nenegatīvs, tad tie visi ir vienādi ar nulli. Jāņa iegūtās izteiksmes vērtība ir nulle.

18.19. Sadalot vienādojuma kreiso pusi reizinātājos, iegūstam vienādojumu

$$(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 .$$

Atbilde: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

18.20. Pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa liekam atsvarus, uz kuriem rakstīti 1g, 2g, 3g; uz otra svaru kausa - 6g. Ja svaru kausi ir līdzsvaroti, tad, neatkarīgi no tā, kas ir rakstīts uz atsvariem, uz pirmā svaru kausa ir 1g, 2g un 3g atsvari, 6g atsvars apzīmēts pareizi un atlikušie atsvari, kuri apzīmēti ar 4g un 5g ir 4g un 5g atsvari, tikai nenoteiktā secībā.
Otrajā svēršanā uz pirmā svaru kausa liekam atsvarus, uz kuriem uzrakstīts 1g un 6g, bet uz otrā - 5g un 3g. Tikai gadījumā, ja uz visiem atsvariem ir uzrakstīti pareizie svari, otrais svaru kauss pārsvērs pirmo (pamatojiet to!).

18.21. Kvadrātvienādojuma diskriminantam n^2 - 4n jābūt negatīvam. Šo nevienādību apmierina veselie skaitļi 1, 2 un 3.

18.22. Jā var gadīties. Piemēram, šie trīsciparu skaitļi var būt 148; 481; 814.

18.23. No punkta N novelk perpendikulu NK pret malu AB. Tālāk pakāpeniski pierāda vienādības: $NK = \frac{1}{2}BC$, $AN = \frac{1}{2}AB$, $S_{AKN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. No dotās laukumu vienādības seko, ka $S_{AKN} = S_{MKN}$. Tātad trijstūri ANK un MNK ir vienādi un $MN = \frac{1}{2}AB$.

18.24. Nē, ne noteikti. Piemēram, varam izvēlēties punktus ar koordinātām (0, 0), (3, 3), (0, 1), (3, 4), (4, 0), (4, 1), (7, 3), (7, 4). Tad neviena trijstūra, kura virsotnes atrodas dotajos punktos, abas mediānu krustpunkta koordinātas vienlaicīgi nebūs veseli skaitļi.

18.25. Mazākais laidņu skaits ir 8. Tos var novietot, piemēram, uz ceturtās horizontāles. Pierādīsim, ka ar mazāku laidņu skaitu visus lauciņus apdraudēt nevar. Laidņi iedalās divās grupās: melnie, tie, kas apdraud melnos lauciņus un baltie, tie, kas apdraud baltos lauciņus. Pierādīsim, ka nepieciešami vismaz 4 melnie (baltie) laidņi. Aplūkosim 14 melnās rūtiņas, kas atrodas pie šaha galdiņa malas. Katrs laidnis var apdraudēt ne vairāk kā 4 no tām. Tātad trīs melnie laidņi nevar apdraudēt visas šīs rūtiņas. Līdz ar to vajadzīgi vismaz 4 melnie un vismaz 4 baltie laidņi.

18.26. Apzīmējam x + y = u , xy = v.
Atbilde: {(2; 3), (3; 2)}.

18.27. Nē, neeksistē. Skaidrs, ka mēs varam izvēlēties x tādu, ka $0 \le x < 2p$. Ja $x \ge p$, tad pie n = 1 prasītā nevienādība neizpildās. Tātad $0 < x < p$. Aplūkosim mazāko skaitli n, kuram $nx > p$. Tad $(n - 1)x \le p$, no kurienes seko, ka $nx < 2p$. Tādā gadījumā sin $nx < 0$.

18.28. Apzīmēsim vienas riņķa līnijas centru ar O_1 un rādiusu ar R , otras riņķa līnijas centru ar O_2 un rādiusu ar r. Riņķa līnijas (O_1,R) un taisnes m kopīgo punktu apzīmējam

ar M, kopīgo punktu ar taisni AB -- ar N, kopīgo punktu ar taisni t -- ar K. Riņķa līnijas (O_2, r) un taisnes m kopīgo punktu -- ar T, kopīgo punktu ar taisni t -- ar L un kopīgo punktu ar taisni BC -- ar S. Tā kā ABC ir regulārs trijstūris, tad $\angle O_1AM = \angle O_1AN = \angle O_2CS = \angle O_2CT = 60°$ un $AM = AN = \frac{R}{\sqrt{3}}$, $CS = CT = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Apzīmēsim AB = BC = CA = a. Tad $BK = BN = a - \frac{R}{\sqrt{3}}$ un $BL = BS = a - \frac{r}{\sqrt{3}}$, tātad $KL = 2a - \frac{R+r}{\sqrt{3}}$. Savukārt $MT = a + \frac{R+r}{\sqrt{3}}$. Tā kā KL = MT, tad $2a - \frac{R+r}{\sqrt{3}} = a + \frac{R+r}{\sqrt{3}}$, no kurienes $R + r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, t.i. rādiusu summa vienāda ar trijstūra ABC augstumu.

18.29. Viena no abām daļām satur skaitli 2. Apzīmēsim to ar A un otru -- ar B. Pieņemsim pretējo, ka neviena no daļām nesatur tādus trīs dažādus skaitļus x, y, z, ka xy=z. Aplūkojam divus gadījumus:
1) $6 \in$ A; tad $3 \notin$ A un $12 \notin$ v A, jo $2 \times 3 = 6$ un $2 \times 6 = 12$; tātad $3 \in$ B un $12 \in$ B. Līdzīgi, $4 \in$ A ($3 \times 4 = 12$), $24 \in$ B ($4 \times 6 = 24$) un $8 \in$ B ($2 \times 4 = 8$). Tā ir pretruna, jo $3 \times 8 = 24$.
Līdzīgi iegūst pretrunu arī gadījumā, kad $6 \in$ B.

18.30. To izdarīt nevar.

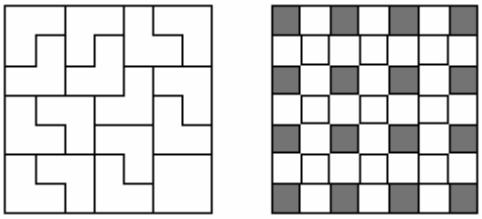
18.31. Aplūkojot funkciju y = tg x un y = x grafikus, secinām, ka vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

18.32. Jā, piemēram, F(x) = 0 un $G(x) = e^{-x}$.

18.33. Apzīmēsim $x = \frac{a}{b}$ un $y = \frac{c}{d}$ (daļas ir nesaīsināmas). Iegūstam vienādojumu $a^2b^2 + c^2d + abcd = 2b^2d^2$. Pierādiet, ka no šejienes seko, ka viena no daļām ir saīsināma ar 2. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka vienādojumam nav atrisinājumu racionālos skaitļos.

18.34. Aprēķinos izmanto to, ka leņķis starp zīmējumā novilktajām taisnēm ir 30°, un Pitagora teorēmu.

18.35. Piemēru skat. 18.5. zīmējumā.



18.5. zīm.

Pierādīsim b) punktā prasīto. Pieņemsim, ka stūrīšu skaits ir x un kvadrātu skaits ir y. Tad 3x + 4y = 49. Katrs stūrītis pārsedz ne vairāk kā 1 iekrāsoto rūtiņu (skat. 18.5. zīm.);

katrs kvadrāts pārsedz tieši 1 iekrāsoto rūtiņu. Tāpēc $x + y \geq 16$. No šejienes seko, ka $3x + 3y \geq 48$. Tātad $y \leq 1$. Skaidrs, ka nevar būt $y = 0$, jo tad $3x = 49$, un x nav vesels skaitlis. Tātad tiešām $y = 1$.

18.36. Ja a -- mazākais no skaitļiem x, y, z, bet b un c -- abi pārējie, tad a^3 dalās ar b^2c; tātad $a^3 \geq b^2c$. Tas iespējams vienīgi, ja $a = b = c$.

18.37. Pārbaude parāda, ka der $x = p/3$. Citu sakņu nav, jo pie $0 \leq x < p/2$ vienādojuma kreisajā pusē ir monotoni augoša funkcija, bet pie $p/2 < x \leq p$ tā ir negatīva.

18.38. Pierādījumā izmanto to, ka taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir vienāds ar $\frac{a+b-c}{2}$.

18.39. Vienādojumam ir acīmredzams atrisinājums $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 1$.
Ja $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ ir dotā vienādojuma atrisinājums, tad arī $(a_2, a_3, \ldots, a_{12}, 12a_2a_3\ldots a_{12} - a_1)$ ir vienādojuma atrisinājums naturālos skaitļos.
Ar šī pārveidojuma palīdzību, pielietojot to sākotnējam atrisinājumam atkārtoti, iegūstam vajadzīgo atrisinājumu.

18.40. Pierādījumā izmantojam to, ka trijstūra MNK augstumi ir trijstūra ABC bisektrises.

19. atklātā olimpiāde (1991./92. m.g.)

19.1. Jā, var. Piemēram, tā, kā parādīts 19.1. zīmējumā.

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

19.1. zīm.

19.2. Tie ir skaitļi 192, 384 un 576.

19.3. Apzīmēsim kuba virsotnēs ierakstīto skaitļu summu ar s. Tad šķautņu vidū uzrakstīto skaitļu summa ir 3s (katrs virsotnes skaitlis pieskaitīts trīs šķautnēs); skaldņu centrā ierakstīto skaitļu summa ir 3s. Iegūstam vienādību $7s = 1992$, kas nevar izpildīties, jo 1992 nedalās ar 7.

19.4. Nē, nevar. Ja rūtiņu kvadrātu iekrāsosim šahveida formā, tad atlikušajā daļā būs 32 baltas un 30 melnas rūtiņas; apstaigājot rūtiņas, katru reizi mainās lauciņa krāsa, tātad balto un melno rūtiņu skaitam būtu jābūt vienādam.

19.5. Skaitļus, kas apzīmē skolēnu grāmatu skaitu sakārtosim augošā secībā $x_1 < x_2 < \ldots < x_{11}$. Pieņemsim pretējo, ka $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} < 65$. Tad $x_7 \leq 10$,

jo 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65. Iegūstam, ka $x_6 \le 9$, $x_5 \le 8$, ... , $x_1 \le 4$. Tātad $x_1 + x_2 + \cdots x_{12} < 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 65 < 110$; iegūta pretruna, kas pierāda prasīto apgalvojumu.

19.6. Viens no atrisinājumiem ir šāds:

2	3	5
4	6	10
6	9	15

19.7. Pietiek noņemt 9 sērkociņus.

19.8. a) Piemēram, 38×38 = 1444.
b) Var ņemt jebkuru skaitli, kura pēdējie 3 cipari ir 038.

19.9. Nē, nevar.

19.10. Dotā figūra satur 10 trijstūrīšus, kuru virsotne vērsta uz leju, un 15 trijstūrīšus, kuru virsotne vērsta uz augšu. Tā kā katrs dubulttrijstūris satur pa vienam katra veida trijstūrim, tad vairāk kā 10 šādas figūras izgriezt nevarēs (nepietiks pirmā veida trijstūru). Parādiet, kā izgriezt tieši 10 figūras.

19.11. Nē, nevar. Ja izpildītos norādītās nevienādības, tad divas taisnes (doto funkciju grafiki) krustotos divos punktos: intervālā $3 < x < 4$ un $4 < x < 5$.

19.12. Nē, nevar. Aplūkosim 6 trijstūrīšus, kuru virsotne pagriezta uz leju, un iekrāsosim tos melnus. Pieņemsim pretējo, ka visas summas ir pirmskaitļi -- tātad nepāra skaitļi, jo summa 2 nav iespējama. Ja kādā melnajā trijstūrī ierakstīts pāra (nepāra) skaitlis, tad kaimiņi baltajās rūtiņās ir nepāra (pāra) skaitļi; savukārt to kaimiņi melnajās rūtiņās ir pāra (nepāra) skaitļi. Tā turpinot iegūstam, ka visās melnajās rūtiņās ir ierakstīti vienas paritātes skaitļi, bet baltajās -- pretējās paritātes skaitļi. Taču starp dotajiem 16 skaitļiem ir vienāds skaits pāra un nepāra skaitļu. Iegūta pretruna, kas pierāda uzdevuma apgalvojumu.

19.13. Skaitļus jāsakārto šādā secībā: 1, 7, 4, 2, 3, 5, 6, 9, 0, 8.

19.14. Apzīmēsim ar x pāru skaitu, kuros stāv blakus divi zēni; ar y -- pāru skaitu, kuros stāv blakus meitene un zēns un ar z -- pāru skaitu, kuros stāv blakus divas meitenes. Tā kā katrs bērns ieskaitīts divos pāros, tad iegūstam vienādības $100 = 2x + y$ un $100 = 2z + y$. No šejienes seko, ka x = z. Tātad divas meitenes stāv blakus 17 vietās.

19.15. a) Nevar, jo rūtiņu skaits nedalās ar 4.
b) Var, sadalot kvadrātu 16×16 kvadrātos ar izmēriem 4×4. Katru kvadrātu 4×4 var sadalīt šādās figūrās.

c) Nevar. Iekrāsosim kvadrātu 10×10 divās krāsās kā šaha galdiņu. Tad dotās figūras var iedalīt divās grupās: n figūras, kas nosedz 3 baltos lauciņus un m figūras, kas nosedz 3 melnos lauciņus. Iegūstam vienādības

$$\begin{cases} 3n + m = 50 \\ n + 3m = 50 \end{cases}$$

No šejienes seko, ka n = m = 12,5, bet tā nevar būt, jo n un m ir veseli skaitļi.

19.16. Tā kā skaitļu $(a-b),(b-c),(c-d),(d-a)$ summa ir 0, un katrs no šiem skaitļiem ir nenegatīvs, tad tie visi ir vienādi ar nulli. Jāņa iegūtās izteiksmes vērtība ir nulle.

19.17. Četrstūris jāsagriež pa diagonāli AC un pa nogriezni BM, kur M -- patvaļīgs punkts uz diagonāles AC.

19.18. Ja a, b, c ir trijstūra malas, kura perimetrs ir 36, tad a +1, b + 1, c + 1, ir trijstūra malas, kura perimetrs ir 39. Tātad katram Jāņa uzzīmētajam trijstūrim atbilst Pētera uzzīmētais trijstūris. Taču trijstūris ar malām 1, 19, 19, kuru uzzīmēja Pēteris, nav šādi iegūstams. Tātad Pēteris uzzīmēja vairāk trijstūru.

19.20. Jānovieto 48 domino kauliņi, pa 4 katrā rindā, atstājot 1 rūtiņu spraugas; katrā nākošajā rindā izdarot nobīdi.

19.21. Abi dotie skaitļi ir pozitīvi. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$x = y^2 + 1 \geq 2y = 2(x^2 + 1) \geq 4x .$$

Iegūta pretruna, tātad šādu skaitļu nav.

19.22. Vispirms pierāda, ka trijstūri MAD un DCN ir vienādi. Tālāk pierāda, ka $\angle MDN = 60°$. No šejienes seko pierādāmais apgalvojums.

19.23. Tā kā a ≥ 0, c ≥ b un e ≥ d, tad a + c + e ≥ b + d. Tā kā šo divu skaitļu summa ir 100, tad a + c + e ≥ 50. Vērtība 50 ir iespējama, piemēram, ja $a = b = c = 0$ un d = e = 50. Tātad mazākā iespējamā vērtība ir 50.

19.24. Punkta M attālums līdz hipotenūzai ir puse no trijstūra ABC perimetra.

19.25. Nē. Pieņemsim pretējo, ka skaitļus prasītajā veidā izdevies ierakstīt. Tā kā zīmējumā pavisam ir 18 nogriežņi un starpības var pieņemt 18 vērtības no 1 līdz 18, tad katra no šīm vērtībām tiek pieņemta tieši vienu reizi. Pieņemsim, ka izpildās vienādības

$$|a(1) - b(1)| = 1$$
$$|a(2) - b(2)| = 2$$
$$\dots$$
$$|a(18) - b(18)| = 18$$

Skaitļi a(k) un b(k) apzīmē k-tā nogriežņa galapunktos ierakstītos skaitļus. Tā kā $|x-y| \equiv x+y \pmod 2$, tad summējot šīs vienādības un , ievērojot, ka katrs no 9 virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem parādās vienādībās 4 reizes, iegūstam

$$4S \equiv 1+2+\cdots 18 = 171 \pmod 2.$$

Ar S apzīmēta visu virsotnēs ierakstīto skaitļu summa. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka 9-stūra virsotnēs nevar ierakstīt skaitļus tā, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

19.26. Ja skaitlis $n^2 + 2$ dalās ar n + 2, tad arī skaitlis $6 = n^2 + 2 - (n+2)(n-2)$ dalās ar n + 2. Tātad n = 1 vai n = 4.

19.27. Pierādījumā izmanto līdzīgus trijstūrus.

19.28. Izmantojot Pitagora teorēmu un nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$c^3 + (a+b)(ab+c^2) > c^3 + 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{abc^2} = c^3 + 4cab = c(c^2+4ab) =$$
$$c(a^2+b^2+4ab) = c\left((a-b)^2+6ab\right) \ge 6abc.$$

19.29. Ievietojot y = - x, iegūstam $f(f(x)-x) = 2f(0) = \text{const}$. Tā kā f ir monotoni augoša funkcija, tad no šejienes seko, ka eksistē tāda konstante c, ka $f(x) - x = c$ un f(x) = x + c. Pārbaude parāda, ka visas šādas funkcijas apmierina uzdevuma nosacījumus.

19.31. Ja k = 1, tad $7^k + 7 = 14$ nav kvadrāts.
Ja k > 1, tad $7^k + 7 = 7(7^{k-1} + 1)$ dalās ar 7, bet nedalās ar 7^2, tātad nav kvadrāts.

19.32. $\angle AOC_1 = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC_1} + \overset{\smile}{B_1C} + \overset{\smile}{CA_1}\right) = \frac{1}{4}\left(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BC}\right) = \frac{1}{4}360° = 90°$.

19.33. Visi skaitļi x, y, z ir pozitīvi. Uzskatīsim, ka x ir lielākais no tiem. No pēdējā vienādojuma seko, ka $2x(1+x+x^2) \ge 3(1+x^4)$, t.i. $(3x^2+4x+3)(x-1)^2 \le 0$. No šejienes iegūstam, ka x = 1. Tālāk no sistēmas seko, ka y =1 un z =1.

19.34. Acīmredzot pietiek pierādīt, ka no katriem n iracionāliem skaitļiem (n ≥ 2) var atrast n -1 skaitli, kuru summa ir iracionāla; tad pielietojot šo rezultātu 1992 skaitļiem, 1991 skaitļiem, ... , 2 skaitļiem, iegūsim prasīto secību, ja pirmo izmesto skaitli uzskatīsim par pēdējo, otro izmesto skaitli -- par priekšpēdējo, u.t.t.
Pierādījumā aplūko 2 gadījumus.
1) Doto skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa S ir racionāls skaitlis. Tad pirmo n -1 skaitļu summa ir vienāda ar S - x_n, un tas ir iracionāls skaitlis.
2) Doto skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa S ir iracionāls skaitlis. Tad aplūkojam visas summas ar n -1 locekļiem. To summa ir vienāda ar (n-1)S (tas ir iracionāls skaitlis); tātad vismaz viena no šīm summām ir iracionāls skaitlis.

19.35. Pierāda ar indukciju pēc vilcienu skaita.

19.36. Tie ir visi skaitļi, kas lielāki par 4, un kuriem n + 1 nav pirmskaitlis.

19.37. Pierādījumā izmanto līdzīgu trijstūru īpašības.

19.38. Vispirms pārbaudām, ka der šādas funkcijas:

$f(x)=1;\quad f(x)=-1;\quad f(x)=\begin{cases}1, \text{ja } x\neq 0\\ -1, \text{ja } x=0\end{cases};\quad f(x)=\begin{cases}-1, \text{ja } x\neq 0\\ 1, \text{ja } x=0\end{cases}.$

Pierādīsim, ka citu funkciju nav.

Ievietojot x = 1 un y = 0, iegūstam $|f(0)|\geq 1$, no kurienes $|f(0)|=1$.

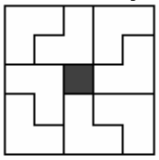
Ievietojot y = -x, x > 0, iegūstam $|f(-x)+f(x)|\geq 2$; no šejienes seko ka $|f(x)|=1$ visiem x no definīcijas apgabala. Tālāk pierāda, ka f(x) = f(y) visiem x, y, kas nav nulle. Apgalvojums pierādīts.

19.39. Aplūkosim Dekarta koordinātu sistēmu telpā un nogriezni ar garumu a; tā projekcijas uz koordinātu asīm apzīmēsim ar a_1, a_2, a_3. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko seko, ka $a_1+a_2+a_3\leq\sqrt{3}a$. Tātad visu nogriežņu visu projekciju garumu summa nepārsniedz $1992\sqrt{3}$; uz vienas no asīm projekciju garumu summa nepārsniedz $\frac{1}{3}\cdot 1992\sqrt{3}$. Tātad uz šīs ass ir projekciju nepārklāts punkts attālumā mazākā par $\frac{1}{6}\cdot 1992\sqrt{3}<600$ no A. Caur šo punktu velkam plakni perpendikulāri asij; tā ir meklētā plakne.

19.40. Pietiek pārbaudīt 32 kombinācijas.

20. atklātā olimpiāde (1992./93. m.g.)

20.1. Jā, var. Piemēram, tā kā parādīts 20.1. zīmējumā.



20.1.zīm.

20.2. Skaitļus var ierakstīt, piemēram, tā, kā parādīts 20.2.zīmējumā.

8	3	6
1	5	4
9	2	7

20.2. zīm.

Vismaz viena no summām būs lielāka par 10, jo skaitlim 9 blakus atradīsies vismaz 2 skaitļi, viens no tiem būs lielāks par 1 un summā ar 9 dos skaitli lielāku par 10.

20.3. Apzīmēsim kuba virsotnēs ierakstīto skaitļu summu ar s. Tad šķautņu vidū uzrakstīto skaitļu summa ir 3s (katrs virsotnes skaitlis pieskaitīts trīs šķautnēs); skaldņu centrā ierakstīto skaitļu summa ir 3s. Iegūstam vienādību 7s = 1993, kas nevar izpildīties, jo 1993 nedalās ar 7.

20.4. Ievērosim, ka 1001 × 111 = 111111. Tā kā, 1993 = 6k +1, tad $\underbrace{111\ldots11}_{1993}$, dalot ar 1001, dod atlikumā 1, jo $\underbrace{111\ldots110}_{1992}$ dalās ar 1001.

20.5. Šīs sākuma pozīcijas ir sekojošas: (0, 0), (1, 2), (2,1), (3, 5), (5, 3), (4, 7), (7,4), (6, 10), (10, 6), u.t.t.

20.6. a) Lielākā iespējamā summas vērtība ir 963 + 852 + 741 = 2556.
b) Par simtnieku cipariem jāizvēlas cipari 9, 8, 7; uzskatīsim. ka pirmā skaitļa pirmais cipars ir 9, otrā skaitļa pirmais cipars ir 8 un trešā skaitļa pirmais cipars ir 7. Par desmitnieku cipariem jāizvēlas cipari 6, 5 un 4; tos var izvietot 6 veidos. Vieninieku cipari būs 3, 2 un 1; arī tos var izvietot 6 veidos. Tātad pavisam ir 6 x 6 = 36 iespējas.

20.7. To var izdarīt tā, kā parādīts 20.3. zīmējumā.

8	10	7	11
9	4	12	6
1	15	3	13
16	2	14	5

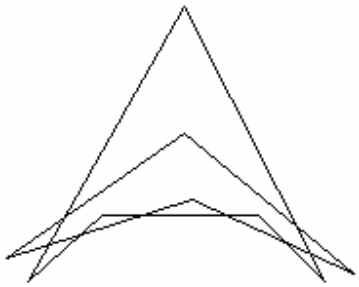
20.3. zīm.

Nevar panākt, lai visas summas nepārsniegtu 18, jo skaitļiem 16 un 15 blakus atrodas vismaz četri skaitļi -- viens no tiem ir ne mazāks kā 4, un summa ar skaitli 15 vai 16 ir lielāka par 18.

20.8. a) 38 × 38 = 1444.
b) Jebkura skaitļa kvadrāts, kura pēdējie trīs cipari ir 038 beidzas ar trim četriniekiem.

20.9. Pirmajā svēršanā salīdzinām 1. un 2. monētu: iegūstam, ka a < b. Otrajā svēršanā salīdzinām 3. un 4. monētu, iegūstam, ka c < d (a ir vieglākā monēta pirmajā svēršanā, c ir vieglākā monēta otrajā svēršanā).
Trešajā svēršanā salīdzinām a ar c, un tā kā abi gadījumi ir līdzvērtīgi, tad varam uzskatīt, ka a < c. Esam ieguvuši sakārtotu monētu virkni a < c < d, un zināms, ka b nav pati vieglākā monēta.
Ar nākošajām divām svēršanām, salīdzinot e vispirms ar monētu c un, pēc tam ar monētu a vai d, nosakām monētas c vietu šajā rindā.
Ar pēdējām divām svēršanām ievietojam monētu b pareizajā vietā.

20.10. Atrisinājums parādīts 20.4. zīmējumā.



20.4. zīm.

20.11. Vienādības seko no identitātes $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

20.12. Apzīmēsim ar x pāru skaitu, kuros stāv blakus divi zēni; ar y -- pāru skaitu, kuros stāv blakus meitene un zēns un ar z -- pāru skaitu, kuros stāv blakus divas meitenes. Tā kā katrs bērns ieskaitīts divos pāros, tad iegūstam vienādības $100 = 2x + y$ un $100 = 2z + y$. No šejienes seko, ka x = z. Tātad divas meitenes stāv blakus 17 vietās.

20.13. Atrisinājums parādīts tabulā.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	2	4	6	8	10	12	14	16
9	8	7	6	5	4	3	2	1	17	16	15	14	13	12	11	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Pirmajā rindiņā ierakstīti skaitļi uz sarkanajām kartītēm, otrajā -- uz baltajām kartītēm.

20.14. Uz riņķa līnijas vienādos attālumos atliksim punktus A_1, A_2, ... , A_{10} tā, lai loks A_1A_{10} būtu mazāks par pusi no riņķa līnijas. Tad 10-strūris ar virsotnēm šajos punktos apmierinās uzdevuma nosacījumus. Tiešām, neviena trijstūra malas, kas satur šo 10-stūri, nevar saturēt vairāk par divām no 10-stūra ‘‘īsajām’’ malām. Īso malu skaits ir 9, tātad 4 trijstūri šķēlumā nevar veidot šo 10-stūri.

20.15. Punkti, kas ir galapunkti nogrieznim, kura vidusperpendikuls iet caur punktu A (kopīgo 22 vidusperpendikulu krustpunktu) atrodas vienādā attālumā no punkta A. Ja tikai 7 punkti atrastos vienādā attālumā no punkta A, tad punktu pāru skaits, kuru vidusperpendikuli iet caur A būtu 21. Tātad visi 8 punkti atrodas vienādā attālumā no A, un visu nogriežņu vidusperpendikuli iet caur punktu A.

20.16. Tā kā $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$, tad doto vienādību var pārveidot šādi: $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$.

20.17. Ja a, b, c ir trijstūra malas, kura perimetrs ir 36, tad a +1, b + 1, c + 1, ir trijstūra malas, kura perimetrs ir 39. Tātad katram Jāņa uzzīmētajam trijstūrim atbilst Pētera uzzīmētais trijstūris. Taču trijstūris ar malām 1, 19, 19, kuru uzzīmēja Pēteris, nav šādi iegūstams. Tātad Pēteris uzzīmēja vairāk trijstūru.

20.18. Apzīmēsim mazāko no tabulā ierakstītajiem skaitļiem ar a. Tā kā no jebkuras rūtiņas uz jebkuru var aiziet ar ne vairāk kā 18 soļiem, tad lielākais skaitlis tabulā nepārsniedz a + 18. Tātad tabulā ierakstīti ne vairāk kā 19 dažādi skaitļi. Ja katrs no tiem būtu ierakstīts ne vairāk kā 5 reizes, tad kopā tabulā būtu ne vairāk kā 95 skaitļi; taču skaitļu ir 100, tāpēc ir skaitļi, kas tabulā ierakstīti ne mazāk kā 6 reizes.

20.19. Tā kā katrs LKD ir ne mazāks kā 1, tad summa ir ne mazāka kā 5. Šādu summu var iegūt, sadalot skaitļus pāros (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10).
Lielāko iespējamo summu -- 15 dod šāds skaitļu sadalījums pa pāriem: (1, 7), (2, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 10).

20.20. Doto sešstūri var sadalīt trīs paralelogramos ABCO, CDEO un FAOE. Diagonāles dala katra paralelograma laukumu uz pusēm. No šejienes seko prasītais.

20.21. No Vjeta teorēmas seko, ka a + b = - p un ab = q. Tātad 2a + 2b = - 2p un (2a)×(2b) = 4q. Tātad meklētais vienādojums ir $x^2 + 2p + 4q = 0$.

20.22. Ar S apzīmēsim diagonāļu krustpunktu. No Pitagora teorēmas seko, ka

$$AB^2 + CD^2 = AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = BC^2 + AD^2.$$

Tā kā četrstūris ir apvilkts ap riņķa līniju, tad AB + CD = BC + AD. Kāpinot kvadrātā šo vienādību un atņemot no tās iepriekšējo, iegūstam prasīto.

20.23. a) Nevar, jo pēc katra gājiena lielākais uz tāfeles esošais skaitlis nesamazinās; tātad visi skaitļi nevar kļūt mazāki par 7.
b) Var. Pielietojam operāciju pāriem (1, 7), (2, 6), (3, 5); iegūstam skaitļus 2, 4, 4, 6, 8, 8, 8. Pielietojam operāciju pāriem (2, 6), (4, 4); iegūstam skaitļus 0, 4, 8, 8, 8, 8. Pielietojam operāciju pāriem (0, 4), (4, 4); iegūstam skaitļus 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8. Tagad, 3 reizes pielietojot operāciju pāriem (8, 8), iegūstam skaitļus 0, 0, 0, 0, 16, 16, 16, 16. Pielietojot 3 reizes operāciju pārim (0, 16), iegūstam septiņus skaitļus 16.

20.24. Prasītā vienādība seko no trijstūru BRS un DSR laukumu vienādības.

20.25. Aplūkosim skaitļu tabulu

1
1 2
1 2 3
* * * *
1 2 3 ⋯ n

Aprēķinām šīs tabulas skaitļu summu divos dažādos veidos: vispirms, aprēķinot rindiņu summas un summējot šos skaitļus, iegūstam vienādības kreisās puses izteiksmi; pēc tam, aprēķinot kolonu summas un summējot šos skaitļus, iegūstam vienādība labās puses izteiksmi. Protams, abas šīs summas ir vienādas.

20.26. No dotā vienādojuma seko, ka x ir skaitļa $\frac{47}{21}$ veselā daļa; tātad x = 2 un $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{5}{21}$. No šejienes seko, ka $y + \frac{1}{z} = 4 + \frac{1}{5}$. Tātad y = 4 un z = 5.

20.27. Izmantojot to, ka paralelograma laukums vienāds ar pamata un augstuma reizinājumu, iegūstam, ka abu apskatāmo paralelogramu laukumi ir vienādi ar paralelograma KBCT laukumu, tātad vienādi arī savā starpā.

20.28. Lielākais malu skaits šādam daudzstūrim var būt 32.

20.29. Tā kā $p_1 = 2$, tad $p_1p_2 \dots p_n + 1$ var būt tikai nepāra skaitļa kvadrāts. Tātad

$$p_1p_2 \dots p_n + 1 = (2k+1)^2, \quad \text{jeb} \quad p_1p_2 \dots p_n = 4k^2 + 4k$$

bet kreisās puses izteiksme nedalās ar 4, jo tikai pirmskaitlis 2 dalās ar 2.

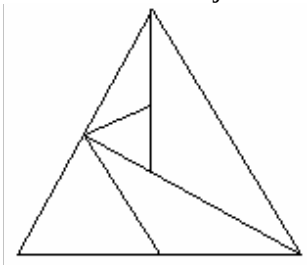
20.30. Tā kā $a^2 + b^2 \geq 2ab = \left(\sqrt{2ab}\right)^2$, tad operāciju rezultātā uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa nepalielinās. Sākumā tā ir 1983; beigās, kad uz tāfeles uzrakstīts viens skaitlis x, tā ir x^2. Tātad $x^2 \leq 1983 < 45^2$, tāpēc x < 45.

20.31. Skaitlis $100^{100} = \underbrace{1000\dots00}_{200}$ satur 201 ciparu. Tātad 100 ir mazākais skaitlis, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, jo, ja n < 100, tad $n^n < 100^{100}$, un skaitlim n^n ir ne vairāk kā 200 ciparu.

20.32. Apskatīsim 9 plaknes, kas sagriež kubu slāņos ar biezumu 1. Taisne, ieejot jaunā kubiņā, krusto vismaz vienu no šīm plaknēm. Tā kā taisne krusto plakni ne vairāk kā vienā punktā, tad tā var krustot ne vairāk kā 9 + 1 = 10 kubiņus. Taisni, kas krusto 10 kubiņus, var novilkt caur diviem punktiem M un N, kas atrodas diagonāli pretējos kubiņos. Punkti jāizvēlas tā, lai taisne MN neietu ne caur viena mazā kubiņa šķautni.

20.33. Vienādojumu pārveidojam formā $xy((x-3)(y-3)-8) = 0$. Jāatrisina 3 vienādojumi: x = 0; y = 0; $(x-3)(y-3) = 8$. Lai atrisinātu pēdējo vienādojumu, ievērojam, ka skaitli 8 var sadalīt divu veselu skaitļu reizinājumā 8 veidos: 1×8, 2×4, 4×2, 8×1, (-1)×(-8), (-2)×(-4), (-4)×(-2), (-8)×(-1). Katram no šiem reizinājumiem a×b atbilst atrisinājums x = a + 3, y = b + 3. Jāatceras, ka vēl ir divas bezgalīgas atrisinājumu sērijas x = 0, y $\in$ Z; x $\in$ Z, y = 0.

20.34. Jā var, piemēram, tā kā parādīts 20.5. zīmējumā.



20.5. zīm.

20.35. Piešķirsim i-tajam bokserim divus raksturojumus: $s_i = \frac{1}{x}$, kur x ir viņa svara kategorijā esošo dalībnieku skaits, kā arī $k_i = \frac{1}{y}$, kur y ir viņa komandu pārstāvošo dalībnieku skaits. Skaidrs, ka $\sum_i (s_i - k_i) = 12 - 6 = 6$. Tā kā $s_1 - k_1 < 1$, tad summā ir jābūt vismaz 7 pozitīviem saskaitāmajiem; tiem atbilst 7 bokseri, kuriem komandas biedru ir vairāk nekā sāncenšu viņa svara kategorijā.

20.36. Vienādojumam nav atrisinājumu, jo $|\sin x + \cos x| < 2$, bet

$$|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| \geq 2.$$

20.37. Izvēlēsimies punktu A vienā no doto punktu izliektā apvalka virsotnēm un griezīsim taisni AX ap punktu A. Sākumā taisnes vienā pusē būs 0 punkti, beigās visi 2n - 1 punkti. Tā kā, griežot taisni AX, punktu skaits taisnes vienā pusē visu laiku palielinās par 1, tad būs tāds moments, kad taisnes abās pusēs atradīsies tieši n - 1 punkts.

20.38. Tā kā AH $\perp$ BC, tad AH $\perp$ FE; tāpēc AR = AS. Līdzīgi pierāda, ka CP = CQ un BT = BU. Vienādība AS = BT (un citas līdzīgās) seko no vienādībām

$$AS^2 + HF^2 = AS^2 + HS^2 \quad \text{un} \quad BT^2 + HF^2 = BF^2 + HT^2.$$

20.39. Ja n = 2k ir pāra skaitlis, tad šāds sakārtojums ir iespējams:

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Ja n ir nepāra skaitlis, tad šāds sakārtojums nav iespējams. Tiešām, no vienādības

$$0 = (a_1 + \ldots + a_n) - (1 + 2 + \ldots + n) = (a_1 - 1) + \ldots + (a_n - n) = \pm c \pm c \pm \ldots \pm c$$

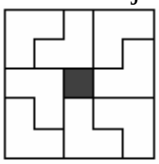
seko, ka c = 0, jo saskaitāmo c skaits ir nepāra skaitlis.

20.40. Tā kā $\sqrt[k+1]{x_1 x_2 \ldots x_n} = 1$, tad nevienādības kreisā puse nemainīsies, ja katru tās reizinātāju ($k + x_i$) izdalīsim ar $\sqrt[k+1]{x_i}$. Lai pierādītu prasīto nevienādību, pietiek pierādīt, ka tagad katrs no reizinātājiem ir ne mazāks kā k + 1. Tas seko no nevienādības par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Tiešām, apzīmējot x_i ar x un $\sqrt[k+1]{x_i}$ ar a, iegūstam

$$\frac{k+x}{a}=\frac{1+1+\cdots+1+x}{a}=\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}+\frac{x}{a}\geq(k+1)\sqrt[k+1]{\frac{1}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{a}}=(k+1).$$

21. atklātā olimpiāde (1993./94. m.g.)

21.1. Jā, var. Piemēram, tā kā parādīts 21.1. zīmējumā.



21.1.zīm.

21.2. Jā, var. Piemēram, tā:

20, 40, 19, 39, 18, 38, 17, 37, ... , 2, 22, 1, 21.

21.3. Nē, tā nevar būt. Desmit filatēlisti veido 45 pārus. Kopā nosūtīti 50 apsveikumi. No Dirihlē principa seko, ka ir pāris, kurš apsveikumus saņēmis divos virzienos.

21.4. Jā, var.

21.5. Atrisinājums parādīts tabulā

	3	7	**4**	**5**	7
1	1				
4	1		3		
2	1		1		
4				4	
15		7		1	7

21.6. 17 skaitļi.

21.7. To var izdarīt tā, kā parādīts 21.2. zīmējumā.

8	10	7	11
9	4	12	6
1	15	3	13
16	2	14	5

21.2. zīm.

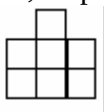
21.8. Sagrupēsim summas locekļus šādi:

$$1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)+\left(\tfrac{1}{9}+\ldots+\tfrac{1}{16}\right)+\left(\tfrac{1}{17}+\ldots+\tfrac{1}{32}\right)+\left(\tfrac{1}{33}+\ldots+\tfrac{1}{64}\right)>$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}\right)+\underbrace{\left(\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{16}\right)}_{8}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{32}+\ldots+\tfrac{1}{32}\right)}_{16}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{64}+\ldots+\tfrac{1}{64}\right)}_{32}=$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=4$$

21.9. Aplūkosim 7 rūtiņas, kas izvietotas tā, kā parādīts 21.3. zīmējumā.



21.3. zīm.

Nekādas divas no tām nevar būt nokrāsotas vienā krāsā, jo jebkuras divas no šīm rūtiņām var pārklāt ar uzdevumā norādīto figūru.

21.10. C bija iedomājies skaitļus 2 un 3, vai 3 un 4.

21.11. Zināms, ka $a^2 + b^2 \geq 2ab$, un vienādība izpildās tikai, ja a = b; līdzīgi $c^2 + d^2 \geq 2cd$, un vienādība izpildās tikai, ja c = d. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam, ka $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab + 2cd$. Tā kā jāizpildās vienādībai, tad a = b un c = d. Tātad starp skaitļiem a, b, c, d var būt 2 dažādi skaitļi, vai arī visi skaitļi ir vienādi.

21.12. Apzīmēsim ar A taisnā leņķa virsotni. No vienādības $\angle XAY + \angle XOY = 180°$ seko, ka ap četrstūri AXOY var apvilkt riņķa līniju. No vienādības $\angle OAX = \angle OAY$ seko, ka loki OX un OY ir vienādi. Tātad vienādi ir arī nogriežņi OX un OY.

21.13. Atrisinājums parādīts tabulā.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	2	4	6	8	10	12	14	16
9	8	7	6	5	4	3	2	1	17	16	15	14	13	12	11	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Pirmajā rindiņā ierakstīti skaitļi uz sarkanajām kartītēm, otrajā -- uz baltajām kartītēm.

21.14. Nē, tā nevar būt. Skaitlis $\underbrace{111\ldots11}_{111}$ dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tā kā skaitļa A un B ciparu summas ir vienādas, tad tie vai nu abi dalās ar 3, vai abi nedalās ar 3. Tātad, ja to reizinājums dalās ar 3, tad tam ir jādalās arī ar 9, bet tas tā nav.

21.15. Atrisinājumā izmanto 21.9. uzdevuma atrisinājumu.

21.16. Jā, piemēram, A = 0, B = -1, C = -2.

21.17. Jā var. Parādiet piemēru.

21.18. Apzīmēsim mazāko no tabulā ierakstītajiem skaitļiem ar a. Tā kā no jebkuras rūtiņas uz jebkuru var aiziet ar ne vairāk kā 18 soļiem, tad lielākais skaitlis tabulā nepārsniedz a + 18. Tātad tabulā ierakstīti ne vairāk kā 19 dažādi skaitļi. Ja katrs no tiem būtu ierakstīts ne vairāk kā 5 reizes, tad kopā tabulā būtu ne vairāk kā 95 skaitļi; taču skaitļu ir 100, tāpēc ir skaitļi, kas tabulā ierakstīti ne mazāk kā 6 reizes.

21.19. Jā, var. No sākuma izveidojam kvadrātu 3×3, kuram izpildās prasītais nosacījums.

1	2	-3
4	5	-9
-5	-7	12

Aplūkojam vēl 3 kvadrātus, kas iegūti no dotā, pareizinot visus ierakstītos skaitļus ar a , b un c, tā lai visi 36 skaitļi būtu dažādi. No šiem 4 kvadrātiem saliekam prasīto kvadrātu no 6×6 rūtiņām.

21.20. a) Viens no skaitļa cipariem būs pāra skaitlis vai 5. Novietojot to skaitļa beigās, iegūsim skaitli, kas dalās ar 2 vai 5, tātad tas nav pirmskaitlis.

21.21. Nē, ne noteikti. Piemēram, ja a = b = 1, c = 0, tad pirmajam vienādojumam ir divas dažādas saknes, otrajam viena sakne.

21.22. Ar S apzīmēsim diagonāļu krustpunktu. No Pitagora teorēmas seko, ka

$$AB^2 + CD^2 = AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = BC^2 + AD^2.$$

Tā kā četrstūris ir apvilkts ap riņķa līniju, tad AB + CD = BC + AD. Kāpinot kvadrātā šo vienādību un atņemot no tās iepriekšējo, iegūstam prasīto.

21.23. Valstī ir 45 pilsētu pāri un 37 aviolīnijas, tātad ir 45 - 37 = 8 pāri, kurus nesavieno aviolīnijas.
Aplūkosim divas pilsētas A un B. Ja starp tām ir aviolīnija, tad viss pierādīts. Ja nē, tad aplūkosim jebkuru trešo pilsētu C (tādu ir astoņas). Ja katrā no šiem gadījumiem no A uz B nevarēs aizlidot caur C, tad kopā būtu vismaz 9 pilsētu pāri, kurus nesavieno aviolīnijas. Tā kā šādu pāru ir tikai 8, tad atradīsies pilsēta C , caur kuru varēs aizlidot.

21.24. Pierādījumā izmanto paralelograma īpašības.

21.25. a) Jā, eksistē. Piemēram, der skaitļi 996, 2, $\underbrace{1,\ldots,1}_{496},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{1494}$.

b) Nē, neeksistē. Ievērosim, ka 1994 var uzrakstīt kā 1994 veselu skaitļu reizinājumu tikai sekojošos veidos:
1994 = (±1994) × (±1) × (±1) × ... ×(±1) vai 1994 = (±947) × (±2) × (±1) × ... × (±1), jo 997 ir pirmskaitlis. Abos gadījumos tieši viens reizinātājs ir pāra skaitlis, bet pārējie 1993 reizinātāji ir nepāra skaitļi. Saskaitot 1993 nepāra skaitļus un vienu pāra skaitli, summā iegūst nepāra skaitli. Tātad summa nav vienāda ar 0.

21.26. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}>\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{a+b+c}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1.$

Nevienādības kreisā puse ir lielāka arī par 1,01. Uzskatot, ka a ir lielākais no skaitļiem a, b, c, pierāda, ka $\dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{1}{6}$. Tātad

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{1}{6}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1\tfrac{1}{6}>1{,}01$$

21.27. Tā kā $p_1 = 2$, tad $p_1p_2 \ldots p_n + 1$ var būt tikai nepāra skaitļa kvadrāts. Tātad

$$p_1p_2\ldots p_n+1=(2k+1)^2, \quad \text{jeb} \quad p_1p_2\ldots p_n=4k^2+4k$$

bet kreisās puses izteiksme nedalās ar 4, jo tikai pirmskaitlis 2 dalās ar 2.

21.28. Skaitlis ir iracionāls. Tiešām šī daļa nav periodiska. Pieņemsim pretējo, ka tā satur periodu ar garumu n. Bet tādā gadījumā periods sastāv tikai no nullēm, jo skaitlis $\underbrace{10\ldots0}_{n}^{2}$ satur 2n sekojošas nulles un ir ierakstīts virknē. Skaidrs, ka tā nevar būt.

21.29. Tā kā četrstūri MACB, NAOC un KBOC ir ievilkti riņķa līnijās, tad izpildās vienādības: $\angle OAM + \angle OBM = 180°$, $\angle OAN + \angle OCN = 180°$, $\angle OCK + \angle OBK = 180°$. No šīm vienādībām seko, ka $\angle OCN = 180° - (180° - \angle OAM) = \angle OAM$. Līdzīgi, $\angle OCK = \angle OBM$. Tas nozīmē, ka $\angle OCN + \angle OCK = \angle OAM + \angle OBM = 180°$, tāpēc $\angle NCK = \angle OCN + \angle OCK = 180°$. Tātad punkti N, C, K atrodas uz vienas taisnes.

21.30. Izdarot griezienus pa vertikālēm, figūru var sadalīt 10 daļās, kas nesatur kvadrātu ar izmēriem 2×2. Jāpierāda arī, ka mazāk kā 10 daļās figūru sagriezt nevar.

21.31. Ja a ir vienādojuma $x^2 - 3x - 1 = 0$ sakne, tad $a^2 - 2a - 1 = a$. Tātad $\left(a^2 - 2a - 1\right)^2 - 2\left(a^2 - 2a - 1\right) - a - 1 = a^2 - 2a - a - 1 = 0$, un a ir arī otrā vienādojuma sakne.

21.32. Vienādojumu pārveidojam formā $xy((x-3)(y-3)-8)=0$. Jāatrisina 3 vienādojumi: x = 0; y = 0; $(x-3)(y-3)=8$. Lai atrisinātu pēdējo vienādojumu, ievērojam, ka skaitli 8 var sadalīt divu veselu skaitļu reizinājumā 8 veidos: 1×8, 2×4, 4×2, 8×1, (-1)×(-8), (-2)×(-4), (-4)×(-2), (-8)×(-1). Katram no šiem reizinājumiem a×b atbilst atrisinājums x = a + 3, y = b + 3. Jāatceras, ka vēl ir divas bezgalīgas atrisinājumu sērijas x = 0, y $\in$ Z; x $\in$ Z, y = 0.

21.33. Aplūkosim divus gadījumus.
1) a = b = c; tad dotā izteiksme ir vienāda ar 6.
2) Uzskatīsim, ka a $\le$ b $\le$ c un tie visi nav vienādi. Tā kā $\frac{b+c}{a}$ -- vesels skaitlis un b + c < 2a, tad b + c = a. Tā kā $\frac{a+c}{b} = \frac{2c+b}{b}$ ir vesels skaitlis, tad b | 2c, un $b \le 2c$. Tātad $\frac{2b+c}{c} + \frac{2c+b}{b} + \frac{b+c}{b+c} < \frac{4c+c}{c} + \frac{3b}{b} + 1 = 9$.

21.34. Izveidojam trīs veselu skaitļu grupas $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ (katrā grupā 1994 skaitļi), kurām izpildās šādas īpašības: $\sum_i a_i = 0$, $\sum_i b_i = 0$, $\sum_i c_i = 0$, un visi reizinājumi $a_i \times b_k \times c_l$ ir dažādi (pamatojiet, kā to var izdarīt). Tad dotā kuba mazajā kubiņā ar ‘‘koordinātām’’ (i, j, k) ierakstām skaitli $a_i \times b_j \times c_k$. Aplūkosim ‘‘stabiņu’’, kuram 2. un 3. koordinātas fiksētas. Tad $\sum_i a_i b_j c_k = b_j c_k \sum_i a_i = b_j c_k \cdot 0 = 0$. Arī citos virzienos visas summas ir vienādas ar nulli.

21.35. Atbilde: 100. Tie var būt, piemēram, visu malu viduspunkti; visi šie punkti atrodas uz 100-stūrī ievilktās riņķa līnijas.

21.36. Vienādojumam nav atrisinājumu, jo $|\sin x + \cos x| < 2$, bet $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| \geq 2$.

21.37. No 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem ir 5 nepāra skaitļi. Starp tiem ir ne vairāk kā 2 skaitļi, kas dalās ar 3, ne vairāk kā 1 skaitlis, kas dalās ar 5, un ne vairāk kā 1, kas dalās ar 7. Tādēļ viens no šiem 5 nepāra skaitļiem nedalās ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7. Apzīmējam to ar m. Šis skaitlis ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem pārējiem skaitļiem. Tiešām, ja skaitlim m un kādam citam no dotajiem skaitļiem būtu kopīgs dalītājs, tad tas dalītu arī šo skaitļu starpību, un nepārsniegtu 9. Tad viens no pirmskaitļiem 2, 3, 5 vai 7 būtu šo skaitļu dalītājs. Taču skaitlis m nedalās ne ar vienu no tiem.

21.38. Ar h_a, t_a un m_a apzīmēsim no virsotnes A vilkto augstuma, bisektrises un mediānas garumus. Uzdevuma risinājums seko no četrām lemmām.
1. Lemma. Ja $b \neq c$, tad $h_a < t_a < m_a$.
2. Lemma. Ja $h_a = t_a$, $h_a = m_a$ vai $t_a = m_a$, tad b = c, un otrādi.
3. Lemma. No divām trijstūra mediānām garāka ir tā, kas vilkta pret īsāko malu.
4. Lemma. Ja trijstūra divas malas nav vienādas, tad mediāna no to kopējās virsotnes veido mazāku leņķi ar garāko malu.

21.39. Atbilde: n = 1949.

21.40. Atbilde: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ punkti, ja n ir nepāra skaitlis, un $\left(\frac{n(n+2)}{4}\right)$ punkti, ja n ir pāra skaitlis.

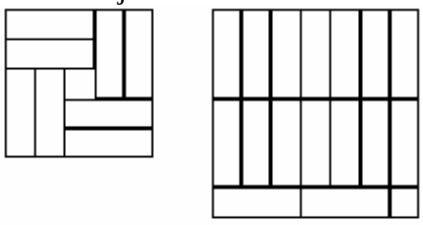
22. atklātā olimpiāde (1994./95. m.g.)

22.1. a) To var izdarīt, piemēram, tā:

6	6	7
6	7	6
7	6	6

b) To nevar izdarīt, jo trīs ciparu summa nevar būt lielāka par 3×9 = 27.

22.2. Atrisinājumi parādīti 22.1. zīmējumā.



22.1. zīm.

22.3. Ja atmetīsim ārējos kubiņus, tad paliks kubs ar izmēriem 4×4×4. Tātad iekrāsoto kubiņu skaits ir $6 \cdot 6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 152$.

22.4. Nē, nevar. Pavisam kopā ir 66 dalībnieku pāri. Uzskatīsim, ka pāris saņem olu, ja viens no pāra dalībniekiem nosūtījis otram olu. Pavisam tika uzdāvinātas 12 × 6 = 78 olas. Tātad būs pāris, kurš saņems divas olas. Tas nozīmē, ka šī pāra dalībnieki nosūtījuši olas viens otram.

22.5. Katrā pilnā desmitā no $\overline{n0}$ līdz $\overline{n9}$ ir vienāds skaits skaitļu, kuru ciparu summas ir pāra un nepāra. Atliek aplūkot skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995. Starp šiem skaitļiem ir par vienu vairāk tādu, kuru ciparu summa ir nepāra skaitlis, nekā tādu, kuru ciparu summa ir pāra skaitlis.

22.6. 1995 = 3 × 5 × 7 × 19. Šim skaitlim ir 16 dažādi naturāli dalītāji: 1, 3, 5, 7, 19, 3×5, 3×7, 3×19, 5×7, 5×19, 7×19, 3×5×7, 3×5×19, 3×7×19, 5×7×19, 3×5×7×19.

22.7. To var izdarīt 13 veidos.

22.8. Tā kā 1995 ir nepāra skaitlis, tad aplī kaut kur blakus stāvēs divi vienādas paritātes skaitļi. To summa būs pāra skaitlis.

22.9. Jā, taisnība.

22.10. Iekrāsosim kvadrātu 8×8 šahveida krāsojumā. Kvadrātā, no kura izgrieztas iesvītrotās rūtiņas, atlikušas 28 melnas un 32 baltas rūtiņas. Tā kā katra figūra 1×2 nosedz vienu melnu un vienu baltu rūtiņu, tad izgriezt var ne vairāk kā 28 figūras 1×2. Viegli parādīt, ka 28 šādas figūras var izgriezt.

22.11. Vienādība a) ir pareiza. Vienādība b) nav pareiza, jo, aprēķinot $(x + y)^5$, iegūstam izteiksmi $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

22.12. Nogrieznis MN ir garāks par nogriezni AB.

22.13. a) Uzvar otrais spēlētājs, atstājot pēc sava gājiena pirmajam spēlētājam 12, 6 un 0 konfektes, neatkarīgi no pirmā spēlētāja gājieniem.
b) Uzvar otrais spēlētājs, atstājot pēc sava gājiena pirmajam spēlētājam 13, 7 un 1 konfektes, neatkarīgi no pirmā spēlētāja gājieniem.
c) Uzvar pirmais spēlētājs, pirmajā gājienā apēdot 2 konfektes, atstājot $1993 = 6k + 1$, un katrā gājienā turpinot atstāt pēc sevis 6k+1 konfekti.

22.14. Nē, tā nevar būt. Skaitlis $\underbrace{111\ldots11}_{1995}$ dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tā kā skaitļa A un B ciparu summas ir vienādas, tad tie vai nu abi dalās ar 3, vai abi nedalās ar 3. Tātad, ja to reizinājums dalās ar 3, tad tam ir jādalās arī ar 9, bet tas tā nav.

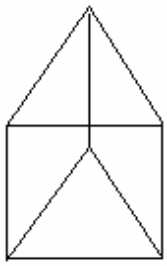
22.15. Visus lauciņus apdraud 8 laidņi, kas novietoti uz ceturtās vertikāles. Ar mazāku laidņu skaitu nepietiek. Tiešām, ja laidņu skaits būtu mazāks par 8, tad laidņu skaits, kas apdraud baltos (vai melnos) lauciņus būtu ne lielāks par 3. Bet kopā ir 14 malējie baltie lauciņi, un katrs laidnis var apdraudēt ne vairāk kā četrus no tiem. Tātad kāds no malējiem lauciņiem paliks neapdraudēts.

22.16. Nē, to nevar izdarīt. Vienā no grupām atradīsies skaitlis 13. Šīs grupas skaitļu reizinājums dalās ar 13, bet otras grupas skaitļu reizinājums ar 13 nedalās.

22.17. To var izdarīt 24 veidos. Pakāpeniski, virzoties no A, katrā virsotnē jāieraksta skaitlis -- cik veidos no A var nokļūt līdz šai virsotnei.

22.18. Pieņemsim, ka mazākais skaitlis tabulā ir x. Tā kā no katras rūtiņas uz katru var aiziet ar ne vairāk kā 14 soļiem un vienā solī skaitlis nevar palielināties vairāk kā par 1, tad lielākais skaitlis tabulā ir ne lielāks par x + 14. Tātad pavisam tabulā ir ne vairāk kā 15 dažādi skaitļi. Ja tie visi būtu ierakstīti tabulā ne vairāk kā 4 reizes, tad to kopskaits nepārsniegtu $15 \times 4 = 60$. Tā ir pretruna, jo tabulā ierakstīti 64 skaitļi. Tātad ir skaitlis, kas tabulā ierakstīts ne mazāk kā 5 reizes.

22.20. Atbilde uz a) punktu parādīta 22.2. zīmējumā (iezīmētie nogriežņi ir 1 cm gari).



22.2. zīm.

22.21. No tā, ka pirmajiem diviem vienādojumiem ir divas dažādas saknes seko, ka šo vienādojumu diskriminanti ir pozitīvi, t.i. $a^2 - b^2 > 0$ un $b^2 - c^2 > 0$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam, ka $a^2 - c^2 > 0$. Tātad trešā vienādojuma dikriminants $4c^2 - 4a^2$ ir negatīvs, un šim vienādojumam nav sakņu.

22.22. Sadalīsim visus 1995 skaitļus 997 grupās. Pirmajā grupā iekļausim skaitļus 1, 2, 3; katrā nākošajā grupā divus sekojošus skaitļus: (4, 5), (6, 7), ... , (1994, 1995). Tā kā ir izveidotas 997 grupas, bet izvēlēti 998 skaitļi, tad divi no tiem atradīsies vienā grupā; tie būs savstarpēji pirmskaitļi.

22.23. Tā kā $2 = S = \frac{1}{2}ab\sin C \le \frac{1}{2}ab \le \frac{1}{2}b^2$, tad $b \ge 2$.

22.24. a) Der skaitlis 1213121.
b) Der skaitlis 12131214121312151213121412131 21.

c) Vispārīgajā gadījumā, ja ir n cipari, skaitli konstruē induktīvi. Ja A ir līdzsvarots skaitlis k - 1 ciparam, tad $\overline{AkA}$ ir līdzsvarots skaitlis k cipariem.

22.25. Apzīmēsim ar O ap trijstūriem AMN un BKM apvilkto riņķa līniju krustpunktu, kas nav M. No teorēmas par ievilktu četrstūri seko, ka $\angle MON = 180° - \angle BAC$ un $\angle MOK = 180° - \angle ABC$. No šejienes seko, ka

$$\angle NOK = 360° - \angle MON - \angle MOK = \angle BAC + \angle ABC = 180° - \angle ACB,$$

un ap četrstūri CKON var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka arī trijstūrim CNK apvilktā riņķa līnija ies caur punktu O.

22.26. Sastādām vienādojumu sistēmu (k -- krēga cena, t -- terbuka cena, d -- dillera cena).

$$\begin{cases} 2k + 3t + 5d = 53 \\ 3k + 5t + 9d = 91 \end{cases}$$

Pareizinot pirmo vienādību ar 2 un atņemot otro, iegūstam, ka $k + t + d = 15$. Tātad viens krēgs, viens terbuks un **viens dillers** kopā **maksā tikai 15 santīmus.**

22.27. a) Ievērojot to, kā izpildās reizināšana stabiņā, pierādiet nevienādību

$$S(a \cdot b) \le S(a) \cdot S(b).$$

No šejienes seko prasītais:

$$\tfrac{1}{8} S(n) = \tfrac{1}{8} S(1000 \cdot n) = \tfrac{1}{8} S(125 \cdot 8n) \le \tfrac{1}{8} S(125) \cdot S(8n) = \tfrac{1}{8} \cdot 8 \cdot S(8n) = S(8n).$$

b) Vienādība pastāv visiem skaitļiem $n = 12500\ldots0$.

22.28. Apzīmēsim regulāros trijstūru ar ABD, BCE un ACF. Apzīmēsim ar O ap trijstūriem ABD un BCE apvilkto riņķa līniju krustpunktu (kas nav B). No teorēmas par ievilktiem četrstūriem seko, ka $\angle BOA = \angle BOC = 120°$. Tātad arī leņķis AOC ir vienāds ar 120°, un ap četrstūri AOCF var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka arī trešā riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri ACF ies caur punktu O, un tās visas krustojas vienā punktā.

22.31. Aplūkosim skaitļu intervālu [1, n], n = abcde. Šajā intervālā $\frac{n}{a}$ skaitļu pieder pirmajai progresijai, $\frac{n}{b}$ -- otrajai, utt. Kopā progresijas satur ne vairāk kā $\frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} + \frac{n}{d} + \frac{n}{d} < n$ skaitļu. Tā kā intervālā [1, n] ir n skaitļi, tad kāds no tiem nepiederēs nevienai no dotajām progresijām.

22.32. Tā kā skaitļi x un x + 1 ir savstarpēji pirmskaitļi un to reizinājums ir naturāla skaitļa septītā pakāpe, tad arī x un x + 1 jābūt naturālu skaitļu septītajām pakāpēm. Bet, tā kā divas septītās pakāpes naturālo skaitļu rindā neatrodas blakus, tad dotajam vienādojumam atrisinājumu nav.

22.33. Paralēlskaldņu skaits ir 29.

22.34. Pierādījumā izmanto pagriezienus pa 90°.

22.35. Uzdevums jāinterpretē grafu teorijas valodā.

22.36. Tā kā $|\cos y| \le 1$, tad prasītā vienādība var izpildīties tikai, ja $|\cos x| = |\cos 2x| = |\cos 3x| = 1$. Vienādība $|\cos x| = 1$ izpildās, ja x = pn. Viegli pārbaudīt, ka visas šīs vērtības apmierina uzdevuma nosacījumus.

22.37. Ja daudzstūrim visas skaldnes ir trijstūri un to skaits ir n, tad daudzstūrim ir $\frac{3n}{2}$ šķautņu (katram trijstūrim ir 3 malas, bet katra šķautne tiek skaitīta divas reizes). Tas nozīmē, ka n ir pāra skaitlis. Skaidrs, ka n > 2.
Visiem pāra skaitļiem, kas lielāki par 2, šādu daudzskaldni var uzrādīt. Ja n = 4, tad ņemam trijstūra piramīdu. Ja n = 2k > 4, tad savienojam ar pamatiem divas k-stūru piramīdas.

22.38. Jā, eksistē. Uzdevuma nosacījumiem atbilst, piemēram, polinoms

$$P(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2.$$

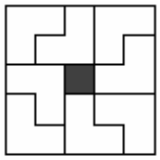
Redzams, ka šis polinoms ir pozitīvs visām argumentu x, y vērtībām. Tas pieņem jebkuru pozitīvu vērtību c, piemēram, ja $x = \sqrt{c}$ un $y = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

22.40. Aplūkosim riņķa līniju, kas pieskaras visām četrām riņķa līnijām no ārpuses. Tad četrstūris ABCD atradīsies šīs riņķa līnijas iekšpusē. No visiem četrstūriem, kas atrodas riņķa līnijas iekšpusē, lielākais laukums ir riņķa līnijā ievilktajam kvadrātam. Tātad punktus A, B, C, D jāizvēlas kā šīs riņķa līnijas un sākotnējo četru riņķa līniju pieskaršanās punktus, kas veido konstruētajā riņķa līnijā ievilktu kvadrātu.

23. atklātā olimpiāde (1995./96. m.g.)

23.1. No katriem sešiem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem, rindā ierakstīti divi skaitļi 6k+1 un 6k+5; k = 0, 1, 2, 3, ... Tātad 100-ais skaitlis ir 6×49+5 = 299 un 1996-ais skaitlis ir 6×997+5 = 5987.

23.2. To var izdarīt, piemēram, tā kā parādīts 23.1. zīmējumā.



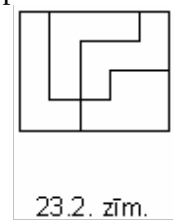
23.1.zīm.

23.3. Ja atmetīsim ārējos kubiņus, tad paliks kubs ar izmēriem 6 × 6 × 6. Tātad iekrāsoto kubiņu skaits ir $8 \cdot 8 \cdot 8 - 6 \cdot 6 \cdot 6 = 296$.

23.4. Var pārvietoties par vienu stāvu uz augšu, jo 1 = 3 + 3 - 5, un par vienu stāvu uz leju, jo -1 = 3 + 3 + 3 - 5 - 5. Tātad var pārvietoties no jebkura stāva uz jebkuru. Jāievēro, ka saskaitāmo secību var mainīt, ja mēs atrodamies tuvu jumtam vai pamatam.

23.5. Pietiek ar 1996 vārdnīcām, kas tulko no pirmās valodas uz otro valodu, no otrās uz trešo, ... , no 1995-tās valodas uz 1996-to valodu, no 1996-tās valodas uz pirmo valodu. Skaidrs, ka mazāk kā ar 1996 vārdnīcām nepietiek, jo nepieciešama vismaz viena vārdnīca, kas tulkotu no katras valodas.

23.6. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 23.2. zīmējumā.



23.2. zīm.

23.7. Tā kā 6991 ir nepāra skaitlis, tad aplī kaut kur blakus stāvēs divi vienādas paritātes skaitļi. To summa būs pāra skaitlis.

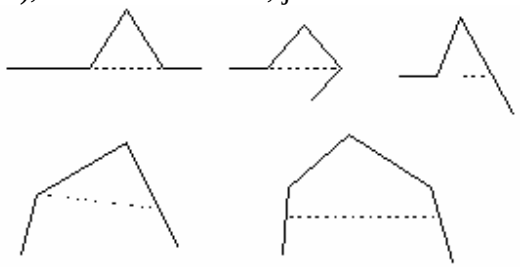
23.8. Dotā summa ir vienāda ar $\frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$. Šim skaitlim ir 6 cipari.

23.9. Jāpaņem vismaz 5 kartiņas, jo paņemot 4, uz tām varētu būt rakstīti skaitļi 1, 3, 4, 7, no kuriem summā nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 9. Pierādīsim, ka paņemot 5 kartiņas, atradīsies summa, kas dalīsies ar 9. Ja tiks izvēlētas kartiņas ar skaitļiem 0 vai 9, tad nosacījums izpildās. Uzskatīsim, ka šādas kartiņas netiks izvēlētas. Pārējās kartiņas sadalīsim 4 pāros: (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5). Tā kā izvēlētas piecas kartiņas, tad divas būs no viena pāra. Tās summā dos skaitli 9, kas dalās ar 9.

23.10. a) Gājienu rezultātā nemainās nenosvītroto skaitļu summa. Tā kā sākumā visu uzrakstīto skaitļu summa ir 1996, tad pēdējais nenosvītrotais skaitlis ir 1996.
b) Katrā gājienā nenosvītroto skaitļu skaits samazinās par 1. Tātad pavisam tiks izdarīti 1995 gājieni; katrā gājienā klāt tiek pierakstīts viens skaitlis. Tātad beigās (nosvītroto un nenosvītroto) skaitļu skaits būs 1996 + 1995.

23.11. a) 27 saskaitāmie.
b) 10 saskaitāmie.

23.12. Griezieniem ir divi gali. Katrs grieziens palielina kopējo virsotņu skaitu par 0; 1; 2; 3 vai 4 (skat. 23.3. zīm.), bet ne vairāk kā 4, jo klāt rodas ne vairāk kā 4 virsotnes .



23.3. zīm.

Viegli redzēt, kā šos gadījumus var realizēt, lai rastos 5-stūris un 6-stūris.
Tātad sākotnējam daudzstūrim varēja būt 5 + 6 = 11; 10; 9; 8; 7 virsotnes.

23.13. a) Uzvar otrais spēlētājs, atstājot pēc sava gājiena pirmajam spēlētājam 12, 6 un 0 konfektes, neatkarīgi no pirmā spēlētāja gājieniem.
b) Uzvar pirmais spēlētājs, pirmajā gājienā apēdot 4 konfektes, atstājot $1992 = 6k$, un katrā gājienā turpinot atstāt pēc sevis 6k konfektes.

23.14. Ja no šiem 5 skaitļiem ir trīs, kas atšķirīgi pēc moduļa 3 -- tātad 0,1 un 2, tad to summa dalās ar 3. Pretējā gadījumā tie pieņem tikai divas vērtības pēc moduļa 3. Tātad no 5 skaitļiem vismaz trīs ir kongruenti pēc moduļa 3. To summa dalās ar 3.

23.15. Nē, nevar. Aplūkojiet pēdējo gājienu.

23.16. Apzīmēsim ar x_1 un x_2 pirmā vienādojuma saknes un ar x_3 un x_4 otrā vienādojuma saknes. Tad no Vjeta teorēmas seko, ka $a = -(x_1 + x_2) < -(x_3 + x_4) = p$ un $b = x_1 \cdot x_2 > x_3 \cdot x_4 = q$.

23.17. Ja izvēlēti m pāra skaitļi un n nepāra skaitļi (m + n = 6), tad būs n×m summas, kas dos nepāra skaitļus. Tā kā $m \times n \leq 9$, ja m + n = 6 (pierādiet to!), tad nepāra skaitļi būs ne vairāk par 9. Tātad nevar būt 10 pirmskaitļu, jo pāra skaitļi, kas lielāki par 2, nav pirmskaitļi.

23.18. Pieņemsim, ka mazākais skaitlis tabulā ir x. Tā kā no katras rūtiņas uz katru var aiziet ar ne vairāk kā 14 soļiem un vienā solī skaitlis nevar palielināties vairāk kā par 1, tad lielākais skaitlis tabulā ir ne lielāks par x + 14. Tātad pavisam tabulā ir ne vairāk kā 15 dažādi skaitļi. Ja tie visi būtu ierakstīti tabulā ne vairāk kā 4 reizes, tad to kopskaits nepārsniegtu 15 × 4 = 60. Tā ir pretruna, jo tabulā ierakstīti 64 skaitļi. Tātad ir skaitlis, kas tabulā ierakstīts ne mazāk kā 5 reizes.

23.19. Nezinītim jāizpilda 14 svēršanas, noliekot uz viena svaru kausa lodītes, uz kurām rakstīts 1g un x g, bet uz otra -- lodīti, uz kuras rakstīts (x + 1) g. Ja lielākajā daļā svēršanu ir līdzsvars, tad lodīte, uz kuras rakstīts 1g, tiešām sver 1g.

23.20. Nē, tā nevar būt.

23.21. Vienādojumam eksistē sakne, ja tā diskriminants $n^2 - 24n \geq 0$.
Atbilde: $n \leq 0$ vai $n \geq 24$.

23.22. Tā kā $2 = S = \frac{1}{2}ab\sin C \leq \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2}b^2$, tad $b \geq 2$.

23.23. Visus naturālos skaitļus sadalīsim sekojošās grupās 100; 50; (1, 99); (2, 98); (3, 97); ... ; (49, 51). Ja starp uzrakstītajiem 50 skaitļiem ir skaitlis 100, tad to var arī izvēlēties. Pretējā gadījumā 50 skaitļi pieder 50 grupām. Ja kādā no grupām ir divi skaitļi, tad tie summā dod 100 -- naturālu skaitļu kvadrātu. Ja nevienā grupā nav divu skaitļu, tad katrā grupā ir viens no uzrakstītajiem skaitļiem; Tāds ir arī grupā (36, 64). To var izvēlēties, jo šie abi skaitļi ir naturālu skaitļu kvadrāti.

23.24. No trijstūru DABO un DDEO līdzības seko, ka $\frac{AO}{OE} = \frac{AB}{ED}$. Līdzīgi pierāda, ka $\frac{EO}{OC} = \frac{EF}{BC}$ un $\frac{OC}{AO} = \frac{CD}{AF}$. Sareizinot šīs vienādības, iegūstam prasīto.

23.25. Mazākās apmācības izmaksas ir 1500 lati.

23.26. Vienādojumam ir saknes, ja tā diskriminants nav negatīvs, t.i. $p^2 - 4q \geq 0$. Naturālu skaitļu pāru (p, q), kuriem izpildās šī nevienādība ir 62.

23.27. Apzīmēsim regulāros trijstūru ar ABD, BCE un ACF. Apzīmēsim ar O ap trijstūriem ABD un BCE apvilkto riņķa līniju krustpunktu (kas nav B). No teorēmas par ievilktiem četrstūriem seko, ka $\angle BOA = \angle BOC = 120°$. Tātad arī leņķis AOC ir vienāds ar 120°, un ap četrstūri AOCF var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka arī trešā riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri ACF ies caur punktu O, un tās visas krustojas vienā punktā.

23.28. Var izvēlēties piecus šādus skaitļus: 1, 2, 3, 6, 12.
Ar indukciju pierāda, ka var izvēlēties arī n šādus skaitļus, sākot ar norādītajiem un katru nākošo ņemot kā visu iepriekšējo skaitļu summu.

23.29. Pierādījumā izmantojam to, ka sastādām tabulu, kuras summu aprēķinām divējādi: summējot skaitļus pa rindiņām un pēc tam aprēķinot to summu, un summējot skaitļus pa kolonām un pēc tam aprēķinot to summu.

23.30. Vispirms pierādām, ka starp virknes a(n) locekļiem katrs naturāls skaitlis k parādās tieši k reizes. Tātad visus dotās summas locekļus, izņemot pēdējos, var sagrupēt grupās (katrā grupā ir k locekļi, vienādi ar $\frac{1}{k}$), kuru summas ir 1. Ir 62 tādas pilnas grupas un atliek grupa, kura satur 43 locekļus $\frac{1}{63}$. Tātad visa summa ir vienāda ar $62\frac{43}{63}$.

23.31.

$$x_1^6x_2^2 + x_1^2x_2^6 = x_1^2x_2^2\left((x_1 + x_2)^4 - 6x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)\right) =$$

$$q^2\left((-p)^4 - 6q^2 - 4q((-p)^2 - 2q)\right) = q^2(p^4 - 4qp^2 + 2q^2)$$

23.32. No nevienādība abc > 0 seko, ka vai nu visi skaitļi a, b, c, ir pozitīvi (un tad apgalvojums pierādīts), vai arī divi no tiem, teiksim a un b, ir negatīvi, bet c pozitīvs.
Aplūkosim šo gadījumu: a < 0, b < 0, c > 0. No nevienādības a + b + c > 0 seko, ka $|c| > |a|$.
Izdalot otro no dotajām nevienādībām ar pozitīvu skaitli abc, iegūstam nevienādību $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} > 0$. Tā kā tikai saskaitāmais $\frac{1}{c}$ ir pozitīvs, tad $\left|\frac{1}{c}\right| > \left|\frac{1}{a}\right|$, bet tas ir pretrunā ar nevienādību $|c| > |a|$. Tātad visi dotie skaitļi ir pozitīvi.

23.33. Tā kā skaitļi x un x + 1 ir savstarpēji pirmskaitļi un to reizinājums ir naturāla skaitļa septītā pakāpe, tad arī x un x + 1 jābūt naturālu skaitļu septītajām pakāpēm. Bet, tā kā divas septītās pakāpes naturālo skaitļu rindā neatrodas blakus, tad dotajam vienādojumam atrisinājumu nav.

23.34. Pierādījumā izmanto teorēmu par ievilktajiem leņķiem.

23.35. Pierādījumā izmanto Dirihlē principu.

23.36. Vienādojumu var pārveidot formā cos7x = cos 3x.

23.37. Ja daudzstūrim visas skaldnes ir trijstūri un to skaits ir n, tad daudzstūrim ir $\frac{3n}{2}$ šķautņu (katram trijstūrim ir 3 malas, bet katra šķautne tiek skaitīta divas reizes). Tas nozīmē, ka n ir pāra skaitlis. Skaidrs, ka n > 2.
Visiem pāra skaitļiem, kas lielāki par 2, šādu daudzskaldni var uzrādīt. Ja n = 4, tad ņemam trijstūra piramīdu. Ja n = 2k > 4, tad savienojam ar pamatiem divas k-stūru piramīdas.

23.38. a) No vienādības seko, ka vismaz viens no skaitļiem x, y, z ir pāra skaitlis, tātad vienāds ar 2. Skaidrs, ka z $\neq$ 2. Tā kā gadījumi x = 2 un y = 2 ir līdzvērtīgi, tad uzskatīsim, ka x = 2. Iegūsim vienādojumu $4 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$, kuram nav atrisinājuma naturālos skaitļos.
b) Šādi pirmskaitļi neeksistē: pretruna iegūstama pēc moduļa 8.

23.40. Vispirms nosēdinām viesus patvaļīgi. Ja blakus sēž tikai paziņas, tad viss kārtībā. Pieņemsim tomēr, ka šajās viesībās blakus sasēdināti cilvēki, kuri nepazīst viens otru. Apzīmēsim tos ar A un B. Tālāk aplūkosim pārējos viesus, virzoties no A un B pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Pieņemsim, ka ir izdevies atrast tādus divus blakussēdošus viesus C un D, ka A ar C ir pazīstami un B ar D arī ir pazīstami. Tādā gadījumā visu viesu rindu no B līdz C apgriež otrādā secībā. Pārējo viesu secību atstāj nemainītu. Šīs

procedūras rezultātā blakussēdošo pazīstamo skaits ir palielinājies. Šo procedūru atkārto, kamēr visi blakussēdošie ir paziņas. Atliek pierādīt, ka tiešām katru reizi, kad atrasts pāris no viens otru nepazīstošiem blakussēdētājiem (kā A un B), izdosies atrast vēl vienu pāri (kā C un D), lai izdarītu attiecīgās izmaiņas. To var pierādīt izmantojot Dirihlē principu.

24. atklātā olimpiāde (1996./97. m.g.)

24.1. Jā, piemēram, Andra dzimšanas diena ir 31. decembrī, bet minēto frāzi viņš saka 1. janvārī.

24.2. Nē. Blakus esošām ābelēm ābolu skaita paritātes atšķiras. Tāpēc ir 8 nepāra saskaitāmie un 8 pāra saskaitāmie, un to summai jābūt pāra skaitlim.

24.3. No 1 līdz 9 tāds ir viens skaitlis, kura ciparu summa dalās ar 5. No $\overline{n0}$ līdz $\overline{n9}$ tādi skaitļi ir divi (neatkarīgi no n). Tāpēc no 10 līdz 1989 (kur ir 198 pilni desmiti) tādu skaitļu kopā ir $198 \times 2 = 396$. Starp skaitļiem 1990; 1991; ...; 1997 tādi skaitļi ir divi. Tātad pavisam to ir $1 + 396 + 2 = 399$.

24.4. $1 = 3 + 3 - 5$; $(-1) = 3 + 3 + 3 - 5 - 5$. Tātad var pārvietoties par 1 stāvu uz augšu un par 1 uz leju; tāpēc var pārvietoties patvaļīgi. Jāievēro, ka saskaitāmo kārtība var tikt mainīta, ja atrodamies tuvu mājas pamatam vai jumtam.

24.5. Godīgie salinieki katrs atbildējis ‘‘jā’’ uz vienu jautājumu, meļi -- katrs uz diviem. Tāpēc kopējais atbilžu ‘‘jā’’ skaits ir salinieku skaits plus meļu skaits. Tāpēc meļu ir $(70 + 60 + 50) - 100 = 80$.

24.6. Piemēram, tā, kā parādīts tabulā:

A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

24.7. Ja gadās paņemt 1; 3; 4; 7, tad prasīto skaitli izveidot nevar.
Pierādīsim, ka ar piecām kartiņām pietiek.
a) ja starp tām ir 0 vai 9, viss kārtībā,
b) ja starp tām nav ne 0, ne 9, tad piecas kartiņas pieder 4 pāriem (1; 8), (2; 7), (3;6), (4; 5), tāpēc vienam pārim pieder 2 kartiņas, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 9.

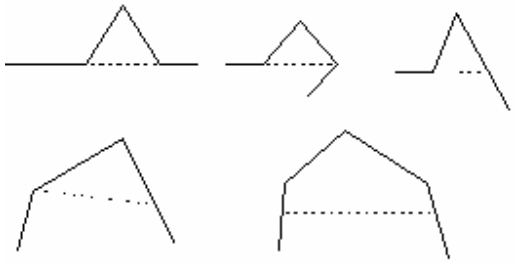
24.8. $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(97-98-99+100)=0$.

24.9. Iedomāsimies, ka torte sadalīta 60 daļās. Tad rīmu ēdelība dienā ir šāda:
20 daļas, 15 daļas, 12 daļas, 10 daļas, $8\frac{4}{7}$ daļas, utt. Redzam, ka pa četri ēdelīgākie rīmas kopā var apēst tikai $20 + 15 + 12 + 10 = 57$ daļas. Tāpēc vajag vismaz piecus rīmas; acīmredzami ar pieciem pietiek.

24.10. Lai zirdziņš nonāktu uz visām malējām rūtiņu rindām, viņam vertikāli un horizontāli kopā jāpārvietojas vismaz par 2×7 + 2×7 = 28 rūtiņām. Bet viena gājiena laikā zirdziņš kopā pārvietojas par 3 rūtiņām. Tāpēc viņam vajag vismaz 10 gājienus, bet viņa rīcībā ir tikai 8 gājieni.

24.11. $2^{197} \cdot 8^{97} = 2^{197} \cdot 2^{3 \cdot 97} = 2^{197+291} = 2^{488} = 4^{244}$.

24.12. Griezieniem ir divi gali. Katrs grieziens palielina kopējo virsotņu skaitu par 0; 1; 2; 3 vai 4 (skat. 24.1. zīm.), bet ne vairāk kā 4, jo klāt rodas ne vairāk kā 4 virsotnes .



24.1. zīm.

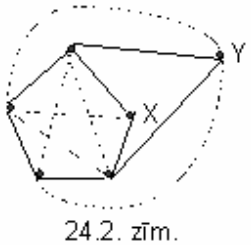
Viegli redzēt, kā šos gadījumus var realizēt, lai rastos 5-stūris un 6-stūris.
Tātad sākotnējam daudzstūrim varēja būt 5 + 6 = 11; 10; 9; 8; 7 virsotnes.

24.13.

((((1 : 2) : 3) : 4) : 5) : ((((6 : 7) : 8) : 9) : 10);
1: ((2 : (3 : (((4 : 5) : 6) : 7))) : ((8: 9) : 10));
1 : ((2 : 3) : ((4 : ((5 : 6) : (7 : 8))) : (9 : 10))).

24.14. Pieņemam, ka $a = \frac{b+c}{3}$, jeb 3a = b + c. Ja būtu a ≥ b, tad $c - a = 2a - b \geq 2a - a = a \geq b$, bet no nevienādības c - a ≥ b seko, ka c ≥ a + b, bet tas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Līdzīgi parāda, ka nav iespējama nevienādība a ≥ c.

24.15. a) Jā, var, piemēram, tā, kā parādīts 24.2. zīmējumā: nenovilkta ir lenta starp punktiem X un Y.



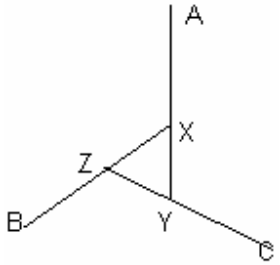
24.2. zīm.

b) nē, tā nevar būt. Pieņemsim, ka nav novilkta lenta XY. Apskatām visas 6 lampas ieņemot X; tās visas savā starpā savienotas ar lentām. No tām var izvēlēties trīs, kas savienotas ar vienādas krāsas lentām.

24.16. Viegli redzēt, ka viena sakne ir 1 (jo $a\times1^2 + b\times1 + c = 0$). Tāpēc otrā sakne, saskaņā ar Vjeta teorēmu, ir $\frac{c}{a}$ vai $\left(-\frac{b}{a}-1\right)$.

24.17. Uz svariem salīdzinām lodītes, uz kurām ir uzrakstīts:
1g + 2g un 3g 1g + 4g un 5g 1g + 6g un 7g 1g + 8g un 9g
1g + 10g un 11 g 1g + 12g un 13g 1g + 14g un 15g
Ja vairāk kā puse no tām izrādās pareizas, tad lodīte, uz kuras uzrakstīts1g, tiešām sver 1g, pretējā gadījumā - nē.

24.18. Pieņemsim, ka pieskares krustojas trīs dažādos punktos, kā redzams 24.3. zīmējumā. A, B, C ir riņķa līniju pieskaršanās punkti.

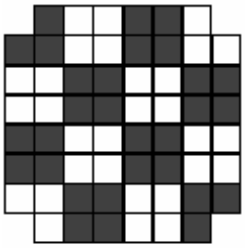


24.3. zīm.

Saskaņā ar pieskaru īpašībām:
BZ + ZX = AX, AX + XY = YC, YC + ZY = BZ,
saskaitot vienādību labās un kreisās puses, iegūstam, ka XY + ZY + XZ = 0. Iegūta pretruna, tātad pieskares nevar krustoties trīs dažādos punktos.

24.18. Piemēram, skaitlis 11713.

24.20. Nē, nevar. Iekrāsojam rūtiņas, kā parādīts 24.4. zīmējumā.


24.4.zīm.

Pieņemsim, ka 15 dotās figūras pārklāj kvadrātu bez stūrīšiem. Katra no tām satur nepāra skaitu balto rūtiņu, tātad kopā tām jāsatur nepāra skaitu balto rūtiņu; bet kvadrātā (bez stūra rūtiņām) balto rūtiņu skaits ir pāra skaitlis.

24.21. Ievērojam, ka $1152 = 128\times9 = 2^7\times3^2 = (1)\times(2^1)\times(3^1)\times(2^2)\times(2\times3)\times(2^3)$.

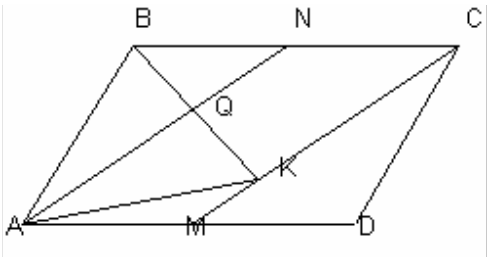
24.22. Pierādīsim, ka vienādojuma diskriminants ir nenegatīvs skaitlis.
$$D = (a+b)^2 - (2ab + a + b - \tfrac{1}{2}) = \left(a^2 - a + \tfrac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \tfrac{1}{4}\right) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

24.23. Apskatām skaitļu sagrupējumu:

$$\overbrace{50, \underbrace{100, (1; 99), (2; 98), \ldots, (49; 51)}_{49}}^{Q}$$

Vismaz 49 no uzrakstītajiem skaitļiem atrodas daļā Q. Ja kāds no tiem ir 100, viss kārtībā. Ja starp tiem nav 100, tie sadalās pa 49 pāriem. Ja kaut vienā pārī ir 2 uzrakstītie skaitļi, tad to summa ir 100, un viss kārtībā. Ja vienā pārī nav divu uzrakstīto skaitļu, tad katrā pārī ir viens uzrakstītais skaitlis; tāds ir arī pārī (36; 64) un tas der par meklējamo.

24.24. Novelkam AN, kur N ir BC viduspunkts (skat. 24.5. zīm.). Tā kā AM || NC un AM = NC, tad ANCM ir paralelograms: tāpēc AN || NC un AN $\perp$ BK. No Talesa teorēmas seko, ka BQ = QK. Tātad trijstūra BAK augstums AQ ir arī mediāna; līdz ar to BAK ir vienādsānu trijstūris, un AB = AK.



24.5. zīm.

24.25. To var izdarīt, ja n dalās ar 3.

24.26. No otrā vienādojuma $\frac{x+y}{xy} = 1997$ un vienādības x + y = 1, seko, ka $xy = \frac{1}{1997}$. No Vjeta teorēmas seko, ka x un y ir divas vienādojuma $t^2 - t + \frac{1}{1997} = 0$ saknes; tātad ir divi atrisinājumi: $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1995}{3994}}$, $y = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1995}{3994}}$.

24.27. Apzīmēsim ar O riņķa līniju krustpunktu, kas apvilkta ap diviem no dotajiem trijstūriem. Izmantojot teorēmu par ievilkta četrstūra pretējo leņķu summu, iegūstam, ka $\angle$AOB = $\angle$BOC = 120°. Tātad arī $\angle$COA = 120°, un arī trešā riņķa līnija iet caur punktu O.

24.28. Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko pakāpeniski iegūstam:

$$x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} \geq 2\sqrt{x^4y^4} + \frac{2}{x^2y^2} = 2\left(x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \geq 2 \cdot 2\sqrt{x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 4.$$

24.29. a) Tāds ir, piemēram, skaitlis 22112 = 32 × 691.
b) Meklējamais skaitlis ir 1212122112.

24.30. Spēlētājs A to var izdarīt, nokrāsojot uz vienas taisnes 1999 sarkanus punktus. Katri divi no tiem nosaka divus vienādmalu trijstūrus. Tātad pavisam kopā trešo virsotņu skaita ir $2 \cdot C_{1999}^2 = 2 \cdot \frac{1999 \cdot 1998}{2} > 1999 \cdot 1997$ un spēlētājs B tos visus nevar 1999 gājienos iekrāsot melnus. Pēdējā gājienā spēlētājs A nokrāso neiekrāsoto virsotni sarkanu.

24.31. a) Piemēram, 69.
b) Tādu ir bezgalīgi daudz, piemēram, $69 + 70 \times n$, $n = 0; 1; 2; ...$

24.32. a) $x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$.

b) Pārveidojam vienādojumu: $\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(x - y - \sqrt{x-y} + \frac{1}{4}\right) = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x-y} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, no kurienes seko prasītais.

24.33. a) Taisnstūri 3×4 var sadalīt divos šādos trijstūros. No tiem var salikt kvadrātu ar izmēriem 12×12.
b) Viena trijstūra laukums ir 6. Ja kvadrāta malas garums ir a un trijstūru skaits ir k, tad iegūstam vienādību $a^2 = 6k$. No šejienes seko, ka a ir pāra skaitlis, $a = 2t$; tātad $4t^2 = 6k$, $2t^2 = 3k$, un k dalās ar 2.

24.34. Pierādījumā izmanto teorēmu par ievilktajiem leņķiem.

24.35. Pierādījumā jāaplūko divas spēlētāju grupas: tie, kas palielinājuši savu punktu skaitu, un tie, kas pamazinājuši savu punktu skaitu.

24.36. No vienādības $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = |\cos y|$ seko, ka $|tgx| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \frac{|\sin y|}{|\cos y|} = |tgy|$.

24.37. Nē. Skaidrs, ka vienam no tiem būtu jābūt pāra skaitlim, tātad 2. Varam pieņemt, ka $x = 2$. Tad $z^2 - y^2 = 4$, $(z + y)(z - y) = 4$; bet šāda vienādība nav iespējama, jo $(z + y)(z - y) > (z + y) > 4$, ja z un y ir nepāra pirmskaitļi.

24.38. Jā var. Aplūkosim kubu $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Iekrāsosim melnas virsotnes A, B, C un A_1, bet pārējās baltas.

24.39. Tā kā $(\angle A + \angle B + \angle C) + (\angle X + \angle Y + \angle Z) = 180° \times 4$, tad katrs no dotā seko, ka $\angle X + \angle Y + \angle Z = 360°$. Tāpēc no trijstūriem DAXB, DBYC, DCZA var salikt vienu trijstūri ar malām AB, BC, CA, t.i. trijstūri, kas vienāds ar DABC. No šejienes seko prasītais.

24.40. Ar x apzīmēsim cik meitenes pazīst katrs zēns. Saskaitot kopējo pazīstamo pāru skaitu, iegūstam vienādību $nx = \frac{n(n+1)}{2}$ jeb $x = \frac{n+1}{2}$. Tātad n ir nepāra skaitlis.
Ar piemēru parāda, ka katram nepāra skaitlim n prasīto ir iespējams izpildīt.

26. atklātā olimpiāde (1998./99. m.g.)

26.1. Viens no zēniem Bruno vai Didzis apēda vismaz 13 konfektes; Tātad Andris apēda vismaz 14 konfektes. Kopā Bruno, Didzis un Andris apēda vismaz $25+14=39$ konfektes. Tātad Edgaram palika ne vairāk par 1 konfekti.
Tā kā katrs zēns noēda vismaz vienu konfekti, tad Edgars noēda tieši vienu konfekti.

26.2. Katrā desmitniekā no $\overline{abc0}$ līdz $\overline{abc9}$ skaitļu ciparu summas ir 10 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Tātad starp šiem skaitļiem tieši 2 skaitļu ciparu summas dalās ar 5. Starp pirmajiem 9 skaitļiem tikai viena skaitļa 5 ciparu summa dalās ar 5.
Tātad pavisam kopā ir $1+199\cdot 2=399$ naturāli skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 5.

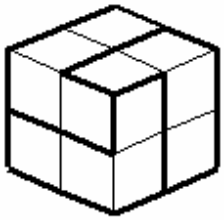
26.3. Aplūkosim taisnstūri, kura perimetrs ir 200. Palielinot tā augstumu par 1, mēs iegūstam taisnstūri, kura perimetrs ir 202. Tātad katram taisnstūrim ar perimetru 200 atbilst taisnstūris ar perimetru 202; turklāt visi iegūtie taisnstūri ar perimetru 202 ir dažādi. Atzīmēsim, ka taisnstūri ar malu garumiem 1, 100, kura perimetrs arī ir 202 šādā veidā iegūt nevar. Tātad vairāk ir taisnstūru ar perimetru 202.

26.4. Aplūkosim astoņstūra 4 malas bez kopīgiem galapunktiem; tajās ierakstīti skaitļi *x*, 11, 18, 15. Šo 4 skaitļu summa ir visu astoņstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summa. Līdzīgi, aplūkojot pārējās 4 astoņstūra malas, iegūstam, ka visu astoņstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir skaitļu 10, 14, 13, 21 summa.
Tātad $x+11+18+15=10+14+13+21 \Rightarrow x=14$.

26.5. Aplūkosim divus zinātniekus *A* un *B*. Pierādīsim, ka viņi ir radinieki. Pieņemsim pretējo, ka *A* un *B* nav radinieki. Tad atlikuši ir 15 zinātnieki, starp kuriem ir 8 *A* radinieki un 8 *B* radinieki; tā kā kopā sanāk 16 cilvēki, tad starp tiem ir kopīgs zinātnieks *C* – viņš ir gan *A* radinieks, gan *B* radinieks. Bet tādā gadījumā arī *A* un *B* ir radinieki. Iegūta pretruna; tātad jebkuri divi zinātnieki konferencē ir radinieki.

26.6. Tā kā 5 bērni apēd 5 mandarīnus 5 minūtēs, tad 5 bērni apēd 25 mandarīnus 25 minūtēs.
Tātad 10 bērni apēd 50 mandarīnus 25 minūtēs.

26.7. To var izdarīt. Kuba trīs skaldnes aplīmēsim tā, kā parādīts 26.3. zīmējumā.



26.3. zīm.

Pārējās trīs skaldnes aplīmēsim simetriski.

26.8. Skaitlis, kura ciparu summa ir 1 ir vienāds ar 10^n un nedalās ar 7. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka eksistē skaitlis ar ciparu summu $n>1$, kurš dalās ar 7.

Indukcijas bāze: $n=2, n=3$.

Skaitļi 1001 un 21 ar ciparu summu 2 un 3 dalās ar 7. Pierādīsim, ka, ja eksistē skaitlis *A* ar ciparu summu *k*, kurš dalās ar 7, tad eksistē arī skaitlis ar ciparu summu $k+2$, kurš dalās ar 7.

Līdz ar to būs pierādīts, ka eksistē skaitlis, kura ciparu summa ir $n>1$ un kurš dalās ar 7.

Lai konstruētu šādu skaitli, aplūkosim skaitli $\overline{1001A}$; šī skaitļa ciparu summa ir $k+2$ un tas dalās ar 7.

26.9. Katrs cipars šajā summā vienu reizi uzrakstīts kā vieninieku cipars vienu reizi kā desmitnieku cipars un vienu reizi kā simtnieku cipars. Tāpēc šo skaitļu summa ir vienāda ar

$$(1+2+3+\cdots+9)\cdot 111 = 45\cdot 111 = 4995.$$

26.10. a) To var izdarīt, piemēram, rakstot pa riņķi burtus šādā secībā:

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *A*, *C*, *E*, *B*, *D*.

b) Nē, to nevar izdarīt. Tā kā uzrakstīti 15 burti, bet burtu pavisam ir 6, tad kāds burts uzrakstīts vismaz 3 reizes. Tam blakus atrodas 6 burti, bet tā kā atliek tikai 5 dažādi burti, tad kādi no tiem būs vienādi un veidos vienādu burtu pārus.

26.11. Ir tikai 3 viencipara skaitļi, kas dalās ar 3.

Tā kā pārējiem skaitļiem ir jābūt vismaz divciparu skaitļiem, tad skaitļu kopējais skaits nevar pārsniegt $3+\frac{6}{2}=6$. Sešus šādus skaitļus var uzrakstīt, piemēram, šādi:

3, 6, 9, 21, 45, 78.

26.12. a) Nē, ne noteikti. Piemēram, skolnieku augumi var būt šādi (centimetros): 180, 210, 175, 205, 170, 200, 165, 195, 160, 190.

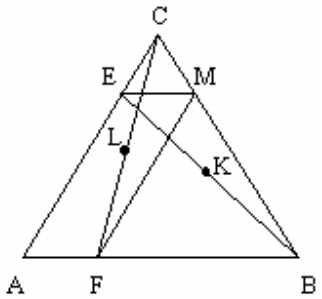
b) Jā, atradīsies. Aplūkosim skolniekus ar kārtas numuriem 1, 3, 5, 7, 9, 11. Tā kā 11-ais skolnieks ir garāks par pirmo, tad atradīsies skolnieki, kuri uzrakstītajā virknē stāv

blakus un labais ir garāks par kreiso. Izvēloties skolnieku, kurš stāv starp viņiem, atradīsim prasīto skolnieku.

26.13. No dotā seko, ka

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a^2+b^2+c^2+(a+b-c)^2=$$
$$a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=$$
$$(a+b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2.$$

26.14. Skat. 26.4. zīm.



26.4. zīm.

Trijstūri *EMB* un *CMF* ir vienādi, jo tiem ir vienādas divas malas $CM=EM$, $MF=MB$ un leņķi starp tām $\angle CMF=\angle EMB=120°$. Pagriežot trijstūri *CMF* ap virsotni *M* par $60°$ iegūstam trijstūri *EMB*. Tātad *CMF* mediāna *ML* pāriet par trijstūra *EMB* mediānu *MK*.

Tas nozīmē, ka $ML=MK$ un leņķis $\angle LMK=60°$. Tātad *MLK* ir vienādmalu trijstūris.

26.15. Uz viena svaru kausa uzliekam 6 monētas un uz otra citas 6 monētas. Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīga ir atlikusī monēta un ar vienu svēršanu var noskaidrot vai tā ir vieglāka vai smagāka par pārējām.

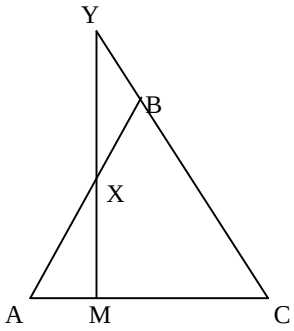
Ja svaru kausi nav līdzsvarā, uzskatīsim, ka monētas uz kreisā kausa sver mazāk par monētām uz labā kausa. Uzliksim uz viena svaru kausa trīs monētas no kreisā svaru kausa un atlikušās trīs monētas no kreisā svaru kausa.

Jā svaru kausi līdzsvarojas, tad visas monētas no kreisā svaru kausa ir ar vienādu svaru, un atšķirīgā monēta atradās uz labā svaru kausa – tātad bija smagāka par pārējām.

Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta atradās uz kreisā svaru kausa – tātad bija vieglāka par pārējām.

26.16. No vienādības $a+b+c=0$ seko, ka skaitlis 1 ir vienādojuma $ax^2+bx+c=0$ sakne. Otru vienādojuma sakni atrodam izmantojot Vjeta teorēmu: $x_1=1,\quad x_2=-\frac{b}{a}-1.$

26.17. Skat. 26.5. zīm.



26.5. zīm.

Trijstūri *AXM* un *CYM* ir līdzīgi (taisnleņķa trijstūri ar vienādiem leņķiem). Ar *k* apzīmēsim šo līdzīgo trijstūru katešu attiecību $k = \frac{XM}{AM} = \frac{YM}{MC}$.
Tad lielums $MX + MY = k \cdot (AM + MC) = k \cdot AC$ nav atkarīgs no punkta *M* izvēles.

26.18. Aplūkosim katra uzrakstītā skaitļa pirmo, otro, priekšpēdējo un pēdējo ciparus. Ir iespējamas ne vairāk kā $10^4 = 10000$ dažādas ciparu kombinācijas.
Tikko būs uzrakstīti 10001 skaitļi, starp kombinācijām vismaz divas būs vienādas; tātad uzrakstītajiem skaitļiem sakritīs pirmie, otrie, priekšpēdējie un pēdējie cipari.

26.19. Kā trešo var ierakstīt skaitli 7, jo virkne
13, 1, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10, 12, 6, 2, 8
atbilst uzdevuma nosacījumiem. Var pārbaudīt, ka skaitli 2 kā trešo ierakstīt nevar.

26.20. Pirmajā gājienā pirmais spēlētājs ieraksta reizināšanas zīmi starp skaitļiem 1 un 2.
Tagad atlikuši 9 nepāra skaitļi, kuriem abās pusēs ir brīvas vietas, kuras sadalītas 9 pāros; uz katru otrā spēlētāja gājienu pirmais spēlētājs pāra otrajā vietā ieliek reizināšanas zīmi. Tas nozīmē, ka rezultātā katrs nepāra skaitlis būs pareizināts ar kādu pāra skaitli un aritmētiskās izteiksmes vērtība būs pāra skaitlis.

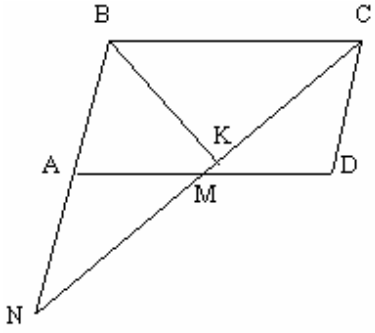
26.21. Atņemot no pirmā vienādojuma otro iegūstam:
$$x^2 + y - x - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - y) \cdot (x + y) = x - y.$$
a) ja $x - y = 0$, tad $x = y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$;
b) ja $x - y \neq 0$, tad $x + y = 1$, $x^2 = 1 - y = x \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}$, un iegūstam divus atrisinājumus $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
Uzdevumu var atrisināt arī ar ievietošanas metodi.

26.22. a) Ja $k = m + 2mn + n$, tad
$2k + 1 = 2m + 4mn + 2n + 1 = (2m + 1) \cdot (2n + 1)$.
Tā kā $2m + 1 > 1$ un $2n + 1 > 1$, tad $2k + 1$ nav pirmskaitlis.

b) Dots, ka $2k+1$ nav pirmskaitlis. Tātad $2k+1=a\cdot b$, kur a un b ir divi nepāra skaitļi, kas lielāki par 1. Tad, ņemot $m=\frac{a-1}{2}$ un $n=\frac{b-1}{2}$, iegūstam:

$$k=\frac{ab-1}{2}=\frac{a-1}{2}+2\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}+\frac{b-1}{2}=m+2mn+n.$$

26.23. Skat. 26.6. zīm.



26.6. zīm.

Pagarinām taisni *CM* līdz krustpunktam *N* ar taisni *AB*. Tad trijstūri *AMN* un *DMC* ir vienādi (tie ir līdzīgi trijstūri un $AM=MD$). Tātad $AN=CD=AB$. Tas nozīmē, ka *A* ir taisnleņķa trijstūra *NKB* hipotenūzas viduspunkts. Tātad *A* ir trijstūra *NKB* apvilktās riņķa līnijas centrs, un $AK=AB$.

26.24. Nogriežņu novilkšana beigsies, kad būs uzzīmētas visas daudzstūra malas (jo tās var vilkt jebkurā situācijā) un *n*-stūris būs sadalīts trijstūros (citādi būtu iespējams novilkt kāda daudzstūra diagonāli. Apzīmēsim trijstūru skaitu ar *t*. Šo trijstūru iekšējo leņķu summa ir vienāda ar regulārā *n*-stūra iekšējo leņķu summu; tātad $t\cdot 180°=(n-2)\cdot 180° \Rightarrow t=n-2$.

Pieņemsim, ka novilktas *d* *n*-stūra diagonāles. Tad trijstūru kopējais malu skaits ir $3t=n+2d \Rightarrow 3n-6=n+2d \Rightarrow n=d+3$.

Tātad pavisam novilkti $n+d=2n-3$ – nepāra skaits nogriežņu. Tas nozīmē, ka pēdējais no novilktajiem nogriežņiem būs tādā pašā krāsā kā pirmais – tātad baltā krāsā.

26.25. a) Tas ir iespējams. Sākumā kaudzīšu ar nepāra skaitu konfekšu ir pāra skaits. Apvienojam tās pa pāriem un no lielākās kaudzītes pārliekam mazākajā kaudzītē atbilstošo konfekšu skaitu. Tagad visās kaudzītēs ir pāra skaits konfekšu. Uzskatīsim, ka mums tagad ir 32 dubultkonfektes, kuras turpmāk neatdalīsim. Tagad mums ir pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits dubultkonfekšu. Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 16 kvadrokonfektes. Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 8 oktāvkonfektes (8 apvienotas konfektes). Līdzīgi iegūstam 4 16-konfektes, 2 32-konfektes un vienu kaudzi ar 64 konfektēm.

b) Nē, ne vienmēr. Pieņemsim, ka sākumā mums ir 5 kaudzītes pa 20 konfektēm katrā. Lai visas konfektes pēdējā gājienā apvienotu vienā kaudzē, iepriekšējā gājienā jāiegūst divas kaudzes ar 50 konfektēm katrā. Taču visās kaudzēs konfekšu skaits visu laiku dalīsies ar 20, bet 50 ar 20 nedalās.

26.26. Ievērojam, ka

$$x^2y^2 = x^2\left(1-x^2\right) = x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

Tā kā x un y – pozitīvi skaitļi, tad $0 < xy$. Iegūstam:

$$0 < xy \le \frac{1}{2}.$$

Vēl ir jāpierāda, ka, ja c ir patvaļīgs reāls skaitlis, kuram izpildās nevienādības

$$0 < c \le \frac{1}{2},$$

tad sekojošai vienādojumu sistēmai ir reāli atrisinājumi.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = c \end{cases}.$$

Pieskaitot un atņemot otro vienādojumu no pirmā reizinātu ar 2, iegūstam:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2c, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 1 - 2c.$$

Tātad, pieņemot, ka $x \ge y$, iegūstam:

$$x + y = \sqrt{1+2c}, \quad x - y = \sqrt{1-2c}.$$

No šejienes viegli atrast x un y vērtības, kas apmierina uzdevuma nosacījumus:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1+2c} + \sqrt{1-2c}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{1+2c} - \sqrt{1-2c}}{2} \end{cases}.$$

26.27. Apzīmēsim $x^2 + x + 1 = a$, $x^2 - 2x - 2 = b$. Tad vienādojumu var pārrakstīt formā:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right) = (a+b)^3.$$

Jāaplūko divi gadījumi:

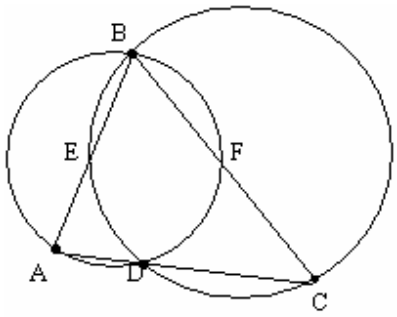
1) $a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$

2) $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3ab = 0.$

a) $a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x + 1 = 0$, vienādojumam nav reālu sakņu,

b) $b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{3}.$

26.28. Skat. 26.7. zīm.



26.7. zīm.

No teorēmas par sekantes reizinājumu ar tās ārējo daļu iegūstam:

$$\begin{cases} AB \cdot AE = AC \cdot AD \\ CB \cdot CF = CA \cdot CD . \end{cases}$$

Izdalot šīs vienādības, iegūstam:

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{AE}{CF} = \frac{AD}{CD} .$$

No trijstūra *ABC* leņķa bisektrises īpašības zināms, ka

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} .$$

Tātad, no iepriekšējās vienādības seko, ka

$\frac{AE}{CF} = 1 \quad \Rightarrow \quad AE = CF$, kas arī bija jāpierāda.

26.29. Apzīmēsim $\text{LKD}(x,y) = (x,y) = u$, bet $\text{MKD}(x,y) = [x,y] = v$. No vienādības $u \cdot v = x \cdot y$ seko, ka kopējais skaitļu reizinājums *R* nemainās. Atzīmēsim, ka no šejienes seko, ka kopējā skaitļu summa nevar palielināties bezgalīgi ilgi. Tiešām, ja skaitļu summa palielinātos bezgalīgi ilgi, tad tā kļūtu lielāka par 1999*R*. Tādā gadījumā kāds no skaitļiem būtu lielāks par *R*, un arī viss reizinājums būtu palielinājies.

Atliek pierādīt tikai tādu faktu:

Ja $x < y$, $u < x < y < v$, kur u, x, y, v – reāli skaitļi, $xy = uv$, tad $u + v > x + y$.

Šis fakts nozīmē, ka, aizvietojot skaitļus *x, y* ar to lielāko kopīgo dalītāju un mazāko kopīgo dalāmo visu skaitļu summa palielinās (izņemot gadījumu, kad $x = u$ un $y = v$).

Pierādījums:

$$u + v = \sqrt{(u-v)^2 + 4uv} > \sqrt{(x-y)^2 + 4xy} = x + y .$$

Tas nozīmē, ka ar laiku iestāsies stabilizācija; no jebkuriem diviem skaitļiem viens būs otra dalītājs un izpildīsies vienādības $u = (x,y)$ un $v = [x,y]$; tātad vai nu *x* būs skaitļa *y* dalītājs, vai otrādi.

26.30. Pierādīsim, ka Andrim pietiek ar 5 jautājumiem.

1) Andris uzzina skaitļu 1, 2, 3, ... ,10 relatīvo kārtību;

2) Andris uzzina skaitļu 11, 12, ..., 20 relatīvo kārtību.

Pieņemsim, ka šīs relatīvās kārtības ir

$x_1, x_2, \ldots, x_5, x_6, \ldots, x_{10}$,

$y_1, y_2, \ldots, y_5, y_6, \ldots, y_{10}$.

3) Andris izveido kopu $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ un uzzina tās relatīvo kārtību. Pieņemsim, ka tā ir $z_1, z_2, \ldots, z_{10}$. Mēs apgalvojam, ka z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 ir pieci mazākie skaitļi Jāņa izveidotajā virknē. Tiešām visi šie skaitļi sakārtoti augošā secībā un ir mazāki par 15 skaitļiem

$\{x_6, \ldots, x_{10}, y_6, \cdots, y_{10}, z_6, \cdots z_{10}\}$.

4) Jautājot par $\{x_6, \ldots, x_{10}, y_6, \ldots, y_{10}\}$, Andris līdzīgi noskaidro piecus lielākos virknes locekļus un to izkārtojumu.

5) Ar pēdējo jautājumu par atlikušajiem 10 skaitļiem Andris noskaidro to secību virknē.

26.31. Pieņemsim, ka Andra norādītās monētas ir *a* un *b*, bet pārējās ir x, y, z, t . Jānis salīdzina katru monētu no kopas $\{a, b\}$ ar katru monētu no kopas $\{x, y, z, t\}$. Monētas *a* un *b* atrodas blakus tad un tikai tad, kad visu svēršanu rezultātos *a* un *b* dod vienādas atbildes.

Tātad Jānim pietiek ar 8 svēršanām. Nav zināms, vai iespējams to izdarīt ar mazāku svēršanu skaitu. Taču, izmantojot datoru un pareizi sastādītu programmu, to varētu noskaidrot.

26.32. Katram karavīram piešķirsim vienu no trim apzīmējumiem:

N – netiek apbalvots un paaugstināts dienesta pakāpē,

P – tiek paaugstināts, bet nesaņem ordeni,

O – tiek paaugstināts un saņem ordeni.

Tā kā varianti ir 3, tad ir iespējami 3^n apbalvošanu varianti. No šī skaitļa ir jāatņem 2^n apbalvošanu varianti, kad nenotiek paaugstināšana dienesta pakāpē, bet tiek piešķirts ordenis. Tā kā galīgā atbilde ir $3^n - 2^n$.

26.33. Vienādības $2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2$ un $4^2 + 4^2 + 2^2 = 6^2$ parāda, ka var būt gan 2 gan 4 pāra skaitļi. Acīmredzami nevar būt 1 vai 3 pāra skaitļi, jo tad pretējo pušu izteiksmēm būs dažāda paritāte. Atlicis pārliecināties, ka nevar būt arī 0 pāra skaitļu; tātad, ka visi skaitļi nevar būt nepāra skaitļi. No vienādības

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

seko, ka nepāra skaitļa kvadrāts ir kongruents ar 1 pēc moduļa 4. Tātad, ja visi skaitļi būtu nepāra skaitļi, tad no vienādības $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ sekotu kongruence

$$1+1+1 \equiv 1 \pmod 4,$$

kas nav patiesa. Tātad starp dotajiem skaitļiem var būt 2 vai 4 pāra skaitļi.

26.34. Apzīmēsim ar *O* regulārā *n*-stūra centru.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka pēc *k* posmu veikšanas skudra atradīsies tādā punktā X_k, kuram izpildās vienādība

$$\overrightarrow{OX}_k = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_{k+1}}}{k+1}\ .$$

Bāze. Ja $k=0$, tad apgalvojums izpildās, jo $\overrightarrow{OX_0} = \overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{0+1}$.

Induktīvā pāreja.

$$\overrightarrow{OX_{k+1}} = \overrightarrow{OX_k} + \frac{1}{k+2}\overrightarrow{X_k A_{k+1}} = \overrightarrow{OX_k} + \frac{1}{k+2}\left(\overrightarrow{OA_{k+1}} - \overrightarrow{OX_k}\right) =$$

$$\frac{k+1}{k+2}\cdot\overrightarrow{OX_k} + \frac{1}{k+2}\overrightarrow{OA_{k+1}} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_{k+2}}}{k+2}.$$

Tas arī bija jāpierāda. Pēc $n-1$ posmu veikšanas skudra atradīsies tādā punktā *B*, ka $\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}}{n}$. Tā kā *O* ir regulāra daudzstūra smaguma centrs, tad pēdējā summa ir vienāda ar $\vec{0}$. Tas nozīmē, ka skudra beigās atradīsies regulārā daudzstūra centrā.

26.35. Ievērojam, ka

$$ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d) = -(a+c)^2 \le 0\,.$$

No otras puses

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge \frac{1}{2}\left((a+c)^2 + (b+d)^2\right) \ge |a+c|\cdot|b+d|\,.$$

Pierādījumā tika izmantota nevienādība

$$a^2 + c^2 \ge \frac{1}{2}(a+c)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a-c)^2 \ge 0\,,$$

kā arī nevienādība

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \ge |x|\cdot|y| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(|x| - |y|\right)^2 \ge 0\,.$$

26.36. Apskatām funkciju $f(x) = x^3 + x^2$. Ja $x \ge 0$, tā ir monotoni augoša. Tā kā $f(0) = 0 < 1$ un $f(1) = 2 > 1$, tad vienādojumam $x^3 + x^2 = 1$ eksistē tieši viena pozitīva sakne.

Ja $x < -1$, tad $x^3 + x^2 = |x|^2 - |x|^3 < 0 < 1$.

Ja $-1 \le x < 0$, tad $x^3 + x^2 = |x|^2 - |x|^3 < |x|^2 < 1$.

No šīm nevienādībām redzam, ka dotajam vienādojumam negatīvu sakņu nav. Tātad šim vienādojumam ir viena reāla sakne.

26.37. No īpašības a) seko, ka $f(0) \le 0$.

Ievietojot īpašības b) nevienādībā $x = y = 0$, iegūstam

$f(0) \le f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) \ge 0$.

Tātad $f(0) = 0$.

Ievietojot īpašības b) nevienādībā $y = -x$, iegūstam

$f(x)+f(-x)\geq f(0)=0$.

Saskaitot nevienādības $f(x)\leq x$ un $f(-x)\leq -x$, iegūstam nevienādību

$f(x)+f(-x)\leq 0$.

Tātad $f(x)+f(-x)=0$, turklāt šī vienādība var izpildīties tikai, ja $f(x)=x$ un $f(-x)=-x$.

Tas nozīmē, ka vienīgā funkcija, kurai var izpildīties dotās īpašības ir funkcija $f(x)=x$. Pārbaude parāda, ka šai funkcijai izpildās abi uzdevuma nosacījumi.

26.38. Jā, var. Telpā aplūkosim 5 lodes, kuras savstarpēji ārēji pieskaras viena otrai un jebkuru divu ložu rādiusu garumu summas nav vienādas. Protams, ka šādas konstrukcijas iespējamību ir jāpamato.

Lai to izdarītu var aplūkot četras lodes ar rādiusiem $M+1, M+2, M+4, M+8$, kas savstarpēji pieskaras (*M* ir liels skaitlis) un vienu lodi, kas pieskaras šīm četrām.

Piecus punktus izvēlēsimies kā konstruēto ložu centrus. Tad acīmredzami izpildās uzdevuma pirmie divi nosacījumi. Trešais nosacījums seko no tā, ka jebkura 5 posmu lauzta līnija, kuras virsotnes ir ložu centri, sastāv no visu piecu ložu diviem rādiusiem; tātad tās garums ir šo piecu ložu diametru summa.

26.39. Apzīmēsim meklējamo summu ar $S(n)$. Skaidrs, ka $S(1)=2$.

Salīdzināsim kopas $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$ un $\{1, 2, \ldots, 2^n, 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\}$.

Otru kopu no pirmās var iegūt šādi: pareizināt visus pirmās kopas skaitļus ar 2 (šo skaitļu lielākie nepāra dalītāji nemainīsies) un pievienot visus nepāra skaitļus no 1 līdz $2^{n+1}-1$. Šo nepāra skaitļu lielākie nepāra reizinātāji ir paši skaitļi.

Ievērosim, ka $1+3+\cdots+(2^{n+1}-1)=4^n$. Tātad

$S(n+1)=S(n)+4^n$.

No šejienes iegūstam

$$S(n)=2+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}=1+\left(1+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}\right)=1+\frac{4^n-1}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}.$$

26.40. Vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. Ja trīs figūras atrodas uz vienas rūtiņu līnijas (sakrīt vai nu *x* vai *y* koordināte), tad var panākt, ka jebkuras divas no šīm figūriņām atradīsies vienā punktā.

Pierādījums. Pieņemsim, ka punkti *A*, *B*, *C* novietoti uz taisnes uzrakstītajā secībā un $AB\geq BC$ (otrs gadījums ir simetrisks). Tādā gadījumā punktu *C* pārbīdām par vektoru $\overrightarrow{BA}$. Visu attālumu summa starp punktiem *A*, *B*, *C* nepalielināsies. Pēc zināma laika tā būs konstanta. Tas nozīmēs, ka divi no punktiem, teiksim, *A* un *B* sakrīt.

Ja būtu jāsakrīt punktiem *A* un *C* (vai *B* un *C*), tad izpildīsim vēl operāciju: pārbīdām *A* par vektoru $\overrightarrow{BC}$.

Tagad apskatīsim četras figūriņas *A*, *B*, *C*, *D* un to projekcijas A_x, B_x, C_x, D_x uz koordinātu ass *Ox*. Jāpanāk, lai savienotos punkti *A* un *B*. No lemmas seko, ka, izmantojot punktus *A*, *B*, *C*, mēs varam panākt, ka $A_x=B_x$. Pēc tam punktus *A* un *B* pārbīdīsim vienu pēc otra, saglabājot vienādību $A_x=B_x$. Tagad aplūkosim punktu *A*,

C, *D* projekcijas uz *Ox* ass A_x, C_x, D_x . No lemmas seko, ka mēs varam panākt, lai $A_x = C_x$.

Tas nozīmē, ka tagad punktu *A*, *B*, *C* koordinātes A_x, B_x, C_x ir vienādas; tātad šie punkti atrodas uz vienas taisnes, kas paralēla *Oy* asij. No lemmas seko, ka punktus *A* un *B* var sabīdīt vienā punktā.

27. atklātā olimpiāde (1999./2000. m.g.)

27.1. . Katrā desmitniekā no $\overline{abc0}$ līdz $\overline{abc9}$ skaitļu ciparu summas ir 10 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Tātad starp šiem skaitļiem tieši 2 skaitļu ciparu summas dalās ar 5. Starp pirmajiem 9 skaitļiem tikai viena skaitļa 5 ciparu summa dalās ar 5. Skaitļa 2000 ciparu summa ar 5 nedalās.
Tātad pavisam kopā ir $1+199\cdot 2=399$ naturāli skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 5.

27.2. Tā kā uzrakstīto skaitļu summa ir lielāka par $1111\cdot A$, tad $A<4$. Lai iegūtu prasīto vienādību, jābūt $A=3$. Lai pēdējie summas cipari būtu 43, ir divas iespējas $U=9$ vai $U=8$.
Pārbaudot pirmo iespēju, iegūstām:

```
3   9   D   I
    3   9   D
        3   9
            3
---- ----- ----- ----
4   3   2   1
```

No šejienes seko, ka $I+D=9$, bet, lai otrā kolonnā veidotos atlikums summā 2, jābūt $D=8$, taču tad visa summa iznāk vienāda ar 4421.
Otrajā gadījumā atrodam pareizo piemēru:

```
3   8   9   1
    3   8   9
        3   8
            3
---- ----- ----- ----
4   3   2   1
```

27.3. Aprēķinus veicam laikam pretējā secībā. Pēc ceturtdienas vakariņām mežā palika tikai viens rūķītis – tas varēja būt tikai šilliššalla, kas vakariņu laikā no meža padzina vienu pukku.
Tālāk izveidosim tabulu, cik pirms katras ēdienreizes mežā bija votivapu, šilliššallu un pukku.
Pirms ceturtdienas vakariņām – (0, 1, 1);
pirms ceturtdienas pusdienām – (1, 1, 1);
pirms ceturtdienas brokastīm – (1, 1, 2);
pirms trešdienas vakariņām – (1, 3, 2);
pirms trešdienas pusdienām – (4, 3, 2);
pirms trešdienas brokastīm – (4, 3, 6);
pirms otrdienas vakariņām – (4, 9, 6);
pirms otrdienas pusdienām – (13, 9, 6);

pirms otrdienas brokastīm – (13, 9, 19);
pirms pirmdienas vakariņām – (13, 28, 19);
pirms pirmdienas pusdienām – (41, 28, 19);
pirms pirmdienas brokastīm – (41, 28, 60).
Tātad mežā pirms pirmdienas brokastīm bija 41 votivapa, 28 pukkas un 60 šillišssallas.

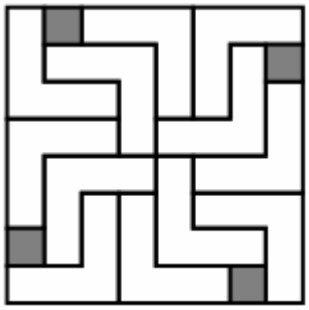
27.4. Ja Jānis un Andris atrodas vienā kolonnā vai rindā, tad apgalvojums tieši seko no uzdevuma nosacījumiem.
Pretējā gadījumā Atradīsim skolnieku *X*, kurš atrodas vienā rindā ar Andri un vienā kolonnā ar Jāni, kā arī skolnieku *Y*, kurš atrodas vienā rindā ar Jāni un vienā kolonnā ar Andri.
No dotā seko, ka

$A \geq X \geq J$ un

$A \leq Y \leq J$.

Tātad Andris un Jānis ir vienāda garuma.

27.5. Tā kā $13 \cdot 5 = 65 > 64$, tad vairāk par 12 norādītajām figūrām izgriezt nevar. Var izgriezt 12 figūras, piemēram, tā, kā parādīts 27.6. zīmējumā.



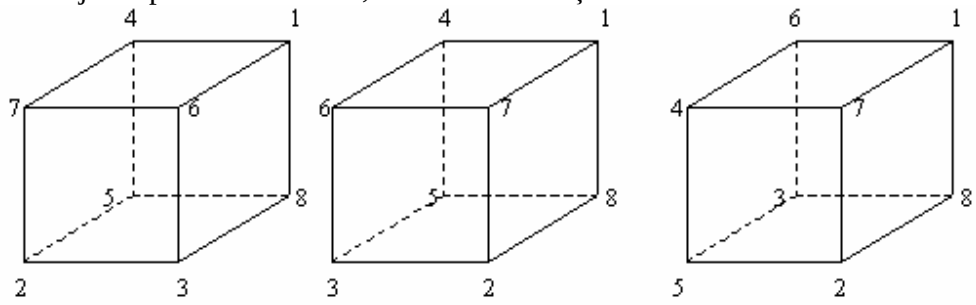
27.6. zīm.

27.6. Starp skaitļiem no 1 līdz 9 ir pieci nepāra cipari; katrā desmitniekā no $\overline{n0}$ līdz $\overline{n9}$ ir pieci nepāra vieninieku cipari. Tātad vieninieku nepāra ciparu ir 50. Turklāt ir 50 nepāra desmitnieku ciparu; arī skaitlis 100 satur nepāra ciparu. Tātad kopā ir 101 nepāra cipars.

27.7. Skaitlis, kura ciparu summa ir 1 ir vienāds ar 10^n un nedalās ar 7. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka eksistē skaitlis ar ciparu summu $n > 1$, kurš dalās ar 7.
Indukcijas bāze: $n = 2, n = 3$.
Skaitļi 1001 un 21 ar ciparu summu 2 un 3 dalās ar 7. Pierādīsim, ka, ja eksistē skaitlis *A* ar ciparu summu *k*, kurš dalās ar 7, tad eksistē arī skaitlis ar ciparu summu $k + 2$, kurš dalās ar 7.
Līdz ar to būs pierādīts, ka eksistē skaitlis, kura ciparu summa ir $n > 1$ un kurš dalās ar 7.
Lai konstruētu šādu skaitli, aplūkosim skaitli $\overline{1001A}$; šī skaitļa ciparu summa ir $k + 2$ un tas dalās ar 7.

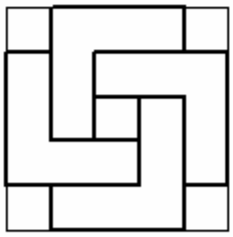
27.8. Pieņemsim pretējo un saskaitīsim, cik kopā ir deputātu piedalīšanos komisijās. Skaitot pa deputātiem, iegūstam 100 nepāra skaitļu summu, tātad pāra skaitli. Skaitot pa komisijām, iegūstam 17 nepāra skaitļu summu, tātad nepāra skaitli. Tā ir pretruna.

27.9. Zīmējumā parādīti trīs veidi, kā izvietot skaitļus.



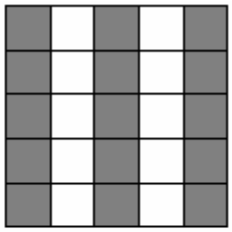
27.7. zīm.

27.10. Zīmējumā parādīts, ka var iegūt 4 dotā veida daļas.



27.8. zīm.

Vairāk daļu iegūt nevar. Izkrāsosim figūru divās krāsās kā parādīts 27.9. zīmējumā.



27.9. zīm.

Katra daļa nosedz balto un melno rūtiņu skaitu, kas atšķiras par 3. Tātad 5 šādas figūras nosegtu balto un melno rūtiņu skaitu par skaitļa 3 daudzkārtni. Taču melno rūtiņu skaits ir par 5 lielāks nekā balto rūtiņu skaits, tātad nedalās ar 3 – pretruna.

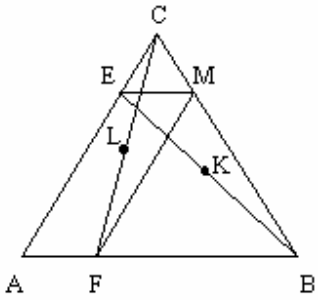
27.11. Apgalvojums seko no vienādības

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a^2-2ab+b^2+c^2+2cd+d^2=(a-b)^2+(c+d)^2.$$

Šī skaitļu summa var nebūt naturālu skaitļu kvadrātu summa; piemēram, ja $a=b=c=d=1$, tad $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ nav divu naturālu skaitļu kvadrātu summa.

27.12. Meklējamais skaitlis ir uzrakstāms formā $a\cdot 11\ldots 1$. tātad skaitlim 11…1 jādalās ar 7. Mazākai šāds skaitlis ir 111111. Mazākais meklējamais skaitlis ir 777777.

27.13. Skat. 27.10. zīm.



27.10. zīm.

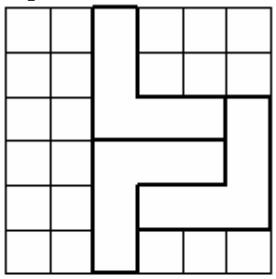
Trijstūri EMB un CMF ir vienādi, jo tiem ir vienādas divas malas $CM = EM$, $MF = MB$ un leņķi starp tām $\angle CMF = \angle EMB = 120°$. Pagriežot trijstūri CMF ap virsotni M par $60°$ iegūstam trijstūri EMB. Tātad CMF mediāna ML pāriet par trijstūra EMB mediānu MK.

Tas nozīmē, ka $ML = MK$ un leņķis $\angle LMK = 60°$. Tātad MLK ir vienādmalu trijstūris.

27.14. a) Jā var. Piemēram, 1+4=5, 2+5=7, 3+8=11, 9+10=19, 11+12=23, 6+7=13.

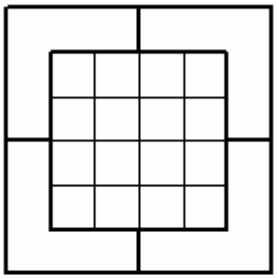
b) Nē, nevar. Mēs varētu iegūt tikai nepāra pirmskaitļus, kas nepārsniedz 99. Šādu pirmskaitļu ir tikai 24, bet summām ir jābūt 25; tātad tās visas nevar būt dažādas.

27.15. Pietiek izgriezt 3 figūras kā parādīts 27.11. zīmējumā.



27.11. zīm.

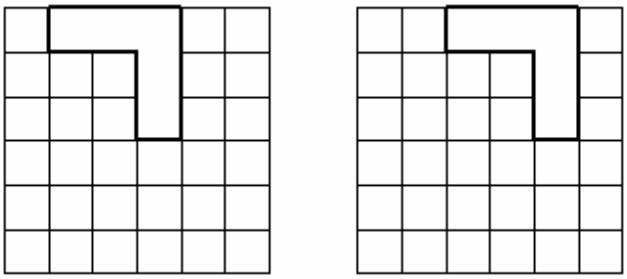
Ar divu figūru izgriešanu nepietiek. Aplūkosim 27.12. zīm. attēlotās figūras.



27.12. zīm.

Katra no uzzīmētajām figūrām var šķelt augstākais 2 no uzzīmētajām figūrām. Pieņemsim, ka pirmā figūra šķeļ divas augšējās figūras, bet otrā – divas apakšējās

figūras. Lai šķeltu divas augšējās figūras ir divas iespējas (pārējās divas ir simetriskas (skat. 27.13. zīm.).



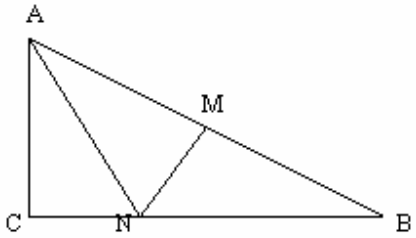
27.13. zīm.

Kā redzam augšējā daļā vēl var izvietot vienu dotā veida figūru.

27.16. No vienādības $a+b+c=0$ seko, ka skaitlis 1 ir vienādojuma $ax^2+bx+c=0$ sakne. Otru vienādojuma sakni atrodam izmantojot Vjeta teorēmu: $x_1=1,\quad x_2=-\frac{b}{a}-1.$

27.17. a) Jā tāds, piemēram, ir taisnleņķa trijstūris ar leņķiem $\angle CAB=60°$ un $\angle CBA=30°$.

b) Skat. 27.14. zīmējumu.



27.14. zīm.

Novelkam leņķa *A* bisektrisi *AN* un perpendikulu pret malu *AB* – *NM* . Trijstūri *ACN* un *AMN* ir vienādi (tiem ir vienādi leņķi un piemalas $AC=\frac{1}{2}AB=AM$, *AN* – kopīga mala). Tā kā $\angle AMN=90°$, tad arī $\angle ACB=\angle ACN=90°$.

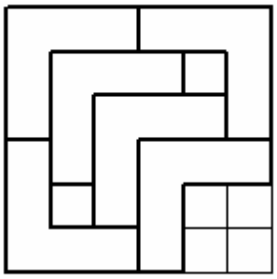
27.18. a) Nē, ne noteikti. Piemēram, uz vienas kartītes var būt uzrakstīts skaitlis 51, bet uz pārējām 1. Skaidrs, ka tādā gadījumā summu 50 savākt nevar.

b) Jā. Sadalīsim riņķa līniju 100 vienādos lokos un 51 dalījuma punktus atzīmēsim tā, ka mazo loku skaits starp atzīmētajiem punktiem sakrīt ar uzrakstītajiem skaitļiem. Pavisam ir 50 diametrāli pretēji punktu pāri. Tā kā dalījuma punktu skaits ir 51, tad divi no dalījuma punktiem atradīsies diametrāli pretējos punktos. Skaitļu summa, kas atbilst lokiem vienā pusriņķī ir vienāda ar 50.

27.19. Aplūkosim hordas, kas savelk *n* mazos lociņus, $n=1,2,\cdots,1000$. Pagriezīsim riņķa līniju par *n* mazajiem lociņiem. Ja *x* balti punkti šajā pagriezienā pāriet baltajos punktos, tad $1000-x$ balti punkti pāriet sarkanajos punktos; tātad

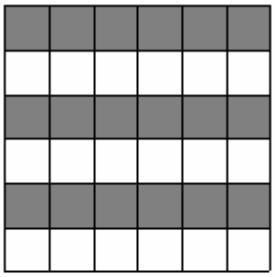
$1000-(1000-x)=x$ sarkani punkti pāriet sarkanajos punktos. Tātad ir vienāds skaits hordu, kurām abi gali ir balti un abi gali ir sarkani un kas savelk *n* mazos lociņus. Tā kā šis apgalvojums ir spēkā jebkuram *n*, tad arī visu hordu garumu summa, kurām abi gali ir balti, ir vienāda ar visu hordu garumu summu, kurām abi gali ir sarkani.

27.20. Tā kā $8\cdot 5=40>36$, tad vairāk par 7 figūrām izgriezt nevar. 27.15. zīmējumā parādīts kā izgriezt 6 figūras.



27.15. zīm.

Pieņemsim, ka izgrieztas 7 figūras. Tad 27.16. zīmējumā paliks viena nenoklāta rūtiņa, tātad noklātajam iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaitam ir jāatšķiras par 1. Bet katra dotā figūra nosedz par 3 vienas krāsas rūtiņām vairāk nekā otras krāsas rūtiņas. Tātad nosegto iekrāsoto un neiekrāsoto rūtiņu skaitam būtu jāatšķiras par skaitļa 3 daudzkārtni; pretruna.



27.16. zīm.

27.21. Atņemot no pirmā vienādojuma otro iegūstam:

$$x^2+y-x-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)\cdot(x+y)=x-y.$$

a) ja $x-y=0$, tad $x=y=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$;

b) ja $x-y\neq 0$, tad $x+y=1$, $x^2=1-y=x \quad \Rightarrow \quad x\in\{0,1\}$, un iegūstam divus atrisinājumus $\{(1,0),(0,1)\}$.

Tā kā pārveidojumi nav ekvivalenti, tad pārbaude ir obligāta.

Uzdevumu var atrisināt arī ar ievietošanas metodi.

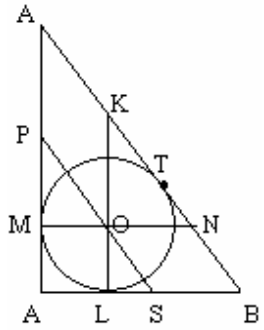
27.22. a) Nē, nevar. Četru dažādu apgriezto skaitļu summa nepārsniedz

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<2.$$

b) Jā, var.

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2}=$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{3^2+4^2}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}.$$

27.23. Aplūkosim 27.17. zīmējumu.



27.17. zīm.

Tā kā *BNOS* ir paralelograms ar vienādiem augstumiem (riņķa līnijas rādiusiem), tad tas ir rombs (pierādiet to!). Tāpēc $BN = BS$. Vienādība $BL = BT$ seko no tā, ka no punkta *B* ir vilktas divas pieskares vienai riņķa līnijai. No šīm vienādībām seko, ka $LS = NT$. Analoģiski pierāda, ka $PM = KT$. Saskaitot šīs vienādības, iegūstam prasīto.

27.24. a) Apzīmēsim izvēlētos skaitļus ar *x* un *y*. Tā kā $1+2+\cdots+10=55$, tad iegūstam vienādību $xy=55-(x+y)$, kuru var pārveidot formā

$$(x+1)\cdot(y+1)=56.$$

Varam izvēlēties skaitļus $x=6,\ y=7$.

b) Līdzīgā ceļā iegūstam vienādojumu

$$(x+1)\cdot(y+1)=121.$$

Pastāv divas iespējas:

1) $x+1=y+1=11$; šī iespēja neder, jo skaitļiem jābūt dažādiem;

2) $x+1=1,\ y+1=121$; arī šī iespēja neder, $x=0$ un $y=120$ nav dotās kopas skaitļi.

27.25. Apskatīsim lampu, no kuras iziet lielākais daudzums vienas krāsas vītņu; pieņemsim, ka tā ir lampa *A*, no kuras iziet lielākais daudzums *x* baltas vītnes, un šīs vītnes iet uz lampām $L_1, L_2, \ldots, L_x$. Pieņemsim, ka ir vēl kāda lampa *B*. Ja *B* ar visām lampām $L_1, L_2, \ldots, L_x$ būtu savienota ar sarkanām vītnēm, tad no *B* izietu vairāk kā par *x* sarkanām vītnēm (*B* ar *A* arī ir savienota ar sarkanu vītni), bet tā ir pretruna ar lampas *A* izvēli.

Tātad no lampas *A* uz jebkuru lampu *B* var aizrāpot ne vairāk kā pa divām baltām vītnēm. Tāpēc no jebkuras lampas uz jebkuru citu var aizrāpot, pa ceļam apmeklējot augstākais 3 lampas; vispirms jāiet uz lampu *A*, pēc tam uz vajadzīgo lampu.

27.26. . Ievērojam, ka

$$x^2y^2 = x^2\left(1-x^2\right) = x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

Tā kā x un y – pozitīvi skaitļi, tad $0 < xy$. Iegūstam:

$$0 < xy \le \frac{1}{2}.$$

Vēl ir jāpierāda, ka, ja c ir patvaļīgs reāls skaitlis, kuram izpildās nevienādības

$$0 < c \le \frac{1}{2},$$

tad sekojošai vienādojumu sistēmai ir reāli atrisinājumi.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = c \end{cases}.$$

Pieskaitot un atņemot otro vienādojumu no pirmā reizinātu ar 2, iegūstam:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2c, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 1 - 2c.$$

Tātad, pieņemot, ka $x \ge y$, iegūstam:

$$x + y = \sqrt{1+2c}, \quad x - y = \sqrt{1-2c}.$$

No šejienes viegli atrast x un y vērtības, kas apmierina uzdevuma nosacījumus:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1+2c} + \sqrt{1-2c}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{1+2c} - \sqrt{1-2c}}{2} \end{cases}.$$

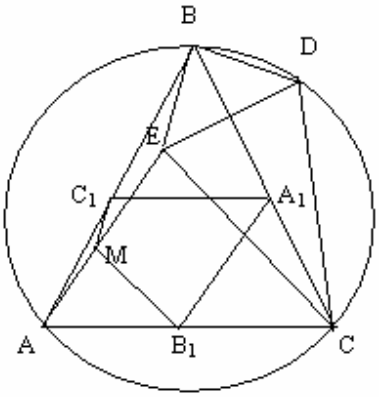
27.27. Atcerēsimies, ka skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 3. Apzīmēsim dotos pirmskaitļus ar x un y.

a) $x \equiv 2 \pmod 3$; tad $y = x + 100 \equiv 0 \pmod 3$ un y nav pirmskaitlis;

b) $x \equiv 1 \pmod 3$; tad $\overline{xy} \equiv \overline{yx} \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ un skaitlis, kas iegūts vienu skaitli otrajam galā, nav pirmskaitlis;

c) $x \equiv 0 \pmod 3$; x var būt pirmskaitlis tikai, ja $x = 3$. Tādā gadījumā $y = 103$ un, ievērojot, ka 1033 arī ir pirmskaitlis, iegūstam vienīgo uzdevuma atbildi: 3, 103, 1033.

27.28. Skat. 27.18. zīmējumu.



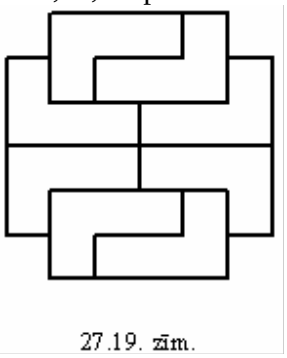
27.18.

No trijstūra viduslīniju īpašībām seko, ka $MC_1 \| EB$ un $MB_1 \| EC$, tāpēc $\angle C_1MB_1 = \angle BEC$. No simetrijas seko, ka trijstūri BEC un BDC ir vienādi . Tā kā $C_1A_1B_1A$ ir paralelograms, tad

$$\angle C_1MB_1 + \angle CA_1B_1 = \angle BEC + \angle C_1AB_1 = \angle BDC + \angle BAC = 180°.$$

Tas nozīmē, ka ap četrstūri $C_1MB_1A_1$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

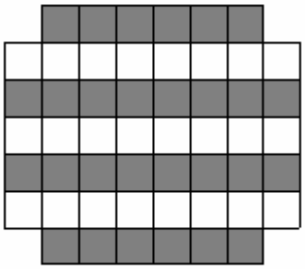
27.29. a) Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 27.19. zīmējumā.



27.19. zīm.

b) To nevar izdarīt, jo atlikušo rūtiņu skaits 45 nedalās ar 4.

c) To nevar izdarīt. Aplūkosim 27.20. zīmējumu.

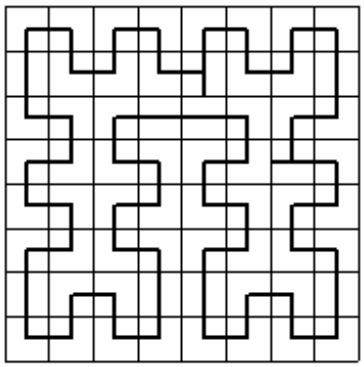


27.20. zīm.

Katrā norādītās formas figūrā starpība starp iekrāsotajām rūtiņām un neiekrāsotajām ir 2. Tā kā figūru skaitam ir jābūt nepāra skaitlim 15, tad iekrāsoto un neiekrāsoto skaitļu

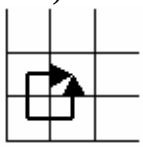
starpībai ir jābūt skaitlim $4k+2$, taču šī starpība ir 4; tātad prasītais sadalījums nav iespējams.

27.30. a) var uzzīmēt lauztu līniju ar 56 virsotnēm (skat. 27.21. zīm.).



27.21. zīm.

b) Turpmāk sauksim rūtiņu par īpašu, ja lauztās līnijas virsotņu tajā nav. Katrai no stūra virsotnēm blakus ir vismaz viena īpaša rūtiņa; pretējā gadījumā lauztā līnija ieietu vienā rūtiņā divas reizes (skat. 27.22. zīm.).



27.22. zīm.

c) Līdzīgi var pierādīt, ka katrā no kvadrāta ceturtdaļām ir vēl vismaz viena īpaša rūtiņa. Tātad, vismaz 8 rūtiņas ir īpašas un lauztajai līnijai ir ne vairāk kā 56 virsotnes.

27.31. Vienādības $2^2+2^2+1^2=3^2$ un $4^2+4^2+2^2=6^2$ parāda, ka var būt gan 2 gan 4 pāra skaitļi. Acīmredzami nevar būt 1 vai 3 pāra skaitļi, jo tad pretējo pušu izteiksmēm būs dažāda paritāte. Atlicis pārliecināties, ka nevar būt arī 0 pāra skaitļu; tātad, ka visi skaitļi nevar būt nepāra skaitļi. No vienādības

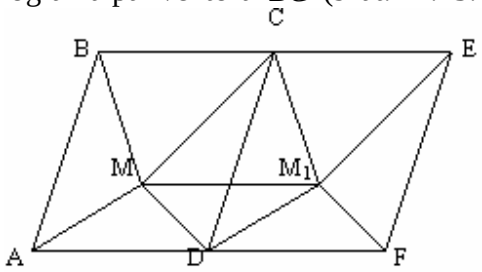
$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1$$

seko, ka nepāra skaitļa kvadrāts ir kongruents ar 1 pēc moduļa 4. Tātad, ja visi skaitļi būtu nepāra skaitļi, tad no vienādības $x^2+y^2+z^2=t^2$ sekotu kongruence

$$1+1+1\equiv 1 \pmod 4,$$

kas nav patiesa. Tas nozīmē, ka starp dotajiem skaitļiem var būt 2 vai 4 pāra skaitļi.

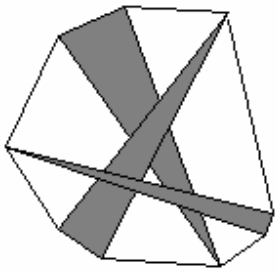
27.32. Pārbīdīsim paralelogramu par vektoru $\overrightarrow{BC}$ (skat. 27.23. zīm.).



27.23. zīm.

Tad $\angle CMD + \angle CM_1D = \angle CMD + \angle AMD = 180°$; tāpēc ap četrstūri MCM_1D var apvilkt riņķa līniju. Tātad $\angle CDM = \angle CM_1M$. Bet tā kā BCM_1M ir paralelograms, tad $\angle CM_1M = \angle CBM$. Prasītais pierādīts.

27.33. a) Aplūkosim staru A_1P. No stara vienā pusē atrodas vienāds skaits *x* virsotnes un malas un otrā pusē vienāds skaits *y* virsotnes un malas. Kopējais atlikušo virsotņu un malu skaits ir 1999. Katru virsotni no stara A_1P vienas puses jāsavieno ar nogriezni no stara otras puses. Tas nozīmē, ka jāizpildās vienādībai $x = y$; bet tā kā 1999 ir nepāra skaitlis, tad tas nav iespējams.
b) Skat. 27.24. zīmējumu.



27.4. zīm.

Spriežot līdzīgi kā iepriekš, punktam *P* būtu jāatrodas visos iesvītrotajos trijstūros (tad katram novilktajam staram abās pusēs atrastos 4 virsotnes un 4 malas). Taču šo trijstūru šķēlums ir tukša kopa un šajā 9-stūrī nav neviena īpaša punkta.

27.34. Viegli redzēt, ka funkcija $f(x) = x$ apmierina uzdevuma nosacījumus. Pierādīsim, ka citu funkciju, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, nav.

Ievietojot $x = 1$, iegūstam $f(f(1)) + f(1) = 2$. Tā kā funkcijas f vērtības ir naturāli skaitļi, tad $f(1) = f(f(1)) = 1$.

Pieņemsim, ka $a \neq b$. Tādā gadījumā $f(a) \neq f(b)$. Savādāk vienādība

$$2a = f(f(a)) + f(a) = f(f(b)) + f(b) = 2b$$

dotu pretrunu.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $f(n) = n$.

Bāze ir jau pierādīta.

Pieņemsim, ka apgalvojums pierādīts visiem naturāliem skaitļiem no 1 līdz $n-1$. Pierādīsim apgalvojumu skaitlim *n*.

Pieņemsim pretējo, ka $f(n) \neq n$. Tā kā visas funkcijas $f(x)$ vērtības no 1 līdz $n-1$ jau aizņemtas, tad $f(f(n)) + f(n) > n + n = 2n$; bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Apgalvojums pierādīts.

27.35. Atzīmēsim, ka jebkurā turnīrā, kurā piedalās $2k$ komandas, vismaz vienai ir ne mazāk par *k* uzvarām. Pretējā gadījumā kopējais zaudējumu skaits, kas ir vienāds ar kopējo uzvaru skaitu, būtu lielāks par kopējo uzvaru skaitu.

Tātad ir tāda komanda A_1, kurai ir ne vairāk kā $(n+2)2^{n-2} - 2$ zaudējumi. Starp komandām, kuras uzvarējuši A_1, atrodam komandu A_2, kura zaudējusi ne vairāk kā $(n+2)2^{n-3} - 2$ komandām, utt.

Līdzīgi turpinot atrodam komandas $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Pēdējā komanda ir zaudējusi ne vairāk kā *n* komandām.

Aplūkojam divus gadījumus:

a) Eksistē tāda komanda *B*, kurai zaudējušas visas atlikušās komandas, no tām (ne vairāk par *n*), kurām zaudēja komanda A_{n-1}. Pievienojot šo komandu grupai $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, iegūstam prasītās *n* komandas.

b) Nav komandas, kurai zaudējušas visas atlikušās komandas. Pievienojot, ja nepieciešams, šai grupai patvaļīgas komandas, lai to kopskaits būtu *n*, iegūstam prasīto grupu.

27.36. Apskatām funkciju $f(x) = x^3 + x^2$. Ja $x \geq 0$, tā ir monotoni augoša. Tā kā $f(0) = 0 < 1$ un $f(1) = 2 > 1$, tad vienādojumam $x^3 + x^2 = 1$ eksistē tieši viena pozitīva sakne.

Ja $x < -1$, tad $x^3 + x^2 = |x|^2 - |x|^3 < 0 < 1$.

Ja $-1 \leq x < 0$, tad $x^3 + x^2 = |x|^2 - |x|^3 < |x|^2 < 1$.

No šīm nevienādībām redzam, ka dotajam vienādojumam negatīvu sakņu nav. Tātad šim vienādojumam ir viena reāla sakne.

27.37. Izteiksim skaitļus *a* un *b* formā: $a = 2^x \cdot n, b = 2^y \cdot m$, kur *n* un *m* – nepāra skaitļi. Uzskatīsim, ka $x \geq y$. Tad

$$2a + b = 2^y \left(2^{x+1-y} \cdot n + m\right).$$

Tā kā reizinātājs $\left(2^{x+1-y} \cdot n + m\right)$ ir nepāra skaitlis, kurš lielāks par 1, tad tas nevar būt skaitļa 2^c dalītājs. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

27.38. Nē, tādas lodes nevar būt. Pieņemsim, ka tāda lode eksistē. Ievērosim, ka pieskares lodei, kas novilktas no viena punkta, ir vienādas savā starpā. Tiešām, ja attālums no lodes centra līdz dotajam punktam ir *x*, bet lodes rādiuss ir *r*, tad abu pieskaru garumi ir $\sqrt{x^2 - r^2}$. No šejienes seko, ka piramīdai *ABCD* izpildās vienādības

$$AB + CD = AD + BC = AC + BD.$$

Visas summas sastāv no četru pieskaru summām, kas vilktas no punktiem A, B, C, D. Tātad visu 6 nogriežņu summa ir vienāda ar $3\cdot(AB+CD)$ un tai ir jādalās ar 3, bet doto skaitļu summa ar 3 nedalās.

27.39. Uzdevuma risinājums balstās uz divām lemmām.

1. lemma. Ja trijstūra visas malas garākas par $\sqrt{3}$, tad tas nevar atrasties riņķī ar rādiusu 1.

Pieņemsim, ka trijstūris *ABC* atrodas riņķa iekšpusē. Pagarinot trijstūra malas, iespējams panākt, ka visas trijstūra virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Šādā gadījumā vismaz viens no lokiem *AB, BC, CA* nepārsniedz $120°$ un atbilstošā horda nepārsniedz $\sqrt{3}$.

2. lemma. Ja ir *2n* punkti un daži no tiem savienoti ar nogriežņiem tā, ka nav izveidojies neviens trijstūris ar virsotnēm šajos punktos, tad nogriežņu skaits nepārsniedz n^2.

Aplūkosim punktu *P*, no kura iziet lielākais nogriežņu skaits *x* uz punktiem $A_1, A_2, \ldots, A_x$. Tad nekādi no punktiem A_i savā starpā nav savienoti. Tāpēc no katra no tiem iziet ne vairāk par $2n-x$ nogriežņiem. No pārējiem $2n-x$ punktiem iziet ne vairāk par *x* nogriežņiem (tā bija izvēlēts skaitlis *x*).

Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits nepārsniedz

$$x\cdot(2n-x)+(2n-x)\cdot x$$

un kopējais nogriežņu skaits nepārsniedz

$$x\cdot(2n-x)=n^2-(n-x)^2\le n^2.$$

Tagad ir skaidrs, ka riņķi nevar būt vairāk par 1000^2 nogriežņiem, kas garāki par $\sqrt{3}$. Pretējā gadījumā riņķi atrastos trijstūris, kam visas malas garākas par $\sqrt{3}$. 1000^2 šādus nogriežņus var novilkt, ja 1000 punktus izvēlamies riņķa diametra *AB* viena galapunkta tuvumā, bet citus 1000 punktus izvēlamies riņķa diametra *AB* otra galapunkta tuvumā.

27.40. a) Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka izdevies atrast *n* šādas virknes. Aplūkosim skaitļus $3n+2, 3n+3, \ldots, 6n+3$. To pavisam ir $3n+2$. Ja kādai *F*-virknei skaitlis *a* ir pirmais loceklis no dotā intervāla un *b* – otrais, tad virknes nākošais loceklis jau ir ne mazāks par $(3n+2)+(3n+2)>6n+3$.

Tātad katrai *F*-virknei aplūkojamā intervālā ir ne vairāk par diviem locekļiem; tātad visas tās kopā satur ne vairāk kā 2*n* skaitļus no šī intervāla, Tā kā intervālā ir $3n+2$ skaitļi, tad daži no tiem nepieder nevienai no izvēlētajām *F*-virknēm.

b) Jā, eksistē. Aplūkosim Fibonači skaitļu virkni:

$$f_1=1,\ f_2=2,\quad f_{n+2}=f_{n+1}+f_n.$$

Protams, ka tā arī ir *F*-virkne. Fibonači skaitļu teorijā ir labi zināma teorēma: katru naturālu skaitli var vienīgajā veidā izsacīt kā dažādu Fibonači skaitļu summu tā, lai nekādi divi saskaitāmie nebūtu Fibonači virknes blakus locekļi. (Pierādiet šo faktu ar matemātisko indukciju).

Aplūkosim pozicionālu skaitīšanas sistēmu, kurā bāzes skaitļi ir Fibonači skaitļi, bet cipari ir skaitļi 1 un 0; turklāt cipari 1 nedrīkst atrasties blakus. Piemēram,

$$1010001_F=1\cdot f_7+0\cdot f_6+1\cdot f_5+0\cdot f_4+0\cdot f_3+0\cdot f_2+1\cdot f_1=30.$$

No teorēmas seko, ka šajā sistēmā katram naturālam skaitlim eksistē pieraksts, un tas ir vienīgais.
Ar *x* apzīmēsim jebkuru galīgu vienīnieku un nuļļu virkni, kas sākas ar 1, beidzas ar 1 un nekādi divi vienīnieki neatrodas blakus. Ar F_x apzīmēsim virkni

$$x_F, x0_F, x00_F, x000_F, \dots .$$

Viegli pārbaudīt, ka F_x ir *F*-virkne, un visas dažādās virknes F_x kopā katru naturālo skaitli satur tieši vienu reizi.

28. atklātā olimpiāde (2000./2001. m.g.)

28.1. No apgalvojuma, ka tikai 3 klucīši nav koka, seko, ka metāla klucīšu ir 3; tā kā viens no tiem ir bronzas, tad ir divi dzelzs klucīši.
No apgalvojuma, ka 6 klucīši nav ozola seko, ka tie ir no dzelzs, bronzas vai liepas; tātad ir 3 liepas klucīši.
No apgalvojuma, ka 7 klucīši nav dzelzs, seko, ka ozola, liepas un bronzas klucīšu kopskaits ir 7. Tā kā liepas un bronzas klucīšu kopskaits ir 4, tad ozola klucīšu ir 3.

28.2. Prasīto vienādību piemēri:

a) $1 \times 333 = 333$ un $2 \times 222 = 444$,

b) $3 \times 25 = 75$ un $4 \times 16 = 64$.

28.3. Ja Jānis un Andris atrodas vienā kolonnā vai rindā, tad apgalvojums tieši seko no uzdevuma nosacījumiem.
Pretējā gadījumā Atradīsim skolnieku *X*, kurš atrodas vienā rindā ar Andri un vienā kolonnā ar Jāni, kā arī skolnieku *Y*, kurš atrodas vienā rindā ar Jāni un vienā kolonnā ar Andri.
No dotā seko, ka

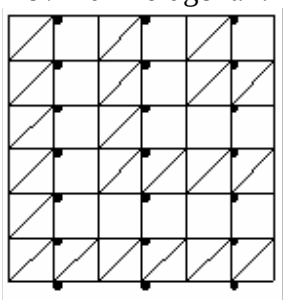
$A \geq X \geq J$ un

$A \leq Y \leq J$.

Tātad Andris un Jānis ir vienāda garuma.

28.4. Apzīmējot pāra un nepāra skaitļus ar *p* un *n*, sākumā ir kartiņas p, p, p, p, n, n, n, n. Andris vispirms paņem kartiņu *p* un tālāk rīkojas šādi:
1) ja Bruno ņem kartiņu *n*, tad Andris ar nākošo gājienu arī ņem *n*,
2) ja Bruno ņem kartiņu *p*, tad Andris ar nākošo gājienu arī ņem *p*, ja tāda kartiņa ir palikusi; pretējā gadījumā Andris ņem *n*.
Redzam, ka jebkurā gadījumā Andris iegūs pāra skaita kartiņu *n*, tātad uz viņa kartiņām uzrakstīto skaitļu summa būs pāra skaitlis.

28.5. Kā redzams 28.3. zīm., var novilkt 21 diagonāli.



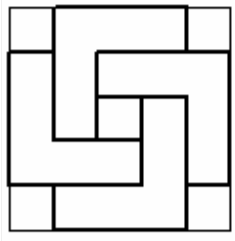
28.3. zīm.

Tā kā jebkurai vispār novelkamajai diagonālei viens gals atrodas kādā no atzīmētajiem punktiem un šo punktu skaits ir 21, tad vairāk par 21 diagonāli novilkt nevar.

28.6. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{abcde}$. Ja $e \geq 1$, tad $d \geq 2$, $c \geq 4$, $b \geq 8$, $a \geq 16$, bet tas nav iespējams, jo a ir cipars. Tātad $e = 0$.
Līdzīgi iegūstam pretrunu, ja $d \geq 2$; tātad $d = 1$.
Ja $c \geq 3$, tad $b \geq 5$ un $a \geq 10$; pretruna. Tātad $c = 2$.
No šejienes seko, ka $b \geq 4$. Acīmredzami $b < 6$. Tātad meklējamie skaitļi ir $94210, 84210, 95210$.

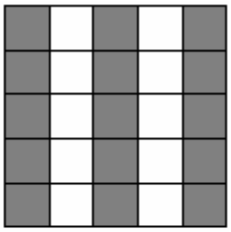
28.7. a) Jā, eksistē. Tādi, piemēram, ir skaitļi no 1 līdz 12 ieskaitot.
b) Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka tāda virkne atrasta. Tad tajā ir skaitlis n, kura vienu cipars ir 3. Tāpēc n dalās ar 3. Tad $n+10$ un $n-4$ nedalās ar 3. Bet $n+10$ vienu cipars ir 3 un $n-4$ vienu cipars ir 9; tātad šie skaitļi nevar atrasties virknē, jo tiem būtu jādalās ar 3.
Tāpēc virknē var būt vislielākais skaitļi no $n-3$ līdz $n+9$ ieskaitot, t.i., 13 skaitļi.

28.8. Zīmējumā parādīts, ka var iegūt 4 dotā veida daļas.



28.4. zīm.

Vairāk daļu iegūt nevar. Izkrāsosim figūru divās krāsās kā parādīts 28.5. zīmējumā.



28.5. zīm.

Katra daļa nosedz balto un melno rūtiņu skaitu, kas atšķiras par 3. Tātad 5 šādas figūras nosegtu balto un melno rūtiņu skaitu par skaitļa 3 daudzkārtni. Taču melno rūtiņu skaits ir par 5 lielāks nekā balto rūtiņu skaits, tātad nedalās ar 3 – pretruna.

28.9. Andris nomaina 123 uz 312 un ļauj Pēterim iegūt skaitļus 414, 516, 618, 720. Tad Andris iegūst skaitli 27 un ļauj Pēterim iegūt skaitļus 129 un 231. Tad Andris iegūst skaitli 312 un sāk iepriekš aprakstīto procesu no sākuma.

28.10. Pieņemsim pretējo, ka nevienā skolā nemācās vairāk par 14 skolēniem. Ar n apzīmēsim to skolu skaitu, no kurām autobusā ir vismaz 2 skolēni. Saskaņā ar doto jābūt $n \le 4$ (ja $n \ge 5$ varam paņemt pa 2 skolēniem no katras šādas skolas).

Ja $n < 4$, tad šajās skolās mācās ne vairāk kā $14 \cdot 3 = 42$ skolēni un ir vismaz 18 skolas ar 1 skolēnu autobusā, bet tas ir pretrunā ar doto (varam izvēlēties 10 skolēnus no šiem 18 un nekādi 3 no tiem vienā skolā nemācās).

Ja $n = 4$, tad ir vismaz 4 skolas ar 1 skolēnu. Arī tā ir pretruna, jo, ņemot šos 4 skolēnus un pa diviem bērniem no trim citām skolām iegūstam 10 skolēnus, no kuriem nekādi 3 nemācās vienā skolā. Apgalvojums pierādīts.

28.11. Apgalvojums seko no vienādības

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(c^2 + 2cd + d^2\right) = (a-b)^2 + (c+d)^2 .$$

Taču šī summa var nebūt naturālu skaitļu kvadrātu summa, jo ņemot, piemēram, $a = b = c = d = 1$ iegūstam skaitli 4, kuru nevar izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu.

28.12. a) Ja simetrisks sešciparu skaitlis ir $n = \overline{abccba}$, tad

$$n = 100001 \cdot a + 10010 \cdot b + 1100 \cdot c = 13\left(7692 \cdot a + 770 \cdot b + 1100 \cdot c\right) + 5(a - c).$$

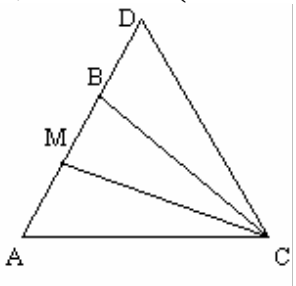
Ja n dalās ar 13, tad arī $a - c$ dalās ar 13. Tā kā a un c ir cipari, tad izpildās vienādība $a = c$. Bet tādā gadījumā

$$n = 101101 \cdot a + 10010 \cdot b = 7\left(14443 \cdot a + 1430 \cdot b\right).$$

dalās ar 7.

b) Nē, nav taisnība. Pretpiemērs ir, piemēram, skaitlis 108801.

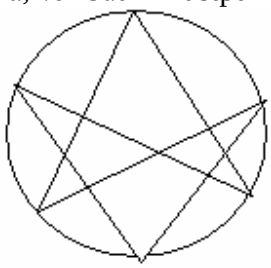
28.13. Pagarināsim AB līdz AD tā, ka $AD = 3$ (skat. 28.7. zīm.)



28.7. zīm.

Tad ADC ir vienādsānu trijstūris ar leņķi $60°$, tātad vienādmalu. Tāpēc trijstūri MAC un BDC ir vienādi. No šejienes seko prasītā vienādība.

28.14. Kā redzams 28.8. zīmējumā, var būt 7 krustpunkti.



28.8. zīm.

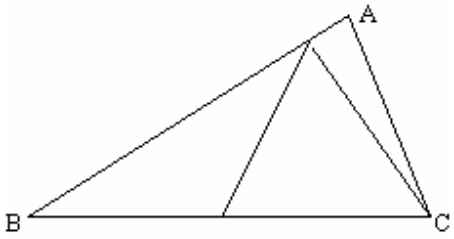
To, ka nevar būt vairāk krustpunktu, pierāda, aplūkojot vienu no nogriežņiem un šķirojot gadījumus, cik punkti atrodas vienā pusē no šī nogriežņa.

28.15. Atbilde: ar 99 jautājumiem.
Holmss to var izdarīt, izvēloties vienu cilvēku *A* un paprasot viņam jautājumu par citu visi *B*. Saņemot atbildi "nē", Holmss var secināt, ka *A* nav Puaro. Saņemot atbildi "jā" , Holmss var secināt, ka *B* nav Puaro. Katrā jautājumā izslēdzot vienu kandidātu Holmss ar 99 jautājumiem uzzinās kas ir Puaro.
Ar mazāku skaitu jautājumu var nepietiek, jo, saņemot 98 atbildes "nē" , Holmss nevar noteikti pateikt, kurš no viesiem ir Puaro.

28.16. Pārveidojot izteiksmi, iegūstām prasīto

$$x^2bc + y^2ac + z^2ab = x^2b(-a-b) + y^2a(-a-b) + (-x-y)^2ab =$$
$$-x^2ab - x^2b^2 - y^2a^2 - y^2ab + x^2ab + y^2ab + 2xyab =$$
$$-(xb-ya)^2 \le 0.$$

28.17. Atrisinājums parādīts 28.9. zīmējumā.



28.9. zīm.

28.18. Apzīmēsim trīsciparu skaitļus ar *x* un *y*. Tad Andra uzrakstītais skaitlis ir $1000 \cdot x + y$. Tas nozīmē, ka pastāv vienādība

$$3xy = 1000 \cdot x + y.$$

No šejienes seko, ka *y* dalās ar *x*. Ja $y = kx$, tad $1 \le x \le 9$, jo *x* un *y* ir trīsciparu skaitļi. Ievietojot $y = kx$ dotajā vienādībā, iegūstām

$$3xk = 1000 + k.$$

Tātad 1000 dalās ar *k*. Redzam, ka *k* var pieņemt tikai vērtības 2, 5, 8. Ja $k=5$ vai $k=8$, tad *x* nav trīsciparu skaitlis.
Ja $k=2$, tad $x=167$ un $y=334$. Pārbaude parāda, ka šīs vērtības der.

28.20. b) Piemērs, ja $n=9$ ir šāds. Pieņemsim, ka *i* draudzējas ar $i-1$ un $i+1$. Tad pie galda mēs viņus varam sasēdināt šādā kārtībā:

2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9.

a) Pie $n=12$ tas nav iespējams. Tā kā katram ir divi draugi, tad draudzību grafs sastāv no atsevišķiem cikliem, pie tam neviens cikls nav ar garumu 4 (pārbaudiet to!). Ja draudzības cikls ir 1, 2, ..., 2k, $k\geq 3$, tad 2*k* jāsēž blakus 2; tātad četrus cilvēkus nav kur sēdināt.
Ja ir draudzības cikls 1, 2, 3, ..., 2*k*-1, tad pie galda obligāti jābūt secībai

2, 4, 6, ..., 2*k*, 1, 3, 5, ..., 2*k*+1

un citus nevar sēdināt. Tātad kopējais cilvēku skaits ir nepāra. Iegūta pretruna.

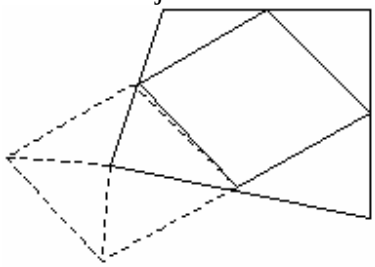
28.21. Atņemot no pirmā vienādojuma otro iegūstam:

$$x^2+y-x-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)\cdot(x+y)=x-y.$$

a) ja $x-y=0$, tad $x=y=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$;

b) ja $x-y\neq 0$, tad $x+y=1$, $x^2=1-y=x \quad \Rightarrow \quad x\in\{0,1\}$, un iegūstam divus atrisinājumus $\{(1,0),(0,1)\}$.
Tā kā pārveidojumi nav ekvivalenti, tad pārbaude ir obligāta.
Uzdevumu var atrisināt arī ar ievietošanas metodi.

28.22. Atrisinājums parādīts 28.10. zīmējumā.



28.10. zīm.

28.23. Jā, mēs varam izvēlēties četrstūri, kura virsotnes ir regulāra piecstūra četras virsotnes. Tādā gadījumā varam jebkuru četrstūra virsotni pārnest uz piekto, iegūstot vienādu četrstūri.

28.24. No dotā seko, ka

$$z(xy-z)+y(xz-y)+x(yz-x)=$$
$$3xyz-(x^2+y^2+z^2)$$

dalās ar 3. Tātad arī $x^2+y^2+z^2$ dalās ar 3.

28.25. Pieņemsim pretējo, ka tādus divus skolēnus izvēlēties nevar. Tad katram no 28 skolēnu pāriem eksistē vismaz viens neatrisināts uzdevums. Tā kā $28 > 3 \cdot 8$, tad vismaz vienu no 8 uzdevumiem nav atrisinājuši vismaz 4 skolnieku pāri. Bet tad to nav atrisinājuši vismaz 4 skolēni (jo no 3 skolniekiem var izveidot ne vairāk kā 3 pārus); tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka katru uzdevumu atrisināja 5 skolēni.

28.26. Ievērojam, ka

$$x^2y^2 = x^2\left(1-x^2\right) = x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

Tā kā x un y – pozitīvi skaitļi, tad $0 < xy$. Iegūstam:

$$0 < xy \le \frac{1}{2}.$$

Vēl ir jāpierāda, ka, ja c ir patvaļīgs reāls skaitlis, kuram izpildās nevienādības

$$0 < c \le \frac{1}{2},$$

tad sekojošai vienādojumu sistēmai ir reāli atrisinājumi.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = c \end{cases}.$$

Pieskaitot un atņemot otro vienādojumu no pirmā reizinātu ar 2, iegūstam:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2c, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 1 - 2c.$$

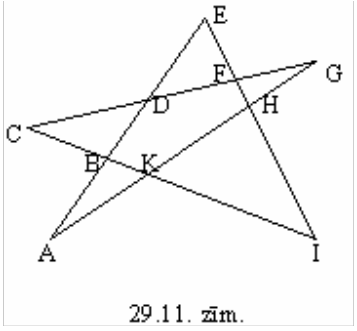
Tātad, pieņemot, ka $x \ge y$, iegūstam:

$$x + y = \sqrt{1+2c}, \quad x - y = \sqrt{1-2c}.$$

No šejienes viegli atrast x un y vērtības, kas apmierina uzdevuma nosacījumus:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1+2c} + \sqrt{1-2c}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{1+2c} - \sqrt{1-2c}}{2} \end{cases}.$$

28.27. Skat. 28.11. zīm.



29.11. zīm.

Pierādāmo vienādību pārveidojam formā

$$\frac{AB}{KA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{EF}{DE} \cdot \frac{GH}{GF} \cdot \frac{JK}{HJ} = 1.$$

Tās pareizība seko no sinusu teorēmas, ievērojot, ka mazo trijstūru leņķi ir vienādi.

28.28. Ievērojam, ka $2=3^1-2^0$, $3=2^2-3^0$, $5=3^2-2^2$, $7=3^2-2^2$, $11=3^3-2^4$, $13=2^4-3^1$, $17=3^4-2^6$, $19=3^3-2^3$, $23=3^3-2^2$, $29=2^5-3^0$, $31=2^5-3^0$, $37=2^6-3^3$.
Nākošo pirmskaitli 41 iegūt nevar. Pretrunu var iegūt pēc moduļa 8.

28.29. a) Pie $n=2000$ vienkārši izveidot divus kvadrātus 1000×1000.
b) Nē, nevar. Iekrāsosim abās dotajās figūrās rūtiņas ar abām nepāra koordinātēm. Tad katra figūra 2×2 nosedz vienu šādu rūtiņu, bet katra figūra 1×4 nosedz 0 vai divas šādas rūtiņas. Tāpēc nosegts būs nepāra skaits iekrāsoto rūtiņu, bet divām vienādām figūrām to kopskaits ir pāra skaitlis.

28.30. Apzīmēsim ar *n* lielāko spēļu skaitu, kuras var izvēlēties no jau izspēlētajām tā, ka tajās piedalījušās 2*n* dažādas komandas. Tad nekādas divas no atlikušajām $24-2n$ komandām savā starpā nav spēlējušas (skaitļa *n* maksimalitātes dēļ). Tā kā katra no šīm komandām vismaz ir spēlējusi, tad ir notikušas vēl vismaz $24-2n$ citas spēles. Tāpēc

$$n+(24-2n)\le18,$$

no kurienes seko prasītais $n\ge6$.

28.31. Dotās nevienādības pierakstām šādi:

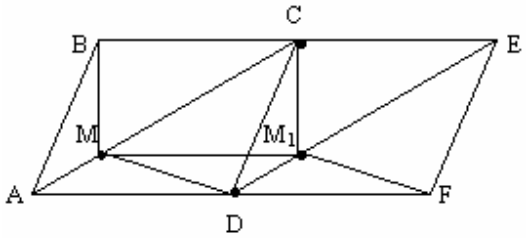
$$\begin{cases}a+b+c<0\\4a+2b+c>0\\9a+3b+c<4\end{cases}$$

No šejienes iegūstam:

$$2a=(9a+3b+c)-2(4a+2b+c)+(a+b+c>)<4-2\cdot2+0=0.$$

Redzam, ka *a* ir negatīvs skaitlis.

28.32. Pārbīdām paralelogramu *ABCD* par vektoru $\overrightarrow{BC}$ (skat. 28.11. zīm.).



28.11. zīm.

Tad $\angle CMD+\angle CM_1D=\angle CMD+\angle AMB=180°$, tāpēc ap četrstūri MCM_1D var apvilkt riņķa līniju. No šejienes seko vienādība $\angle CDM=\angle CM_1M$. Tā kā BCM_1M ir paralelograms, tad $\angle CM_1M=\angle CBM$. No šejienes seko prasītā vienādība.

28.33. Ja virkne sākas ar pirmskaitli *p*, tad tā ir šāda: *p*, 2, 2, 2, … . Tas nozīmē, ka visi pirmskaitļi der.
Skaitlis 1 nevar būt pirmais virknes loceklis, jo tas ir kvadrāts.

Pieņemsim, ka pirmais virknes loceklis ir skaitlis $n>2$, kurš nav pirmskaitlis. Tā kā jebkurš skaitlis *k*, kurš ir lielāks par 2, nedalās ar $k-1$, tad virkne ir dilstoša līdz brīdim, kamēr tajā parādās skaitlis 2. Pirms skaitļa 2 virknē jābūt nepāra pirmskaitlim. Taču pirms nepāra skaitļa virknē var atrasties tikai naturāla skaitļa kvadrāts (jo tikai naturālu skaitļu kvadrātiem ir nepāra skaits dalītāju).
Tas nozīmē, ka pirmie elementi virknē var būt pirmskaitļi un tikai pirmskaitļi.

28.34. Atbilde: $\frac{1}{4}$, ja $n=2$; $\frac{4}{27}$, ja $n=3$.

a) Varam uzskatīt, ka x_2 ir vidējais no dotajiem skaitļiem; t.i., vai nu $x_1 \le x_2 \le x_3$, vai arī $x_1 \ge x_2 \ge x_3$. Abos gadījumos $(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\le 0 \le x_1x_2$, tāpēc

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1=$$
$$x_1^2x_2+(x_2-x_1)(x_2-x_3)x_3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2\le$$
$$x_1^2x_2+2x_1x_2x_3+x_2x_3^2=x_2(x_1+x_3)^2=$$
$$x_2(1-x_2)^2=4\cdot x_2\cdot\frac{1-x_2}{2}\cdot\frac{1-x_2}{2}.$$

Trīs pēdējo reizinātāju summa ir konstanta, tāpēc reizinājums ir lielākais, kad tie ir vienādi; tas notiek pie $x_2=\frac{1}{3}$, un tad izteiksmes vērtība ir $\frac{4}{27}$. Dotā izteiksme šādu vērtību sasniedz, piemēram, ja $x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{1}{3},\quad x_3=0.$

28.35. Sauksim par stāvokli situāciju, kura izveidojusies, kad visas no kāda trauka izņemtās monētas ieliktas traukos; tātad stāvokli raksturo monētu sadalījums traukos un tas, no kura trauka mēs gatavojamies izņemt monētu, sākot jaunu etapu.
Skaidrs, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka nākošo stāvokli.
Pierādīsim, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka arī iepriekšējo stāvokli. Tiešām, iepriekšējo stāvokli var atrast, sākot pa vienai salasīt monētas no traukiem pretēji pulksteņa rādītāja virzienam, kamēr iegūstam tukšu trauku; tad tajā ieliekam salasītās monētas.
Tā kā iespējamo stāvokļu ir tikai galīgs skaits, tad tie agri vai vēlu atkārtosies; tas nozīmē, ka stāvokļu virkne būs periodiska. Tā kā iepriekšējais stāvoklis arī noteikts viennozīmīgi, tad veidojas tīri periodiska stāvokļu virkne. Tas nozīmē, ka ar laiku mēs iegūsim sākotnējo situāciju; bet pirms šādas situācijas visām monētām ir jāatrodas vienā traukā.

28.36. Pie $0\le x\le\pi$ pastāv sakarība $\sin x\le x$. Tā kā intervālā $[0,\pi]$ funkcija $y=\cos x$ ir dilstoša, tad $\cos(\sin x)\ge\cos x$.

28.37. Izteiksim skaitļus *a* un *b* šādā formā:

$a=2^x\cdot n,\quad b=2^y\cdot m$, kur *n* un *m* – nepāra skaitļi.

Varam uzskatīt, ka $x\ge y$. Tad

$$2a+b=2\cdot 2^x\cdot n+2^y\cdot m=2^y\left(2^{x+1-y}+m\right).$$

Iekavās uzrakstīts nepāra skaitlis, kurš ir lielāks par 1. Bet 2^c nevar dalīties ar nepāra skaitli lielāku par 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

28.38. Apzīmēsim meklējamo summu ar *S*. Viegli pārbaudīt, ka

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)+$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)=2+2S.$$

Ievērosim, ka

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1999}{2000}\cdot\frac{2000}{2001}=\frac{1}{2001}$$

un

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)=$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2001}{2000}\cdot\frac{2002}{2001}=\frac{2002}{2}=1001.$$

Tāpēc $2+2S=1001\frac{1}{2001}$ un $S=499\frac{1001}{2001}$.

28.39. Atbilde: viena plakne var krustot augstākais 66 skaldnes.

Katra šķautne pieder divām skaldnēm. Ja pavisam daudzskaldnim ir *x* skaldnes, tad tām kopā ir ne mazāk kā 3*x* malas. Tātad $100\cdot 2\geq 3x$ un $x\leq 66$. Tā kā daudzskaldnis ir izliekts, tad plakne šķeļ katru tā skaldni pa augstākais vienu nogriezni. Tāpēc šķēlums ir daudzstūris ar ne vairāk kā 66 malām un ne vairāk kā 66 virsotnēm. Virsotnēm atbilst plaknes krustpunkti ar daudzskaldņa šķautnēm. Tātad plakne var krustot ne vairāk kā 66 šķautnes.

Daudzskaldņa piemēru, kuram plakne krusto 66 šķautnes konstruē šādi. Ņemam piecstūra piramīdu un plakni kas krusto visas tā skaldnes. Tiek krustotas 6 šķautnes. Tālāk pakāpeniski pa vienai pievienojam 30 trijstūra piramīdas, kuras pamats ir kāda no iepriekšējām skaldnēm tā, lai šķēlējplakne šķeltu 4 šīs piramīdas šķautnes (tādejādi palielinot šķelto šķautņu skaitu par 2), turklāt ņemot šīs piramīdas tik "plakanas", lai veidotos izliekts daudzskaldnis. Rezultātā iegūsim izliektu daudzskaldni ar 100 šķautnēm, kura 66 šķautnes šķeļ konstruētā plakne.

28.40. a) Otrajā rindā visi skaitļi ir nenegatīvi un pēdējais skaitlis noteikti ir 0; tāpēc trešajā rindā pēdējie divi skaitļi ir nulles; līdzīgi ceturtajā rindā pēdējie trīs skaitļi ir nulles, ... , vienpadsmitajā rindā pēdējie desmit (tātad visi) skaitļi ir nulles.

b) Jau pierādīts, ka nevar būt vairāk par 10 labām rindām. Sākot ar rindu

8, 9, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 0, 1

pavisam iegūsim 10 labas rindas:

8, 9, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 0, 1;
1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0;
0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0;
4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0;
0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0;
3, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.