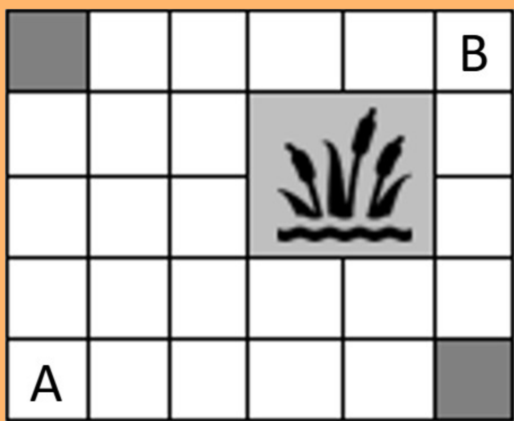
Guna Brenda Einberga, Maruta Avotiņa

Matemātikas olimpiāžu uzdevumu iekļaušana mācību procesā un fakultatīvajās nodarbībās 5.-9. klasei



LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola, 2023

KĀ STRĀDĀT AR GRĀMATU?

Šī grāmata ir paredzēta, lai skolotāji varētu iekļaut matemātikas olimpiāžu tēmu pakāpenisku apguvi gan mācību stundu, gan fakultatīvo nodarbību laikā. Grāmata galvenokārt ir izmantojama 5.-9. klašu skolēniem, jo ir atlasīti matemātikas olimpiāžu uzdevumi atbilstoši 5.-9. klases programmas parauga tēmām, bet grāmatu var izmantot arī citās klasēs.

Matemātikas olimpiādēs skolēns bieži vien uzraksta tikai atbildi vai kādu piemēru, neizprotot, kas nepieciešams pilnam risinājumam, tāpēc grāmatas 1. nodaļā aprakstīts, kā pēc uzdevuma teksta saprast, kādai jābūt uzdevuma atrisinājuma struktūrai, un izveidoti atbilstoši materiāli, ko var izmantot nodarbībās.

2. nodaļa ir īss teorijas apkopojums par dažādām olimpiāžu tēmām, kas papildināts ar raksturīgākajiem piemēriem. Šo materiālu var dot skolēniem gan patstāvīgai lasīšanai, gan fakultatīvo nodarbību laikā. Padziļinātai tēmu apguvei var izmantot Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas publicētos teorijas materiālus.

3. nodaļā doti dažādu tēmu uzdevumi, kas sakārtoti pēc atrisinājuma struktūras, tos ieteicams risināt, kad ir apgūts 2. nodaļas materiāls. Skolēniem šos uzdevumus var dot gan mācību gada laikā, gan kā paškontroli mācību gada noslēgumā.

Materiālus, kas doti 4. nodaļā, var izmantot, lai diferencētu darbu mācību stundās, piedāvājot olimpiāžu uzdevumus spējīgākajiem skolēniem. Skolotājs piedāvā tos uzdevumus, kas ir atbilstoši apgūtajām tēmām, tādējādi skolēns izmanto nesen iegūtās zināšanas jaunās un kompleksās situācijās. Kā atbalsts skolēna patstāvīgai darbībai ir materiālā iekļautās norādes katram uzdevumam, ar kuru palīdzību var iesākt uzdevumu risinājumu. Materiāli katrai klasei ir izkārtoti tabulas formā. Tajos vispirms no 2020. gada matemātikas mācību programmas parauga (MPP) ir atlasīti sasniedzamie rezultāti, prasmes, ieradumi un uzdevumu piemēri, kas ir aktuāli olimpiāžu uzdevumos gan satura, gan risināšanas paņēmienu ziņā. Tas norāda, kuras no programmā norādītajām prasmēm ir svarīgas olimpiādēs, dodot iespēju arī skolotājam stundu laikā akcentēt skolas satura sasaisti ar matemātikas olimpiādēm.

4. nodaļas uzdevumi ir sadalīti tēmās, kuru nosaukumos ir minētas zināšanas vai risināšanas paņēmieni, kas ir aktuāli olimpiāžu uzdevumos. Katrai tēmai ir atlasīti 4-7 uzdevumi (sakārtoti ar pieaugošu grūtības pakāpi) no dažādu gadu LU NMS organizētajām olimpiādēm un konkursiem (“Tik vai ... Cik?”, “Jauno matemātiķu konkurss”, “Profesora Cipariņa klubs”, sagatavošanās olimpiāde, novada olimpiāde, Atklātā matemātikas olimpiāde). Vecāku klašu skolēniem var dot arī jaunāku klašu uzdevumus un otrādi, bet skolotājam jāizvērtē, vai skolēnam pietiek zināšanu, lai uzdevumus atrisinātu. Visu 4. nodaļas uzdevumu atrisinājumi doti 5. nodaļā. Daži uzdevumi atkārtojas vairākās tēmās. Skolotājs var izvēlēties, pēc kura temata apgūšanas dot skolēnam risināt attiecīgos uzdevumus. Vairākiem uzdevumiem ir uzrakstīti metodiskie ieteikumi, kas paredzēti skolotājam. Tajos ir idejas, kā uzdevumus iekļaut mācību procesā un kādas idejas jāakcentē sarunā ar skolēnu.

Lai grāmatā izdodas atrast idejas mācību procesa pilnveidošanai un skolēnu matemātisko spēju uzlabošanai!

Guna un Maruta

SATURS

1. KĀ ZINĀT, KO RAKSTĪT UZDEVUMA ATRISINĀJUMĀ?

Matemātikā ir noteikti kritēriji tam, kādi spriedumi ir un kādi spriedumi nav pieļaujami dažādu apgalvojumu pamatošanā. Lielākajai daļai uzdevumu risinājumu ir jāsatur vispārīgs pamatojums (nevis daži piemēri), kas garantē, ka mūsu atrastā atbilde ir pareiza. Taču ir arī tādi uzdevumi, kuros pietiek parādīt tikai vienu piemēru, lai uzdevums būtu pilnībā atrisināts. Vairumu uzdevumu var sadalīt grupās pēc tā, kā jāizskatās atrisinājuma struktūrai. Ir četri galvenie uzdevumu veidi, ko viegli atšķirt pēc uzdevumā formulētā jautājuma.
Mācību procesā var izmantot atgādni par atrisinājuma struktūru (skat. 156. lpp.)

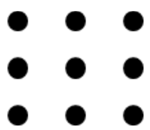
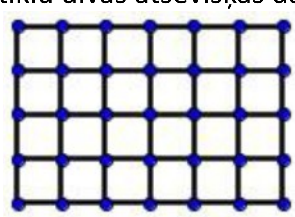
<table>
<tr><th>Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības</th><th>Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība</th></tr>
<tr><td>„Kāds var būt...?”; „Cik...?”
Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:
1) jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam prasības izpildās;
2) jāpamato, ka citu iespēju nav.</td><td>„Kāds lielākais (mazākais)...?”
Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:
1) jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2) jāpierāda, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde</th></tr>
<tr><td>„Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?”
Ja atbilde ir:
• „jā”, tad pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
• „nē”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.</td><td>„Vai visiem…?”; „Vai vienmēr… ?”; „Vai noteikti… ?”; „Vai katram… ?”
Ja atbilde ir:
• „jā”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
• „nē”, tad pietiek uzrādīt vienu pretpiemēru.</td></tr>
</table>

1.1. Sagrupē uzdevumus pēc atrisinājuma struktūras!

Tālāk šajā nodaļā doti dažādi uzdevumi, lai trenētu prasmi atpazīt atrisinājumu struktūru. Nodarbību var sākt vairākos veidos, piemēram:

- vispirms izrunāt atrisinājumu struktūru pēc uzdevumā dotā jautājuma, pēc tam likt skolēniem sagrupēt nākamajā lapā dotos uzdevumus (tos var sagriezt, lai ērti sagrupēt) pēc atrisinājumu struktūras;
- vispirms var iedot skolēniem sagrupēt nākamajā lapā dotos uzdevumus pēc jautājuma veida, pēc tam izrunāt, kas katras grupas uzdevumiem jāraksta atrisinājumā.

1.2. apakšnodaļā dotās darba lapas var dot skolēniem nākamajās nodarbībās kā tīrraksta lapas, lai trenētu prasmi uzrakstīt visas atrisinājumā nepieciešamās daļas. Darba lapās dotais risinājuma izkārtojums ir paredzēts mācību procesam, lai skolēns saprastu, kad pietiek ar piemēru un kad ir vajadzīgs pamatojums. Pildot šīs darba lapas, svarīgākais ir iemācīties, kam ir jābūt atrisinājumā, bet pēc tam skolēns savu risinājumu var izkārtot dažādos veidos.

1	Kāds cipars var būt * vietā, lai skaitlis 987* dalītos ar 5?	**13**	Skaitļi a, b un c ir naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem $a+b$, $a+c$, $b+c$, $a\cdot b$, $a\cdot c$, $b\cdot c$ var būt pāra skaitļi?
2	Kāds ir mazākais sešciparu skaitlis, kas sastāv tikai no cipariem 2, 0, 1, 3 un dalās ar 9? Cipari drīkst atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto.	**14**	Pirtiņā ir četras lāvas. Pirtī pērties iegāja deviņi cilvēki. Vai noteikti būs tāda lāva, uz kuras sēdēs vismaz trīs cilvēki tad, kad visi būs apsēdušies?
3	Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a un b, ka: **a)** $8\cdot a-12\cdot b=2023$; **b)** $12\cdot a-8\cdot b=2024$?	**15**	Daina, izmantojot visus ciparus, burtnīcā ierakstīja desmitciparu skaitli. Vai šis skaitlis noteikti dalās ar 3?
4	Cik 4-centu pastmarkas nepieciešamas, lai izveidotu vērtību 35 centi, izmantojot tikai 4-centu un 9-centu pastmarkas?	**16**	Vai var atrast tādus četrus dažādus naturālus skaitļus a, b, c, d, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?
5	Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?	**17**	Klasē ir 40 skolēnu. Vai noteikti ir tāds mēnesis, kurā savu dzimšanas dienu atzīmē ne mazāk kā četri šīs klases skolēni?
6	Vai skaitļa kvadrāts noteikti ir lielāks nekā pats skaitlis?	**18**	Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?
7	Vai vienmēr negatīvam skaitlim pieskaitot tā kvadrātu iegūst pozitīvu skaitli?	**19**	Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 11 krustpunkti?
8	Kāds mazākais skaits punktu jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes? 	**20**	Attēlā redzams zvejošanas tīkls. Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās? 
9	Tabulā 6×6 rūtiņas ierakstīti skaitļi -1, 0 un 1, katrā rūtiņā viens skaitlis. Guna aprēķināja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas. Vai noteikti starp iegūtajām summām ir vismaz divas vienādas?	**21**	Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 0; 1; 0; 0. Ar vienu „gājienu” var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt vieninieku. Vai, atkārtojot šādus „gājienus”, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?
10	Kādus veselus skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $(x-2)\cdot(y-2)=4$?	**22**	Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? Piezīme: $x+y$ un $y+x$ nav dažādi veidi.
11	Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?	**23**	Kāds ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 vai 5?
12	Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kuram ir tieši 12 dažādi veseli pozitīvi dalītāji?	**24**	Kādos divos daudzstūros taisne var sadalīt kvadrātu?

1.2. Risini uzdevumus, ievērojot atrisinājuma struktūru!

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības
„Kāds var būt...?”; „Cik...?” Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības, kam prasības izpildās; 2) **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

1	Kāds cipars var būt * vietā, lai skaitlis 987* dalītos ar 5?
Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*

4	Cik 4-centu pastmarkas nepieciešamas, lai izveidotu vērtību 35 centi, izmantojot tikai 4-centu un 9-centu pastmarkas?
Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*

10	Kādus veselus skaitļus var ievietot *x* un *y* vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $(x-2)\cdot(y-2)=4$?
Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*

13	Skaitļi a, b un c ir naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem $a+b$, $a+c$, $b+c$, $a \cdot b$, $a \cdot c$, $b \cdot c$ var būt pāra skaitļi?

Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*

22	Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? Piezīme: $x+y$ un $y+x$ nav dažādi veidi.

Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*

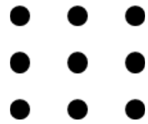
24	Kādos divos daudzstūros taisne var sadalīt kvadrātu?

Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*

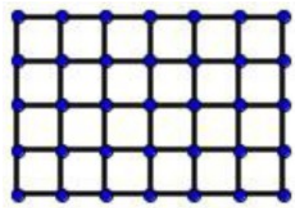
Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība
„Kāds lielākais (mazākais)...?” Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda **piemērs**, kurā izpildās visas prasības; 2) **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība **nevar būt**.

2	Kāds ir mazākais sešciparu skaitlis, kas sastāv tikai no cipariem 2, 0, 1, 3 un dalās ar 9? Cipari drīkst atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto.
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka mazākas vērtības nav*

5	Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*

8	Kāds mazākais skaits punktu jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes? 
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka mazākas vērtības nav*

18	Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*

20	Attēlā redzams zvejošanas tīkls. Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās? 
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*

23	Kāds ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 vai 5?
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde
„Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?” Ja atbilde ir: • „**jā**”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās; • „**nē**”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

3	Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a un b, ka: **a)** $8 \cdot a - 12 \cdot b = 2023$; **b)** $12 \cdot a - 8 \cdot b = 2024$?
Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*
a)	
Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*
b)	

11	Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?
Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*

12	Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kuram ir tieši 12 dažādi veseli pozitīvi dalītāji?
Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*

16	Vai var atrast tādus četrus dažādus naturālus skaitļus *a, b, c, d*, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?

Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*

19	Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 11 krustpunkti?

Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*

21	Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 0; 1; 0; 0. Ar vienu „gājienu" var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt vieninieku. Vai, atkārtojot šādus „gājienus", var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

Atbilde (jā vai nē)	*Piemērs vai pamatojums – apvelc vajadzīgo!*

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde
„Vai visiem…?”; „Vai vienmēr… ?”; „Vai noteikti… ?”; „Vai katram… ?” Ja atbilde ir: • „**jā**”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem; • „**nē**”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

6	Vai skaitļa kvadrāts noteikti ir lielāks nekā pats skaitlis?
Atbilde (jā vai nē)	*Pamatojums vai pretpiemērs – apvelc vajadzīgo!*

7	Vai vienmēr negatīvam skaitlim pieskaitot tā kvadrātu iegūst pozitīvu skaitli?
Atbilde (jā vai nē)	*Pamatojums vai pretpiemērs – apvelc vajadzīgo!*

9	Tabulā 6×6 rūtiņas ierakstīti skaitļi -1, 0 un 1, katrā rūtiņā viens skaitlis. Guna aprēķināja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas. Vai noteikti starp iegūtajām summām ir vismaz divas vienādas?
Atbilde (jā vai nē)	*Pamatojums vai pretpiemērs – apvelc vajadzīgo!*

14	Pirtiņā ir četras lāvas. Pirtī pērties iegāja deviņi cilvēki. Vai noteikti būs tāda lāva, uz kuras sēdēs vismaz trīs cilvēki tad, kad visi būs apsēdušies?

Atbilde (jā vai nē)	*Pamatojums vai pretpiemērs – apvelc vajadzīgo!*

15	Daina, izmantojot visus ciparus, burtnīcā ierakstīja desmitciparu skaitli. Vai šis skaitlis noteikti dalās ar 3?

Atbilde (jā vai nē)	*Pamatojums vai pretpiemērs – apvelc vajadzīgo!*

17	Klasē ir 40 skolēnu. Vai noteikti ir tāds mēnesis, kurā savu dzimšanas dienu atzīmē ne mazāk kā četri šīs klases skolēni?

Atbilde (jā vai nē)	*Pamatojums vai pretpiemērs – apvelc vajadzīgo!*

1.3. Uzdevumu atrisinājumi

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības
„Kāds var būt...?”; „Cik...?” Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības, kam prasības izpildās; 2) **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

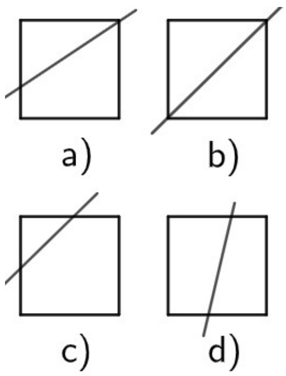
1	Kāds cipars var būt * vietā, lai skaitlis 987* dalītos ar 5?
Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*
Simbola * vietā var būt cipars 0 vai 5.	Lai skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam ir jābūt 0 vai 5. Līdz ar to * vietā var būt tikai 0 vai 5.

4	Cik 4-centu pastmarkas nepieciešamas, lai izveidotu vērtību 35 centi, izmantojot tikai 4-centu un 9-centu pastmarkas?
Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*
Vienīgā iespēja, ka ir trīs 9-centu un divas 4-centu pastmarkas.	Apskatām iespējamos gadījumus atkarībā no 9-centu pastmarku skaita: • ja nav 9-centu pastmarku, tad summu 35 centi nevar izveidot no 4-centu pastmarkām; • ja ir viena 9-centu pastmarka, tad atlikušo summu $35-9=26$ nevar izveidot no 4-centu pastmarkām; • ja ir divas 9-centu pastmarkas, tad atlikušo summu $35-18=17$ nevar izveidot no 4-centu pastmarkām; • ja ir trīs 9-centu pastmarkas, tad atlikušo summu $35-27=8$ var izveidot no divām 4-centu pastmarkām; • ja ir četras vai vairāk 9-centu pastmarkas, tad summa ir lielāka nekā 35. Tātad ir tikai viens variants, kā izveidot summu 35.

10	Kādus veselus skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $(x-2)\cdot(y-2)=4$?
Iespējamās vērtības	*Pamatojums, ka citu iespēju nav*
Derīgie skaitļu pāri: • $x=3$ un $y=6$; • $x=6$ un $y=3$; • $x=4$ un $y=4$; • $x=0$ un $y=0$; • $x=1$ un $y=-2$; • $x=-2$ un $y=1$.	Tā kā x un y ir veseli skaitļi, tad arī $x-2$ un $y-2$ ir veseli skaitļi. Ievērojam, ka skaitli 4 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var iegūt sešos dažādos veidos: $1\cdot 4=4\cdot 1=2\cdot 2=-2\cdot(-2)=-1\cdot(-4)=-4\cdot(-1)$. Apskatām visus gadījumus: • ja $x-2=1$ un $y-2=4$, tad $x=3$ un $y=6$; • ja $x-2=4$ un $y-2=1$, tad $x=6$ un $y=3$; • ja $x-2=2$ un $y-2=2$, tad $x=4$ un $y=4$; • ja $x-2=-2$ un $y-2=-2$, tad $x=0$ un $y=0$; • ja $x-2=-1$ un $y-2=-4$, tad $x=1$ un $y=-2$; • ja $x-2=-4$ un $y-2=-1$, tad $x=-2$ un $y=1$.
Piezīmes 1. Spriedumu par skaitļa sadalīšanu reizinātājos var veikt tikai tad, ja zināms, ka abi reizinātāji ir veseli skaitļi. Ja nav nosacījums, ka reizinātāji ir veseli skaitļi, tad jebkuru veselu skaitli kā divu skaitļu reizinājumu var uzrakstīt bezgalīgi daudz veidos. 2. Uzdevumā pievērst uzmanību skaitļu kopām – naturāli skaitļi, veseli skaitļi.	

<table>
<tr><td>13</td><td colspan="2">Skaitļi a, b un c ir naturāli skaitļi. Cik no skaitļiem $a+b$, $a+c$, $b+c$, $a \cdot b$, $a \cdot c$, $b \cdot c$ var būt pāra skaitļi?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Iespējamās vērtības</td><td>Pamatojums, ka citu iespēju nav</td></tr>
<tr><td colspan="2">Var būt 3, 4 vai 6 pāra skaitļi, piemēram:
• ja $a=1$, $b=3$, $c=5$, tad atbilstošās summas un reizinājumi ir 4; 6; 8; 3; 5; 15;
• ja $a=2$, $b=3$, $c=4$, tad atbilstošās summas un reizinājumi ir 5; 6; 7; 6; 8; 12;
• ja $a=2$, $b=4$, $c=6$, tad atbilstošās summas un reizinājumi ir 6; 8; 10; 8; 12; 24.</td><td>Apskatām, kāda var būt skaitļu a, b un c paritāte:
• ja visi trīs ir pāra skaitļi, tad visas summas un reizinājumi arī ir pāra skaitļi;
• ja ir divi pāra skaitļi un viens nepāra skaitlis, tad tieši divas summas ir nepāra skaitļi, jo nepāra un pāra skaitļa summa ir nepāra skaitlis, tātad 4 no skaitļiem ir pāra skaitļi;
• ja ir viens pāra skaitlis un divi nepāra skaitļi, tad tieši divas summas ir nepāra skaitļi un tieši viens reizinājums ir nepāra skaitlis, jo divu nepāra skaitļu reizinājums ir nepāra skaitlis, tātad 3 no skaitļiem ir pāra skaitļi;
• ja visi trīs ir nepāra skaitļi, tad summas ir pāra skaitļi, bet reizinājumi ir nepāra skaitļi, tātad 3 no skaitļiem ir pāra skaitļi.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Piezīme
Uzdevumā būtiski zināt, kā mainās summas un reizinājuma paritāte atkarībā no saskaitāmo un reizinātāju paritātes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>22</td><td colspan="2">Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu?
Piezīme: $x+y$ un $y+x$ nav dažādi veidi.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Iespējamās vērtības</td><td>Pamatojums, ka citu iespēju nav</td></tr>
<tr><td colspan="2">Skaitli 50 kā divu pirmskaitļu summu var izteikt 4 veidos:
• $50=47+3$;
• $50=43+7$;
• $50=37+13$;
• $50=31+19$.</td><td>Apskatām pirmskaitļus, kas nepārsniedz 50:
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47.
• 2 – neder, jo $50=2+48$;
• 3 un 47 – der, jo $50=3+47$;
• 5 – neder, jo $50=5+45$;
• 7 un 43 – der, jo $50=7+43$;
• 11 – neder, jo $50=11+39$;
• 13 un 37 – der, jo $50=13+37$;
• 17– neder, jo $50=17+33$;
• 19 un 31 – der, jo $50=19+31$;
• 23 – neder, jo $50=23+27$;
• 29 – neder, jo $50=29+21$;
• 41 – neder, jo $50=41+9$.
Tātad ir 4 iespējamie veidi.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Piezīmes
1. Uzdevumu var risināt ar pilno pārlasi, apskatot visas iespējas, kā skaitli 50 uzrakstīt kā divu naturālu skaitļu summu.
2. Pievērst uzmanību korektai pirmskaitļa definīcijai – Naturālus skaitļus, kam ir tieši divi dažādi dalītāji, sauc par pirmskaitļiem. Neprecīza definīcija “Naturālus skaitļus, kam ir tikai divi dalītāji (pats skaitlis un skaitlis 1), sauc par pirmskaitļiem.”, jo rodas neskaidrība par skaitli 1.
3. Vēlams, ka skolēni zina visus pirmskaitļus līdz 100:
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>24</td><td colspan="2">Kādos divos daudzstūros taisne var sadalīt kvadrātu?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Iespējamās vērtības</td><td>Pamatojums, ka citu iespēju nav</td></tr>
<tr><td colspan="2">Taisne var sadalīt kvadrātu:
a) trijstūrī un četrstūrī;
b) divos trijstūros;
c) trijstūrī un piecstūrī;
d) divos četrstūros.
</td><td>Apskatām visus dažādos veidus, kā taisne var būt novietota attiecībā pret kvadrātu:
• taisne iet caur kvadrāta virsotni un krusto kvadrāta malu (skat. a));
• taisne iet caur kvadrāta pretējām virsotnēm (skat. b));
• taisne krusto kvadrāta malas, kurām ir kopīga virsotne (skat. c));
• taisne krusto kvadrāta pretējās malas (skat. d)).
Līdz ar to esam ieguvuši visus iespējamos daudzstūru veidus.</td></tr>
</table>

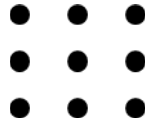
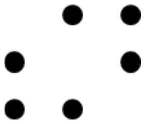
Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība
„Kāds lielākais (mazākais)...?” Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda **piemērs**, kurā izpildās visas prasības; 2) **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība **nevar būt**.

2	Kāds ir mazākais sešciparu skaitlis, kas sastāv tikai no cipariem 2, 0, 1, 3 un dalās ar 9? Cipari drīkst atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto.
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka mazākas vērtības nav*
Mazākais skaitlis ir 100233, tas dalās ar 9, jo skaitļa ciparu summa ir 9.	Izmantosim šādus divus faktus: • lai skaitlis būtu pēc iespējas mazāks, tad lielāko šķiru cipariem jābūt pēc iespējas mazākiem; • lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9 (tātad skaitļa ciparu summai jābūt vismaz 9). Meklētā skaitļa pirmajam ciparam jābūt 1, jo tas ir mazākais cipars, ko var likt kā skaitļa simttūkstošu šķiru. Pēc tam jāliek pēc iespējas vairāk nuļļu: • piecas nulles nevar būt, jo tad iegūst skaitli 100000, kas nedalās ar 9; • četras nulles nevar būt, jo tad lielākā ciparu summa ir $1+3=4<9$; • trīs nulles nevar būt, jo tad lielākā ciparu summa ir $1+3+3=7<9$; • ja ir divas nulles, tad pēdējo trīs ciparu summai jābūt 8, ko var iegūt tikai vienā veidā $2+3+3$, mazākais skaitlis būs tad, ja simtu cipars būs mazākais, tātad mazākais derīgais skaitlis ir 100233.
Piezīme Risinājums ir konstruktīvs pierādījums, kad, veicot spriedumus, tiek iegūts mazākais derīgais skaitlis.	

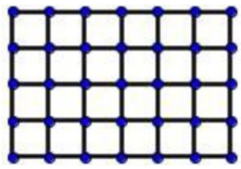
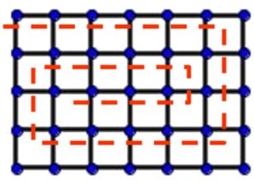
5	Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*

Lielākā ciparu summa ir 60, šāda ciparu summa ir skaitlim 9999888, kas dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	Izmantosim šādus divus faktus:
	• lai skaitlim būtu pēc iespējas lielāka ciparu summa, tad tā cipariem jābūt pēc iespējas lielākiem;
	• lai skaitlis dalītos ar 8, tā pēdējo trīs ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 8.
	Skaitļa pirmie četri cipari būs 9 (tie neietekmē dalīšanos ar 8). Apskatām skaitļa pēdējos trīs ciparus, sākot ar šo ciparu lielāko iespējamo summu:
	• summa 27 – visi trīs cipari ir 9, bet skaitlis 999 nedalās ar 8 – neder;
	• summa 26 – ja ir divi devītnieki un viens astotnieks, tad var izveidot trīs trīsciparu skaitļus 899, 989, 998, bet neviens no tiem nedalās ar 8 – neder;
	• summa 25:
	    ○ cipari 9, 9, 7 – neder, jo neviens no skaitļiem 997, 979, 799 nedalās ar 8;
	    ○ cipari 9, 8, 8 – neder, jo neviens no skaitļiem 889, 898, 988 nedalās ar 8;
	• summa 24 – der skaitlis 888.
	Tātad uzdevuma nosacījumiem atbilst skaitlis 9999888.

Piezīme Uzdevumā nevar veikt pārbaudi, sākot ar lielākajiem skaitļiem, jo ne vienmēr lielākam skaitlim atbilst arī lielāka ciparu summa. Šajā uzdevumā lielākais septiņciparu skaitlis, kas dalās ar 8, ir 9999992, bet tā ciparu summa ir 56, kas ir mazāka nekā 60.	

8	Kāds mazākais skaits punktu jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes? 
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka mazākas vērtības nav*
Mazākais punktu skaits ir 3, skat. attēlu. 	Katrā rindā ir jānodzēš vismaz viens punkts, tātad kopā ir jānodzēš vismaz 3 punkti.
Piezīme Pievērst uzmanību tekstam, ka “nekādi trīs no …” – tas nozīmē, ka nevar atrast 3 punktus, kas atrodas uz vienas taisnes.	

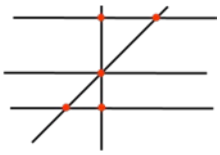
18	Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*
Lielākais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir 96, jo tas dalās ar 2, bet nedalās ar 7 ($96=2\cdot 48$).	Apskatām divciparu skaitļus, sākot ar lielāko: • 99 neder, jo nedalās ne ar 2, ne ar 7; • 98 neder, jo tas dalās gan ar 2, gan ar 7 ($96=2\cdot 49$); • 97 neder, jo nedalās ne ar 2, ne ar 7; • 96 der, jo tas dalās ar 2, bet nedalās ar 7 ($96=2\cdot 48$).
Piezīmes 1. Uzdevumā jāpievērš uzmanību saikļu lietojumam: • saiklis “un” – jāizpildās abiem minētajiem nosacījumiem; • saiklis “vai” – jāizpildās vismaz vienam minētajam nosacījumam; • saiklis “vai nu …, vai” – jāizpildās tieši vienam minētajam nosacījumam. 2. Skolēniem risināšanai var piedāvāt vēl šādus uzdevumus: • Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar 2 un 7? Atbilde: 98. • Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar 3 vai 7? Atbilde: 99.	

20	Attēlā redzams zvejošanas tīkls. Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās? 
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*
Lielākais skaits ir 24 griezieni, skat. attēlu. 	Tīklam ir 35 mezgli. Lai tīkls nesadalītos divās daļās, mazākais nepieciešamais skaits posmiņu starp mezgliem ir 34 (lai divi mezgli turētos kopā, vajag vismaz vienu auklu). Pavisam starp mezgliem ir $5\cdot 6=30$ horizontāli un $7\cdot 4=28$ vertikāli posmi, tātad kopā $30+28=58$ posmi. Tātad lielākais skaits griezienu ir $58-34=24$.
Piezīme Pamatojums "*Lielākais skaits griezienu ir x, jo, veicot vēl vienu griezienu, tīkls sadalīsies divās daļās*" nav korekts, jo tas ir par vienu konkrētu griešanas veidu, nevis par jebkuru iespējamu griezumu.	

23	Kāds ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 vai 5?
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	*Pamatojums, ka lielākas vērtības nav*
Lielākais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir 98, jo tas dalās ar 2 ($98=2\cdot 49$).	Lielākais divciparu skaitlis 99 neder, jo tas nedalās ne ar 2, ne ar 5.

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde
„Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?” Ja atbilde ir: • „**jā**”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās; • „**nē**”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

3	Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a un b, ka: **a)** $8\cdot a-12\cdot b=2023$; **b)** $12\cdot a-8\cdot b=2024$?
Atbilde – a) Nē; b) Jā	*a) Pamatojums; b) Piemērs*
a) Nē, neeksistē. b) Jā, eksistē.	Ievērojam, ka $8\cdot a$, $12\cdot b$ un arī to starpība vienmēr ir pāra skaitļi, bet kreisajā pusē ir nepāra skaitlis. Tātad vienādība nav iespējama. Piemēram, der $a=170$ un $b=2$, jo $12\cdot 170-8\cdot 2=2040-16=2024$.

11	Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?
Atbilde - Jā	*Piemērs*
Jā, var.	
Piezīmes 1. Krustpunktu skaitam jābūt tieši 5, tas nozīmē, ka nevar būt vairāk vai mazāk kā 5 krustpunkti. 2. Jāpievērš uzmanību taisnes un nogriežņa jēdzieniem – taisne ir bezgalīgi turpināma uz abām pusēm, bet nogrieznis ir taisnes daļa. Ja, pagarinot taisnes, tās krustojas, tad arī šo punktu (kas var nebūt uzzīmēts) uzskata par taišņu krustpunktu.	

12	Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kuram ir tieši 12 dažādi veseli pozitīvi dalītāji?
Atbilde – Jā	*Piemērs*
Jā, var.	Piemēram, skaitlim 2^{11} ir tieši 12 dažādi dalītāji un tie ir $1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ 2^5;\ 2^6;\ 2^7;\ 2^8;\ 2^9;\ 2^{10};\ 2^{11}$.
Piezīmes 1. Ir arī citi derīgi skaitļi, piemēram, 60; 72; 84. 2. Atrisinājuma ideju par pirmskaitļa pakāpi var vispārināt un prasīt atrast skaitli, kuram ir tieši 2023 dažādi dalītāji.	

16	Vai var atrast tādus četrus dažādus naturālus skaitļus *a, b, c, d*, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?
Atbilde – Jā	*Piemērs*
Jā, var.	Piemēram, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6+3+2+1}{12}=\frac{12}{12}=1$.

19	Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 11 krustpunkti?
Atbilde – Nē	*Pamatojums*
Nē, nav iespējams.	Apzīmēsim taisnes ar *a*, *b*, *c*, *d* un *e*. Divas taisnes var krustoties lielākais vienā punktā. Piecām taisnēm lielākais krustpunktu skaits ir 10: *ab*; *ac*; *ad*; *ae*; *bc*; *bd*; *be*; *cd*; *ce*; *de*.

<table>
<tr><td>21</td><td colspan="2">Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 0; 1; 0; 0. Ar vienu „gājienu” var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt vieninieku. Vai, atkārtojot šādus „gājienus”, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atbilde – Nē</td><td>Pamatojums</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nē, nevar.</td><td>Sākumā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir 1 (nepāra skaitlis).
Ja diviem skaitļiem pieskaita pa vieniniekam, tad visu skaitļu summa palielinās par 2 (pāra skaitlis). Tātad pēc katra gājiena visu četru skaitļu summa būs nepāra skaitlis.
Ja varētu panākt, ka visi uzrakstītie skaitļi ir vienādi, tad to summa būtu pāra skaitlis, kas ir pretrunā ar to, ka pēc katra gājiena visu četru skaitļu summa ir nepāra skaitlis.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Piezīme
Risinājumā izmantota invariantu metode.</td></tr>
</table>

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde
„Vai visiem…?”; „Vai vienmēr… ?”; „Vai noteikti… ?”; „Vai katram… ?” Ja atbilde ir: • „**jā**”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem; • „**nē**”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

6	Vai skaitļa kvadrāts noteikti ir lielāks nekā pats skaitlis?
Atbilde – Nē	*Pretpiemērs – jāatrod skaitlis, kuram prasītais neizpildās*
Nē, ne noteikti.	Piemēram, uzdevuma nosacījumi neizpildās skaitlim $\frac{1}{2}$, jo tā kvadrāts ir $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$.

7	Vai vienmēr negatīvam skaitlim pieskaitot tā kvadrātu iegūst pozitīvu skaitli?
Atbilde – Nē	*Pretpiemērs – jāatrod skaitlis, kuram prasītais neizpildās*
Nē, ne vienmēr.	Piemēram, uzdevuma nosacījumi neizpildās skaitlim (-1), jo $-1+(-1)^2=0$, kas nav pozitīvs skaitlis.

9	Tabulā 6×6 rūtiņas ierakstīti skaitļi -1, 0 un 1, katrā rūtiņā viens skaitlis. Guna aprēķināja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas. Vai noteikti starp iegūtajām summām ir vismaz divas vienādas?
Atbilde – Jā	*Pamatojums, ka vienmēr vismaz divas summas būs vienādas*
Jā, noteikti.	Guna ieguva 8 summas (3 rindas, 3 kolonnas un 2 diagonāles). Pavisam var iegūt 7 dažādas summas: -3; -2; -1;0; 1; 2; 3 (mazākā summa, ja visās trīs rūtiņās ierakstīts skaitlis (-1), lielākā summa, ja visās trīs rūtiņās ierakstīts skaitlis 1). Tātad noteikti vismaz divas summas būs vienādas.

14	Pirtiņā ir četras lāvas. Pirtī pērties iegāja deviņi cilvēki. Vai noteikti būs tāda lāva, uz kuras sēdēs vismaz trīs cilvēki tad, kad visi būs apsēdušies?
Atbilde – Jā	*Pamatojums, ka vienmēr būs lāva, uz kuras sēž vismaz 3 cilvēki*
Jā, noteikti.	Pieņemsim pretējo, ka nav tādas lāvas, uz kuras sēž vismaz 3 cilvēki. Tad uz katras lāvas sēž ne vairāk kā 2 cilvēki, bet tādā gadījumā pirtī uz visām lāvām kopā sēž ne vairāk kā $2\cdot 4=8$ cilvēki. Iegūta pretruna ar doto, ka pirtī iegāja 9 cilvēki. Tātad noteikti ir lāva, uz kuras sēž vismaz 3 cilvēki.
Piezīmes 1. Uzdevuma risinājumā ir metode “pierādījums no pretējā”. 2. Uzdevumu var risināt ar Dirihlē principu – ja ir 4 lāvas un 9 cilvēki, tad noteikti būs tāda lāva, uz kuras sēž vismaz 3 cilvēki. 3. Risinājumā jāizvairās no frāzēm - *sliktākajā gadījumā* vai *labākajā gadījumā*, jo nav definēts, kas ir *slikts gadījums* vai *labs gadījums*.	

15	Daina, izmantojot visus ciparus, burtnīcā ierakstīja desmitciparu skaitli. Vai šis skaitlis noteikti dalās ar 3?	
Atbilde – Jā	*Pamatojums, ka jebkurš izveidotais skaitlis dalās ar 3*	
Jā, noteikti.	Izveidotā skaitļa ciparu summa ir $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, kas dalās ar 3, tātad jebkurš izveidotais skaitlis dalās ar 3.	

17	Klasē ir 40 skolēnu. Vai noteikti ir tāds mēnesis, kurā savu dzimšanas dienu atzīmē ne mazāk kā četri šīs klases skolēni?	
Atbilde – Jā	*Pamatojums, ka noteikti ir tāds mēnesis, kurā dzimšanas dienu atzīmē 4 vai vairāk skolēni*	
Jā, noteikti.	Pieņemsim pretējo, ka nav tāda mēneša, kurā dzimuši 4 vai vairāk skolēni. Tad katrā mēnesī dzimuši ne vairāk kā 3 skolēni, bet tādā gadījumā kopā ir ne vairāk kā $3 \cdot 12 = 36$ skolēni. Iegūta pretruna ar doto, ka klasē ir 40 skolēni. Tātad noteikti ir tāds mēnesis, kurā ir dzimuši ne mazāk kā 4 skolēni.	
Piezīme Jāpievērš uzmanība vārdiem: ne mazāk kā, vismaz, mazāk nekā u.c.		

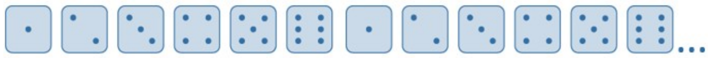
2. TEORIJA

2.1. Periodiskas virknes

Skaitļus, kas veido virkni, sauc par virknes locekļiem. Piemēram, virknes 5; 10; 15; 20; 25; … ceturtais loceklis ir 20. Virknes locekļu grupu, kas no kādas vietas virknē sāk visu laiku atkārtoties, sauc par periodu. Piemēram, virknē 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3; … periods ir (1; 2; 3) un šī ir periodiska virkne.

Piemēri

1. Metamie kauliņi novietoti rindā tā, ka ik pēc sešiem kauliņiem redzamo punktiņu secība atkārtojas:



Cik punktiņu būs redzami uz šīs rindas 605. kauliņa?

Atrisinājums. Pamatosim, ka uz 605. kauliņa būs redzami 5 punktiņi. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 6 kauliņiem un $605 = 6 \cdot 100 + 5$, tad uz 605. kauliņa būs redzami tikpat punktiņi, cik uz 5. kauliņa, tas ir, 5.

2. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 11, bet katrs nākamais ir vienāds ar iepriekšējā virknes locekļa kvadrāta ciparu summu. Kāds skaitlis šajā virknē ir 2018. vietā?

Atrisinājums. Pamatosim, ka virknes 2018. vietā ir skaitlis 13. Aprēķinām dažus nākamos virknes locekļus:

- virknes 2. loceklis ir 4, jo $11^2 = 121$ un $1+2+1=4$;
- virknes 3. loceklis ir 7, jo $4^2 = 16$ un $1+6=7$;
- virknes 4. loceklis ir 13, jo $7^2 = 49$ un $4+9=13$;
- virknes 5. loceklis ir 16, jo $13^2 = 169$ un $1+6+9=16$;
- virknes 6. loceklis ir 13, jo $16^2 = 256$ un $2+5+6=13$.

Līdz ar to virknes sākums ir 11; 4; 7; <u>13; 16</u>; <u>13; 16</u>; … . Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Redzam, ka, sākot ar ceturto locekli, virkne ir periodiska: pāra vietās visi locekļi ir 13, bet nepāra – 16. Tā kā 2018 ir pāra skaitlis, tad šajā vietā virknē ir skaitlis 13.

3. Virknes pirmais loceklis ir 6. Katru nākamo locekli iegūst tā:

- iepriekšējo virknes locekli dala ar 2, ja tas ir pāra skaitlis;
- iepriekšējo virknes locekli reizina ar 5 un atņem 1, ja tas ir nepāra skaitlis.

Kāds virknes locekļa kārtas numurs ir vienāds ar šajā vietā esošo virknes locekli?

Atrisinājums. Pamatosim, ka 13. un 16. virknes loceklis sakrīt ar tā kārtas numuru virknē. Turpinot virkni tālāk, iegūsim

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	**13.**	14.	15.	**16.**	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	...
6	3	14	7	34	17	84	42	21	104	52	26	**13**	64	32	**16**	8	4	2	1	4	2	1	...

Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Kā redzams, sākot ar 18. virknes locekli, virknē atkārtojas skaitļu grupa (4; 2; 1), tāpēc tālāk uz priekšu neviens virknes locekļa kārtas numurs nebūs vienāds ar pašu virknes locekli. Līdz ar to vienīgie virknes locekļi, kam prasītais izpildās, ir 13 un 16.

2.2. Saskaitīšanas un reizināšanas likums, izlases

Kombinatorikas saskaitīšanas likums. Ja no vienas grupas kādu elementu var izvēlēties k veidos, bet no otras grupas kādu elementu var izvēlēties n veidos, tad izvēlēties vienu elementu no pirmās vai otrās grupas var $k + n$ veidos.
Saskaitīšanas likumu lieto arī tad, ja kāds elements ir jāizvēlas no vairāk nekā divām grupām.
Piemērs. Ja Kristaps drīkst izvēlēties tikai vienu no 1. att. redzamajām rotaļlietām, tad viņš var izvēlēties vai nu kādu no divām mašīnām, vai kādu no 3 bumbām. Tātad Kristaps sev vienu rotaļlietu var izvēlēties $2+3=5$ dažādos veidos.

1. att.

Kombinatorikas reizināšanas likums. Ja no vienas grupas kādu elementu var izvēlēties k veidos, bet no otras grupas kādu elementu var izvēlēties n veidos, tad vienu elementu no pirmās un vienu elementu no otrās grupas var izvēlēties $k \cdot n$ veidos.
Reizināšanas likumu lieto arī tad un, ja elementi ir jāizvēlas no vairāk nekā divām grupām.
Piemērs. Ja Kristīne gribētu uzrakstīt visas dažādās frāzes, kurās pirmais vārds ir kāds no dotajiem īpašības vārdiem un otrais vārds ir kāds no 2. att. dotajiem lietvārdiem, tad viņai būtu jāuzraksta $3 \cdot 2 = 6$ dažādas frāzes.

2. att.

Ievēro! Ja ir vārds „**vai**” – parasti lieto saskaitīšanas likumu, vārds „**un**” – reizināšanas likumu.

Izlases. Ja ir dots noteikts skaits dažādu elementu, tad, izvēloties no tiem noteiktu skaitu elementu, varam izveidot dažādas šo atšķirīgo elementu izlases.

Izlases, kurās ir svarīga savstarpējā elementu secība, sauc par sakārtotām**.**
Piemērs. Ja ir svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem burtiem *A, B, C* divus var izvēlēties sešos dažādos veidos: *AB, BA, AC, CA, BC, CB*.

Izlases, kurās nav svarīga savstarpējā elementu secība, sauc par nesakārtotām.
Piemērs. Ja nav svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem burtiem *A, B, C* divus var izvēlēties trīs dažādos veidos: *AB, AC, BC*.

Lai aprēķinātu sakārtotu izlašu skaitu, jānosaka, cik veidos var izvēlēties pirmo elementu un otro elementu, un trešo elementu utt., pēc tam iegūtie skaitļi jāsareizina (jālieto reizināšanas likums).
Piemērs. Ja ir svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem burtiem *A, B, C* divus var izvēlēties $3 \cdot 2 = 6$ dažādos veidos (jo pirmo burtu var izvēlēties 3 dažādos veidos, bet otro no atlikušajiem diviem var izvēlēties 2 dažādos veidos).

Lai aprēķinātu nesakārtotu izlašu skaitu, jāaprēķina, cik ir sakārtotu izlašu, un iegūtais skaitlis jādala ar to, cik veidos var sakārtot izlases elementus.
Piemērs. Ja nav svarīga elementu secība, tad no trim dažādiem burtiem *A, B, C* divus var izvēlēties $\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$ dažādos veidos (dalām ar 2, jo tik dažādos veidos var sakārtot izlases elementus, tas ir, pirmo no tiem var izvēlēties 2 dažādos veidos, otro elementu no viena atlikušā var izvēlēties 1 veidā).

Piemēri

1. Cik dažādos veidos 3. att. var izlasīt vārdu KARTUPELIS, ja var sākt lasīt no jebkuras rūtiņas, kurā ierakstīts burts K un lasot jāpārvietojas uz blakus rūtiņu pa labi vai uz leju? (Par blakus rūtiņām sauc rūtiņas, kam ir kopīga mala.)

									K	A	R	T	U	P	E	L	I	S
								K	A	R	T	U	P	E	L	I	S	
							K	A	R	T	U	P	E	L	I	S		
						K	A	R	T	U	P	E	L	I	S			
					K	A	R	T	U	P	E	L	I	S				
				K	A	R	T	U	P	E	L	I	S					
			K	A	R	T	U	P	E	L	I	S						
		K	A	R	T	U	P	E	L	I	S							
	K	A	R	T	U	P	E	L	I	S								
K	A	R	T	U	P	E	L	I	S									

3. att.

Atrisinājums. Apskatīsim, cik veidos, lasot atļautajā veidā, var nonākt katrā rūtiņā (skat. 4. att.). (Lai aizpildītu tabulu, pieņemam, ka katrā rūtiņā ar burtu K varam nonākt 1 veidā, bet pārējās rūtiņās var nonākt tikai no rūtiņas pa kreisi vai no rūtiņas augšā, tātad ir jāsaskaita abās šajās rūtiņas ierakstītos skaitļus.) Tā kā vārds KARTUPELIS var beigties jebkurā rūtiņā ar burtu S, lai noteiktu, cik veidos to var izlasīt, jāsaskaita, cik veidos var nonākt katrā rūtiņā ar burtu S, t.i., $1+10+46+130+256+382+466+502+511+512=2816$ veidos.

									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
							1	2	4	7	11	16	22	29	37	46		
						1	2	4	8	15	26	42	64	93	130			
					1	2	4	8	16	31	57	99	163	256				
				1	2	4	8	16	32	63	120	219	382					
			1	2	4	8	16	32	64	127	247	466						
		1	2	4	8	16	32	64	128	255	502							
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511								
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512									

4. att.

2. Māmiņa izcepa 6 apaļas pankūkas. Dēliņš Didzis tobrīd spēlējās ar lineālu un nolēma izmērīt pankūku diametrus. Izrādījās, ka pankūku diametri ir 11 cm, 12 cm, 13 cm, 14 cm, 15 cm un 16 cm. Tad Didzis ar mammu nolēma, ka visas pankūkas sadalīs pa trīs šķīvjiem (Didzim, mammai un tētim) tā, ka neviens šķīvis nepaliek tukšs un ne uz viena šķīvja nav uzliktas divas pankūkas, kuru diametri atšķiras par 1 cm. Cik veidos Didzis un māmiņa var realizēt savu ieceri?

Atrisinājums. Pankūku dalīšanu varētu veikt šādi.

Vispirms pankūku ar diametru 11 cm uzliekam uz jebkura šķīvja (3 iespējas). Pēc tam 12 cm lielo pankūku noliekam uz viena no tiem šķīvjiem, uz kura nav nolikta 11 cm lielā pankūka (2 iespējas). Tad izvēlamies vienu no diviem šķīvjiem, uz kura nav 12 cm lielā pankūka, un uzliekam 13 cm lielo pankūku. Tā pēc kārtas izvēlamies, uz kura šķīvja tiks uzlikta 14 cm, 15 cm un 16 cm lielās pankūkas (katrai būs 2 iespējas).

Tātad pavisam pankūkas pa šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$ veidos. Taču starp šiem veidiem ir arī tādi, kad viens no šķīvjiem ir palicis tukšs. Tas ir iespējams tikai tādā gadījumā, ja uz viena šķīvja ir pankūkas 11 cm, 13 cm, 15 cm, bet uz otra – 12 cm, 14 cm, 16 cm. Pie tam šie gadījumi pa trīs šķīvjiem var būt izkārtojušies 6 veidos.

Tātad uzdevuma prasībām atbilstošo sadalījumu skaits ir $96-6=90$.

Piezīme. Ja nebūtu svarīga šķīvju secība, tas ir, svarīgi tikai „pankūku komplekti” (piemēram, ir iepriekšēja vienošanās, ka Didzim vienmēr tiek šķīvis, uz kura ir 11 cm pankūka, mammai – šķīvis, uz kura ir 12 cm pankūka, bet tētim – trešais šķīvis), tad uzdevuma atbilde būtu $90:6=15$ veidos, jo katru „pankūku komplektu” pa trīs šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot1=6$ veidos.

2.3. Svēršanas uzdevumi, turnīri

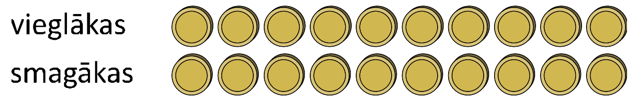
Svēršanas uzdevumos galvenokārt izmantosim sviru svarus, kuriem ir divi svaru kausi. Sviru svari neparāda ķermeņu masu, var redzēt tikai to, vai abi svaru kausi ir līdzsvarā vai nav līdzsvarā (smagākais svaru kauss nosveras uz leju).

Aplūkosim uzdevumus, kuros, izmantojot doto informāciju, galvenokārt tiks prasīts atrast vienu (vai vairākus) no pārējiem objektiem atšķirīgu objektu. Šo uzdevumu atrisinājumi lielākoties balstās uz loģisku spriedumu ceļā izveidotām objektu grupēšanas metodēm.

Piemēri

1. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas – nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pārī. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu liekam vienā kaudzītē, bet smagāko – otrā kaudzītē. Tā kā ir $20:2=10$ pāri, tad ir veiktas 10 svēršanas (skat. 5. att.). Skaidrs, ka visvieglākā monēta jāmeklē starp vieglākajām, bet vissmagākā – starp smagākajām. Apskatām katru kaudzīti atsevišķi.



5. att.

No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās, vieglāko atstājam svaros un salīdzinām ar nākamo, atkal svaros atstājot vieglāko. Tā turpinām, kamēr visas atlikušās monētas no šīs kaudzītes ir nosvērtas. Pēdējās svēršanas vieglākā monēta ir pati vieglākā no visām. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Analoģiski no kaudzītes, kurā ir smagākās monētas, atrod pašu smagāko no visām – svaros visu laiku jāatstāj smagākā monēta, bet vieglākā jāmet prom. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Līdz ar to ar $10+9+9=28$ svēršanām esam atraduši gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu.

2. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā citas. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu, ja zināms, ka visu īsto monētu masas ir vienādas?

Atrisinājums. Sadalām šīs monētas trīs kaudzītēs pa 3 monētām katrā. Skaidrs, ka viltotā monēta atrodas vienā no šīm kaudzītēm. Pirmajā svēršanā salīdzinām divas no šīm kaudzītēm.

(A) Ja viena kaudzīte ir vieglāka nekā otra, tad viltotā (vieglākā) monēta ir šajā kaudzītē (skat. 6. att. (A)).

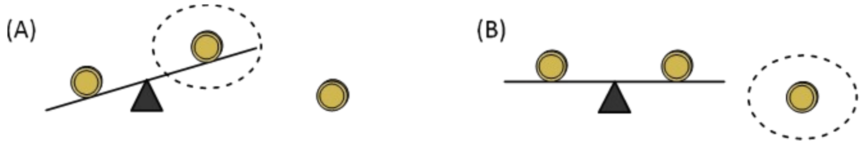
(B) Ja abām kaudzītēm ir vienāda masa, tad viltotā monēta ir trešajā, nesvērtajā kaudzītē (skat. 6. att. (B)).

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai no šīs kaudzītes.

6. att.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 7. att. (A)).

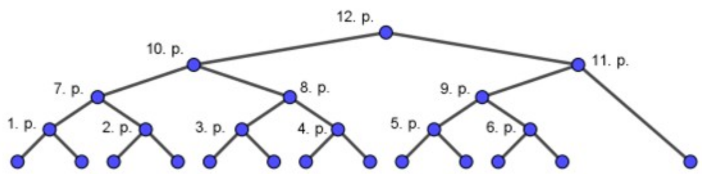
(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē netika svērta (skat. 7. att. (B)).



7. att.

3. Šaha klubā ir 13 šahisti. Visu viņu spēles prasme ir atšķirīga un partijā vienmēr uzvar spēcīgākais. Kā, izspēlējot 15 partijas, noskaidrot gan pašu labāko, gan otru labāko šahistu šajā klubā?

Atrisinājums. Sākumā izveidojam 6 šahistu pārus (skat. 8. att.) un katrā pārī noskaidrojam labāko šahistu (6 partijas). Tad šos sešus labākos šahistus sadalām trīs pāros un katrā no šiem pāriem noskaidrojam labāko šahistu (3 partijas). Pirmos divus no atrastajiem trīs labākajiem šahistiem salīdzinām savā starpā un noskaidrojam labāko (1 partija), bet trešo no tiem salīdzinām ar to šahistu, kas līdz šim nav piedalījies nevienā šaha partijā un noskaidrojam labāko (1 partija). Visbeidzot labākie šahisti no pēdējām divām šaha partijām sacenšas savā starpā (1 partija). Tātad, izspēlējot $6+3+1+1+1=12$ šaha partijas, ir noskaidrots pats labākais šahists šajā klubā. Iepriekš parādījām, kā, izspēlējot 12 partijas, var noskaidrot uzvarētāju šajā klubā. Otrs labākais šahists meklējams tikai un vienīgi no tiem 4 šahistiem, kas spēlējuši ar uzvarētāju un tam zaudējuši. Labākais no šiem četriem šahistiem atrodams, izspēlējot vēl 3 partijas, piemēram, salīdzinām divus šahistus (1 partija), labākais no tiem spēlē ar nākamo (1 partija), labākais šahists šajā partijā spēlē ar nākamo šahistu (1 partija). Tas nozīmē, ka ar $12+3=15$ šaha partijām var atrast pašu labāko un otro labāko šahistu.



8. att.

2.4. Simetrija spēlēs

Katrs spēlētājs sāk spēli ar mērķi uzvarēt. Lai uzvarētu, ir labi balstīties uz spēles stratēģiju, tas ir, uz paņēmienu kopumu, kas balstās uz loģiskiem spriedumiem un nosaka katra spēlētāja rīcību spēles laikā. Raksturīgākā pieļautā kļūda šādos uzdevumos ir viena vai dažu atsevišķu gadījumu apskatīšana, neņemot vērā visus iespējamos spēlētāju gājienus. Izstrādājot uzvarošo stratēģiju, tajā ir jāiekļauj visas iespējamās situācijas.
Bieži vien spēles stratēģijā var izmantot simetrijas pret taisni vai simetrijas pret punktu ideju, tas ir, veikt gājienu, kas ir simetrisks pretinieka gājienam.

Katru no tālāk dotajām spēlēm spēlēs divi spēlētāji. Gājienus tie izdarīs pamīšus. Spēlētājs nedrīkst izlaist gājienu. Katrā šajā spēlē ir jānoskaidro, kurš no abiem spēlētājiem – pirmais spēlētājs (tas, kurš izdara pirmo gājienu) vai otrais spēlētājs (tas, kurš izdara otro gājienu) – vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no tā, kādus gājienus veic pretinieks.

Piemēri

1. Vienā horizontālā rindā savilktas: **a)** 9 svītriņas (skat. 9. att.); **b)** 10 svītriņas (skat. 10. att.). Divi spēlētāji pamīšus izdara gājienus. Vienā gājienā var par krustiņu pārvērst:
- vai nu vienu svītriņu,
- vai arī divas blakus esošas svītriņas.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, tas ir, nevar atbilstoši noteikumiem, svītriņu pārvērst par krustiņu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

— — — — — — — — —

9. att.

— — — — — — — — — —

10. att.

Atrisinājums. Šajā spēlē gan a), gan b) gadījumā vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs. Aprakstīsim, kā jārīkojas pirmajam spēlētājam, lai noteikti uzvarētu.

a) Pirmajam spēlētājam savā pirmajā gājienā par krustiņu jāpārvērš vidējā svītriņa (skat. 11. att.). Nākamos gājienus pirmais spēlētājs izdara simetriski pretinieka tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret vidējo krustiņu. Piemēram, ja pretinieks savā gājienā par krustiņu pārvērš vienu svītriņu, pirmais spēlētājs to pašu izdara ar simetrisko svītriņu otrā pusē no vidējā krustiņa (skat. 12. att.). Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

b) Pirmajam spēlētājam savā pirmajā gājienā par krustiņu jāpārvērš divas vidējās svītriņas (skat. 13. att.). Nākamos gājienus pirmais spēlētājs izdara simetriski pretinieka tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret diviem vidējiem krustiņiem. Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

— — — — + — — — —

11. att.

— + — — + — — + —

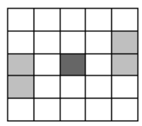
12. att.

— — — — + + — — — —

13. att.

2. Divi spēlētāji izvieto žetonus kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām. Gājienus spēlētāji izdara pamīšus, turklāt vienā gājienā drīkst izvietot vai nu 1 žetonu vienā rūtiņā, vai arī 2 žetonus pa vienam divās blakus rūtiņās, kas atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā, ja tās ir tukšas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.
Pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jānovieto 1 žetons tā, lai tas atrastos kvadrāta centrā (skat. 14. att.)

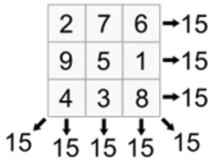


14. att.

Lai arī kur otrais spēlētājs novieto savu žetonu (vai arī divus žetonus) pirmajam spēlētājam jānovieto žetons (žetoni) simetriski otrā spēlētāja tikko novietotajam žetonam (žetoniem) attiecībā pret kvadrāta centru. Tā pirmais spēlētājs turpina rīkoties arī visos savos nākamajos gājienos.
Ja otrais spēlētājs var izdarīt gājienu, tad pirmais spēlētājs var izdarīt tam simetrisku gājienu. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

2.5. Maģiskās konfigurācijas

Kvadrātu, kuram katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati (skat., piemēram, 15. att.) sauc par maģisko kvadrātu. Arī citas figūras, kurām uz noteiktām taisnēm uzrakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati, mēdz dēvēt par maģiskām. Visas šādas figūras kopā sauc par maģiskām konfigurācijām.



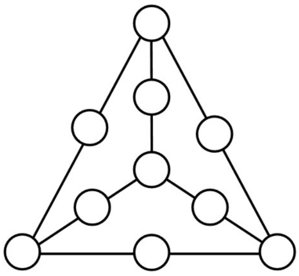
15. att.

Piemēri

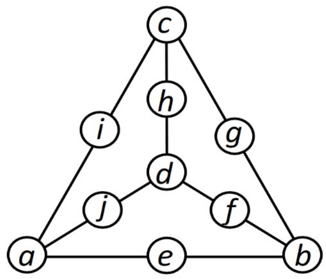
1. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 32, 34, 35. Divās rindās ierakstīto skaitļu summas ir 42 un 27. Kāda ir trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa?

Atrisinājums. Saskaitot visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Arī saskaitot visās rindās ierakstīto skaitļu summas, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Tāpēc trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir $(32+34+35)-(42+27)=32$.

2. Vai katrā aplītī (skat. 16. att.) var ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 10 (katru tieši vienu reizi) tā, lai visas summas katriem trijiem skaitļiem, kas ierakstīti uz vienas taisnes esošos aplīšos, būtu savā starpā vienādas?



16. att.



17. att.

Atrisinājums. Uz katras taisnes esošo trīs skaitļu summu apzīmēsim ar S, un aplīšos ierakstītos skaitļus apzīmēsim tā, kā parādīts 17. att. Ievērojam, ka skaitļi a, b, c, d sastopami pavisam uz trīs taisnēm, bet visi pārējie skaitļi – katrs tieši uz vienas taisnes. Tāpēc, saskaitot uz visām sešām taisnēm uzrakstīto skaitļu summas, iegūstam

$$3\cdot a+3\cdot b+3\cdot c+3\cdot d+e+f+g+h+i+j=6\cdot S.$$

Tā kā visu skaitļu no 1 līdz 10 summa ir 55, tad iegūstam

$$2\cdot a+2\cdot b+2\cdot c+2\cdot d+a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=6\cdot S;$$

$$2\cdot a+2\cdot b+2\cdot c+2\cdot d+55=6\cdot S;$$

$$2\cdot(a+b+c+d)+55=6\cdot S.$$

Ievērojam, ka skaitlis 55 ir nepāra skaitlis, bet $2\cdot(a+b+c+d)$ un $6\cdot S$ – pāra skaitļi. Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc uzdevumā prasīto izdarīt nav iespējams.

2.6. Eilera diagrammas

Grupēt objektus nozīmē vienā grupā apvieno tos, kuriem ir kopīga īpašība. Objekti var būt gan sadzīviski (piemēram, dārzeņi, dzīvnieki), gan matemātiski (piemēram, skaitļi, figūras). Tāpat arī objektu īpašības var būt sadzīviskas (piemēram, būt sarkanam, būt pūkainam), gan matemātiskas (piemēram, dalīties ar 3, būt lielākam nekā 10). Lai objektus sagrupētu, tie vispirms ir jāsalīdzina, tas ir, jānosaka to kopīgās un atšķirīgās īpašības. Ievēro, ka ir īpašības, kuras objektam var būt un kuras var arī nebūt, piemēram, ābols ir apaļš un sarkans, bet nav zils.
Viens no attēlošanas veidiem ir Eilera diagrammas. Tiek zīmēti riņķi, kas atbilst apskatāmajām objektu īpašībām un kas daļēji pārklājas. Risinot uzdevumus, riņķu daļās parasti raksta atbilstošo objektu skaitu.

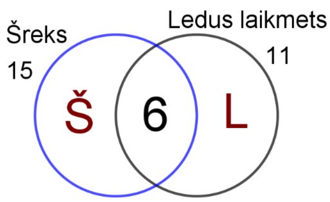
Piemēri

1. Vienas klases skolēniem ļoti patīk skatīties animācijas filmas. Ir zināms, ka 15 skolēni ir redzējuši „Šreku”, 11 skolēni ir redzējuši „Ledus laikmetu”, 6 skolēni ir redzējuši gan „Šreku”, gan „Ledus laikmetu”.

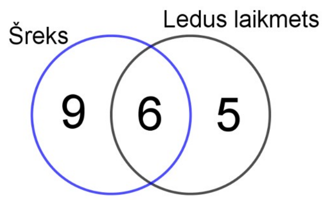
a) Cik daudz skolēnu ir redzējuši tikai „Ledus laikmetu”? Cik daudz skolēnu ir redzējuši tikai „Šreku”?

b) Cik pavisam skolēnu ir klasē?

Atrisinājums. a) Risināsim uzdevumu, lietojot Eilera riņķus. Uzzīmējam divus riņķus, daļā, kur tie pārklājas, varam ierakstīt skaitli 6 (skat. 18. att.), jo gan „Šreku”, gan „Ledus laikmetu” ir redzējuši 6 skolēni.
Daļā, kas apzīmēta ar Š, būs jāieraksta skaitlis 9, jo zilajā riņķī ierakstīto skaitļu summai jābūt 15. Tātad tikai “Šreku” ir redzējuši 9 skolēni. Daļā, kas apzīmēta ar L, būs jāieraksta skaitlis 5, jo melnajā riņķī ierakstīto skaitļu summai jābūt 11. Tātad tikai “Ledus laikmetu” ir redzējuši 9 skolēni.
b) Lai iegūtu kopējo skolēnu skaitu, jāsaskaita visi riņķu daļās ierakstītie skaitļi (skat. 19. att.). Līdz ar to klasē ir $9+6+5=20$ skolēni.



18. att.



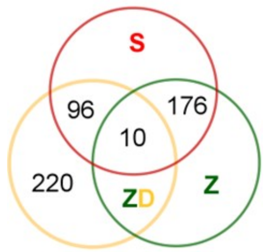
19. att.

Piezīme. Skaitļi 15 un 11, kas rakstīti 18. att. ārpus abiem riņķiem, ir kā palīgdarbība, lai vieglāk izdomāt, kādus skaitļus rakstīt daļā Š un L.

2. Pasaku mežā dzīvo vairāki trollīši, katram no viņiem ir vismaz viena, bet ne vairāk kā trīs cepurītes, turklāt nevienam no trollīšiem nav divu vienas krāsas cepurīšu. Cik trollīšu dzīvo pasaku mežā, ja ir zināms, ka 666 trollīšiem ir sarkanas cepurītes, 666 trollīšiem ir zaļas cepurītes un 666 – dzeltenas cepurītes. 220 trollīšiem ir tikai dzeltenās cepurītes, 96 trollīšiem ir gan dzeltenās, gan sarkanās cepurītes, bet nav zaļo cepurīšu, 176 trollīšiem ir sarkanās un zaļās, bet nav dzelteno cepurīšu un 10 trollīšiem ir visu trīs krāsu cepurītes.

Atrisinājums. Risināsim uzdevumu, lietojot Eilera riņķus. Uzzīmējam trīs riņķus un, lasot uzdevuma tekstu, ierakstām Eilera diagrammā informāciju (skat. 20. att.).

Lai noskaidrotu trollīši skaitu, aprēķinām, kāds skaitlis ierakstīts trīs atlikušajās daļās:



20. att.

- daļā S ir jābūt skaitlim $666-96-176-10=384$, jo kopā sarkanajā riņķī (kas atbilst trollīšu skaitam,kam ir sarkanas cepurītes) ierakstīto skaitļu summai jābūt 666;
- daļā ZD ir jābūt skaitlim $666-220-96-10=340$;
- daļā Z ir jābūt skaitlim $666-176-10-340=140$.

Tā kā visas riņķu daļas ir aizpildītas un katram trollītim ir vismaz viena cepurīte, tad pavisam mežā dzīvo $384+176+10+96+140+340+220=1366$ trollīši.

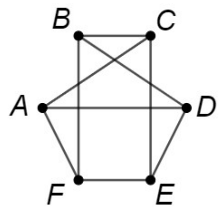
2.7. Grafi

Dažreiz, lai uzskatāmāk un ērtāk atrisinātu kādu uzdevumu, tiek izmantoti ar grafiem saistītie jēdzieni. Grafs ir galīgs kopums virsotņu un šķautņu. Virsotnes parasti iztēlojamies kā punktus, bet šķautnes kā nogriežņus (vai līnijas), kas savieno šos punktus.

Grafi visbiežāk tiek lietoti, lai interpretētu un attēlotu:

- dažādas ceļu satiksmes shēmas (grafa virsotnes ir pilsētas, šķautnes ir ceļi, kas tās savieno);
- dažādu turnīru norisi (grafa virsotnes ir dalībnieki, šķautnes ir savstarpēji izspēlētās spēles);
- draudzēšanos kādas grupas ietvaros (grafa virsotnes ir grupas dalībnieki, šķautnes ir savstarpējās draudzības).

Piemēram, ja ir dots, ka ir seši cilvēki un katrs no tiem draudzējas ar trīs citiem cilvēkiem, tad cilvēkus varam apzīmēt ar punktiem *A, B, C, D, E* un *F* un savstarpējo draudzēšanos ar nogriežņiem, izveidojot grafu (piemēram, skat. 21. att.). Grafā redzams, ka no katra punkta iziet trīs nogriežņi, jo katrs draudzējas ar trīs citiem cilvēkiem.

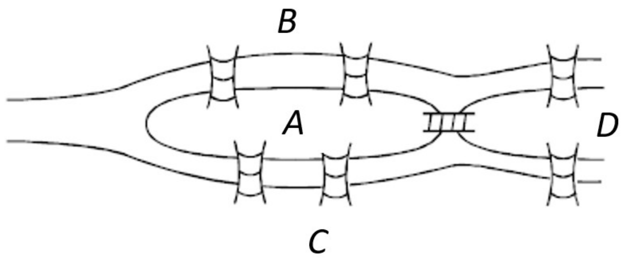


21. att.

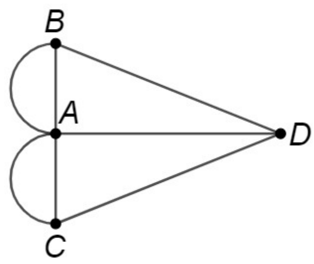
Mazliet no vēstures

Matemātiķis Leonards Eilers (1707-1783) 18. gadsimtā gribēja atrisināt uzdevumu par Kēnigsbergas tiltiem:

Vai, staigājot pa Kēnigsbergas tiltiem (skat. 22. att.), iespējams katru tiltu šķērsot tikai vienu reizi un atgriezties pastaigas sākumpunktā?



22. att.



23. att.

Tiltu novietojumam Eilers izveidoja grafu (skat. 23. att.), kurā ar nogriežņiem attēloti tilti, bet ar punktiem apzīmētas pilsētas daļas, kuras savieno tilti. Aplūkosim, kāpēc uzdevuma nosacījumus nevar izpildīt. Lai nonāktu līdz punktam un no tā aizietu, no katra punkta jābūt novilktiem pāra skaitam nogriežņu, tomēr no punkta *A* iziet 5 nogriežņi (nepāra skaits) un no punktiem *B, C* un *D* ir novilkti trīs (nepāra skaits) nogriežņi, tātad visus tiltus šķērsot nav iespējams.

Ja kāds vēlētos šķērsot visus tiltus tā, lai pastaigas sākums un beigas ir cita pilsētas vieta, tad tieši no diviem punktiem jāiziet nepāra skaitam nogriežņu – vienā no tiem pastaigu sāk un otrā – beidz.

Par godu matemātiķim Eileram tika ieviesti šādi jēdzieni. Maršrutu, kas iziet cauri katrai šķautnei tieši vienu reizi, sauc par Eilera ceļu. Ja gadījumā Eilera ceļa sākuma un beigu virsotne sakrīt, tad to sauc par Eilera ciklu.

Eilers pierādīja šādu faktu: *grafs satur Eilera ceļu tad un tikai tad, ja no visām virsotnēm iziet pāra skaits šķautņu vai arī no tieši divām virsotnēm iziet nepāra skaits šķautņu.*

Citiem vārdiem:

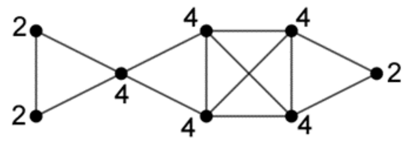
- lai izveidotu maršrutu, kas iziet cauri katrai grafa šķautnei (nogrieznim) tieši vienu reizi un atgrieztos sākumpunktā, šķautņu (nogriežņu) skaitam no katras virsotnes (punkta) jābūt pāra skaitlim;
- lai izveidotu maršrutu, kas iziet cauri katrai grafa šķautnei (nogrieznim) tieši vienu reizi un tā sākums un beigas atšķiras, tieši no divām virsotnēm (punktiem) jāiziet nepāra skaitam šķautņu (nogriežņu) un pārējo šķautņu (nogriežņu) skaitam no katras virsotnes (punkta) jābūt pāra skaitlim.

Piemēri

1. Rūķīši mežā ir uzbūvējuši astoņas mājiņas un starp tām izveidojuši vairākas taciņas. Katra taciņa savieno divas mājiņas, taciņas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājiņām iziet attiecīgi: **a)** 2; 2; 2; 4; 4; 4; 4; 4 taciņas; **b)** 1; 2; 2; 2; 2; 3; 4; 5 taciņas?

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, skat. 24. att., kur ar punktiem attēlotas mājiņas, bet ar līnijām attēlotas taciņas un pie katra punkta pierakstīts no tā izejošo līniju skaits.

b) Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciņai ir divi gali, tad kopējam taciņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet pēc dotā iegūstam, ka ir $1+2+2+2+2+3+4+5=21$ taciņu gali. Tā kā 21 ir nepāra skaitlis, tad prasītais nav iespējams.



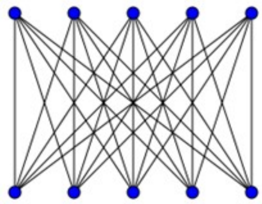
24. att.

2. Vai 2023 lampiņas ar vadiem var savienot savā starpā tā, lai katra no tām būtu savienota ar tieši 3 citām lampiņām?

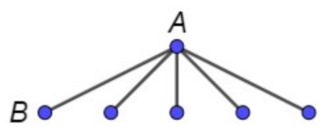
Atrisinājums. Tā kā no katras lampiņas iziet 3 vadi, tad vadu galu skaits ir $2023\cdot 3=6069$. Bet katram vadam ir 2 gali, tāpēc kopējais galu skaits nevar būt nepāra skaitlis. Tāpēc 2023 lampiņas ar vadiem nevar savienot savā starpā tā, lai katra no tām būtu savienota tieši ar 3 citām lampiņām.

3. Tirgū satikās dažas vecmāmiņas. Zināms, ka katra no vecmāmiņām pazīst tieši piecas citas no šīm vecmāmiņām (visas pazīšanās ir abpusējas). Starp jebkurām trīs no šīm vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas. Kāds ir mazākais skaits vecmāmiņu, kas varēja satikties tirgū?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais vecmāmiņu skaits ir 10, skat. 25. att., kurā ar punktiem apzīmētas vecmāmiņas, un divi punkti ir savienoti ar nogriezni tad un tikai tad, ja tiem atbilstošās vecmāmiņas viena otru pazīst. Dotajā piemērā vecmāmiņas sadalītas divās grupās pa piecām vecmāmiņām tā, ka katra pirmās grupas vecmāmiņa pazīst visas otrās grupas vecmāmiņas, bet nepazīst nevienu savas grupas vecmāmiņu. Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām vismaz divas atrodas vienā grupā, tad tās savā starpā nav pazīstamas un uzdevuma nosacījumi izpildās.



25. att.



26. att.

Pierādīsim, ka mazāks skaits vecmāmiņu tirgū satikties nevarēja. Apskatām vecmāmiņu *A* (skat. 26. att.). Uzdevumā dots, ka šī vecmāmiņa pazīst tieši 5 citas vecmāmiņas. Apskatām vecmāmiņu *B* (skat. 26. att.). Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas, tad vecmāmiņa *B* nevar būt pazīstama ne ar vienu citu vecmāmiņu, ko pazīst *A*, bet tādā gadījumā nepieciešamas vēl vismaz 4 citas vecmāmiņas, tas ir, kopā ir vismaz 10 vecmāmiņas.

2.8. Induktīvi spriedumi

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kurā secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai vērojumu laikā gūtiem rezultātiem. Šādā veidā iegūtos spriedumus sauc par induktīviem spriedumiem.
Domāšanas un spriešanas procesā tiek izteikti dažādi apgalvojumi. Tie var būt patiesi, aplami vai tādi, kuru patiesumu nav iespējams novērtēt.
Pieņemsim, ka kādam sportistam ir uzdevums aizlēkt tālumā 7 metrus. Ja viņš ir starptautiskas klases sporta meistars tāllēkšanā, tas viņam sevišķas grūtības nesagādās; ja turpretī viņš ar tāllēkšanu iepriekš nav nodarbojies, tad mēģinājums veikt uzdevumu uzreiz nevar beigties citādi kā ar neveiksmi. Lai izpildītu šo atsevišķo uzdevumu, sportists trenēsies un vispirms aizlēks tālumā 3 m, pēc tam 4 m, 5 m, 6 m, un tikai tad ķersies pie sākotnējā uzdevuma – aizlēkt 7 m tālu.
Līdzīga situācija bieži gadās arī matemātikā: lai atrisinātu kādu atsevišķu problēmu, tiek aplūkota problēmu virkne. Risinot citu pēc citas šīs virknes problēmas, galu galā izdodas saprast, kā risināt vispārīgo problēmu, un tā mēs nonākam pie interesējošās problēmas atrisinājuma.

Piemēri

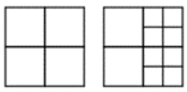
1. Atrast skaitļa $1^2+2^2+...+99^2$ pēdējo ciparu!

Atrisinājums. Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos un nosakām katras grupas skaitļu summas pēdējo ciparu šādā veidā:

- $10^2+20^2+...+90^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 0 un pavisam ir 9 šādi saskaitāmie.
- $1^2+11^2+21^2+...+91^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $1^2=1$ un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $1\cdot 10=10$.
- Līdzīgi $2^2+12^2+22^2+...+92^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $2^2=4$ un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie.
- Tāpat secinām, ka arī visas pārējās saskaitāmo grupas ir 10 tādu skaitļu summas, kur visu saskaitāmo pēdējie cipari ir vienādi un visas summas pēdējais cipars ir 0.

Ir 10 grupas, katrai no tām summas pēdējais cipars ir 0, tātad dotā skaitļa pēdējais cipars ir 0.

2. Ja kvadrātu var sadalīt n mazākos kvadrātos tā, ka ir ne vairāk kā divu dažādu izmēru kvadrāti, tad skaitli n sauksim par *jauku*. Piemēram, skaitļi 4 un 10 ir *jauki* (skat. 27. att.).

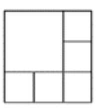


27. att.

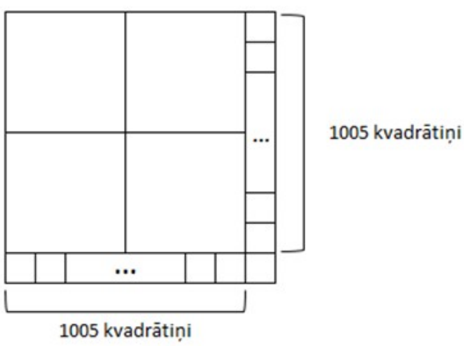
a) Pierādīt, ka skaitlis 6 ir *jauks*!
b) Pierādīt, ka skaitlis 2015 ir *jauks*!
c) Pierādīt, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks par 5, ir *jauks*!

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 28. att.

b) Skat., piemēram, 29. att. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām 1006 vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat. 29. att.). Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos mazākos kvadrātos.



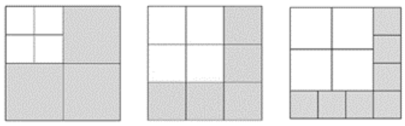
28. att.



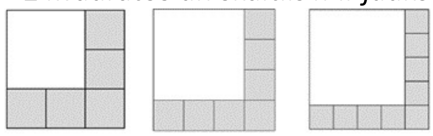
29. att.

c) Šķirojam divus gadījumus.

- Ja n ir nepāra skaitlis, tad to var izteikt formā $n=2k+5$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k+1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 30. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k+1$ mazus kvadrātus. Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos kvadrātos (skat., piemēram, 30. att. baltos kvadrātus). Tātad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k+5$ kvadrātos, līdz ar to skaitlis n ir *jauks*.
- Ja n ir pāra skaitlis, tad to var izteikt formā $n=2k+2$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k+1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no tiem (skat. 31. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k+1$ mazus kvadrātus. Tā kā atlikusī dotā kvadrāta daļa arī ir kvadrāts, tad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k+2$ kvadrātos un skaitlis n ir *jauks*.



30. att.



31. att.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*.

3. Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?

Atrisinājums. Parādīsim, ka 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Šajā summā ir ne vairāk kā piecas 13 centu pastmarkas. Aplūkosim, kāda summa atkarībā no izmantoto 13 centu pastmarku skaita būtu jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām.

13 centu pastmarku skaits	*Summa, kas apmaksāta ar 13 centu pastmarkām*	*Summa, kas jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām*	*Vai var apmaksāt ar 7 centu pastmarkām?*
0	0	71	nevar
1	13	58	nevar
2	26	45	nevar
3	39	32	nevar
4	52	19	nevar
5	65	6	nevar

Pierādīsim, ka visas summas, kas ir lielākas nekā 71 cents, ir iespējams samaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Ievērojam, ja varam apmaksāt n centus, tad, pievienojot klāt vienu 7 centu pastmarku, varēsim apmaksāt arī $n+7$ centus. Tātad mums jāparāda, ka var apmaksāt 72, 73, 74, 75, 76, 76 un 78 centus (skat. tabulā zemāk).

Summa	**Kā apmaksāt?**	**Kādas summas var apmaksāt ($n\in\mathbb{N}$)?**	**Kādas summas var apmaksāt?**
72	$1\cdot7+5\cdot13$	$72+7n$	79; 86; 93; ...
73	$3\cdot7+4\cdot13$	$73+7n$	80; 87; 94; ...
74	$5\cdot7+3\cdot13$	$74+7n$	81; 88; 95; ...
75	$7\cdot7+2\cdot13$	$75+7n$	82; 89; 96; ...
76	$9\cdot7+1\cdot13$	$76+7n$	83; 90; 97; ...
77	$11\cdot7$	$77+7n$	84; 91; 98; ...
78	$6\cdot13$	$78+7n$	85; 92; 99; ...

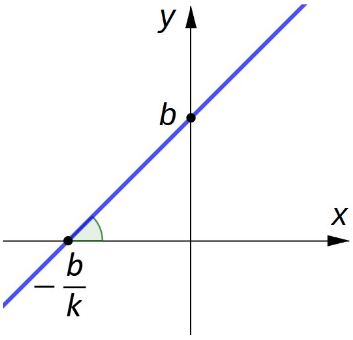
2.9. Lineāra funkcija

Par lineāru funkciju sauc funkciju, kuru var definēt ar formulu $y = kx + b$, kur x ir neatkarīgais mainīgais, bet k un b ir kaut kādi reāli skaitļi.
Lineāras funkcijas grafiks ir taisne.

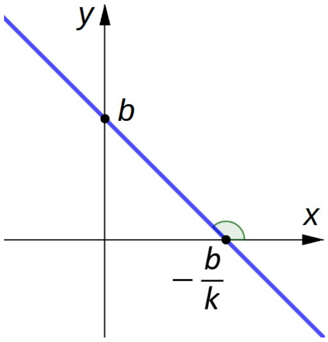
Koeficientu k sauc par taisnes virziena koeficientu. No koeficienta k ir atkarīgs lineārās funkcijas $y = kx + b$ grafika novietojums koordinātu plaknē:

- ja $k > 0$, tad funkcija ir augoša (skat. 32. att.);
- ja $k < 0$, tad funkcija ir dilstoša (skat. 33. att.);
- ja $k = 0$, tad taisne ir paralēla x asij (skat. 34. att.).

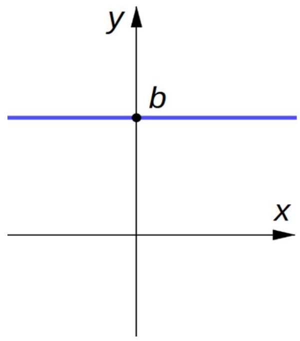
Lineāras funkcijas $y = kx + b$ grafiks krusto y asi punktā, kura koordinātas ir (0; b), bet x asi punktā, kura koordinātas ir $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$.



32. att.



33. att.

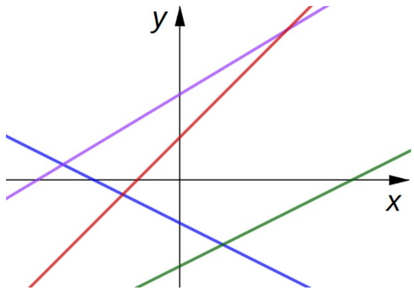


34. att.

Lai taisne $y = kx + b$ ietu caur punktu (m; n), jāizpildās vienādībai $n = k \cdot m + b$

Piemēri

1. Vai var gadīties, ka 35. att. dotās taisnes ir funkciju $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + d$ un $y = dx + a$ grafiki?



35. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. No vienas puses, *a, b, c, d* ir taišņu virziena koeficienti, tātad tieši vienam no tiem jābūt negatīvam, jo viena taisne (zilā) ir dilstoša. No otras puses, *a, b, c, d* ir taišņu krustpunktu ar y asi ordinātas vērtības, tātad tieši diviem no šiem skaitļiem jābūt negatīviem, jo divas taisnes (zilā un zaļā) krusto y asi punktos, kuru ordinātas vērtība ir negatīva. Iegūta pretruna, tātad attēlotie grafiki nevar būt doto funkciju grafiki.

2. Aplūkosim lineāras funkcijas $y = ax + b$, kur $2a + b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y = ax + b$ vērtību, ja argumenta vērtība $x = 2$:

$$y = 2a + b = 2020.$$

Esam ieguvuši, ka argumenta vērtībai 2 jebkuras dotās funkcijas vērtība būs 2020. Tātad punkts (2; 2020) ir kopīgs visu funkciju grafikiem.

2.10. Kvadrātfunkcija

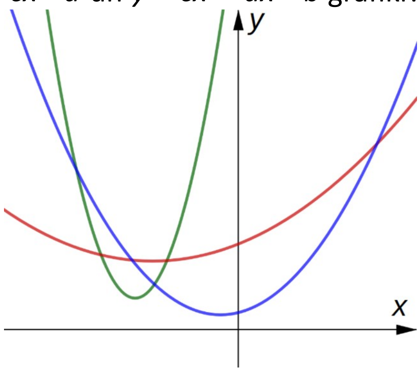
Par kvadrātfunkciju sauc funkciju, kuru var definēt ar formulu $y=ax^2+bx+c$, kur x ir neatkarīgais mainīgais, bet *a, b, c* – jebkuri reāli skaitļi, $a\neq 0$.
Kvadrātfunkcijas grafiku sauc par parabolu.

Kvadrātfunkcijas $y=ax^2+bx+c$ īpašības

- Parabolas zari vērsti uz augšu, ja $a>0$, zari vērsti uz leju, ja $a<0$.
- Parabolas virsotnes koordinātas ir $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$, kur $D=b^2-4ac$.
- Kvadrātfunkcijas grafiks krusto y asi punktā $(0;\ c)$.
- Parabolas novietojumu attiecībā pret x asi nosaka diskriminants:
  - ja $D>0$, tad parabola krusto x asi divos punktos;
  - ja $D<0$, tad parabola nekrusto x asi;
  - ja $D=0$, tad parabola pieskaras x asij.

Piemēri

1. Pieņemsim, ka 36. att. dotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki, tie nav doti mērogā. Vai tie var būt funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$ un $y=cx^2+ax+b$ grafiki?



36. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka zīmējumā redzami visi seši iespējamie parabolu krustpunkti, tātad citu krustpunktu nav, taču visu doto funkciju vērtības sakrīt, ja $x=1$. Tā kā dotie trīs grafiki neiet caur vienu punktu, tad tie nevar būt uzdevumā doto funkciju grafiki.

2. Apskata visas funkcijas $y=ax^2+x+b$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a+2b=2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums. Ievērojam:

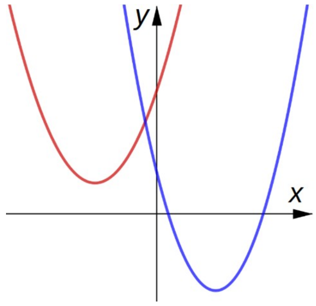
- ja $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, tad $y=a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}+b=\left(\frac{1}{2}a+b\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}=1010+\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- ja $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, tad $y=a\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}+b=\left(\frac{1}{2}a+b\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}=1010-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tātad punkti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

Piezīmes. 1. Var ievērot, ka apskatītie punkti pieder visām dotajām parabolām, jo izteiksmes $\frac{1}{2}a+b$ vērtība ir 1010 neatkarīgi no a un b vērtībām. Tad, ņemot $x^2=\frac{1}{2}$, funkcijas vērtība nebūs atkarīga no konkrētajām a un b vērtībām.

2. Kopīgos punktus $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ var iegūt arī no dotajām parabolām, paņemot divas patvaļīgas (piemēram, $a=0$, $b=1010$ un $a=2$, $b=1009$) un atrodot to krustpunktus (tas ir, atrisinot kvadrātvienādojumu). Pēc tam jāpamato, ka šie punkti pieder visām parabolām.

3. Vai var gadīties, ka 37. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$ un $y = bx^2 + cx + a$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



37. att.

Atrisinājums. Nē, nevar gadīties. Tā kā parabolu zari vērsti uz augšu, tad $a > 0$ un $b > 0$. Abi grafiki krusto y asi punktos, kuru ordinātas ir pozitīvas, tāpēc $a > 0$ un $c > 0$.

Tālāk risinājumu var turpināt trīs veidos.

1. veids. Apskatām abu parabolu virsotņu x koordinātas:

- funkcijai $y = ax^2 + bx + c$ virsotnes x koordināta ir $x_v = -\dfrac{b}{2a} < 0$, jo $a > 0$ un $b > 0$;
- funkcijai $y = bx^2 + cx + a$ virsotnes x koordināta ir $x_v = -\dfrac{c}{2b} < 0$, jo $b > 0$ un $c > 0$.

Iegūta pretruna, jo 37. att. zilajai parabolai (tai, kura krusto x asi) virsotnes koordināta $x_v > 0$.

2. veids. Ievērosim, ka zilajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes. Bet kvadrātvienādojumam, kam visi trīs koeficienti ir pozitīvi, nevar būt pozitīvas saknes (ja $A, B, C > 0$, tad $Ax^2 + Bx + C > 0$ visiem pozitīviem x).

3. veids. Ievērosim, ka zilajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes x_1 un x_2. Pieņemsim, ka tās vienādojums ir $y = ax^2 + bx + c$ (otrs gadījums līdzīgs). Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0$. Iegūta pretruna, jo divu pozitīvu skaitļu summa nevar būt negatīva.

2.11. Rekurentas virknes

Viens no virkņu uzdošanas veidiem ir definēt to rekurenti, tas ir, norādot virknes pirmo locekli vai dažus pirmos locekļus (sākuma nosacījumus) un formulu, ar kuras palīdzību jebkuru virknes locekli var iegūt no iepriekšējā vai dažiem iepriekšējiem virknes locekļiem. Vienkāršākie šādu rekurentu virkņu piemēri ir aritmētiskā progresija ($a_{n+1}=a_n+d$) un ģeometriskā progresija ($b_{n+1}=b_n\cdot q$).

Cits tipisks rekurentas virknes piemērs ir Fibonači skaitļu virkne F_n, kuru definē ar sakarībām $F_1=F_2=1$ un $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$, tas ir, virknes pirmie divi locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir iegūstams kā divu iepriekšējo locekļu summa. Aprēķinot nākamos virknes locekļus, iegūstam virkni 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... .

No otras puses, lai aprēķinātu šādā veidā definētas virknes, teiksim, 2018. locekli, būtu vispirms jāaprēķina visi iepriekšējie virknes locekļi. Tādēļ reizēm ir izdevīgi rekurenti definētai virknei atrast vispārīgā locekļa formulu, kas būtu atkarīga tikai no locekļa kārtas numura. Reizēm tas ir vienkārši (piemēram, ja virkne ir rekurenti definēta ar $a_1=2$ un $a_n=2\,a_{n-1}$, tad virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n=2^n$), reizēm – kā Fibonači virknes gadījumā – tas ir grūtāk, taču iespējami.

Ir uzdevumi, kurus iespējams atrisināt, ja izdodas parādīt, ka uzdevuma atbilde ir rekurentas virknes loceklis, turklāt šai virknei var atrast gan rekurences sakarību, gan sākuma nosacījumus. Bieži vien tie ir uzdevumi, kuros tiek prasīts noteikt kādu objektu skaitu, kas atkarīgi no parametra n, turklāt:

- ir iespējams parādīt, kā šos objektus var iegūt no tāda paša veida objektiem, taču ar mazāku parametra n vērtību;
- ja parametra n vērtība ir maza (piemēram, $n=0$, $n=1$ vai $n=2$), tad ir viegli saskatīt vajadzīgā veida objektus.

Piemērs

No mājām līdz ieejai dzīvoklī ir 12 pakāpieni. Ar vienu soli var pārkāpt 1; 2 vai 3 pakāpienus. Cik dienas var kāpt atšķirīgos veidos? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto soļu secība, piemēram, kāpt 2; 3; 1 pakāpienus un kāpt 1; 2; 3 pakāpienus ir divi atšķirīgi veidi.)

Atrisinājums. Ar a_n apzīmējam, cik dažādos veidos var nokļūt uz n-tā pakāpiena. Iespējami trīs atšķirīgi gadījumi:

- uz n-tā pakāpiena ar vienu soli var nokļūt no $(n-1)$-ā pakāpiena, uz kura var nokļūt a_{n-1} veidos;
- uz n-tā pakāpiena ar vienu soli var nokļūt no $(n-2)$-ā pakāpiena, uz kura var nokļūt a_{n-2} veidos;
- uz n-tā pakāpiena ar vienu soli var nokļūt no $(n-3)$-ā pakāpiena, uz kura var nokļūt a_{n-3} veidos.

Citu variantu, kā ar vienu soli nokļūt uz n-tā pakāpiena, nav. Tātad uz n-tā pakāpiena pavisam var nokļūt $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$ atšķirīgos veidos. Izmantojot šo sakarību un sākuma vērtības $a_1=1$, $a_2=2$ ($1+1=2$) un $a_3=4$ ($1+1+1=1+2=2+1=3$), aprēķinām a_{12}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927

Līdz ar to atšķirīgos veidos var kāpt 927 dienas.

2.12. Skaitļu dalāmība

Ja *a* un *b* ir veseli skaitļi, tad ne vienmēr, dalot *a* ar *b*, dalījumā iegūst veselu skaitli. Ja dalījums ir vesels skaitlis, tad saka, ka *a* dalās ar *b*, pretējā gadījumā saka, ka *a* nedalās ar *b*.
Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur *a, b, k* – veseli skaitļi, tad saka, ka *a* dalās ar *b*. Pretējā gadījumā saka, ka *a* nedalās ar *b*.
Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.
Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad darbojamies tikai veselo vai naturālo skaitļu kopā.

Dalāmības pazīmes
Noskaidrot, vai viens vesels skaitlis dalās ar otru, tikai ar definīcijas palīdzību, tas ir, izdalot skaitļus, bieži vien ir neparocīgi un laikietilpīgi. Šo uzdevumu atvieglo skaitļu dalāmības pazīmes. Tālāk dotas biežāk lietotās dalāmības pazīmes.

Dalāmības pazīme	**Piemēri**
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	201**6** dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra.
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2016 dalās ar 3, jo $2+0+1+6=9$ dalās ar 3.
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**16** dalās ar 4, jo 16 dalās ar 4.
Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5.
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2016 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3.
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8. 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8.
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo $2+0+1+6=9$ dalās ar 9.
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0.
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	$\underline{1}0\underline{8}6\underline{4}7$ dalās ar 11, jo $(1+8+4)-(0+6+7)=0$, kas dalās ar 11. $\underline{9}4\underline{8}3\underline{1}$ dalās ar 11, jo $(9+8+1)-(4+3)=11$, kas dalās ar 11.

Citas dalāmības pazīmes:
- skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo *n* ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n;
- skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo *n* ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n;
- skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo *n* ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi (skaitļi, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1) un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Teorēma. Ja *b* un *c* ir savstarpēji pirmskaitļi, *a* dalās ar *b* un *a* dalās ar *c*, tad *a* dalās ar *bc*.

Ir ļoti svarīgi, lai reizinātāji būtu savstarpēji pirmskaitļi. Piemēram, ja skaitlis dalās ar 2 un 6, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar $2 \cdot 6 = 12$, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12.

Piemēri

1. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas esoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N=12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.). Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar: **a)** 8; **b)** 18?

   Atrisinājums. a) Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. Pārbaudot trīs ciparu veidotos skaitļus iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dalās ar 8, ir 123456.

   b) Lai skaitlis dalītos ar 18, tam vienlaicīgi jādalās ar 2 un 9. Pirmais skaitlis, kas dalās ar 9 (pārbaudām pēc ciparu summas), ir 12345678. Tā kā šis ir arī pāra skaitlis, tad tas dalās ar 2 un līdz ar to tas dalās arī ar 18, jo skaitļi 2 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 12345678.

2. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka, uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99.

   Atrisinājums. Ja skaitlis dalās ar 99, tad tas vienlaicīgi dalās gan ar 9, gan 11. Skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9. Uzrakstot ciparus pretējā secībā, ciparu summa nemainīsies un arī iegūtais skaitlis dalīsies ar 9. Skaitlis dalās ar 11 tad un tikai tad, ja tā pāra un nepāra pozīcijās esošo ciparu summu starpība dalās ar 11. Pārrakstot skaitļa ciparus pretējā secībā, minētā īpašība saglabājas – pāra un nepāra pozīcijās esošo ciparu summu starpība dalīsies ar 11 un, tātad arī šis skaitlis dalīsies ar 11. Tā kā skaitlis vienlaicīgi dalās gan ar 9, gan 11 un skaitļi 9 un 11 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad iegūtais skaitlis dalās arī ar 99.

3. Kādi cipari var būt burtu a un b vietā, lai piecciparu skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36?

   Atrisinājums. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36, tam jādalās gan ar 9, gan ar 4. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 4, tā pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 4. Tātad pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jābūt vai nu 32, vai 36, līdz ar to $b=2$ vai $b=6$. Lai dotais skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9.

   - Ja $b=2$, tad skaitļa ciparu summa ir $a+5+4+3+2=14+a$. Der $a=4$, jo $14+4=18$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.
   - Ja $b=6$, tad skaitļa ciparu summa ir $a+5+4+3+6=18+a$. Vērtība $a=0$ neder, jo a ir skaitļa pirmais cipars. Der $a=9$, jo $18+9=27$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.

   Tātad esam ieguvuši, ka $a=4$, $b=2$ vai $a=9$, $b=6$ ir vienīgās iespējamās vērtības.

4. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Vai var būt, ka vienā rindā ierakstīto skaitļu summa ir 2015, vienā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir 2016, bet pārējās rindās un kolonnās visas ierakstīto skaitļu summas dalās ar 3?

   Atrisinājums. Nē, tā nevar būt. Apzīmēsim pārējās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas attiecīgi ar *r, R, k, K*, bet visu tabulā ierakstīto skaitļu summu ar S. Tad visu tabulā ierakstīto skaitļu summa, skaitot pa rindām, ir $S=2015+r+R$, bet, skaitot pa kolonnām, tā ir $S=2016+k+K$. Tātad $2015+r+R=2016+k+K$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 3 (jo katrs saskaitāmais dalās ar 3), tad ar 3 ir jādalās ar kreisajai pusei, bet tā nav, jo r un R dalās ar 3, bet 2015 – nedalās.

2.13. Vienādojumi veselos skaitļos

Dažreiz, lai pamatotu, ka nav iespējams atrast tādus skaitļus, kam izpildās uzdevumā prasītās īpašības, ir izdevīgi izmantot dalāmības īpašības.

Dalāmības īpašības (Visi tālāk minētie skaitļi ir veseli.)

- Ja katrs no vairākiem saskaitāmajiem dalās ar *n*, tad to visu summa dalās ar *n*.
  Piemēram, $123456+7890+20152016$ dalās ar 2, jo katrs saskaitāmais dalās ar 2.
- Ja divi skaitļi dalās ar *n*, tad arī to starpība dalās ar *n*.
  Piemēram, tā kā 201420152016 un 2142020 dalās ar 4, tad ar 4 dalās arī to starpība.
- Ja kaut viens no vairākiem naturāliem skaitļiem dalās ar *n*, tad to visu reizinājums dalās ar *n*.
  Piemēram, $2014\cdot 2015\cdot 2016$ dalās ar 5, jo 2015 dalās ar 5.
- Ja vairāku skaitļu summa un visi skaitļi, izņemot vienu, dalās ar *n*, tad arī šis pēdējais skaitlis dalās ar *n*.
  Piemēram, ja $x+40+50=120$, tad, tā kā 40, 50 un 120 dalās ar 10, arī *x* dalās ar 10.

Uzdevumos izmantosim ideju:

ja vienādības labā puse dalās ar *n*, tad arī vienādības kreisajai pusei jādalās ar *n* (un otrādi).

Atceries! Naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...; veselie skaitļi: ...,– 2, – 1, 0, 1, 2, 3, ...

Piemēri

1. Vai var atrast tādus veselus skaitļus *x* un *y*, ka $12\cdot x-8\cdot y=2$?
Atrisinājums. Nē, nevar atrast. Gan 12, gan 8 dalās ar 4, tātad arī $12\cdot x$ un $8\cdot y$ dalās ar 4, kā arī to starpība dalās ar 4. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar 4, tad ar 4 ir jādalās arī vienādības labajai pusei, taču skaitlis 2 ar 4 nedalās.

2. Kādus naturālus skaitļus var ievietot *x* un *y* vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $5\cdot x+2\cdot y=30$?
Atrisinājums. Doto vienādojumu pārveidojam par $2\cdot y=30-5\cdot x$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 5, tad arī vienādojuma kreisajai pusei jādalās ar 5, tas ir, $2\cdot y$ jādalās ar 5. Skaitlis 2 ar 5 nedalās, tātad *y* jādalās ar 5. Aplūkosim iespējamās *y* vērtības:

- ja $y=5$, tad $2\cdot 5=30-5\cdot x$ jeb $x=4$;
- ja $y=10$, tad $2\cdot 10=30-5\cdot x$ jeb $x=2$;
- ja $y\geqslant 15$, tad $x\leqslant 0$ un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Līdz ar to vai nu $x=4$ un $y=5$, vai $x=2$ un $y=10$.

3. Pa sienu rāpo mušas un zirnekļi. Cik mušas un cik zirnekļi rāpo pa šo sienu, ja pavisam kopā ir 80 kājas?
Atrisinājums. Mušai ir sešas kājas, bet zirneklim ir astoņas kājas. Mušu skaitu uz sienas apzīmēsim ar *m*, bet zirnekļu skaitu – ar *z*. Tad no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $6\cdot m+8\cdot z=80$ jeb $3\cdot m+4\cdot z=40$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 4, tad arī vienādojuma kreisai pusei jādalās ar 4, bet tas nozīmē, ka *m* dalās ar 4. Tā kā uzdevumā teikts, ka pa sienu rāpo gan mušas, gan zirnekļi, tad $m>0$, un tā kā kopā ir ne vairāk kā 80 kājas, tad $m<14$. Tātad var pieņemt trīs dažādas vērtības:

- ja $m=4$, tad $6\cdot 4+8\cdot z=80$, no kurienes iegūst, ka $z=7$;
- ja $m=8$, tad $6\cdot 8+8\cdot z=80$, no kurienes iegūst, ka $z=4$;
- ja $m=12$, tad $6\cdot 12+8\cdot z=80$, no kurienes iegūst, ka $z=1$.

Līdz ar to pa sienu rāpo vai nu 7 zirnekļi un 4 mušas, vai 4 zirnekļi un 8 mušas, vai 1 zirneklis un 12 mušas.
Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izteiksmē $6\cdot m+8\cdot z=80$ ievietojot visas *z* vērtības no 1 līdz 10 (ja *z* ir lielāks nekā 10, tad sanāktu, ka kopā ir vairāk nekā 80 kājas) un pārbaudot, kuros gadījumos *m* ir naturāls skaitlis.

2.14. Skaitļa pieraksts

Risinot uzdevumus jāzina atšķirība starp skaitli un ciparu, jāzina, kas ir naturāls skaitlis, jāprot salīdzināt divus naturālus skaitļus, novērtēt izteiksmes vērtību.

Ievēro! Ja skaitlī nav zināmi kādi cipari, tos var apzīmēt ar burtiem, taču, lai nerastos pārpratumi, tādā gadījumā virs skaitļa tiek vilkta horizontāla svītra, piemēram, trīsciparu skaitlis $\overline{xyz}$, četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$.

Ievēro! Divciparu skaitli varam izteikt kā $\overline{ab}=10\,a+b$, trīsciparu skaitli – kā $\overline{abc}=100\,a+10\,b+c$ utt.

Piemēri

1. Atrodi vislielāko piecciparu skaitli, kuram ceturtais cipars (desmitu cipars) ir lielāks nekā piektais cipars (vienu cipars), trešais cipars lielāks nekā ceturtā un piektā cipara summa, otrais cipars ir lielāks nekā trešā, ceturtā un piektā cipara summa, bet pirmais cipars ir lielāks nekā visu pārējo ciparu summa!

Atrisinājums. Meklētais piecciparu skaitlis ir 95210. Pamatosim, ka vēl lielāku skaitli nevar iegūt. Tā kā jāmeklē vislielākais skaitlis, tad pirmajam ciparam jābūt iespējami lielam, tas ir, 9. Tātad pārējo četru ciparu summa nedrīkst pārsniegt 8. Visiem cipariem jābūt dažādiem, jo katrs cipars ir lielāks nekā tam sekojošo ciparu summa. Tūkstošu cipars nevar būt lielāks kā 5, jo jau $8-6=2$, ko nevar izteikt kā trīs dažādu ciparu summu. Tātad, lai atrastu lielāko piecciparu skaitli, tūkstošu ciparam jābūt 5 un tas nozīmē, ka simtu, desmitu un vienu cipars attiecīgi var būt tikai 2, 1 un 0. Līdz ar to lielākais piecciparu skaitlis, kam izpildās prasītās īpašības, ir 95210.

2. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa iegūtais skaitlis noteikti dalās ar 23?

Atrisinājums. Jā, noteikti dalās. Apzīmējam sākotnējo skaitli ar $\overline{abc}$. Skaitlim $2\cdot\overline{abc}$ pierakstīt galā $\overline{abc}$ ir tas pats, kas skaitli $2\cdot\overline{abc}$ reizināt ar 1000 un tad tam pieskaitīt $\overline{abc}$. Tātad iegūstam skaitli $2\cdot\overline{abc}\cdot 1000+\overline{abc}=2001\cdot\overline{abc}$. Tā kā reizinātājs 2001 dalās ar 23 ($2001:23=87$), tātad arī iegūtais skaitlis $2001\cdot\overline{abc}$ noteikti dalās ar 23.

3. Piecciparu skaitļa, kas dalās ar 13, pirmais cipars ir vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto. Kāds var būt šī skaitļa trešais cipars?

Atrisinājums. Doto piecciparu skaitli varam uzrakstīt kā $\overline{abcab}$. Pārveidojam šo skaitli

$$\overline{abcab}=\overline{ab}\cdot 1000+c\cdot 100+\overline{ab}=1001\cdot\overline{ab}+100\,c.$$

Tā kā 1001 dalās ar 13 ($1001:13=77$), tad, lai viss skaitlis dalītos ar 13, arī saskaitāmajam $100\,c$ jādalās ar 13. Tā kā 100 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad c jādalās ar 13, tas iespējams tikai tad, kad $c=0$.

4. Četrciparu skaitlim pārlika ciparus citā secībā. Pierādi, ka sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9.

Atrisinājums. Apzīmējam četrciparu skaitli ar $\overline{abcd}=1000\,a+100\,b+10\,c+d$. Vienādības labajā pusē sadalām saskaitāmos $\overline{abcd}=(999\,a+99\,b+9\,c)+(a+b+c+d)$. Uzrakstām citu četrciparu skaitli, kas sastāv no šiem pašiem cipariem un līdzīgā veidā sadalām saskaitāmajos, kur viens no saskaitāmajiem ir visu četru ciparu summa $(a+b+c+d)$. Aprēķinot abu šo skaitļu starpību, ievērojam, ka saskaitāmie $(a+b+c+d)$ saīsinās. Katrs no atlikušajiem saskaitāmajiem dalās 9, jo katrs saskaitāmais satur kādu no reizinātājiem 9; 99; 999 un, ja viens no reizinātājiem dalās 9, tad arī reizinājums dalās ar 9. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 9, tad arī aprēķinātā starpība dalās ar 9.

2.15. Dirihlē princips

Šī uzdevumu risināšanas metode jeb domāšanas paņēmiens tiek izmantots dažādās matemātikas apakšnozarēs, piemēram, skaitļu teorijā, ģeometrijā un kombinatorikā dažādu grūtības pakāpju uzdevumu atrisināšanai.

Tālāk doti vairāki **Dirihlē principa** varianti.

1. Ja vairāk nekā n objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 objekti.
2. Ja vairāk nekā $m \cdot n$ objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $(m+1)$ objekts.

Piezīme. Diezgan bieži Dirihlē principu formulē tā: „Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens trusis – tātad vismaz 2 truši."

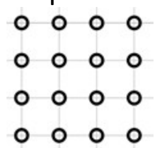
Lietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs būri un kas – truši. Katrā uzdevumā truši un būri var būt dažādi lielumi, piemēram, truši var būt skaitļi, cilvēki utt., būri – īpašības, pēc kurām truši sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram trusim piemīt tieši viena no tām (katrs trusis var nonākt tikai vienā būrī un ne viens trusis nedrīkst palikt ārpus būriem).

Ja Dirihlē princips tiek lietots skaitļu teorijas uzdevumu atrisināšanai, tad bieži vien tiek izmantota arī nākamā teorēma par starpības dalīšanos.
Teorēma par starpības dalīšanos. Dots, ka *a, b* un n – veseli skaitļi, turklāt $n > 0$. Starpība $(a - b)$ dalās ar n tad un tikai tad, ja a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar n.

Uzdevumu risinājumā var gan atsaukties uz Dirihlē principu, gan arī atrisinājumu veidot kā pierādījumu no pretējā. Abi šādi risinājumi ir pareizi (skat. 1. piemēru).

Piemēri

1. Pulciņā ir 13 skolēni. Pierādīt, ka no tiem var atrast tādus divus, kas dzimuši vienā un tajā pašā mēnesī!
   1. atrisinājums. Ja katrā mēnesī būtu dzimis ne vairāk kā viens skolēns, tad visos mēnešos kopā būtu dzimuši ne vairāk kā 12 skolēnu, bet pulciņā ir 13 skolēni. Tātad noteikti ir tāds mēnesis, kurā dzimuši vismaz divi no šī pulciņa skolēniem.
   2. atrisinājums. Šajā uzdevumā 13 skolēni ir jāsadala 12 grupās (mēnešos). Pēc Dirihlē principa noteikti būs mēnesis, kurā ir dzimuši vismaz divi skolēni.
2. Pierādīt, ka no jebkuriem astoņiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus, kuru starpība dalās ar 7.
   Atrisinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 7, var dot septiņus dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Dotos astoņus skaitļus uzskatīsim par „trušiem", savukārt vienā „būrī" ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 7, tātad ir 7 „būri". Pēc Dirihlē principa vismaz vienā „būrī" nonāks vismaz divi „truši" jeb vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Šo skaitļu starpība dalās ar 7 (izmantota teorēma par starpības dalīšanos).
3. Rūtiņu virsotnēs atzīmēti 16 balti punkti (skat. 38. att.). Vai tieši septiņus punktus var nokrāsot melnus tā, lai nekādi trīs vienā krāsā nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?



38. att.

   Atrisinājums. Nē, to nevar izdarīt. Ja melnā krāsā nokrāsoti tieši septiņi punkti, tad paliek deviņi balti punkti. Tā kā visi punkti izvietoti četrās rindās, tad pēc Dirihlē principa kādā no šīm rindām būs vismaz trīs balti punkti, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

2.16. Invariantu metode

Invariants – tas, kas paliek nemainīgs (kādā norisē, kādos apstākļos). Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem, un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **NAV** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Izmantot **invariantu metodi** nozīmē atrast piemērotu īpašību, kura:

1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;
2) ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;
3) nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

Piemēri

1. Sākumā bija 10 papīra gabali. Dažus no tiem sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Visus iegūtos gabalus sajauca un dažus no tiem atkal sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Vai, tādā veidā turpinot, var iegūt tieši 999 papīra gabalus?
Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā bija doti 10 papīra gabali – *pāra skaitlis*. Ja papīra gabalu sagriež:
- 5 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- 7 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 6 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais papīra gabalu skaits vienmēr *būs pāra skaitlis*. Tā kā 999 ir *nepāra skaitlis*, tad tieši 999 papīra gabalus iegūt nevarēs.

2. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 18. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 6, vai atņemt 12. Vai, vairākas reizes izdarot šādus gājienus, var iegūt skaitli 2?
Atrisinājums. Sākumā dotais skaitlis *dalās ar 3*. Gan 6, gan 12 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita, vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas *dalās ar 3*, jo $3k \pm 3m = 3 \cdot (k \pm m)$. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas *dalās ar 3*, bet beigās iegūstamais skaitlis 2 *ar 3 nedalās*. Tātad to nevar iegūt ar norādītajām darbībām.

3. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 10. Vienā gājienā var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?
Atrisinājums. Sākumā doto skaitļu summa ir *nepāra skaitlis*: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Katrā gājienā, pieskaitot pa vieniniekam diviem skaitļiem, visu skaitļu summa palielinās par 2 (par *pāra skaitli*). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst *nepāra skaitli*. Tātad visu skaitļu summa pēc katra gājiena paliek *nepāra skaitlis*.
Beigās prasīts iegūt desmit vienādus skaitļus, bet desmit vienādu skaitļu summa $10 \cdot x$ ir *pāra skaitlis*. Tātad nevar panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi.

4. Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākamais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?
Atrisinājums. Pāra skaitļus apzīmēsim ar *p*, bet nepāra skaitļus – ar *n*. Ievērojam, $n+n=p$; $n+p=n$; $p+n=n$; $p+p=p$. Tā kā virknes locekļus nosaka divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars, tad tā veidojas šādi:

n; p; n; n; p; n; n; p; n; n; p; n; ... .

Šajā virknē periodiski atkārtojas grupa (*n; p; n*). Virknē nekur blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad šajā virknē nekur blakus neatradīsies skaitļi 2 un 4.

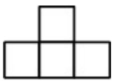
2.17. Invariantu metode – krāsošana

Invariantu metodi var izmantot arī uzdevumos par figūru sagriešanu vai salikšanu. Šādos gadījumos bieži tiek izmantota iekrāsošana.
Pats galvenais šāda tipa uzdevumos ir atrast tādu iekrāsošanas veidu, lai rastos pretruna – iekrāsoto rūtiņu skaits lielajā figūrā atšķirtos no kopējā iekrāsoto rūtiņu skaita mazajās figūrās.

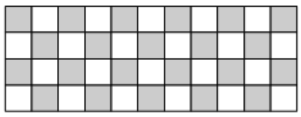
Rūtiņas var iekrāsot dažādi. Visbiežāk tiek lietota iekrāsošana kā šaha galdiņam, taču rūtiņas pēc nepieciešamības var iekrāsot arī, piemēram, joslās, diagonālēs vai vispār atrast kādu citu iekrāsošanas veidu. Figūras var iekrāsot gan divās, gan vairāk nekā divās krāsās.

Piemēri

1. Vai taisnstūri ar izmēriem 4×11 rūtiņas var noklāt ar 39. att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.



39. att.

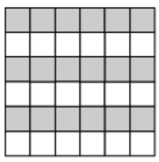


40. att.

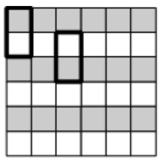
41. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Taisnstūrī kopā ir 44 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 11 figūrām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā (skat. 40. att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 22 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūra, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 41. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 11 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.

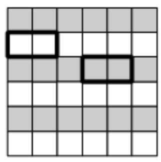
2. Vai kvadrātu ar 6×6 rūtiņas var pārklāt ar 18 domino kauliņiem tā, lai 13 kauliņi atrastos horizontāli, bet 5 – vertikāli? Katrs kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas, kauliņi nedrīkst pārklāties.
Atrisinājums. Iekrāsosim doto kvadrātu joslās (skat. 42. att.). Tad kvadrātā ir 18 melnas un 18 baltas rūtiņas.



42. att.



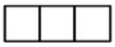
43. att.

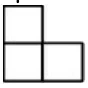


44. att.

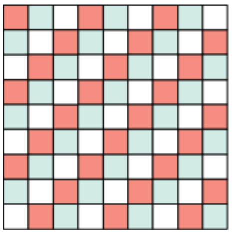
Vispirms izvietosim 5 vertikālos kauliņus. Lai kur katru no tiem novietotu, vienmēr tiks noklātas divas blakus rindu rūtiņas, tātad viena melna, viena balta (skat. 43. att.). Pēc piecu vertikālo kauliņu novietošanas būs noklātas 5 melnas un 5 baltas rūtiņas. Nenoklātas paliek 13 melnas un 13 baltas rūtiņas. Ar vienu horizontālu kauliņu var noklāt vai nu 2 baltas, vai 2 melnas rūtiņas, tas ir, pāra skaita melnas vai pāra skaita baltas (skat. 44. att.). Tātad ar 13 horizontālajiem kauliņiem var noklāt tikai pāra skaita melnas un pāra skaita baltas rūtiņas. Iegūta pretruna, jo pēc vertikālo kauliņu novietošanas vēl ir jānoklāj nepāra skaits melnās un nepāra skaits baltās rūtiņas.

3. Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var noklāt ar 26 figūrām, kādas dotas 45. att., un vienu 46. att. doto figūru? Kvadrātam jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

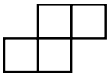

45. att.

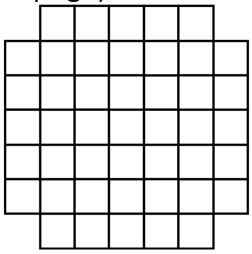

46. att.

Atrisinājums. Nē, prasīto nevar izdarīt. Izkrāsosim kvadrātu trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. 47. att.) tā, lai novietotā 46. att. figūra saturētu tieši divas vienas krāsas rūtiņas. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tā satur divas zilas un vienu sarkanu rūtiņu. Tādā gadījumā nenoklātas paliek 25 zilas, 26 sarkanas un 27 baltas rūtiņas, jo kvadrātā katras krāsas rūtiņu skaits ir 27. Katra 45. att. figūra noklāj vienu sarkanu, vienu zilu un vienu baltu rūtiņu. Tā kā nenoklātajā daļā dažādo krāsu rūtiņu skaits nav vienāds, tad ar 45. att. figūrām to noklāt nav iespējams.

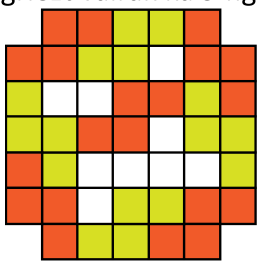

47. att.

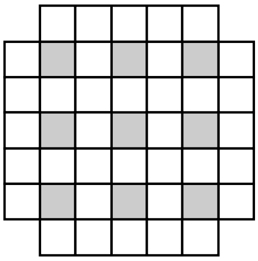
4. Kādu lielāko skaitu 48. att. doto figūru var izgriezt no 49. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 48. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.


48. att.


49. att.

Atrisinājums. Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9, skat. 50. att.
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim 49. att. figūru kā parādīts 51. att. Lai kā novietotu 48. att. figūru, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tā kā ir tieši deviņas iekrāsotas rūtiņas, tad nevar izgriezt vairāk kā 9 figūras.


50. att.


51. att.

3. UZDEVUMI PĒC ATRISINĀJUMA STRUKTŪRAS

Tālāk apskatīsim dažādus uzdevumus no katras uzdevumu grupas. Uzdevumi ir sakārtoti pēc grūtības pakāpes, sākot ar vieglākiem uzdevumiem.

Uzdevumu grupa “Kāds var būt...?”

1. Zināms, ka x un y ir dažādi cipari. Kādus ciparus var ievietot x un y vietā, lai skaitlis $\overline{4x7yx3y31x}$ dalītos ar 45?
2. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 52. att.). Kāds skaitlis var būt ierakstīts rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi?

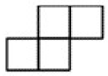
	24	
		?
13		

52. att.

3. Cik ir tādu naturālu skaitļu n, kuriem skaitlim n^2 ir tikpat ciparu, cik skaitlim n^3?
4. Trijstūra divu malu garumi ir 7 cm un 13 cm. Kāds var būt trešās malas garums centimetros, ja trijstūra perimetra vērtība ir pirmskaitlis?
5. Kādus pirmskaitļus var izteikt formā
$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|,$$
kur n ir kāds vesels skaitlis?
6. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodi visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība!
7. Māris iedomājās naturālu skaitli n. Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n, iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Uzdevumu grupa “Kāds ir lielākais...?”

1. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?
2. Kādu lielāko skaitu karaļu var uzlikt uz šaha galdiņa tā, lai neviens no karaļiem neapdraudētu nevienu citu karali?
3. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?
4. Dotas deviņas kārtis ar cipariem no 1 līdz 9, uz katras kārts uzrakstīts atšķirīgs cipars. Kāds mazākais skaits kāršu jāizvelk (nezinot to vērtības), lai no tām noteikti varētu izveidot divciparu skaitli, kurš dalās ar 7?
5. Kādu lielāko skaitu 53. att. doto figūru var izgriezt no rūtiņu kvadrāta $n\times n$, kuram izgrieztas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n=5$; **b)** ja $n=6$. Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 53. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



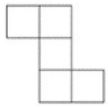
53. att.

6. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:
   - nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā;
   - neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.

   Kāda ir mazākā n vērtība?
7. Kāds mazākais skaits rūtiņu jāaizkrāso taisnstūrī ar izmēriem 8×8 rūtiņas, lai nevarētu atrast nevienu taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas (kurš var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli), kuram visas rūtiņas ir neaizkrāsotas?

Uzdevumu grupa “Vai iespējams...?”

1. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet: **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?
2. Vai eksistē tādi divi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un $A+B$ ciparu summas ir vienādas?
3. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×10 rūtiņas var izgriezt 10 figūras, kādas redzamas 54. att.? Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.

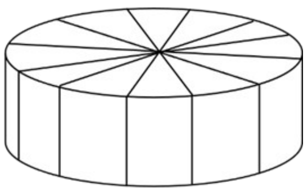


54. att.

4. Dagnis savā telefonā no 10 klases biedriem ir saņēmis 54 jaunas ziņas, no katra klases biedra vismaz vienu ziņu. Vai var gadīties, ka nav tādu divu klasesbiedru, kas atsūtījuši vienādu ziņu skaitu?
5. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt: **a)** 2022; **b)** 2025?
6. Naturālu skaitli atļauts reizināt ar 2, kā arī izsvītrot no tā pieraksta ciparus 0; 3; 6; 9 (varbūt tikai kādu no tiem). Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, no skaitļa 17 var iegūt: **a)** skaitli 1; **b)** skaitli 15?
7. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{3}$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt uz tāfeles skaitļus $\frac{b^2}{a}$ un $\frac{a^2}{b}$. Vai, izdarot vairākus šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti skaitļi $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$?

Uzdevumu grupa “Vai noteikti...?”

1. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?
2. Jānim kabatā ir 14 centi. Zināms, ka kabatā ir 5 monētas. Vai vienmēr ir iespējams šīs kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem?
3. Vai visi naturāli skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 27, arī paši dalās ar 27?
4. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10 (kaut kādā secībā un katrs tieši vienu reizi). Pirmais no kreisās puses uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Vai noteikti šajā rindā var atrast tādu skaitli, kam kaimiņš pa kreisi ir mazāks nekā tā kaimiņš pa labi?
5. Trijstūra perimetrs ir 18 cm. Vai noteikti ir tāda trijstūra mala, kuras garums nepārsniedz 6 cm?
6. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas izsvītro pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi (katrā gājienā var izsvītrot jebkuru no palikušajiem skaitļiem). Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais spēlētājs uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Vai otrais spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?
7. Torte sagriezta 12 gabaliņos (skat. 55. att.). Brālītis un Karlsons pēc kārtas izdara gājienus, Brālītis sāk pirmais. Vienā gājienā var apēst vai nu vienu tortes gabaliņu, vai divus blakus esošus gabaliņus (blakus esoši gabaliņi ir gabaliņi, kam ir kopīga mala). Uzvar tas, kurš apēd pēdējo gabaliņu. Vai Karlsons, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?



55. att.

3.1. Uzdevumu grupas “Kāds var būt...?” atrisinājumi

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

„Kāds var būt...?”; „Cik...?”
Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:
1) jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības, kam prasības izpildās;
2) **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

Risinot šāda veida uzdevumus, raksturīga kļūda ir nepamatot, ka citu iespēju nav, tas ir, tiek atrastas tikai derīgās vērtības, bet nav pamatots, ka citu vērtību nav.

1. Zināms, ka x un y ir dažādi cipari. Kādus ciparus var ievietot x un y vietā, lai skaitlis $\overline{4x7yx3y31x}$ dalītos ar 45?

Atrisinājums. Tā kā $45 = 5 \cdot 9$ un reizinātāji ir savstarpēji pirmskaitļi, tad dotajam skaitlim ir jādalās gan ar 5, gan ar 9. Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Lai skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam ir jābūt vai nu 0, vai 5. Apskatām abus gadījumus atkarībā no skaitļa pēdējā cipara.

- Ja $x = 0$, tad skaitļa ciparu summa ir $4+0+7+y+0+3+y+3+1+0=18+y+y$. Tā kā y ir cipars, kas atšķiras no x, tad mazākā summas $18+y+y$ vērtība ir $18+1+1=20$, bet lielākā summas $18+y+y$ vērtība ir $18+9+9=36$. Tā kā $18+y+y$ ir jādalās ar 9, tad derīgās vērtības ir 27 un 36. Summu 27 nevar iegūt, jo saskaitot divus vienādus ciparus, nevar iegūt 9. Summu 36 var iegūt, ja $y=9$.
- Ja $x=5$, tad skaitļa ciparu summa ir $4+5+7+y+5+3+y+3+1+5=33+y+y$. Tā kā y ir cipars, tad mazākā summas $33+y+y$ vērtība ir $33+0+0=33$, bet lielākā summas $33+y+y$ vērtība ir $33+9+9=51$. Tā kā $33+y+y$ ir jādalās ar 9, tad derīgās vērtības ir 36 un 45. Summu 36 nevar iegūt, jo, saskaitot divus vienādus ciparus, nevar iegūt 3. Summu 45 var iegūt, ja $y=6$.

Tātad $x=0$ un $y=9$ vai arī $x=5$ un $y=6$.

2. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 56. att.). Kāds skaitlis var būt ierakstīts rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi?

	24	
		?
13		

56. att.

Atrisinājums. Apzīmēsim skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar x, bet apakšējā – ar y. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $24+x+y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt šādi (skat. 57. att.):

	24	
	x	
13	y	

→

	24	$11+y$
	x	
13	y	

→

	24	$11+y$
	x	
13	y	$11+x$

→

	24	$11+y$
	x	2
13	y	$11+x$

57. att.

Tātad rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, ir ierakstīts skaitlis 2.

3. Cik ir tādu naturālu skaitļu n, kuriem skaitlim n^2 ir tikpat ciparu, cik skaitlim n^3?

Atrisinājums. Ir trīs skaitļi, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, šie skaitļi ir 1; 2 un 4, jo $1^2=1^3=1$; $2^2=4$ un $2^3=8$ visi ir viencipara skaitļi, un $4^2=16$ un $4^3=64$ abi ir divciparu skaitļi. Pamatosim, ka citu derīgu n vērtību nav.

Skaitlis 3 neder, jo $3^2=9$, bet $3^3=27$.

Skaitļu no 5 līdz 9 kvadrāti ir divciparu skaitļi, jo $5^2=25$ un $9^2=81$ abi ir divciparu, tātad arī skaitļu 6; 7; 8 kvadrāti ir divciparu skaitļi. Šo skaitļu kubi ir trīsciparu skaitļi, jo $5^3=125$ un $9^3=729$ abi ir trīsciparu, tātad pa vidu esošo skaitļu kubi arī ir trīsciparu skaitļi.

Skaitļiem, kas lielāki nekā 9, lai no skaitļa kvadrāta iegūtu skaitļa kubu, tie jāreizina ar pašu skaitli, tātad vismaz ar 10. Tādā gadījumā skaitļa kuba ciparu skaits ir vismaz par 1 lielāks nekā šī skaitļa kvadrāta ciparu skaits.

4. Trijstūra divu malu garumi ir 7 cm un 13 cm. Kāds var būt trešās malas garums centimetros, ja trijstūra perimetra vērtība ir pirmskaitlis?

Atrisinājums. No trijstūra nevienādības izriet, ka trešās malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un lielāks nekā pārējo divu malu garumu starpība. Ja trešās malas garums ir a centimetri, kur $6<a<20$, tad trijstūra perimetrs $P=20+a$ centimetri un $26<P<40$. Tā kā P ir pirmskaitlis, tad tas var būt 29 cm, 31 cm vai 37 cm. Tad atbilstoši trijstūra trešās malas garums a var būt 9 cm, 11 cm vai 17 cm.

5. Kādus pirmskaitļus var izteikt formā

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|,$$

kur n ir kāds vesels skaitlis?

Atrisinājums. Vienīgais pirmskaitlis, ko var izteikt šādā formā, ir 13.

Ja $n\geqslant 7$, tad dotajā izteiksmē visas zemmoduļu izteiksmes ir nenegatīvas, tāpēc to var pārrakstīt kā

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|=$$
$$=n-1+n-2+n-3+n-4+n-5+n-6+n-7=7n-28=7\cdot(n-4)$$

Visi skaitļi šādā formā nav pirmskaitļi, jo tos var sadalīt reizinātājos.

Ja $n\leqslant 1$, tad dotajā izteiksmē visas zemmoduļu izteiksmes ir negatīvas vai 0, tāpēc to var pārrakstīt kā

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|=$$
$$=1-n+2-n+3-n+4-n+5-n+6-n+7-n=28-7n=7\cdot(4-n)$$

Visi skaitļi šādā formā nav pirmskaitļi, jo tos var sadalīt reizinātājos.

Apskatīsim atlikušās n vērtības.

- Ja $n=2$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 2 un iegūst
$$|2-1|+|2-2|+|2-3|+|2-4|+|2-5|+|2-6|+|2-7|=$$
$$=|1|+|0|+|-1|+|-2|+|-3|+|-4|+|-5|=1+0+1+2+3+4+5=15.$$
Skaitlis 15 nav pirmskaitlis.
- Ja $n=3$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 3 un iegūst
$$|3-1|+|3-2|+|3-3|+|3-4|+|3-5|+|3-6|+|3-7|=$$
$$=|2|+|1|+|0|+|-1|+|-2|+|-3|+|-4|=2+1+0+1+2+3+4=13.$$
Skaitlis 13 ir pirmskaitlis.
- Ja $n=4$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 4 un iegūst
$$|4-1|+|4-2|+|4-3|+|4-4|+|4-5|+|4-6|+|4-7|=$$
$$=|3|+|2|+|1|+|0|+|-1|+|-2|+|-3|=3+2+1+0+1+2+3=12.$$
Skaitlis 12 nav pirmskaitlis.
- Ja $n=5$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 5 un iegūst
$$|5-1|+|5-2|+|5-3|+|5-4|+|5-5|+|5-6|+|5-7|=$$
$$=|4|+|3|+|2|+|1|+|0|+|-1|+|-2|=4+3+2+1+0+1+2=13.$$
Skaitlis 13 ir pirmskaitlis.
- Ja $n=6$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 6 un iegūst
$$|6-1|+|6-2|+|6-3|+|6-4|+|6-5|+|6-6|+|6-7|=$$
$$=|5|+|4|+|3|+|2|+|1|+|0|+|-1|=5+4+3+2+1+0+1=16.$$
Skaitlis 16 nav pirmskaitlis.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka tikai pirmskaitli 13 var izteikt prasītajā formā.

6. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodi visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība!

Atrisinājums. Apzīmēsim meklējamos divciparu skaitļus ar $\overline{ab} = 10a + b$. Atbilstoši uzdevumā dotajai sakarībai, iegūstam vienādojumu

$$(a+b) + ab = 10a + b.$$

Ekvivalenti pārveidojot doto vienādojumu, iegūstam:

$$a + b + ab - 10a - b = 0,$$
$$ab - 9a = 0.$$

Tā kā a ir skaitļa pirmais cipars, tad tas nav 0, līdz ar to abas vienādojuma puses varam dalīt ar nenulles skaitli a. No tā iegūstam, ka $b - 9 = 0$ jeb $b = 9$.

Esam ieguvuši, ka minētā īpašība piemīt visiem divciparu skaitļiem, kuru vienu cipars ir 9, tas ir, 19; 29; 39; 49; 59; 69; 79; 89; 99.

7. Māris iedomājās naturālu skaitli n. Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n, iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Atrisinājums. Skaitļa n dalītāju apzīmējam ar d, tad $n - 4d = 11$. Tā kā d ir skaitļa n dalītājs, tad $n = k \cdot d$ un iegūstam, ka $kd - 4d = 11$ jeb $d(k-4) = 11$, tas nozīmē, ka 11 dalās ar d. Skaitlis 11 ir pirmskaitlis, tāpēc iespējami divi gadījumi:

- $d = 1$ un $k - 4 = 11$ jeb $k = 15$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 15 \cdot 1 = 15$;
- $d = 11$ un $k - 4 = 1$ jeb $k = 5$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 5 \cdot 11 = 55$.

Tātad Māris iedomājās vai nu skaitli 15, vai 55.

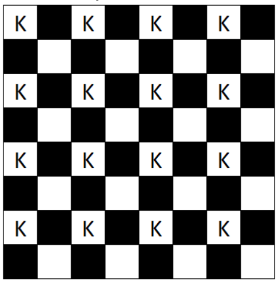
3.2. Uzdevumu grupas “Kāds ir lielākais...?” atrisinājumi

Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība
„Kāds lielākais (mazākais)...?” Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām: 1) **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda **piemērs**, kurā izpildās visas prasības; 2) **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība **nevar būt**.

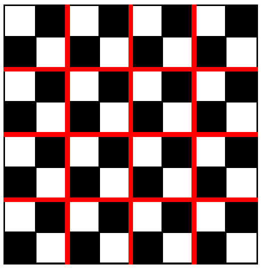
Risinot šāda veida uzdevumus, raksturīga kļūda ir nepamatot, ka atrastā vērtība tiešām ir vislielākā (vismazākā). Tātad tiek tikai atrasta tikai derīgā vērtība, bet nav pamatots, ka lielākas (mazākas) vērtības nevar iegūt. Dažreiz arī netiek parādīts piemērs, ka attiecīgo vērtību vispār var iegūt.

1. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?
Atrisinājums. Pamatosim, ka mazākais skaitlis, kas atbilst nosacījumiem, ir 2220. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad ciparam 2 šajā skaitlī jāparādās vismaz 3 reizes. Lai uzdevumā aprakstītais skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0. Līdz ar to meklētajam skaitlim ir vismaz 4 cipari un šis skaitlis ir 2220.

2. Kādu lielāko skaitu karaļu var uzlikt uz šaha galdiņa tā, lai neviens no karaļiem neapdraudētu nevienu citu karali?
Atrisinājums. Lielākais karaļu skaits ir 16, skat., piemēram, 58. att., kurā karaļu izvietojums apzīmēts ar burtu K. Pamatosim, ka nevar uzlikt 17 vai vairāk karaļus. Sadalām šaha galdiņu 16 kvadrātos ar izmēriem 2×2 (skat. 59. att.).



58. att.


59. att.

Ja uz šaha galdiņa uzliktu vairāk nekā 16 karaļus, tad pēc Dirihlē principa būtu vismaz viens tāds 2×2 kvadrāts, kurā atrastos vismaz 2 karaļi, bet nav iespējams divus karaļus novietot 2×2 kvadrātā tā, lai tie viens otru neapdraudētu.

3. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?
Atrisinājums. Mazākā ciparu summa ir 6, šāda ciparu summa ir skaitlim 1111110000 (tas dalās ar 3 un ar 11 pēc dalāmības pazīmēm).
Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11. Tātad skaitļa ciparu summai ir jādalās ar 3, tas ir, summa var būt 3, 6, 9 utt. Pierādīsim, ka nav iespējams iegūt ciparu summu 3.
Pastāv tikai 3 iespējas, kā iegūt ciparu summu 3:
1) skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles;
2) skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles;
3) skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

Pārbaudām, vai starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu *n* un pāra vietās esošo ciparu summu *p* dalās ar 11 (dalāmības pazīme ar 11):
1) starpība ir 3 – 0, kas nedalās ar 11;
2) starpība ir 1 – 2; 2 – 1; 3 – 0 vai 0 – 3, kas nedalās ar 11;
3) starpība ir $(1+1+1)-0$; $0-(1+1+1)$; $(1+1)-1$ vai $1-(1+1)$, kas nedalās ar 11.

Tātad mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu naturālam skaitlim, kurš dalās ar 33, ir 6.

4. Dotas deviņas kārtis ar cipariem no 1 līdz 9, uz katras kārts uzrakstīts atšķirīgs cipars. Kāds mazākais skaits kāršu jāizvelk (nezinot to vērtības), lai no tām noteikti varētu izveidot divciparu skaitli, kurš dalās ar 7?

Atrisinājums. Mazākais skaits kāršu, kas jāizvelk, ir 5. Pamatosim, ka, izvelkot jebkuras 5 kārtis, noteikti varēs izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7, bet, izvelkot 4 kārtis, var būt gadījums, ka prasīto divciparu skaitli nevar izveidot.

Sadalām visas kārtis četrās grupās:

- pirmā grupa 1; 2 un 4;
- otrā grupa 3; 5 un 6;
- trešā grupa 8 un 9;
- ceturtā grupa 7.

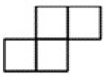
Ievērojam, ka, paņemot no kādas grupas divas kārtis (ja grupā ir vismaz divas kārtis), tad no šīm kārtīm var izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7.

Līdz ar to, ja tiks izvilktas piecas kārtis, tad pēc Dirihlē principa no kādas grupas būs izvilktas vismaz divas kārtis un no tām varēs izveidot uzdevumā prasīto skaitli.

Vēl jāpierāda, ka ir iespējams izvilkt četras kārtis, no kurām nevar izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7. Ja izvelk četras kārtis 1; 3; 7 un 8, tad no tām nevar izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7 (neviens no skaitļiem 13; 31; 17; 71; 18; 81; 37; 73; 38; 83; 78; 87 nedalās ar 7).

Tātad mazākais kāršu skaits, kas jāizvelk, ir 5.

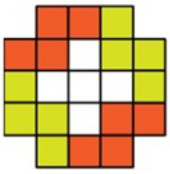
5. Kādu lielāko skaitu 60. att. doto figūru var izgriezt no rūtiņu kvadrāta $n \times n$, kuram izgrieztas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n=5$; **b)** ja $n=6$. Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 60. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



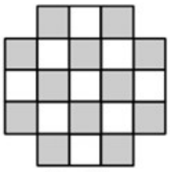
60. att.

Atrisinājums. a) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 4, skat. 61. att.

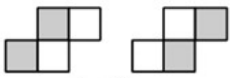
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim doto figūru kā šaha galdiņu (skat. 62. att.). Lai kā novietotu doto mazo figūru, tā vienmēr noklāj tieši divas baltas un tieši divas melnas rūtiņas (skat. 63. att.). Tā kā 62. att. figūra satur tieši deviņas baltas rūtiņas, tad no tās var izgriezt ne vairāk kā četras figūras, jo $9:2=4$, atl. 1.



61. att.

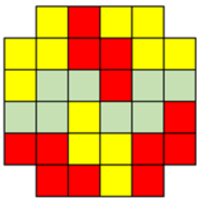


62. att.



63. att.

b) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 8, skat., piemēram, 64. att.



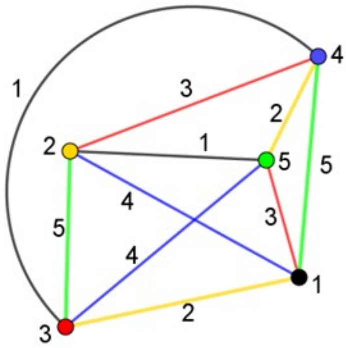
64. att.

6. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā;
- neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.

Kāda ir mazākā n vērtība?

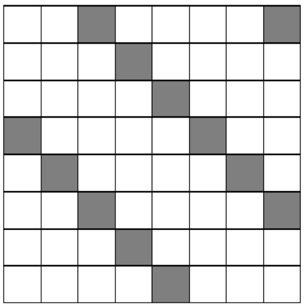
Atrisinājums. Katru no piecām lampām attēlojam ar punktu un šķautne būs vītne, kas savieno divas lampas. Pie katras lampas piestiprinātas tieši 4 vītnes (katra no tām aiziet uz kādu no citām 4 lampām). Tātad, lai krāsojums atbilstu uzdevuma nosacījumiem, katrai no šīm vītnēm jābūt citā krāsā, kā arī lampai jābūt krāsā, kas nesakrīt ne ar vienu no šīm krāsām. Tātad krāsu skaitam jābūt vismaz $4+1=5$. Piemērs, ka krāsu skaits var būt 5, redzams 65. att., kur ar vienādiem cipariem atzīmētas vienādu krāsu lampas un vītnes. Tātad mazākā n vērtība ir 5.



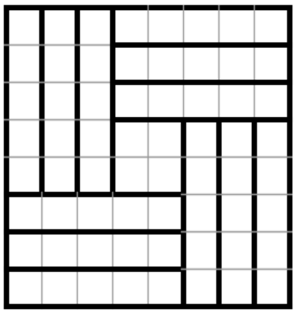
65. att.

7. Kāds mazākais skaits rūtiņu jāaizkrāso taisnstūrī ar izmēriem 8×8 rūtiņas, lai nevarētu atrast nevienu taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas (kurš var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli), kuram visas rūtiņas ir neaizkrāsotas?

Atrisinājums. Mazākais skaits rūtiņu, kas jāaizkrāso, ir 12, skat., piemēram, 66. att.



66. att.



67. att.

Pamatosim, ka, atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, mazāk kā 12 rūtiņas nav iespējams aizkrāsot. Katrā no 67. att. redzamajiem 12 ar treknāku līniju izceltajiem taisnstūriem jābūt aizkrāsotai vismaz vienai rūtiņai, tātad jāaizkrāso vismaz 12 rūtiņas.

3.3. Uzdevumu grupas “Vai iespējams...?” atrisinājumi

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde

„Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?”
Ja atbilde ir:

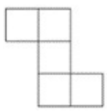
- „**jā**”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- „**nē**”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

Risinot šāda veida uzdevumus, kuriem atbilde ir “nē”, raksturīga kļūda ir vispārīga pamatojuma vietā apskatīt dažus piemērus, kuros neizdodas realizēt prasīto (pat ļoti daudzi piemēri, kuros neizdodas iegūt uzdevumā prasīto, nav pamatojums, ka to tiešām nevar izdarīt – varbūt vienkārši nav izdevies ieraudzīt īsto pieeju).

1. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet: **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?
Atrisinājums. a) Jā, piemēram, der taisnstūris ar malu garumiem 1 un 3, tad laukums ir 3, kas ir pirmskaitlis.
b) Nē, nav iespējams. Ja taisnstūra malu garumi ir a un b, tad taisnstūra perimetrs ir $P=2\cdot(a+b)$. Perimetrs vienmēr ir pāra skaitlis. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tāpēc $a+b$ būtu jābūt vienādam ar 1, bet tas nav iespējams, jo a un b ir naturāli skaitļi.

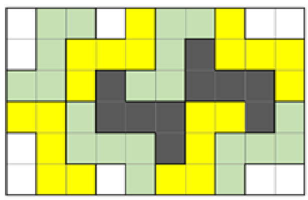
2. Vai eksistē tādi divi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un $A+B$ ciparu summas ir vienādas?
Atrisinājums. Jā, piemēram, var izvēlēties $A=900$ un $B=333$, tad $A+B=900+333=1233$, un ciparu summa visiem trim skaitļiem 900, 333 un 1233 ir 9.

3. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×10 rūtiņas var izgriezt 10 figūras, kādas redzamas 68. att.? Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.



68. att.

Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 69. att.



69. att.

4. Dagnis savā telefonā no 10 klases biedriem ir saņēmis 54 jaunas ziņas, no katra klases biedra vismaz vienu ziņu. Vai var gadīties, ka nav tādu divu klasesbiedru, kas atsūtījuši vienādu ziņu skaitu?
Atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Ja katrs no 10 klases biedriem būtu atsūtījis dažādu skaitu jauno ziņu, tad pavisam kopā Dagnis būtu saņēmis vismaz $1+2+3+4+5+6+7+8+9++10=55$ jaunas ziņas (ja tiek ņemts mazākais dažādo ziņu skaits), taču Dagnis ir saņēmis tikai 54 jaunas ziņas. Tātad noteikti ir vismaz divi klasesbiedri, kas atsūtījuši vienādu skaitu ziņu.

5. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt: **a)** 2022; **b)** 2025?
Atrisinājums. a) Nē, nevar būt. Apzīmējam piecus secīgos skaitļus ar $n-2$; $n-1$; n; $n+1$; $n+2$. Šo skaitļu summa ir $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$. Tā kā 2022 nedalās ar 5, tad piecu secīgu skaitļu summa nevar būt 2022.
b) Jā, var, šie pieci skaitļi ir 403; 404; 405; 406; 407.

6. Naturālu skaitli atļauts reizināt ar 2, kā arī izsvītrot no tā pieraksta ciparus 0; 3; 6; 9 (varbūt tikai kādu no tiem). Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, no skaitļa 17 var iegūt: **a)** skaitli 1; **b)** skaitli 15?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, šādi:

$$17 \rightarrow 34 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 1.$$

b) Nē, nevar. Sākotnējais skaitlis 17 nedalās ar 3. Ja skaitlis nedalās ar 3, tad, izpildot dotās darbības, iegūtais skaitlis nedalīsies ar 3:

- ja skaitli, kas nedalās ar 3, reizina ar 2, tad arī iegūtais reizinājums nedalīsies ar 3;
- ja skaitlim, kas nedalās ar 3, izsvītro ciparu 0; 3; 6; 9, tad arī iegūtais skaitlis nedalīsies ar 3 (sākotnējā skaitļa ciparu summa nedalās ar 3 (dalāmības pazīme ar 3), ja izsvītros 0; 3; 6; 9, tad arī iegūs ciparu summu, kas nedalās ar 3).

Tātad arī pēc vairākiem gājieniem iegūtais skaitlis nedalīsies ar 3. Tas nozīmē, ka skaitli 15 iegūt nevar, jo tas dalās ar 3.

7. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{3}$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt uz tāfeles skaitļus $\frac{b^2}{a}$ un $\frac{a^2}{b}$. Vai, izdarot vairākus šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti skaitļi $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$?

Atrisinājums. Nē, nevar. Izdarot gājienus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums nemainās, tas ir, ja uz tāfeles pirms gājiena izdarīšanas ir uzrakstīti skaitļi a, b, c, tad to reizinājums ir $a \cdot b \cdot c$, un arī pēc gājiena izdarīšanas uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums ir $\frac{b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot c = a \cdot b \cdot c$. Tā kā sākumā uzrakstīto skaitļu reizinājums ir $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$, bet skaitļu $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$ reizinājums ir $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{8}{3}$, tad prasītais nav iespējams.

3.4. Uzdevumu grupas “Vai noteikti...?” atrisinājumi

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde
„Vai visiem…?”; „Vai vienmēr… ?”; „Vai noteikti… ?”; „Vai katram… ?” Ja atbilde ir: • „**jā**”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem; • „**nē**”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

Risinot šāda veida uzdevumus, kuriem atbilde ir “jā”, raksturīga kļūda ir vispārīga pamatojuma vietā apskatīt dažus piemērus, kuriem dotās prasības izpildās.
Šādos uzdevumos vārds “noteikti” nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis par kaut kādu vienu vai dažiem) tādiem gadījumiem, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Tas nozīmē, ja uzdevumā minētā īpašība nepiemīt kādam no gadījumiem, tad mēs nevaram apgalvot, ka pilnīgi visiem gadījumiem tā ir spēkā, proti, ja atbilde ir “nē”, tad pietiek parādīt vienu tādu piemēru (pretpiemēru), kuram minētā īpašība neizpildās.

1. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?
Atrisinājums. Nē, piemēram, 123456790 nedalās ar 3, jo tā ciparu summa $1+2+3+4+5+6+7+9+0=37$ nedalās ar 3.

2. Jānim kabatā ir 14 centi. Zināms, ka kabatā ir 5 monētas. Vai vienmēr ir iespējams šīs kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem?
Atrisinājums. Nē, vienmēr nav iespējams sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem, jo var gadīties, ka kabatā ir viena 10 centu monēta un četras viena centa monētas.

3. Vai visi naturāli skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 27, arī paši dalās ar 27?
Atrisinājums. Nē, piemēram, skaitļa 9981 ciparu summa ir 27, tātad tā dalās ar 27, bet pats skaitlis ar 27 nedalās, jo $9981 : 27 = 369$, atl. 18.

4. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10 (kaut kādā secībā un katrs tieši vienu reizi). Pirmais no kreisās puses uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Vai noteikti šajā rindā var atrast tādu skaitli, kam kaimiņš pa kreisi ir mazāks nekā tā kaimiņš pa labi?
Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Piemēram, skaitļi var būt uzrakstīti šādi: 5; 10; 4; 9; 3; 8; 2; 7; 1; 6. Redzam, ka katram skaitlim kaimiņš pa kreisi ir lielāks nekā tā kaimiņš pa labi.

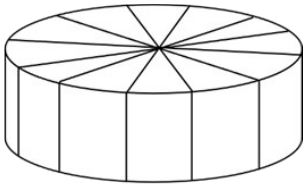
5. Trijstūra perimetrs ir 18 cm. Vai noteikti ir tāda trijstūra mala, kuras garums nepārsniedz 6 cm?
Atrisinājums. Ja visi malu garumi būtu lielāki nekā 6 cm, tad trijstūra perimetrs būtu lielāks nekā 18 cm – pretruna ar doto. Tātad noteikti ir tāda mala, kuras garums nepārsniedz 6 cm.

6. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas izsvītro pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi (katrā gājienā var izsvītrot jebkuru no palikušajiem skaitļiem). Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais spēlētājs uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Vai otrais spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?
Atrisinājums. Jā, var. Aprakstīsim, kā jārīkojas otrajam spēlētājam. Otrais spēlētājs domās sadala skaitļus pa pāriem:

$$(1; 2), \quad (3; 4), \quad \ldots, \quad (2021; 2022).$$

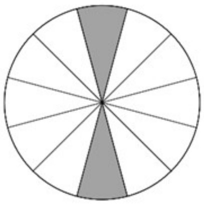
Ja pirmais spēlētājs izsvītro kādu skaitli, tad otrais spēlētājs izsvītro to skaitli, kas ir vienā pārī ar pirmā spēlētāja izsvītroto skaitli. Tā spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr izjauc pirmā spēlētāja nodomu, jo beigās paliks divi skaitļi no viena pāra, kas atšķiras par 1, bet šādu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

7. Torte sagriezta 12 gabaliņos (skat. 70. att.). Brālītis un Karlsons pēc kārtas izdara gājienus, Brālītis sāk pirmais. Vienā gājienā var apēst vai nu vienu tortes gabaliņu, vai divus blakus esošus gabaliņus (blakus esoši gabaliņi ir gabaliņi, kam ir kopīga mala). Uzvar tas, kurš apēd pēdējo gabaliņu. Vai Karlsons, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?

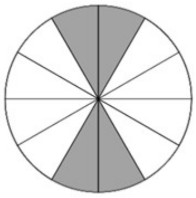


70. att.

Atrisinājums. Jā, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt Karlsons. Aprakstīsim, kā Karlsonam jārīkojas. Ja Brālītis pirmajā gājienā apēd vienu gabalu, tad Karlsons arī apēd vienu gabalu, kas atrodas tieši pretējā pusē tā, ka atliek divi vienādi tortes gabalu “bloki” pa 5 gabaliem (skat. 71. att.). Bet, ja brālītis pirmajā gājienā apēd divus tortes gabalus, tad arī Karlsons apēd divus pretējā pusē tā, ka atliek divi vienādi gabalu bloki pa 4 gabaliem (skat. 72. att.).



71. att.

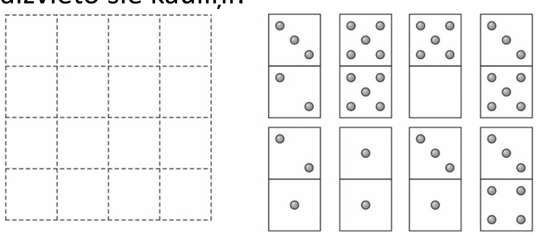
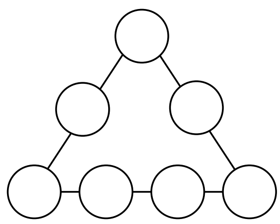


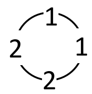
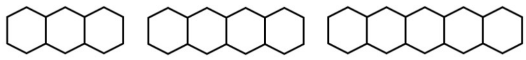
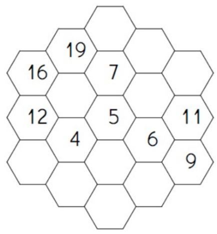
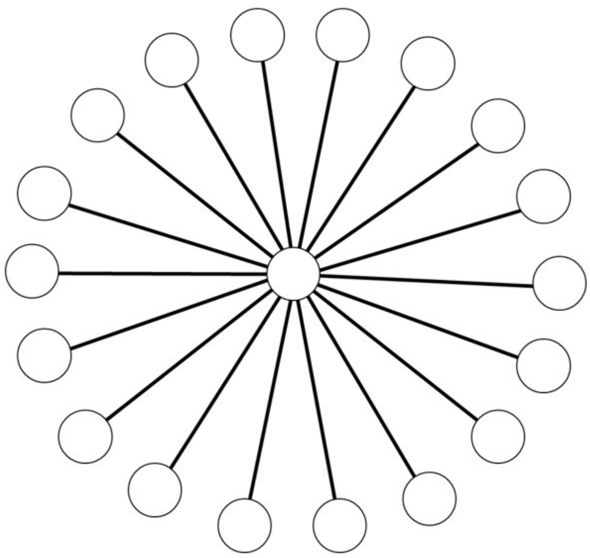
72. att.

Tālākajā spēlē, ja Brālītis apēd vienu gabalu vai divus gabalus no kāda bloka, tad Karlsonam jāapēd attiecīgi vienu vai divus gabali, kas atrodas tajā pašā vietā otrā blokā, tā, lai pēc viņa gājiena abi bloki atkal būtu vienādi. Tādā veidā Karlsons var nodrošināt, ka tieši viņš apēdīs pēdējo tortes gabalu, jo, ja tortes gabalu varēs apēst Brālītis, tad arī Karlsons varēs apēst simetrisko gabalu, kas atrodas otrā blokā.

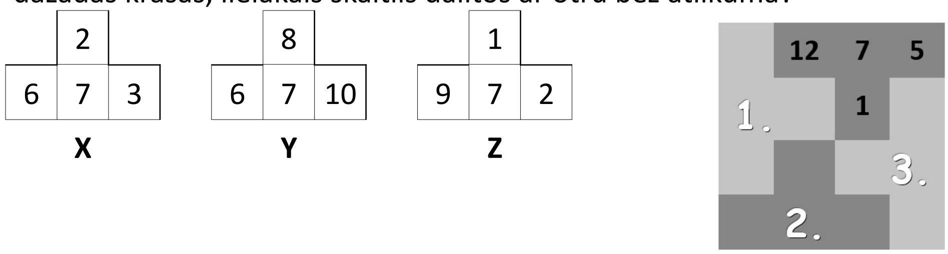
4. UZDEVUMI

4.1. Piektā klase

Temats no MPP	Sasniedzamie rezultāti un uzdevumi/Olimpiāžu uzdevumi	Atsauce
	4.1.1. Maģiskās konfigurācijas, skaitļu sakārtojumi	
5.1.	*Veido skaitļus un skaitliskas izteiksmes, skaitļu kopas, skaitļu virknes vai skaitļu sakārtojumus (piemēram, "maģiskos kvadrātus", "skaitļu trijstūrus"), ievērojot dotos nosacījumus (skaitļu pieraksts, salīdzināšana, saskaitīšana un atņemšana), demonstrējot izpratni par tekstu kopumā un atsevišķu terminu lietojumu.*	M.6.2.1.4. M.6.3.2.6. M.6.4.4.2.
5.1.	*Papildina skaitļu sakārtojumus, ievērojot dotos nosacījumus, piemēram, skaitļi sakārtoti tabulā ar 3×3 šūnām, kurā visās rindās un kolonnās skaitļu summas ir vienādas, vai skaitļi sakārtoti trijstūra veidā ("skaitļu trijstūris"), kurā katrs skaitlis ir divu zemāk novietoto skaitļu summa.*	Uzdevumi no MPP
5.5.	*Papildina skaitļu sakārtojumus, ievērojot dotos nosacījumus, piemēram, tabulu ar 3×3 šūnām, ja visās rindās, kolonnās (diagonālēs) daļu vai jauktu skaitļu summas ir vienādas; trijstūra veida skaitļu sakārtojumu jeb "skaitļu trijstūri", kurā katrs skaitlis ir divu zemāk novietoto skaitļu summa*	Uzdevumi no MPP
Olimpiāžu uzdevumi	**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls "Maģiskās konfigurācijas"	
Olimpiāžu uzdevumi	**METODISKIE IETEIKUMI.** 1. Piedāvātos uzdevumus var risināt jebkāda temata ietvaros tie skolēni, kuri stundas vielu ir paspējuši izpildīt ātrāk. 2. Visos uzdevumos var izgriezt uzdevumā dotos elementus, un jaunāku klašu skolēni var pārbīdīt dotos objektus (skaitļus vai kauliņus), līdz tiek atrasts uzdevuma atrisinājums.	
Olimpiāžu uzdevumi	1. Igoram ir 8 domino kauliņi. Viņš tos grib izvietot kvadrātā tā, lai punktu summas visās rindās un visās kolonnās būtu vienādas. Parādi, kā Igoram ir jāizvieto šie kauliņi!  **NORĀDES.** 1. Saskaiti, cik punktu ir visos dotajos kauliņos kopā! 2. Nosaki, cik punktiem jābūt katrā rindā un katrā kolonnā!	TVC 4. kārta, 2011./ 2012.
Olimpiāžu uzdevumi	2. Aplīšos ierakstiet skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas! Aplūko visas iespējas, kādas var būt šīs summas!  **NORĀDES.** 1. Saskaiti, kāda ir visu skaitļu summa! 2. Nosaki, kādai summai jābūt uz katras taisnes! 3. Ievēro, ka trijstūra virsotnēs ierakstītie skaitļi tiek ieskaitīti divas reizes! 4. Apskati visas iespējamās summas vērtības!	JMK 2. kārta, 2011./ 2012.

Olimpiāžu uzdevumi	3.	**a)** Pa apli izvieto ciparus 1 un 2 (pavisam astoņus ciparus) tā, lai, lasot pa trīs cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami visi trīsciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 vai 2. **b)** Vai pa apli var izvietot 16 ciparus 1 un 2 tā, lai, lasot pa četriem cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami visi četrciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 vai 2? *Piemēram, attēlā parādīts, ka četrus ciparus var izvietot tā, lai būtu sastopami visi divciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 vai 2: 11, 12, 22, 21.*  **NORĀDE.** Sāc ar vienu skaitli, tad liec klāt pa vienam ciparam, lai iegūtu arvien nebijušu skaitli!	NOL 5. klase, 2011./ 2012.
	4.	Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 19 dotajā figūrā (skat. 2. att.) jāparādās tieši vienu reizi. Aizpildi tukšos lodziņus tā, lai katrā joslā ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati! *Piezīme*. Visas iespējamās joslas skat. 1. att., tās var būt pagrieztas.  *1. att.*  *2. att.* **NORĀDES.** 1. Kāda ir visu figūrā ierakstīto skaitļu summa? 2. Cik ir vertikālo joslu? 3. Kādai jābūt skaitļu summai katrā no vertikālajām joslām?	JMK 2. kārta, 2015./ 2016.
	5.	Vai katrā aplītī (skat. attēlu) var ierakstīt vienu skaitli no 1 līdz 19 (skaitļi nedrīkst atkārtoties) tā, lai katros trīs aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?  **NORĀDES.** 1. Uzraksti visus skaitļus no 1 līdz 19 rindā! 2. Izmanto sakarību, ka divu skaitļu summa ir vienāda, ja vienu skaitli palielina par 1, bet otru – samazina par 1. 3. Tā kā vajadzīgs viens derīgs piemērs, izvēlies vienu no gadījumiem: vidējā aplītī ieraksti pirmo, vidējo vai pēdējo skaitli no 1 līdz 19.	JMK 3. kārta, 2020./ 2021.

4.1.2. Skaitļu pieraksts			
5.1.		*Pieraksta skaitli kā šķiru summu (piemēram, 273 = 200 + 70 + 3).* *Uzraksta skaitļus (skaitļu kopu) atbilstoši vienam vai diviem nosacījumiem (piemēram, ciparu skaits, izmantojamie cipari, lielāks/mazāks par kādu skaitli). Spriež par divu skaitļu kopu kopīgām un atšķirīgām īpašībām, spriežot lieto Venna diagrammu vai citus teksta strukturēšanas veidus.*	Uzdevumi no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls “Skaitļu pieraksts”	
		METODISKAIS IETEIKUMS. Mācību procesā var izmantot atgādni par skaitļu šķirām (skat. 157. lpp.).	
	1.	Par *palindromu* sauc naturālu skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem. Piemēram, 5, 313 un 4482844 ir *palindromi*, bet 17, 3313 – nav. Visi septiņciparu *palindromi* sakārtoti augošā secībā. Nosaki, kurš *palindroms* šajā rindā pēc kārtas ir 2011-ais! **NORĀDES.** 1. Cik pirmos ciparus jāzina, lai būtu viennozīmīgi zināms, kāds būs septiņu ciparu *palindroms*? 2. Sāc rakstīt mazākos *palindromus* un saskati sakarību starp *palindromu* un tā kārtas numuru!	SOL 6. klase, 2011./ 2012.
	2.	Atrodi naturālu skaitli, kura ciparu summa dalās ar 27, bet pats skaitlis ar 27 nedalās! **NORĀDE.** Aplūko, kā ar mazāko ciparu skaitu (no 0 līdz 9) var iegūt summu 27.	SOL 5. klase, 2016./ 2017.
	3.	Izveido septiņciparu skaitli, kas dalās ar 7 un kura pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 izmantots tieši vienu reizi! **NORĀDES.** 1. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5 un 8 izveido trīs divciparu skaitļus, kas dalās ar 7. 2. Ja visus izveidotos divciparu skaitļus uzraksta vienu aiz otra, ko vari pateikt par iegūtā skaitļa dalāmību ar 7?	NOL 5. klase, 2011./ 2012.
	4.	Doti četri trīsciparu skaitļi $\overline{xzy}$; $\overline{yaz}$; $\overline{yax}$; $\overline{zxa}$ un zināms, ka *a, x, y, z* ir dažādi cipari. Vai var būt, ka $\overline{xzy} < \overline{yaz} < \overline{yax} < \overline{zxa}$? **NORĀDES.** 1. Ja vislielākais ir pēdējais skaitlis, kurš no tā cipariem noteikti ir vislielākais? 2. Sāc ar pirmā, otrā un ceturtā skaitļa simtu ciparu salīdzināšanu!	NOL 5. klase, 2019./ 2020.
	5.	Pierādi, ka, uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst lielāku skaitli nekā, šos pašus divciparu skaitļus sareizinot! **NORĀDE.** Izmanto sakarību, ka $\overline{abcd} > \overline{ab}00$!	SOL 5. klase, 2003./ 2004.
	6.	Dotas sešas pēc kārtas novietotas rūtiņas. Jānis un Pēteris spēlē šādu spēli. Viena gājiena laikā vienā no tukšajām rūtiņām jāieraksta viens cipars no 1 līdz 9. Gājienus spēlētāji izdara pēc kārtas, Jānis sāk. Pēteris uzvar, ja sešciparu skaitlis, kas izveidojas beigās, dalās ar 13. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no tā, kā spēlē Jānis? **NORĀDES.** 1. Vai skaitlis 123123 dalās ar 13? Kas tajā īpašs? 2. Kādā veidā Pēterim jāraksta tie paši cipari, kādus uzrakstīja Jānis? 3. Kāpēc skaitlis $\overline{abcabc}$ vienmēr dalās ar 13?	SOL 7. klase, 2011./ 2012.

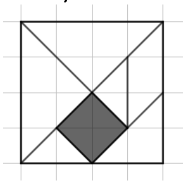
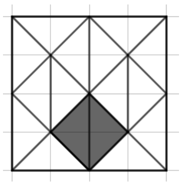
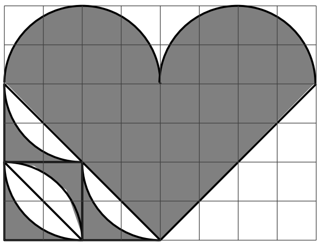
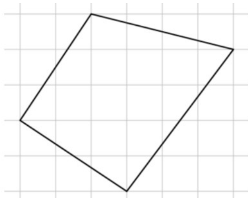
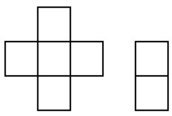
	7.	Anna uz lapas uzrakstīja divciparu skaitli. Tad, apmainot vietām uzrakstītā skaitļa ciparus, viņa uzrakstīja vēl vienu divciparu skaitli. Vai abu skaitļu summa noteikti dalās ar 11?	
		NORĀDES. 1. Uzraksti abus skaitļus formā $\overline{ab}$ un $\overline{ba}$. 2. Uzraksti abus skaitļus kā šķiru summu, piemēram, $\overline{ab}=10a+b$.	
4.1.3. Skaitļa reizinātāji, dalītāji un dalāmie			
5.2.		*Sadala skaitli reizinātājos. Ja iespējams, to veic dažādos veidos.* *Nosaka naturāla skaitļa dalītājus un dalāmos.*	Prasme no MPP
		Sadarbojas un formulē skaitļa īpašības (ko var secināt/pateikt par skaitli), ja tas pierakstīts kā reizinājums, piemēram, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls “[Skaitļu dalāmība un kongruences]” 	
		METODISKS IETEIKUMS. Kopā ar skolēniem var sagatavot atgādni par skaitļu dalāmību ar 2; 3; 4; 5; 9; 10; 11; 2^n; 5^n.	
	1.	Kā jāsavieto figūras X, Y, Z dotajā kvadrātā tā, lai tur, kur saskaras rūtiņu malas, kas ir dažādās krāsās, lielākais skaitlis dalītos ar otru bez atlikuma? 	TVC 1. kārta, 2011./ 2012.
		NORĀDE. Apskati, kurš no figūrās dotajiem skaitļiem var būt skaitļa 5 *kaimiņš*!	
	2.	Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt 6930?	SOL 6. klase, 2016./ 2017.
		NORĀDE. Sadali doto skaitli pirmreizinātājos!	
	3.	Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Par skaitļa *garumu* sauksim tā pirmreizinātāju skaitu (piemēram, skaitļa $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ *garums* ir 4, skaitļa $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ *garums* ir 2 utml.). Kāds lielākais *garums* var būt četrciparu skaitlim? Nosaki visus četrciparu skaitļus ar lielāko *garumu*!	JMK 2. kārta, 2011./ 2012.
		NORĀDE. Kādiem jābūt skaitļa pirmreizinātājiem, lai to būtu pēc iespējas vairāk?	
	4.	Trīs dažādu naturālu skaitļu reizinājums ir 36. Kāda var būt šo skaitļu summa?	JMK 3. kārta, 2015./ 2016.
		NORĀDES. 1. Sadali skaitli 36 pirmreizinātājos! 2. Šķiro gadījumus atkarībā no mazākā reizinātāja.	
	5.	Atrodi lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 3 un kam visi cipari ir dažādi!	SOL 5. klase, 2015./ 2016.
		NORĀDES. 1. Kāds ir lielākais piecciparu skaitlis? 2. Pieraksti savus secinājumus, kā no lielākā piecciparu skaitļa nonāc līdz tam skaitlim, kas dalās arī ar 3.	

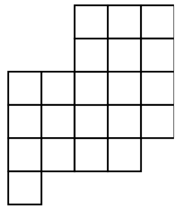
Olimpiāžu uzdevumi	6.	Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas esoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli. Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**. Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar: **a)** 9; **b)** 24? **NORĀDES.** 1. Izmanto a) piemērā dalāmības pazīmi ar 9. 2. Ievēro, ka b) piemērā skaitlim jādalās ar 3 un 8, lai tas dalītos ar 24. 3. Pamato, kāpēc atrastais skaitlis ir mazākais!	NOL 6. klase, 2015./ 2016.
	7.	Atrodi visus tādus sešciparu skaitļus, kuriem visi seši cipari ir vienādi un kurus var izteikt kā sešu dažādu pirmskaitļu reizinājumu! **NORĀDES.** 1. Kā prasīto sešciparu skaitli var uzrakstīt kā reizinājumu, kura viens reizinātājs ir 111111? 2. Sadali skaitli 111111 reizinātājos!	AMO 5. klase, 2018./ 2019.
4.1.4.		**Patiesas vienādības un nevienādības, darbību secība**	
5.2.		*Konkrētos piemēros pamato vienādību patiesumu (pamatojumā izmanto arī pretpiemēru), formulē secinājumus, piemēram, ka $a:b\cdot c \neq a:(b\cdot c)$, lieto jēdzienus “patiess/aplams apgalvojums”.*	M.6.2.3.3. M.6.2.3.1.
Olimpiāžu uzdevumi		**METODISKS IETEIKUMS.** 5. uzdevumā papildus dažos gadījumos ir jāizmanto skaitļa faktoriāls un aritmētiskā kvadrātsakne. Pie uzdevuma nosacījumiem ir paskaidroti šie jēdzieni.	
	1.	Pārliec katrā nepatiesajā nevienādībā vienu sērkociņu, lai iegūtu patiesu nevienādību! Nevienādības zīmi mainīt nedrīkst. *Piezīme*. No sērkociņiem var izveidot šādus ciparus: .   **NORĀDE.** Kādus ciparus var iegūt, ja no 8 noņem vienu sērkociņu? **METODISKS IETEIKUMS.** Skolēns var praktiski darboties ar sērkociņiem vai cita veida kociņiem.	TVC 3. kārta, 2015./ 2016.
	2.	Noskaidro, kāds skaitlis aizstāts ar katru burtu: $B+C=482$, $A+B=900$, $A+B+C=1000$. $A=$ $B=$ $C=$ **NORĀDES.** 1. Izmantojot pirmo summu, no trešās summas nosaki burta A vērtību! 2. Izmanto otro summu, lai noteiktu burta B vērtību!	TVC 4. kārta, 2006./ 2007.
	3.	Atrisini skaitļu rēbusu: $AH+A=HEE$. Katrs burts apzīmē vienu ciparu. Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, dažādiem – dažādi. **NORĀDE.** Kāds ir šī trīsciparu skaitļa pirmais cipars, ja, divciparu skaitlim pieskaitot vienciparu skaitli, tiek iegūts trīsciparu skaitlis?	JMK 3. kārta, 2011./ 2012.
	4.	Noskaidro, kāds skaitlis var būt nezināmais x, ja **a)** $x+x=0$; **b)** $x-x=0$; **c)** $x:x=1$; **d)** $x:x=2$; **e)** $x\cdot(x:x-1)=2$. **NORĀDE.** Apskati dažādas x vērtības un vispārini iegūtos secinājumus!	TVC 3. kārta, 2005./ 2006.

Olimpiāžu uzdevumi	5.	Līva ir aizrāvusies ar dažādiem maģiskiem rituāliem un neparastām sakarībām. Arī matemātikas stundas laikā viņai nedeva mieru sakarības ar ciparu 6. Viņa vēlējās pierādīt, ka cipars 6 ir ļoti īpašs un maģisks, jo to ir iespējams iegūt no visiem pārējiem cipariem, ja katru izmantotu tieši trīs reizes. Lai no trīs citiem vienādiem cipariem iegūtu ciparu seši, viņa varēja izmantot: saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kvadrātsaknes vilkšanu, faktoriālu, iekavas. Viņas draudzenes Zane un Jana gan nebija drošas, ka cipars seši tiešām ir tik maģisks. Palīdzi Līvai pārliecināt savas draudzenes un parādi, kā var iegūt vērtību seši katrā no 10 gadījumiem! 0 0 0 = 6 1 1 1 = 6 2 2 2 = 6 3 3 3 = 6 4 4 4 = 6 5 5 5 = 6 6 6 6 = 6 7 7 7 = 6 8 8 8 = 6 9 9 9 = 6 *Piezīmes.* 1. Par skaitļa *a* aritmētisko kvadrātsakni sauc tādu nenegatīvu skaitli, kuru kāpinot kvadrātā, iegūst doto skaitli *a*. To apzīmē $\sqrt{a}$. Piemēram, $\sqrt{16} = 4$, jo $4^2 = 16$. 2. Visu naturālo skaitļu no 1 līdz *n* reizinājumu sauc par skaitļa *n* faktoriālu un apzīmē ar $n!$, tas ir, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = n!$, piemēram, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Tiek pieņemts, ka $0! = 1$.	PCK 2. nod., 2016./ 2017.
	5.	**NORĀDES.** 1. Ar kāda skaitļa faktoriālu var iegūt 6? 2. Ievērojot darbību secību un iekavu lietošanu, izmēģini dažādus variantus!	

4.1.5. Ģeometrija, piemērs, pilnā pārlase

5.6.	*Rūtiņu lapā zīmē figūras, vienlaikus ievērojot nosacījumus gan par figūras veidu un īpašībām, gan par laukuma skaitlisko vērtību.*	M.6.6.1.2. M.6.6.4.2.
	Uzzīmē daudzstūri atbilstoši 2 vai 3 nosacījumiem par leņķiem, malām, to savstarpējo novietojumu.	Prasme no MPP
	Pēta figūru savstarpējo novietojumu, sakarības starp figūru lielumiem, attīstot ieradumus iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas, meklēt risinājumu nepazīstamās situācijās.	Ieradums no MPP
	Vingrinās rūtiņu lapā dotu kombinētu figūru sadalīt taisnstūros un taisnleņķa trijstūros. Stāsta, kā sadalīšana palīdz figūras laukuma noteikšanai. *Rūtiņu lapā uzzīmē daudzstūri (piemēram, četrstūri), kura laukums ir dots (piemēram, 6 cm^2) un kuram raksturots malu savstarpējais novietojums (piemēram, tieši divas malas ir paralēlas).*	Uzdevumi no MPP
	METODISKS IETEIKUMS. Skolēns var dotās figūras izgriezt un pārvietot, lai saskatītu, kā no vairākām daļām izveidot vienkāršāku figūru.	

Olimpiāžu uzdevumi	1.	Kāda daļa no kvadrāta ir iekrāsota?  **NORĀDE.** Sadali kvadrātu, kā parādīts attēlā! 	TVC 1. kārta, 2011./ 2012.
	2.	Cik rūtiņu liels ir iekrāsotās figūras laukums?  **NORĀDES.** 1. Izvērtē, kādu laukumu aprēķināt ir vieglāk – iekrāsotās vai neiekrāsotas daļas! 2. Iekrāsoto sirdi sadali divās daļās – augšējā daļā (divi pusriņķi) un apakšējā (trijstūris)! 3. Padomā, kā figūras daļas varētu pārvietot, lai vieglāk noteikt laukumu! 4. Kur var pārvietot apakšējā stūrī iekrāsotās rūtiņas, kas nav daļa no sirds?	TVC 3. kārta, 2011./ 2012.
	3.	Nosaki izmērus visiem tādiem taisnstūriem, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru laukums ir tikpat liels kā attēlā dotā četrstūra laukums!  **NORĀDE.** Sadali doto četrstūri vairākos trijstūros un aprēķini katra trijstūra laukumu vai arī aprēķini taisnstūra, kas ierobežo figūru, laukumu un atņem “lieko” trijstūru laukumus!	SOL 5. klase, 2015./ 2016.
	4.	Atrodi taisnstūri, ko var salikt no attēlā parādītajām figūrām! Jāizmanto vismaz viena katra veida figūra. Taisnstūrim jābūt noklātam pilnībā un figūras nedrīkst pārklāties. Parādi zīmējumā, kā to var izdarīt!  **NORĀDE.** Kādas figūras noteikti būs stūros?	SOL 6. klase, 2011./ 2012.
	5.	Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros! **NORĀDES.** 1. Kādi leņķi noteikti būs kvadrāta stūros? 2. Cik nogriežņus jāvelk no viena un tā paša punkta, lai iegūtu platus leņķus?	AMO 5. klase, 2011./ 2012.
	6.	Sadali kvadrātu divos vienādos: **a)** sešstūros; **b)** septiņstūros! **NORĀDE.** Kā jāzīmē dalījuma līnijas, lai iegūtās figūras būtu vienādas?	AMO 6. klase, 2011./ 2012.

Olimpiāžu uzdevumi	7.	Sadali attēlā doto figūru trīs vienādās figūrās! *Piezīme.* Figūru un tās spoguļattēlu saucam par vienādām figūrām.  **METODISKS IETEIKUMS.** Lai pārbaudītu, vai iegūtās figūras tiešām ir vienādas, doto figūru var sagriezt tā, kā skolēns piedāvā to sadalīt, un pārbaudīt, vai figūras sakrīt, uzliekot to vienu uz otras. **NORĀDE.** Cik kvadrātiņu būs katrā figūrā?	AMO 5. klase, 2011./ 2012.
	8.	Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības! **NORĀDES.** 1. Uzzīmē malas ar garumiem 3 un 4 vienības! 2. Kā var būt novietota mala ar garumu 5 vienības? 3. Kā var būt novietota mala ar garumu 6 vienības?	NOL 6. klase, 2015./ 2016.

4.2. Sestā klase

4.2.1. Skaitliskas izteiksmes, piemērs, pilnā pārlase

6.3. 6.7.	*Starp dotiem skaitļiem ievieto darbību zīmes un veido skaitliskas izteiksmes, lai iegūtu pēc iespējas dažādus rezultātus.*	Uzdevums no MPP

Olimpiāžu uzdevumi

METODISKS IETEIKUMS. 6. uzdevumā papildus ir jāizmanto skaitļa faktoriāls un aritmētiskā kvadrātsakne. Pie uzdevuma nosacījumiem ir paskaidroti šie jēdzieni.

1. Tukšajās rūtiņās ieraksti pa viencipara skaitlim tā, lai, izpildot darbības pa rindām un kolonnām, iegūtu patiesas vienādības!

4	·		−		=	5
:		·		:		+
	+	2	−	1	=	
+		−		+		−
	:	3	+	5	=	
=		=		=		=
8	·		:		=	1

NORĀDE. Ievēro darbību secību – pirmās jāveic reizināšana un dalīšana!

JMK 1. kārta, 2011./ 2012.

2. Starp skaitļiem 4 1 5 7, nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („ + ”, „ − ”, „ · ”, „ : ”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu

a) 13,

b) 14!

NORĀDE. Dažreiz, dalot ar daļskaitli, var iegūt veselu skaitli.

AMO 8. klase, 2011./ 2012.

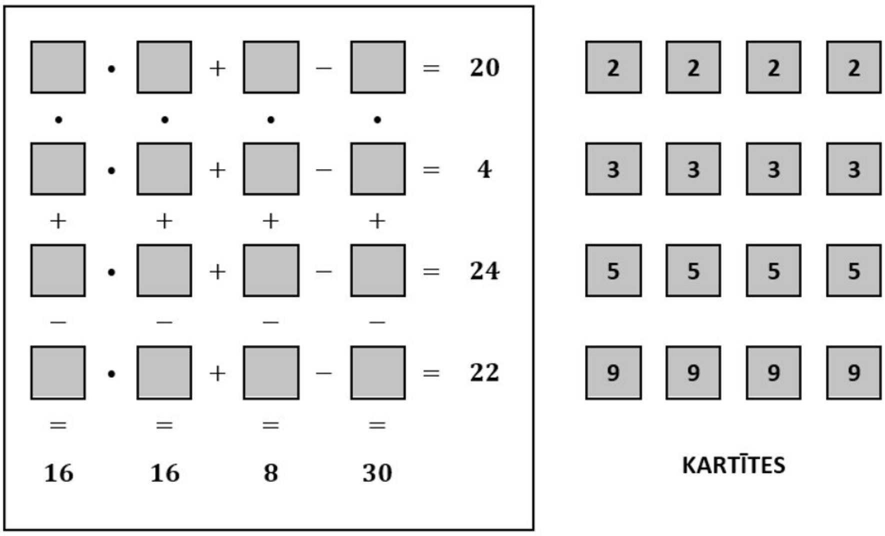
3. Vienādi burti apzīmē vienādus skaitļus, dažādi – dažādus. Atrodi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi jāliek burtu vietā, lai abas dotās vienādības būtu patiesas!

$$A+B=C\cdot D$$
$$A\cdot B=C+D$$

NORĀDE. Apskati divu dažādu skaitļu iespējamās summas un reizinājumu vērtības!

NOL 5. klase, 2015./ 2016.

4. Ir dotas 16 kartītes, uz četrām uzrakstīts skaitlis 2, uz četrām – 3, uz četrām – 5 un uz četrām – 9. Saliec tās uz pelēkajiem kvadrātiem tā, lai izveidojas patiesas vienādības!



METODISKS IETEIKUMS. Dotās skaitļu kartītes var izgriezt un sakārtot tās dotajās izteiksmēs!

NORĀDES. 1. Sāc ar vienu no izteiksmēm, ievērojot darbību secību!

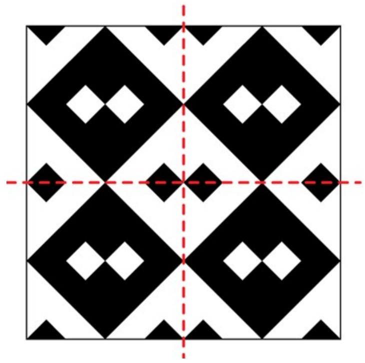
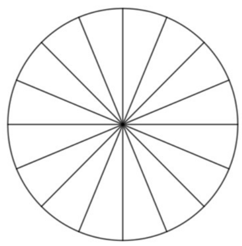
2. Gan horizontālajām, gan vertikālajām izteiksmēm ir jābūt patiesām. Pārbaudi savu risinājumu!

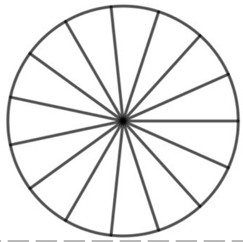
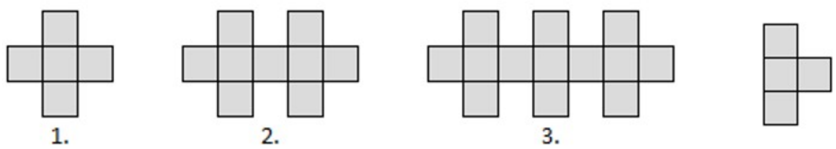
JMK 2. kārta, 2020./ 2021.

<table>
<tr><td rowspan="2">Olimpiāžu uzdevumi</td><td>5.</td><td>Katrā lodziņā ieraksti “ + ” vai “ – ” zīmi tā, lai iegūtu patiesu vienādību!
64 ☐ 32 ☐ 16 ☐ 8 ☐ 4 ☐ 2 ☐ 1 = 81

NORĀDE. Starp skaitļiem 64 un 32 ieraksti “ + ” zīmi!</td><td>SOL
5. klase,
2015./
2016.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Līva ir aizrāvusies ar dažādiem maģiskiem rituāliem un neparastām sakarībām. Arī matemātikas stundas laikā viņai nedeva mieru sakarības ar ciparu 6. Viņa vēlējās pierādīt, ka cipars 6 ir ļoti īpašs un maģisks, jo to ir iespējams iegūt no visiem pārējiem cipariem, ja katru izmantotu tieši trīs reizes. Lai no trīs citiem vienādiem cipariem iegūtu ciparu seši, viņa varēja izmantot: saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kvadrātsaknes vilkšanu, faktoriālu, iekavas.
Viņas draudzenes Zane un Jana gan nebija drošas, ka cipars seši tiešām ir tik maģisks. Palīdzi Līvai pārliecināt savas draudzenes un parādi, kā var iegūt vērtību seši katrā no 10 gadījumiem!
0 0 0 = 6
1 1 1 = 6
2 2 2 = 6
3 3 3 = 6
4 4 4 = 6
5 5 5 = 6
6 6 6 = 6
7 7 7 = 6
8 8 8 = 6
9 9 9 = 6
Piezīmes. 1. Par skaitļa a aritmētisko kvadrātsakni sauc tādu nenegatīvu skaitli, kuru kāpinot kvadrātā, iegūst doto skaitli a. To apzīmē $\sqrt{a}$. Piemēram, $\sqrt{16} = 4$, jo $4^2 = 16$.
2. Visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu sauc par skaitļa n faktoriālu un apzīmē ar $n!$, tas ir, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$, piemēram, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Tiek pieņemts, ka $0! = 1$.

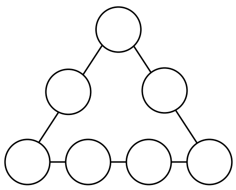
NORĀDES. 1. Ar kāda skaitļa faktoriālu var iegūt 6?
2. Ievērojot darbību secību un iekavu lietošanu, izmēģini dažādus variantus!</td><td>PCK
2. nod.,
2016./
2017.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4.2.2. Simetrija</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.6.</td><td>Koordinātu plaknē dotu figūru pagriež par 180° ap dotu punktu, lai iegūtu dotai figūrai centrāli simetrisku figūru. Koordinātu plaknē zīmē figūru, kas ir simetriska dotajai figūrai attiecībā pret dotu taisni, pret dotu punktu.</td><td>Uzdevums no MPP</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>Teorijas materiāli: NMS, teorijas materiāls “Simetrija spēlēs”</td><td></td></tr>
<tr><td>METODISKIE IETEIKUMI. 1. Papildu ir pievienoti uzdevumi (2.-6. uzd.), kuros simetrija jāizmanto skaitļu pierakstā un spēlē. Vairāk par simetrijas izmantošanu spēlēs skatīt minētajā teorijas materiālā.
2. Skolēni 3. – 6. uzdevumā pāros var izpildīt aprakstītos gājienus, lai veidotu savu paņēmienu vai lai to pārbaudītu.</td><td></td></tr>
</table>

Olimpiāžu uzdevumi	1.	Izmantojot divu veidu flīzes (skat. 1. att.), izveidoja 4×4 flīžu laukumu ar 2. att. redzamo rakstu. Tam ir divas simetrijas asis.  *1. att.*  *2. att.* **a)** Izveido 4×4 flīžu laukumu, lai tā rakstam ir vertikālā simetrijas ass, bet nav horizontālā simetrijas ass! Izveido divus dažādus šādus rakstus! **b)** Vai ir iespējams izveidot 4×4 flīžu laukumu, kuram ir vairāk nekā divas simetrijas asis? **METODISKS IETEIKUMS.** Dotos flīžu gabaliņus var izdrukāt vairākos eksemplāros, lai skolēns var praktiski veidot rakstus atbilstoši nosacījumiem. **NORĀDES.** 1. Pamato, ka b) piemērā tas nav iespējams! 2. Ievēro, ka izveidotā flīžu raksta simetrijas asis ir arī paša kvadrāta simetrijas asis!	JMK 2. kārta, 2015./ 2016.
	2.	Uz autoceļa “Brauc un piesprādzējies” ir trīs braukšanas joslas. Pa pirmo joslu jābrauc ar ātrumu no 50 līdz 70 kilometriem stundā, pa otro joslu – ar ātrumu no 90 līdz 110 kilometriem stundā, bet pa trešo – ar ātrumu no 120 līdz 140 kilometriem stundā. Autovadītājs brauc pa autoceļa “Brauc un piesprādzējies” vienu noteiktu joslu un ievēro, ka uz odometra (ierīce, kas rāda nobrauktā ceļa garumu kilometros) displeja redzams rādījums **15951**. Autovadītājs, ievērojot šo simetrisko skaitli, kas vienādi lasāms gan no labās, gan kreisās puses, nolēma pēc divām stundām atkal aplūkot displeju. Izrādījās, ka displejā atkal bija redzams simetrisks skaitlis. Pa kuru joslu vai joslām noteikti nebrauca autovadītājs? **NORĀDES.** 1. Aplūko nākamos iespējamos simetriskos skaitļus! 2. Cik liels attālums katrā gadījumā jānobrauc un kā to var izdarīt?	NOL 5. klase, 2016./ 2017.
	3.	Uz galda ir divas vāzes ar tulpēm – vienā vāzē ir 46 tulpes, bet otrā – 43 tulpes. Divi spēlētāji pamīšus ņem no tām ārā tulpes. Vienā gājienā viens spēlētājs izvēlas kādu no šīm vāzēm un no tās izņem vai nu 1 tulpi, vai arī 3 tulpes. Zaudē tas spēlētājs, kuram vairs nav ko paņemt. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt? **NORĀDES.** 1. Kā iegūt situāciju, ka abās vāzēs ir vienāds tulpju skaits? 2. Kurš spēlētājs tādā gadījumā uzvar?	AMO 5. klase, 2018./ 2019.
	4.	Riņķis sadalīts 16 vienādās daļās (skat. attēlu). Divi spēlētāji pamīšus tās aizkrāso. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot vai nu vienu no šīm daļām, vai divas blakus esošas daļas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?  **NORĀDES.** 1. Padomā, kā spēlē var palīdzēt simetrijas izmantošana! 2. Kāda stratēģija jālieto 2. spēlētājam, lai viņš vienmēr uzvarētu?	AMO 6. klase, 2018./ 2019.

Olimpiāžu uzdevumi	5.	Riņķis sadalīts 15 vienādās daļās (skat. attēlu). Divi spēlētāji pamīšus tās aizkrāso. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot vai nu vienu no šīm daļām, vai divas blakus esošas daļas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt? 	AMO 7. klase, 2018./ 2019.
		NORĀDES. 1. Padomā, kā spēlē var palīdzēt simetrijas izmantošana! 2. Kāda stratēģija jālieto 2. spēlētājam, lai viņš vienmēr uzvarētu?	
	6.	Divi spēlētāji pamīšus izvieto kauliņus tabulas 6×6 rūtiņās. Vienā gājienā var aizpildīt vai nu vienu tukšu rūtiņu, vai vairākas tukšas rūtiņas, kuras atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?	AMO 8. klase, 2018./ 2019.
		NORĀDE. Simetriski pret ko 2. spēlētājam jāveic savi gājieni?	
4.2.3.		**Garas skaitļu summas, problēmas sadalīšana daļās, pāreja uz vienkāršāku problēmu**	
6.7.		*Aprēķina vērtību izteiksmei, kuru veido vairāki saskaitāmie (visus saskaitāmos uzrakstīt ir apgrūtinoši) un kura veidota, ievērojot kādu likumsakarību. Aprēķinos spriež par iespējām izteiksmi pierakstīt citādi, lietot paņēmienus "sadalu problēmu daļās", "pāreju uz vienkāršāku problēmu".*	M.6.2.2.6. M.6.1.2.3. M.6.3.2.1.
		Spriež un patstāvīgi vai pēc dotām norādēm lieto piemērotus paņēmienus, lai aprēķinātu veselu skaitļu summas, kas satur tik daudz saskaitāmo, ka tos visus uzrakstīt ir apgrūtinoši, piemēram, "aprēķināt summu visiem veseliem skaitļiem no –2018 līdz 2022, abus ieskaitot". *Pēta sakarības, spriež un izsaka pieņēmumu par rezultātu, ja izteiksme sastāv no tik daudz saskaitāmiem, ka tos visus uzrakstīt ir apgrūtinoši, piemēram,* $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots - 98 + 99 - 100$.	Uzdevumi no MPP
6.8.		*Salīdzina izteiksmes, kas satur pozitīvus un negatīvus daļskaitļus, spriežot, nevis aprēķinot to precīzās vērtības, piemēram,* $\frac{2}{3} \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) \ldots \frac{1}{3} \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)$.	
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls "Induktīvi spriedumi"	
		METODISKS IETEIKUMS. 1. uzdevumā paņēmiens "pāreju uz vienkāršāku problēmu" jāizmanto ģeometrijas satura uzdevumā. **NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM.** Uzdevumos, kuros ir lieli skaitļi vai daudz skaitļu, dažreiz izdevīgi ir izmantot paņēmienus "sadalu problēmu daļās" vai "pāreju uz vienkāršāku problēmu".	
	1.	Valentīns savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 1. att. Pirmā figūra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 12 cm. Katru nākamo figūru Valentīns iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt vienu 2. att. figūru.  *1. att.* *2. att.* **a)** No cik kvadrātiem sastāv 70. figūra? **b)** Nosaki 70. figūras perimetru! **c)** Vai kādai no Valentīna zīmētajām figūrām perimetrs ir 1000 cm?	NOL 5. klase, 2019./ 2020.

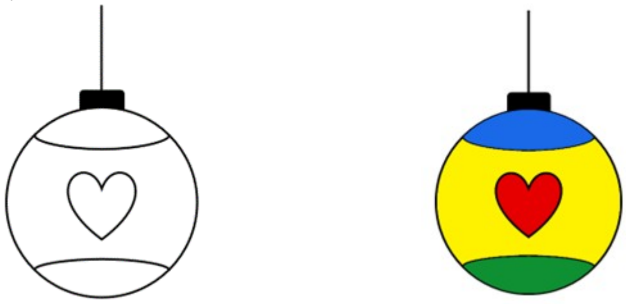
Olimpiāžu uzdevumi		**NORĀDES.** 1. Cik kvadrāti tiek pievienoti katrai nākamajai figūrai? 2. Kāds ir vienas malas garums? 3. Par cik palielinās katras nākamās figūras perimetrs?	
	2.	Nosaki skaitļa $1^3+3^3+5^3+...+101^3$ pēdējo ciparu! **NORĀDES.** 1. Sadali visus saskaitāmos atsevišķās summās, kurā katra saskaitāmā pēdējais cipars ir viens un tas pats! 2. Aplūko katras summas pēdējo ciparu!	NOL 6. klase, 2019./ 2020.
	3.	Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2017; 2018. Kā katram no tiem pierakstīt priekšā „ + ” vai „ – ” zīmi tā, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība? **NORĀDES.** 1. Kāda ir mazākā grupa ar pēc kārtas esošiem skaitļiem, lai tiem priekšā pierakstot „ + ” vai „ – ” zīmi, izteiksmes vērtība būtu nulle? 2. Kāds ir mazākais pozitīvais skaitlis? Pamato, ka to var iegūt!	Teor. mat. *Induktīvi spriedumi*
	4.	Uz tāfeles rindā uzrakstīti nepāra skaitļi 1; 3; 5; ...; 2021; 2023. Katram no tiem priekšā pierakstīja vai nu „ + ”, vai „ – ” zīmi. Vai var gadīties, ka iegūtās izteiksmes vērtība ir: **a)** 4; **b)** 1? **NORĀDES.** 1. Kāds ir mazākais skaits ar pēc kārtas esošiem skaitļiem, lai tiem priekšā pierakstot „ + ” vai „ – ” zīmi, izteiksmes vērtība būtu nulle? 2. Kā iegūt vērtību 4 no četriem pēc kārtas esošiem skaitļiem, tiem priekšā pierakstot „ + ” vai „ – ” zīmi? 3. Aplūko b) piemērā uzrakstīto skaitļu un atļauto darbību rezultātu paritāti!	NOL 7. klase, 2019./ 2020.
	5.	Aprēķini izteiksmes vērtību! $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot ... \cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)$ **NORĀDE.** Vienkāršo katrās iekavās ierakstīto izteiksmi!	SOL 8. klase, 2019./ 2020.

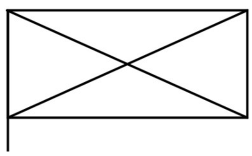
4.3. Septītā klase

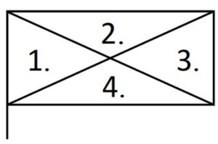
4.3.1. Pilnā pārlase, informācijas attēlošana: grafi, tabulas, Eilera-Venna diagramma			
7.1.		*Sistematizē un strukturē informāciju par kopām (izlasēm), izvēloties un izmantojot atbilstošus grafiskos organizatorus (piemēram, tabulu, grafu).*	M.9.1.2.1.
		Lieto pilno pārlasi/uzskaita visus gadījumus, nosakot objektu īpašības un skaitu; apkopo datus tabulās, veido grafus), lai pārliecinātos, vai aplūkoti visi gadījumi. *Nosaka un strukturēti pieraksta (piemēram, {1 centa monēta, 2 centu monēta, 5 centu monēta, 10 centu monēta}) pēc iespējas dažādas un visas iespējamās dotas kopas apakškopas.* *Izmanto dažādus ģeometriskus objektus/figūras, to elementus kā piemērus izlašu veidošanai (piemēram, plaknē atzīmēti punkti A, B, C, D, cik nogriežņu ar galapunktiem šajos punktos var būt).* *Grupā apspriežas, analizē vairākus piemērus, nosaka tajos kopīgo un formulē vispārinājumus – saskaitīšanas un reizināšanas likumus.*	Uzdevumi no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls “Eilera diagrammas”	
		METODISKS IETEIKUMS. Skolēnam ir jāmāca apkopot, sistematizēt, skaidri un saprotami pierakstīt informāciju.	
	1.	Viena no Latvijas bobsleja četrinieku ekipāžām ir Oskars Melbārdis, Helvijs Lūsis, Arvis Vilkaste un Jānis Strenga. Pirmais no tiem ir pilots, pārējie trīs ir stūmēji. Zināms, ka bobā pirmais sēž pilots. Cik dažādos veidos treneris bobā varēja sasēdināt pārējos trīs stūmējus? Uzraksti visus iespējamos variantus, stūmējus apzīmējot ar to vārdu pirmajiem burtiem: Helvijs Lūsis – *H*; Arvis Vilkaste – *A*; Jānis Strenga – *J*! **NORĀDES.** 1. Cik dažādos veidos var sasēdināt bobslejistus, ja pieņemam, ka otrais sēž Helvijs Lūsis? 2. Līdzīgi apskati gadījumus, kad otrais ir Arvis Vilkaste vai Jānis Strenga! **METODISKS IETEIKUMS.** Uzdevuma risinājumā var izmantot arī reizināšanas likumu.	TVC 3. kārta 2011./ 2012.
	2.	Aplīšos ieraksti skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas! Aplūko visas iespējas, kādas var būt šīs summas!  **NORĀDES.** 1. Saskaiti, kāda ir visu skaitļu summa! 2. Nosaki, kādai summai jābūt uz katras taisnes! 3. Apskati visas iespējamās šīs summas vērtības!	JMK 2. kārta, 2011./ 2012.
	3.	Mūzikas akadēmijas absolventi katrs māk spēlēt vismaz vienu mūzikas instrumentu – klavieres, vijoli vai bungas. Zināms, ka klavieres māk spēlēt 37, vijoli – 30, bet bungas – 43 absolventi. Tikai vienu mūzikas instrumentu māk spēlēt 32 absolventi. Tieši divus mūzikas instrumentus māk spēlēt 33 absolventi. Cik absolventi māk spēlēt visus trīs mūzikas instrumentus? **NORĀDES.** 1. Attēlo doto situāciju ar Eilera-Venna diagrammu! 2. Saskaitot visu instrumentu spēlētājus, cik reizes tiek pieskaitīti absolventi, kas spēlē 2 instrumentus un 3 instrumentus?	SOL 5. klase, 2011./ 2012.

<table>
<tr><td rowspan="4">Olimpiāžu uzdevumi</td><td>4.</td><td>Cik ir tādu naturālu skaitļu, kuru ciparu reizinājums ir 20, bet summa 11?

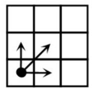
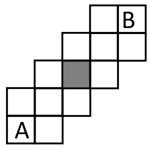
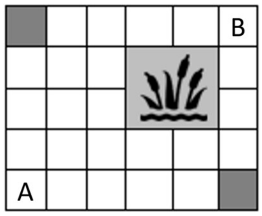
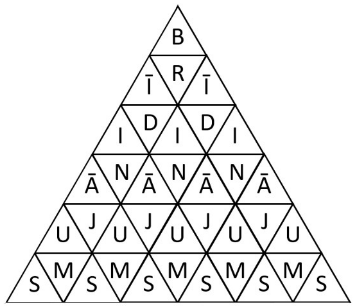
NORĀDES. 1. Kādus ciparus var saturēt prasītais skaitlis?
2. Kādu ciparu var iekļaut skaitlī, kas nemaina ciparu reizinājumu?</td><td>SOL
6. klase,
2011./
2012.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Draugu portālā ir reģistrējušies N zēni un M meitenes. Katrs zēns draudzējas ar trīs citiem zēniem un septiņām meitenēm, bet katra meitene – ar četrām citām meitenēm un pieciem zēniem. Kādas ir mazākās iespējamās N un M vērtības?

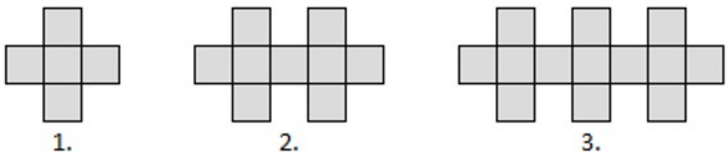
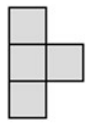
NORĀDES. 1. Ko izsaka izteiksme $\frac{N \cdot 3}{2}$?
2. Ko var secināt par skaitļa N paritāti?
3. Izveido izteiksmes visu zēnu draudzību skaitam ar meitenēm un visu meiteņu draudzību skaitam ar zēniem.
4. Salīdzini abus draudzību skaitus savā starpā!</td><td>SOL
8. klase,
2011./
2012.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Jauno matemātiķu skolā ir tradīcija – katru gadu skolēni izrotā eglītes skolas telpās ar pašu veidotiem rotājumiem. Šogad visa skola ir vienojusies, ka eglītes rotās ar ornamentiem, kas redzami 1. att., turklāt to krāsošanai izmantos tikai četras krāsas: zaļu, sarkanu, dzeltenu un zilu. Katru ornamenta daļu var krāsot tikai vienā krāsā un jāizmanto visas četras krāsas. Piemēram, viens ornamenta krāsojums redzams 2. att.
a) 7.a klases 25 skolēniem nepieciešams izrotāt savas klases eglīti. Katram skolēnam ir jāizkrāso savs Ziemassvētku ornaments. Vai eglītē noteikti būs ornaments, kas redzams 2. att.?
b) Vai noteikti 7.a klases eglītē būs iekārti vismaz divi vienādi izkrāsoti ornamenti, ja klasē ir 25 skolēni?
c) Šogad visām trim piektajām klasēm ir tas gods izrotāt skolas lielo egli. Vai noteikti lielajā eglē būs iekārti 4 vienādi ornamenti, ja piektajās klasēs ir attiecīgi 24, 25 un 26 skolēni?

1. att. *2. att.*

NORĀDES. 1. Paskaidro, kāpēc a) gadījumā atbilde ir “Nē”!
2. Aprēķini, cik dažādos veidos var izkrāsot ornamentus!</td><td>JMK
3. kārta
2021./
2022.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Cik dažādus attēlotā veida karogus var iegūt, ja katru trijstūri jānokrāso vienā no četrām krāsām: baltu, sarkanu, zilu vai zaļu, pie tam trijstūri, kam ir kopīga mala, jānokrāso dažādās krāsās?


NORĀDES. 1. Sanumurē trijstūrus (skat. att.) un aprēķinos izmanto reizināšanas likumu!


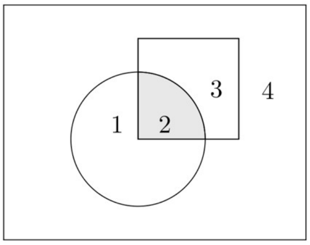
2. Cik veidos var nokrāsot 1. trijstūri un cik veidos var nokrāsot 2. trijstūri?
3. Apskati divus gadījumus, cik veidos var nokrāsot 3. trijstūri un atbilstoši gadījumam 4. trijstūri!</td><td>JMK
2. kārta
2009./
2010.</td></tr>
</table>

Olimpiāžu uzdevumi	8.	Figūriņa *zilonis* var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu, vienu rūtiņu pa labi vai vienu rūtiņu pa diagonāli (skat. 1. att.). Cik dažādos veidos zilonis no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. 2. att.)? Iekrāsotajā rūtiņā ir šķērslis, tajā zilonis nedrīkst iet.  *1. att.*  *2. att.* **NORĀDE.** Aprēķini, cik veidos var nokļūt katrā no laukuma rūtiņām! Raksti šo skaitu atbilstošajā rūtiņā!	AMO 7. klase, 2011./ 2012.
	9.	*Varde* vienā lēcienā var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu vai vienu rūtiņu pa labi. Cik dažādos veidos *varde* no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās ir šķērslis, tajās *varde* neiet.  **NORĀDE.** Aprēķini, cik veidos var nokļūt katrā rūtiņā! Raksti šo skaitu atbilstošajā rūtiņā!	NOL 7. klase 2016./ 2017.
	10.	Cik dažādos veidos attēlā var izlasīt vārdu BRĪDINĀJUMS, ja jāsāk lasīt no trijstūra augšējā luciņa, un visu laiku jāpārvietojas uz blakus luciņu? *Piezīme.* Par blakus luciņiem sauc luciņus, kam ir kopīga mala.  **NORĀDES.** 1. Vai ir trijstūri, starp kuriem ir iespējama tikai viena pāreja? 2. Aprēķini, cik veidos var nokļūt katrā trijstūrī! Raksti šo skaitu atbilstošajā trijstūrī!	SOL 8. klase, 2012./ 2013.
4.3.2.		**Pāreja uz vienkāršāku problēmu**	
7.1.		*Nosaka iespēju skaitu, samazinot aplūkojamo objektu skaitu – lieto paņēmienu "pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu".*	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls "Induktīvi spriedumi"	
		NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM. Uzdevumos, kuros ir lieli vai daudz skaitļu, dažreiz izdevīgi ir izmantot paņēmienu "pāreju uz vienkāršāku problēmu", apskatot mazāku figūru vai skaitli. **METODISKS IETEIKUMS.** 4. uzdevuma risinājumā papildus nepieciešama prasme atvērt iekavas, ja pirms iekavām ir + vai – zīme.	
	1.	Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Par skaitļa *garumu* sauksim tā pirmreizinātāju skaitu (piemēram, skaitļa $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ *garums* ir 4, skaitļa $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ *garums* ir 2 utml.). Kāds lielākais *garums* var būt četrciparu skaitlim? Atrodi visus četrciparu skaitļus ar lielāko *garumu*! **NORĀDE.** Kā var iegūt skaitli ar vislielāko *garumu*?	JMK 2. kārta, 2011./ 2012.
	2.	**a)** Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 12-stūri, kura laukums ir 20 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām? **b)** Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 12-stūri, kura laukums ir 4500 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām **NORĀDES.** 1. Uzzīmē 12-stūri, kura laukums ir 5 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām! 2. Pēc līdzīga principa izveido 12-stūrus ar prasīto laukumu!	SOL 5. klase, 2019./ 2020.

Olimpiāžu uzdevumi	3.	**a)** Vai kvadrātu var sagriezt 10 kvadrātos? **b)** Vai kvadrātu var sagriezt 103 kvadrātos? **NORĀDE.** Par cik palielinās sagriezto kvadrātu skaits, ja vienu no kvadrātiem sagriež četros kvadrātos? **METODISKS IETEIKUMS.** Skolēns var atrisināt doto uzdevumu vispārīgā gadījumā: vai kvadrātu var sagriezt n ($n \geqslant 6$) kvadrātos, izpildot prasīto: 1. Kā sagriezt kvadrātu 6, 7 un 8 kvadrātos? 2. Par cik palielinās sagriezto kvadrātu skaits, ja vienu no kvadrātiem sagriež četros kvadrātos?	SOL 6. klase, 2019./ 2020.
	4.	Valentīns savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 1. att. Pirmā figūra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 12 cm. Katru nākamo figūru Valentīns iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt vienu 2. att. doto figūru.  *1. att.*  *2. att.* **a)** No cik kvadrātiem sastāv 70. figūra? **b)** Nosaki 70. figūras perimetru! **c)** Vai kādai no Valentīna zīmētajām figūrām perimetrs ir 1000 cm? **NORĀDES.** 1. Cik kvadrāti tiek pievienoti katrai nākamajai figūrai? 2. Kāds ir vienas malas garums? 3. Par cik katras nākamās figūras perimetrs palielinās?	NOL 5. klase, 2019./ 2020.
	5.	Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2017; 2018. Kā katram no tiem pierakstīt priekšā „ + ” vai „ – ” zīmi tā, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība? **NORĀDES.** 1. Kāds ir mazākais skaits ar pēc kārtas esošiem skaitļiem, lai tiem priekšā pierakstot „ + ” vai „ – ” zīmi, izteiksmes vērtība būtu nulle? 2. Kāds ir mazākais pozitīvais skaitlis? Pamato, ka to var iegūt!	Teor. mat. *Induktīvi spriedumi*
	6.	Uz tāfeles rindā uzrakstīti nepāra skaitļi 1; 3; 5; ...; 2021; 2023. Katram no tiem priekšā pierakstīja vai nu „ + ”, vai „ – ” zīmi. Vai var gadīties, ka iegūtās izteiksmes vērtība ir: **a)** 4; **b)** 1? **NORĀDES.** 1. Kāds ir mazākais skaits ar pēc kārtas esošiem skaitļiem, lai tiem priekšā pierakstot „ + ” vai „ – ” zīmi, izteiksmes vērtība būtu nulle? 2. Kā iegūt vērtību 4 no četriem pēc kārtas esošiem skaitļiem, tiem priekšā pierakstot „ + ” vai „ – ” zīmi? 3. Pamato, ka b) piemērā tas nav iespējams, aplūkojot uzrakstīto skaitļu un atļauto darbību rezultātu paritāti!	NOL 7. klase, 2019./ 2020.
	7.	Aprēķināt izteiksmes vērtību! $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)$ **NORĀDES.** 1. Vienkāršo katrās iekavās uzrakstīto izteiksmi! 2. Kāda ir katru divu daļu reizinājuma vērtība?	SOL 8. klase, 2019./ 2020.

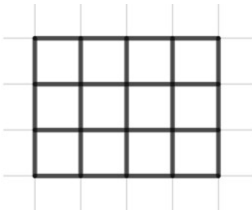
4.3.3. Ģeometrija, pilnā pārlase, piemērs			
7.2.		*Konkrētos piemēros, t. sk. raksturojot punktu ģeometrisko vietu, atšķir vispārīgo apgalvojumu un atsevišķus apgalvojumus par plaknes figūru savstarpējo novietojumu vai īpašībām.*	M.9.2.3.1. M.9.6.1.4.
		Min piemērus atsevišķiem un vispārīgiem apgalvojumiem, kuri raksturo punktu un taišņu savstarpējo novietojumu. *Sprież no konkrētā uz vispārīgo, nosakot nogriežņu skaitu, kurus veido uz taisnes vai riņķa līnijas atzīmēti 2; 3; 4; ... punkti.* *Sprież, veido skici vai zīmējumu atbilstoši nosacījumiem par pazīstamu figūru, t. sk. daudzstūru īpašībām, skaitu un savstarpējo novietojumu, ja nosacījumi doti teksta veidā un pierakstīti ar pieņemtajiem simboliem, piemēram, "atzīmēt 4 punktus tā, lai veidotos: a) tieši 4; b) tieši 3 dažādi trijstūri (ar virsotnēm šajos punktos)".* *Secina, cik kopīgu punktu var būt divām taisnēm plaknē. Izsaka pieņēmumu par to, kas atšķirīgs divu krustisku taišņu dažādiem novietojumiem.*	Uzdevumi no MPP
7.6.		*Nosaka, cik krustpunktu var veidot trīs taisnes plaknē, katru gadījumu ilustrē ar skici, pamato, kāpēc citu gadījumu nav, loģiski spriežot (trīs krustpunkti, ja katra krustojas ar katru).*	
Olimpiāžu uzdevumi		**NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM.** 1.-3. un 5.-7. uzdevumā uzdevumu risinājumus var sākt ar dažiem derīgiem piemēriem un, tos papildinot, iegūt pārējos prasītos gadījumus. **METODISKS IETEIKUMS.** Vairāku uzdevumu risinājumos var izmantot reizināšanas likumu.	
	1.	Zināms, ka nekādas trīs no dotajām taisnēm nekrustojas vienā punktā, bet katras divas savā starpā krustojas. Cik dažādu krustpunktu rodas, ja pavisam ir uzzīmētas: **a)** 5 taisnes; **b)** 2011 taisnes? **NORĀDES.** 1. Uzzīmē gadījumu ar 5 taisnēm! 2. Cik taisnes krusto katra taisne? 3. Cik reizes tiek ieskaitīts katrs krustpunkts, ja reizina taišņu skaitu ar krustpunktu skaitu uz katras taisnes? 4. Izveido formulu, kas izsaka krustpunktu skaitu, ja ir dotas *n* taisnes!	SOL 7. klase, 2011./ 2012.
	2.	Vai var uzzīmēt sešas taisnes tā, lai tām būtu tieši: **a)** 6 krustpunkti; **b)** 16 krustpunkti? **NORĀDES.** 1. Kad taisnēm nav krustpunktu? 2. Izmanto to, ka vairākas taisnes var krustoties vienā punktā! 3. Pierādi, ka 6 taišņu lielākais krustpunktu skaits ir mazāks nekā 16! **METODISKS IETEIKUMS.** Uzdevuma b) piemēra pamatojumā var izmantot iegūto sakarību no 2. uzdevuma, tāpēc skolēnam ieteicams vispirms atrisināt to.	SOL 7. klase, 2016./ 2017.
	3.	Uzzīmē plaknē sešus punktus tā, lai no katra uzzīmētā punkta tieši trīs citi uzzīmētie punkti atrastos tieši 1 cm attālumā! **NORĀDE.** Sāc ar 4 punktu uzzīmēšanu atbilstoši uzdevuma nosacījumiem!	NOL 8. klase, 2011./ 2012.

<table>
<tr><td rowspan="5">Olimpiāžu uzdevumi</td><td>4.</td><td>Doti seši nogriežņi ar garumiem 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm. Cik dažādos veidos no tiem var izvēlēties trīs nogriežņus tā, ka no tiem var izveidot trijstūri (katra trijstūra mala ir viens vesels nogrieznis)?

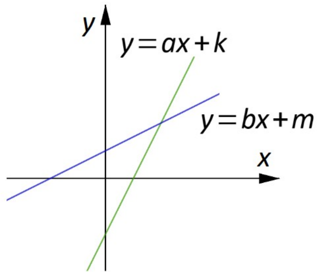
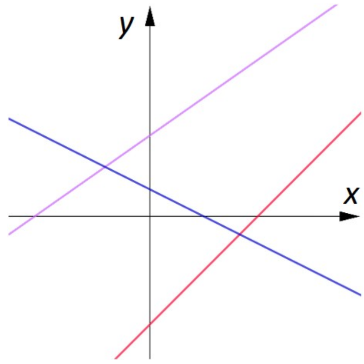
NORĀDE. Kuras malas var izvēlēties, lai trijstūra nevienādība būtu patiesa?</td><td>AMO
7. klase,
2011./
2012.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Zane uz papīra lapas uzzīmēja riņķa līniju un kvadrātu (tā, ka neviens no tiem nepieskaras lapas malai) un tad sagrieza lapu pa to kontūrām. Cik daļās var būt sagriezta lapa? Atrodi visus variantus, nav jāpamato, ka citu nav! Vienu piemēru, kā lapa var būt sagriezta 4 daļās, skat. attēlā.


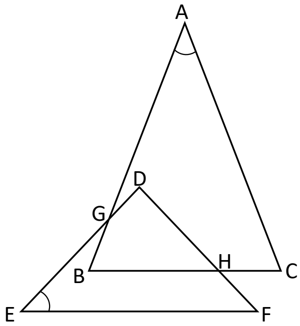
NORĀDE. Parādi, kā lapu var sagriezt 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un 10 daļās!</td><td>NOL
7. klase,
2016./
2017.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Plaknē novilktas četras taisnes. Cik leņķus, kas mazāki nekā 180°, var veidot šīs taisnes?

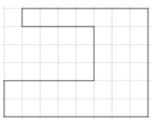
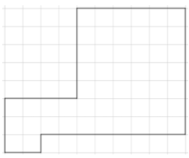
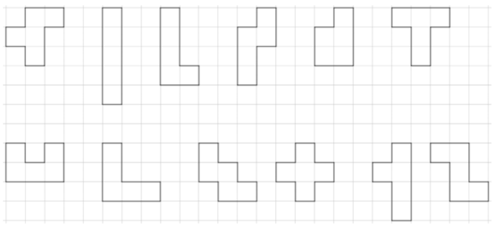
NORĀDES. 1. Cik leņķi, kas mazāki nekā 180°, izveidojas, krustojoties divām taisnēm?
2. Aplūko visus četru taišņu krustošanās gadījumus!</td><td>SOL
7. klase,
2018./
2019.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Cik daļās plakni var sadalīt divas taisnes un divi stari?

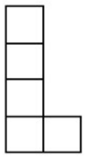
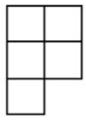
NORĀDES. 1. Parādi, kā iegūt plaknes sadalījumu 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9 daļās!
2. Kā var iegūt pēc iespējas mazāk daļu un pēc iespējas vairāk daļu?
3. Pamato, kāpēc nevar iegūt mazāk kā 3 daļas un vairāk kā 9 daļas!</td><td>JMK
2. kārta,
2020./
2021.</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Mazajai Alisei rūtiņu burtnīcā pa rūtiņu līnijām patīk zīmēt taisnes un pēc tam skaitīt, cik kvadrātus var redzēt iegūtajā zīmējumā. Piemēram, attēlā ir deviņas taisnes un var redzēt 20 kvadrātus (12 kvadrāti ar malas garumu 1 vienība, 6 kvadrāti ar malas garumu 2 vienības un 2 kvadrāti ar malas garumu 3 vienības).

a) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 17 kvadrāti!
b) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 100 kvadrāti!
c) Cik kvadrātus var iegūt, ja dotas 10 taisnes?
d) Uzraksti formulu, kā aprēķina iegūto taisnstūru skaitu, ja ir uzzīmētas m horizontālas taisnes un n vertikālas taisnes!

NORĀDES. 1. Veic pilno pārlasi, lai uzskaitītu a), b) un c) piemērā iegūto kvadrātu skaitu!
2. Apskati c) gadījumā visas iespējamās kombinācijas vertikālo un horizontālo taišņu skaitam!
3. Cik taisnes vajadzīgas, lai tās ierobežotu vienu kvadrātu?
4. Izveido formulu gadījumam, cik dažādos veidos var izvēlēties divas vertikālās taisnes!</td><td>JMK
1. kārta,
2020./
2021.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4.3.4. Lineāra funkcija, koeficientu ietekme</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">7.4.</td><td>Aplūko konkrētus piemērus, t. sk. ar digitāliem rīkiem izveidotus, pēta un raksturo lineāras funkcijas grafika novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no koeficientu vērtībām.</td><td>M.9.2.1.2.</td></tr>
<tr><td>Analītiski nosaka funkcijas vērtības zīmi noteiktai argumenta vērtībai, punkta piederību grafikam, krustpunktu ar ordinātu asi.</td><td>Prasme no MPP</td></tr>
<tr><td>Pēta lineāras funkcijas novietojumu koordinātu plaknē, lietojot digitālos rīkus; formulē vispārinājumus par lineāras funkcijas $y=kx+b$ grafika novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no k un b vērtībām.</td><td>Uzdevums no MPP</td></tr>
</table>

		Teorijas materiāli: NMS, teorijas materiāls “Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas”	
		METODISKS IETEIKUMS. Pēc jaunās programmas skolēni vispirms apgūst lineāru funkciju un tikai pēc tam lineāru vienādojumu risināšanu, tāpēc uzdevumu risinājumos nevajadzētu iekļaut prasmes, kas saistītas ar vienādojuma jēdzienu. Vienkāršos gadījumos skolēns prot noteikt nezināmo darbības locekli.	
Olimpiāžu uzdevumi	1.	Koordinātu plaknē konstruēti funkciju $y=ax+k$ un $y=bx+m$ grafiki (skat. att.). Pierādi, ka $(b-a)(k-m)>0$!  **NORĀDES.** 1. Ko nosaka koeficienti *k* un *m*, kurš no tiem ir lielāks? 2. Ko nosaka koeficienti *a* un *b*, kurš no tiem ir lielāks?	SOL 8. klase, 2011./ 2012.
	2.	Dotas divas funkcijas $y=ax+b$ un $g=cx+d$. Zināms, ka ar katru *x* vērtību funkcijas *g* vērtības ir mazākas nekā funkcijas *y* vērtības. Noskaidro, vai $(a-c)$ var būt pozitīvs, negatīvs vai nulle! **NORĀDES.** 1. Kādi ir funkciju grafiki, ja ar vienu un to pašu *x* vērtību vienas funkcijas vērtība ir lielāka nekā otras funkcijas vērtība? 2. Kādi ir koeficienti *a* un *c*, ja funkciju grafiki ir paralēli?	AMO 7. klase, 2018./ 2019.
	3.	Dotas divas lineāras funkcijas y_1 un y_2, kas definētas visām reālām *x* vērtībām. **a)** Vai var gadīties, ka y_1+y_2 nav lineāra funkcija? **b)** Vai var gadīties, ka $y_1 \cdot y_2$ ir lineāra funkcija? **NORĀDES.** 1. Uzraksti divu dažādu lineāru funkciju vispārīgās formulas un apskati to summu! 2. Izmanto to, ka lineārā funkcijā $y=ax+b$ koeficients *a* var būt arī 0.	Teor. mat. *Lineāras funkcijas un kvadrāt-funkcijas*
	4.	Vai var gadīties, ka attēlā dotās taisnes ir funkciju $y=ax+b$, $y=bx-c$ un $y=cx+a$ grafiki (grafiki nav doti mērogā)?  **NORĀDES.** 1. Kādiem jābūt taišņu virziena koeficientiem *a, b, c*, ja ir divas augošas un viena dilstoša funkcija? 2. Apskati koeficientu *a, b, c* zīmes gan kā taišņu virziena koeficientiem, gan kā brīvajiem locekļiem!	NOL 7. klase, 2020./ 2021.
	5.	Dotas lineāras funkcijas $y=bx-71+m$, kur koeficientus *b* un *m* saista sakarība $b+2m=2021$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafiki krustojas vienā punktā! **NORĀDE.** 1. Kāda ir izteiksmes $\frac{1}{2}b+m$ vērtība? 2. Kā šo vērtību izmantot risinājumā?	NOL 8. klase, 2020./ 2021.

4.3.5. Ģeometrija, trijstūri un leņķi, pierādījuma uzdevumi			
7.5.		*Veido pierādījumu, lietojot gan trijstūru vienādības pazīmes, gan citas iepriekš pierādītas/zināmas figūru īpašības, definīcijas.*	M.9.6.3.2. M.9.6.1.5.
		Aprēķina figūru lielumus, lietojot vienādsānu trijstūra īpašības. *Aprēķina figūru lielumus, lietojot trijstūra augstuma, mediānas, bisektrises definīcijas.*	Prasmes no MPP
7.6.		*Lieto leņķu, kuri veidojas, ja divas paralēlas taisnes krustojas ar trešo taisni, īpašības, lai aprēķinātu nezināmos lielumus, formulētu apgalvojumus par figūru īpašībām.* *Lieto trijstūra leņķu summu, lai aprēķinātu nezināmos lielumus, formulētu apgalvojumus par figūru īpašībām.*	
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls “Trijstūri”	
		METODISKS IETEIKUMS. Kopā ar skolēniem mācību stundās vai ārpusstundu nodarbībās var veidot atgādni ar ģeometrijas formulām un sakarībām.	
	1.	Divi vienādsānu trijstūri *ABC* ($AB=AC$) un *DEF* ($DE=DF$) savstarpēji novietoti tā, kā redzams attēlā. Zināms, ka $BC \parallel EF$ un $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEF = 32^\circ$. Aprēķini leņķa *AGE* lielumu!  **NORĀDES.** 1. Aprēķini vienādsānu trijstūru visus leņķus! 2. Kuri leņķi ir vienādi pie paralēlajām taisnēm? 3. Izmanto sakarību, ka četrstūra iekšējo leņķu summa ir 360°.	SOL 8. klase, 2011./ 2012.
	2.	Trijstūrī *ABC* leņķis *ABC* ir 30° liels. Uz malas *AB* izvēlēts punkts *E*, bet uz malas *BC* punkts *F* tā, ka trijstūris *CEF* ir vienādmalu. Pierādi, ka punkts *F* ir malas *BC* viduspunkts! **NORĀDES.** 1. Kurus leņķus vari aprēķināt, zinot, ka trijstūris *CEF* ir vienādmalu? 2. Pamato, ka trijstūris *BFE* ir vienādsānu!	NOL 8. klase, 2011./ 2012.
	3.	Dots trijstūris *ABC* un punkts *P* tā iekšpusē. Pierādi, ka attālumu summa no punkta *P* līdz dotā trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā puse no trijstūra perimetra! **NORĀDES.** 1. Uzraksti trijstūra nevienādības visiem trijstūriem, kuru virsotne ir punktā *P.* 2. Saskaiti uzrakstītās nevienādības!	AMO 8. klase, 2011./ 2012.
	4.	Uz vienādmalu trijstūra *ABC* malām *AB* un *BC* attiecīgi atlikti punkti *M* un *N* tā, ka $MB+BN=AC$. Pierādi, ka $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MCN = 60^\circ$. **NORĀDES.** 1. Izmantojot nogriežņa garuma īpašību, izsaki malu *AB* un *AC* garumus! 2. Salīdzini abas izteiksmes un secini par nogriežņu *AM* un *BN* garumiem! 3. Pierādi, ka trijstūri *ABN* un *CAM* ir vienādi!	NOL 8. klase, 2014./ 2015.

	5.	Trijstūrī *ABC* novilktas bisektrises *AK* un *BM*. Zināms, ka $AK = BM = AB$. Aprēķini trijstūra *ABC* leņķus! **NORĀDES.** 1. Apzīmē $\sphericalangle BAM = 2\alpha$! 2. Izsaki leņķus *BMA, BAK, ABM* un *ABK*! 3. Izsaki leņķi *AKB* divos dažādos veidos! 4. Sastādi vienādojumu!	NOL 8. klase, 2019./ 2020.
		4.3.6. Plaknes un figūru pārklāšana	
7.5.		*Lietojot digitālos rīkus, veido plaknes pārklājumu ar vienādiem vienādsānu, vienādmalu trijstūriem.*	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** A. Cibulis, Pentamino I daļa A. Cibulis, Pentamino II daļa	
		METODISKS IETEIKUMS. Atbilstoši uzdevumu nosacījumiem var izgriezt vairākas figūru kopijas un veidot prasītos pārklājumus.	
	1.	Izdomā vismaz divus dažādus veidus, kā papīra lapu ar izmēriem $20\ \text{cm} \times 20\ \text{cm}$ var noklāt ar kvadrātiem un vienādmalu trijstūriem, kuru malu garumi 1 cm! Jāizmanto abu veidu figūras. Figūras nedrīkst pārklāties un lapai nedrīkst palikt nenoklātas vietas, bet figūras drīkst pāriet pāri lapas malai. **NORĀDE.** Kā no trijstūriem vari izveidot pārklājumu, kuru var turpināt bezgalīgi?	JMK 3. kārta, 2011./ 2012.
	2.	Andris apgalvo, ka sapnī bijis kādā Ēģiptes piramīdā un kādā tās telpā redzējis tādu piecstūri, kas salikts no diviem vienādiem piecstūriem, kuri sastāvējuši no vienādiem regulāriem trijstūriem. Uzzīmē šādu piecstūri! **NORĀDE.** Izveido piecstūri, kas sastāv no 6 vienādiem regulāriem trijstūriem!	AMO 7. klase, 2018./ 2019.
	3.	Astoņstūri, kas uzzīmēts uz rūtiņu lapas, sauksim par maģisku, ja tā visas malas atrodas uz rūtiņu līnijām un to garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ja, sākot ar vienu virsotni, astoņstūra malas ir sakārtotas viena pēc otras augošā vai dilstošā secībā, tad šādu astoņstūri sauc par perfektu. Piemēram, 1. att. ir uzzīmēts maģisks astoņstūris, bet 2. att. ir perfekts astoņstūris. **a)** Izmantojot visas 3. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, saliec maģisko astoņstūri! **b)** Vai, izmantojot visas 3. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, iespējams salikt 3. att. perfekto astoņstūri? **c)** Atrodi vēl kādu citu daudzstūri, kuru var salikt no visām 3. att. dotajām figūrām!  *1. att.*  *2. att.*  *3. att.* **NORĀDES.** 1. Piemērā b) pārbaudi dotā perfektā astoņstūra laukumu un izmantojamo figūru laukumu summu! 2. Piemērā c) ievēro, ka daudzstūrim nevar būt caurumi! **METODISKS IETEIKUMS.** Dotās 3. attēla figūras var izgriezt un no tām veidot figūras atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.	JMK 1. kārta, 2021./ 2022.

Olimpiāžu uzdevumi	4.	Lauriņa no taisnstūra ar izmēriem 7×2018 rūtiņas izgriež 1. att. dotās figūras, bet Pēcītis no tāda paša taisnstūra izgriež 2. att. dotās figūras. Kurš no viņiem var izgriezt vairāk figūru? Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.  *1. att.*  *2. att.* **NORĀDES.** 1. Kā taisnstūri ar izmēriem 2×5 rūtiņas var sagriezt gan Lauriņa, gan Pēcītis? 2. Cik taisnstūros ar izmēriem 2×5 var sadalīt doto taisnstūri? 3. Kā Pēcītim sadalīt taisnstūri ar izmēriem 7×8 tā, lai pāri paliek 1 rūtiņa?	AMO 7. klase, 2017./ 2018.
4.3.7.		**Algebrisku izteiksmju veidošana**	
7.7.		*Veido skaitliskas izteiksmes un aprēķina plaknes figūru un telpisku ķermeņu lielumus. Pēc tam ar algebriskām izteiksmēm pieraksta figūru lielumus, ja kāds/kādi no lielumiem doti vispārīgā veidā, piemēram, riņķa līnijas garumu, ja rādiuss ir r, riņķa diametru, ja riņķa līnijas garums ir C, taisnstūra malu, ja perimetrs ir P un otra mala ir b.*	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**NORĀDES VISIEM UZDEVUMIEM.** 1. Atrisini vieglāku uzdevumu, nezināmo vietā ievietojot konkrētus skaitļus! 2. Izveido vispārinājumu, lietojot nezināmos!	
	1.	Pļavā ganās g govis, z zirgi un a aitas. Govju ir divas reizes mazāk nekā aitu, savukārt aitu ir par 6 vairāk nekā zirgu. Kura no dotajām vienādībām nav patiesa? **a)** $2g=6+z$ **b)** $a=2g$ **c)** $a=z-6$ **d)** $2a=z+2g+6$ **e)** $z=a-6$	TVC 2. kārta, 2007./ 2008.
	2.	Kastē atrodas m bumbiņas, b kubiņi un a piramīdas. Bumbiņu ir 2 reizes mazāk nekā piramīdu, bet piramīdu ir par 6 vairāk nekā kubiņu. Kura vienādība ir aplama? **a)** $2m=6+b$ **b)** $a=2m$ **c)** $a=b-6$ **d)** $2a=b+2m+6$ **e)** $b=a-6$	TVC 4. kārta, 2007./ 2008.
	3.	Trīs rūķi dienā apēd p kilogramu piparkūku. Cik kilogramus piparkūku apēd septiņi rūķi d dienās? **a)** $p\cdot7\cdot d$ **b)** $p:3\cdot7$ **c)** $p\cdot3\cdot d\cdot7$ **d)** $3:p\cdot7\cdot d$ **e)** $p:3\cdot7\cdot d$ **METODISKS IETEIKUMS.** Skolēnam var nedot atbilžu variantus.	TVC 2. kārta, 2015./ 2016.

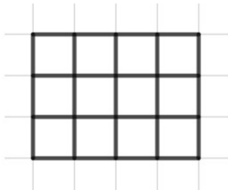
Olimpiāžu uzdevumi	4.	Lauka platība ir 60 ha. Viens zemnieks dienā var apart x ha, otrs – y ha. Ko izsaka katra izteiksme? **a)** $60:x$ **d)** $60-x$ **g)** $60:(x+y)$ **b)** $x+y$ **e)** $x-y$ **h)** $x\cdot 3-y\cdot 2$ **c)** $x:y$ **f)** $60-y\cdot 3$ **i)** $60:(x+y)\cdot x$	
	5.	Slidotavas laukums ir 500 kvadrātmetri. Norlands vienā stundā no sniega var attīrīt n kvadrātmetrus, Hardijs – h kvadrātmetrus. Ko izsaka izteiksme $500-(h+n)\cdot 2$? **a)** tik stundās abi zēni var attīrīt no sniega visu slidotavu; **b)** tik stundās Hardijs var attīrīt no sniega visu slidotavu; **c)** tik kvadrātmetri būs attīrīti, kad Norlands un Hardijs būs strādājuši 2 stundas; **d)** tik kvadrātmetri būs palikuši neattīrīti, kad Norlands un Hardijs būs strādājuši 2 stundas; **e)** dotā izteiksme neko neizsaka. **METODISKS IETEIKUMS.** Skolēnam var nedot atbilžu variantus.	TVC 2. kārta 2011./ 2012.
	6.	Trijstūrī ABC $(AB < BC)$ novilkta bisektrise BD. Uz BD izvēlēts tāds punkts F, ka $\sphericalangle AFD=\sphericalangle ADF$, un uz BC izvēlēts tāds punkts E, ka $FE \parallel AC$. Pierādi, ka $\sphericalangle BAF=\sphericalangle BEF$! **NORĀDES.** 1. Apzīmē $\sphericalangle ABF=\sphericalangle EBF=\beta$ un $\sphericalangle AFD=\sphericalangle ADF=\alpha$! 2. Izmanto blakusleņķu summas un trijstūra iekšējo leņķu summas sakarību! 3. Izmanto kāpšļu leņķu vienādību pie paralēlām taisnēm!	NOL 7. klase, 2016./ 2017.
	7.	Trijstūrī ABC izvēlēts malas AB iekšējs punkts D un novilkts nogrieznis CD. Dots, ka $AB=BC$ un $BD=DC=CA$. Aprēķini leņķi ABC! **NORĀDES.** 1. Apzīmē $\sphericalangle ABC=\alpha$ un $\sphericalangle BAC=\beta$! 2. Uzraksti visus vienādos leņķus vienādsānu trijstūros! 3. Izsaki leņķi CDA ar mainīgo α! 4. Izveido vienādojumu, izmantojot trijstūra ABC leņķu summu!	SOL 9. klase, 2012./ 2013.
		4.3.8. Algebriskas izteiksmes, vairāku gadījumu apskatīšana	
7.9.		*Salīdzina algebriskas izteiksmes (piemēram, $x<x+3$; $2x>3x$), spriežot un pamatojot savus spriedumus, izmantojot lielumu novietojumu uz skaitļu taisnes, darbību īpašības, arī šķiro gadījumus, skaidro, ka atsevišķa apgalvojuma patiesums nenodrošina vispārīga apgalvojuma patiesumu.*	M.9.2.1.2. M.9.2.3.1. M.9.2.3.6. M.9.4.3.4.
		Spriež, salīdzina izteiksmes $2a$ un $4a$; secina, ka jāizšķir 3 gadījumi; pastāsta, kā sprieda un secināja.	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi	1.	Salīdzini x un y, ja abi nezināmie ir naturāli skaitļi! (Aplītī ieraksti „ < ”, „ = ” vai „ > ”.) **a)** Ja $3x=y$, tad $x \bigcirc y$. **b)** Ja $x-y=2$, tad $x \bigcirc y$. **c)** Ja $x:y=1$, tad $x \bigcirc y$. **d)** Ja $x+y>2x$, tad $x \bigcirc y$. **e)** Ja $5x-12y=0$, tad $x \bigcirc y$. **NORĀDES.** 1. Izvēlies dažus konkrētus skaitļus, lai izvirzītu hipotēzi! 2. Vai tava hipotēze izpildīsies visos gadījumos?	TVC 2. kārta, 2005./ 2006.

Olimpiāžu uzdevumi	2.	Salīdzini naturālus skaitļus x un y ($>$, $<$, $=$, nevar noteikt), ja: **a)** $3x=5y$; **b)** $17x-8=17y-8$; **c)** $x+y=4$. **NORĀDE.** 1. Izvēlies dažus konkrētus skaitļus, lai izvirzītu hipotēzi! 2. Vai tava hipotēze izpildīsies visos gadījumos?	TVC 4. kārta, 2007./ 2008.
	3.	Punkts ar koordinātām (a; b) atrodas 1. kvadrantā. Kurā kvadrantā atrodas punkts ar koordinātām ($-b$; a)? **NORĀDE.** Kādas ir skaitļu a un b zīmes, ievērojot, kurā kvadrantā atrodas punkts (a; b)?	A. Andžāns, I. Markusa *Vai vari atrisināt? Algebra* 1996. g. 17.-18. lpp.
	4.	Jānis izvēlējās skaitļus a un b un attēloja koordinātu plaknē punktus ar koordinātām (a; b), (a; $-b$), ($-a$; b), ($-a$; $-b$), (b; a), (b; $-a$), ($-b$; a), ($-b$; $-a$). Cik dažādus punktus viņš varēja iegūt? **NORĀDES.** 1. Cik dažādus punktus iegūst, ja $a=b=0$? 2. Cik dažādus punktus iegūst, ja vai nu $a=0$, vai $b=0$? 3. Cik dažādus punktus iegūst, ja $a=b\neq0$? 4. Cik dažādus punktus iegūst, ja $a=-b\neq0$? 5. Cik dažādus punktus iegūst, ja a, b, $-a$, $-b$ ir dažādi skaitļi?	
	5.	Cik no skaitļiem $(a-b)(a-c)$; $(b-a)(b-c)$; $(c-a)(c-b)$ vienlaikus var būt pozitīvi? **NORĀDES.** 1. Cik skaitļu no dotajiem *a, b, c* var būt vienādi? Aplūko šos gadījumus! 2. Gadījumu, kad visi skaitļi *a, b, c* ir dažādi, attēlo tos uz skaitļu taisnes!	
	6.	Kādu lielāko skaitu skaitļu var uzrakstīt rindā tā, lai katru trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu pozitīva, bet katru piecu pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu negatīva? **NORĀDES.** 1. Vai prasīto var izpildīt ar 6 skaitļiem? 2. Apzīmē 7 skaitļus ar *a, b, c, d, e, f, g!* 3. Aplūko 3 skaitļu un 5 skaitļu summas un secini par f un b zīmēm!	SOL 7. klase, 2019./ 2020.

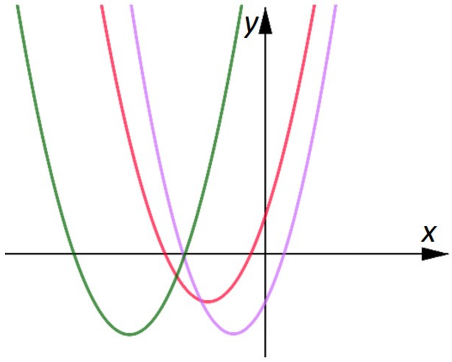
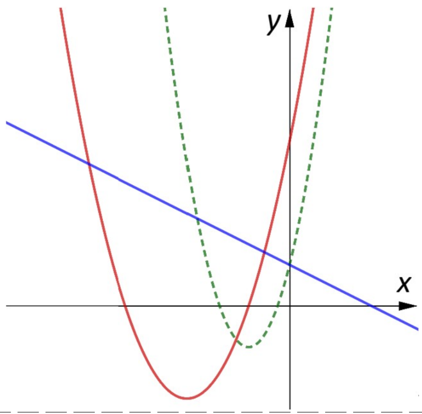
4.4. Astotā klase

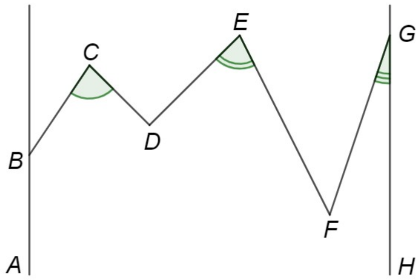
		4.4.1. Periodiskas virknes, pāreja uz vienkāršāku problēmu	
8.2.		*Lieto paņēmienu “pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu”, lai noteiktu likumsakarības pakāpju ar vienu un to pašu bāzi pierakstā.*	M.9.4.1.1. M.9.2.2.6.
		Mēģina spriežot noteikt pakāpes, piemēram, 2^{60}, pēdējo ciparu; ja nepieciešams, skolotājs rosina aplūkot pakāpes ar to pašu bāzi, bet ar mazākiem kāpinātājiem; skolēni sadarbojoties vai patstāvīgi secina, ka pēdējo ciparu veidotā virkne ir periodiska, skaidro, kā to varētu izmantot; formulē vispārinājumu, kāpinātāju pieraksta ar lineāru izteiksmi.	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls “Periodiskas virknes”	
		METODISKIE IETEIKUMI. 1. No uzdevuma par skaitļa 2^{60} pēdējo ciparu var viegli pāriet uz citiem uzdevumiem, kas saistīti ar periodu. 2. Skolotājs var likt skolēnam izdomāt līdzīgu uzdevumu par periodiskām virknēm, piemēram, nomainot virknes locekļa kārtas numuru. **NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM.** Visos uzdevumos jāsaskata periods – sakarība (skaitļi, burti vai simboli), kas visu laiku atkārtojas.	
	1.	Jokainajā lauku sētā aitas un cūkas sastājušās garā rindā pēc šāda likuma (ik pēc 3 dzīvniekiem secība atkārtojas):  … 1. 2. 3. 4. 5. 6. … Kas atrodas šīs rindas: **a)** 21. vietā; **b)** 100. vietā; **c)** 2018. vietā?	Teor. mat. *Periodiskas virknes*
	2.	Rindā bez atstarpēm uzrakstīti vārdi (pirmais vārds ir “matemātikas” un pēc tam atkārtojas vārds “olimpiāde”): MATEMĀTIKASOLIMPIĀDEOLIMPIĀDEOLIMPIĀDE… Kāds burts atrodas 500. vietā?	Teor. mat. *Periodiskas virknes*
	3.	Naturālu skaitļu virknes 7; 14; 17; ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot 1. Kāds ir šīs virknes 2011. loceklis?	SOL 9. klase, 2011./ 2012.
	4.	Dota skaitļu virkne 1; 1; 2; 5; 9; 6; ... . Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu. **a)** Nosaki, vai šīs virknes 2012. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis! **b)** Aprēķini virknes 2012. locekli!	NOL 9. klase, 2011./ 2012.
	5.	Skaitļu virknē katru nākamo locekli iegūst, saskaitot iepriekšējā virknes locekļa ciparu kvadrātus. Piemēram, ja virknes pirmais loceklis ir 12, tad otrais loceklis ir $1^2+2^2=5$, trešais loceklis ir $5^2=25$, ceturtais loceklis ir $2^2+5^2=29$ utt. **a)** Aprēķini virknes pirmos piecus locekļus, ja pirmais loceklis ir 25. **b)** Kāds ir virknes 2016. loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 25?	JMK 3. kārta, 2015./ 2016.

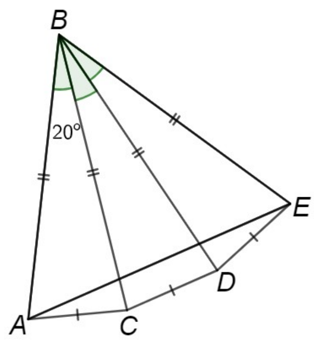
Olimpiāžu uzdevumi	6.	Profesors Cipariņš skolēniem vadīja nodarbību par interesantām virknēm, kurām katru nākamo locekli iegūst kā iepriekšējo divu virknes locekļu nenulles ciparu reizinājumu, piemēram, 3; 2; 6; 12; 12; 4; … . Šādas virknes ir viegli aplūkot un pētīt ar datorprogrammu palīdzību, bet nodarbības laikā profesors Cipariņš skolēniem izstāstīja, ka to var izdarīt, veicot tikai aprēķinus uz papīra. Atrisini dotos uzdevumus un apraksti risināšanas metodi, kurā nav izmantotas palīgierīces. **a)** Kāda ir pirmo 2022 virknes locekļu summa, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 10? **b)** Kāds ir 2022. virknes loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 4? **c)** Cik reizes b) gadījumā dotajā virknē parādās cipars 9, ja ir uzrakstīti tikai tās pirmie 2022 locekļi?	JMK 5. kārta, 2021./ 2022.
	7.	Skaitļu virkne tiek veidota pēc šāda likuma: ja x ir virknes loceklis, tad nākamo virknes locekli aprēķina pēc formulas $\frac{1}{1-x}$. Virknes pirmais loceklis ir 4. Aprēķini iegūtās virknes 2018. locekli un pirmo 2018 locekļu summu!	AMO 7. klase, 2017./ 2018.
4.4.2. Ģeometrija, pilnā pārlase, piemērs			
8.4.		*Sadarbojas, skicē, spriež, pamato, kā dotu taisnstūri sadalīt divos vienlielos 1) taisnstūros; 2) četrstūros, kas nav taisnstūri; 3) trijstūros*	
8.5.		*Ar skolotāja atbalstu (spriežot no pretējā – "iedomāsimies, ka tā nav") pierāda taišņu paralelitātes pazīmi "ja divas taisnes ir perpendikulāras vienai un tai pašai trešajai taisnei, tad tās ir savstarpēji paralēlas"; izmantojot iegūto rezultātu un trijstūru vienādības pazīmes, pierāda otru taišņu paralelitātes pazīmi.* *Pēta, pamato četrstūru savstarpējo novietojumu, piemēram, nosaka, cik malu var būt divu izliektu četrstūru šķēlumam vai apvienojumam, kāds lielākais krustpunktu skaits var būt divu četrstūru kontūriem (malām).* *Ievērojot nosacījumus, ar 1 vai 2 taisnēm dala trijstūri, kvadrātu plaknes figūrās un pēta, skaidro, kādas figūras var iegūt, cik dažādu gadījumu iespējams.* *Sadarbojas, spriež, veido zīmējumu, skaidro kā taisnstūri sadalīt 2 daļās, no kurām var izveidot paralelogramu, trapeci; kā taisnstūri sagriezt 2; 4 vienādās trapecēs; kā trijstūri sagriezt trijās trapecēs.* *Spriež, zīmē paralelogramu, ievērojot dotos nosacījumus, piemēram, "paralelograma augstums ir arī diagonāle".*	Uzdevumi no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM.** 1., 3., 4. un 6. izmanto paņēmienu "pāreju uz vienkāršāku problēmu", sākot risinājumu ar mazāku figūru skaitu un saskatot sakarību!	
	1.	Uzzīmē plaknē sešus punktus tā, lai no katra uzzīmētā punkta tieši trīs citi uzzīmētie punkti atrastos tieši 1 cm attālumā! **NORĀDE.** Kā var uzzīmēt 4 punktus, ievērojot dotos nosacījumus?	NOL 8. klase, 2011./ 2012.
	2.	Kādos daudzstūros ar vienu taisni var sadalīt taisnstūri? **NORĀDE.** Aplūko iespējamos taisnes novietojumus!	

<table>
<tr><td rowspan="5">Olimpiāžu uzdevumi</td><td>3.</td><td>Plaknē novilktas 5 vertikālas, 4 horizontālas un 3 savstarpēji paralēlas slīpas taisnes. Cik paralelogramu izveido šīs taisnes?
NORĀDES. 1. Kādi gadījumi iespējami, izvēloties paralelograma pretējās malas (piemēram, pretējās malas var izvēlēties no horizontālajām un vertikālajām taisnēm)?
2. Vai malu izvēlē ir svarīga secība?</td><td>AMO
9. klase,
2018./
2019.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Zināms, ka nekādas trīs no dotajam taisnēm nekrustojas vienā punktā, bet katras divas savā starpā krustojas. Cik dažādu krustpunktu rodas, ja pavisam ir uzzīmētas:
a) 5 taisnes;
b) 2011 taisnes?
NORĀDES. 1. Uzzīmē gadījumu ar 5 taisnēm!
2. Cik taisnes krusto katra taisne?
3. Cik reizes tiek ieskaitīts katrs krustpunkts, ja reizina taišņu skaitu ar krustpunktu skaitu uz katras taisnes?
4. Izveido formulu, kas izsaka krustpunktu skaitu, ja ir dotas n taisnes!</td><td>SOL
7. klase,
2011./
2012.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>No papīra izgrieza divus izliektus piecstūrus un kaut kā uzlika vienu otram virsū. Kāda figūra var būt abu piecstūru kopīgā daļa?
NORĀDE. 1. Atceries, ka punkts un nogrieznis arī ir figūra!
2. Veido sakārtotu sarakstu, aplūkojot visas iespējas!</td><td>JMK
5. kārta
2003./
2004.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>
Mazajai Alisei rūtiņu burtnīcā pa rūtiņu līnijām patīk zīmēt taisnes un pēc tam skaitīt, cik kvadrātus var redzēt iegūtajā zīmējumā. Piemēram, attēlā ir deviņas taisnes un var redzēt 20 kvadrātus (12 kvadrāti ar malas garumu 1 vienība, 6 kvadrāti ar malas garumu 2 vienības un 2 kvadrāti ar malas garumu 3 vienības).
a) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 17 kvadrāti!
b) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 100 kvadrāti!
c) Cik kvadrātus var iegūt, ja dotas 10 taisnes?
d) Uzraksti formulu, kā aprēķina iegūto taisnstūru skaitu, ja ir uzzīmētas m horizontālas taisnes un n vertikālas taisnes!
NORĀDES. 1. Veic pilno pārlasi, lai uzskaitītu a), b) un c) piemērā iegūto kvadrātu skaitu!
2. Apskati c) piemērā visas iespējamās kombinācijas vertikālo un horizontālo taišņu skaitam!
3. Cik taisnes vajadzīgas, lai izveidotu vienu kvadrātu?
4. Izveido formulu gadījumam, cik dažādos veidos var izvēlēties divas vertikālās taisnes!</td><td>JMK
1. kārta,
2020./
2021.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Dots platleņķa vienādsānu trijstūris, kuram $\sphericalangle BAC = 20^\circ$. Pierādi, ka $3\,AC > AB$!
NORĀDES. 1. Kurš leņķis var būt vienādsānu trijstūra virsotnes leņķis?
2. Izmanto trijstūra nevienādību!</td><td>NOL
8. klase,
2021./
2022.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4.4.3. Ģeometrija, paralelograma īpašības, vienādi taisnleņķa trijstūri</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.5.</td><td>Lieto paralelograma (t. sk. romba, taisnstūra, kvadrāta) īpašības, lai aprēķinātu nezināmos lielumus, formulētu apgalvojumus par figūru īpašībām.</td><td rowspan="2">Prasmes no MPP</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.8.</td><td>Pierāda divu taisnleņķa trijstūru vienādību, izmantojot trijstūru vienādības pazīmes.</td></tr>
</table>

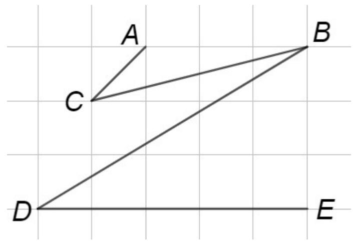
		METODISKIE IETEIKUMI. 1. Papildus 4. uzdevumā ir jāzina daudzstūra leņķu summas aprēķināšanas formula $(n-2)\cdot 180^{\circ}$, kur *n* – malu/virsotņu skaits. 2. Kopā ar skolēniem mācību stundās vai ārpusstundu nodarbībās var veidot atgādni ar ģeometrijas formulām un sakarībām.	
Olimpiāžu uzdevumi	1.	Paralelogramā *ABCD* ir novilktas īsākās malas *AB* pieleņķu bisektrises, kuras krusto malas *BC* un *AD* attiecīgi punktos *E* un *F* tā, ka $AE=BF$. Kāda ir malu attiecība četrstūrim, kura diagonāles ir *AE* un *BF*? **NORĀDES.** 1. Kuri leņķi ir vienādi? 2. Izmanto romba un kvadrāta pazīmes!	G. B. Einberga
	2.	Dots paralelograms *ABCD*. Leņķa *BAD* bisektrise krusto malu *BC* iekšējā punktā *E* un *CD* pagarinājumu punktā *F*. Pierādi, ka $BC=DF$, ja zināms, ka *DE* ir perpendikulārs *AF*! **NORĀDES.** 1. Kuri leņķi ir vienādi? 2. Pierādi, ka trijstūris *AFD* ir vienādsānu!	AMO 8. klase, 2018./ 2019.
	3.	Paralelograma *ABCD* malu *BC* un *AD* viduspunkti ir attiecīgi *E* un *F*. Aprēķini četrstūra laukumu, ko ierobežo taisnes *AE, ED, BF* un *FC*, ja zināms, ka *ABCD* laukums ir 100. **NORĀDES.** 1. Novelc nogriezni *EF* un pamato, kāpēc iegūtie četrstūri ir paralelogrami! 2. Kāds ir trijstūra *BEF* laukums? 3. Trijstūris *BEF* ir sadalīts divos trijstūros. Kāpēc tie ir vienlieli?	AMO 8. klase, 2017./ 2018.
	4.	Astoņstūrī *ABCDEFGH* visi iekšējie leņķi ir vienādi. Zināms arī, ka *ACEG* ir kvadrāts. Pierādi, ka *BDFH* arī ir kvadrāts! **NORĀDES.** 1. Cik liels ir viens astoņstūra leņķis? 2. Pamato, ka trijstūri *ABC* un *CDE* ir vienādi! Kādu pazīmi vari izmantot? 3. Pierādi, ka *BDFH* malas ir vienādas un visi leņķi ir taisni, izmantojot trijstūru vienādību!	AMO 8. klase, 2009./ 2010.
	5.	Šaurleņķu trijstūrī *BAC* novilkts augstums *CH*; izrādījās, ka $AH=BC$. Caur *H* paralēli malai *BC* novilkta taisne; tā krusto augstumu AA_1 punktā *K.* Pierādi, ka *K* atrodas uz $\measuredangle ABC$ bisektrises! **NORĀDES.** 1. Pamato, ka leņķi *KAH* un *HCB* ir vienādi! 2. Pamato, ka trijstūri *KAH* un *HCB* ir vienādi! 3. Kāda veida trijstūris ir trijstūris *KHB*?	NOL 8. klase, 2007./ 2008.
		4.4.4. Kvadrātfunkcija, koeficientu ietekme	
8.7.		*Katrs skolēns zīmē funkciju $y=ax^2+c$ grafiku konkrētam skaitļu a, c pārim (to vērtības gan pozitīvas, negatīvas), kurš ir atšķirīgs no citiem;* *grupu veido tie skolēni, kuriem ir viena un tā pati a vērtība; grupas ietvaros savstarpēji dalās ar paveikto un saprasto; apspriežas un veido vispārīgu funkciju $y=ax^2+c$ grafiku novietojuma raksturojumu dažādām c vērtībām.*	Uzdevums no MPP
		Teorijas materiāli: NMS, teorijas materiāls "Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas"	
		METODISKS IETEIKUMS. Svarīgi mācību procesā uzsvērt, ka daži piemēri, kuros izpildās/neizpildās prasītais, nav pamatojums, ka tas izpildās/neizpildās vispārīgā gadījumā. Svarīgi uzsvērt atšķirību starp piemēru/pretpiemēru un vispārīgu pierādījumu un situācijas, kad katru jāizmanto. Par piemēru un pretpiemēru vairāk skatīt teorijas materiālu vai video.	

Olimpiāžu uzdevumi	1.	Vai var gadīties, ka attēlā doti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$ un $y=cx^2+ax+b$ grafiki?  **NORĀDES.** 1. Kādiem jābūt koeficientiem *a, b, c*, ja visu parabolu zari ir vērsti uz augšu? 2. Apskati koeficientu *a, b, c* zīmes gan kā koeficientiem pie x^2, gan kā brīvajiem locekļiem!	Teor. mat. *Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas*
	2.	Apskatām visas funkcijas $y=ax^2-2x+b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a+b=2012$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti! **NORĀDE.** Ar kādām x vērtībām funkcijas izteiksmē var iegūt saskaitāmo $a+b$?	NOL 9. klase, 2011./ 2012.
	3.	Vai var gadīties, ka attēlā ir doti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=cx^2+bx+a$ un $y=bx+c$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.  **NORĀDES.** 1. Kādas ir ar pārtrauktu līniju uzzīmētās parabolas un taisnes krustpunkta koordinātas, nolasot no grafika? 2. Kādas ir taisnes un pārtrauktu līniju uzzīmētās parabolas krustpunktu koordinātas, ja to meklē, izmantojot funkciju formulas un vienādojumu sastādīšanu?	Teor. mat. *Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas*
	4.	Aplūkosim funkcijas $y=x^2+ax+b$, kur $a+2b=2020$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts! **NORĀDE.** Ar kādu x vērtību funkcijas izteiksmē var iegūt saskaitāmo $a+2b$?	Teor. mat. *Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas*
	5.	Aplūkosim funkcijas $y=ax^2+2x+2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība $a+18b=2021$. Pierādi, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti! **NORĀDE.** Ar kādām x vērtībām funkcijas formulā var iegūt izteiksmi $a+18b$?	NOL 10. klase, 2020./ 2021.

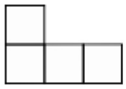
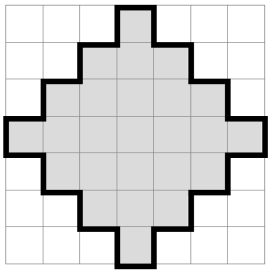
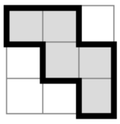
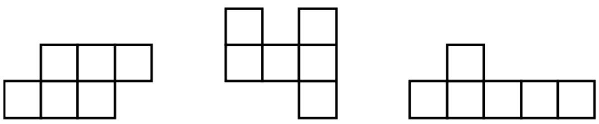
4.4.5. Ģeometrija, palīglīnijas			
8.8.		*Plānojot nezināmo lielumu aprēķināšanu plaknes daudzstūros, vingrinās plānot un vilkt palīglīnijas, skaidro mērķi, ieguvumus risinājuma atrašanai.*	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM.** Dažreiz zīmējumu nepieciešams papildināt ar vēl kādu nogriezni vai taisni, lai varētu saskatīt un izmantot dažādas sakarības. Visbiežāk izdevīgi ir veidot trijstūrus, vilkt taisnes paralēli vai perpendikulāri kādai citai taisnei. Visos šajos uzdevumos nepieciešams novilkt palīglīnijas.	
	1.	Aprēķini $\sphericalangle BCD+\sphericalangle DEF+\sphericalangle FGH$ (skat. att.), ja $AB \parallel GH$, $\sphericalangle ABC=120^\circ$, $\sphericalangle CDE=90^\circ$ un $\sphericalangle EFG=60^\circ$.  **NORĀDES.** 1. Novelc taisnei *AB* paralēlas taisnes caur punktiem *C, D, E, F*! 2. Apzīmē leņķa daļu no taisnā leņķa ar α un leņķa daļu no 60° leņķa ar β! 3. Izmantojot iekšējo šķērsleņķu vienādību un iekšējo vienpusleņķu summu pie paralēlām taisnēm, izsaki nepieciešamos leņķus ar α un β!	NOL 7. klase, 2017./ 2018.
	2.	Dots trijstūris *PQR*, kurā $\sphericalangle PQR=20^\circ$ un $\sphericalangle PRQ=40^\circ$. No virsotnes *P* novilktā bisektrise krusto malu *QR* punktā *S*, nogriežņa *PS* garums ir 2. Par cik mala *QR* ir garāka nekā *PQ*? **NORĀDES.** 1. Cik liels ir leņķis *RPS*? 2. Cik liels ir leņķis *PSQ*? 3. Novelc nogriezni $PT=PS=2$ tā, ka *T* atrodas uz malas *QR*! 4. Pierādi, ka trijstūri *RTP* un *PQT* ir vienādsānu!	NOL 8. klase, 2017./ 2018.
	3.	Caur taisnstūra *ABCD* diagonāļu krustpunktu *O* novilkta taisne *PQ* tā, ka *P* atrodas uz *AD*, *Q* – uz *BC* un $PQ=QD$. Pierādi, ka $DP=2\,AP$! **NORĀDES.** 1. Pamato, ka trijstūri *AOP* un *COQ* ir vienādi! 2. Vienādsānu trijstūrī *PQD* novelc augstumu un saskati vienādos nogriežņus!	NOL 8. klase, 2015./ 2016.
	4.	Izliektā četrstūrī *ABCD* leņķu *BAD* un *ADC* bisektrises krustojas punktā *M*. Pierādi, ka $BM=CM$, ja zināms, ka $AD=AB+CD$! *Piezīme*. Četrstūri sauc par izliektu, ja visi tā iekšējie leņķi ir mazāki nekā 180°. **NORĀDES.** 1. Atliec uz malas *AD* punktu *E* tā, ka $AE=AB$! 2. Pamato, kāpēc *AM* un *DM* ir nogriežņu *BE* un *CE* vidusperpendikuli! 3. Izmanto vidusperpendikula īpašību: punkts, kas atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula, atrodas vienādā attālumā no abiem nogriežņa galapunktiem!	AMO 7. klase, 2018./ 2019.
	5.	Trijstūrī *ABC* novilkta bisektrise *AE*. Uz taisnes *AE* atlikts punkts *D* tā, ka $AD=AB+AC$ un punkts *E* atrodas starp punktiem *A* un *D*. Pierādi, ka $\Delta\, BCD$ ir vienādmalu trijstūris, ja zināms, ka $\sphericalangle BAC=120^\circ$. **NORĀDES.** 1. Atliec uz taisnes *AD* punktu *G* tā, ka $AG=AB$ un $GD=AC$! 2. Kāda veida trijstūris ir trijstūris *GAB*? 3. Pierādi, ka trijstūri *CAB* un *DGB* ir vienādi!	NOL 8. klase, 2020./ 2021.

<table>
<tr><td rowspan="2">**Olimpiāžu uzdevumi**</td><td rowspan="2">6.</td><td>Trijstūrī ABC divas malas ir vienādas savā starpā un $\sphericalangle ABC = 20^\circ$. Pierādi, ka $3 \cdot AC > AB$!</td><td rowspan="2">NOL
8. klase,
2009./
2010.</td></tr>
<tr><td>**NORĀDES.** 1. Aplūko visus gadījumus, kurš leņķis vienādsānu trijstūrī var būt $\sphericalangle ABC$!
2. Izmanto trijstūra nevienādību!
3. Gadījumā, kad 20° leņķis ir vienādsānu trijstūra virsotnes leņķis, uzzīmē tam klāt vēl divus tādus pašus trijstūrus, kā redzams attēlā!

</td></tr>
</table>

4.5. Devītā klase

<table>
<tr><th colspan="4">4.5.1. Ģeometrija, līdzīgi trijstūri</th></tr>
<tr><td colspan="2">9.1.</td><td>Saskata līdzīgus trijstūrus, pamato līdzību ar definīciju vai kādu no pazīmēm.
Lieto līdzīgu trijstūru elementu, perimetru un laukumu attiecību nezināmo lielumu noteikšanai.</td><td>Prasmes no MPP</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Olimpiāžu uzdevumi</td><td></td><td>Teorijas materiāli: NMS, teorijas materiāls “Līdzīgi trijstūri”
METODISKS IETEIKUMS. Kopā ar skolēniem mācību stundās vai ārpusstundu nodarbībās var veidot atgādni ar ģeometrijas formulām un sakarībām.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt: a) 2014; b) 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?
NORĀDES. 1. Vai vienādas figūras ir arī līdzīgas figūras?
2. Kā sadalīt taisnstūri 2 vienādos taisnleņķa trijstūros?
3. Kā vienu taisnleņķa trijstūri var sadalīt divos taisnleņķa trijstūros? Vai tie ir līdzīgi?</td><td>NOL
9. klase,
2014./
2015.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Dots taisnstūris ABCD. Malas AB viduspunkts ir M. Zināms, ka uz malas BC var izvēlēties tādu punktu N, ka $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN = 30^\circ$. Pierādi, ka trijstūris CDM ir vienādmalu!
NORĀDES. 1. Pēc kādas pazīmes trijstūri BMN un CDN ir līdzīgi un kāds ir to līdzības koeficients?
2. Kāda ir nogriežņu MN un BN attiecība?
3. Pierādi, ka trijstūri MND un CND ir vienādi!</td><td>AMO
9. klase,
2015./
2016.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Kvadrātisku rūtiņu lapā atzīmētas piecas virsotnes A, B, C, D un E (skat. att.). Salīdzini leņķus ACB un BDE!


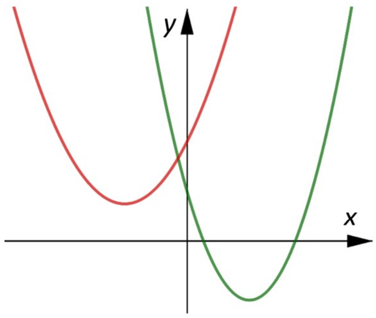
NORĀDES. 1. Pagarini malu AC un no virsotnes B novelc taisni t perpendikulāru taisnei AC!
2. Kā rūtiņu tīklā ir novietota taisne t?
3. Pierādi, ka jauniegūtais trijstūris un trijstūris BDE ir līdzīgi!</td><td>SOL
8. klase,
2012./
2013.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Kvadrāta ABCD malas garums ir 1; M ir malas AD viduspunkts. Nogriežņi AC un BM krustojas punktā S. Aprēķini trijstūra ASM laukumu!
NORĀDES. 1. Pamato, ka trijstūri ASM un CSB ir līdzīgi!
2. Kāda ir trijstūru ASM un CSB laukumu attiecība?
3. Pret kuru malu jāvelk augstumi trijstūros ASM un ASB, lai novilktie augstumi būtu vienāda garuma?
4. Kāda ir trijstūru ASM un ABS laukumu attiecība?</td><td>NOL
9. klase,
2013./
2014.</td></tr>
<tr><th colspan="4">4.5.2. Figūras sadalīšana</th></tr>
<tr><td colspan="2">9.2.</td><td>Izveido figūru no dotajām plaknes figūrām vai sadala doto figūru atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, piemēram, vienādsānu trapeci ar vienu taisni sadala divās daļās tā, lai, daļas savietojot, var izveidot taisnstūri; doto trapeci (taisnleņķa trapece) sadala divās daļās, kuru laukumi attiecas kā $1:2$ vai $1:3$.</td><td>Uzdevums no MPP</td></tr>
</table>

Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls "Invariantu metode – krāsošana"	
		METODISKS IETEIKUMS. 1, 2. un 4. uzdevumā ir jāpamato, ka doto figūru nav iespējams sadalīt atbilstoši nosacījumiem. Tam var izmantot invariantu metodi – krāsošanu. Pirms uzdevumu risināšanas skolēnam ieteicams šo metodi apgūt. Vairāk par invariantu metodi – krāsošanu skatīt minētajā teorijas materiālā.	
	1.	Vai taisnstūri ar izmēriem: **a)** 5×8; **b)** 5×12 rūtiņas var pārklāt ar attēlā redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra un nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā. 	NOL 6. klase, 2018./ 2019.
		NORĀDES. 1. Parādi, ka a) gadījumā prasītais ir iespējams! 2. Piemērā b) pamato, ka prasītais nav iespējams, izmanto invariantu metodi – krāsošanu – iekrāso doto taisnstūri joslās! 3. Cik rūtiņas taisnstūrī ir iekrāsotas un cik nav iekrāsotas? 4. Cik iekrāsotās rūtiņas var pārklāt dotā figūra, ja to novieto iekrāsotajā taisnstūrī? 5. Kādas paritātes (pāra vai nepāra skaita) iekrāsotu rūtiņu dotās figūras pārklātu, ja ar tām pārklātu visu taisnstūri?	
	2.	Rūtiņu lapā uzzīmēta figūra (skat. 1. att.). Kāds ir lielākais skaits 2. att. doto figūru, ko var izgriezt no 1. att. figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.  *1. att.*  *2. att.*	NOL 6. klase, 2014./ 2015.
		NORĀDES. 1. Var izgriezt četras figūras. Pamato, ka vairāk nevar! 2. Lai pamatotu, ka vairāk kā četras figūras nevar izgriezt, izmanto invariantu metodi – krāsošanu! 3. Izmanto krāsojumu – šaha galdiņš! 4. Cik iekrāsotas rūtiņas satur abas figūras?	
	3.	Vai kvadrātu var sadalīt piecās daļās, no kurām viena ir trijstūris, otra – četrstūris, trešā – piecstūris, ceturtā – sešstūris un piektā – septiņstūris?	SOL 9. klase, 2015./ 2016.
		NORĀDE. To var izdarīt. Izmanto arī ieliektus daudzstūrus!	
	4.	Vai taisnstūri ar izmēriem 10×9 rūtiņas var pārklāt ar attēlā dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā. 	AMO 8. klase, 2014./ 2015.

Olimpiāžu uzdevumi		**NORĀDES.** 1. Pamato, ka prasītais nav iespējams, izmanto invariantu metodi – krāsošanu! 2. Izmanto krāsojumu – šaha galdiņš! 3. Cik rūtiņas taisnstūrī ir iekrāsotas un cik nav iekrāsotas? 4. Cik iekrāsotās rūtiņas var pārklāt dotās figūras, ja tās novieto iekrāsotajā taisnstūrī? 5. Kādas paritātes (pāra vai nepāra skaita) iekrāsotu rūtiņu dotās figūras pārklātu, ja ar tām pārklātu visu taisnstūri?	
	5.	Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt: **a)** 2014; **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?	NOL 9. klase, 2014./ 2015.
		NORĀDES. 1. Vai vienādas figūras ir arī līdzīgas figūras? 2. Kā sadalīt taisnstūri 2 vienādos taisnleņķa trijstūros? 3. Kā vienu taisnleņķa trijstūri var sadalīt divos taisnleņķa trijstūros? Vai tie ir līdzīgi?	
4.5.3.		**Skaitļu teorija, sadalīšana reizinātājos, dalāmība**	
9.4.		*Lieto sadalīšanu reizinātājos jaunās situācijās, piemēram, lai pamatotu dalāmību, raksturotu izteiksmju īpašības, sadalītu reizinātājos trinomu (vienkāršos gadījumos).*	M.9.4.3.3. M.9.4.4.1. M.9.2.3.6.
		Izteiksmju pārveidojumos lieto sadalīšanu reizinātājos, binoma kvadrāta formulu un kvadrātu starpības formulu.	Prasme no MPP
Olimpiāžu uzdevumi	1.	Pierādi, ka skaitlis $2^{28}-3^{14}$ nav pirmskaitlis!	G. B. Einberga
		NORĀDE. Izmanto kvadrātu starpības formulu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.	
	2.	Pierādi, ka skaitlis $2^{16}+2^9\cdot 5^{17}+5^{34}$ nav pirmskaitlis!	G. B. Einberga
		NORĀDE. Izmanto summas kvadrāta formulu $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.	
	3.	Skaitli 3999991 uzraksti kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1!	NOL 8. klase, 2011./ 2012.
		NORĀDES. 1. Uzraksti skaitli 3999991 kā divu skaitļu starpību! 2. Izmanto kvadrātu starpības formulu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.	
	4.	Pierādi, ka: **a)** 49^5+7^9 dalās ar 2; **b)** 49^5-7^9 dalās ar 6.	NOL 8. klase, 2014./ 2015.
		NORĀDES. 1. Izmantojot pakāpju īpašības, pārveido abus saskaitāmos par pakāpēm ar bāzi 7. 2. Sadali izteiksmi reizinātājos, iznesot lielāko kopīgo reizinātāju pirms iekavām!	
	5.	Pierādi, ka vienādojumam $(x-y)^2=6xy+7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!	Teor. Mat. *Vienādo- jumi veselos skaitļos*
		NORĀDES. 1. Atver iekavas un pārveido vienādību tā, lai tās vienā pusē ir izteiksme $(x+y)^2$. 2. Kāds var būt skaitļa kvadrāta pēdējais cipars? 3. Kāds var būt skaitļa, ko veido otra vienādības puse, pēdējais cipars?	
	6.	Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka $20x^3-17y^2+1=2018$?	NOL 9. klase, 2017./ 2018.
		NORĀDES. 1. Pārveido vienādību tā, lai tās vienā pusē ir izteiksme $17y^2+17$. 2. Sadali katru vienādības pusi reizinātājos! 3. Kura vienādības puse ir noteiktas paritātes (pāra vai nepāra)? 4. Kādām jābūt vienādības otras puses vērtībām? Pārveidojumos var izmantot substitūciju: pāra skaitlis ir $2k$, bet nepāra skaitlis ir $2k+1$, kur $k\in\mathbb{Z}$.	

<table>
<tr><th colspan="4">4.5.4. Kvadrātfunkcija</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">9.5.</td><td>Raksturo, argumentē kvadrātfunkcijas dažādu pieraksta veidu (piemēram, $y=x^2-2x-8$, $y=(x-4)(x+2)$, $y=(x-1)^2-9$ priekšrocības grafika uzzīmēšanai, funkcijas īpašību noteikšanai un lietošanai).</td><td>M.9.1.2.3.
M.9.4.2.2.
M.9.2.2.5.</td></tr>
<tr><td>Sadarbojas, pēta, izmantojot digitālos rīkus, sakarības starp funkciju grafiku novietojumu koordinātu plaknē un koeficientiem formulu pierakstā.</td><td>M.9.2.1.2.</td></tr>
<tr><td>Uzzīmē kvadrātfunkcijas grafiku, izmantojot virsotnes formulu, funkcijas nulles.</td><td>Prasme no MPP</td></tr>
<tr><td>Spriež un pēta, vai starp funkcijas grafika krustpunktiem ar abscisu asi (ja tādi ir) un parabolas virsotni ir sakarība; secina, ka virsotnes abscisa ir abu sakņu aritmētiskais vidējais.</td><td>Uzdevums no MPP</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Olimpiāžu uzdevumi</td><td></td><td>Teorijas materiāli: NMS, teorijas materiāls “Lineāra funkcija un kvadrātfunkcija”</td><td></td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Apskatām visas funkcijas $y=ax^2-2x+b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a+b=2012$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

NORĀDE. Ar kādām x vērtībām funkcijas formulā var iegūt izteiksmi $a+b$?</td><td>NOL
9. klase,
2011./
2012.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, nosaki tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

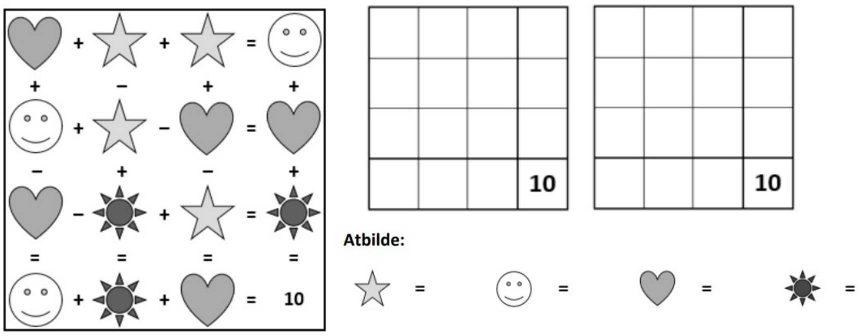
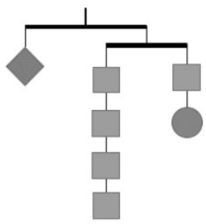
NORĀDES. 1. Apzīmē vienu no skaitļiem ar x un uzraksti izteiksmi otram skaitlim!
2. Izveido reizinājuma izteiksmi un izpēti iegūto funkciju!</td><td>AMO
9. klase,
2014./
2015.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Vai var gadīties, ka attēlā ir doti funkciju $y=ax^2+bx+c$ un $y=bx^2+cx+a$ grafiki?
Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.

NORĀDES. 1. Kādi ir koeficienti a, b, c salīdzinājumā ar 0?
2. Kāda ir katras parabolas virsotnes x koordināta salīdzinājumā ar 0?</td><td>NOL
9. klase,
2020./
2021.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Aplūkosim funkcijas $y=ax^2+2x+2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība $a+18b=2021$. Pierādi, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

NORĀDE. 1. Pierādījumā pietiek atrast tādu divu punktu koordinātas, kas pieder abiem grafikiem.
2. Ar kādām x vērtībām funkcijas formulā var iegūt izteiksmi $a+18b$?</td><td>NOL
10. klase,
2020./
2021.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Kvadrātfunkcija $y=x^2+(m^2+3m)x+m-1$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 1. Kāda var būt m vērtība? Nosaki otru parabolas krustpunktu ar x asi!

NORĀDES. 1. Ievieto x vietā doto abscisas vērtību un y vietā 0, vienkāršo iegūto vienādojumu!
2. Atrisini iegūto kvadrātvienādojumu un apskati abus iespējamos gadījumus!</td><td>NOL
10. klase,
2018./
2019.</td></tr>
</table>

4.5.5. Kvadrātvienādojumi, pilnā kvadrāta atdalīšana

9.5.		*Lieto sakņu formulu, lai atrisinātu kvadrātvienādojumu.*	Prasme no MPP
		Mēģina vienkāršos gadījumos, piemēram, $x^2+4x-5=0$ *izmantot binoma kvadrāta formulu pilno kvadrātvienādojumu atrisināšanai.*	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls "Nevienādību pierādīšana – pilno kvadrātu atdalīšana"	
		METODISKIE IETEIKUMI. 1. Papildus ir doti uzdevumi (4. un 5. uzd.) ar kvadrātnevienādībām, bet arī šo uzdevumu risinājumos jāizmanto pilnā kvadrāta atdalīšana. 2. Papildus 6. uzdevumā ir jāizmanto vairāku vienādojumu saskaitīšana.	
	1.	Lineāra funkcija $y=(m^2-3m)x+4m-4$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 2. Nosaki m vērtības un noskaidro, vai atbilstošā funkcija ir augoša vai dilstoša!	NOL 9. klase, 2018./ 2019.
		NORĀDES. 1. Ievieto x vietā doto abscisas vērtību un vienkāršo iegūto vienādojumu! 2. Atrisini iegūto kvadrātvienādojumu un apskati abus iespējamos gadījumus!	
	2.	Kvadrātvienādojuma $3x^2+3ax+(x-1)b=0$ saknes ir 1 un 2. Aprēķini skaitļus a un b.	SOL 9. klase, 2015./ 2016.
		NORĀDE. Sakne ir x vērtība, ar kuru vienādojums kļūst par identitāti, tāpēc ievieto vienādojumā x vietā 1 un pēc tam 2.	
	3.	Zināms, ka a ir tāds reāls skaitlis, ka $a+\frac{1}{a}=3$. Aprēķini: **a)** $a^2+\frac{1}{a^2}+2$; **b)** $a^4+\frac{1}{a^4}$.	NOL 8. klase, 2017./ 2018.
		NORĀDES. 1. Piemērā a) pārveido doto izteiksmi, izmantojot binoma kvadrāta formulu $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 2. Piemērā b) atdali pilno kvadrātu, lai izteiksmē iegūtu $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2$.	
	4.	Pierādi, ka $9x^6-x^3+1>0$ visiem reāliem x!	NOL 9. klase, 2016./ 2017.
		NORĀDE. Pārveido nevienādības kreiso pusi, atdalot pilno kvadrātu, izmantojot $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.	
	5.	Pierādi, ka $9x^2-12xy+20y^2+8y+4>0$ visām reālām x un y vērtībām!	SOL 10. klase, 2018./ 2019.
		NORĀDES. 1. Sadali $20y^2$ kā summu $4y^2+16y^2$. 2. Atdali pilnos kvadrātus, iegūstot divu binomu kvadrātus: $(a-b)^2$ un $(c+d)^2$.	

4.5.6.	**Vienādojumi ar diviem mainīgajiem, pilnā pārlase**		
9.6.		*Lieto pilno pārlasi, lai noteiktu vienādojuma ar diviem nezināmajiem naturālos atrisinājumus.*	M.9.2.3.4.
Olimpiāžu uzdevumi	1.	Atrodi vienu piemēru, kādu skaitli 1; 2; 3; 4; 5 var ievietot katra simbola vietā, tā, lai iegūtu patiesas vienādības! Vienādi skaitļi ir apzīmēti ar vienādiem simboliem un dažādi – ar dažādiem.  **NORĀDE.** Kādas var būt simbolu vērtības, lai pirmās rindas izteiksme būtu patiesa? Ievēro, ka tā ir summa, kuras vērtība ir no 1 līdz 5!	TVC 3. kārta, 2019./ 2020.
	2.	Zināms, ka visu vienādo figūru masas ir vienādas un visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā. Kāda ir katras figūras masa, ja visu figūru kopējā masa ir 320 grami?  **NORĀDES.** 1. Ja uzmini iespējamās figūru masas, jāpamato, ka tās ir vienīgās iespējamās atbildes! 2. Kāda ir  masa?	TVC 4. kārta, 2016./ 2017.
	3.	Cik atrisinājumu ir vienādojumam $a^2b+12=2012$, ja a un b ir naturāli skaitļi? **NORĀDES.** 1. Izsaki no vienādojuma a^2b vērtību! 2. Ar ko noteikti dalās skaitlis 2000? 3. Apskati visas iespējamās vērtības, kad 2000 dalās ar kāda naturāla skaitļa kvadrātu!	PCK 4. nod., 2011./ 2012.
	4.	**a)** Vai var atrast dažādus veselus skaitļus *a, b, c* un *d* tādus, ka izpildās vienādības $a+b=cd$ un $ab=c+d$? **b)** Vai šādus skaitļus var atrast, ja papildus zināms, ka $a>2016$? **NORĀDES.** 1. Abos piemēros atrodi derīgu piemēru! 2. Piemērā b) ievieto $c=0$!	NOL 7. klase, 2015./ 2016.
	5.	Rūķīšu mežā tiek rīkotas skriešanas sacensības – stafete. Sacensības notiek apļveida stadionā, starta un finiša līnija sakrīt. Stadiona viena apļa garums ir 330 metri, stafetes kociņš tiek nodots ik pēc 75 metriem, visi skrien vienā virzienā. Stafete beidzas, kad pirmo reizi kāds skrējējs, noskrienot 75 metrus, nonāk precīzi finiša līnijā (t.i., starta/ finiša līnija var tikt šķērsota vairākas reizes). Cik pavisam ir punktu, kuros tiek nodots stafetes kociņš? Cik dalībnieku ir komandā, ja katrs dalībnieks skrien tieši vienu stafetes posmu? Kāds ir stafetes distances kopējais garums? **NORĀDES.** 1. Apzīmē ar mainīgajiem dalībnieku skaitu un to, cik pilnas reizes tika apskriets stadions, un izveido vienādojumu! 2. Vienkāršo vienādojumu, abas tā puses dalot ar 5, un atrisini vienādojumu atbilstoši nosacījumiem!	JMK 4. kārta, 2011./ 2012.

Olimpiāžu uzdevumi	6.	Matemātikas nedēļā Paskāls, Ņūtons, Galilejs un Fermā visi pildīja vienu un to pašu testu. Vidējais punktu skaits visiem dalībniekiem bija 16 punkti. Paskālam un Ņūtonam vidējais punktu skaits bija 16, Paskālam un Fermā vidējais punktu skaits bija 13, bet Ņūtonam un Fermā vidējais punktu skaits bija 18. Cik punktus ieguva Galilejs?	PCK 2. nod., 2011./ 2012.
		NORĀDES. 1. Uzraksti visas sakarības vienādojumu veidā, apzīmējot ar mainīgajiem katra dalībnieka iegūto punktu skaitu! 2. Saskaiti visus vienādojumus!	
	7.	Vectēvs un mazdēls devās slēpot pa vienu un to pašu maršrutu. Zināms, ka pa līdzenu vietu abi slēpo ar vienādu ātrumu 7 km/h, no klana lejā mazdēls brauc ar ātrumu 20 km/h, bet vectēvs – ar ātrumu 8 km/h, savukārt pret kalnu mazdēls – ar ātrumu 4 km/h, bet vectēvs – ar ātrumu 6 km/h. Pirmais maršrutu veica mazdēls. Vai var viennozīmīgi noteikt, kas kopumā bija vairāk – nobraucieni no kalna vai augšup kalnā? Vai ir viennozīmīga atbilde uz šo jautājumu, ja pirmais finišē vectēvs?	JMK 5. kārta, 2011./ 2012.
		NORĀDES. 1. Vai to, kurš finišē pirmais, ietekmē līdzeno posmu garums? 2. Apzīmē ar mainīgajiem, cik kilometrus slēpotāji brauc no kalna lejā un cik kalnā augšā, un izveido izteiksmes par katra slēpošanas laiku! 3. Atbilstoši nosacījumiem izveido nevienādības!	
		4.5.7. Virknes	
9.7.		*Aprēķina konkrētus skaitļu virknes locekļus, ja virkne pierakstīta ar rekurentu sakarību (skolēni šo jēdzienu nelieto), skaidro simbolu lietojumu.* *Lieto aritmētiskās progresijas vispārīgā locekļa formulu nezināmu lielumu noteikšanai.*	Prasmes no MPP
		Pāriet no viena virknes uzdošanas veida uz citu, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu.	Ieradums no MPP
		Sadarbojas, izmanto aritmētiskās progresijas formulu, kas parāda atkarību no kārtas numura un divus nezināmos lielumus, lai matemātiski modelētu situāciju ar praktisku kontekstu; izmanto prasmi atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu.	Uzdevums no MPP
Olimpiāžu uzdevumi		**Teorijas materiāli:** NMS, teorijas materiāls "Rekurentas virknes"	
		METODISKS IETEIKUMS. Pirms uzdevumu risināšanas skolēniem nepieciešams pastāstīt par rekurentām virknēm un ar tām saistītiem jēdzieniem. **NORĀDE VISIEM UZDEVUMIEM.** Visos uzdevumos vispirms jāapskata, kā veidojas pirmie virknes locekļi un pēc tam jāsaskata rekurenta sakarība.	
	1.	Cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summu var izteikt skaitli: **a)** 14; **b)** 22? Veidi, kas atšķiras ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 8 var izteikt četros dažādos veidos: $8 = 2+2+2+2 = 2+3+3 = 3+2+3 = 3+3+2.$	Teor. mat. *Rekurentas virknes*
		NORĀDES. 1. Aplūko, cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summu var izteikt skaitļus 2; 3; 4; ... ! 2. Mēģini ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu, ņemot vērā jau iegūtos rezultātus! Piemēram, $6 = 4 + 2$ un skaitļa 4 izteikšanas veidu skaits jau ir zināms. 3. Izveido rekurences formulu un pamato to!	

<table>
<tr><td rowspan="3">Olimpiāžu uzdevumi</td><td>2.</td><td>Cik dažādos veidos basketbolā var gūt 18 punktus, izmantojot tikai 1 punkta un 3 punktu metienus? Veidi, kas atšķiras tikai ar 1 punkta un 3 punktu metienu secību, tiek uzskatīti par dažādiem. Piemēram, 4 punktus var iegūt trīs dažādos veidos: $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1$.

NORĀDES. 1. Aplūko, cik dažādos veidos kā vieninieku un trijnieku summu var izteikt skaitļus 1; 2; 3; 4; ... !
2. Mēģini ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu, ņemot vērā jau iegūtos rezultātus!
3. Izveido rekurences formulu un pamato to!</td><td>AMO
9. klase,
2017./
2018.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Cik dažādos veidos taisnstūri 2×12 var sagriezt taisnstūros 1×2?
Piezīme. Griezumi, kas iegūstami viens no otra ar simetriju vai pagriezienu, tiek uzskatīti par dažādiem.

NORĀDES. 1. Aplūko, cik dažādos veidos var sagriezt taisnstūri 2×2, 2×3, 2×4 un 2×5.
2. Mēģini ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu, ņemot vērā jau iegūtos rezultātus! Piemēram, taisnstūri 2×2 var sagriezt 2 veidos, kurus pēc tam var izmantot pie nākamo taisnstūru veidošanas.
3. Izveido rekurences formulu un pamato to!</td><td>Teor. mat.
Rekuren-
tas
virknes</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Uz koordinātu ass koordinātu sākumpunktā sēž blusa. Ar vienu lēcienu tā var aizlēkt vai nu 1, vai 2, vai 5 vienības pa labi. Cik dažādos veidos blusa var nokļūt punktā, kura koordināta ir 15? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto lēcienu secība.)

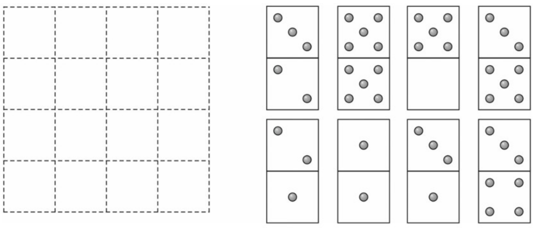
NORĀDES. 1. Aplūko, cik dažādos veidos var aizlēkt no koordinātu sākumpunkta uz punktu, kura koordināta ir 1; 2; 3; 4; ... !
2. Mēģini ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu, ņemot vērā jau iegūtos rezultātus!
3. Izveido rekurences formulu un pamato to!</td><td>AMO
10. klase,
2017./
2018.</td></tr>
</table>

5. ATRISINĀJUMI

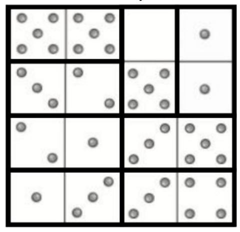
5.1. Piektā klase

5.1.1. Maģiskās konfigurācijas, skaitļu sakārtojumi

1. Igoram ir 8 domino kauliņi (skat. 73. att.). Viņš tos grib izvietot kvadrātā tā, lai punktu summas visās rindās un visās kolonnās būtu vienādas. Parādi, kā Igoram ir jāizvieto šie kauliņi!



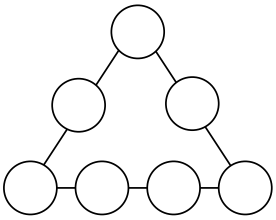
73. att.



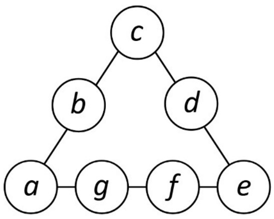
74. att.

Atrisinājums. Tā kā visos kauliņos kopā ir 44 punkti, tad katrā rindā un kolonnā kopā jābūt $44 : 4 = 11$ punktiem. Vienu no iespējām, kā paveikt uzdevumu, skat. 74. att.

2. Aplīšos (skat. 75. att.) ierakstiet skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas! Aplūko visas iespējas, kādas var būt šīs summas!



75. att.



76. att.

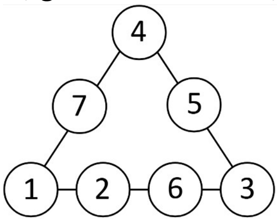
Atrisinājums. Apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts 76. att. Tad

$$a+b+c=c+d+e=a+g+f+e=s,$$
$$a+b+c+d+e+f+g=1+2+3+4+5+6+7=28.$$

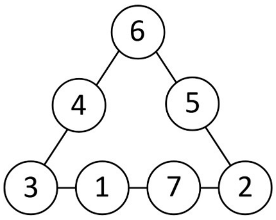
Savukārt $3s=(a+b+c+d+e+f+g)+(a+c+e)=28+(a+c+e)$**.** Tātad $28+(a+c+e)$ jādalās ar 3. Summas $a+c+e$ mazākā vērtība var būt $6=1+2+3$, bet lielākā $18=5+6+7$. Balstoties uz šiem secinājumiem, tabulā apkoposim iespējamās s vērtības.

$3s=28+a+c+e$	s	$a+c+e$
36	12	8
39	13	11
42	14	14
45	15	17

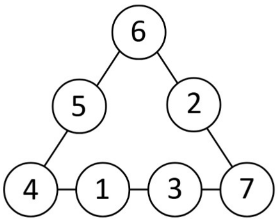
Vērtībām $s=12$, $s=13$ un $s=15$ piemēri doti attiecīgi 77. att.,78. att. un 79. att. Gadījumā $s=14$ gan $a+b+c=14$, gan $a+c+e=14$, tātad jābūt $b=e$, kas nevar būt.



77. att.



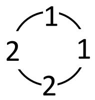
78. att.

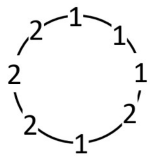


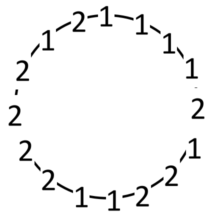
79. att.

Tātad uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas var būt 12, 13 vai 15.

3. **a)** Pa apli izvieto ciparus 1 un 2 (pavisam astoņus ciparus) tā, lai, lasot pa trīs cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami visi trīsciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 vai 2!
b) Vai pa apli var izvietot 16 ciparus 1 un 2 tā, lai, lasot pa četriem cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami visi četrciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 vai 2?
Piemēram, 80. att. parādīts, ka četrus ciparus var izvietot tā, lai būtu sastopami visi divciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 vai 2: 11, 12, 22, 21.

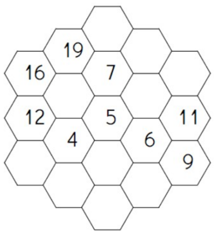

80. att.


81. att.

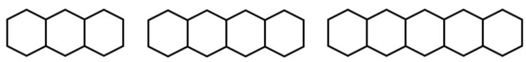

82. att.

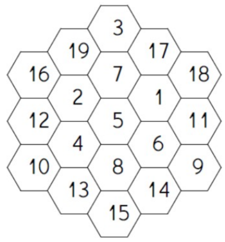
Atrisinājums. a) Jā, var, skat., piemēram, 81. att. **b)** Jā, var, skat., piemēram, 82. att.

4. Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 19 dotajā figūrā (skat. 83. att.) jāparādās tieši vienu reizi. Aizpildi tukšos lodziņus tā, lai katrā joslā ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati!
Piezīme. Visas iespējamās joslas skat. 84. att.,tās var būt pagrieztas.



83. att.

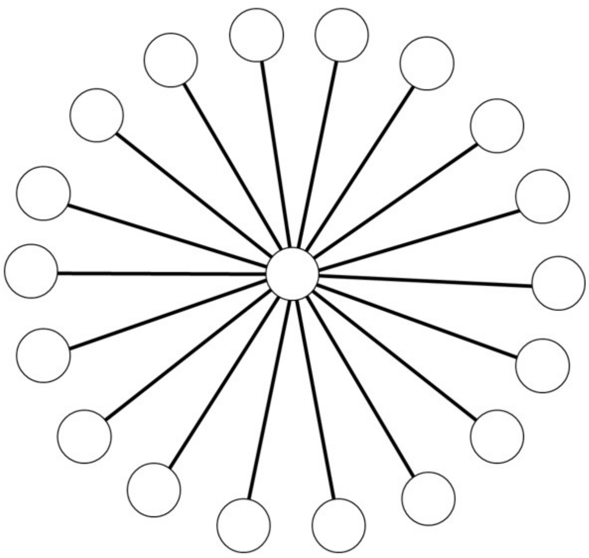

84. att.

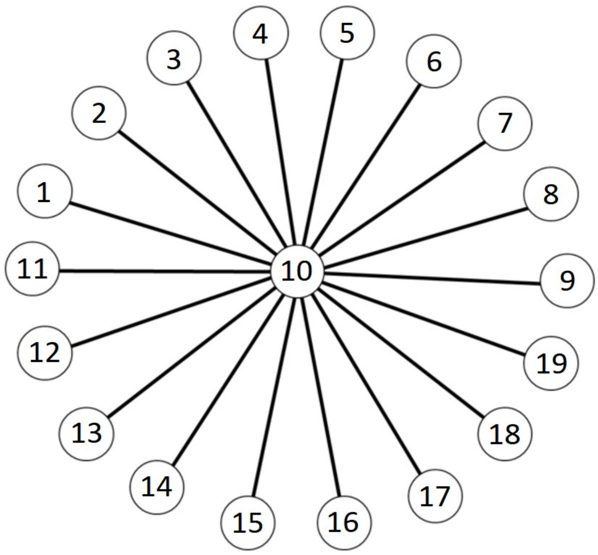


85. att.

Atrisinājums. Skat. 85. att.

5. Vai katrā aplītī (skat. 86. att.) var ierakstīt vienu skaitli no 1 līdz 19 (skaitļi nedrīkst atkārtoties) tā, lai katros trīs aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?


86. att.



87. att.

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, skat. 87. att.

5.1.2. Skaitļu pieraksts

1. Par *palindromu* sauc naturālu skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem. Piemēram, 5, 313 un 4482844 ir *palindromi*, bet 17, 3313 – nav. Visi septiņciparu palindromi sakārtoti augošā secībā. Nosaki, kurš palindroms šajā rindā pēc kārtas ir 2011-ais!

Atrisinājums. Septiņciparu *palindroms* uzrakstāms formā $\overline{abcdcba}$, kur *a, b, c, d* ir cipari (var būt vienādi; $a \neq 0$). Jo mazāks ir četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$, jo mazāks *palindroms* $\overline{abcdcba}$, tāpēc pietiek apskatīt visus četrciparu skaitļus un noskaidrot, kurš no tiem pēc kārtas ir 2011-ais. Pirmais četrciparu skaitlis ir 1000 un 2001-ais skaitlis ir 3000, tātad 2011-ais četrciparu skaitlis ir 3010 un meklētais septiņciparu *palindroms* ir 3010103.

2. Atrodi naturālu skaitli, kura ciparu summa dalās ar 27, bet pats skaitlis ar 27 nedalās!

Atrisinājums. Der, piemēram, skaitlis 9981. Tā ciparu summa ir $9+9+8+1=27$, bet $9981 : 27 = 369$, atl. 18.

3. Izveido septiņciparu skaitli, kas dalās ar 7 un kura pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 izmantots tieši vienu reizi!

Atrisinājums. Der, piemēram, 1428357.

Ievērosim, ka 14 dalās ar 7, tātad arī 1400000 dalās ar 7; 28 un 28000 dalās ar 7; 35 un 350 dalās ar 7. Tātad $1400000 + 28000 + 350 + 7 = 1428357$ dalās ar 7.

Piezīme. Ir arī citi derīgi skaitļi.

4. Doti četri trīsciparu skaitļi $\overline{xzy}$; $\overline{yaz}$; $\overline{yax}$; $\overline{zxa}$ un zināms, ka *a, x, y, z* ir dažādi cipari. Vai var būt, ka $\overline{xzy} < \overline{yaz} < \overline{yax} < \overline{zxa}$?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka šajā virknē katrs nākamais skaitlis ir lielāks nekā iepriekšējais. Lielāks ir tas skaitlis, kuram lielāks ir vecākās šķiras cipars. Aplūkojot pirmo, otro un ceturto skaitli, iegūstam, ka $x < y < z$. Salīdzinot otro un trešo skaitli, iegūstam $z < x$. Iegūta pretruna, tātad nevar būt, ka šajā virknē katrs nākamais skaitlis ir lielāks nekā iepriekšējais.

5. Pierādi, ka, uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst lielāku skaitli nekā, šos pašus divciparu skaitļus sareizinot!

Atrisinājums. Uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst četrciparu skaitli $\overline{abcd}$, kurā cipari *a* un *c* noteikti nav nulle, tātad $\overline{abcd} > \overline{ab00} = \overline{ab} \cdot 100 > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$, jo 100 ir lielāks par jebkuru divciparu skaitli, tātad arī reizinājums būs lielāks.

6. Dotas sešas pēc kārtas novietotas rūtiņas. Jānis un Pēteris spēlē šādu spēli. Viena gājiena laikā vienā no tukšajām rūtiņām jāieraksta viens cipars no 1 līdz 9. Gājienus spēlētāji izdara pēc kārtas, Jānis sāk. Pēteris uzvar, ja sešciparu skaitlis, kas izveidojas beigās, dalās ar 13. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no tā, kā spēlē Jānis?

Atrisinājums. Jā, Pēteris vienmēr var uzvarēt. Atbildot uz Jāņa gājieniem, Pēteris raksta ciparus tā, lai izveidotos skaitlis $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. Šis skaitlis dalās ar $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, tātad tas dalās arī ar 13.

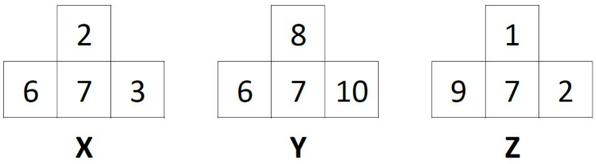
7. Anna uz lapas uzrakstīja divciparu skaitli. Tad, apmainot vietām uzrakstītā skaitļa ciparus, viņa uzrakstīja vēl vienu divciparu skaitli. Vai abu skaitļu summa noteikti dalās ar 11?

Atrisinājums. Divciparu skaitli var uzrakstīt formā $\overline{ab}$, tātad otrs uzrakstītais skaitlis ir $\overline{ba}$. Abu skaitļu summa ir $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b$. Gan $11a$, gan $11b$ dalās ar 11, jo satur reizinātāju 11. Ja katrs saskaitāmais dalās ar 11, tad arī summa $11a + 11b$ dalās ar 11, tātad abu uzrakstīto skaitļu summa noteikti dalās ar 11.

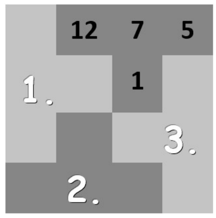
Piezīme. Uzdevumu var atrisināt ar pilno pārlasi, apskatot visus divciparu skaitļus.

5.1.3. Skaitļa reizinātāji, dalītāji un dalāmie

1. Kā jāsavieto figūras X, Y, Z (skat. 88. att.) dotajā kvadrātā (skat. 89. att.) tā, lai tur, kur saskaras rūtiņu malas, kas ir dažādās krāsās, lielākais skaitlis dalītos ar otru bez atlikuma?



88. att.



89. att.

Atrisinājums. Figūras jāsavieto šādi: 1. – X, 2. – Z, 3. – Y. Aplūkojam jau ierakstītos skaitļus. Vienīgais skaitlis, kas dalās ar 5, ir skaitlis 10 figūrā Y. Tātad 3. vietā būs jāievieto Y. Atliek vēl neievietotas figūras X un Z. Kvadrātā jau ierakstītais skaitlis 12 dalās ar skaitli 6 no figūras X un nedalās ar skaitli 9 no figūras Z. Tātad 1. vietā jāievieto X. Atliek figūra Z, kas jāievieto 2. vietā.

2. Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt 6930?

Atrisinājums. Nē, nevar. Sadalām skaitli 6930 pirmreizinātājos $6930 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Tā kā 11 ir skaitļa 6930 pirmreizinātājs, tad meklētajam skaitlim būtu jāsatur cipars 11, bet 11 nav cipars.

3. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Par skaitļa *garumu* sauksim tā pirmreizinātāju skaitu (piemēram, skaitļa $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ *garums* ir 4, skaitļa $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ *garums* ir 2 utml.). Kāds lielākais *garums* var būt četrciparu skaitlim? Nosaki visus četrciparu skaitļus ar lielāko *garumu*!

Atrisinājums. Skaitlim $8192 = 2^{13}$ garums ir 13. Ja kādu no pirmreizinājiem 2 aizstāsim ar 3 vai lielāku skaitli, reizinājums būs vismaz $2^{12} \cdot 3 = 12288$ – vismaz piecciparu skaitlis. Arī $2^{14} > 9999$. Tātad četrciparu skaitlim lielākais *garums* ir 13, un ir tikai viens tāds skaitlis – 8192.

4. Trīs dažādu naturālu skaitļu reizinājums ir 36. Kāda var būt šo skaitļu summa?

Atrisinājums. Ja mazākais reizinātājs ir skaitlis 1, tad divu pārējo dažādo skaitļu reizinājums ir $36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$. Tad reizinātāju summa ir $1 + 2 + 18 = 21$; $1 + 3 + 12 = 16$; $1 + 4 + 9 = 14$.

Ja mazākais reizinātājs ir skaitlis 2, tad divu pārējo dažādo skaitļu reizinājums ir $18 = 3 \cdot 6$ un reizinātāju summa ir $2 + 3 + 6 = 11$.

Ja mazākais reizinātājs ir skaitlis 3, 4 vai 6, tad nevar atrast vēl divus dažādus reizinātājus, kuru reizinājums būtu attiecīgi 12, 9 vai 6.

Esam ieguvuši, ka dažādo reizinātāju summa var būt 11, 14, 16 vai 21.

5. Atrodi lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 3 un kam visi cipari ir dažādi!

Atrisinājums. Lielākais piecciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir 98765, taču, to dalot ar 3, atlikumā ir 2. Nākamais lielākais piecciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir 98764, bet, to dalot ar 3, atlikumā ir 1. Nākamais lielākais piecciparu skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi, ir **98763** un tas dalās ar 3, tātad ir meklētais skaitlis.

6. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas esoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli. Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.

Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar: **a)** 9; **b)** 24?

Atrisinājums. a) Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9. Pārbaudot ciparu summas (tās ir 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36), iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dalās ar 9, ir 12345678, jo tā ciparu summa ir 36.

b) Lai skaitlis dalītos ar 24, tam vienlaicīgi jādalās ar 8 un 3. Pirmais skaitlis, kas dalās ar 8 (pārbaudām pēdējo trīs ciparu veidoto skaitli), ir 123456. Tā kā šī skaitļa ciparu summa ir $1+2+3+4+5+6=21$, kas dalās ar 3, tad arī pats skaitlis dalās ar 3. Tātad skaitlis 123456 dalās ar 8 un ar 3, līdz ar to tas dalās arī ar 24, jo skaitļi 3 un 8 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 123456.

7. Atrodi visus tādus sešciparu skaitļus, kuriem visi seši cipari ir vienādi un kurus var izteikt kā sešu dažādu pirmskaitļu reizinājumu!
Atrisinājums. Ir divi skaitļi, kas atbilst uzdevuma prasībām: $222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ un $555555 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Pamatosim, ka šie ir vienīgie skaitļi, kas atbilst uzdevuma prasībām.
Skaitli, kas sastāv no sešiem vienādiem cipariem a, var izteikt kā $a \cdot 111111$. Sadalot šo skaitli reizinātājos, iegūstam $a \cdot 111111 = a \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Šim skaitlim jau ir 5 dažādi pirmreizinātāji, tātad reizinātājam a ir jābūt viencipara pirmskaitlim, kas atšķiras no pārējiem reizinātājiem. Vienīgie šādi skaitļi ir 2 un 5. Līdz ar to iegūstam divus derīgus sešciparu skaitļus: $222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ un $555555 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Līdz ar to esam pamatojuši, ka uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai divi skaitļi.

5.1.4. Patiesas vienādības un nevienādības, darbību secība

1. Pārliec katrā nepatiesajā nevienādībā vienu sērkociņu, lai iegūtu patiesu nevienādību! Nevienādības zīmi mainīt nedrīkst (skat. 90. att.).
Piezīme. No sērkociņiem var izveidot šādus ciparus: .

90. att.

Atrisinājums. Piemēram, pārvietojot sērkociņus, kā parādīts 91. att., iegūsim patiesas nevienādības $5 - 3 > 9 - 8$ un $0 + 4 < 6 + 7$.

91. att.

2. Noskaidro, kāds skaitlis aizstāts ar katru burtu:

$$B + C = 482\,, \quad A + B = 900\,, \quad A + B + C = 1000.$$

$A =$ $\qquad$ $B =$ $\qquad$ $C =$

Atrisinājums. No pirmā un trešā vienādojuma iegūstam, ka $A = 1000 - (B + C) = 1000 - 482 = 518$. Ievietojot iegūto A vērtību otrajā vienādojumā, aprēķinām $B = 900 - A = 900 - 518 = 382$. Ievietojot $B = 382$ pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka $C = 482 - 382 = 100$.

3. Atrisini skaitļu rēbusu: $AH + A = HEE$!
Katrs burts apzīmē vienu ciparu. Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, dažādiem – dažādi.
Atrisinājums. Ja divciparu skaitlim pieskaitot viencipara skaitli tiek iegūts trīsciparu skaitlis, tad summas simtu skaits ir $H = 1$, bet divciparu saskaitāmajam jābūt vismaz 91, tātad $A = 9$. Līdz ar to vienīgais atrisinājums ir $91 + 9 = 100$.

4. Noskaidro, kāds skaitlis var būt nezināmais x, ja
   a) $x + x = 0$;
   b) $x - x = 0$;
   c) $x : x = 1$;
   d) $x : x = 2$;
   e) $x \cdot (x : x - 1) = 2$.

Atrisinājums. a) $x = 0$;
b) x var būt jebkurš skaitlis;
c) x var būt jebkurš skaitlis, izņemot 0;
d) nav nevienas tādas x vērtības (skaitli, kas nav 0, dalot pašu ar sevi, iegūst 1);
e) tā kā $x : x = 1$, tad $x : x - 1 = 0$, bet $x \cdot 0 = 0$ visām x vērtībām, tātad arī šajā gadījumā nav nevienas derīgas x vērtības.

5. Līva ir aizrāvusies ar dažādiem maģiskiem rituāliem un neparastām sakarībām. Arī matemātikas stundas laikā viņai nedeva mieru sakarības ar ciparu 6. Viņa vēlējās pierādīt, ka cipars 6 ir ļoti īpašs un maģisks, jo to ir iespējams iegūt no visiem pārējiem cipariem, ja katru izmantotu tieši trīs reizes. Lai no trīs citiem vienādiem cipariem iegūtu ciparu seši, viņa varēja izmantot: saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kvadrātsaknes vilkšanu, faktoriālu, iekavas.

Viņas draudzenes Zane un Jana gan nebija drošas, ka cipars seši tiešām ir tik maģisks. Palīdzi Līvai pārliecināt savas draudzenes un parādi, kā var iegūt vērtību seši katrā no 10 gadījumiem!

0	0	0	=	6
1	1	1	=	6
2	2	2	=	6
3	3	3	=	6
4	4	4	=	6
5	5	5	=	6
6	6	6	=	6
7	7	7	=	6
8	8	8	=	6
9	9	9	=	6

Piezīmes. 1. Par skaitļa a aritmētisko kvadrātsakni sauc tādu nenegatīvu skaitli, kuru kāpinot kvadrātā, iegūst doto skaitli a. To apzīmē $\sqrt{a}$. Piemēram, $\sqrt{16} = 4$, jo $4^2 = 16$.

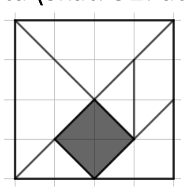
2. Visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu sauc par skaitļa n faktoriālu un apzīmē ar $n!$, tas ir, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$, piemēram, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Tiek pieņemts, ka $0! = 1$.

Atrisinājums. Prasīto var iegūt, piemēram, šādi:

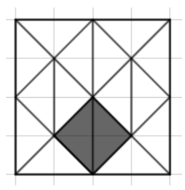
$$(0! + 0! + 0!)! = 6$$
$$(1 + 1 + 1)! = 6$$
$$2 + 2 + 2 = 6$$
$$3 \cdot 3 - 3 = 6$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$$
$$5 + 5 : 5 = 6$$
$$6 + 6 - 6 = 6$$
$$7 - 7 : 7 = 6$$
$$(\sqrt{8 : 8 + 8})! = 6$$
$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9} = 6$$

5.1.5. Ģeometrija, piemērs, pilnā pārlase

1. Kāda daļa no kvadrāta ir iekrāsota (skat. 92. att.)?



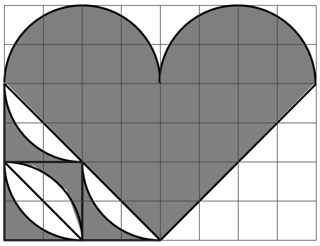
92. att.



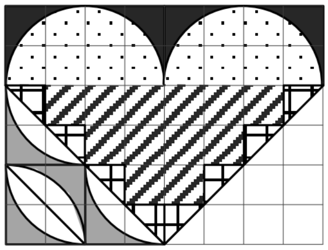
93. att.

Atrisinājums. Sadalīsim kvadrātu tā, kā parādīts 93. att. Varam ievērot, ka kvadrāts sastāv no 16 vienādiem trijstūriem. Apvienojot tos pa diviem kopā, iegūstam, ka kvadrāts sastāv no 8 šādiem trijstūru pāriem. Iekrāsots viens šāds pāris, tātad $\frac{1}{8}$ no visa kvadrāta.

2. Cik rūtiņu liels ir iekrāsotās figūras laukums (skat. 94. att.)?



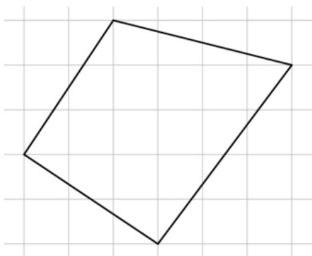
94. att.



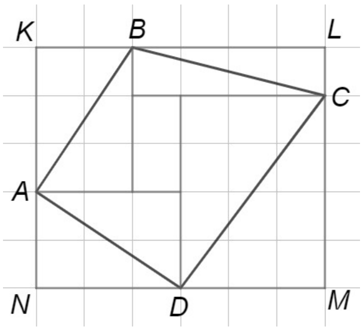
95. att.

Atrisinājums. Iekrāsotās figūras laukums ir 32 rūtiņas. Iekrāsosim doto figūru, kā redzams 95. att. Iepunktotie pusapļi kopā ar 4 melni iekrāsotajiem laukumiem veido taisnstūri 2×8 rūtiņas (skat. 95. att.); tā kā šie četri melnie laukumi kopā ir tik pat lieli kā četri gaiši pelēkie laukumi, tad pusapļi kopā ar sākumā iekrāsotajām daļām attēla apakšējā kreisajā daļā (95. att. gaiši pelēki iekrāsotie laukumi) arī veido taisnstūri ar izmēriem 2×8 rūtiņas, kura laukums ir 16 rūtiņas.
Tālāk aplūkosim dotajā uzdevumā iekrāsotās sirds apakšējo daļu – 95. att. tas ir sadalīts divu veidu daļās – 12 veselās rūtiņās (iesvītrotas ar diagonālu svītrojumu) un 8 pusrūtiņās (rūtains krāsojums). Kopā astoņas pusrūtiņas ir $8:2=4$ veselas rūtiņas, kas kopā ar veselajām rūtiņām ir $12+4=16$ rūtiņas.
Tātad iekrāsotās figūras laukums ir $16+16=32$ rūtiņas.

3. Nosaki izmērus visiem tādiem taisnstūriem, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru laukums ir tikpat liels kā 96. att. dotā četrstūra laukums!



96. att.

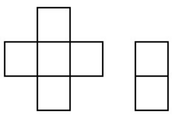


97. att.

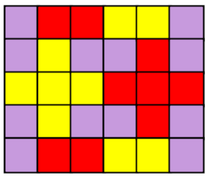
Atrisinājums. Lai aprēķinātu dotā četrstūra laukumu, ievietosim to taisnstūrī *KLMN* (skat. 97. att.).
Tad $S_{ABCD}=S_{KLMN}-S_{AKB}-s_{BLC}-s_{CMD}-s_{DNA}=5\cdot6-\frac{3\cdot2}{2}-\frac{4\cdot1}{2}-\frac{4\cdot3}{2}-\frac{3\cdot2}{2}=30-3-2-6-3=16.$

Tātad taisnstūru izmēri var būt 1×16; 2×8; 4×4.
Piezīme. Četrstūra *ABCD* laukumu var aprēķināt arī saskaitot četru trijstūru un taisnstūra laukumu.

4. Atrodi taisnstūri, ko var salikt no 98. att. parādītajām figūrām! Jāizmanto vismaz viena katra veida figūra. Taisnstūrim jābūt noklātam pilnībā un figūras nedrīkst pārklāties.
Parādi zīmējumā, kā to var izdarīt!



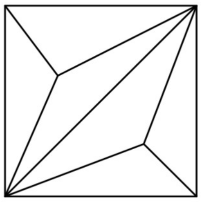
98. att.



99. att.

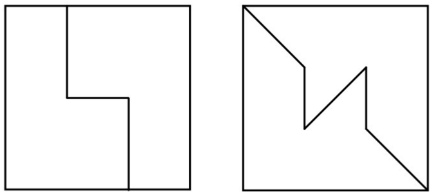
Atrisinājums. Mazākais taisnstūris, ko var izveidot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, ir 5×6 rūtiņas (skat. 99. att.).

5. Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros!
Atrisinājums. Skat., piemēram, 100. att.



100. att.

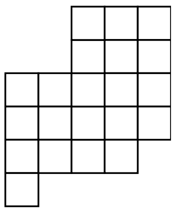
6. Sadali kvadrātu divos vienādos: **a)** sešstūros; **b)** septiņstūros!
Atrisinājums. Skat., piemēram, 101. att. a) un b).



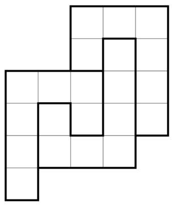
a) **b)**

101. att.

7. Sadali 102. att. doto figūru trīs vienādās figūrās!
Piezīme. Figūru un tās spoguļattēlu saucam par vienādām figūrām.



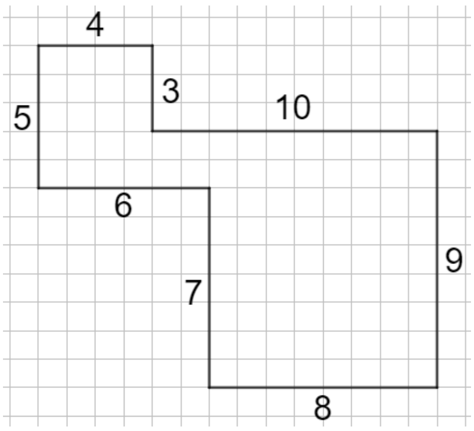
102. att.



103. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 103. att.

8. Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!
Atrisinājums. Skat. 104. att.



104. att.

5.2. Sestā klase

5.2.1. Skaitliskas izteiksmes, piemērs, pilnā pārlase

1. Tukšajās rūtiņās (skat. 105. att.) ieraksti pa viencipara skaitlim tā, lai, izpildot darbības pa rindām un kolonnām, iegūtu patiesas vienādības!

4	·		−		=	5
:		·		:		+
	+	2	−	1	=	
+		−		+		−
	:	3	+	5	=	
=		=		=		=
8	·		:		=	1

105. att.

4	·	2	−	3	=	5
:		·		:		+
2	+	2	−	1	=	3
+		−		+		−
6	:	3	+	5	=	7
=		=		=		=
8	·	1	:	8	=	1

106. att.

Atrisinājums. Skat., 106. att.
Ievērojam, ka, tā kā katrā rūtiņā jāieraksta viens cipars, apakšējo rindu var aizpildīt vienā vienīgā veidā: $8 \cdot 1 : 8 = 1$. Kreisās kolonnas otrajā rindā jābūt skaitlim, ar kuru dalās 4 (1, 2, vai 4), bet trešajā rindā – skaitlim, kas dalās ar 3 (3, 6 vai 9). Pārbaudot iegūstam, ka vienīgā iespēja, kā aizpildīt kreiso kolonnu, ir $4 : 2 + 6 = 8$. Tagad varam viennozīmīgi aizpildīt otro un trešo rindu, kā arī otro un trešo kolonnu, līdz ar to visas rūtiņas ir aizpildītas.

2. Starp skaitļiem 4 1 5 7, nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („ + ”, „ − ”, „ · ”, „ : ”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu:

a) 13;
b) 14!

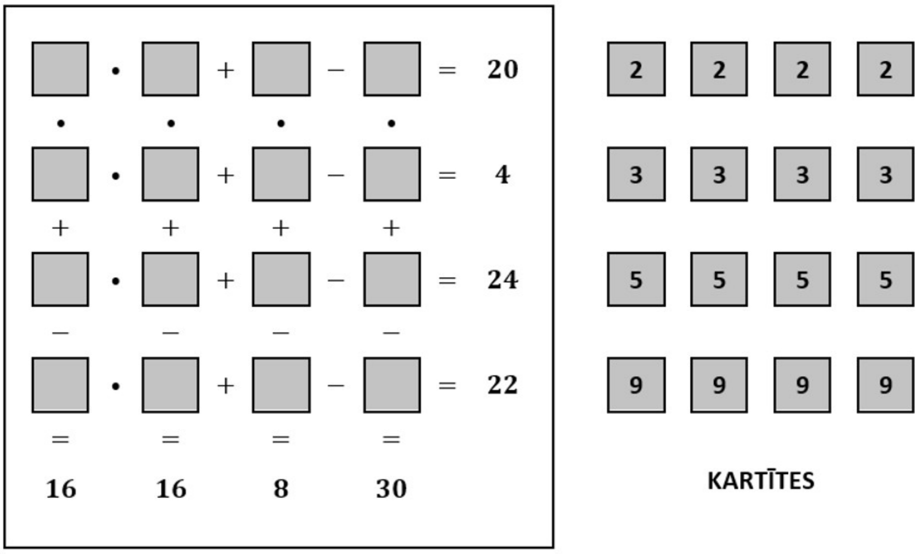
Atrisinājums. a) Piemēram, $4 \cdot 1 \cdot 5 - 7 = 13$.
b) Piemēram, $4 : (1 - 5 : 7) = 4 : \left(1 - \frac{5}{7}\right) = 4 : \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$.

3. Vienādi burti apzīmē vienādus skaitļus, dažādi – dažādus. Atrodi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi jāliek burtu vietā, lai abas dotās vienādības būtu patiesas!

$$A+B=C\cdot D$$
$$A\cdot B=C+D$$

Atrisinājums. Der, piemēram, $A=2$, $B=3$, $C=1$ un $D=5$, jo $2+3=1\cdot 5$ un $2\cdot 3=1+5$.

4. Ir dotas 16 kartītes, uz četrām uzrakstīts skaitlis 2, uz četrām – 3, uz četrām – 5 un uz četrām – 9 (skat. 107. att.). Saliec tās uz pelēkajiem kvadrātiem tā, lai izveidojas patiesas vienādības!



107. att.

Atrisinājums. Kartīšu izvietojumu skat., piemēram, 108. att.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{2} & \cdot & \boxed{9} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & 20 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
\boxed{5} & \cdot & \boxed{2} & + & \boxed{3} & - & \boxed{9} & = & 4 \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\boxed{9} & \cdot & \boxed{3} & + & \boxed{2} & - & \boxed{5} & = & 24 \\
- & & - & & - & & - & & \\
\boxed{3} & \cdot & \boxed{5} & + & \boxed{9} & - & \boxed{2} & = & 22 \\
= & & = & & = & & = & & \\
16 & & 16 & & 8 & & 30 & &
\end{array}$$

108. att.

5. Katrā lodziņā ieraksti “ + ” vai “ − ” zīmi tā, lai iegūtu patiesu vienādību!

64 ☐ 32 ☐ 16 ☐ 8 ☐ 4 ☐ 2 ☐ 1 = 81

Atrisinājums. Zīmes jāizvēlas šādi: $64 + 32 - 16 + 8 - 4 - 2 - 1 = 81$.

6. Līva ir aizrāvusies ar dažādiem maģiskiem rituāliem un neparastām sakarībām. Arī matemātikas stundas laikā viņai nedeva mieru sakarības ar ciparu 6. Viņa vēlējās pierādīt, ka cipars 6 ir ļoti īpašs un maģisks, jo to ir iespējams iegūt no visiem pārējiem cipariem, ja katru izmantotu tieši trīs reizes. Lai no trīs citiem vienādiem cipariem iegūtu ciparu seši, viņa varēja izmantot: saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kvadrātsaknes vilkšanu, faktoriālu, iekavas.

Viņas draudzenes Zane un Jana gan nebija drošas, ka cipars seši tiešām ir tik maģisks. Palīdzi Līvai pārliecināt savas draudzenes un parādi, kā var iegūt vērtību seši katrā no 10 gadījumiem!

0	0	0	=	6
1	1	1	=	6
2	2	2	=	6
3	3	3	=	6
4	4	4	=	6
5	5	5	=	6
6	6	6	=	6
7	7	7	=	6
8	8	8	=	6
9	9	9	=	6

Piezīmes. 1. Par skaitļa a aritmētisko kvadrātsakni sauc tādu nenegatīvu skaitli, kuru kāpinot kvadrātā, iegūst doto skaitli a. To apzīmē $\sqrt{a}$. Piemēram, $\sqrt{16} = 4$, jo $4^2 = 16$. .

2. Visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu sauc par skaitļa n faktoriālu un apzīmē ar $n!$, tas ir, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = n!$, piemēram, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Tiek pieņemts, ka $0! = 1$.

Atrisinājums. Prasīto var iegūt, piemēram, šādi:

$$(0! + 0! + 0!)! = 6$$
$$(1 + 1 + 1)! = 6$$
$$2 + 2 + 2 = 6$$
$$3 \cdot 3 - 3 = 6$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$$
$$5 + 5 : 5 = 6$$
$$6 + 6 - 6 = 6$$
$$7 - 7 : 7 = 6$$
$$(\sqrt{8 : 8 + 8})! = 6$$
$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9} = 6$$

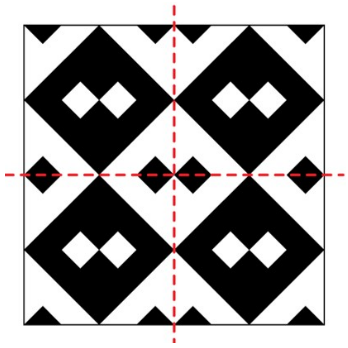
5.2.2. Simetrija

1. Izmantojot divu veidu flīzes (skat. 109. att.), izveidoja 4×4 flīžu laukumu ar 110. att. redzamo rakstu. Tam ir divas simetrijas asis.

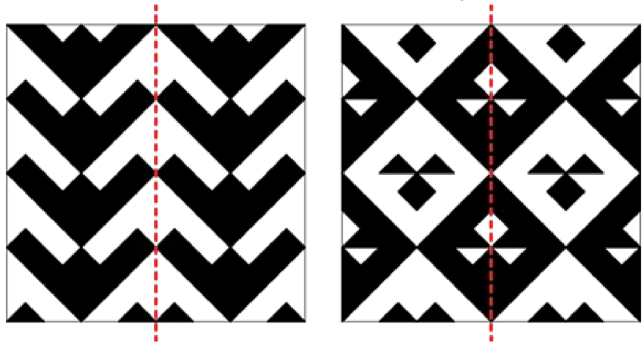
a) Izveido 4×4 flīžu laukumu, lai tā rakstam ir vertikālā simetrijas ass, bet nav horizontālā simetrijas ass! Izveido divus dažādus šādus rakstus!

b) Vai ir iespējams izveidot 4×4 flīžu laukumu, kuram ir vairāk nekā divas simetrijas asis?

109. att.



110. att.



111. att.

Atrisinājums. a) Skat, piemēram, 111. att.

b) Nē, nav iespējams. Izveidotā flīžu raksta simetrijas asis ir arī paša kvadrāta simetrijas asis. Kvadrātam ir tikai četras simetrijas asis: abas diagonāles un taisnes, kas savieno pretējo malu viduspunktus. Neviena no kvadrāta diagonālēm nevar būt flīžu raksta simetrijas ass, jo kvadrāta diagonāle satur kvadrāta stūrī novietotās flīzes diagonāli, bet neviena no dotajām flīzēm nav simetriska attiecībā pret tās diagonāli.

2. Uz autoceļa “Brauc un piesprādzējies” ir trīs braukšanas joslas. Pa pirmo joslu jābrauc ar ātrumu no 50 līdz 70 kilometriem stundā, pa otro joslu – ar ātrumu no 90 līdz 110 kilometriem stundā, bet pa trešo – ar ātrumu no 120 līdz 140 kilometriem stundā.

Autovadītājs brauc pa autoceļa “Brauc un piesprādzējies” vienu noteiktu joslu un ievēro, ka uz odometra (ierīce, kas rāda nobrauktā ceļa garumu kilometros) displeja redzams rādījums **15951**. Autovadītājs, ievērojot šo simetrisko skaitli, kas vienādi lasāms gan no labās, gan kreisās puses, nolēma pēc divām stundām atkal aplūkot displeju.

Izrādījās, ka displejā atkal bija redzams simetrisks skaitlis. Pa kuru joslu vai joslām noteikti nebrauca autovadītājs?

Atrisinājums. Apskatām, kādi ir nākamie simetriskie skaitļi, ko var redzēt odometra displejā.

- Pēc skaitļa 15951 var redzēt 16061. Šajā gadījumā autovadītājs divās stundās ir nobraucis $16061 - 15951 = 110$ km, tas ir iespējams, ja brauc pa pirmo joslu, piemēram, ar ātrumu 55 km/h.
- Pēc skaitļa 16061 var redzēt skaitli 16161. Šajā gadījumā autovadītājs divās stundās ir nobraucis $16161 - 15951 = 210$ km, tas ir iespējams, ja brauc pa otro joslu, piemēram, ar ātrumu 105 km/h.
- Pēc skaitļa 16161 var redzēt skaitli 16261. Šajā gadījumā autovadītājs divās stundās būtu nobraucis $16261 - 15951 = 310$ km. Pat braucot ar vislielāko atļauto ātrumu 140 km/h divās stundās var nobraukt tikai $140 \cdot 2 = 280$ km, kas ir mazāk nekā 310 km.

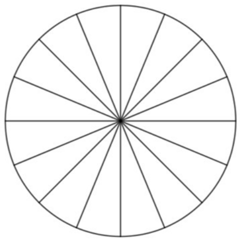
Ja autovadītājs brauktu pa trešo joslu ar mazāko iespējamo ātrumu 120 km/h, tad divās stundās viņš nobrauktu 240 km, bet 15951 + 240 = 16191, kas ir vairāk nekā 16161. Tātad autovadītājs noteikti nebrauca pa trešo joslu.

3. Uz galda ir divas vāzes ar tulpēm – vienā vāzē ir 46 tulpes, bet otrā – 43 tulpes. Divi spēlētāji pamīšus ņem no tām ārā tulpes. Vienā gājienā viens spēlētājs izvēlas kādu no šīm vāzēm un no tās izņem vai nu 1 tulpi, vai arī 3 tulpes. Zaudē tas spēlētājs, kuram vairs nav ko paņemt. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

Savā pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam no tās vāzes, kurā ir 46 tulpes, jāizņem 3 tulpes. Tad pēc pirmā spēlētāja pirmā gājiena tulpju skaits abās vāzēs ir vienāds. Katrā savā nākamajā gājienā pirmajam spēlētājam jāizņem tikpat daudz tulpju, cik tikko savā gājienā ir paņēmis otrais spēlētājs, tikai no otras vāzes, tas ir, tā, lai pēc viņa gājiena tulpju skaits vāzēs atkal būtu vienāds. Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

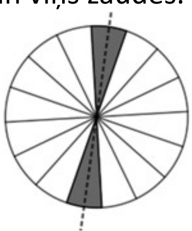
4. Riņķis sadalīts 16 vienādās daļās (skat. 112. att.). Divi spēlētāji pamīšus tās aizkrāso. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot vai nu vienu no šīm daļām, vai divas blakus esošas daļas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



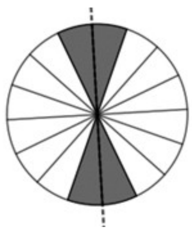
112. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Otrajam spēlētājam savā pirmajā gājienā jāaizkrāso daļas tā, lai abās pusēs starp aizkrāsotajām daļām paliktu vienāds skaits neaizkrāsoto daļu, tas ir, ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā aizkrāso vienu daļu, tad otrais spēlētājs arī aizkrāso vienu daļu (skat. 113. att.), bet, ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā aizkrāso divas daļas, tad otrais spēlētājs arī aizkrāso divas daļas (skat. 114. att.). Katrā savā nākamajā gājienā otrajam spēlētājam jākrāso simetriski pirmā spēlētāja tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret 113. att. vai 114. att. novilkto taisni (atkarībā no pirmā spēlētāja pirmā gājiena). Ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.

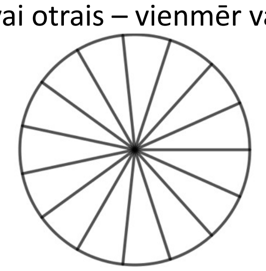


113. att.



114. att.

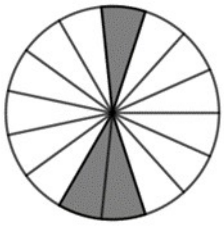
5. Riņķis sadalīts 15 vienādās daļās (skat. 115. att.). Divi spēlētāji pamīšus tās aizkrāso. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot vai nu vienu no šīm daļām, vai divas blakus esošas daļas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



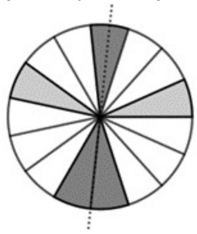
115. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Otrajam spēlētājam savā pirmajā gājienā jāaizkrāso daļas tā, lai abās pusēs starp aizkrāsotajām daļām paliktu vienāds skaits neaizkrāsoto daļu (skat. 116. att.), tas ir, ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā aizkrāso vienu daļu, tad otrais spēlētājs aizkrāso divus blakus esošas daļas un otrādi. Katrā savā nākamajā gājienā otrajam spēlētājam jākrāso simetriski pirmā spēlētāja tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret 117. att. novilkto taisni. Ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



116. att.

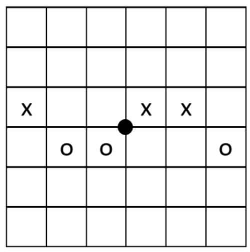


117. att.

6. Divi spēlētāji pamīšus izvieto kauliņus tabulas 6×6 rūtiņās. Vienā gājienā var aizpildīt vai nu vienu tukšu rūtiņu, vai vairākas tukšas rūtiņas, kuras atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

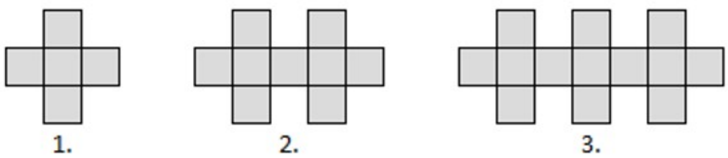
Otrajam spēlētājam katrā savā gājienā jāizdara pirmā spēlētāja gājienam simetrisks gājiens attiecībā pret kvadrāta centru (skat. 118. att., kur parādīts viens iespējams gājienu "pāris"). Ja pirmais spēlētājs varēs aizpildīt tukšās rūtiņas, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



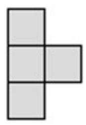
118. att.

5.2.3. Garas skaitļu summas, problēmas sadalīšana daļās, pāreja uz vienkāršāku problēmu

1. Valentīns savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 119. att. Pirmā figūra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 12 cm. Katru nākamo figūru Valentīns iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt vienu 120. att. doto figūru.



119. att.



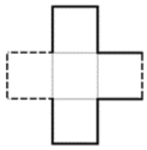
120. att.

- **a)** No cik kvadrātiem sastāv 70. figūra?
- **b)** Nosaki 70. figūras perimetru!
- **c)** Vai kādai no Valentīna zīmētajām figūrām perimetrs ir 1000 cm?

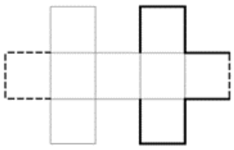
Atrisinājums. a) Ievērojam, ka, lai iegūtu nākamo figūru, iepriekšējai figūrai tiek pievienoti 4 kvadrāti. Pirmā figūrai sastāv no 5 kvadrātiem un vēl jāpievieno $69\cdot4=276$, tātad 70. figūra sastāvēs no $5+276=281$ kvadrāta.

b) Ievērojam, ka pirmajai figūrai ir 12 vienādas malas, tātad katras malas garums ir 1 cm. Apskatām, kā mainās katras nākamās figūras perimetrs.

- Pirmajai figūrai perimetrs ir $P_1 = 12$ cm. Ievērojam, ka 12 var uzrakstīt kā $4 + 8$ (skat. 121. att., kur malu, kas iekrāsotas ar pārtrauktu līniju, kopējais garums ir 4 cm, bet ar biezāku līniju iekrāsoto malu kopējais garums ir 8 cm).
- Otrajai figūrai perimetrs ir $P_2 = 4 + 8 + 8 = 4 + 2 \cdot 8$ cm, jo pirmās figūras perimetra nāk klāt 8 malas (skat. 122. att., kur ar biezāku līniju iezīmētas malas, kas tiek pievienotas figūrai), kuru kopējais garums ir 8 cm.
- Trešajai figūrai perimetrs ir $P_3 = 4 + 2 \cdot 8 + 8 = 4 + 3 \cdot 8$ cm, jo pie otrās figūras perimetra nāk klāt 8 malas.



121. att.



122. att.

Līdzīgi iegūst arī nākamo figūru perimetrus, katru reizi pieskaitot 8 cm. Līdz ar to figūras, kuras kārtas numurs ir n, perimetrs ir $P_n = 4 + n \cdot 8$ cm.

Tātad 70. figūras perimetrs ir $P_{70} = 4 + 70 \cdot 8 = 564$ cm.

c) Ievērojam, ja no figūras perimetra atņem 4, tad iegūtajam rezultātam jādalās ar 8. Tā kā $1000 - 4 = 996$ un $996 : 8 = 124$, atl. 4 (nedalās ar 8), tad nav tādas figūras, kuras perimetrs ir 1000 cm.

2. Nosaki skaitļa $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + 101^3$ pēdējo ciparu!

Atrisinājums. Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos un nosakām katras grupas skaitļu summas pēdējo ciparu:

- summas $1^3 + 11^3 + ... + 101^3$ pēdējais cipars ir 1, jo ir vienpadsmit saskaitāmie un katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 1;
- $3^3 + 13^3 + ... + 93^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 7, jo $3^3 = 27$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $7 \cdot 10 = 70$;
- $5^3 + 15^3 + ... + 95^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 5, jo $5^3 = 125$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $5 \cdot 10 = 50$;
- $7^3 + 17^3 + ... + 97^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 3, jo $7^3 = 343$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $3 \cdot 10 = 30$;
- $9^3 + 19^3 + ... + 99^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 9, jo $9^3 = 729$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $9 \cdot 10 = 90$.

Tātad uzdevumā dotā skaitļa pēdējais cipars ir 1.

3. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2017; 2018. Kā katram no tiem pierakstīt priekšā „ + ” vai „ − ” zīmi tā, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība?

Atrisinājums. Tā kā visi uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir naturāli, tad rezultāts noteikti būs vesels skaitlis. Mazākais pozitīvais veselais skaitlis ir 1. Ja parādīsim, ka var iegūt vērtību 1, tad uzdevums būs atrisināts. Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus skaitļus n; $n+1$; $n+2$; $n+3$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā „ + ” vai „ − ” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

$$+n - (n+1) - (n+2) + (n+3) = 0.$$

Sagrupējam skaitļus no 1 līdz 2016 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 2017 un 2018 priekšā liekam attiecīgi „ − ” vai „ + ”:

$$\underbrace{+1 - 2 - 3 + 4}_{=0} \underbrace{+5 - 6 - 7 + 8}_{=0} + ... \underbrace{+2013 - 2014 - 2015 + 2016}_{=0} - 2017 + 2018 = 1.$$

Līdz ar to esam parādījuši, kā salikt zīmes, lai iegūtu vērtību 1.

4. Uz tāfeles rindā uzrakstīti nepāra skaitļi 1; 3; 5; ...; 2021; 2023. Katram no tiem priekšā pierakstīja vai nu „ + ”, vai „ − ” zīmi. Vai var gadīties, ka iegūtās izteiksmes vērtība ir: **a)** 4; **b)** 1?

Atrisinājums. a) Jā, iegūtās izteiksmes vērtība var būt 4. Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus nepāra skaitļus $2n-1$; $2n+1$; $2n+3$; $2n+5$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā vai nu „ + ” vai „ − ” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

$$+(2n-1)-(2n+1)-(2n+3)+(2n+5)=0.$$

Pavisam uz tāfeles ir uzrakstīti 1012 skaitļi. Sagrupējam skaitļus no 9 līdz 2023 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 1; 3; 5; 7 priekšā liekam attiecīgi „ − + − + ”:

$$\underbrace{-1+3-5+7}_{=4}\ \underbrace{+9-11-13+15}_{=0}+\ldots\ \underbrace{+2017-2019-2021+2023}_{=0}=4.$$

b) Nē, nevar iegūt vērtību 1. Tā kā uz tāfeles ir uzrakstīts pāra skaits (1012 skaitļi) nepāra skaitļu, tad to summa būs pāra skaitlis, jo, saskaitot vai atņemot divus nepāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

5. Aprēķini izteiksmes vērtību!

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)$$

Atrisinājums. Vienkāršojam doto izteiksmi

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{70}{69}\cdot\frac{71}{70}.$$

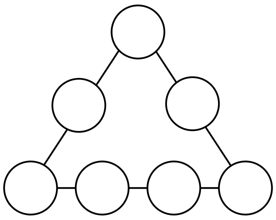
Ievērojam, ka katru divu daļu reizinājumā saīsinās vienas daļas saucējs un otras daļas skaitītājs. Pēc visām saīsināšanām, skaitītājā paliek tikai 71, bet saucējā 2. Tātad iegūstam, ka dotās izteiksmes vērtība vienāda ar $\frac{71}{2}$ jeb $35\frac{1}{2}$.

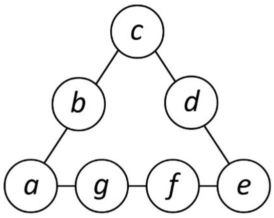
5.3. Septītā klase

5.3.1. Pilnā pārlase, informācijas attēlošana: grafi, tabulas, Eilera-Venna diagramma

1. Viena no Latvijas bobsleja četrinieku ekipāžām ir Oskars Melbārdis, Helvijs Lūsis, Arvis Vilkaste un Jānis Strenga. Pirmais no tiem ir pilots, pārējie trīs ir stūmēji. Zināms, ka bobā pirmais sēž pilots.
Cik dažādos veidos treneris bobā varēja sasēdināt pārējos trīs stūmējus?
Uzraksti visus iespējamos variantus, stūmējus apzīmējot ar to vārdu pirmajiem burtiem: Helvijs Lūsis – H; Arvis Vilkaste – A; Jānis Strenga – J!
Atrisinājums. Dots, ka pirmais bobā noteikti sēž Oskars Melbārdis. Ja otrais sēž Helvijs Lūsis, tad iespējami divi izkārtojumi: HAJ un HJA; ja otrais sēž Arvis Vilkaste, tad iespējami vēl divi izkārtojumi: AJH un AHJ; ja otrais sēž Jānis Strenga, tad atkal iespējami divi izkārtojumi: JAH un JHA.
Tātad trīs stūmējus treneris bobā varēja sasēdināt 6 dažādos veidos: HAJ; HJA; AJH; AHJ; JAH; JHA.

2. Aplīšos (skat. 123. att.) ierakstiet skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas! Aplūko visas iespējas, kādas var būt šīs summas!


123. att.



124. att.

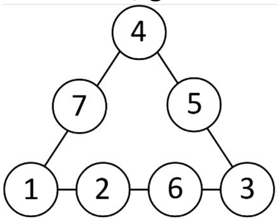
Atrisinājums. Apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts 124. att. Tad

$$a+b+c=c+d+e=a+g+f+e=s,$$
$$a+b+c+d+e+f+g=1+2+3+4+5+6+7=28.$$

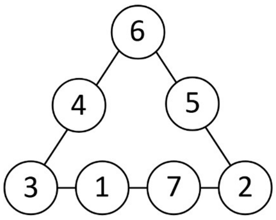
Savukārt $3s=(a+b+c+d+e+f+g)+(a+c+e)=28+(a+c+e)$. Tātad $28+(a+c+e)$ jādalās ar 3. Summas $a+c+e$ mazākā vērtība var būt $6=1+2+3$, bet lielākā $18=5+6+7$. Balstoties uz šiem secinājumiem, tabulā apkoposim iespējamās s vērtības.

$3s=28+a+c+e$	s	$a+c+e$
36	12	8
39	13	11
42	14	14
45	15	17

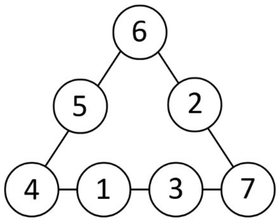
Vērtībām $s=12$, $s=13$ un $s=15$ piemēri doti attiecīgi 125. att.,126. att. un 127. att. Gadījumā $s=14$ gan $a+b+c=14$, gan $a+c+e=14$, tātad jābūt $b=e$, kas nevar būt.



125. att.



126. att.



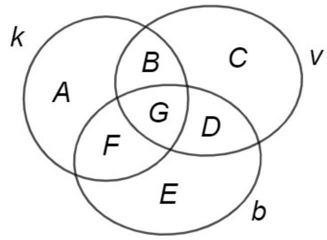
127. att.

Tātad uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas var būt 12, 13 vai 15.

3. Mūzikas akadēmijas absolventi katrs māk spēlēt vismaz vienu mūzikas instrumentu – klavieres, vijoli vai bungas. Zināms, ka klavieres māk spēlēt 37, vijoli – 30, bet bungas – 43 absolventi. Tikai vienu mūzikas instrumentu māk spēlēt 32 absolventi. Tieši divus mūzikas instrumentus māk spēlēt 33 absolventi. Cik absolventi māk spēlēt visus trīs mūzikas instrumentus?

Atrisinājums. Apzīmēsim to absolventu skaitu, kas māk spēlēt klavieres, ar *k*, kas māks spēlēt vijoli – ar *v*, un tos, kas spēlē bungas – ar *b*. Apskatīsim Eilera – Venna diagrammu (skat. 128. att.). Summā $37+30+43$ apgabali *A, C* un *E* (tajos kopā ir 32 absolventi, kas prot spēlēt tikai vienu instrumentu) ir ieskaitīti vienreiz, apgabali *B, D* un *F* (tajos kopā ir 33 absolventi, kas māk spēlēt tieši divus instrumentus) ieskaitīti divreiz, bet apgabals *G* (tie, kas māk spēlēt visus trīs instrumentus) tiek ieskaitīts trīs reizes.

Tātad $37+30+43-32-2\cdot 33=12=3\cdot G$ un $G=4$, tas ir, visus trīs mūzikas instrumentus prot spēlēt četri absolventi.



128. att.

4. Cik ir tādu naturālu skaitļu, kuru ciparu reizinājums ir 20, bet summa 11?

Atrisinājums. Aplūkosim skaitļa 20 dalītājus, kuri ir viencipara skaitļi: tie ir 1, 2, 4 un 5. Skaitli 1 kā reizinātāju var izmantot patvaļīgu skaitu reižu – tas nemaina reizinājuma vērtību. Tātad skaitli 20 kā viencipara skaitļu reizinājumu, kuru summa ir 11, var izteikt divos veidos: 1) $5\cdot 4\cdot 1\cdot 1$ vai $5\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1$.

No pirmā varianta cipariem var izveidot 12 dažādus skaitļus (piecinieks var atrasties jebkurā no 4 vietām, četrinieks – jebkurā no 3 atlikušajām vietām, bet pārējās vietās viennozīmīgi jāieraksta vieninieki). Līdzīgi noskaidro, ka no otrā varianta cipariem var izveidot 30 dažādus skaitļus. Tātad pavisam ir 42 skaitļi ar meklētajām īpašībām.

5. Draugu portālā ir reģistrējušies *N* zēni un *M* meitenes. Katrs zēns draudzējas ar trīs citiem zēniem un septiņām meitenēm, bet katra meitene – ar četrām citām meitenēm un pieciem zēniem. Kādas ir mazākās iespējamās *N* un *M* vērtības?

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka zēnu savstarpējo draudzību skaits ir $\frac{3N}{2}$. Tātad *N* ir pāra skaitlis. Apskatīsim, kāds ir kopējais draudzības saišu skaits zēnu un meiteņu starpā: $7N=5M$. Tātad mazākās *N* un *M* vērtības, kas der par uzdevuma atrisinājums, ir $N=10$ un $M=14$.

Atliek parādīt piemēru, kā uzdevuma nosacījumus var realizēt.

Zēnu draudzību tabula:

zz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+				+				+
2	+		+				+			
3		+		+				+		
4			+		+				+	
5				+		+				+
6	+				+		+			
7		+				+		+		
8			+				+		+	
9				+				+		+
10	+				+				+	

Meiteņu draudzību tabula:

mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		+				+				+				+
2	+		+				+				+			
3		+		+				+				+		
4			+		+				+				+	
5				+		+				+				+
6	+				+		+				+			
7		+				+		+				+		
8			+				+		+				+	
9				+				+		+				+
10	+				+				+		+			
11		+				+				+		+		
12			+				+				+		+	
13				+				+				+		+
14	+				+				+				+	

Zēni 1 – 5 draudzējas ar meitenēm 1 – 7, bet zēni 6 – 10 draudzējas ar meitenēm 8 – 14.

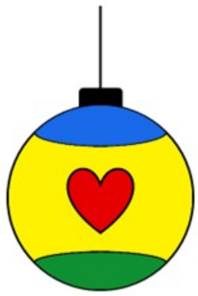
6. Jauno matemātiķu skolā ir tradīcija – katru gadu skolēni izrotā eglītes skolas telpās ar pašu veidotiem rotājumiem. Šogad visa skola ir vienojusies, ka eglītes rotās ar ornamentiem, kas redzami 129. att., turklāt to krāsošanai izmantos tikai četras krāsas: zaļu, sarkanu, dzeltenu un zilu. Katru ornamenta daļu var krāsot tikai vienā krāsā un jāizmanto visas četras krāsas. Piemēram, viens ornamenta krāsojums redzams 130. att.

a) 7.a klases 25 skolēniem nepieciešams izrotāt savas klases eglīti. Katram skolēnam ir jāizkrāso savs Ziemassvētku ornaments. Vai eglītē noteikti būs ornaments, kas redzams 130. att.?

b) Vai noteikti 7.a klases eglītē būs iekārti vismaz divi vienādi izkrāsoti ornamenti, ja klasē ir 25 skolēni?

c) Šogad visām trim piektajām klasēm ir tas gods izrotāt skolas lielo egli. Vai noteikti lielajā eglē būs iekārti 4 vienādi ornamenti, ja piektajās klasēs ir attiecīgi 24, 25 un 26 skolēni?

129. att.



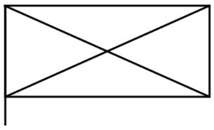
130. att.

Atrisinājums. a) Nē, ne obligāti, jo var gadīties, ka, piemēram, visi klases skolēni izdomā krāsot ornamentus vienādi veidā, kas atšķiras no 130. att. redzamā ornamenta.

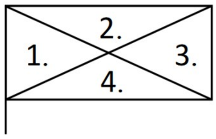
b) Kopā ornamentu var izkrāsot $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ dažādos veidos. Tā kā klasē ir 25 skolēni, tad pēc Dirihlē principa noteikti būs divi skolēni, kuru ornamenti būs iekrāsoti vienādi.

c) Kopā ornamentu var izkrāsot 24 dažādos veidos. Ja eglē nav iekārti 4 vienādi ornamenti, tad lielākais iekārto ornamentu skaits būtu $24 \cdot 3 = 72$. Iegūta pretruna, jo pavisam ir $24 + 25 + 26 = 75$ skolēni. Tātad eglē noteikti būs iekārti 4 vienādi ornamenti.

7. Cik dažādus 131. att. veida karogus var iegūt, ja katru trijstūri jānokrāso vienā no četrām krāsām: baltu, sarkanu, zilu vai zaļu, pie tam trijstūri, kam ir kopīga mala, jānokrāso dažādās krāsās?



131. att.



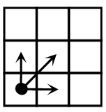
132. att.

Atrisinājums. Sanumurējam trijstūrus (skat. 132. att.) un apskatām, cik veidos var nokrāsot katru no tiem. Skaidrs, ka 1. trijstūri var nokrāsot jebkurā no 4 krāsām. Kad 1. trijstūris ir nokrāsots, 2. trijstūri var nokrāsot jebkurā no atlikušajām trīs krāsām, tātad 1. un 2. trijstūri kopā var nokrāsot $4 \cdot 3 = 12$ dažādos veidos. Apskatām, kā var nokrāsot 3. un 4. trijstūri:

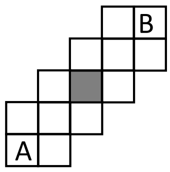
- 3. trijstūri krāso tādā pašā krāsā kā 1. trijstūri, tad atlikušo 4. trijstūri vai nokrāsot jebkurā no krāsām, kas atšķiras no 1. trijstūra krāsas, tātad 3 iespējas. Pavisam var iegūt $12 \cdot 3 = 36$ dažādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir vienā krāsā;
- 3. trijstūri krāso citā krāsā nekā 1. trijstūri, tad 3. trijstūri var nokrāsot vienā no divām krāsām, kuras nav izmantotas 1. un 2. trijstūra krāsošanai. Pēc tam 4. trijstūri arī var nokrāsot vienā no divām krāsām, kuras nav izmantotas 1. un 3. trijstūra krāsošanai. Tātad pavisam var iegūt $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ dažādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir dažādās krāsās.

Līdz ar to, izmantojot 4 dotās krāsas, var iegūt $36 + 48 = 84$ dažādus karogus.

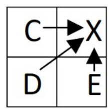
8. Figūriņa *zilonis* var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu, vienu rūtiņu pa labi vai vienu rūtiņu pa diagonāli (skat. 133. att.). Cik dažādos veidos zilonis no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. 134. att.)? Iekrāsotajā rūtiņā ir šķērslis, tajā zilonis nedrīkst iet.



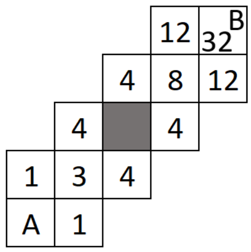
133. att.



134. att.



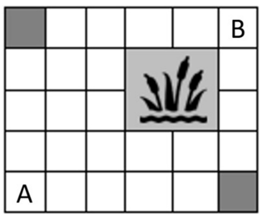
135. att.



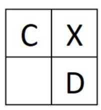
136. att.

Atrisinājums. Pakāpeniski aprēķināsim, cik veidos *zilonis* var nokļūt katrā rūtiņā. Ievērosim: ja rūtiņās C, D un E var nokļūt attiecīgi *c, d* un *e* veidos, tad rūtiņā X var nokļūt $x = c + d + e$ veidos (skat. 135. att.). Tātad no rūtiņas A rūtiņā B var nokļūt 32 veidos (skat. 136. att.).

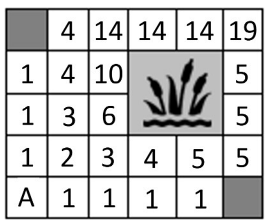
9. *Varde* vienā lēcienā var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu vai vienu rūtiņu pa labi. Cik dažādos veidos *varde* no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. 137. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās ir šķērslis, tajās *varde* neiet.



137. att.



138. att.

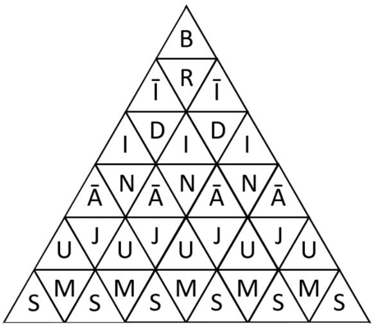


139. att.

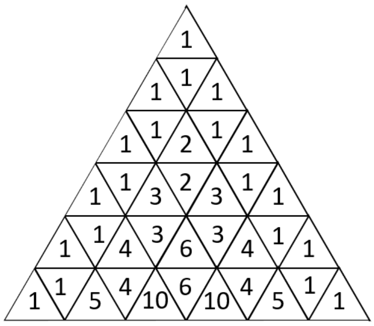
Atrisinājums. Pakāpeniski aprēķinām, cik veidos *varde* var nokļūt katrā rūtiņā. Ievērojam, ka rūtiņā X (skat. 138. att.) *varde* var nokļūt no rūtiņas C vai D. Ja rūtiņā C *varde* var nokļūt *c* veidos, bet rūtiņā D tā var nokļūt *d* veidos, tad rūtiņā X varde var nokļūt $c + d$ veidos. Tātad no rūtiņas A rūtiņā B *varde* var nokļūt 19 dažādos veidos (skat. 139. att.).

10. Cik dažādos veidos 140. att. var izlasīt vārdu BRĪDINĀJUMS, ja jāsāk lasīt no trijstūra augšējā laucīņa, un visu laiku jāpārvietojas uz blakus lauciņu?

Piezīme. Par blakus lauciņiem sauc lauciņus, kam ir kopīga mala.



140. att.



141. att.

Atrisinājums. Katrā trijstūrī ierakstīsim, cik dažādos veidos tajā var nonākt. Ievērosim, ka dažos gadījumos ir iespējama tikai viena pāreja (B-R, Ī-D, I-N, Ā-J, U-M), tāpēc tajos trijstūru pāros ierakstītais skaits sakrīt. Katrā trijstūrī var nonākt tikai no augšējiem blakus trijstūriem, tad kopējais dažādo veidu skaits, kā var tajā nonākt, ir vienāds ar šajos blakus trijstūros ierakstīto skaitļu summu (saskaitīšanas likums). Šādā veidā aizpildām visus trijstūrus. Tā kā vārds BRĪDINĀJUMS var beigties vai nu ar pirmo S burtu no kreisās puses, vai ar otro, ..., vai ar pēdējo, tad iegūstam, ka vārdu BRĪDINĀJUMS pavisam kopā var izlasīt $1+5+10+10+5+1=32$ (saskaitīšanas likums) dažādos veidos.

5.3.2. Pāreja uz vienkāršāku problēmu

1. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Par skaitļa *garumu* sauksim tā pirmreizinātāju skaitu (piemēram, skaitļa $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ *garums* ir 4, skaitļa $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ *garums* ir 2 utml.). Kāds lielākais *garums* var būt četrciparu skaitlim? Nosaki visus četrciparu skaitļus ar lielāko *garumu*!

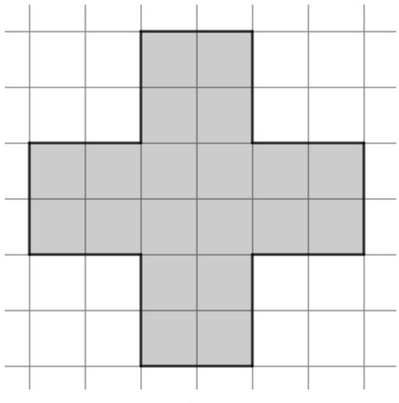
Atrisinājums. Skaitlim $8192=2^{13}$ garums ir 13. Ja kādu no pirmreizinājiem 2 aizstāsim ar 3 vai lielāku skaitli, reizinājums būs vismaz $2^{12}\cdot 3=12288$ – vismaz piecciparu skaitlis. Arī $2^{14}>9999$. Tātad četrciparu skaitlim lielākais *garums* ir 13, un ir tikai viens tāds skaitlis – 8192.

2. **a)** Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 12-stūri, kura laukums ir 20 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

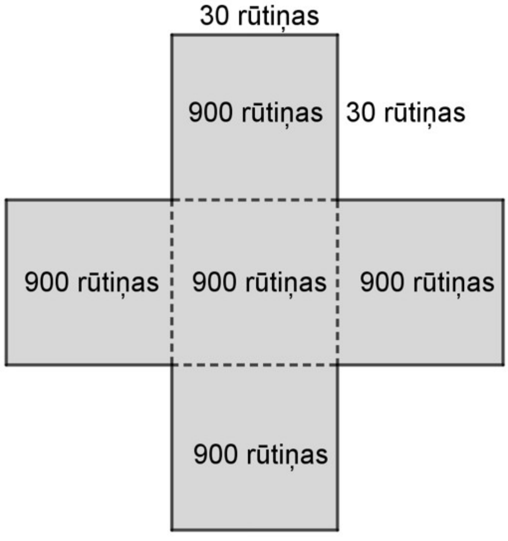
b) Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 12-stūri, kura laukums ir 4500 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām

Atrisinājums. a) Jā, var, skat., piemēram, 142. att.

b) Jā, var, skat., piemēram, 143. att., kur katras daudzstūra malas garums ir 30 rūtiņas.



142. att.



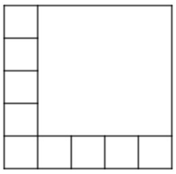
143. att.

3. **a)** Vai kvadrātu var sagriezt 10 kvadrātos?

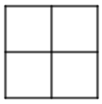
b) Vai kvadrātu var sagriezt 103 kvadrātos?

Atrisinājums. a) Jā, var, skat., piemēram, 144. att.

b) Jā, var. Ievērojam, ka kvadrātu var sadalīt 4 kvadrātos, ja katrai malai atrod viduspunktu un savieno pretējo malu viduspunktus (skat. 145. att.). Ja vienu no 144. att. dotajiem kvadrātiem sadala 4 kvadrātos, tad kvadrātu skaits palielinās par 3. Šādi turpinot, iegūsim, ka kvadrātu var sadalīt 13, 16, 19, ... kvadrātos. Tā kā $103 = 10 + 3 \cdot 31$, tad kvadrātu var sagriezt 103 kvadrātos.

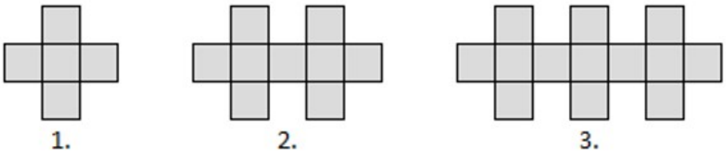


144. att.

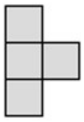


145. att.

4. Valentīns savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 146. att. Pirmā figūra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 12 cm. Katru nākamo figūru Valentīns iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt vienu 147. att. doto figūru.



146. att.



147. att.

a) No cik kvadrātiem sastāv 70. figūra?

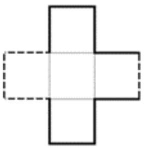
b) Nosaki 70. figūras perimetru!

c) Vai kādai no Valentīna zīmētajām figūrām perimetrs ir 1000 cm?

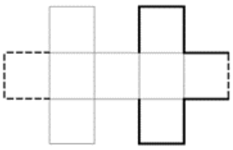
Atrisinājums. a) Ievērojam, ka, lai iegūtu nākamo figūru, iepriekšējai figūrai tiek pievienoti 4 kvadrāti. Pirmā figūrai sastāv no 5 kvadrātiem un vēl jāpievieno $69 \cdot 4 = 276$, tātad 70. figūra sastāvēs no $5 + 276 = 281$ kvadrāta.

b) Ievērojam, ka pirmajai figūrai ir 12 vienādas malas, tātad katras malas garums ir 1 cm. Apskatām, kā mainās katras nākamās figūras perimetrs.

- Pirmajai figūrai perimetrs ir $P_1 = 12$ cm. Ievērojam, ka 12 var uzrakstīt kā $4 + 8$ (skat. 148. att., kur malu, kas iekrāsotas ar pārtrauktu līniju, kopējais garums ir 4 cm, bet ar biezāku līniju iekrāsoto malu kopējais garums ir 8 cm).
- Otrajai figūrai perimetrs ir $P_2 = 4 + 8 + 8 = 4 + 2 \cdot 8$ cm, jo pirmās figūras perimetra nāk klāt 8 malas (skat. 149. att., kur ar biezāku līniju iezīmētas malas, kas tiek pievienotas figūrai), kuru kopējais garums ir 8 cm.
- Trešajai figūrai perimetrs ir $P_3 = 4 + 2 \cdot 8 + 8 = 4 + 3 \cdot 8$ cm, jo pie otrās figūras perimetra nāk klāt 8 malas.



148. att.



149. att.

Līdzīgi iegūst arī nākamo figūru perimetrus, katru reizi pieskaitot 8 cm. Līdz ar to figūras, kuras kārtas numurs ir n, perimetrs ir $P_n = 4 + n \cdot 8$ cm.

Tātad 70. figūras perimetrs ir $P_{70} = 4 + 70 \cdot 8 = 564$ cm.

c) Ievērojam, ja no figūras perimetra atņem 4, tad iegūtajam rezultātam jādalās ar 8. Tā kā $1000 - 4 = 996$ un $996 : 8 = 124$, atl. 4 (nedalās ar 8), tad nav tādas figūras, kuras perimetrs ir 1000 cm.

5. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2017; 2018. Kā katram no tiem pierakstīt priekšā „ + ” vai „ − ” zīmi tā, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība?

Atrisinājums. Tā kā visi uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir naturāli, tad rezultāts noteikti būs vesels skaitlis. Mazākais pozitīvais veselais skaitlis ir 1. Ja parādīsim, ka var iegūt vērtību 1, tad uzdevums būs atrisināts. Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus skaitļus n; $n+1$; $n+2$; $n+3$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā „ + ” vai „ − ” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

$$+n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0.$$

Sagrupējam skaitļus no 1 līdz 2016 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 2017 un 2018 priekšā liekam attiecīgi „ − ” vai „ + ”:

$$\underbrace{+1-2-3+4}_{=0}\ \underbrace{+5-6-7+8}_{=0}+\ldots\ \underbrace{+2013-2014-2015+2016}_{=0}-2017+2018=1.$$

Līdz ar to esam parādījuši, kā salikt zīmes, lai iegūtu vērtību 1.

6. Uz tāfeles rindā uzrakstīti nepāra skaitļi 1; 3; 5; ...; 2021; 2023. Katram no tiem priekšā pierakstīja vai nu „ + ”, vai „ − ” zīmi. Vai var gadīties, ka iegūtās izteiksmes vērtība ir: **a)** 4; **b)** 1?

Atrisinājums. a) Jā, iegūtās izteiksmes vērtība var būt 4. Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus nepāra skaitļus $2n-1$; $2n+1$; $2n+3$; $2n+5$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā vai nu „ + ” vai „ − ” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

$$+(2n-1)-(2n+1)-(2n+3)+(2n+5)=0.$$

Pavisam uz tāfeles ir uzrakstīti 1012 skaitļi. Sagrupējam skaitļus no 9 līdz 2023 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 1; 3; 5; 7 priekšā liekam attiecīgi „ − + − + ”:

$$\underbrace{-1+3-5+7}_{=4}\ \underbrace{+9-11-13+15}_{=0}+\ldots\ \underbrace{+2017-2019-2021+2023}_{=0}=4.$$

b) Nē, nevar iegūt vērtību 1. Tā kā uz tāfeles ir uzrakstīts pāra skaits (1012 skaitļi) nepāra skaitļu, tad to summa būs pāra skaitlis, jo, saskaitot vai atņemot divus nepāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

7. Aprēķini izteiksmes vērtību!

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)$$

Atrisinājums. Vienkāršojam doto izteiksmi

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{70}{69}\cdot\frac{71}{70}.$$

Ievērojam, ka katru divu daļu reizinājumā saīsinās vienas daļas saucējs un otras daļas skaitītājs. Pēc visām saīsināšanām, skaitītājā paliek tikai 71, bet saucējā 2. Tātad iegūstam, ka dotās izteiksmes vērtība vienāda ar $\frac{71}{2}$ jeb $35\frac{1}{2}$.

5.3.3. Ģeometrija, pilnā pārlase, piemērs

1. Zināms, ka nekādas trīs no dotajām taisnēm nekrustojas vienā punktā, bet katras divas savā starpā krustojas. Cik dažādu krustpunktu rodas, ja pavisam ir uzzīmētas:

a) 5 taisnes;

b) 2011 taisnes?

Atrisinājums. Apskatīsim uzdevuma atrisinājumu vispārīgajā gadījumā, ja plaknē ir dotas n taisnes. Tad katra taisne krusto visas pārējās $n-1$ taisnes, katru citā punktā. Tā kā katrs krustpunkts šādā veidā tiek ieskaitīts tieši divas reizes (uz katras no abām taisnēm, kas krustojas šajā punktā), tad pavisam dažādo krustpunktu skaits ir $\frac{n(n-1)}{2}$.

a) Ja $n=5$, tad krustpunktu skaits ir $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

b) Ja $n=2011$, tad krustpunktu skaits ir $\frac{2011\cdot 2010}{2}=2021055$.

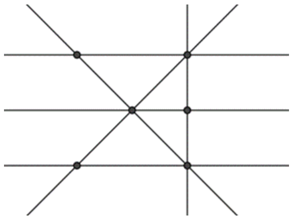
2. Vai var uzzīmēt sešas taisnes tā, lai tām būtu tieši:

a) 6 krustpunkti;

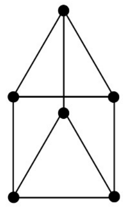
b) 16 krustpunkti?

Atrisinājums. a) Jā, var uzzīmēt, piemēram, skat. 150. att.

b) Pamatosim, ka 6 taisnēm nevar būt tieši 16 krustpunkti. Divām taisnēm var būt 0 krustpunkti (tās nekrustojas), tieši 1 krustpunkts vai bezgalīgi daudz krustpunkti (taisnes sakrīt). Tātad katra no 6 taisnēm var krustot katru no pārējām 5 taisnēm augstākais 1 punktā. Tātad krustpunktu skaits ir ne lielāks kā $6 \cdot 5 : 2 = 15$.



150. att.



151. att.

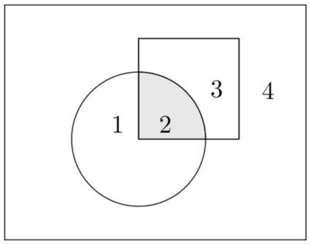
3. Uzzīmē plaknē sešus punktus tā, lai no katra uzzīmētā punkta tieši trīs citi uzzīmētie punkti atrastos tieši 1 cm attālumā!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 151. att.; katra novilktā nogriežņa garums ir 1 cm, bet pārējie attālumi starp šiem punktiem ir lielāki vai mazāki nekā 1 cm.

4. Doti seši nogriežņi ar garumiem 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm. Cik dažādos veidos no tiem var izvēlēties trīs nogriežņus tā, ka no tiem var izveidot trijstūri (katra trijstūra mala ir viens vesels nogrieznis)?

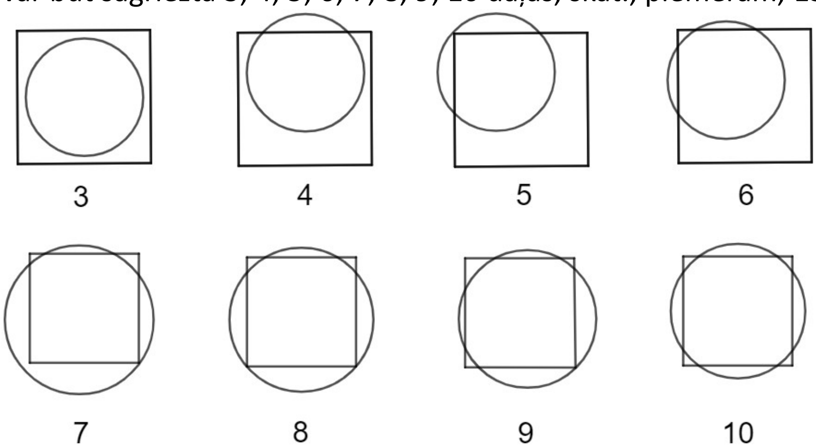
Atrisinājums. No trijstūra nevienādības (katru divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala) izriet, ka 1 cm garais nogrieznis nav izmantojams neviena trijstūra izveidošanai. No pārējiem nogriežņiem trijstūrus var izveidot 7 veidos: (3 cm, 5 cm, 7 cm), (3 cm, 7 cm, 9 cm), (3 cm, 9 cm, 11 cm), (5 cm, 7 cm, 9 cm), (5 cm, 7 cm, 11 cm), (5 cm, 9 cm, 11 cm), (7 cm, 9 cm, 11 cm).

5. Zane uz papīra lapas uzzīmēja riņķa līniju un kvadrātu (tā, ka neviens no tiem nepieskaras lapas malai) un tad sagrieza lapu pa to kontūrām. Cik daļās var būt sagriezta lapa? Atrodi visus variantus, nav jāpamato, ka citu nav! Vienu piemēru, kā lapa var būt sagriezta 4 daļās, skat. 152. att.



152. att.

Atrisinājums. Lapa var būt sagriezta 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 daļās, skat., piemēram, 153. att.



153. att.

6. Plaknē novilktas četras taisnes. Cik leņķus, kas mazāki nekā 180°, var veidot šīs taisnes?

Atrisinājums. Pamatosim, ka četras taisnes var veidot 0; 12; 16; 20 vai 24 leņķus, kas mazāki nekā 180°. Izmantosim, ka, divām taisnēm krustojoties, veidojas 4 leņķi, kas mazāki nekā 180°. Pavisam iespējamas piecas dažādas četru taišņu krustošanās iespējas:

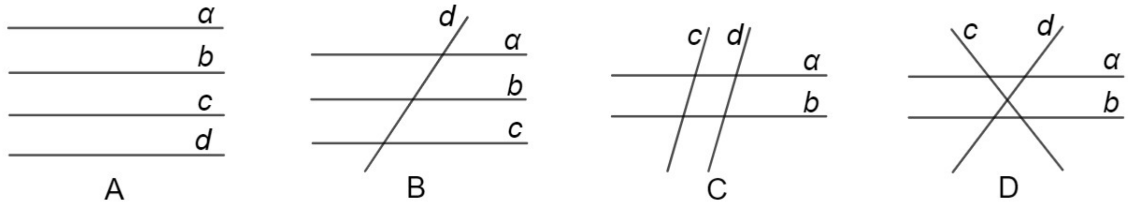
1) ja nekādas divas taisnes nekrustojas, tas ir, visas četras taisnes ir paralēlas, tad meklēto leņķu skaits ir 0 (skat., piemēram, 154. att. A);

2) ja trīs taisnes ir savstarpēji paralēlas, bet ceturtā taisne krusto tās visas, tad rodas trīs krustisku taišņu pāri (*ad, bd, cd*) un veidojas $4 \cdot 3 = 12$ meklētie leņķi (skat., piemēram, 154. att. B);

3) ja divas taisnes ir savstarpēji paralēlas un arī pārējās divas taisnes ir savstarpēji paralēlas, bet krusto pirmās divas taisnes, tad rodas četri krustisku taišņu pāri (*ac, ad, bc, bd*) un veidojas $4 \cdot 4 = 16$ meklētie leņķi (skat., piemēram, 154. att. C);

4) ja divas taisnes ir savstarpēji paralēlas, bet abas pārējās krustojas savā starpā un krusto arī pirmās divas taisnes, tad rodas pieci krustisku taišņu pāri (*ac, ad, bc, bd, cd*) un veidojas $4 \cdot 5 = 20$ meklētie leņķi (skat., piemēram, 154. att. D);

5) ja nekādas divas taisnes nav paralēlas, tad rodas seši krustisku taišņu pāri (*ab, ac, ad, bc, bd, cd*) un veidojas $4 \cdot 6 = 24$ meklētie leņķi.



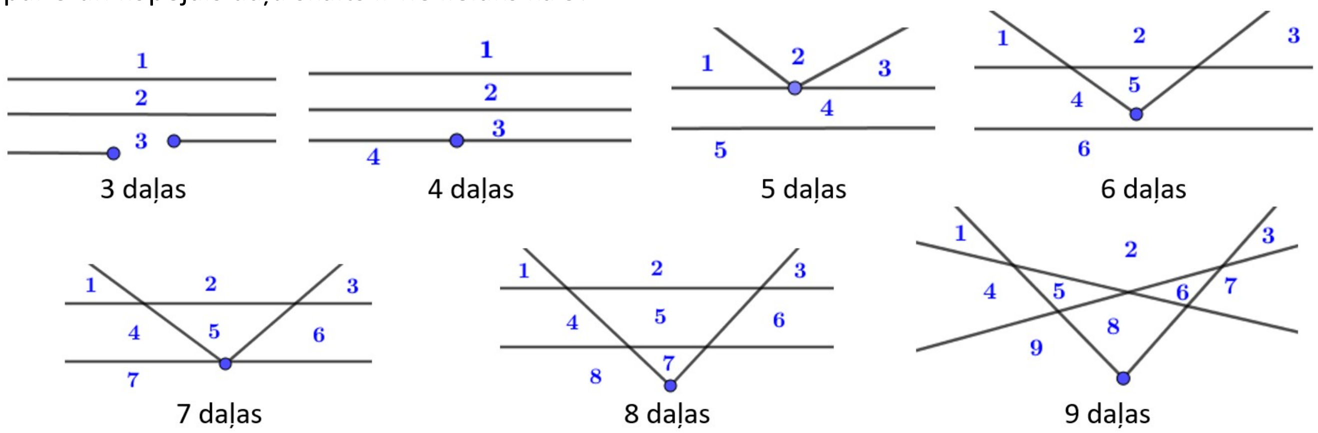
154. att.

7. Cik daļās plakni var sadalīt divas taisnes un divi stari?

Atrisinājums. Divas taisnes un divi stari plakni var sadalīt 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 daļās, piemēram, skat. 155. att.

Pamatosim, ka nevar iegūt mazāk kā 3 daļas. Ja plaknē novelk vienu taisni, tad plakne jau ir sadalīta 2 daļās, velkot otro taisni tā var būt vai nu paralēla jau novilktajai, tad plakne jau būs sadalīta 3 daļās, vai arī krustot pirmo taisni, tad plakne būs sadalīta 4 daļās. Zīmējot vēl divus starus, nevar iegūt, ka daļu skaits samazinās. Tātad mazākais daļu skaits ir 3.

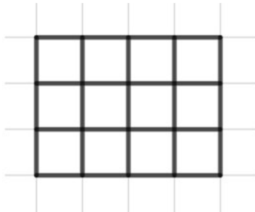
Pamatosim, ka nevar iegūt vairāk kā 9 daļas. Divas taisnes var veidot lielākais 4 daļas, ja taisnes ir krustiskas. Zīmējam pirmo staru. Lai iegūtu lielāko daļu skaitu, šim staram ir jākrusto abas taisnes. Tādā gadījumā stars sākas vienā no plaknes daļām un, šķērsot vēl divas citas plaknes daļas, katru no šķērsotājām plaknes daļām, sadala lielākais divās daļās. Tātad kopā jau ir 6 daļas. Līdzīgi rīkojamies ar otro staru. Tas sākas kādā plaknes daļā un tam jāšķērso abas taisnes un pirmais stars, līdz ar to tas var šķērsot lielākais 3 plaknes daļas un katru no tām sadalīt 2 daļās. Tādējādi daļu skaits ir palielinājies par 3 un kopējais daļu skaits ir ne lielāks kā 9.



155. att.

8. Mazajai Alisei rūtiņu burtnīcā pa rūtiņu līnijām patīk zīmēt taisnes un pēc tam skaitīt, cik kvadrātus var redzēt iegūtajā zīmējumā. Piemēram, 156. att. ir deviņas taisnes un var redzēt 20 kvadrātus (12 kvadrāti ar malas garumu 1 vienība, 6 kvadrāti ar malas garumu 2 vienības un 2 kvadrāti ar malas garumu 3 vienības).

a) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 17 kvadrāti!
b) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 100 kvadrāti!
c) Cik kvadrātus var iegūt, ja dotas 10 taisnes?
d) Uzraksti formulu, kā aprēķina iegūto taisnstūru skaitu, ja ir uzzīmētas m horizontālas taisnes un n vertikālas taisnes!

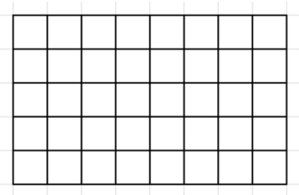


156. att.

Atrisinājums. a) Novelkot 3 horizontālas taisnes un 7 vertikālas taisnes (skat. 157. att.), iegūst tieši 17 kvadrātus (12 kvadrāti 1×1 un 5 kvadrāti 2×2).

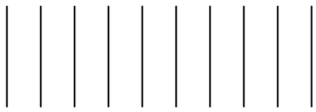
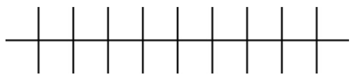
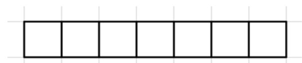
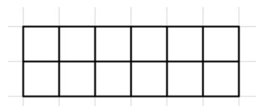
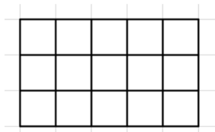
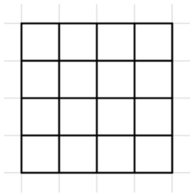
b) Novelkot 15 taisnes, kā parādīts 158. att., iegūst tieši 100 kvadrātus (40 kvadrāti 1×1, 28 kvadrāti 2×2, 18 kvadrāti 3×3, 10 kvadrāti 4×4 un 4 kvadrāti 5×5).

157. att.

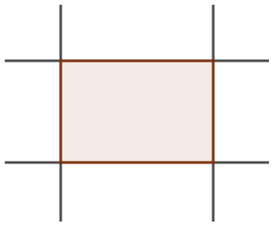


158. att.

c) Ievērojam, ka *m* vertikālās taisnes un *n* horizontālas taisnes dod to pašu kvadrātu skaitu kā *n* vertikālas taisnes un *m* horizontālas taisnes. Apskatīsim visus gadījumus, kā var tikt novietotas dotās 10 taisnes.

Vertikālo taišņu skaits	Horizontālo taišņu skaits	Taišņu novietojums	Kvadrātu skaits
10	0		0
9	1		0
8	2		7
7	3		17 (12 kvadrāti 1×1 un 5 kvadrāti 2×2)
6	4		26 (15 kvadrāti 1×1, 8 kvadrāti 2×2 un 3 kvadrāti 3×3)
5	5		30 (16 kvadrāti 1×1, 9 kvadrāti 2×2 4 kvadrāti 3×3 un 1 kvadrāts 4×4)

d) Ievērojam, ka taisnstūri nosaka 2 vertikālas taisnes un 2 horizontālas taisnes (skat. 159. att.)



159. att.

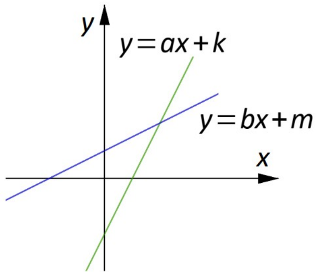
Tātad no n vertikālām taisnēm mums ir jāizvēlas divas taisnes. Pirmo taisni varam izvēlēties n veidos (tas ir, varam ņemt jebkuru no vertikālajām taisnēm) un otro taisni varam izvēlēties $n-1$ veidos (tas ir, varam ņemt jebkuru no atlikušajām $n-1$ vertikālajām taisnēm). Tā kā nav svarīgi, vai mēs vispirms izvēlamies taisni a un tad taisni b, vai arī pirmo ņemam taisni b un tad taisni a, tad divas vertikālas taisnes var izvēlēties $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ veidos.

Līdzīgi aprēķina, ka divas horizontālas taisnes var izvēlēties $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ veidos.

Tā kā katram vertikālo taišņu pārim varam piekārtot $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ dažādus horizontālo taišņu pārus, tad taisnstūru skaitu var aprēķināt pēc formulas $\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{2}$.

5.3.4. Lineāra funkcija, koeficientu ietekme

1. Koordinātu plaknē konstruēti funkciju $y=ax+k$ un $y=bx+m$ grafiki (skat. 160. att.). Pierādi, ka $(b-a)(k-m)>0$!



160. att.

Atrisinājums. Ievērojam, ka:
- taisne $y=ax+k$ (zaļā) krusto y asi punktā (0; k), tātad $k<0$;
- taisne $y=bx+m$ (zilā) krusto y asi punktā (0; m), tātad $m>0$.

Līdz ar to $k<m$ un $k-m<0$.

Tā kā funkcijas $y=ax+k$ (zaļā) vērtības palielinās straujāk nekā funkcijas $y=bx+m$ (zilā) vērtības, tad abu taišņu virziena koeficientiem izpildās sakarība $a>b$ un $b-a<0$, tāpēc $(b-a)(k-m)>0$ kā divu negatīvu skaitļu reizinājums.

2. Dotas divas funkcijas $y=ax+b$ un $g=cx+d$. Zināms, ka ar katru x vērtību funkcijas g vērtības ir mazākas nekā funkcijas y vērtības. Noskaidro, vai $(a-c)$ var būt pozitīvs, negatīvs vai nulle!

Atrisinājums. No dotā izriet, ka šo funkciju grafiki ir taisnes bez kopīgiem punktiem, tas ir, tās ir paralēlas taisnes. Šo taišņu virziena koeficienti a un c ir vienādi, tātad $a-c=0$.

3. Dotas divas lineāras funkcijas y_1 un y_2, kas definētas visām reālām x vērtībām.

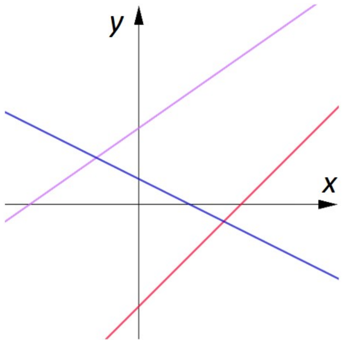
a) Vai var gadīties, ka y_1+y_2 nav lineāra funkcija?

b) Vai var gadīties, ka $y_1\cdot y_2$ ir lineāra funkcija?

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Tā kā y_1 un y_2 ir lineāras funkcijas, tad to formulas ir $y_1=ax+b$ un $y_2=cx+d$. Apskatām šo funkciju summu $y_1+y_2=ax+b+cx+d=(a+c)x+(b+d)$, kas ir lineāra funkcija.

b) Jā, var, piemēram, $y_1=x$ un $y_2=1$, tad $y_1\cdot y_2=x\cdot 1=x$, kas ir lineāra funkcija.

4. Vai var gadīties, ka 161. att. dotās taisnes ir funkciju $y=ax+b$, $y=bx-c$ un $y=cx+a$ grafiki (grafiki nav doti mērogā)?



161. att.

Atrisinājums. Nē, nevar.

Tā kā divas funkcijas ir augošas un viena dilstoša, tad diviem no taišņu virziena koeficientiem *a, b, c* ir jābūt pozitīviem un vienam negatīvam.

Tā kā divas taisnes krusto *y* asi punktā, kura ordināta ir pozitīva, bet viena krusto *y* asi punktā, kura ordināta ir negatīva, tad no skaitļiem *b, − c, a* divi ir pozitīvi un viens ir negatīvs.

Apskatām iespējamos gadījumus.

Virziena koeficienti			Brīvie locekļi			
a	b	c	b	$-c$	a	
−	+	+	+	−	−	Pretruna
+	−	+	−	−	+	Pretruna
+	+	−	+	+	+	Pretruna

Līdz ar to esam pamatojuši, ka dotās taisnes nevar atbilst uzdevumā dotajām formulām.

5. Dotas lineāras funkcijas $y=bx-71+m$, kur koeficientus b un m saista sakarība $b+2\ m=2021$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafiki krustojas vienā punktā!

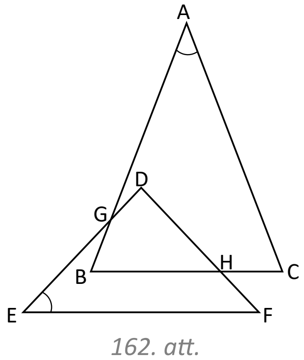
Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y=bx-71+m$ vērtību, ja argumenta vērtība $x=\frac{1}{2}$:

$$y=\frac{1}{2}\,b-71+m=\frac{1}{2}\,(b+2\ m)-71=\frac{1}{2}\cdot 2021-71=1010\,\frac{1}{2}-71=939\,\frac{1}{2}.$$

Esam ieguvuši, ka argumenta vērtībai $\frac{1}{2}$ jebkuras dotās funkcijas vērtība būs $939\frac{1}{2}$. Tātad visas dotās taisnes krustojas punktā $\left(\frac{1}{2};\ 939\frac{1}{2}\right)$.

5.3.5. Ģeometrija, trijstūri un leņķi, pierādījuma uzdevumi

1. Divi vienādsānu trijstūri ABC ($AB=AC$) un DEF ($DE=DF$) savstarpēji novietoti tā, kā redzams 162. att. Zināms, ka $BC\parallel EF$ un $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DEF=32°$. Aprēķini leņķa AGE lielumu!



162. att.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\sphericalangle AGE = \sphericalangle BGD$ kā krustleņķi. No četrstūra $BGDH$ leņķus summas iegūstam, ka $\sphericalangle BGD = 360^\circ - \sphericalangle EDF - \sphericalangle DHB - \sphericalangle HBG$.

Trijstūra ABC pamata pieleņķis $\sphericalangle GBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BAC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 32^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 148^\circ = 74^\circ$.

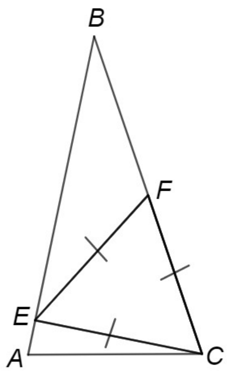
Ievērojam, ka $\sphericalangle DHB = \sphericalangle DFE = \sphericalangle DEF = 32^\circ$ (kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm BC un EF).

Trijstūra EDF virsotnes leņķis $\sphericalangle EDF = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle DEF = 116^\circ$.

Tātad $\sphericalangle AGE = \sphericalangle BGD = 360^\circ - 116^\circ - 32^\circ - 74^\circ = 138^\circ$.

2. Trijstūrī ABC leņķis ABC ir 30° liels. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC punkts F tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu. Pierādi, ka punkts F ir malas BC viduspunkts!

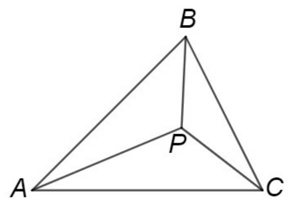
Atrisinājums. Tā kā trijstūris CEF ir vienādmalu (skat. 163. att.), tad $\sphericalangle FCE = \sphericalangle CEF = \sphericalangle EFC = 60^\circ$. Varam iegūt, ka $\sphericalangle BFE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (blakusleņķu īpašība) un no trijstūra EBF iegūstam, ka $\sphericalangle BEF = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$. Tātad trijstūris EBF ir vienādsānu, jo divi tā leņķi ir vienādi, un $BF = EF = FC$.



163. att.

3. Dots trijstūris ABC un punkts P tā iekšpusē. Pierādi, ka attālumu summa no punkta P līdz dotā trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā puse no trijstūra perimetra!

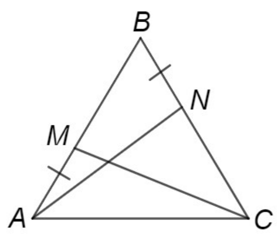
Atrisinājums. No trijstūra nevienādības izriet, ka $PA + PB > AB$, $PA + PC > AC$ un $PB + PC > BC$ (skat. 164. att.). Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $2(PA + PB + PC) > AB + AC + BC = P_{ABC}$ jeb $PA + PB + PC > \frac{1}{2} P_{ABC}$.



164. att.

4. Uz vienādmalu trijstūra ABC malām AB un BC attiecīgi atlikti punkti M un N tā, ka $MB + BN = AC$. Pierādi, ka $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MCN = 60^\circ$.

Atrisinājums. Trijstūris ABC ir regulārs, tāpēc $AC = AB$. No nogriežņu garuma īpašībām iegūstam, ka $AB = AM + MB$. Tā kā $AC = AM + MB$, tad $AM + MB = MB + BN$ jeb $AM = MN$ (skat. 165. att.). Tāpēc $\Delta ABN = \Delta CAM$ (pēc pazīmes $m\ell m$), jo $AM = BN$, $\sphericalangle ABN = \sphericalangle CAM = 60^\circ$ un $AB = AC$. Tad $\sphericalangle BAN = \sphericalangle ACM$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Līdz ar to $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MCN = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCN = \sphericalangle ACN = 60^\circ$.



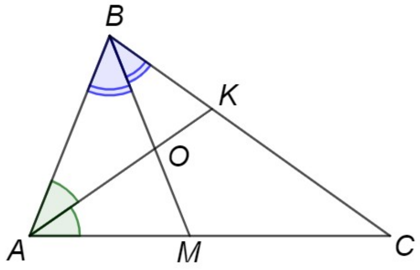
165. att.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī pamatojot, ka $MB = NC$ un $\Delta MBC = \Delta NCA$.

5. Trijstūrī ABC novilktas bisektrises AK un BM. Zināms, ka $AK=BM=AB$. Aprēķini trijstūra ABC leņķus!
Atrisinājums. Trijstūris ABM ir vienādsānu, jo $AB=BM$ (pēc dotā), tāpēc apzīmējam $\sphericalangle BAM=\sphericalangle BMA=2\alpha$ un pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle BAK=\alpha$ (skat. 166. att.). Tā kā trijstūra ABM virsotnes leņķis $\sphericalangle ABM=180^\circ-4\alpha$, tad $\sphericalangle ABK=2\cdot\sphericalangle ABM=360^\circ-8\alpha$. Ievērojam, ka

- $\sphericalangle AKB=\frac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle BAK)=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$;
- $\sphericalangle AKB=\sphericalangle ABK=360^\circ-8\alpha$.

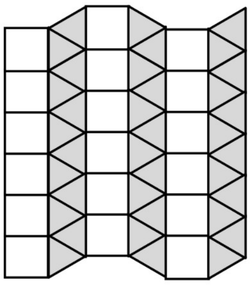
Līdz ar to iegūstam vienādojumu $\frac{180^\circ-\alpha}{2}=360^\circ-8\alpha$, no kā izriet, ka $180^\circ-\alpha=720^\circ-16\alpha$ jeb $\alpha=540^\circ:15=36^\circ$. Tātad trijstūra ABC leņķu lielumi ir $\sphericalangle BAC=36^\circ\cdot 2=72^\circ$, $\sphericalangle ABC=360^\circ-8\cdot 36^\circ=72^\circ$ un $\sphericalangle ACB=180^\circ-2\cdot 72^\circ=36^\circ$.

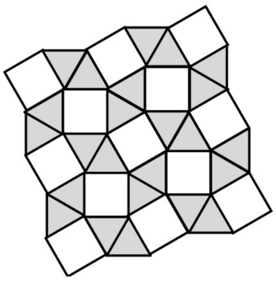


166. att.

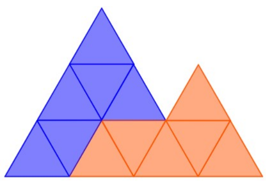
5.3.6. Plaknes un figūru pārklāšana

1. Izdomā vismaz divus dažādus veidus, kā papīra lapu ar izmēriem $20\text{ cm}\times 20\text{ cm}$ var noklāt ar kvadrātiem un vienādmalu trijstūriem, kuru malu garumi 1 cm! Jāizmanto abu veidu figūras. Figūras nedrīkst pārklāties un lapai nedrīkst palikt nenoklātas vietas, bet figūras drīkst pāriet pāri lapas malai.
Atrisinājums. Skat., piemēram, 167. att. un 168. att. Katru no šiem rakstiem var turpināt, noklājot visu kvadrātu $20\text{ cm}\times 20\text{ cm}$.


167. att.


168. att.

2. Andris apgalvo, ka sapnī bijis kādā Ēģiptes piramīdā un kādā tās telpā redzējis tādu piecstūri, kas salikts no diviem vienādiem piecstūriem, kuri sastāvējuši no vienādiem regulāriem trijstūriem. Uzzīmē šādu piecstūri!
Atrisinājums. Skat., piemēram, 169. att.
Piezīme. Mazākais tāds piecstūris sastāv no sešiem trijstūriem un ir pazīstams ar nosaukumu heksamonds *sfinksa*.

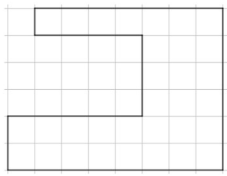

169. att.

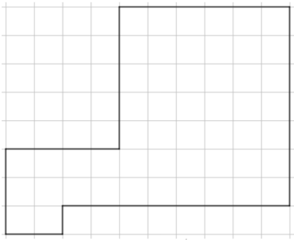
3. Astoņstūri, kas uzzīmēts uz rūtiņu lapas, sauksim par maģisku, ja tā visas malas atrodas uz rūtiņu līnijām un to garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ja, sākot ar vienu virsotni, astoņstūra malas ir sakārtotas viena pēc otras augošā vai dilstošā secībā, tad šādu astoņstūri sauc par perfektu. Piemēram, 170. att. ir uzzīmēts maģisks astoņstūris, bet 171. att. ir perfekts astoņstūris.

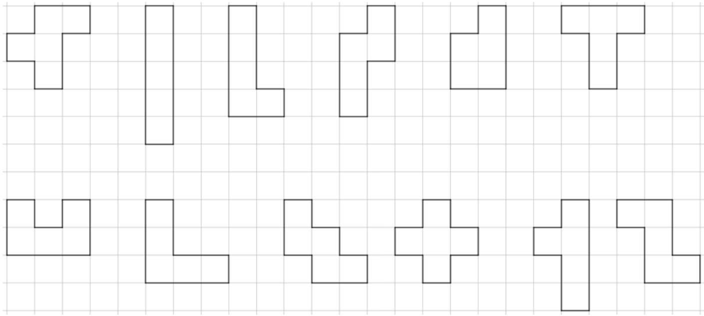
a) Izmantojot visas 172. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, saliec maģisko astoņstūri!

b) Vai, izmantojot visas 172. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, iespējams salikt 171. att. perfekto astoņstūri?

c) Atrodi vēl kādu citu daudzstūri, kuru var salikt no visām 172. att. dotajām figūrām!


170. att.

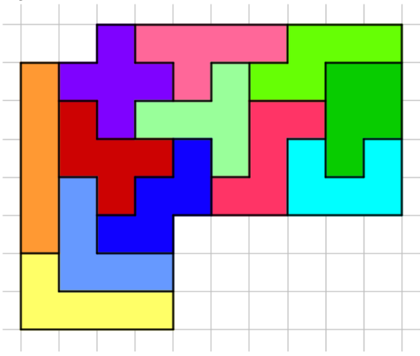

171. att.

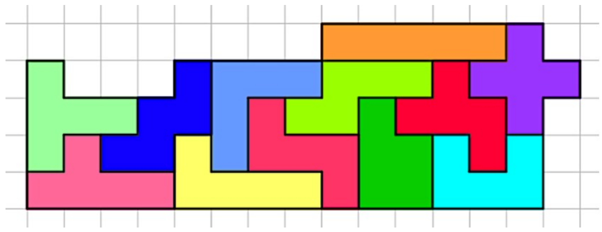

172. att.

Atrisinājums. a) Saliktu maģisko astoņstūri skat., piemēram, 173. att.

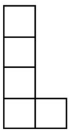
b) Nē, nevar salikt, jo dotā perfektā astoņstūra laukums ir 52, bet visu pentamino laukumu summa ir 60, kas ir vairāk nekā 52.

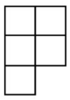
c) Der jebkurš daudzstūris, kas iegūts, izmantojot visas 172. att. figūras tā, lai šīs figūras nepārklātos un iegūtajam daudzstūrim nebūtu caurumu, piemēram, skat. 174. att.


173. att.

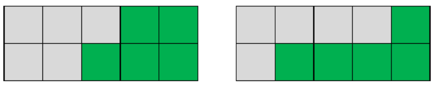

174. att.

4. Lauriņa no taisnstūra ar izmēriem 7×2018 rūtiņas izgriež 175. att. dotās figūras, bet Pēcītis no tāda paša taisnstūra izgriež 176. att. dotās figūras. Kurš no viņiem var izgriezt vairāk figūru? Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.

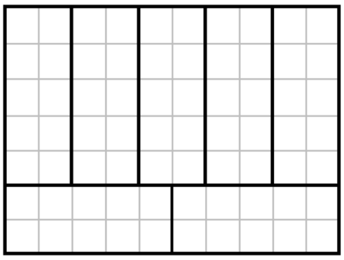

175. att.


176. att.

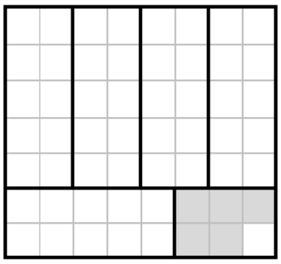
Atrisinājums. Abi var izgriezt vienādu skaitu figūru. Taisnstūris ar izmēriem 7×2018 rūtiņas satur $7 \cdot 2018 = 14126$ rūtiņas, tāpēc maksimālais figūru skaits, ko varētu izgriezt, ir 2825, jo $5 \cdot 2825 + 1 = 14126$. Parādīsim, ka gan Lauriņa, gan Pēcītis var sagriezt doto taisnstūri tā, ka pāri paliek 1 rūtiņa. Ievērojam, ka taisnstūri ar izmēriem 2×5 rūtiņas var sagriezt gan Lauriņa, gan Pēcītis (skat. 177. att.).


177. att.

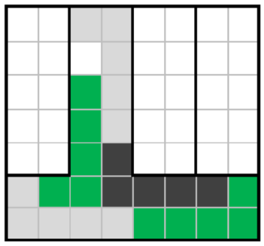
Taisnstūri 7×2018 sadalām 201 taisnstūrī 7×10 un vienā taisnstūrī 7×8. Katru taisnstūri 7×10 sadalām taisnstūros 2×5 tā, kā parādīts 178. att. Lauriņa taisnstūri 7×8 var sagriezt tā, kā parādīts 179. att., bet Pēcītis – tā, kā parādīts 180. att. Tātad abi var izgriezt vienādu skaitu figūru.



178. att.



179. att.



180. att.

5.3.7. Algebrisku izteiksmju veidošana

1. Pļavā ganās g govis, z zirgi un a aitas. Govju ir divas reizes mazāk nekā aitu, savukārt aitu ir par 6 vairāk nekā zirgu. Kura no dotajām vienādībām nav patiesa?

a) $2g=6+z$
b) $a=2g$
c) $a=z-6$
d) $2a=z+2g+6$
e) $z=a-6$

Atbilde. c)

2. Kastē atrodas m bumbiņas, b kubiņi un a piramīdas. Bumbiņu ir 2 reizes mazāk nekā piramīdu, bet piramīdu ir par 6 vairāk nekā kubiņu. Kura vienādība ir aplama?

a) $2m=6+b$
b) $a=2m$
c) $a=b-6$
d) $2a=b+2m+6$
e) $b=a-6$

Atbilde. c)

3. Trīs rūķi dienā apēd p kilogramu piparkūku. Cik kilogramus piparkūku apēd septiņi rūķi d dienās?

a) $p\cdot 7\cdot d$
b) $p:3\cdot 7$
c) $p\cdot 3\cdot d\cdot 7$
d) $3:p\cdot 7\cdot d$
e) $p:3\cdot 7\cdot d$

Atrisinājums. Pamatosim, ka atbilde ir e). Viens rūķis dienā apēd $p:3$ kilogramus piparkūku. Septiņi rūķi vienā dienā apēd $p:3\cdot 7$ kilogramus piparkūku. Tātad septiņi rūķi d dienās apēd $p:3\cdot 7\cdot d$ kilogramus piparkūku.

4. Lauka platība ir 60 ha. Viens zemnieks dienā var apart x ha, otrs – y ha. Ko izsaka katra izteiksme?

a) $60:x$ **d)** $60-x$ **g)** $60:(x+y)$
b) $x+y$ **e)** $x-y$ **h)** $x\cdot 3-y\cdot 2$
c) $x:y$ **f)** $60-y\cdot 3$ **i)** $60:(x+y)\cdot x$

Atbilde. a) Dienu skaits, ko pirmais zemnieks pavadīs, aparot 60 ha lauku.
b) Lauka platība (ha), ko vienā dienā apar abi zemnieki kopā.
c) Abu zemnieku lauka aparšanas ātruma attiecība.
d) Neapartā lauka platība, ja pirmais zemnieks vienu dienu ir aparis lauku.
e) Par cik ha vienā dienā pirmais zemnieks apar lauka platību vairāk nekā otrais zemnieks.
f) Neapartā lauka platība, ja otrais zemnieks trīs dienas ir aparis lauku.
g) Dienu skaits visa lauka aparšanai, ja abi zemnieki strādā kopā.
h) Par cik ha trīs dienās pirmais zemnieks apar lauka platību vairāk nekā otrais zemnieks divās dienās.
i) Lauka platība (ha), ko pirmais zemnieks apartu, ja strādātu tik dienas, cik dienas nepieciešamas visa lauka aparšanai, abiem strādājot kopā.

5. Slidotavas laukums ir 500 kvadrātmetri. Norlands vienā stundā no sniega var attīrīt n kvadrātmetrus, Hardijs – h kvadrātmetrus. Ko izsaka izteiksme $500-(h+n)\cdot 2$?

a) tik stundās abi zēni var attīrīt no sniega visu slidotavu,
b) tik stundās Hardijs var attīrīt no sniega visu slidotavu,
c) tik kvadrātmetri būs attīrīti, kad Norlands un Hardijs būs strādājuši 2 stundas,
d) tik kvadrātmetri būs palikuši neattīrīti, kad Norlands un Hardijs būs strādājuši 2 stundas,
e) dotā izteiksme neko neizsaka.

Atrisinājums. Pamatosim, ka atbilde ir d). Norlands un Hardijs vienā stundā no sniega var attīrīt $h+n$ kvadrātmetrus. Divu stundu laikā abi kopā būs attīrījuši $(h+n)\cdot 2$ kvadrātmetrus, tātad pēc pēc divām stundām būs palikuši neattīrīti $500-(h+n)\cdot 2$ kvadrātmetri, jo no visa slidotavas laukuma tiek atņemts attīrītais laukums.

6. Trijstūrī ABC $(AB<BC)$ novilkta bisektrise BD. Uz BD izvēlēts tāds punkts F, ka $\sphericalangle AFD=\sphericalangle ADF$, un uz BC izvēlēts tāds punkts E, ka $FE\parallel AC$. Pierādi, ka $\sphericalangle BAF=\sphericalangle BEF$!

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle ABF=\sphericalangle EBF=\beta$ un $\sphericalangle AFD=\sphericalangle ADF=\alpha$ (skat 181. att.) un aprēķināsim $\sphericalangle BAF$ un $\sphericalangle BEF$. Ievērojam, ka $\sphericalangle AFB=180^\circ-\sphericalangle AFD=180^\circ-\alpha$ (blakusleņķu summa ir 180°), tad no trijstūra BAF iegūstam, ka $\sphericalangle BAF=180^\circ-\sphericalangle ABF-\sphericalangle AFB=180^\circ-\beta-(180^\circ-\alpha)=\alpha-\beta$ (trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°).

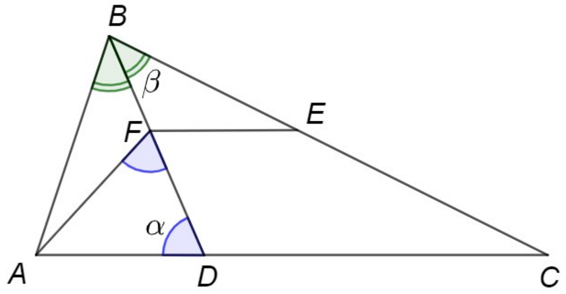
Līdzīgi iegūstam $\sphericalangle BDC=180^\circ-\sphericalangle ADF=180^\circ-\alpha$ un

$$\sphericalangle DCB=180^\circ-\sphericalangle BDC-\sphericalangle DBC=180^\circ-(180^\circ-\alpha)-\beta=\alpha-\beta.$$

Tā kā $\sphericalangle BEF=\sphericalangle DCB$ (kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm), tāpēc arī $\sphericalangle BEF=\alpha-\beta$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle BAF=\sphericalangle BEF=\alpha-\beta$.

Piezīme. Prasīto var iegūt arī, pierādot, ka $\Delta\ ABF=\Delta\ EBF$ pēc pazīmes $\ell m\ell$.

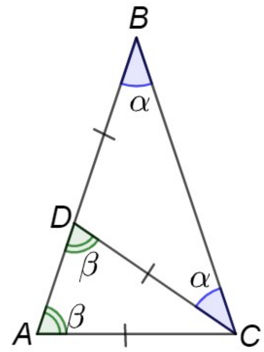


181. att.

7. Trijstūrī ABC izvēlēts malas AB iekšējs punkts D un novilkts nogrieznis CD. Dots, ka $AB=BC$ un $BD=DC=CA$. Aprēķini leņķi ABC!

Atrisinājums. Apzīmēsim $\sphericalangle ABC=\alpha$ un $\sphericalangle BAC=\beta$ (skat. 182. att.). Tā kā $\Delta\ ABC$ ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BCA=\sphericalangle BAC=\beta$. Tā kā $\Delta\ ACD$ ir vienādsānu, tad $\sphericalangle CDA=\sphericalangle BAC=\beta$. Tā kā $\Delta\ BDC$ ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC=\alpha$. $\sphericalangle CDA$ ir trijstūra BDC ārējais leņķis, tātad $\sphericalangle CDA=\sphericalangle BCD+\sphericalangle DBC$ jeb $\beta=\alpha+\alpha=2\,\alpha$.

Trijstūra ABC leņķu summa ir $180^\circ=\sphericalangle BAC+\sphericalangle ACB+\sphericalangle ABC=\beta+\beta+\alpha=2\,\alpha+2\,\alpha+\alpha=5\,\alpha$ un $\sphericalangle ABC=\alpha=36^\circ$.



182. att.

Piezīmes. 1. Par trijstūra ārējo leņķi sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
2. Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar divu trijstūra iekšējo leņķu, kuri nav tā blakusleņķi, summu.

5.3.8. Algebriskas izteiksmes, vairāku gadījumu apskatīšana

1. Salīdzini x un y, ja abi nezināmie ir naturāli skaitļi! (Aplītī ieraksti „ $<$ ”, „ $=$ ” vai „ $>$ ”.)

a) Ja $3x=y$, tad $x \bigcirc y$.
b) Ja $x-y=2$, tad $x \bigcirc y$.
c) Ja $x:y=1$, tad $x \bigcirc y$.
d) Ja $x+y>2x$, tad $x \bigcirc y$.
e) Ja $5x-12y=0$, tad $x \bigcirc y$.

Atrisinājums. a) $x < y$;
b) $x > y$ (x ir par 2 lielāks nekā y);
c) $x = y$;
d) ja $x + y > 2x$, tad $x + y > x + x$ jeb $y > x$, tātad $x < y$;
e) $5x - 12y = 0$, tad $5x = 12y$, tātad $x > y$.

2. Salīdzini naturālus skaitļus x un y ($>$, $<$, $=$, nevar noteikt), ja:

a) $3x=5y$; **b)** $17x-8=17y-8$; **c)** $x+y=4$!

Atrisinājums. a) $x > y$.
b) No $17x - 8 = 17y - 8$ izriet, ka $17x = 17y$, tātad $x = y$.
c) Var būt gan $x = y$, piemēram, $2 + 2 = 4$; var būt arī $x < y$, piemēram, $1 + 3 = 4$; var būt arī $x > y$, piemēram, $3 + 1 = 4$. Tātad viennozīmīgu atbildi nevar noteikt.

3. Punkts ar koordinātām (a; b) atrodas 1. kvadrantā. Kurā kvadrantā atrodas punkts ar koordinātām ($-b$; a)?

Atrisinājums. No uzdevumā dotā secinām, ka $a > 0$ un $b > 0$, tātad punktam ar koordinātām ($-b$; a) pirmā koordināta ir negatīva, bet otrā – pozitīva. Tāpēc tas atrodas 2. kvadrantā.

4. Jānis izvēlējās skaitļus a un b un attēloja koordinātu plaknē punktus ar koordinātām (a; b), (a; $-b$), ($-a$; b), ($-a$; $-b$), (b; a), (b; $-a$), ($-b$; a), ($-b$; $-a$). Cik dažādus punktus viņš varēja iegūt?

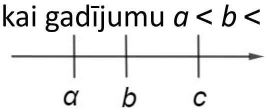
Atrisinājums. Aplūkosim visas iespējamās a un b vērtības:

- ja $a = b = 0$, tad tiek atzīmēts viens punkts;
- ja $a = 0$, $b \neq 0$, tad tiek atzīmēti 4 dažādi punkti $(0; b)$, $(0; -b)$, $(b; 0)$, $(-b; 0)$;
- ja $a \neq 0$, $b = 0$, tad līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā tiek atzīmēti 4 dažādi punkti;
- ja $a = b \neq 0$, tad tiek atzīmēti 4 dažādi punkti $(a; a)$, $(a; -a)$, $(-a; a)$, $(-a; -a)$;
- ja $a = -b \neq 0$, tad tiek atzīmēti tie paši 4 dažādi punkti kā iepriekšējā gadījumā;
- ja a, b, $-a$, $-b$ visi ir dažādi skaitļi, tad punkta koordinātas apzīmēsim ar $(x; y)$. Tā kā x var izvēlēties 4 veidos un katrai x izvēlei eksistē 2 dažādas y izvēles, tad iegūstam $4 \cdot 2 = 8$ dažādus punktus.

5. Cik no skaitļiem $(a - b)(a - c)$; $(b - a)(b - c)$; $(c - a)(c - b)$ vienlaikus var būt pozitīvi?

Atrisinājums. Aplūkosim visas iespējamās a, b un c vērtības:

- ja $a = b = c$, tad visi skaitļi ir vienādi ar 0 un neviens no tiem nav pozitīvs;
- ja divi no skaitļiem a, b, c ir vienādi, bet trešais atšķiras, tad ir viens pozitīvs skaitlis, kurā nav iekļauta vienādo skaitļu starpība;
- ja visi skaitļi a, b, c ir dažādi, tad divi no dotajiem skaitļiem ir pozitīvi. Ja skaitļus a, b, c attēlojam uz skaitļu taisnes (skat. 183. att.), viegli redzēt, kāda zīme ir skaitļu starpībām. Simetrijas dēļ pietiek apskatīt tikai gadījumu $a < b < c$.



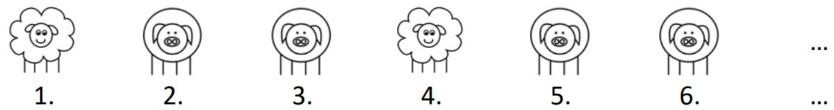
183. att.

6. Kādu lielāko skaitu skaitļu var uzrakstīt rindā tā, lai katru trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu pozitīva, bet katru piecu pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu negatīva?
Atrisinājums. Lielākais skaitļu skaits ir 6, piemēram, 10; − 18; 10; 10; − 18; 10. Pamatosim, ka vairāk skaitļus nevar uzrakstīt, lai izpildītos uzdevumā prasītais. Pieņemsim, ka rindā uzrakstīti 7 skaitļi a; b; c; d; e; f; g. No $(a+b+c)+(d+e+f)>0$ un $a+b+c+d+e<0$ secinām, ka $f>0$. No $(b+c+d)+(e+f+g)>0$ un $c+d+e+f+g<0$ secinām, ka $b>0$. Taču tādā gadījumā $b+(c+d+e)+f>0$, kas ir pretruna. Tātad vairāk kā 6 skaitļi nevar būt uzrakstīti rindā.

5.4. Astotā klase

5.4.1. Periodiskas virknes, pāreja uz vienkāršāku problēmu

1. Jokainajā lauku sētā aitas un cūkas sastājušās garā rindā pēc šāda likuma (ik pēc 3 dzīvniekiem secība atkārtojas, skat. 184. att.):



184. att.

Kas atrodas šīs rindas: **a)** 21. vietā; **b)** 100. vietā; **c)** 2018. vietā?
Atrisinājums. a) Pamatosim, ka rindas 21. vietā atrodas cūka. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem, tad tajās rindas vietās, kuru kārtas numurs dalās ar 3, atrodas cūkas.
b) Pamatosim, ka rindas 100. vietā atrodas aita. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem un $100=3\cdot 33+1$, tad rindas 100. vietā atrodas tāds pats dzīvnieks, kā rindas 1. vietā, tas ir, aita.
c) Pamatosim, ka rindas 2018. vietā atrodas cūka. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem un $2018=3\cdot 672+2$, tad rindas 2018. vietā atrodas tāds pats dzīvnieks, kā rindas 2. vietā, tas ir, cūka.

2. Rindā bez atstarpēm uzrakstīti vārdi (pirmais vārds ir "matemātikas" un pēc tam atkārtojas vārds "olimpiāde"):

MATEMĀTIKASOLIMPIĀDEOLIMPIĀDEOLIMPIĀDE…

Kāds burts atrodas 500. vietā?
Atrisinājums. Pēdējais pilnais vārds "olimpiāde" pirms 500. vietas beidzas 497. vietā, jo $497=11+9\cdot 54$. Tā kā $500-497=3$, tad 500. burts ir tāds pats, kā vārda "olimpiāde" 3. burts, tas ir, burts "i".

3. Naturālu skaitļu virknes 7; 14; 17; ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot 1. Kāds ir šīs virknes 2011. loceklis?
Atrisinājums. Pamatosim, ka virknes 2011. loceklis ir 11. Aprēķinām dažus nākamos virknes locekļus:
- virknes 4. loceklis ir 20, jo $17^2=289$ un $2+8+9+1=20$;
- virknes 5. loceklis ir 5, jo $20^2=400$ un $4+0+0+1=5$;
- virknes 6. loceklis ir 8, jo $5^2=25$ un $2+5+1=8$;
- virknes 7. loceklis ir 11, jo $8^2=64$ un $6+4+1=11$;
- virknes 8. loceklis ir 5, jo $11^2=121$ un $1+2+1+1=5$.

Līdz ar to virknes sākums ir 7; 14; 17; 20; **5**; 8; 11; **5**; 8; 11; ... Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Ievērojam, ka virknē skaitļu grupa (5; 8; 11) atkārtojas tikai sākot ar 5. locekli. Tā kā $2011=4+3\cdot 669$, tad virknes 2011. loceklis ir periodā pēdējais, tas ir, 11.

4. Dota skaitļu virkne 1; 1; 2; 5; 9; 6; ... . Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.
   a) Nosaki, vai šīs virknes 2012. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis!
   b) Aprēķini virknes 2012. locekli!

Atrisinājums. a) Pāra skaitļus virknē apzīmējam ar p, nepāra – ar n. Ja diviem iepriekšējiem virknes locekļiem ir vienāda paritāte (abi ir pāra skaitļi vai abi ir nepāra skaitļi), tad nākamais virknes loceklis būs pāra skaitlis, savukārt, ja diviem iepriekšējiem virknes locekļiem ir atšķirīgas paritātes, tad nākamais virknes loceklis būs nepāra skaitlis. Līdz ar to iegūstam virkni n; n; p; n; n; p; n; ... . Redzams, ka šī virkne ir periodiska ar perioda garumu 3. Tāpēc tikai tie virknes locekļi, kuru kārtas numurs dalās ar 3, ir pāra. Tā kā 2012 ar 3 nedalās, tad 2012. loceklis ir nepāra.

b) Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir 1; **1; 2**; 5; 9; 6; 7; 5; 4; 1; 7; 0; 9; **1; 2**; 5; ... Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs no diviem iepriekšējiem virknes locekļiem, tad, līdzko parādās divi jau iepriekš bijuši skaitļi, izveidojas periods. Tā kā virknes otrais un trešais loceklis ir 1 un 2, un 14. un 15. loceklis arī ir 1 un 2, tad virkne, sākot ar 2. locekli, ir periodiska. Tāpēc pēdējais pilnais periods pirms 2012. virknes locekļa beidzas pie 2005. virknes locekļa, jo $1+12\cdot 167=2005$. Tā kā $2012-2005=7$, tad 2012. loceklis ir periodā septītais, tātad tas ir 5.

Piezīme. Pietiek atrisināt tikai b) gadījumu un no tā secināt par skaitļa paritāti, tas ir, sniegt atbildi a) gadījumam.

5. Skaitļu virknē katru nākamo locekli iegūst, saskaitot iepriekšējā virknes locekļa ciparu kvadrātus. Piemēram, ja virknes pirmais loceklis ir 12, tad otrais loceklis ir $1^2+2^2=5$, trešais loceklis ir $5^2=25$, ceturtais loceklis ir $2^2+5^2=29$ utt.

a) Aprēķini virknes pirmos piecus locekļus, ja pirmais loceklis ir 25.

b) Kāds ir virknes 2016. loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 25?

Atrisinājums. a)

1.	2.	3.	4.	5.
25	$2^2+5^2=29$	$2^2+9^2=85$	$8^2+5^2=89$	$8^2+9^2=145$

b) Virknes sākums ir 25; 29; 85; **89**; 145; 42; 20; 4; 16; 37; 58; **89**; 145; 42; 20; ... . Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš sastapts skaitlis, virknes locekļi sāk periodiski atkārtoties, sākot ar 4. locekli. Tā kā periodā ietilpst astoņi skaitļi, tad pēdējais pilnais periods pirms 2016. locekļa beidzas pie 2011. locekļa, jo $3+8\cdot 251=2011$. Tā kā $2016-2011=5$, tad 2016. loceklis ir periodā piektais, tātad tas ir 4.

6. Profesors Cipariņš skolēniem vadīja nodarbību par interesantām virknēm, kurām katru nākamo locekli iegūst kā iepriekšējo divu virknes locekļu nenulles ciparu reizinājumu, piemēram,

3; 2; 6; 12; 12; 4; … .

Šādas virknes ir viegli aplūkot un pētīt ar datorprogrammu palīdzību, bet nodarbības laikā profesors Cipariņš skolēniem izstāstīja, ka to var izdarīt, veicot tikai aprēķinus uz papīra. Atrisini dotos uzdevumus un apraksti risināšanas metodi, kurā nav izmantotas palīgierīces.

a) Kāda ir pirmo 2022 virknes locekļu summa, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 10?

b) Kāds ir 2022. virknes loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 4?

c) Cik reizes b) gadījumā dotajā virknē parādās cipars 9, ja ir uzrakstīti tikai tās pirmie 2022 locekļi?

Atrisinājums. a) Dotās virknes sākums ir 1; 10; 1; 1; ... . Tās visi pirmie 2022 locekļi ir vienādi ar 1, izņemot otro, kas ir 10. Tātad, pirmo 2022 locekļu summa ir $2021\cdot 1+10=2031$.

b) Dotās virknes sākums ir 1; 4; 4; 16; 24; 48; 256; 1920; 1080; 144; 128; 256; 960; 3240; 1296; 2592; 19440; 25920; 25920; 32400; 4320; 576; **5040**; 4200; 160; 48; 192; 576; 3780; 35280; 40320; 5760; **5040**; 4200; 160; ... . Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš sastapts skaitlis, virknes locekļi sāk periodiski atkārtoties, sākot ar 23. locekli. Tā kā periodā ietilpst 10 skaitļi un $22+10\cdot 200=2022$, tad 2022. loceklis ir periodā pēdējais, tas ir, 5760.

c) Lai noskaidrotu, cik reizes cipars 9 parādās b) piemērā dotās virknes pirmajos 2022 locekļos, jāsaskaita, cik reizes cipars 9 parādās, pirms sākas periods, un tam jāpieskaita cipara 9 skaits periodā, kas pareizināts ar periodu skaitu līdz 2022. loceklim. No b) piemēra zinām, ka līdz 2022. loceklim perioda skaitļi ir uzrakstīti tieši 200 reizes. Tas nozīmē, ka b) piemēra dotajā virknē $7+1\cdot 200=207$ reizes parādās cipars 9.

7. Skaitļu virkne tiek veidota pēc šāda likuma: ja x ir virknes loceklis, tad nākamo virknes locekli aprēķina pēc formulas $\frac{1}{1-x}$. Virknes pirmais loceklis ir 4. Aprēķini iegūtās virknes 2018. locekli un pirmo 2018 locekļu summu!

Atrisinājums. Pamatosim, ka virknes 2018. loceklis ir $-\frac{1}{3}$. Aprēķinām dažus nākamos virknes locekļus:

- virknes 2. loceklis ir $-\frac{1}{3}$, jo $\frac{1}{1-4} = \frac{1}{-3}$;
- virknes 3. loceklis ir $\frac{3}{4}$, jo $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$;
- virknes 4. loceklis ir 4, jo $\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.

Līdz ar to virknes sākums ir 4; $-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; 4; $-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; ... . Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Tā kā virknes pirmais un arī ceturtais loceklis skaitlis 4, tad virkne ir periodiska ar periodu $\left(4; -\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$. Tā kā $3 \cdot 672 + 2 = 2018$, tad 2018. loceklis ir periodā otrais, tātad tas ir $-\frac{1}{3}$.

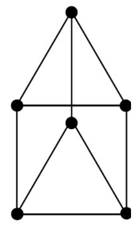
Periodā esošo skaitļu summa ir $4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{48-4+9}{12} = \frac{53}{12}$. Tā kā pirmajos 2018 virknes locekļus veido 672 šādas pilnas grupas un vēl 2 locekļi, tad virknes pirmo 2018 locekļu summa ir

$$\frac{53}{12} \cdot 672 + 4 - \frac{1}{3} = 53 \cdot 56 + 4 - \frac{1}{3} = 2971\,\frac{2}{3}.$$

5.4.2. Ģeometrija, pilnā pārlase, piemērs

1. Uzzīmē plaknē sešus punktus tā, lai no katra uzzīmētā punkta tieši trīs citi uzzīmētie punkti atrastos tieši 1 cm attālumā!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 185. att.; katra novilktā nogriežņa garums ir 1 cm, bet pārējie attālumi starp šiem punktiem ir lielāki vai mazāki nekā 1 cm.

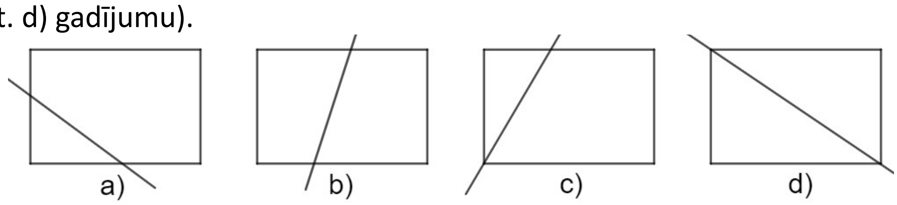


185. att.

2. Kādos daudzstūros ar vienu taisni var sadalīt taisnstūri?

Atrisinājums. Apskatīsim visus iespējamos gadījumus:

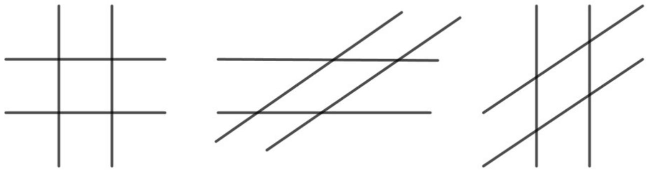
- ja taisne krusto taisnstūra divas blakus malas, tad iegūst trijstūri un piecstūri (skat. 186. att. a) gadījumu);
- ja taisne krusto taisnstūra divas pretējās malas, tad iegūst divus četrstūrus (skat. 186. att. b) gadījumu);
- ja taisne krusto taisnstūra malu un iet cauri taisnstūra virsotnei, tad iegūst trijstūri un četrstūri (skat. 186. att. c) gadījumu);
- ja taisne iet cauri taisnstūra divām pretējām virsotnēm, tad iegūst divus trijstūrus (skat. 186. att. d) gadījumu).



186. att.

3. Plaknē novilktas 5 vertikālas, 4 horizontālas un 3 savstarpēji paralēlas slīpas taisnes. Cik paralelogramu izveido šīs taisnes?

Atrisinājums. Tā kā paralelograma malas ir paralēlas, tad iespējami trīs gadījumi, kā var izvēlēties pretējās malas (skat. 187. att.):



187. att.

1) par pretējām malām var izvēlēties divas no horizontālajām taisnēm (to var izdarīt $4 \cdot 3 : 2 = 6$ veidos) un divas no vertikālajām taisnēm (to var izdarīt $5 \cdot 4 : 2 = 10$ veidos). Līdz ar to šādu paralelogramu skaits ir $6 \cdot 10 = 60$;

2) par pretējām malām varam izvēlēties divas no horizontālajām taisnēm (to var izdarīt $4 \cdot 3 : 2 = 6$ veidos) un divas no slīpajām taisnēm (to var izdarīt $3 \cdot 2 : 2 = 3$ veidos). Līdz ar to šādu paralelogramu skaits ir $6 \cdot 3 = 18$;

3) par pretējām malām varam izvēlēties divas no slīpajām taisnēm (to var izdarīt $3 \cdot 2 : 2 = 3$ veidos) un divas no vertikālajām taisnēm (to var izdarīt $5 \cdot 4 : 2 = 10$ veidos). Līdz ar to šādu paralelogramu skaits ir $3 \cdot 10 = 30$.

Tātad pavisam ir izveidoti $60 + 18 + 30 = 108$ paralelogrami.

4. Zināms, ka nekādas trīs no dotajam taisnēm nekrustojas vienā punktā, bet katras divas savā starpā krustojas. Cik dažādu krustpunktu rodas, ja pavisam ir uzzīmētas:

a) 5 taisnes;

b) 2011 taisnes?

Atrisinājums. Apskatīsim uzdevuma atrisinājumu vispārīgajā gadījumā, ja plaknē ir dotas n taisnes. Tad katra taisne krusto visas pārējās $n-1$ taisnes, katru citā punktā. Tā kā katrs krustpunkts šādā veidā tiek ieskaitīts tieši divas reizes (uz katras no abām taisnēm, kas krustojas šajā punktā), tad pavisam dažādo krustpunktu skaits ir $\frac{n(n-1)}{2}$.

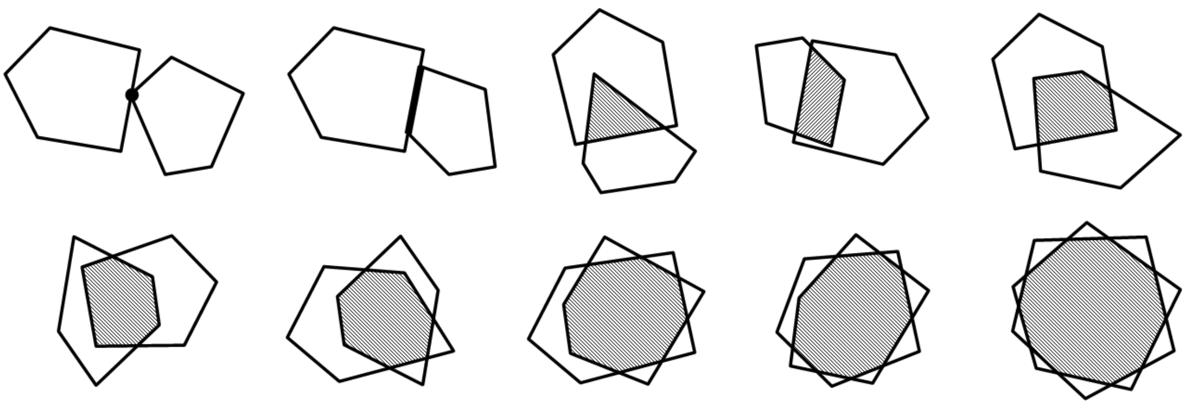
a) Ja $n = 5$, tad krustpunktu skaits ir $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

b) Ja $n = 2011$, tad krustpunktu skaits ir $\frac{2011 \cdot 2010}{2} = 2021055$.

5. No papīra izgrieza divus izliektus piecstūrus un kaut kā uzlika vienu otram virsū. Kāda figūra var būt abu piecstūru kopīgā daļa?

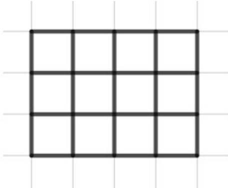
Atrisinājums. 188. att. parādīts, ka kopīgā daļa var būt punkts, nogrieznis, trijstūris, četrstūris, piecstūris, sešstūris, septiņstūris, astoņstūris, deviņstūris un desmitstūris.

Pamatosim, ka nevar iegūt daudzstūri ar vairāk kā 10 virsotnēm. Tā kā abi piecstūri ir izliekti, viena piecstūra katra mala var krustot augstākais divas otra piecstūra malas, tātad uz vienas šī piecstūra malas var atrasties ne vairāk kā 2 kopīgā daudzstūra virsotnes. Tas nozīmē, ka kopīgajai daļai nevar būt vairāk kā $2 \cdot 5 = 10$ virsotnes.



188. att.

6. Mazajai Alisei rūtiņu burtnīcā pa rūtiņu līnijām patīk zīmēt taisnes un pēc tam skaitīt, cik kvadrātus var redzēt iegūtajā zīmējumā. Piemēram, 189. att. ir deviņas taisnes un var redzēt 20 kvadrātus (12 kvadrāti ar malas garumu 1 vienība, 6 kvadrāti ar malas garumu 2 vienības un 2 kvadrāti ar malas garumu 3 vienības).

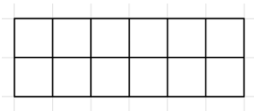


189. att.

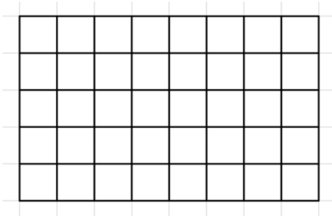
a) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 17 kvadrāti!
b) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 100 kvadrāti!
c) Cik kvadrātus var iegūt, ja dotas 10 taisnes?
d) Uzraksti formulu, kā aprēķina iegūto taisnstūru skaitu, ja ir uzzīmētas *m* horizontālas taisnes un *n* vertikālas taisnes!

Atrisinājums. a) Novelkot 3 horizontālas taisnes un 7 vertikālas taisnes (skat. 190. att.), iegūst tieši 17 kvadrātus (12 kvadrāti 1×1 un 5 kvadrāti 2×2).

b) Novelkot 15 taisnes, kā parādīts 191. att., iegūst tieši 100 kvadrātus (40 kvadrāti 1×1, 28 kvadrāti 2×2, 18 kvadrāti 3×3, 10 kvadrāti 4×4 un 4 kvadrāti 5×5).

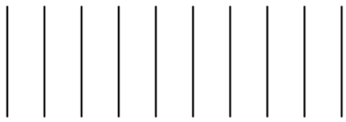
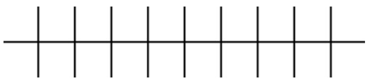
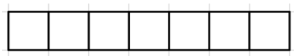
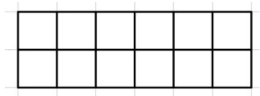
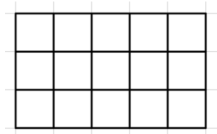
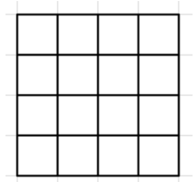


190. att.

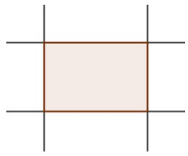


191. att.

c) Ievērojam, ka *m* vertikālās taisnes un *n* horizontālas taisnes dod to pašu kvadrātu skaitu kā *n* vertikālas taisnes un *m* horizontālas taisnes. Apskatīsim visus gadījumus, kā var tikt novietotas dotās 10 taisnes.

Vertikālo taišņu skaits	Horizontālo taišņu skaits	Taišņu novietojums	Kvadrātu skaits
10	0		0
9	1		0
8	2		7
7	3		17 (12 kvadrāti 1×1 un 5 kvadrāti 2×2)
6	4		26 (15 kvadrāti 1×1, 8 kvadrāti 2×2 un 3 kvadrāti 3×3)
5	5		30 (16 kvadrāti 1×1, 9 kvadrāti 2×2 4 kvadrāti 3×3 un 1 kvadrāts 4×4)

d) Ievērojam, ka taisnstūri nosaka 2 vertikālas taisnes un 2 horizontālas taisnes (skat. 192. att.)



192. att.

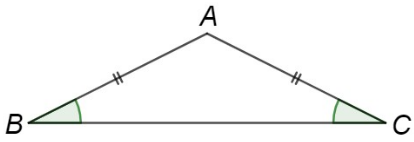
Tātad no *n* vertikālām taisnēm mums ir jāizvēlas divas taisnes. Pirmo taisni varam izvēlēties *n* veidos (tas ir, varam ņemt jebkuru no vertikālajām taisnēm) un otro taisni varam izvēlēties $n-1$ veidos (tas ir, varam ņemt jebkuru no atlikušajām $n-1$ vertikālajām taisnēm). Tā kā nav svarīgi, vai mēs vispirms izvēlamies taisni *a* un tad taisni *b,* vai arī pirmo ņemam taisni *b* un tad taisni *a*, tad divas vertikālas taisnes var izvēlēties $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ veidos.

Līdzīgi aprēķina, ka divas horizontālas taisnes var izvēlēties $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ veidos.

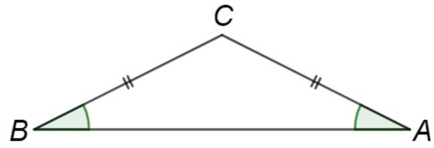
Tā kā katram vertikālo taišņu pārim varam piekārtot $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ dažādus horizontālo taišņu pārus, tad taisnstūru skaitu var aprēķināt pēc formulas $\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{2}$.

7. Dots platleņķa vienādsānu trijstūris, kuram $\sphericalangle ABC=20^{\circ}$. Pierādi, ka $3AC > AB$!
Atrisinājums. Trijstūra virsotnes leņķis nevar būt 20°, jo tad leņķi pie pamata būtu $(180^{\circ}-20^{\circ}):2=80^{\circ}$ un trijstūris nebūtu platleņķa. Apskatām abus iespējamos virsotņu izkārtojumus:

1) ja $AB = AC$ (skat. 193. att.), tad $3AC = 3AB > AB$;
2) ja $BC = AC$ (skat. 194. att.), tad $3AC > 2AC = BC + AC > AB$.



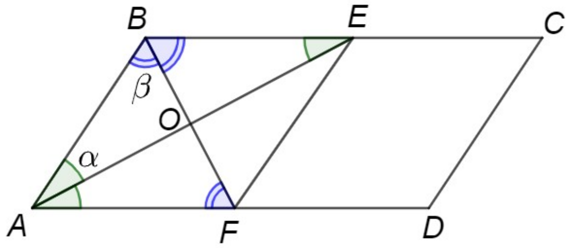
193. att.



194. att.

5.4.3. Ģeometrija, paralelograma īpašības, vienādi taisnleņķa trijstūri

1. Paralelogramā *ABCD* ir novilktas īsākās malas *AB* pieleņķu bisektrises, kuras krusto malas *BC* un *AD* attiecīgi punktos *E* un *F* tā, ka $AE = BF$. Kāda ir malu attiecība četrstūrim, kura diagonāles ir *AE* un *BF*?
Atrisinājums. Pierādīsim, ka četrstūris *ABEF* ir kvadrāts un tā malu attiecība ir 1 (skat. 195. att.).
Apzīmējam $\sphericalangle BAE = \sphericalangle FAE = \alpha$ un $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EBF = \beta$ (pēc bisektrises definīcijas). Ievērojam, ka $\sphericalangle BEA = \sphericalangle FAE = \alpha$ un $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EBF = \beta$ (kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AD* un *BC*, ko krusto attiecīgi taisnes *AE* un *BF*). Tātad Δ *ABF* un Δ *ABE* ir vienādsānu trijstūri (skat. 195. att.).
No tā izriet, ka *AO* un *BO* ir attiecīgi vienādsānu trijstūru *ABF* un *ABE* bisektrises pret pamatu, tātad arī augstumi un mediānas. No tā izriet, ka četrstūra diagonāles *AE* un *BF* ir perpendikulāras un krustojoties dalās uz pusēm, tātad četrstūris *ABEF* ir rombs. Tā kā romba diagonāles ir vienāda garuma (pēc dotā), tad *ABEF* ir kvadrāts. Tātad sākumā uzzīmētais paralelograms ir kvadrāts un četrstūra *ABEF* malu attiecība ir 1.



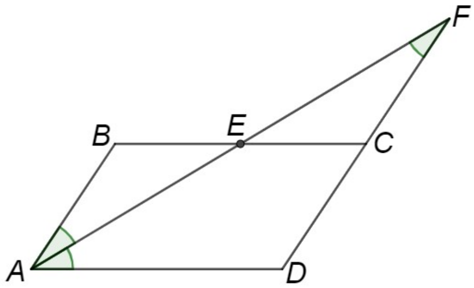
195. att.

2. Dots paralelograms *ABCD*. Leņķa *BAD* bisektrise krusto malu *BC* iekšējā punktā *E* un *CD* pagarinājumu punktā *F*. Pierādi, ka $BC = DF$, ja zināms, ka *DE* ir perpendikulārs *AF*!

Atrisinājums. Ievērojam, ka:

- $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD = \alpha$ pēc bisektrises definīcijas;
- $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AFD = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AB* un *CD*, ko krusto taisne *AF*.

Tātad trijstūris *ADF* ir vienādsānu trijstūris (skat. 196. att.), kuram $AD = DF$. Tā kā $AD = BC$ kā paralelograma pretējās malas, tad esam ieguvuši, ka $BC = DF$.

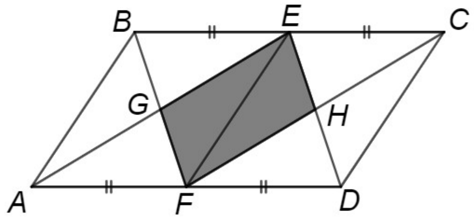


196. att.

Piezīme. Tas, ka *DE* ir perpendikulārs *AF*, risinājumā nav obligāti jāizmanto.

3. Paralelograma *ABCD* malu *BC* un *AD* viduspunkti ir attiecīgi *E* un *F*. Aprēķini četrstūra laukumu, ko ierobežo taisnes *AE, ED, BF* un *FC*, ja zināms, ka *ABCD* laukums ir 100.

Atrisinājums. Novelkam nogriezni *EF*, tas sadala doto paralelogramu *ABCD* divos vienādos paralelogramos *ABEF* un *FECD*, jo to pretējās malas ir paralēlas un vienādas. Nogriežņu *BF* un *AE* krustpunktu apzīmējam ar *G*, bet *ED* un *CF* krustpunktu – ar *H*, tad jāaprēķina četrstūra *FGEH* laukums (skat. 197. att.).

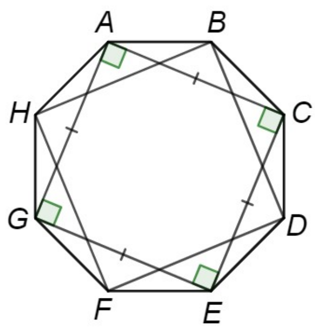


197. att.

Paralelograma diagonāle sadala paralelogramu divos vienādos trijstūros, tāpēc $S_{BEF} = \frac{1}{2} S_{ABEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$. Tā kā trijstūriem *BEG* un *GEF* ir kopīgs augstums no virsotnes *E* un malas, pret kurām novilkts šis augstums (*BG* un *GF*), ir vienādas, tad šie trijstūri ir vienlieli, tas ir, to laukumi ir vienādi. Tātad $S_{GEF} = \frac{1}{2} S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$. Līdzīgi iegūstam, ka $S_{FEH} = 12{,}5$. Līdz ar to $S_{FGEH} = 12{,}5 \cdot 2 = 25$.

4. Astoņstūrī *ABCDEFGH* visi iekšējie leņķi ir vienādi. Zināms arī, ka *ACEG* ir kvadrāts. Pierādi, ka *BDFH* arī ir kvadrāts!

Atrisinājums. Lai pierādītu, ka *BDFH* ir kvadrāts, jāpierāda, ka visas tā malas ir vienādas un viens no leņķiem ir taisns (skat. 198. att.).



198. att.

Astoņstūra iekšējo leņķu summa ir $(8-2)\cdot 180^{\circ}=1080^{\circ}$, tātad katrs leņķis ir $1080^{\circ}:8=135^{\circ}$. Izmantojot, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180° un:

- $\sphericalangle B=135^{\circ}$, no trijstūra ABC iegūstam, ka $\sphericalangle BAC+\sphericalangle BCA=45^{\circ}$;
- $\sphericalangle D=135^{\circ}$, no trijstūra CDE iegūstam, ka $\sphericalangle DCE+\sphericalangle DEC=45^{\circ}$.

Tā kā $\sphericalangle BCA+90^{\circ}+\sphericalangle DCE=\sphericalangle C=135^{\circ}$, tad $\sphericalangle DCE+\sphericalangle BCA=45^{\circ}$. No pirmās un trešās vienādības izriet, ka $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DCE$, no pēdējām divām – $\sphericalangle BCA=\sphericalangle DEC$. Tā kā $AC=CE$ (kvadrāta $ACEG$ malas), tad $\Delta\ ABC=\Delta\ CDE$ pēc pazīmes $\ell m\ell$ un atbilstošās malas ir vienādas: $AB=CD$ un $BC=DE$.

Iegūstam, ka $\Delta\ ABC=\Delta\ DCB$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo BC – kopīga mala, $AB=CD$ un $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD=135^{\circ}$. Tātad $AC=BD$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros.

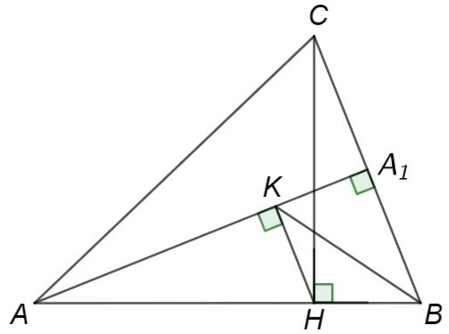
Līdzīgi pierāda, ka $CE=DF$, $EG=FH$ un $GA=HB$. Tādējādi iegūstam, ka $BD=DF=FH=HB$, jo $AC=CE=EG=GA$ kā kvadrāta $ACEG$ malas. Tātad četrstūris $BDFH$ ir rombs. Lai pierādītu, ka tas ir arī kvadrāts, pietiek pierādīt, ka viens no tā leņķiem ir taisns. Ievērojam, ka $\Delta\ BCD=\Delta\ DEF$ pēc pazīmes mmm, *jo* $BC=DE$, $BD=DF$ (iepriekš pierādīts) un $CD=EF$ (pierāda līdzīgi kā $AB=CD$). Tātad $\sphericalangle EDF=\sphericalangle CBD$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Iegūstam, ka $\sphericalangle BDF=135^{\circ}-(\sphericalangle CDB+\sphericalangle EDF)=$
$=135^{\circ}-(\sphericalangle CDB+\sphericalangle CBD)=135^{\circ}-(180^{\circ}-\sphericalangle BCD)=135^{\circ}-(180^{\circ}-135^{\circ})=90^{\circ}$.

5. Šaurleņķu trijstūrī BAC novilkts augstums CH; izrādījās, ka $AH=BC$. Caur H paralēli malai BC novilkta taisne; tā krusto augstumu AA_1 punktā K. Pierādi, ka K atrodas uz $\sphericalangle ABC$ bisektrises!

Atrisinājums. Tā kā trijstūru iekšējo leņķu summa ir 180°, tad no trijstūriem AA_1B un HCB iegūstam, ka $\sphericalangle KAH=180^{\circ}-90^{\circ}-\sphericalangle B=90^{\circ}-\sphericalangle B=\sphericalangle HCB$ (skat. 199. att.). Tātad $\Delta\ KAH=\Delta\ HCB$ pēc pazīmes $h\ell$, jo $AH=BC$ pēc dotā un $\sphericalangle KAH=\sphericalangle HCB$ no iepriekš pierādītā. Tāpēc $HK=BH$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros, tātad trijstūris KHB ir vienādsānu trijstūris. Ievērojam, ka:

- $\sphericalangle HBK=\sphericalangle HKB$ kā pamata pieleņķi vienādsānu trijstūrī;
- $\sphericalangle HKB=\sphericalangle KBC$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm HK un BC, ko krusto taisne KB.

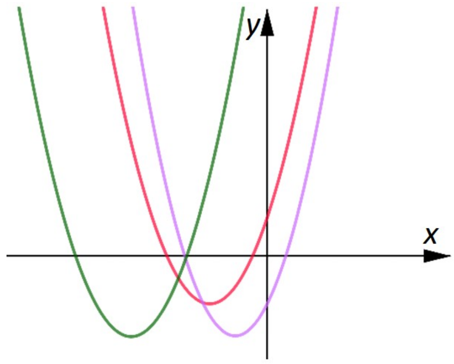
Tātad $\sphericalangle HBK=\sphericalangle KBC$ un punkts K atrodas uz $\sphericalangle ABC$ bisektrises.



199. att.

5.4.4. Kvadrātfunkcija, koeficientu ietekme

1. Vai var gadīties, ka 200. att. doti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$ un $y=cx^2+ax+b$ grafiki?



200. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Tā kā visām parabolām zari vērsti uz augšu , tad $a > 0$, $b > 0$ un $c > 0$, bet tādā gadījumā neviena no parabolām nevar krustot y asi punktā, kuram $y < 0$ (lillā grafiks).

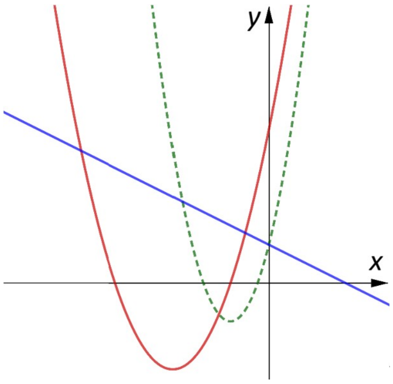
2. Apskatām visas funkcijas $y=ax^2-2x+b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a+b=2012$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums. Ievērojam:

- ja $x=1$, tad $y=a-2+b=2012-2=2010$;
- ja $x=-1$, tad $y=a+2+b=2012+2=2014$.

Tātad punkti (1; 2010) un (−1; 2014) ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

3. Vai var gadīties, ka 201. att. ir doti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=cx^2+bx+a$ un $y=bx+c$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



201. att.

1. atrisinājums. Nē, nevar. Tā kā ar pārtrauktu līniju izceltās parabolas un taisnes krustpunkts atrodas uz y ass, tad tā koordinātas ir $(0; c)$ un atbilstošās parabolas formula ir $y=ax^2+bx+c$. Atradīsim grafiku $y=ax^2+bx+c$ un $y=bx+c$ otra krustpunkta x koordinātu:

$$ax^2+bx+c=bx+c;$$

$$ax^2=0 \text{ un } x=0.$$

Esam ieguvuši, ka abu funkciju grafiki krustojas tikai vienā punktā. Iegūta pretruna, jo parabola un taisne krustojas divos punktos.

2. atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka funkcija $y=bx+c$ ir dilstoša funkcija, tātad $b<0$.

Apskatām funkciju $y=ax^2+bx+c$. Tā kā doto parabolu zari ir vērsti uz augšu, tad $a>0$. Aprēķinām šīs parabolas virsotnes abscisas vērtību $x_v=-\dfrac{b}{2a}$. Tā kā virsotne atrodas trešajā kvadrantā, tad $x_v<0$ un, ņemot vērā, ka $a>0$, secinām, ka $b>0$. Esam ieguvuši pretrunu ar to, ka $b<0$ (lineāra funkcija dilstoša), tātad attēlā nevar būt doti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=cx^2+bx+a$ un $y=bx+c$ grafiki.

4. Aplūkosim funkcijas $y=x^2+ax+b$, kur $a+2b=2020$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y=x^2+ax+b$ vērtību, ja $x=\dfrac{1}{2}$:

$$y=\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+b=\frac{1}{2}(a+2b)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2020+\frac{1}{4}=1010\frac{1}{4}.$$

Esam ieguvuši, ka argumenta vērtībai $x=\dfrac{1}{2}$ jebkuras dotās funkcijas vērtība būs $1010\dfrac{1}{4}$. Tātad punkts $\left(\dfrac{1}{2};\ 1010\dfrac{1}{4}\right)$ ir kopīgs visu doto funkciju grafikiem.

5. Aplūkosim funkcijas $y=ax^2+2x+2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība $a+18b=2021$. Pierādi, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

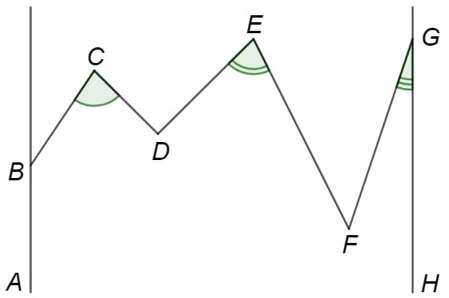
Atrisinājums. Pamatosim, ka visu aplūkoto funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti:

- ja $x=\dfrac{1}{3}$, tad $y=a\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}+2b=\left(\dfrac{1}{9}a+2b\right)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}(a+18b)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2021}{9}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2027}{9}$;
- ja $x=-\dfrac{1}{3}$, tad $y=a\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}+2b=\left(\dfrac{1}{9}a+2b\right)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}(a+18b)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2021}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2015}{9}$.

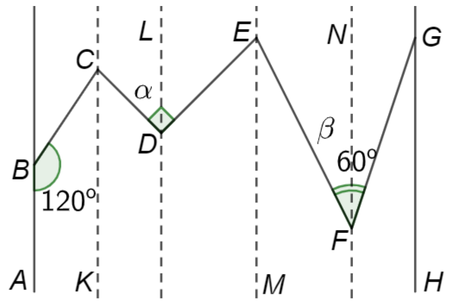
Tātad punkti $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2027}{9}\right)$ un $\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2015}{9}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

5.4.5. Ģeometrija, palīglīnijas

1. Aprēķini $\sphericalangle BCD+\sphericalangle DEF+\sphericalangle FGH$ (skat. 202. att.), ja $AB \parallel GH$, $\sphericalangle ABC=120^\circ$, $\sphericalangle CDE=90^\circ$ un $\sphericalangle EFG=60^\circ$.



202. att.



203. att.

Atrisinājums. Novelkam taisnei *AB* paralēlas taisnes cauri punktiem *C*, *D*, *E* un *F* (skat. 203. att.). Tā kā iekšējo vienpusleņķu summa pie paralēlām taisnēm ir 180°, tad $\sphericalangle BCK=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. Apzīmējam $\sphericalangle CDL=\alpha$, $\sphericalangle EFN=\beta$. Ievērojam, ka $\sphericalangle LDE=90^\circ-\alpha$ un $\sphericalangle NFG=60^\circ-\beta$. Tā kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm ir vienādi, tad $\sphericalangle KCD=\sphericalangle CDL=\alpha$, $\sphericalangle MEF=\sphericalangle EFN=\beta$, $\sphericalangle DEM=\sphericalangle LDE=90^\circ-\alpha$ un $\sphericalangle FGH=\sphericalangle NFG=60^\circ-\beta$. Līdz ar to

$$\sphericalangle BCD+\sphericalangle \mathrm{DEF}+\sphericalangle FGH=\sphericalangle BCK+\sphericalangle KCD+\sphericalangle DEM+\sphericalangle MEF+\sphericalangle FGH=$$
$$=60^\circ+\alpha+90^\circ-\alpha+\beta+60^\circ-\beta=210^\circ.$$

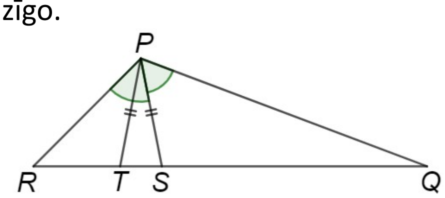
2. Dots trijstūris *PQR*, kurā $\sphericalangle PQR=20^\circ$ un $\sphericalangle PRQ=40^\circ$. No virsotnes *P* novilktā bisektrise krusto malu *QR* punktā *S*, nogriežņa *PS* garums ir 2. Par cik mala *QR* ir garāka nekā *PQ*?

Atrisinājums. Tā kā *PS* ir leņķa *QPR* bisektrise un trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°, tad $\sphericalangle RPS=\sphericalangle SPQ=\frac{1}{2}\left(180^\circ-20^\circ-40^\circ\right)=60^\circ$ (skat. 204. att.).

No ΔPSQ iegūstam, ka $\sphericalangle PSQ=180^\circ-\sphericalangle PQR-\sphericalangle SPQ=180^\circ-20^\circ-60^\circ=100^\circ$. Novelkam $PT=PS=2$, kur *T* atrodas uz malas *QR*. Trijstūris *TPS* ir vienādsānu un $\sphericalangle PST=\sphericalangle PTS=80^\circ$ un $\sphericalangle TPS=20^\circ$. Trijstūris *RTP* ir vienādsānu, jo $\sphericalangle PRQ=40^\circ$ un $\sphericalangle RPT=\sphericalangle RPS-\sphericalangle TPS=60^\circ-20^\circ=40^\circ$. Tātad $PT=TR=2$. Tā kā $\sphericalangle QTP=\sphericalangle TPQ=80^\circ$, tad arī trijstūris *PQT* ir vienādsānu un $PQ=QT$.

Esam ieguvuši, ka $QR=QT+TR=PQ+2$ jeb mala *QR* ir par 2 garāka nekā *PQ*.

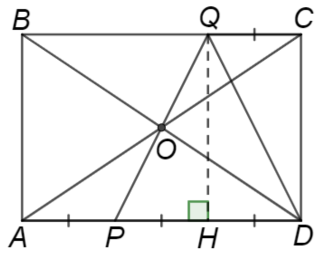
Piezīme. Uzdevumu var risināt arī, atliekot uz *QR* tādu punktu *T*, ka $PQ=QT$. Pēc tam, spriežot līdzīgi, kā dotajā risinājumā, iegūst vajadzīgo.



204. att.

3. Caur taisnstūra *ABCD* diagonāļu krustpunktu *O* novilkta taisne *PQ* tā, ka *P* atrodas uz *AD*, *Q* – uz *BC* un $PQ=QD$. Pierādi, ka $DP=2\,AP$!

Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle AOP=\sphericalangle COQ$, $AO=OC$ un $\sphericalangle OAP=\sphericalangle OCQ$ (kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AD* un *BC*, ko krusto *AC*), tad $\Delta AOP=\Delta COQ$ pēc pazīmes $\ell m\ell$ (skat. 205. att.). Līdz ar to $AP=QC$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Vienādsānu trijstūrī *PQD* novelkam augstumu *QH*, kas ir arī mediāna, tāpēc $PH=HD$. Tā kā *QCDH* ir taisnstūris, tad $QC=HD$. Līdz ar to $AP=PH=HD$ un $DP=PH+HD=2\,AP$.

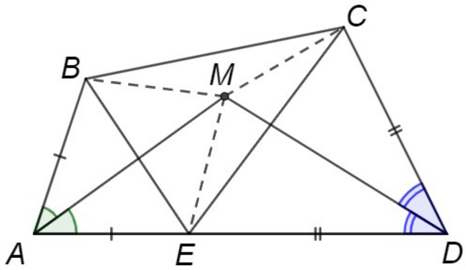


205. att.

4. Izliektā četrstūrī $ABCD$ leņķu BAD un ADC bisektrises krustojas punktā M. Pierādi, ka $BM = CM$, ja zināms, ka $AD = AB + CD$!

Piezīme. Četrstūri sauc par izliektu, ja visi tā iekšējie leņķi ir mazāki nekā 180°.

Atrisinājums. Uz malas AD atliekam punktu E tā, ka $AE = AB$ (skat. 206. att.). Tā kā pēc dotā $AD = AB + CD$, tad $ED = CD$. Tātad trijstūri BAE un CDE ir vienādsānu trijstūri un attiecīgi bisektrises AM un DM, kas vilktas no virsotnes leņķa, ir arī mediānas un augstumi jeb attiecīgi nogriežņu BE un CE vidusperpendikuli. Ja punkts atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula, tad tas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem. Tātad $MB = ME$ un $ME = MC$ (jo M atrodas un nogriežņa vidusperpendikula), no kā izriet, ka $MB = MC$.



206. att.

5. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise AE. Uz taisnes AE atlikts punkts D tā, ka $AD = AB + AC$ un punkts E atrodas starp punktiem A un D. Pierādi, ka ΔBCD ir vienādmalu trijstūris, ja zināms, ka $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $BC = BD$.

Atliekam uz taisnes AD tādu punktu G, ka $AG = AB$ un $GD = AC$ (skat. 207. att.). Aplūkojam trijstūri GAB. Tas ir vienādmalu trijstūris, jo pēc konstrukcijas $AG = AB$ un pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle GAB = 60^\circ$. Tātad $GB = AB$ un $\sphericalangle AGB = 60^\circ$.

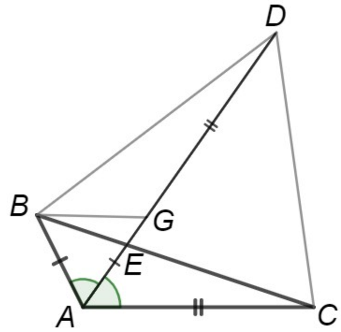
Ievērojam, ka $\Delta CAB = \Delta DGB$ pēc pazīmes $m\ell m$:

- $DG = CA$ pēc konstrukcijas;
- $\sphericalangle DGB = 180^\circ - \sphericalangle AGB = 120^\circ = \sphericalangle CAB$;
- $GB = AB$ pēc iepriekš pierādītā.

Tā kā vienādos trijstūros attiecīgās malas ir vienādas, tad $BD = BC$.

Līdzīgi, atliekot uz AD tādu punktu M, ka $AM = AC$ un $MD = AB$, pierāda, ka $BC = CD$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $BC = BD = CD$. Tātad trijstūris BCD ir vienādmalu.



207. att.

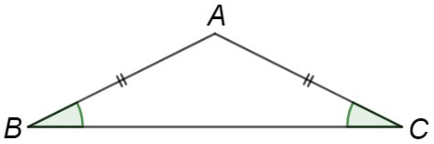
6. Trijstūrī ABC divas malas ir vienādas savā starpā un $\sphericalangle ABC = 20^\circ$. Pierādi, ka $3 \cdot AC > AB$!

Atrisinājums. Apskatām trīs gadījumus:

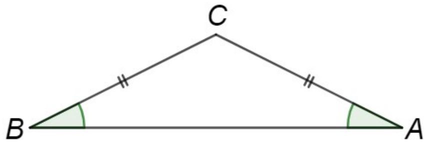
1) ja $AB = AC$ (skat. 208. att.), tad $3AC = 3AB > AB$;

2) ja $BC = AC$ (skat. 209. att.), tad $3AC > 2AC = BC + AC > AB$;

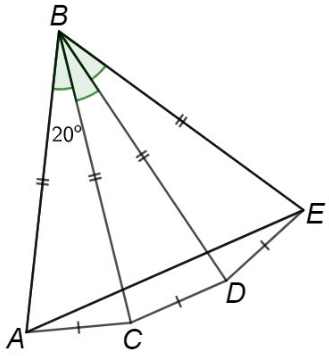
3) ja $AB = BC$, tad konstruējam uz malas BC trijstūri tā, ka $\Delta ABC = \Delta CBD$, un uz malas BD – trijstūri tā, ka $\Delta ABC = \Delta CBD = \Delta DBE$ (skat. 210. att.). Tādā gadījumā $\sphericalangle ABE = 60^\circ$ un $AB = BE$, tāpēc trijstūris ABE ir vienādmalu. No tā izriet, ka $3AC = AC + CD + DE > AE$. Tā kā $AE = AB$, tad esam ieguvuši, ka $3AC > AB$.



208. att.



209. att.

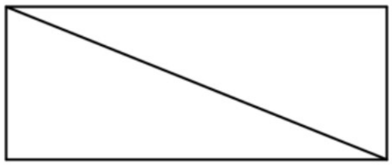


210. att.

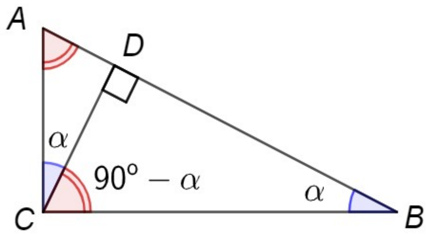
5.5. Devītā klase

5.5.1. Ģeometrija, līdzīgi trijstūri

1. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt: **a)** 2014; **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?
Atrisinājums. Jebkuru taisnstūri var sagriezt divos vienādos taisnleņķa trijstūros (skat. 211. att.).



211. att.



212. att.

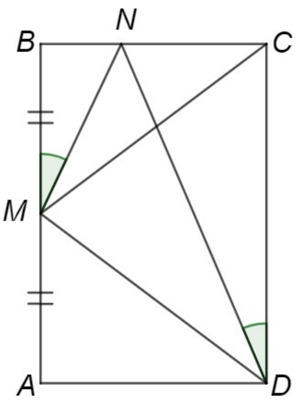
Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.

Ja taisnais leņķis ir $\sphericalangle ACB$ (skat. 212. att.), tad no tā velk perpendikulu CD pret hipotenūzu AB. Trijstūri ABC, ACD un CBD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo:

- $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^{\circ}$;
- $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBC = \alpha$.

Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņķa virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pašā veidā dalīt iegūtos taisnleņķa trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai N $(N \geqslant 2)$ vērtībai. Tātad šādu sadalījumu var atrast arī, ja $N = 2014$ vai $N = 2015$.

2. Dots taisnstūris $ABCD$. Malas AB viduspunkts ir M. Zināms, ka uz malas BC var izvēlēties tādu punktu N, ka $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN = 30^{\circ}$. Pierādi, ka trijstūris CDM ir vienādmalu!
Atrisinājums. Tā kā M ir AB viduspunkts, tad simetrijas dēļ $CM = MD$ (skat. 213. att.).



213. att.

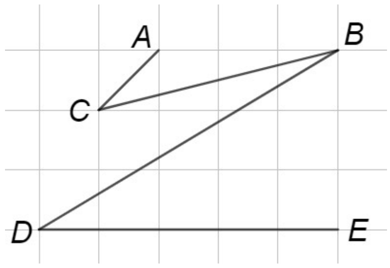
Pierādīsim, ka $MD = CD$. Trijstūri BMN un CDN ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo:

- $\sphericalangle MBN = \sphericalangle DCN = 90^{\circ}$;
- $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN$ pēc dotā.

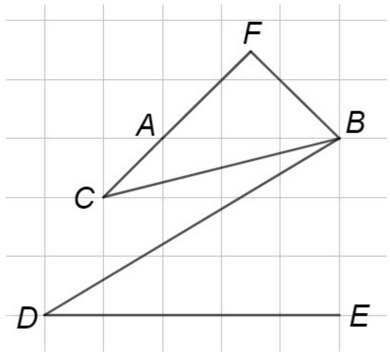
Trijstūru līdzības koeficients ir $\dfrac{BM}{CD} = \dfrac{1}{2}$, tāpēc $CN = 2BN$. Tā kā katete pret 30° leņķi ir puse no hipotenūzas, tad $MN = CN$. Tā kā $\sphericalangle BNM = \sphericalangle CND = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$, tad $\sphericalangle MND = 180^{\circ} - \sphericalangle BNM - \sphericalangle CND = 60^{\circ}$. Ievērojot, ka ND ir trijstūru MND un CND kopīga mala, iegūstam, ka $\Delta MND = \Delta CND$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tad $MD = CD$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $MD = CD = CM$ jeb trijstūris CDM ir vienādmalu.

Piezīme. Apzīmējot $BM = x$, $CD = 2x$ un izmantojot trigonometriskās sakarības, var izteikt, ka $BN = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $CN = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$. Lietojot Pitagora teorēmu ΔMBC, iegūstam, ka $CM = 2x$.

3. Kvadrātisku rūtiņu lapā atzīmētas piecas virsotnes *A, B, C, D* un *E* (skat. 214. att.). Salīdzini leņķus *ACB* un *BDE*!



214. att.



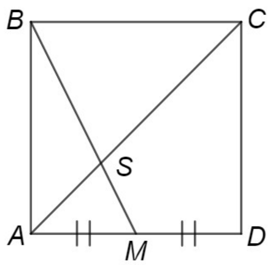
215. att.

Atrisinājums. Pagarinām *CA* līdz *BF* tā, ka ΔCFB ir taisnleņķa trijstūris (skat. 215. att.). Tad $\frac{CF}{BF}=\frac{DE}{BE}=\frac{5}{3}$ un abi trijstūri *CFB* un *DBE* ir taisnleņķa. Tāpēc tie ir līdzīgi un to atbilstošie leņķi $\sphericalangle ACB$ un $\sphericalangle BDE$ ir vienādi.

4. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1; *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķini trijstūra *ASM* laukumu!

Atrisinājums. Trijstūri *ASM* un *CSB* ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo:

- $\sphericalangle ASM = \sphericalangle CSB$ kā krustleņķi;
- $\sphericalangle SAM = \sphericalangle SCB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AD* un *BC* (skat. 216. att.).



216. att.

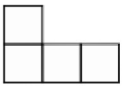
Tā kā $AM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$, tad $\frac{BS}{SM}=\frac{BC}{AM}=2$. Šo trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar trijstūru līdzības koeficienta kvadrātu, tas ir, $\frac{S_{CSB}}{S_{ASM}}=2^2=4$ jeb $S_{CSB}=4\,S_{ASM}$.

Ievērojam, ka trijstūriem *ASM* un *ASB* ir kopīgs augstums, un malu, pret kurām novilkts kopīgais augstums, attiecība ir $\frac{BS}{SM}=2$. Līdz ar to šo trijstūru laukumu attiecība arī ir 2, tas ir, $\frac{S_{ABS}}{S_{ASM}}=2$ jeb $S_{ABS}=2\,S_{ASM}$.

Esam ieguvuši, ka $S_{ABC}=S_{ABS}+S_{SBC}=2S_{ASM}+4S_{ASM}$. Tā kā $S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, tad $6S_{ASM}=\frac{1}{2}$ jeb $S_{ASM}=\frac{1}{12}$.

5.5.2. Figūras sadalīšana

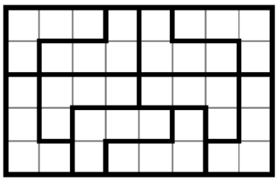
1. Vai taisnstūri ar izmēriem: **a)** 5×8; **b)** 5×12 rūtiņas var pārklāt ar 217. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra un nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



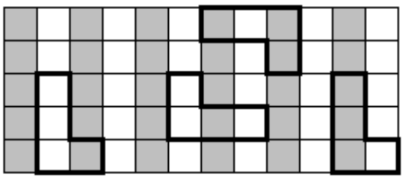
217. att.

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat. 218. att.

b) Nē, nevar. Iekrāsosim doto taisnstūri joslās (skat. 219. att.), tad taisnstūrī ir iekrāsotas 30 (pāra skaitlis) melnas un 30 (pāra skaitlis) baltas rūtiņas. Ja taisnstūri varētu pārklāt, tad tas būtu pārklāts ar tieši $60 : 4 = 15$ figūrām. Lai kā arī šajā kvadrātā tiktu novietota dotā figūra, tā pārklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 219. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 15 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var pārklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pārklāt nevar.

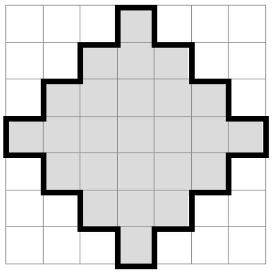


218. att.

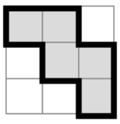


219. att.

2. Rūtiņu lapā uzzīmēta figūra (skat. 220. att.). Kāds ir lielākais skaits 221. att. doto figūru, ko var izgriezt no 220. att. figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



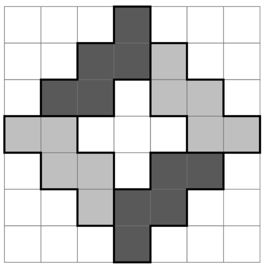
220. att.



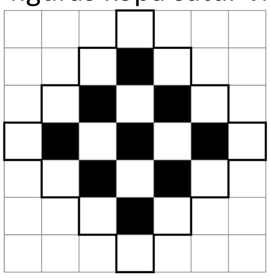
221. att.

Atrisinājums. No dotās figūras var izgriezt četras 221. att. figūras (skat. 222. att.).

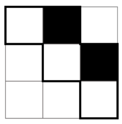
Pierādīsim, ka vairāk figūru izgriezt nevar. Izkrāsojam 220. att. doto figūru kā šaha galdiņu (skat. 223. att.), tā satur 9 melnas rūtiņas. Ir divi dažādi varianti, cik melnās rūtiņas var saturēt 221. att. figūra (skat. 224. att. un 225. att.). Abos gadījumos tā satur vismaz 2 melnas rūtiņas. Tātad var izgriezt ne vairāk kā 4 figūras, jo piecas 221. att. figūras kopā satur vismaz $5 \cdot 2 = 10$ melnās rūtiņas.



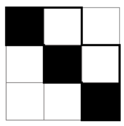
222. att.



223. att.



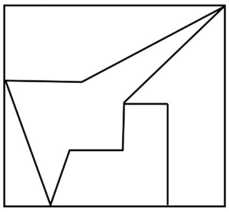
224. att.



225. att.

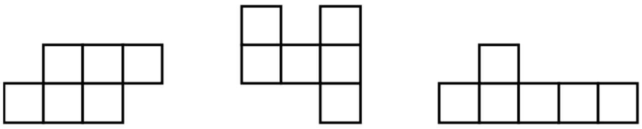
3. Vai kvadrātu var sadalīt piecās daļās, no kurām viena ir trijstūris, otra – četrstūris, trešā – piecstūris, ceturtā – sešstūris un piektā – septiņstūris?

Atrisinājums. To var izdarīt, piemēram tā, kā parādīts 226. att.



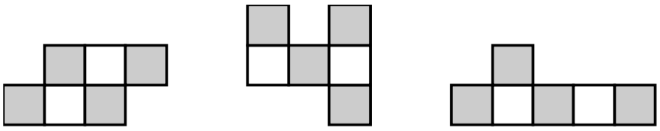
226. att.

4. Vai taisnstūri ar izmēriem 10×9 rūtiņas var pārklāt ar 227. att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



227. att.

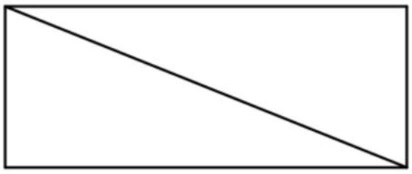
Atrisinājums. Nē, nevar. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā. Taisnstūrī kopā ir 90 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 6 rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietotas dotās figūras, katra no tām vienmēr pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas (skat. 228. att.). Tātad visas figūras kopā pārklās pāra skaita melnās rūtiņas. Tā kā taisnstūrī melnā krāsā ir nokrāsotas 45 (nepāra skaits) rūtiņas, tad prasīto nevar izdarīt.



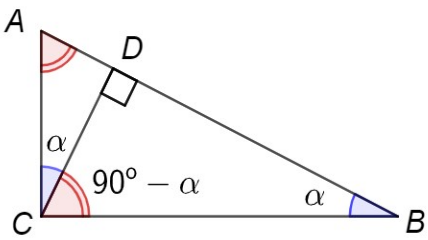
228. att.

5. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt: **a)** 2014; **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?

Atrisinājums. Jebkuru taisnstūri var sagriezt divos vienādos taisnleņķa trijstūros (skat. 229. att.).



229. att.



230. att.

Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.

Ja taisnais leņķis ir $\sphericalangle ACB$ (skat. 230. att.), tad no tā velk perpendikulu CD pret hipotenūzu AB. Trijstūri ABC, ACD un CBD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo:

- $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$;
- $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBC = \alpha$.

Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņķa virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pašā veidā dalīt iegūtos taisnleņķa trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai N $(N \geqslant 2)$ vērtībai. Tātad šādu sadalījumu var atrast arī, ja $N = 2014$ vai $N = 2015$.

5.5.3. Skaitļu teorija, sadalīšana reizinātājos, dalāmība

1. Pierādi, ka skaitlis $2^{28}-3^{14}$ nav pirmskaitlis!

Atrisinājums. Izmantojot kvadrātu starpības formulu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, doto skaitli var sadalīt reizinātājos, tātad tas nav pirmskaitlis:

$$2^{28}-3^{14}=(2^{14}-3^7)(2^{14}+3^7).$$

2. Pierādi, ka skaitlis $2^{16}+2^9\cdot 5^{17}+5^{34}$ nav pirmskaitlis!

Atrisinājums. Izmantojot summas kvadrāta formulu $(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$, doto skaitli var sadalīt reizinātājos, tātad tas nav pirmskaitlis:

$$2^{16}+2^9\cdot 5^{17}+5^{34}=(2^8)^2+2\cdot 2^8\cdot 5^{17}+(5^{17})^2=(2^8+5^{17})^2.$$

3. Skaitli 3999991 uzraksti kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1.

Atrisinājums. Doto skaitli var sadalīt reizinātājos, izmantot kvadrātu starpības formulu, tātad tas nav pirmskaitlis:

$$3999991=4000000-9=2000^2-3^2=(2000-3)\cdot(2000+3)=1997\cdot 2003.$$

4. Pierādi, ka:

a) 49^5+7^9 dalās ar 2;

b) 49^5-7^9 dalās ar 6!

Atrisinājums. a) Izmantojot pakāpju īpašības, iegūstam

$$49^5+7^9=(7^2)^5+7^9=7^{10}+7^9=7^9\,(7+1)=7^9\cdot 8.$$

Doto izteiksmi esam sadalījuši reizinātājos, no kuriem viens dalās ar 2, tāpēc arī reizinājums dalās ar 2. Tātad esam pierādījuši, ka skaitlis 49^5+7^9 dalās ar 2.

b) Izmantojot pakāpju īpašības, iegūstam

$$49^5-7^9=(7^2)^5-7^9=7^{10}-7^9=7^9\,(7-1)=7^9\cdot 6.$$

Doto izteiksmi esam sadalījuši reizinātājos, no kuriem viens dalās ar 6, tāpēc arī reizinājums dalās ar 6. Tātad esam pierādījuši, ka skaitlis 49^5-7^9 dalās ar 6.

5. Pierādi, ka vienādojumam $(x-y)^2=6\,xy+7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādību:

$$x^2-2\,xy+y^2=6\,xy+7\,;$$
$$x^2+2\,xy+y^2=10\,xy+7\,;$$
$$(x+y)^2=10\,xy+7.$$

Pēdējās vienādības kreisajā pusē ir skaitļa kvadrāts, kura pēdējais cipars var būt tikai 0; 1; 4; 5; 6; 9, bet vienādības labajā pusē esošā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

6. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka $20\,x^3-17\,y^2+1=2018$?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka tādus skaitļus nevar atrast. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$20\,x^3-2000=17+17\,y^2;$$
$$20(x^3-100)=17(1+y^2).$$

Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis. Lai vienādība būtu patiesa, arī vienādojuma labai pusei jābūt pāra skaitlim, līdz ar to y jābūt nepāra skaitlim. Ņemot $y=2\,k+1$, kur $k\in\mathbb{Z}$, iegūstam

$$20(x^3-100)=17(2+4\,k^2+4\,k).$$

Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar četri, bet labā puse nedalās, tad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

5.5.4. Kvadrātfunkcija

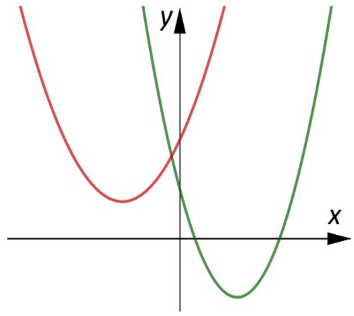
1. Apskatām visas funkcijas $y=ax^2-2x+b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a+b=2012$. Pierādi, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums. Ja $x=1$, tad $y=a-2+b=2010$. Ja $x=-1$, tad $y=a+2+b=2014$. Tātad punkti (1; 2010) un (-1; 2014) pieder visu minēto funkciju grafikiem.

2. No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, nosaki tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

Atrisinājums. Dotos skaitļu apzīmējam ar x un $x+2015$. Šo skaitļu reizinājums ir $x\cdot(x+2015)$. Apskatām funkciju $y=x(x+2015)=x^2+2015x$. Funkcijas grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_0=\frac{-2015}{2}=-1007{,}5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tātad meklētie divi skaitļi ir $-1007{,}5$ un $1007{,}5$.

3. Vai var gadīties, ka 231. att. ir doti funkciju $y=ax^2+bx+c$ un $y=bx^2+cx+a$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



231. att.

Atrisinājums. Nē, nevar gadīties. Tā kā parabolu zari vērsti uz augšu, tad $a>0$ un $b>0$. Abi grafiki krusto y asi punktos, kuru ordinātas ir pozitīvas, tāpēc $a>0$ un $c>0$. Tālāk risinājumu var turpināt trīs veidos.

1. veids. Apskatām abu parabolu virsotņu x koordinātas:

- funkcijai $y=ax^2+bx+c$ virsotnes x koordināta ir $x_v=-\frac{b}{2a}<0$, jo $a>0$ un $b>0$;
- funkcijai $y=bx^2+cx+a$ virsotnes x koordināta ir $x_v=-\frac{c}{2b}<0$, jo $b>0$ un $c>0$.

Iegūta pretruna, jo 231. att. zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) virsotnes koordināta $x_v>0$.

2. veids. Ievērosim, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes. Bet kvadrātvienādojumam, kam visi trīs koeficienti ir pozitīvi, nevar būt pozitīvas saknes (ja $A, B, C>0$, tad $Ax^2+Bx+C>0$ visiem pozitīviem x).

3. veids. Ievērosim, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes x_1 un x_2. Pieņemsim, ka tās vienādojums ir $y=ax^2+bx+c$ (otrs gadījums līdzīgs). Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam, ka $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$. Iegūta pretruna, jo divu pozitīvu skaitļu summa nevar būt negatīva.

4. Aplūkosim funkcijas $y=ax^2+2x+2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība . $a+18b=2021$. Pierādi, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums. Pamatosim, ka visu aplūkoto funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti:

- ja $x=\frac{1}{3}$, tad $y=a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+2b=\left(\frac{1}{9}a+2b\right)+\frac{2}{3}=\frac{1}{9}(a+18b)+\frac{2}{3}=\frac{2021}{9}+\frac{2}{3}=\frac{2027}{9}$;
- ja $x=-\frac{1}{3}$, tad $y=a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}+2b=\left(\frac{1}{9}a+2b\right)-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}(a+18b)-\frac{2}{3}=\frac{2021}{9}-\frac{2}{3}=\frac{2015}{9}$.

Tātad punkti $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2027}{9}\right)$ un $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2015}{9}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

5. Kvadrātfunkcija $y=x^2+(m^2+3m)x+m-1$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 1. Kāda var būt m vērtība? Nosaki otru parabolas krustpunktu ar x asi!
Atrisinājums. Dotā funkcija krusto x asi punktā (1; 0), līdz ar to, ievietojot šī vērtības dotajā funkcijā, iegūstam vienādojumu $0=1+m^2+3m+m-1$ jeb $m^2+4m=0$, kura saknes ir $m_1=0$ un $m_2=-4$. Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $m=0$, tad dotā funkcija ir $y=x^2-1$ un tās otras krustpunkts ar x asi ir $(-1; 0)$;
- ja $m=-4$, tad dotā funkcija ir $y=x^2+4x-5$ un tās krustpunkts ar x asi ir $(-5; 0)$.

5.5.5. Kvadrātvienādojumi, pilnā kvadrāta atdalīšana

1. Lineāra funkcija $y=(m^2-3m)x+4m-4$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 2. Nosaki m vērtības un noskaidro, vai atbilstošā funkcija ir augoša vai dilstoša!
Atrisinājums. Dotā funkcija krusto x asi punktā (2; 0), ievietojot šīs vērtības dotajā funkcijā, iegūstam vienādojumu $0=(m^2-3m)\cdot 2+4m-4$ jeb $m^2-m-2=0$, kura saknes ir $m_1=-1$ un $m_2=2$ Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $m=-1$, tad dotā funkcija ir $y=4x-8$ un tā ir augoša, jo koeficients pie x ir pozitīvs;
- ja $m=2$, tad dotā funkcija ir $y=-2x+4$ un tā ir dilstoša, jo koeficients pie x ir negatīvs.

2. Kvadrātvienādojuma $3x^2+3ax+(x-1)b=0$ saknes ir 1 un 2. Aprēķini skaitļus a un b!
Atrisinājums. Tā kā $x=1$ ir vienādojuma sakne, tad, ievietojot to dotajā vienādojumā, iegūst patiesu vienādību $3+3a=0$ jeb $a=-1$.
Ievietojot iegūto a vērtību un $x=2$ dotajā vienādojumā, iegūst $3\cdot 4+6\cdot(-1)+b=0$ jeb $b=-6$.

3. Zināms, ka a ir tāds reāls skaitlis, ka $a+\dfrac{1}{a}=3$. Aprēķini: **a)** $a^2+\dfrac{1}{a^2}+2$; **b)** $a^4+\dfrac{1}{a^4}$!

Atrisinājums. a) Redzams, ka $a^2+\dfrac{1}{a^2}+2=a^2+2\cdot a\cdot\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=3^2=9$.

b) No a) gadījuma izriet, ka $a^2+\dfrac{1}{a^2}=7$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$a^4+\frac{1}{a^4}=a^4+2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}-2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=49-2=47.$$

4. Pierādi, ka $9x^6-x^3+1>0$ visiem reāliem x!
Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(3x^3)^2-2\cdot 3x^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}>0;$$

$$\left(3x^3-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}>0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\dfrac{35}{36}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

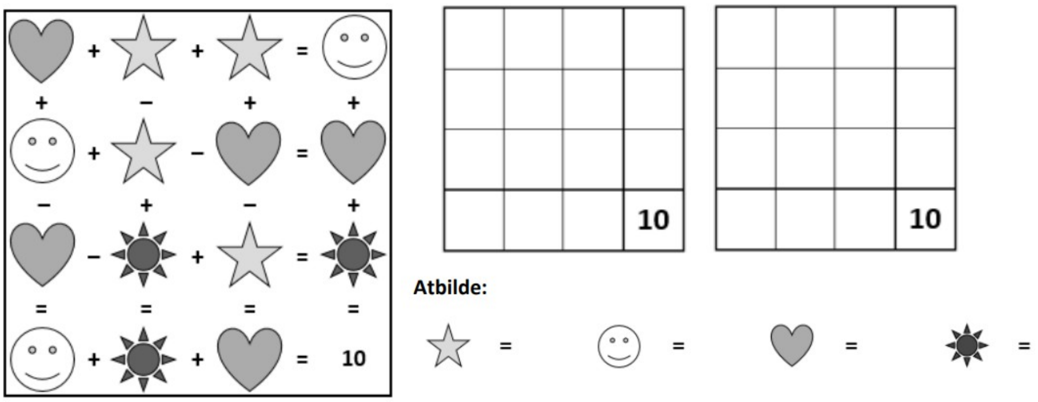
5. Pierādi, ka $9x^2-12xy+20y^2+8y+4>0$ visām reālām x un y vērtībām!
Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$9x^2-12xy+20y^2+8y+4=(9x^2-12xy+4y^2)+(16y^2+8y+1)+3=$$
$$=(3x-2y)^2+(4y+1)^2+3>0,$$

jo $(3x-2y)^2+(4y+1)^2\geqslant 0$ kā reālu skaitļu kvadrātu summa un $3>0$.

5.5.6. Vienādojumi ar diviem mainīgajiem, pilnā pārlase

1. Atrodi vienu piemēru, kādu skaitli 1; 2; 3; 4; 5 var ievietot 232. att. katra simbola vietā, tā, lai iegūtu patiesas vienādības! Vienādi skaitļi ir apzīmēti ar vienādiem simboliem un dažādi – ar dažādiem.



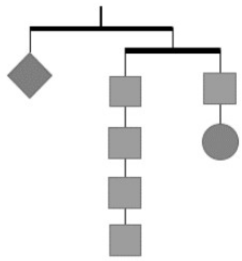
232. att.

Atbilde.

 = 1  = 5  = 3  = 2

2. Zināms, ka visu vienādo figūru (skat. 233. att.) masas ir vienādas un visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā. Kāda ir katras figūras masa, ja visu figūru kopējā masa ir 320 grami?

Atrisinājums. Tā kā visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā, tad  masa ir puse no visu figūru kopējās masas, tas ir, 160 grami. Četru  masa ir vienāda ar pusi no 160 gramiem, tātad katra  masa ir $(160 : 2) : 4 = 20$ grami.  un  kopējā masa ir 80 grami, tātad  masa ir 60 grami.



233. att.

3. Cik atrisinājumu ir vienādojumam $a^2b+12=2012$, ja a un b ir naturāli skaitļi?

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu: $a^2b=2000$. Atrisinājumu skaits ir vienāds ar skaitļu kvadrātu skaitu, ar kuru dalās skaitlis 2000. Skaitļa 2000 sadalījums pirmreizinātājos ir $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. To izmantojot, iegūstam, ka vienīgie skaitļu kvadrāti, ar ko dalās skaitlis 2000, ir:

$$1^2\cdot 2000=2000;$$
$$2^2\cdot 500=2000;$$
$$4^2\cdot 125=2000;$$
$$5^2\cdot 80=2000;$$
$$10^2\cdot 20=2000;$$
$$20^2\cdot 5=2000.$$

Redzam, ka dotajam vienādojumam ir tieši 6 atrisinājumi.

4. **a)** Vai var atrast dažādus veselus skaitļus *a, b, c* un *d* tādus, ka izpildās vienādības $a+b=cd$ un $ab=c+d$?

b) Vai šādus skaitļus var atrast, ja papildus zināms, ka $a>2016$?

Atrisinājums. a) Der, piemēram, $a=2$, $b=3$, $c=1$ un $d=5$, jo $2+3=1\cdot 5$ un $2\cdot 3=1+5$.

b) Der, piemēram, $a=2017$, $b=-2017$, $c=0$ un $d=-2017^2$, jo $2017-2017=0\cdot\left(-2017^2\right)$ un $2017\cdot(-2017)=0-2017^2$.

5. Rūķīšu mežā tiek rīkotas skriešanas sacensības – stafete. Sacensības notiek apļveida stadionā, starta un finiša līnija sakrīt. Stadiona viena apļa garums ir 330 metri, stafetes kociņš tiek nodots ik pēc 75 metriem, visi skrien vienā virzienā. Stafete beidzas, kad pirmo reizi kāds skrējējs, noskrienot 75 metrus, nonāk precīzi finiša līnijā (t.i., starta/finiša līnija var tikt šķērsota vairākas reizes).
Cik pavisam ir punktu, kuros tiek nodots stafetes kociņš?
Cik dalībnieku ir komandā, ja katrs dalībnieks skrien tieši vienu stafetes posmu?
Kāds ir stafetes distances kopējais garums?
Atrisinājums. Apzīmēsim komandas dalībnieku skaitu ar n un ar x apzīmēsim, cik pilnas reizes tika apskriets stadions, līdz stafete beidzās.
Tad $75 \cdot n = 330 \cdot x$ jeb, vienādības abas puses izdalot ar 25, iegūstam $5 \cdot n = 22 \cdot x$, turklāt x ir mazākais no skaitļiem, ar kuru šī vienādība ir patiesa, tāpēc $x = 5$ un $n = 22$. Tātad komandā ir 22 dalībnieki, pavisam kopā viņi noskrēja $330 \cdot 5 = 1650$ m.
Visi stafetes kociņa nodošanas punkti ir dažādi, jo pretējā gadījumā finišs tiktu sasniegts jau ātrāk, tātad pavisam ir 22 šādi punkti (ieskaitot startu/finišu), pie tam tie ir izvietoti pa stadionu vienādos attālumos ik pēc $330 : 22 = 15$ m.

6. Matemātikas nedēļā Paskāls, Ņūtons, Galilejs un Fermā visi pildīja vienu un to pašu testu. Vidējais punktu skaits visiem dalībniekiem bija 16 punkti. Paskālam un Ņūtonam vidējais punktu skaits bija 16, Paskālam un Fermā vidējais punktu skaits bija 13, bet Ņūtonam un Fermā vidējais punktu skaits bija 18. Cik punktus ieguva Galilejs?
Atrisinājums. Apzīmēsim ar P, N, G un F attiecīgi Paskāla, Ņūtona, Galileja un Fermā iegūto punktu skaitu. Tad uzdevumā dotās sakarības var pierakstīt vienādojumu veidā:
$$\frac{P+N}{2} = 16;$$
$$\frac{P+F}{2} = 13;$$
$$\frac{N+F}{2} = 18.$$
Reizinot vienādojumu abas puses ar 2, iegūstam vienādojumus
$$P+N = 32;$$
$$P+F = 26;$$
$$N+F = 36;$$
Saskaitot šos vienādojumus, iegūstam $2P + 2N + 2F = 94$, tātad $P+N+F = 47$.
Tā kā $\dfrac{P+N+F+G}{4} = 16$, tad $P+N+F+G = 64$. Ievietojot $P+N+F = 47$ iegūtajā vienādojumā, iegūstam $47 + G = 64$ jeb $G = 17$.

7. Vectēvs un mazdēls devās slēpot pa vienu un to pašu maršrutu. Zināms, ka pa līdzenu vietu abi slēpo ar vienādu ātrumu 7 km/h, no klana lejā mazdēls brauc ar ātrumu 20 km/h, bet vectēvs – ar ātrumu 8 km/h, savukārt pret kalnu mazdēls – ar ātrumu 4 km/h, bet vectēvs – ar ātrumu 6 km/h. Pirmais maršrutu veica mazdēls. Vai var viennozīmīgi noteikt, kas kopumā bija vairāk – nobraucieni no kalna vai augšup kalnā? Vai ir viennozīmīga atbilde uz šo jautājumu, ja pirmais finišē vectēvs?
Atrisinājums. Tā kā pa līdzenu vietu abi slēpo ar vienādu ātrumu, tad līdzenu posmu garums neietekmē to, kurš finišēs pirmais, tāpēc to var neņemt vērā. Pieņemsim, ka noslēpotajā maršrutā a km ved kalnā augšup, bet b km – no kalna lejā.
Izmantojot formulu *ceļš* $=$ *ātrums* $\cdot$ *laiks*, izteiksim, cik ilgā laikā maršruta *slīpos* posmus veica mazdēls: $t_m = \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{20}$ un vectēvs: $t_v = \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{8}$.
Ja pirmais finišēja mazdēls, tad $t_m < t_v$, no kurienes iegūstam nevienādību
$$\frac{a}{4} + \frac{b}{20} < \frac{a}{6} + \frac{b}{8}$$ un to vienkāršojam:

$$\frac{1}{4}a-\frac{1}{6}a<\frac{1}{8}b-\frac{1}{20}b;$$
$$\frac{1}{12}a<\frac{3}{40}b;$$
$$a<\frac{36}{40}b<b.$$

No pēdējās nevienādības var secināt, ka nobraucieni no kalna bija vairāk nekā augšup kalnā.

Ja pirmais finišēja vectēvs, tad $t_m>t_v$ jeb $\frac{a}{4}+\frac{b}{20}>\frac{a}{6}+\frac{b}{8}$. Vienkāršojam nevienādību:

$$\frac{1}{12}a>\frac{3}{40}b;$$
$$a>\frac{36}{40}b=\frac{9}{10}b.$$

Šajā gadījumā nevar viennozīmīgi pateikt, vai $a>b$, $a=b$ vai arī $a<b$, jo iegūtā nevienādība ir patiesa dažādām a un b vērtībām, piemēram, a = 11 km > b = 10 km, $a=10\text{ km} =b=10\text{ km}$, kā arī $a=9{,}5\text{ km}<b=10\text{ km}$.

5.5.7. Virknes

1. Cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summu var izteikt skaitli: **a)** 14; **b)** 22? Veidi, kas atšķiras ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 8 var izteikt četros dažādos veidos: 8 = 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 3 = 3 + 2 + 3 = 3 + 3 + 2.

Atrisinājums. Pakāpeniski noskaidrosim, cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summa izsakāmi skaitļi 2, 3, 4,..., un centīsimies ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu.

Skaitlis	Skaitļa izteikšana ar divniekiem un trijniekiem	Dažādo veidu skaits
2	$2=2$	1
3	$3=3$	1
4	$4=2+2$	1
5	$5=2+3$ $5=3+2$	2
6	$6=3+3$ $6=4+2=2+2+2$	$1+1=2$
7	$7=4+3=2+2+3$ $7=5+2=2+3+2=$ $=3+2+2$	$1+2=3$
8	$8=5+3=2+3+3$ $=3+2+3$ $8=6+2=3+3+2=$ $=\underline{4}+2+2=\underline{2+2}+2+2$	$2+2=4$
...	...	...

Ar a_n apzīmējam, cik dažādos veidos skaitli n var izteikt kā divnieku un trijnieku summu. Iegūstam tabulu:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	...

Pamatosim, ka šī tabulas apakšējā rindā katrs skaitlis, sākot ar ceturto, ir to divu skaitļu summa, kas atrodas divas un trīs pozīcijas pirms tā, tas ir, to var uzrakstīt ar rekurences formulu $a_n=a_{n-3}+a_{n-2}$, kur $n\geqslant 5$.

Skaitli n var uzrakstīt kā divnieku un trijnieku summu a_n dažādos veidos. Iespējami divi dažādi gadījumi:

- ja pēdējais saskaitāmais ir 3, tad katrai summai pārējo saskaitāmo summa (bez pēdējā trijnieka) ir $(n-3)$, un šādu summu skaits ir a_{n-3};
- ja pēdējais saskaitāmais ir 2, tad katrai summai pārējo saskaitāmo summa (bez pēdējā divnieka) ir $(n-2)$, un šādu summu skaits ir a_{n-2};

Tā kā katra summa atšķiras no katras citas summa ar pēdējo saskaitāmo, tad formula $a_n = a_{n-3} + a_{n-2}$ ir patiesa. Tagad, izmantojot iegūto rekurences formulu, aizpildām tabulu:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
a_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151	200	...

Tātad **a)** skaitli 14 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt 21 veidā; **b)** skaitli 22 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt 200 veidos.

2. Cik dažādos veidos basketbolā var gūt 18 punktus, izmantojot tikai 1 punkta un 3 punktu metienus? Veidi, kas atšķiras tikai ar 1 punkta un 3 punktu metienu secību, tiek uzskatīti par dažādiem. Piemēram, 4 punktus var iegūt trīs dažādos veidos: $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1$.

Atrisinājums. Ar a_n apzīmējam, cik dažādos veidos var gūt n punktus, izdarot 1 punkta un 3 punktu metienus. Pamatosim, ka virknes (a_n) katrs loceklis, sākot ar ceturto, ir to divu virknes locekļu summa, kas atrodas vienu un trīs pozīcijas pirms tā, tas ir, to var uzrakstīt ar rekurences formulu $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, kur $n \geqslant 4$. Iespējami divi dažādi gadījumi:

- ja pēdējais ir 1 punkta metiens, tad pārējo punktu summa (bez pēdējā metiena) ir $(n-1)$, un šādu punktu summu var iegūt a_{n-1} veidos;
- ja pēdējais ir 3 punktu metiens, tad pārējo punktu summa (bez pēdējā metiena) ir $(n-3)$, un šādu punktu summu var iegūt a_{n-3} veidos.

Tā kā katra punktu summa atšķiras no katras citas punktu summas ar pēdējo saskaitāmo, tad formula $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ ir patiesa. Tagad, izmantojot iegūto rekurences formulu, aizpildām tabulu:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a_n	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277	406	595	...

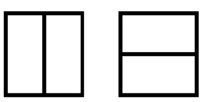
Tātad 18 punktus, izmantojot tikai 1 punkta un 3 punktu metienus, var iegūt 595 veidos.

3. Cik dažādos veidos taisnstūri 2×12 var sagriezt taisnstūros 1×2?

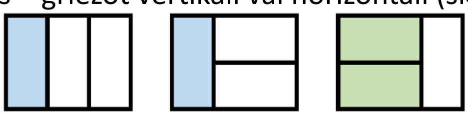
Piezīme. Griezumi, kas iegūstami viens no otra ar simetriju vai pagriezienu, tiek uzskatīti par dažādiem.

Atrisinājums. Pakāpeniski noskaidrosim, cik dažādos veidos var sagriezt taisnstūri 2×2, 2×3, 2×4 un 2×5. Sāksim taisnstūra griešanu no kreisās malas.

Taisnstūri 2×2 var sagriezt 2 dažādos veidos – griežot vertikāli vai horizontāli (skat. 234. att.)



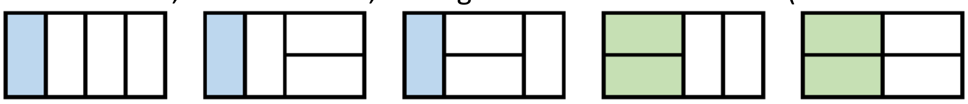
234. att.



235. att.

Taisnstūri 2×3 var sagriezt $3 = 2 + 1$ dažādos veidos – pirmo griezienu var izdarīt vertikāli, tad iegūstam 2 dažādus veidus, vai horizontāli, tad iegūstam 1 veidu (skat. 235. att.)

Taisnstūri 2×4 var sagriezt $5 = 3 + 2$ dažādos veidos – pirmo griezienu var izdarīt vertikāli, tad iegūstam 3 dažādus veidus, vai horizontāli, tad iegūstam 2 dažādus veidus (skat. 236. att.).



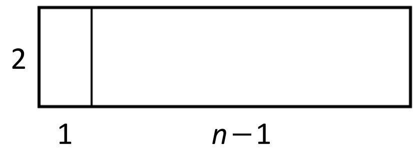
236. att.

Ievērojam:

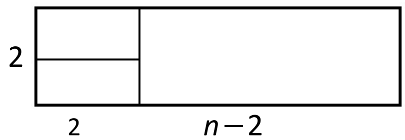
- ja pirmo griezienu izdara vertikāli, tad vēl jāsagriež taisnstūris, kura garums ir par 1 mazāks nekā dotajam taisnstūrim;
- ja pirmo griezienu izdara horizontāli, tad noteikti arī jānogriež otrs horizontālais taisnstūris 1×2, līdz ar to vēl jāsagriež taisnstūris, kura garums ir par 2 mazāks nekā dotajam taisnstūrim.

Ar a_n apzīmējam dažādo veidu skaitu, kā var sagriezt taisnstūri $2\times n$. Apskatām, kādā veidā no taisnstūra $2\times n$ var nogriezt pirmo taisnstūri 1×2:

- ja pirmo griezienu izdara vertikāli (skat. 237. att.), tad pirmā kolonna ir nosegta un atliek sagriezt taisnstūri $2\times(n-1)$, ko var izdarīt a_{n-1} veidos;
- ja pirmo griezienu izdara horizontāli, tad arī otrs grieziens ir jāveic horizontāli (skat. 238. att.) un atliek sagriezt taisnstūri $2\times(n-2)$, ko var izdarīt a_{n-2} veidos.



237. att.



238. att.

Līdz ar to iegūstam, ka $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Izmantojot šo sakarību un atrastās sākuma vērtības $a_1=1$ un $a_2=2$, aprēķinām a_{12}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Tātad taisnstūri 2×12 var sagriezt 233 dažādos veidos.

4. Uz koordinātu ass koordinātu sākumpunktā sēž blusa. Ar vienu lēcienu tā var aizlēkt vai nu 1, vai 2, vai 5 vienības pa labi. Cik dažādos veidos blusa var nokļūt punktā, kura koordināta ir 15? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto lēcienu secība.)

Atrisinājums. Ar a_n apzīmējam, cik dažādos veidos blusa var aizlēkt uz punktu, kura koordināta ir n. Iespējami trīs atšķirīgi gadījumi:

- uz punktu, kura koordināta ir n, ar vienu lēcienu var nokļūt no punkta, kura koordināta ir $(n-1)$ un kurā var nokļūt a_{n-1} veidos;
- uz punktu, kura koordināta ir n, ar vienu lēcienu var nokļūt no punkta, kura koordināta ir $(n-2)$ un kurā var nokļūt a_{n-2} veidos;
- uz punktu, kura koordināta ir n, ar vienu lēcienu var nokļūt no punkta, kura koordināta ir $(n-5)$ un kurā var nokļūt a_{n-5} veidos.

Tātad punktā, kura koordināta ir n, pavisam var nokļūt $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-5}$ atšķirīgos veidos. Atrodam sākuma vērtības:

- $a_1=1$;
- $a_2=2 \quad (1+1=2)$;
- $a_3=3 \quad (1+1+1=1+2=2+1)$;
- $a_4=5 \quad (1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2)$;
- $a_5=9 \quad (1+1+1+1+1=1+1+1+2=1+1+2+1=1+2+1+1=2+1+1+1=$
  $=2+2+1=2+1+2=1+2+2=5)$.

Izmantojot iegūto formulu un sākuma vērtības, aprēķinām $a_{15}=1843$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	5	9	15	26	44	75	128	218	372	634	1081	1843

Kāds var būt?
Cik?

visas iespējas
+
pamatojums, ka citu nav

Kāds ir lielākais (mazākais)?

atrast lielāko (mazāko) vērtību, parādīt piemēru
+
pamatot, ka vēl lielāka (mazāka) nevar būt

Vai var?
Vai eksistē?

JĀ
+
piemērs

NĒ
+
pamatojums, ka nekādā gadījumā

Vai vienmēr?
Vai visiem?
Vai noteikti?

JĀ
+
pamatojums, ka tiešām vienmēr

NĒ
+
pretpiemērs

Kāds var būt?
Cik?

visas iespējas
+
pamatojums, ka citu nav

Kāds ir lielākais (mazākais)?

atrast lielāko (mazāko) vērtību, parādīt piemēru
+
pamatot, ka vēl lielāka (mazāka) nevar būt

Vai var?
Vai eksistē?

JĀ
+
piemērs

NĒ
+
pamatojums, ka nekādā gadījumā

Vai vienmēr?
Vai visiem?
Vai noteikti?

JĀ
+
pamatojums, ka tiešām vienmēr

NĒ
+
pretpiemērs

$2\ 0\ 0\ 0 \quad + 3\ 0\ 0 \quad + 8\ 0 \quad + 7$

$a \cdot 1000 \quad + b \cdot 100 \quad + c \cdot 10 + d$

$2\ 0\ 0\ 0 \quad + 3\ 0\ 0 \quad + 8\ 0 \quad + 7$

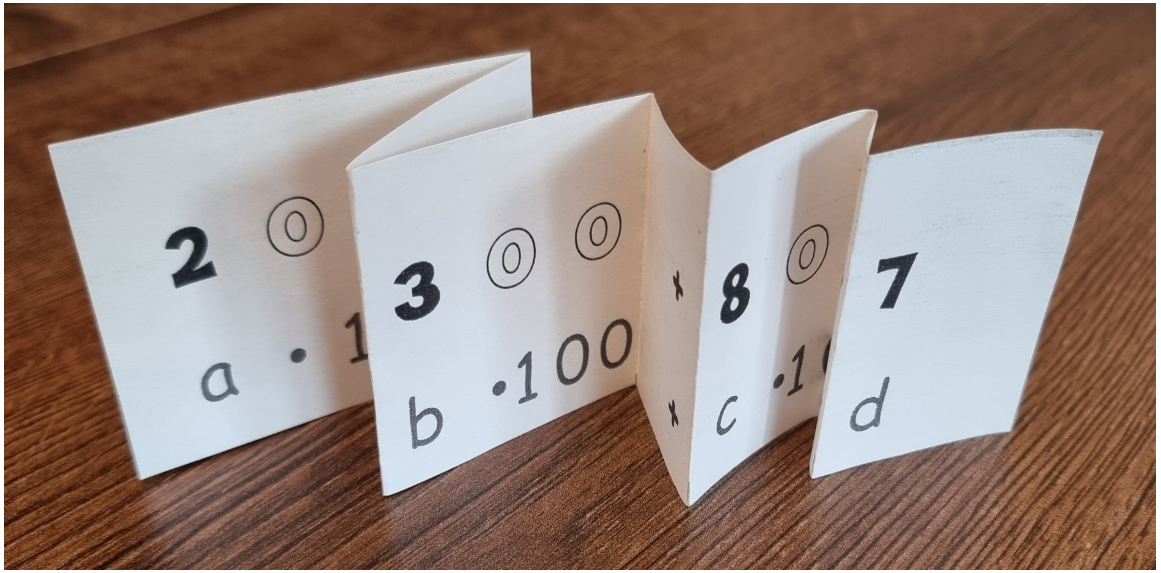
$a \cdot 1000 \quad + b \cdot 100 \quad + c \cdot 10 + d$

$2\ 0\ 0\ 0 \quad + 3\ 0\ 0 \quad + 8\ 0 \quad + 7$

$a \cdot 1000 \quad + b \cdot 100 \quad + c \cdot 10 + d$

$2\ 0\ 0\ 0 \quad + 3\ 0\ 0 \quad + 8\ 0 \quad + 7$

$a \cdot 1000 \quad + b \cdot 100 \quad + c \cdot 10 + d$



Vienā darba lapā ir 4 atgādnes, kuras skolotājam jāsagriež. Skolēni veido locījumus vietās, kur iezīmētas svītras.