LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

A. Vasiļevska, L. Ramāna, A. Andžāns

EKSTRĒMU UZDEVUMU RISINĀŠANAS METODES

Rīga, 1997

Saturs

IEVADS

Savā darbībā cilvēks vienmēr cenšas sasniegt iespējami labāku rezultātu ar iespējami mazu līdzekļu (materiālo, garīgo, finansiālo) patēriņu. Lai netērētu laiku un enerģiju, pūloties uzlabot to, kas nav uzlabojams, svarīgi iemācīties noteikt mūsu iespēju robežas. Veidojot dabas, sabiedrības un tehnikas modeļus matemātiskā formā, minētais uzdevums kļūst par matemātisku uzdevumu - atrast funkcijas vai funkcionāļa ekstrēmus. Atkarībā no pētāmās problēmas dabas un lietojamā matemātiskā aparāta šāds uzdevums var tikt attiecināts uz dažādām matemātikas nozarēm; ar līdzīgiem jautājumiem nodarbojas variāciju rēķini, optimizācijas teorija (gan nepārtrauktā, gan diskrētā), algoritmu sarežģītības teorija utt.

Arī skolas matemātikas kursā iespējamo lielāko un mazāko vērtību atrašanas uzdevumiem tiek veltīta pienācīga uzmanība gan algebras, gan ģeometrijas priekšmetos; tie sastopami gan pamatkursa, gan profilkursa ietvaros, matemātikas olimpiādēs u. tml. Ievērojami atšķiras matemātiskais aparāts, ko dažādu skolu skolēni var izmantot ekstrēmu uzdevumu risināšanā. Tie, kas apgūst profilkursu, var lietot spēcīgo matemātiskās analīzes ieroci - atvasinājumu; tiem, kas apgūst tikai pamatkursu, šādas iespējas nav.

Šajā darbā izstrādāts mācību līdzeklis vidusskolām, lai palīdzētu skolēniem apgūt ekstrēmu uzdevumu risināšanas vienkāršākās metodes bez matemātiskās analīzes paņēmienu pielietošanas. Atzīmēsim, ka iepazīšanās ar te aplūkotajām metodēm lietderīga arī tiem, kas apguvuši ekstrēmu atrašanas paņēmienu ar atvasinājumu palīdzību; elementārās metodes dažreiz ļauj iegūt rezultātu ātrāk un vienkāršāk, kā arī ļauj labāk saskatīt problēmas risinājuma "virzošos mehānismus", piemēram, dažādu izoperimetrisko uzdevumu risinājumā.

Mācību līdzekļa struktūra un izveides principi.

Mācību līdzeklis iedalīts 7 paragrāfos. Par to saturu var spriest pēc nosaukumiem satura rādītājā.

Katrs no pirmajiem sešiem paragrāfiem satur nepieciešamo teorētisko materiālu, virkni piemēru, kuros demonstrēta šī materiāla pielietošana, un uzdevumus patstāvīgai risināšanai. Lielais vairums piemēru un uzdevumu ir oriģināli; daži aizgūti no literatūras sarakstā norādītajiem avotiem.

Materiāla sakārtošanā ievēroti principi:

a) pēctecība; piemēri izkārtoti sērijās tādā secībā, lai katrs nākošais sērijas piemērs savā risinājumā tālāk attīstītu idejas, kas saskatāmas iepriekšējo piemēru risinājumos,

b) pakāpeniskums; uzdevumu grūtības pakāpe monotoni pieaug paragrāfu ietvaros, lietojamā teorētiskā materiāla grūtības pakāpe pieaug no pirmajiem paragrāfiem uz tālākajiem,

c) skolas kursa integrēšana; vienviet aplūkoti algebras un ģeometrijas uzdevumi,

d) cikliskums; tēma par Košī nevienādības lietošanu ekstrēmu uzdevumos aplūkota divreiz - vienkāršākā variantā 2.§ un attīstītākā pakāpē 5.§.

Darbā iekļautais materiāls pārbaudīts vairāku gadu laikā Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā, sagatavošanas kursos un nodarbībās ar matemātikas olimpiāžu dalībniekiem.

1.§ KVADRĀTFUNKCIJA

Teorēma. Kvadrātfunkcija $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) sasniedz savu

1) mazāko vērtību , ja $x=-\dfrac{b}{2a}$ un $a>0$

2) lielāko vērtību , ja $x=-\dfrac{b}{2a}$ un $a<0$

<u>Pierādījums.</u> Atdalīsim pilno kvadrātu.

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Redzam, ka y sastāv no diviem saskaitāmajiem, kur otrais nav atkarīgs no x.

1. Ja $a>0$, tad pirmais saskaitāmais $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ir tikai nenegatīvs un tā mazākā vērtība ir 0, ja $x+\dfrac{b}{2a}=0$, t.i., $x=-\dfrac{b}{2a}$. Tādā gadījumā y mazākā vērtība ir $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ un lielākā vērtība neeksistē.
2. Ja $a<0$, tad pirmais saskaitāmais ir negatīvs vai 0 un tā lielākā vērtība ir 0, ja $x+\dfrac{b}{2a}=0$, t.i., $x=-\dfrac{b}{2a}$. Tātad y lielākā vērtība ir $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ un mazākā vērtība neeksistē.

1. Piemērs. Noteikt kvadrāttrinoma x^2-8x+9 mazāko vērtību.

$$x^2-8x+9=(x^2-8x+16)-16+9=(x-4)^2-7$$

Izteiksmes mazākā vērtība ir -7, ja x=4.

2. Piemērs. Noteikt kvadrāttrinoma $-x^2-12x+4$ lielāko vērtību.

$$-x^2-12x+4=-(x^2+12x-4)=-(x^2+12x+36-36-4)=-((x+6)^2-40)=$$
$$=-(x+6)^2+40$$

Izteiksmes lielākā vērtība ir 40, ja x=-6.

3. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y=3x^2+6x+7$ mazāko vērtību.

$$y=3x^2+6x+7=3(x^2+2x+\frac{7}{3})=3(x^2+2x+1-1+\frac{7}{3})=3((x+1)^2+\frac{4}{3})=$$
$$=3(x+1)^2+4$$

Funkcijas mazākā vērtība ir 4, ja x=-1.

4. Piemērs. Noteikt, pie kādām x vērtībām polinoma $P_4(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ vērtība ir vismazākā. Aprēķināt to.

$$P_4(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=t(t+2)=t^2+2t+1-1=$$
$$=(t+1)^2-1 \text{ , kur } x^2+3x=t.$$

Funkcijas mazākā vērtība ir -1, ja t=-1. Noskaidrosim, kādas x vērtības atbilst t vērtībai -1:

$$x^2+3x=-1$$
$$x^2+3x+1=0$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

5. Piemērs. Noteikt to x vērtību, pie kuras funkcija $y=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$ (a;b;c - reāli skaitļi) sasniedz savu mazāko vērtību.

$$y=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2+x^2-2cx+c^2=$$
$$=3x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2.$$

3>0, tāpēc kvadrātfunkcijai ir mazākā vērtība, ja $x=-\frac{b}{2a}$, kas šajā gadījumā ir $x=\frac{2(a+b+c)}{6}=\frac{a+b+c}{3}$.

6. Piemērs. Aprēķināt kvadrāttrinoma ax^2+bx+c koeficientus, zinot, ka tā vērtība ir 0, ja x=-1, un vislielāko vērtību 3 tas sasniedz, ja x=1.

Ja x=-1, tad a-b+c=0 (1)

Kvadrāttrinoma $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ lielākā vērtība ir $\frac{4ac-b^2}{4a}=3$, ja $x=-\frac{b}{2a}=1$

b=-2a (2)

Tātad $\frac{4ac-(2a)^2}{4a}\Rightarrow$ c-a=3

c=3+a (3)

Lai iegūtu a skaitlisko vērtību, (2) un (3) ievieto (1).

a+2a+3+a=0 $\Rightarrow$ $a=-\frac{3}{4}$; $b=-2a=-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$;

$c=3+a=3-\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}$

Iegūstam kvadrāttrinomu $ax2+bx+c=-\frac{3}{4}x^2+1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{4}$.

7. Piemērs. Noteikt kvadrāttrinoma ax^2+bx+c koeficientus, ja pie x=0 tā vērtība ir 7 un tā lielākā vērtība ir 19, ja x=2.

Ja x=0, tad a·0+b·0+c=c=7 (1)

Kvadrāttrinoma $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ lielākā vērtība ir $\frac{4ac-b^2}{4a}=19$ (2), ja $x=-\frac{b}{2a}=2$

b=-4a (3)

(1) un (3) sakarību ievieto (2) un aprēķina a vērtību

$$\frac{4a\cdot 7-16a^2}{4a}=19\ \Rightarrow 7-4a=19\ \Rightarrow -4a=12$$
$$\Rightarrow a=-3, b=-4a=12, c=7$$

Iegūstam kvadrāttrinomu $ax^2+bx+c=-3x^2+12x+7$.

8. Piemērs. Aprēķināt kvadrāttrinoma ax^2+bx+c koeficientus, ja zināms, ka tā mazākā vērtība ir -16, ja x=-1, un tā sakņu
1) kvadrātu summa ir 34
2) kubu summa ir -98.

Kvadrāttrinoma $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ mazākā vērtība

$\frac{4ac-b^2}{4a}=-16$ (1), $x=-\frac{b}{2a}=-1$, tātad b=2a (2)

Izmantojot Vjeta teorēmu $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ un $x_1x_2=\frac{c}{a}$

1) $x_2^1+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=4-2\frac{c}{a}$

pēc dotā $4-2\frac{c}{a}=34 \Rightarrow$ c=-15a (3)

(2) un (3) sakarības ievieto (1) $\Rightarrow \frac{4a(-15a)-4a^2}{4a}=-16 \Rightarrow$ a=1

tad b=2a=2; c=-15a=-15

Kvadrāttrinoms $ax^2+bx+c=x^2+2x-15$.

2) $x_1^3+y_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^1)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right)=-2\left(4-3\frac{c}{a}\right)$$

pēc dotā $-2\left(4-3\frac{c}{a}\right)=-98 \Rightarrow 4-3\frac{c}{a}=49 \Rightarrow -3\frac{c}{a}=45 \Rightarrow$ c=-15a un pabeidz kā 1) gadījumā.

9. Piemērs. Kādām a vērtībām vienādojuma $x^2-ax+a-2=0$ sakņu kvadrātu summa ir vismazākā?

Pēc Vjeta t. $x_1+x_2=a$ un $x_1x_2=a-2$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2(a-2)=a^2-2a+4=a^2-2a+1+3=(a-1)^2+3$ Izteiksmes mazākā vērtība ir 3, ja a=1.

10. Piemērs. Doto skaitli 70 uzrakstīt kā divu saskaitāmo summu tā, lai to reizinājums būtu vislielākais.

Pieņemam, ka x ir viens saskaitāmais, tad otrs ir 70-x. Abu saskaitāmo reizinājums

$x(70-x)=-x^2+70x=-(x^2-70x)=-(x^2-2.35x+35^2-35^2)=-(x-35)^2+35^2$

Abu saskaitāmo reizinājums būs vislielākais 35^2, ja x-35=0, x=35 un 70-x=35.

Tātad reizinājums būs vislielākais, ja abi saskaitāmie ir vienādi.

11. Piemērs. Doti skaitļi p un q; p+2q=1. Noteikt
1) p^2+q^2 mazāko vērtību,
2) pq lielāko vērtību.

Izsakām p=1-2q.

1) $p^2+q^2=(1-2q)^2+q^2=1-4q+4q^2+q^2=5q^2-4q+1=5\left(q-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}.$

Izteiksmes mazākā vērtība ir $\frac{1}{5}$, ja $q=\frac{2}{5}$ un $p=\frac{1}{5}$.

2) $pq=(1-2q)q=q-2q^2=-2\left(q-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}.$

Reizinājuma lielākā vērtība ir $\frac{1}{8}$, ja $q=\frac{1}{4}$ un $p=\frac{1}{2}$.

12. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=x^4+3x^2+2$ vismazāko un vislielāko vērtību, ja $-2\le x\le 3$.

$$y=x^4+3x^2+2=\left(x^4+2\cdot\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{4}=\left(x^2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Funkcijas mazākā vērtība ir atkarīga no tā, cik liels ir pirmais saskaitāmais: $x^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}$ (jo $x\ge 0$) $\Rightarrow$ $y_{min}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

Šo vērtību funkcija sasniedz pie $x^4+3x^2+2=2$ $\Rightarrow$ $x^2(x^2+3)=0$ $\Rightarrow$ $\underline{x=0}$; $x^2=-3$ $\Rightarrow$ $\emptyset$

Ievērosim, ka dotā funkcija ir pāra: $y(-x)=(-x)^4+3(-x)^2+2= =x^4+3x^2+2=y(x)$, tātad tās grafiks ir simetrisks pret Oy asi.

Funkcijas lielākā vērtība būs punktā $x=3$: $y(3)=110$.

13. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$ mazāko vērtību.

$$y=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}=\frac{(x^2-2x+1)+x}{x^2-2x+1}=1+\frac{x}{(x-1)^2}=1+\frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}=$$

$$=1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

apzīmē $\frac{1}{x-1}=a$

$$1+a+a^2=(a^2+2\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Funkcijas minimālā vērtība ir $\frac{3}{4}$, ja $\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$, $x-1=-2$, $x=-1$, kas pieder D.A.

14. Piemērs. Atrast funkcijas $y=\frac{1}{x^2+x+1}$, ja $-1\le x\le 1$, vislielāko un vismazāko vērtību.

$$y=\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

1) saucējs ir vismazākais: $\frac{3}{4}$, ja $x = -\frac{1}{2}$, tāpēc daļas vērtība (apgrieztais lielums) ir vislielākā: $\frac{4}{3}$.

2) tā kā saucējs ir kvadrātfunkcija, kuras virsotnes abscisa $x = -\frac{1}{2}$, tad tās grafiks ir simetrisks pret šo taisni un saucējam būs lielākā vērtība intervāla [-1;1] galapunktā x=1. Tāpēc apgrieztais lielums būs mazākais: $y = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$

15. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=4x-3x^2$ lielāko un mazāko vērtību intervālā [1;2].

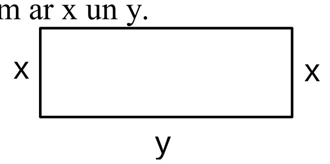
$$y = 4x - 3x^2 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = -3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}$$

Kvadrātfunkcija sasniedz savu maksimumu $\frac{4}{9}$ punktā $x = \frac{2}{3}$, bet $\frac{2}{3} \notin [1;2]$.

Tā kā intervālā $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ funkcija ir dilstoša, tad savu lielāko vērtību tā sasniedz intervāla galapunktā x=1, tad y=4-3=1, un mazāko vērtību - intervāla galapunktā x=2, tad y=8-12=-4.

16. Piemērs. Kāds ir lielākais laukums taisnstūrim, kura trīs malu summa ir 200m?

Taisnstūra malas apzīmējam ar x un y.

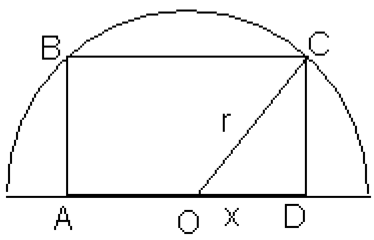


Pēc dotā 2x+y=200, tad y=200-2x un laukums taisnstūrim

$$S=xy=x(200-2x)=-2x^2+200x=-2(x^2-100x+2500-2500)=$$
$$=-2(x-50)^2+5000$$

Vislielākā laukuma vērtība ir $5000m^2$, ja x=50m un y=100m.

17. Piemērs. Pusriņķī ievilkts taisnstūris tā, ka viena mala atrodas uz diametra. Noteikt tā taisnstūra izmērus, kura laukums ir maksimālais.



Riņķa rādiusu apzīmē ar r=OC; OD=x, tad AD=2x.

Apskatot $\triangle$OCD redzam, ka $CD = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Tad taisnstūra laukums S=2x $\sqrt{r^2 - x^2}$.

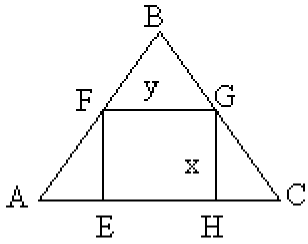
S sasniedz savu maksimālo vērtību, kad to sasniedz S^2.

Tāpēc $S^2=4x^2(r^2-x^2)=4x^2r^2-4x^4=-(4x^4-4r^2x^2+r^4-r^4)=-(2x^2-r^2)+r^4$

Laukums ir maksimālais r^2, ja $2x^2=r^2 \Rightarrow\ x=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ un $AD=r\sqrt{2}$;

$$CD=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

18. Piemērs. Dots regulārs trijstūris ar malu a. Kāds ir lielākais laukums taisnstūrim, kurš ievilkts trijstūrī tā, ka visas taisnstūra virsotnes atrodas uz trijstūra malām?



Taisnstūra malu garumus apzīmē ar x un y.

$\triangle CGH$: $HC = x\operatorname{ctg}60^0=\frac{\sqrt{3}x}{3}$, tad $y=a-2HC=a-\frac{2\sqrt{3}x}{3}$

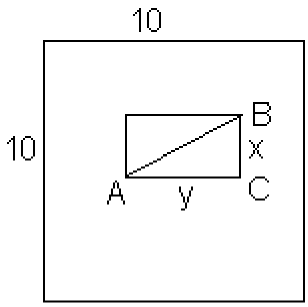
Taisnstūra laukums $S=xy=x\left(a-\frac{2\sqrt{3}x}{3}\right)=ax-\frac{2\sqrt{3}x^2}{3}=$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}a}{4}x+\frac{3a^2}{16}-\frac{3a^2}{16}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$$

Lielākā laukuma vērtība ir $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$, ja malu garumi ir $x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ un $y=a-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$.

19. Piemērs. Kvadrātveida finiera plāksnē ar malas garumu 10 cm izgrieza taisnstūrveida caurumu, kura diagonāle ir 5 cm. Cauruma malām piestiprināja stieplīti, kuras 1cm sver 7 gramus. Finiera 1 cm^2 svars ir 2 grami. Kādiem jābūt cauruma izmēriem, lai atlikušās plāksnes svars būtu maksimālais?

Izgrieztā taisnstūra malu garumus apzīmējam ar x un y; tad no $\triangle ABC$ $x^2+y^2=25$ (1)



Plāksnes svars ir

$Q=100\cdot2-2xy+7\cdot2(x+y)=200-2xy+14(x+y)$

Sakarības (1) kreisajā pusē atdalām pilno kvadrātu $(x+y)^2-2xy=25$ un izsakām $2xy=(x+y)^2-25$

$Q=200-(x+y)^2+25+14(x+y)=-(x+y)^2+14(x+y)+225$

Esam ieguvuši kvadrātfunkciju $x+y=a$

$Q=-a^2+14a+225$

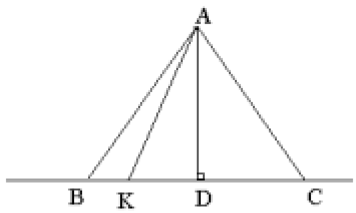
Šī funkcija sasniedz savu maksimumu, ja $a=-14:(-2)=7$

Iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \text{vai} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

Tātad maksimālais svars būs plāksnei, kurā izgrieztā cauruma izmēri ir 3 un 4 cm.

20. Piemērs. Plaknē doti 3 punkti A; B; C, kuri neatrodas uz vienas taisnes . Noteikt uz taisnes BC punktu K, lai attālumu kvadrātu summa no K līdz A; B un C būtu vismazākā.

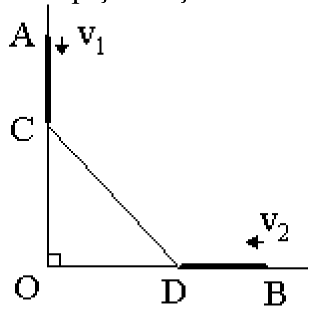


Novelkam $AD \perp BC$ un apzīmējam: AD=a, DB=b, DC=c, K – patvaļīgais punkts. Tātad jānosaka funkcijas $y=AK^2+BK^2+CK^2$ mazākā vērtība.

Apzīmējam KD=x, tad $y=(a^2+x^2)+(b-x)^2+(c+x)^2=$
$=3x^2-2(b-c)x+a^2+b^2+c^2$

Pārveidojam kvadrātfunkciju $y=3\left(x-\dfrac{b-c}{3}\right)^2+\dfrac{3a^2+2b^2+2bc+2c^2}{3}$. Tātad funkcija savu mazāko vērtību $\dfrac{3a^2+2b^2+2bc+2c^2}{3}$, ja $x=\dfrac{b-c}{3}$.

21. Piemērs. Pa taisna leņķa malām kustas 2 ķermeņi ar noteiktiem ātrumiem v_1 un v_2 m/s virzienā uz leņķa virsotni. Sākot kustību, pirmais ķermenis atrodas attālumā a, otrais ķermenis – attālumā b no leņķa virsotnes. Pēc cik sekundēm no kustības sākuma brīža attālums starp ķermeņiem būs vismazākais?



AO=a, OB=b. Pieņemsim, ka pēc x sekundēm attālums starp abiem ķermeņiem būs vismazākais. x sekundēs pirmais ķermenis ir nobraucis attālumu $AC=v_1x$, otrais – $BD=v_2x$. Tad ķermeņu attālumi līdz leņķa virsotnei ir

$OC = a - v_1x$ un $OD = b - v_2x$. Attālums starp abiem ķermeņiem $CD = \sqrt{(a - v_1x)^2 + (b - v_2x)^2}$.

Tas būs mazākais, ja CD^2 būs vismazākais. Tāpēc aplūkosim funkciju

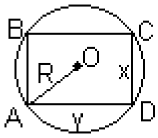
$$y=(a-v_1x)^2+(b-v_2x)^2=(v_1^2+v_2^2)x^2-(2av_1+2bv_2)x+a^2+b^2=$$

$$=(v_1^2+v_2^2)\left(x^2-\frac{2av_1+2bv_2}{v_1^2+v_2^2}x+\frac{a^2+b^2}{v_1^2+v_2^2}\right)=$$

$$=(v_1^2+v_2^2)\left(x^2-\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}\right)^2+\frac{(av_2-bv_1)^2}{v_1^2+v_2^2}$$

Tā kā $v_1^2+v_2^2>0$, tad attālums starp ķermeņiem ir vismazākais pēc $x=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ sekundēm un vienāds ar $\frac{av_2-bv_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.

22. Piemērs. No baļķa, kura rādiuss ir R, jāizgatavo taisnstūra paralēlskaldnis tā, lai materiāla zudumi būtu pēc iespējas mazāki.



Tā kā baļķa garums ir nemainīgs, tad ir jānoskaidro, kādi ir pamata riņķa līnijā ievilktā taisnstūra izmēri, lai tā laukums būtu maksimālais.

Apzīmē riņka līnijas rādiusu ar R, taisnstūra izmērus ar x un y.

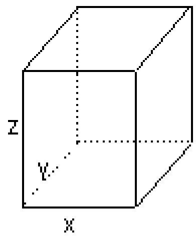
Taisnstūra ABCD laukums S=xy; izsakot no $\triangle ACD$, $AD = y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ un $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$

$$S^2=x^2(4R^2-x^2)=-x^2+4x^2R^2=-(x^2-2R^2)^2+4R^4$$

S sasniedz lielāko vērtību tad, ja S^2 ir lielākā vērtība, bet S^2 lielākā vērtība ir $2R^2$, ja $x^2=2R^2$; t.i:, $x = R\sqrt{2}$ un $y = R\sqrt{2}$.

Tātad, lai materiāla zudumi būtu vismazākie, pamatā jāievelk kvadrāts.

23. Piemērs. Jāizgatavo taisnstūra paralēlskaldņa formas kaste, kuras pamata laukums ir 1. Visu šķautņu garumu summa ir 20. Kādiem jābūt kastes izmēriem, lai tās pilnas virsmas laukums būtu vislielākais?



Apzīmējam atšķirīgo šķautņu garumus ar x, y, z. Pēc dotā 4x+4y+4z=20, tad x+y+z=5 (1) un pamata laukums xy=1.

Aprēķinām laukumu pilnai virsmai:

$$S=2+2xz+2yz=2+2z(x+y)=2+2(x+y)(5-(xty))=-(x+y)^2+10(x+y)+2$$

Ir iegūta kvadrātfunkcija; ja x+y=a, tad

$$S=-2a^2+10a+2.$$

Tai eksistē maksimums, ja $a=\frac{5}{2}$ jeb $x+y=\frac{5}{2}$. Iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=1 \end{cases} \text{ un tālāk } \begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ y_1=2 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Aprēķinām $z=5-(x+y)=5-\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

Vislielākais pilnas virsmas laukums ir $S=-2\frac{25}{4}+10\frac{5}{2}+2=\frac{29}{2}$.

Uzdevumi

1. Noteikt kvadrāttrinoma lielāko vai mazāko vērtību:

1) $x^2+10x-3$	4) $-x^2+2x-11$	7) $5x^2-2x+3$
2) x^2+5x-2	5) $-x^2+3x+1$	8) $-2x^2+5x+1$
3) x^2-7x+4	6) $-x^2-7x-3$	9) $\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{4}$.

2. Aprēķināt polinoma $P(x)=(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ mazāko vērtību.

3. Noteikt tās x vērtības, pie kurām dotā funkcija sasniedz savu lielāko vai mazāko vērtību:

1) $y=(x-3)^2+(x-7)^2$
2) $y=(x-2a)^2+(x+3b)^2$
3) $y=-(4t-x)^2-(x-t)^2$

4. Noteikt kvadrāttrinoma ax^2+bx+c koeficientus, ja tā vērtība ir 0, ja $x=8$, un vismazākā vērtība ir -12, ja $x=6$.

5. Aprēķināt kvadrāttrinoma ax^2+bx+c koeficientus, ja tā mazākā vērtība ir 7 pie $x=-2$ un, ja $x=0$, tad kvadrāttrinoma vērtība ir 15.

6. Dota funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$. Noteikt koeficientus a, b un c, ja zināms, ka punktā $x=-2$ tai ir minimums -9, bet ja $x=1$, tad funkcijas vērtība ir 0.

7. Noteikt kvadrāttrinoma ax^2+bx+c koeficientus, ja zināms, ka tā lielākā vērtība ir 25, ja $x=\frac{1}{2}$, un tā sakņu kubu summa ir 19.

8. Kādām a vērtībām vienādojuma

1) $x^2+(2-a)x-a-3=0$
2) $x^2+(a-4)x-a-1=0$
3) $-x^2+(a-6)x+a=0$

sakņu kvadrātu summa ir vismazākā?

9. Doti reāli skaitļi a; b; c; d; $a^2+c^2 \neq 0$. Pie kādas x vērtības funkcijai $y=(ax+b)^2+(cx+d)^2$ ir vismazākā vērtība? Noteikt to!

10. Taisnstūra trīs malu garumu summa ir a. Aprēķināt, pie kādiem taisnstūra malu garumiem tā laukums ir maksimālais.

11. Noteikt vislielāko un vismazāko vērtību funkcijai

1) $y=x^4+5x^2+4$, ja $x \in [-2; 1]$

2) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 4x + 7}$.

12. Aprēķināt funkcijas $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ mazāko vērtību.

13. Taisnleņķa trijstūrī, kura šaurais leņķis ir 60^0 un hipotenūza 16 cm, ievilkts taisnstūris, kura viena mala atrodas uz hipotenūzas. Kādiem jābūt taisnstūra izmēriem, lai tā laukums būtu maksimālais?

14. Kā ar sētu, kuras garums ir 1, var ierobežot maksimālo laukumu, kurš atrodas taisna jūras krasta malā, ja sētas forma ir

1) taisnstūris,

2) trijstūris?

15. Figūra sastāv no taisnstūra un vienādmalu trijstūra, kurš kā uz pamata konstruēts uz taisnstūra malas. Kāds ir lielākais iespējamais šīs figūras laukums, ja tās perimetrs ir P?

16. Noteikt summas $2x^2+3y^2$ lielāko un mazāko vērtību, ja $x+y=2$, $x \geq 0$; $y \geq 0$.

17. Regulāras trijstūra piramīdas visa šķautņu garumu kvadrātu summa ir a. Kāds ir maksimālais sānu virsmas laukums?

18. Paralelograma diagonāļu garumu summa ir 16 cm. Aprēķināt vismazāko iespējamo paralelograma malu garumu kvadrātu summu.

19. Pozitīvu skaitļu x un y summa ir 12. Aprēķināt, kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme

1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

2) x^2+y^2.

20. Konusā ar pamata rādiusu R un augstumu H ievilkts cilindrs. Aprēķināt tā cilindra augstumu un pamata rādiusu, kura sānu virsmas laukums ir vislielākais.

21. No visiem trijstūriem, kuru platais leņķis ir 150^0 un malu, kuras veido šo leņķi, ir 16, noteikt to, kuram ir vislielākais laukums.

2.§ SAKARĪBA STARP DIVU SKAITĻU VIDĒJO ARITMĒTISKO UN VIDĒJO ĢEOMETRISKO

Teorēma. Ja x un y ir nenegatīvi skaitļi, tad $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$.

Pārveidojam nevienādību

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \ge 0 .$$

Vienādība ir spēkā tikai tad, ja x=y. Bieži šo nevienādību lieto formā $x + y \ge 2\sqrt{xy}$. Nevienādību var izmantot arī funkcijas $y = x + \frac{a}{x}$, ja a>0 un x>0, pētīšanai.

Teorēma. Funkcijas $y = x + \frac{a}{x}$, kur a>0 un x>0, vismazākā vērtība ir $2\sqrt{a}$, kuru tā iegūst, ja $x = \sqrt{a}$.

To pierāda, izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$x + \frac{a}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}}$$

$x + \frac{a}{x} \ge 2\sqrt{a}$ - izteiksmes mazākā vērtība ir $2\sqrt{a}$. Noskaidrosim, pie kādas x vērtības to iegūst: $\frac{x^2 - 2\sqrt{a}x + a}{x} \ge 0$

$$\frac{\left(x-\sqrt{a}\right)^2}{x} \ge 0$$

Acīmredzot $\left(x-\sqrt{a}\right)^2 \ge 0$ un kvadrāta mazākā vērtība ir pie $x - \sqrt{a} = 0$, t.i., ja $x = \sqrt{a}$.

Gadījumā, ja x<0, tad izmanto, ka dotā funkcija ir nepāra, t.i.,

$$f(-x) = -x + \frac{a}{-x} = -\left(x + \frac{a}{x}\right) = -f(x)$$

un tās grafiks ir simetrisks pret (0;0).

Tāpēc simetriskajā punktā $x = -\sqrt{a}$ $y = -2\sqrt{a}$ funkcijai ir lielākā vērtība.

Aplūkosim piemērus.

1. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=x+\frac{16}{x}$, ja x>0, mazāko vērtību.

$x + \frac{16}{x} > 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 2 \cdot 4 = 8$. Mazākā vērtība ir 8.

2. Piemērs. Noteikt funkcijas $y = x + \frac{16}{x-3}$, ja x>3, mazāko vērtību.

Labajā pusē pieskaita un atņem 3: $y = x - 3 + \frac{16}{x-3} + 3$. Pirmo divu saskaitāmo summas mazākā vērtība:

$$x - 3 + \frac{16}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{16}{x-3}} = 8$$

Mazākā vērtība ir 8, ja x-3=4. Tāpēc y≥8+3=11.

3. Piemērs. Pie kādas x vērtības izteiksmes $\frac{\lg^2 x + 4}{\lg x}$ vērtība ir mazākā?

Noteiksim izteiksmes mazāko vērtību:

$\frac{\lg^2 x + 4}{\lg x} = \lg x + \frac{4}{\lg x} \geq 2\sqrt{\lg x \cdot \frac{4}{\lg x}} = 2 \cdot 2 = 4$. Tā ir 4. Mazāko vērtību izteiksme iegūst, ja lgx=2 jeb x=100.

4. Piemērs. Aprēķināt izteiksmes $\frac{(x+1)(x+4)}{x}$, ja x>0, mazāko vērtību.

$$\frac{(x+1)(x+4)}{x} = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = x + \frac{4}{x} + 5 \geq 4 + 5 = 9$$

Ievērosim, ka $x + \frac{4}{x} > 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$. Izteiksmes mazākā vērtība ir 9.

5. Piemērs. Noteikt funkcijas $y = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$ ekstrēmus.

Acīmredzot jābūt x≠0. Ja x>0, tad $\frac{x}{7} + \frac{7}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{7}\cdot\frac{7}{x}} = 2$. Funkcijas minimālā vērtība ir 2. Noteiksim, kādai x vērtībai tā atbilst:

$$\frac{x^2+49}{7x} \geq 2 \;\Rightarrow\; \frac{x^2 - 14x + 49}{7x} = \frac{(x-7)^2}{7x} \geq 0.$$

Vienādība ir spēka, ja x=7

Funkcijai minimums ir punktā (7,2). Ja x<0, ievērosim, ka funkcija ir nepāra, t.i.

$$f(-x) = -\frac{x}{7} - \frac{7}{x} = -\left(\frac{x}{7} \cdot \frac{7}{x}\right) = -f(x),$$

tās grafiks ir simetrisks pret koordinātu asu krustpunktu, un punktā (-7,-2) ir maksimums.

6. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y = \frac{1}{x}(x^3 - 5x^2 + 10x + 9)$, ja x>0, mazāko vērtību.

$$y = \frac{1}{x}(x^3 - 5x^2 + 10x + 9) = x^2 - 5x + 10 + \frac{9}{x} =$$

$$= (x^2 - 6x + 9) + \left(x + \frac{9}{x}\right) + 1 = (x-3)^2 + \left(x + \frac{9}{x}\right) + 1 = (*)$$

Pirmais saskaitāmais $(x-3)^2 \geq 0$, tā mazākā vērtība ir pie x-3=0, x=3; otrais saskaitāmais $x + \frac{9}{x} \geq 2 \cdot 3 = 6$, tā mazākā vērtība ir 6, ja x=3.

Tāpēc (*)≥0+6+1=7. Funkcijas mazākā vērtība ir 7, ja x=3.

Aplūkosim piemērus (7., 8.), kuros, lai vieglāk varētu noteikt ekstrēmus, izpēta nevis pašu funkciju y, bet tai apgriezto $\frac{1}{y}$.

7. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=\frac{x}{x^2+9}$, ja x>0, maksimumu.

Aplūkojam apgriezto funkciju $\frac{1}{y}=\frac{x^2+9}{x}=x+\frac{9}{x}\geq 2\cdot 3=6$ Tai mazākā vērtība ir 6, ja x=3. Tātad dotajai funkcijai šajā punktā x=3 ir maksimums $y(3)=\frac{1}{6}$.

8. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y=\frac{3x^2}{ax^4-bx^2+c}$, kur a, b, c ir pozitīvi skaitļi, lielāko vērtību, ja zināms, ka tā eksistē.

Apskatām $\frac{1}{y}=\frac{ax^4-bx^2+c}{3x^2}=\frac{ax^2}{3}+\frac{c}{3x^2}-\frac{b}{3}=(*)$. Nosakām pirmo divu saskaitāmo summas mazāko vērtību $\frac{ax^2}{3}+\frac{c}{3x^2}\geq 2\sqrt{\frac{ax^2}{3}\cdot\frac{c}{3x^2}}=\frac{2\sqrt{ac}}{3}$

$(*)\geq\frac{2\sqrt{ac}}{3}-\frac{b}{3}=\frac{2\sqrt{ac}-b}{3}$ - esam ieguvuši $\frac{1}{y}$ mazāko vērtību. Tātad dotās funkcijas lielākā vērtība ir $\frac{3}{2\sqrt{ac}-b}$.

9. Piemērs. Pie kādas x vērtības funkcija $f(x)=5^{(x+1)^2}+\frac{4}{5^{(x+1)^2}+1}+2$ sasniedz mazāko vērtību?

$f(x)=5^{(x+1)^2}+1+\frac{4}{5^{(x+1)^2}+1}+1\geq 4+1=5$. Tiešām, tā kā $5^{(x+1)^2}+1>0$, tad $5^{(x+1)^2}+1+\frac{4}{5^{(x+1)^2}+1}\geq 2\cdot\sqrt{4}=4$; mazākā vērtība ir 4, kuru iegūst, ja $5^{(x+1)^2}+1=2$, $5^{(x+1)^2}=1$; 2x+1=0; $x=-\frac{1}{2}$.

10. Piemērs. Jāuzbūvē sēta ap taisnstūrveida sporta laukumu, kura platība ir 0,9 ha; divas paralēlās malas ar koka žogu, otras divas ar stiepļu žogu. Viena metra koka žoga izmaksa ir 5 Ls, stiepļu žoga - 2 Ls. Sētas celtniecībai iedalīti 1200 Ls. Vai ar šo naudas summu pietiek, lai uzbūvētu sētu, un kādiem jābūt laukuma izmēriem?

0,9 ha=9000 m^2. Laukuma malas apzīmējam ar x un y. Tad

S=xy=9000 $\Rightarrow$ $y=\frac{9000}{x}$. Žoga izmaksa

$$A = 2\cdot 2x + 2\cdot 5\frac{9000}{x} = 4x + \frac{90000}{x} \geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{90000}{x}} = 1200.$$

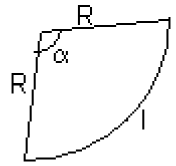
Mazākā naudas summa, kura nepieciešama, ir 1200 Ls. Ar šo naudas summu pietiek, lai uzbūvētu sētu. Noteiksim, kādiem jābūt laukuma izmēriem.

$$4x + \frac{90000}{x} - 1200 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x-300)^2}{x} \geq 0$$

Vienādība ir spēkā, ja x=150m un y=60m. Tātad īsākajām malām jābūvē stiepļu, bet garākajām - koka žogs.

11. Piemērs. Riņķa sektora perimetrs,ir p. Kādam jābūt šī sektora centra leņķim, lai sektora laukums būtu vislielākais?

Sektora perimetrs p=2R+l=2R+Rα, kur α ir centra leņķis radiānos.



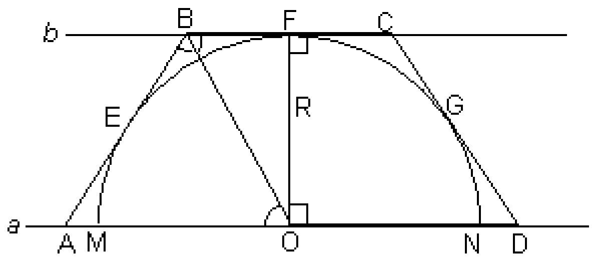
$$p=R(2+\alpha) \Rightarrow R = \frac{p}{2+\alpha}$$

Laukums sektoram $S=R^2\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{p^2}{(2+\alpha)^2}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{p^2\cdot\alpha}{2(2+\alpha)^2}$, kur $\frac{p^2}{2}$ - konstante. Tāpēc pētīsim funkciju $y = \frac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$. Šoreiz ir ērti aplūkot apgriezto funkciju

$$\frac{1}{y} = \frac{(2+\alpha)^2}{\alpha} = \frac{4+4\alpha+\alpha^2}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} + \alpha + 4 \geq 4+4 = 8.$$

Pirmajiem diviem saskaitāmajiem pielietojam sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko: $\frac{4}{\alpha} + \alpha \geq 2\sqrt{\frac{4}{\alpha}\cdot\alpha} = 4$. Funkcijai $\frac{1}{y}$ mazākā vērtība ir 8, tāpēc funkcijai y lielākā vērtība ir $\frac{1}{8}$ pie α=2 (radiāni).

12. Piemērs. Dotas divas paralēlas taisnes *a* un *b*, attālums starp tām R. Novilkts pusriņķis, kura diametrs atrodas uz *a*; tas pieskaras taisnei *b*. Noteikt vienādsānu trapeces ABCD pamatus (tie atrodas uz *a* un *b*, sānu malas pieskaras pusriņķim), tā, lai trapeces laukums būtu vismazākais.



E un G - punkti, kuros pusriņķis pieskaras trapeces sānu malām.

1) Apzīmējam BF=x; AE=y

BC un BA ir no B vilktas pieskares riņķa līnijai, tāpēc BF=BE=x

2) Novelk BO

$\angle$FBO=$\angle$BOA (iekšējie šķērsleņķi)

$\angle$ABO=$\angle$FBO (BO ir $\angle$B bisektrise).

No šejienes seko, ka $\angle$ABO=$\angle$BOA.

Tātad $\triangle$ABO ir vienādsānu, t.i., AB=AO=x+y

3) $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot R = \dfrac{2(x + y) + 2x}{2} \cdot R = (2x + y)R$ (1)

4) Ievērosim, ka AB ir pieskare; AN - sekante, tātad

$$AE^2=AM \cdot AN=(AO-OM)(AO+ON)$$

$$y^2=(x+y-R)(x+y+R)=(x+y)^2-R^2$$

$$y^2=x^2+2xy+y^2-R^2, \text{ tad } y = \frac{R^2 - x^2}{2x} \quad (2)$$

(2) ievieto (1) un iegūst

$$S = \left(2x + \frac{R^2 - x^2}{2x}\right) \cdot R = \frac{4x^2 + R^2 - x^2}{2x} \cdot R = \frac{3x^2 + R^2}{2x} \cdot R =$$

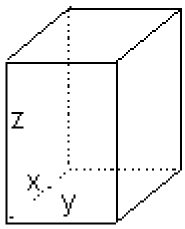
$$= \left(\frac{3x}{2} + \frac{R^2}{2x}\right) \cdot R \geq R\sqrt{3} \cdot R = R^2\sqrt{3}$$

Tā kā x>0, tad $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{R^2}{2x} \geq 2\sqrt{\dfrac{3x}{2} \cdot \dfrac{R^2}{2x}} = R\sqrt{3}$

Laukuma mazākā vērtība $S = R^2\sqrt{3}$, kuru iegūst, ja $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{R^2}{2x} \Rightarrow x = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. Tad $y = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ un trapeces pamati $BC = 2x = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$, $AD = 2(x + y) = \dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$.

13. Piemērs. Jāizgatavo taisnstūra paralēlskaldņa formas kastīte, lai tās pamata laukums būtu 2 dm^2, bet sānu virsmas laukums 18 dm^2.

Kādiem jābūt kastītes izmēriem, lai visu šķautņu garumu summa būtu minimāla?



Atšķirīgās šķautnes apzīmējam ar x,y,z. Tad pēc dotā xy=2 un 2xz+2yz=18 $\Rightarrow$ $z = \dfrac{9}{x + y}$.

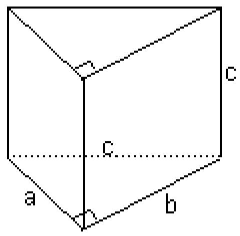
Visu šķautņu garumu summa ir

$$L = 4x + 4y + 4z = 4(x + y + z) = 4\left(x + y + \frac{9}{x + y}\right) \geq 4 \cdot 6 = 24$$

Novērtējam $x + y + \dfrac{9}{x + y} \geq 2\sqrt{(x + y) \cdot \dfrac{9}{x + y}} = 6$

Tātad šķautņu garumu summas minimālā vērtība ir 24, kuru tā sasniedz, ja x+y=3. Esam ieguvuši vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$, kuras atrisinājumi ir (2;1) vai (1;2). Tad z=3. Taisnstūra paralēlskaldņa izmēri ir 1;2;3 dm.

14. Piemērs. Taisnas prizmas pamats ir taisnleņķa trijstūris ar $2m^2$ lielu laukumu, bet prizmas augstums ir vienāds ar pamata hipotenūzas garumu. Kādiem jābūt pamata malu garumiem, lai prizmas sānu virsmas laukums būtu mazākais?



Pamata trijstūra malu garumi ir a; b; c; pēc dotā arī prizmas augstums ir c.

- pamata laukums $\frac{ab}{2} = 2 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{b}$ (1)
- pēc Pitagora teorēmas $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (2)

Nosakām sānu virsmas laukumu un tā mazāko vērtību.

$$S = ac + bc + c^2 = (a + b + c)\cdot c \overset{(2)}{=} \left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{a^2 + b^2} \overset{(1)}{=}$$

$$= \left(\frac{4}{b} + b + \sqrt{\frac{b^2}{16} + b^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{b^2}{16} + b^2} = \left(\frac{4}{b} + b + \sqrt{\left(b + \frac{4}{b}\right)^2 - 8}\right)\cdot\sqrt{\left(b + \frac{4}{b}\right)^2 - 8} = (*)$$

Laukuma vērtība būs mazākā, ja mazāko vērtību iegūs izteiksme $\frac{4}{b}+b$. Tās mazākā vērtība $\left(\frac{4}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot b} = 4\right)$ ir 4, ja b=2.

$$(*) \geq \left(4 + \sqrt{16 - 8}\right)\sqrt{16 - 8} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\ \ (m^2)$$

Pamata izmēri b=2, a=2 un $c = 2\sqrt{2}$.

15. Piemērs. Taisnas prizmas pamats ir taisnleņķa trijstūris ar 50 cm garu hipotenūzu. Prizmas sānu virsmas laukums ir 0,96 m^2. Cik garām jābūt pamata trijstūra katetēm, lai prizmas visu šķautņu garumu summa būtu mazākā?

Trijstūra malu garumus apzīmējam ar a;b;c, prizmas augstumu ar

Pēc dotā c=50 cm. Sānu virsmas laukums $\left(0{,}96m^2 = \frac{24}{25}m^2\right)$.

$$L = 2a + 2b + 2c + 3h = (2a + 2b + 1) + 3h = 2a + 2b + 1 + \frac{144}{25\left(2a + 2b + 1\right)} = (*)$$

Ievērosim, ka $\left(a + b + \frac{1}{2}\right)h = \frac{24}{25} \Rightarrow h = \frac{24}{25\left(a + b + \frac{1}{2}\right)}$

$$(*) \geq 2\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{24}{5}$$

Visu šķautņu garumu summa ir mazākā: $\frac{24}{5}$, ja $2a + 2b + 1 = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$.

Tātad esam ieguvuši vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2a + 2b + 1 = \frac{12}{5} \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{10} \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{10} \\ (a + b)^2 - 2ab = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{10} \\ ab = \frac{12}{100} \end{cases},$$ kuras

atrisinājums ir $\begin{cases} a = \frac{3}{10} m \\ b = \frac{4}{10} m \end{cases}$ vai $\begin{cases} a = \frac{4}{10} m \\ b = \frac{3}{10} m \end{cases}$.

Trijstūra katetes ir 30 cm un 40 cm garas.

Uzdevumi

1. Noteikt funkcijas 1) $y = x + \frac{5}{x}$, ja x>0, mazāko vērtību;

2) $y = x^7 + \frac{a}{x^7}$, ja a>0, x>0, mazāko vērtību.

2. Noteikt mazāko vērtību funkcijām 1) $y = x + \frac{49}{x - 2}$, ja x>2,

2) $y = 3x + \frac{180}{x - 1}$, ja x>1,

3) $y = \frac{8}{x^2} + \frac{x^2}{2}$.

3. Aprēķināt mazāko vērtību funkcijai $y = x + \frac{4}{x}$ intelvālā [4;5].

4. Pie kādas x vērtības izteiksmes $\frac{9 + \lg^2 x}{\lg x}$ vērtība ir mazākā iespējamā?

5. Aprēķināt izteiksmes $\frac{(x + 5)(x + 14)}{x}$, ja x>0, mazāko vērtību.

6. Pie kādas x vērtības daļas $\frac{a^4 + x^4}{x^2}$ vērtība ir minimālā?

7. Noteikt funkcijas $y = ax + \frac{b}{x}$ ekstrēmus.

8. Noskaidrot, pie kādas x>0 vērtības funkcijai $Q = a^2x + \frac{b^2}{x} + c$ ir vismazākā vērtība.

9. Noteikt ekstrēmus funkcijām 1) $y = \frac{x}{x^2 + 16}$, ja x>0

2) $y = \frac{x^2}{x^4 + 25}$

3) $y = \frac{x}{1 + x^2}$, ja x>0.

10. Aprēķināt funkcijas $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$, ja x>-1, mazāko vērtību.

11. Riņķa sektora laukums ir S. Kādam jābūt centra leņķim, lai sektora perimetrs būtu vismazākais?

12. No granīta jāizkaļ taisnstūra paralēlskaldnis, kura augstumam jābūt vienādam ar pamata diagonāli, bet pamata laukumam - 4m^2. Kādiem jābūt šķautņu garumiem, lai paralēlskaldņa pilnas virsmas laukums būtu mazākais?

3.§ DAŽAS SPECIFISKAS ALGEBRISKAS FUNKCIJAS

3.1. FUNKCIJA $y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$

Lai noteiktu šāda veida funkcijas ekstrēmus, palīdz prasme noteikt funkcijas vērtību apgabalu.

Doto funkcijas vienādojumu pārveidosim par kvadrātvienādojumu attiecībā pret x:
$(a_2y-a_1)x^2+(b_2y-b_1)x+(c_2y-c_1)=0$

Lai šim vienādojumam eksistētu reālas saknes, jābūt $D\geq0$.

1. Piemērs. Noteikt funkcijas $y = \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 3}$ ekstrēmus.

Jābūt $x^2-3x+3\neq0$, Tā kā D<0, tad der visi $x \in R$.

Pārveidosim funkcijas vienādojumu par kvadrātvienādojumu pret x:
$yx^2-3yx+3y=x-1$; $yx^2(3y+1)x+(3y+1)=0$

Lai šim vienādojumam būtu atrisinājumi, jābūt $D\geq0$:

$D=(3y+1)^2-4y(3y+1)=-3y^2+2y+1\geq0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq 1$

Esam aprēķinājuši funkcijas vērtību apgabalu, tāpēc $y_{min} = -\frac{1}{3}$ un $y_{max}=1$.

Noteiksim, kādām x vērtībām atbilst šīs y vērtības:

1) $y_{min} = -\frac{1}{3}$

$$\frac{x-1}{x^2-3x+3} = -\frac{1}{3}$$

$$x^2-3x+3=-3x+3$$

$$x^2=0$$

$$x=0$$

2) $y_{max}=1$

$$\frac{x-1}{x^2-3x+3}=1$$

$$x^2-3x+3=x-1$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x=2$$

Funkcija sasniedz minimumu punktā $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$, bet maksimumu punktā (2;1).

2. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ mazāko vērtību.

D.A.: $x^2+2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Rīkojoties kā iepriekš, $yx^2+2yx+y=x^2+x+1$

$$(y-1)x^2-(1-2y)x+y-1=0$$

Vienādojumam būs atrisinājumi, ja $D \geq 0$:

$D=(1+2y)^2-4(y-1)^2=4y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{4}$.

Minimālā y vērtība ir $\frac{3}{4}$.

Aprēķinām x vērtību: $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=\frac{3}{4}$

$$x^2-2x+1=0$$

$$x=1$$

Funkcijas mazākā vērtība $y_{min}=\frac{3}{4}$, ja x=1.

3. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+3}$ ekstrēmus.

D.A. $x^2-x+3 \neq 0$, $D<0$, $x \in R$

Iegūstam kvadrātvienādojumu attiecībā pret x :

$yx^2-yx+3y=x^2-x$

$(y-1)x^2+(1-y)x+3y=0$

$D=(1-y)^2-12y(y-1)=-11y^2+10y+1$

$D \geq 0 \Leftrightarrow -11y^2+10y+1 \geq 0$

Iegūstam funkcijas vērtību apgabalu $-\frac{1}{11} \leq y \leq 1$, kur $y_{min}=-\frac{1}{11}$ un $y_{max}=1$

Noteiksim atbilstošās x vērtības:

$$\frac{x^2-x}{x^2-x+3}=-\frac{1}{11} \qquad \frac{x^2-x}{x^2-x+3}=1$$

$$4x^2-4x+1=0 \qquad x^2-x=x^2-x+3$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad 0 \neq 3$$

Funkcijai maksimuma nav un minimums ir punktā $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{11}\right)$.

3.2. CITAS FUNKCIJAS

4. Piemērs. Aprēķināt funkcijas y=c-3 mazāko vērtību.

D.A.: $x\geq 5$

Ievērosim, ka aritmētiskā kvadrātsakne ir nenegatīvs lielums $\sqrt{x-5}\geq 0$, tās mazākā vērtība ir 0, tādēļ visas funkcijas mazākā vērtība ir y=0-3=-3, ja x=5.

5. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ lielāko vērtību.

D.A.: $4+x^2>0 \ \forall\, x\in R$

Izteiksmes $\sqrt{4+x^2}$ mazākā vērtība ir 2, ja x=0, tāpēc apgrieztajam lielumam $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ lielākā vērtība ir $\frac{1}{2}$, ja x=0.

6. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y=3+5\sqrt{9-x^2}$ lielāko un mazāko vērtību.

D.A.: $9-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$

$\sqrt{9-x^2}$ lielākā vērtība ir 3, ja x=0; tātad funkcijas y lielākā vērtība ir $y=3+5\cdot 3=18$

$\sqrt{9-x^2}$ mazākā vērtība ir 0, ja $x=\pm 3$; tātad funkcijas y mazākā vērtība $y=3+5\cdot 0=3$.

7. Piemērs. Aprēķināt funkcijas y=a|x+1|+b lielāko vērtību, ja tās grafiks iet caur punktiem A(2;0) un B(-2;2).

Punkti A un B pieder grafikam, tātad $\begin{cases}3a+b=0\\ a+b=2\end{cases}$ no kurienes a=-1 un b=3.

Tātad y=-|x+1|+3. Tā kā $|x+1|\geq 0$, tad $-|x+1|\leq 0$ un funkcijas lielākā vērtība ir 3, ja x=-1.

8. Piemērs. Aprēķināt funkcijas z=y-2x lielāko un mazāko vērtību, ja $36x^2+16y^2=9$.

$y=z+2x \Rightarrow 36x^2+16(z+2x)^2=9$

$36x^2+16(z^2+4xz+4x^2)-9=0$

$100x^2+64xz+16z^2-9=0$

Esam ieguvuši kvadrātvienādojumu pret x; tam būs atrisinājums, ja $D\geq 0$.

$D=(64z)^2-4\cdot 100(16z^2-9)=16\cdot 9(25-16z^2)\geq 0$

Atrisinot nevienādību $25-16z^2\geq 0$, iegūstam, ka iespējamās z vērtības ir $-\frac{5}{4}<z<\frac{5}{4}$, tātad mazākā z vērtība ir $-\frac{5}{4}$, lielākā $\frac{5}{4}$.

Aprēķināsim, kādas ir atbilstošās x un y vērtības:

$$x=\frac{-64z\pm 4\cdot 3\sqrt{25-16z^2}}{200}$$

ja $z=-\frac{5}{4}$, tad $x=\frac{2}{5}$ un $y=-\frac{9}{20}$

ja $z = \frac{5}{4}$, tad $x = -\frac{2}{5}$ un $y = \frac{9}{20}$

9. Piemērs. Skaitļi x, y un z ir tādi, ka $x^2+3y^2+z^2=2$. Kāda ir lielākā iespējamā izteiksmes 2x+y-z vērtība?

Apzīmējam 2x+y-z=a un izsakām z=2x+y-a.

Tad $x^2+3y^2+(2x+y-a)^2=2$; vienādojumu pārveidojam par kvadrātvienādojumu pret y:

$4y^2+2(2x-a)y+5x^2+a^2-4ax-2=0$

Lai būtu atrisinājumi, tad jābūt $D \geq 0$:

$D=4(2x-a)^2-16(5x^2+a^2-4ax-2)=4(-16x^2+12ax-3a^2+8) \geq 0$

Tātad $16x^2-12ax+3a^2-8 \leq 0$. Lai šai nevienādībai eksistētu atrisinājums, jābūt $D \geq 0$:

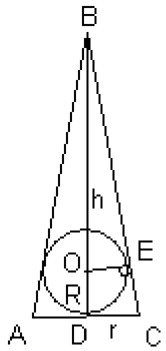
$D=144a^2-64(3a^2-8)=-48a^2+512 \geq 0$

$-12a^2+128 \geq 0$

$a \leq \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Tātad izteiksmes a=2x+y-z lielākā iespējamā vērtība ir $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

10. Piemērs. Kāds ir mazākais tilpums konusam, kuru var apvilkt ap lodi ar rādiusu R?



Apzīmējam DC=r; BD=h.

1) ΔDBC ~ΔEBO (ll). Tāpēc $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EO}$.

2) Aprēķinām BE $\Rightarrow$ ΔDBC, $BC = \sqrt{h^2 + r^2}$

DC=EC=r

$BE = BC - \sqrt{h^2 + r^2} - r$

$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2} - r}{R}$

$hR = r\sqrt{h^2 + r^2} - r^2$

$hR + r^2 = r\sqrt{h^2 + r^2}$

Kāpinām kvadrātā un izsakām r^2:

$h^2R^2+2Rhr^2+r^4=r^2(h^2+r^2)$

$h^2R^2=r^2h^2-2Rhr^2$

$r^2 = \frac{h^2R^2}{h^2 - 2hR} = \frac{hR^2}{h - 2R}$

Konusa tilpums $V = \frac{1}{3} r^2 h\pi = \frac{h^2 R^2 \pi}{3(h-2R)}$. Tā kā $\frac{\pi}{3}$ ir konstante, tad aplūkojam funkciju $y = \frac{h^2 R^2}{h-2R}$. Pārveidosim to par kvadrātfunkciju pret h: $R^2h^2 - yh + 2Ry = 0$.

Jābūt $D = y^2 - 8R^3 y \geq 0$. Iegūstam $y \leq 0$ (neder) vai $y \geq 8R^3$. Minimālā funkcijas vērtība $y = 8R^3$. Noteiksim, pie kāda h tas izpildās: $8R^3 = \frac{h^2R^2}{h-2R}$, $h^2 - 8Rh + 16R^2 = 0$, $h = 4R$.

Tātad mazākais iespējamais konusa tilpums ir $V = \frac{1}{3} 8R^3 \pi = \frac{8}{3} R^3 \pi$.

Uzdevumi

1. Noteikt funkcijas 1) $y = \frac{x}{1+x^2}$, 2) $y = \frac{4x}{x^2+9}$ ekstrēmus.

2. Aprēķināt funkcijas $y = \frac{x}{1+x+x^2}$ vērtību apgabalu un tās maksimumu.

3. Noteikt funkcijas $y = \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$ mazāko vērtību.

4. Atrast izteiksmes $y = \frac{x^2+5x+4}{x}$ mazāko vērtību, ja $x > 0$.

5. Aprēķināt funkcijas $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$ mazāko vērtību, ja $0 < x < 1$.

6. Aprēķināt funkcijas $y = 5 - 3\sqrt{x-2}$ lielāko vērtību,

$y = 4\sqrt{1-x^2} + 3$ lielāko un mazāko vērtību,

$y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$ mazāko vērtību.

7. Noteikt mazāko no x vērtībām, kurām eksistē tādas y un z vērtības, ka $x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1$.

8. Aprēķināt funkcijas $y=a|x-2|+b$ lielāko vērtību, ja tās grafiks iet caur punktiem A(1;-4) un B(2;1).

9. Noteikt funkcijas $y=|2x+b|+a$ mazāko vērtību, ja tās grafiks krusto 0x asi punktos -3 un 1.

4. § TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS.

4.1. DAŽĀDI PIEMĒRI.

1. Piemērs. Noteikt funkcijas $y = \sin^2 x + \sin x + 1$ lielāko un mazāko vērtību.

Ievērosim, ka dotā funkcija ir kvadrātfunkcija un tāpēc atdalīsim pilno kvadrātu.

$$y = \sin^2 x + \sin x + 1 = (\sin 2x + 2\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + 1 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

* Funkcija sasniegs mazāko vērtību $\frac{3}{4}$, ja $\sin x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y_{min} = \frac{3}{4}$

* Noteiksim funkcijas lielāko vērtību – to iegūsim, ja pirmais saskaitāmais būs lielākais. Izmantosim funkcijas y= *sin*x vērtību apgabalu ($-1 \le \sin x \le 1$). Tā kā meklējam lielāko vērtību, tad

$$\sin x \le 1$$

$\sin x + \frac{1}{2} \le \frac{3}{2}$ tā kā nevienādības abas puses ir nenegatīvas, tad

$$\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$$

$\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \le \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$. Funkcijas lielākā vērtība ir 3.

2. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $f(x)=2\sin x+\cos 2x+3$ lielāko vērtību intervālā $[0; \pi]$.

Pārveidosim funkciju par kvadrātfunkciju un atdalīsim pilno kvadrātu

$$f(x)= 2\sin x+\cos 2x+3= -2\sin^2 x+2\sin x+4 = -2(\sin^2 x-\sin x-2)=$$

$$= -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}.$$

Funkcija iegūst lielāko vērtību $\frac{9}{2}$, ja $\sin x = \frac{1}{2}$.

Pārliecināsimies, kādas ir funkcijas vērtības intervāla galapunktos x=0 un $x=\pi$:

1) x=0, tad $f(0)= 2\sin 0+\cos 2\cdot 0+3=4$,

2) $x=\pi$, tad $f(\pi)= 2\sin\pi+\cos 2\cdot\pi+3=4$. $4 < \frac{9}{2}$.

Tātad funkcijas lielākā vērtība ir $\frac{9}{2}$.

3. Piemērs. Atrast funkcijas $f(x)=\cos^2 x-2\sin x$ mazāko vērtību intervālā $[0; \pi]$.

$$f(x)=\cos^2 x-2\sin x= -\sin^2 x-2\sin^2 x+1= -(\sin x+1)^2+2.$$

No šī pār-veidojuma acīmredzami var nolasīt funkcijas lielāko vērtību 2.

Funkcija pieņems mazāko vērtību, ja $(\sin x+1)^2$ būs vislielākais.

Lielākā *sin*x vērtība ir 1: $\sin x=1$, tad $(\sin x+1)^2=2^2=4$ un funkcijas mazākā vērtība ir $-4+2= -2$.

Salīdzināsim to ar funkcijas vērtībām intervāla galapunktos x=0 un $x=\pi$.

$f(0)=cos^2 0-2sin 0=1$ un $f(\pi)=cos^2\pi-2sin\pi=(-1)^2=1$.

Funkcijas mazākā vērtība ir –2.

4. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=sin x\cdot cos^3 x-sin^3 x\cdot cos x$ lielāko vērtību.

$$y=sin x\cdot cos^3 x-sin^3 x\cdot cos x=sin x\cdot cos x(cos^2 x-sin^2 x)=\frac{1}{2}sin 2x\cdot cos 2x=\frac{1}{4}sin 4x.$$

Tā kā vērtību apgabals ir $-1 \le sin 4x \le 1$, tad dotās funkcijas lielākā vērtība ir $\frac{1}{4}$.

5. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$ mazāko vērtību.

1. paņēmiens. Apzīmējam $\sin^2 x=a$

$$y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}=\frac{1}{a-a^2};$$

aplūkojam apgriezto funkciju $\frac{1}{y}=a-a^2=-(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$. Šīs funkcijas lielākā vērtība ir $\frac{1}{4}$, ja $a=\frac{1}{2}$; tāpēc apgrieztajam liekumam pie tās pašas a vērtības ir mazākā vērtība 4.

2.paņēmiens. Izmantojam pakāpes pazemināšanas sakarības $(1+cos 2\alpha=2cos^2\alpha,\ 1-cos 2\alpha=2sin^2\alpha)$

$$y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2}{1-\cos 2\alpha}+\frac{2}{1+\cos 2\alpha}=\frac{4}{1-\cos^2 2\alpha}\ge 4$$

Ievērosim, ka $0 \le 1-cos^2 2\alpha \le 1$ un daļas mazākā vērtība ir 4.

3. paņēmiens. $y=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{(\sin 2x)^2}\ge 4$

6. Piemērs. Noteikt funkcijas $\cdot\ y=\sin 2x\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ lielāko vērtību. Kādām x vērtībām tā atbilst?

Pārveidosim funkciju izmantojot sakarību

$$sin\alpha\cdot sin\beta=\frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta))$$

$$y=sin 2x\cdot sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}(cos\frac{\pi}{6}-cos(4x-\frac{\pi}{6}))=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}cos(4x-\frac{\pi}{6}).$$

Funkcijas vērtība būs vislielākā, ja $cos(4x-\frac{\pi}{6})$ būs vismazākais, t. i.,

$$cos(4x-\frac{\pi}{6})=-1 \Rightarrow y_{max}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}(-1)=\frac{\sqrt{3}+2}{4}.$$

To sasniedz, ja $cos(4x-\frac{\pi}{6})=-1,\ 4x-\frac{\pi}{6}=\pi+2\pi n$ un $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

7. Piemērs. Noteikt tos vienādojuma $4\sin x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$ atrisinājumus, ar kuriem izteiksmes $1-6x-x^2$ vērtība būtu vislielākā.

Aprēķināsim izteiksmes $1-6x-x^2$ to x vērtību, pie kuras tās vērtība ir lielākā:

$1-6x-x^2=-(x+3)^2+10$. Izteiksmes lielākā vērtība ir 10; izteiksme to iegūst, ja $x=-3$, un vērtība samazinās, $|x+3|$ pieaugot.

Atrisinām vienādojumu $4\sin x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$. Izmantojam sakarību

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta \Rightarrow 2(\frac{1}{2}-\cos(2x+\frac{\pi}{3}))=1$$

$$\cos(2x+\frac{\pi}{3})=0$$

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z.$$

Viegli pārbaudīt, ka skaitlim (–3) tuvākā vērtība no šiem ir $\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$.

8. Piemērs. Aprēķināt izteiksmes *sin*x+*cos*x mazāko vērtību.

$$\sin x+\cos x=$$

$$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}).$$

$\sin(x+\frac{\pi}{4})$ mazākā vērtība ir –1, tātad izteiksmes mazākā vērtība ir $-\sqrt{2}$.

9. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=3\sin x+3\cos x-4\sin x\cos x$ lielāko vērtību.

Pieskaitām un atņemam $2\sin^2 x$ un $2\cos^2 x$:

$$y=3\sin x+3\cos x-4\sin x\cos x=3(\sin x+\cos x)-4\sin x\cos x-2\sin^2 x-$$
$$-2\cos^2 x+2\sin^2 x+2\cos^2 x=3(\sin x+\cos x)-$$
$$-2(\sin x+\cos x)^2+2(\sin^2 x+\cos^2 x)=$$
$$=-2(\sin x+\cos x)^2+3(\sin x+\cos x)+2.$$

Apzīmē *sin*x+*cos*x=a. Tad $y=-2a^2+3a+2$; esam ieguvuši kvadrātfunkciju, kura sasniedz lielāko vērtību, ja $a=\frac{3}{4}$. Viegli saprast, ka *sin*x+*cos*x var pieņemt šādu vērtību. Tāpēc y lielākā vērtība ir $y=-2\frac{9}{16}+\frac{9}{4}+2=\frac{25}{8}$.

10. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y=\sin^2 x\,\mathrm{tg}x+\cos^2 x\,\mathrm{ctg}x+\sin 2x$ ekstrēmus.

DA: $x\neq\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

Pārveidojam $y=\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}+2\sin x\cos x=$

$$=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

Maksimālā vērtība lielumam *sin*2x ir 1, tāpēc y sasniedz lokālos minimumus 2, ja $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

Minimālā vērtība lielumam *sin*2x ir –1, tāpēc y sasniedz lokālos maksimumus –2, ja $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

11.Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y = \frac{\sin^2 x - 4\sin x + 5}{3 - 2\sin x}$ mazāko vērtību.

DA: $x \in R$.

Pareizina skaitītāju un saucēju ar 4:

$$y = \frac{4\sin^2 x - 16\sin x + 20}{4(3 - 2\sin x)} = \frac{(3 - 2\sin x)^2 - 4\sin x + 6 + 5}{4(3 - 2\sin x)} =$$

$$= \frac{(3 - 2\sin x)^2 + 2(3 - 2\sin x) + 5}{4(3 - 2\sin x)} = \frac{3 - 2\sin x}{4} + \frac{5}{4(3 - 2\sin x)} + \frac{1}{2}$$

Ievērojam, ka 3–2sinx>0, tāpēc pirmajiem diviem saskaitāmajiem pielietojam sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\frac{3 - 2\sin x}{4} + \frac{5}{4(3 - 2\sin x)} \geq 2\sqrt{\frac{(3 - 2\sin x)}{4} \cdot \frac{5}{4(3 - 2\sin x)}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Funkcijas mazākā vērtība ir $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

12. Piemērs. Noteikt izteiksmes $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha\sin\beta}$ lielāko un mazāko vērtību .

DA: $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq -1$.

1) Tā kā $\sin\alpha \leq 1$, tad $(1 - \sin\alpha)(1 - \sin\beta) \geq 0$

$$1 - \sin\alpha - \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta \geq 0$$

$$1 + \sin\alpha\sin\beta \geq \sin\alpha + \sin\beta$$

Ievērojam, ka $1 + \sin\alpha\sin\beta > 0$, tāpēc ar to, izdalot nevienādības abas puses, iegūstam $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha\sin\beta} \leq 1$. (1)

2) Līdzīgi $\sin\alpha \geq -1$ un $\sin\beta \geq -1$, tad

$$(1 + \sin\alpha)(1 + \sin\beta) \geq 0$$

$$1 + \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta \geq 0$$

$$\sin\alpha + \sin\beta \geq -(1 + \sin\alpha\sin\beta).$$

Dalam abas nevienādības puses ar $1 + \sin\alpha\sin\beta > 0$, iegūstam

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha\sin\beta} \geq -1. \ (2)$$

Aplūkojam rezultātus (1) un (2): $-1 \leq \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha\sin\beta} \leq 1$. Esam ieguvuši, ka izteiksmes mazākā vērtība ir –1 (ja $\alpha = 0 + 2\pi n$; $\beta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$) un lielākā vērtība ir 1 (ja $\alpha = 0 + 2\pi n$; $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$); n, $k \in Z$.

13. Piemērs. Kādam šauram leņķim α izteiksmei $T = \sin^2\alpha\cos\alpha$ ir vislielākā vērtība?

T sasniegs lielāko vērtību, ja T^2 pieņems lielāko vērtību:

$T^2=\sin^4\alpha\cos^2\alpha=\sin^4\alpha(1-\sin^2\alpha)$. T^2 sasniegs lielāko vērtību, ja $4T^2$ būs vislielākais:

$$4T^2=4\sin^4\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$$4T^2=4\frac{\sin^2\alpha}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2}(1-\sin^2\alpha)$$

Summa $\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{2}+1-\sin^2\alpha=1$, tāpēc lielāko vērtību sasniegs, ja

$$\frac{\sin^2\alpha}{2}=1-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha=\frac{2}{3},\ \text{tad}\ \cos^2\alpha=\frac{1}{3}.$$

Iegūstam $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2$, $tg^2\alpha=2$, $tg\alpha=\sqrt{2}$ (jo α šaurs) $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

14. Piemērs. Noteikt lielāko vērtību funkcijai $y=\sin^3x-\sin^6x$.

$y=\sin^3(1-\sin^3)$. Tā kā $\sin^3x+1-\sin^3x=1$, tad funkcija sasniegs lielāko vērtību, ja

$$\sin^3x=1-\sin^3x$$

$$2\sin^3x=1$$

$$\sin^3x=\frac{1}{2}\ \text{un}\ y=\frac{1}{4}.$$

4.2. FUNKCIJA Y=A·COSX+B·SINX

Lai noteiktu funkcijas $y=a\cdot\cos x+b\cdot\sin x$ lielāko un mazāko vērtību, izmanto palīglenķi, t.i.,

1) aprēķina $\sqrt{a^2+b^2}$,

2) izteiksmi reizina un dala ar $\sqrt{a^2+b^2}$. Tiešām,

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cdot\cos x+\cos\alpha\cdot\sin x)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\alpha),$$

kur $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ un $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Šī funkcija sasniedz lielāko vērtību $y_{max}=\sqrt{a^2+b^2}$, ja $\sin(x+\alpha)=1$, un mazāko vērtību $y_{min}=-\sqrt{a^2+b^2}$, ja $\sin(x+\alpha)=-1$.

15. Piemērs. Noteikt izteiksmes A=3sinx-4cosx lielāko un mazāko vērtību.

$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$A=5\cdot(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x)=5(\cos\alpha\cdot\sin x-\sin\alpha\cdot\cos x)=5\cdot\sin(x-\alpha),$$

kur $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ un $s\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

A lielākā vērtība ir 5, ja sin(x-α)=1, un mazākā vērtība ir -5, ja sin(x-α)=-1.

16. Piemērs. Noteikt funkcijas y=5sinx-12cosx vērtību apgabalu.

$$\sqrt{5^2+12^2}=13$$

$$y=13\cdot\left(\frac{5}{13}\cdot\sin x-\frac{12}{13}\cdot\cos x\right)=13\cdot\sin(x-\alpha)$$

y lielākā vērtība ir 13, mazākā vērtība ir -13. Tātad y∈[-13;13].

4.3. FUNKCIJA Y=A*COS*²X+B*SIN*X·*COS*X+C*SIN*²X

Izmantojot pakāpes pazemināšanu un formulu sin2x=2sinx·cosx, iegūstam

$$y=a\cos^2x+b\sin x\cdot\cos x+c\sin^2x=a\frac{1+\cos 2x}{2}+b\frac{\sin 2x}{2}+c\frac{1-\cos 2x}{2}=$$

$$=\frac{a}{2}+\frac{a\cos 2x}{2}+\frac{b\sin 2x}{2}+\frac{c}{2}-\frac{c\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(a+c+(a-c)\cos 2x+b\sin 2x)$$

Apzīmē y_1=(a-c)*cos*2x+b*sin*2x un noteiksim tās lielāko un mazāko vērtību:

$$y_1=\sqrt{(a-c)^2+b^2}\left(\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}\cos 2x+\frac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}\sin 2x\right)=$$

$$=\sqrt{(a-c)^2+b^2}\sin(2x+\alpha)$$

Tāpēc

$$y=\frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\sin(2x+\alpha)\right).$$

Ja sin(2x+α)=1, tad $y_{max}=\frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)$;

ja sin(2x+a)=-1, tad $y_{min}=\frac{1}{2}\left(a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)$.

17. Piemērs. Aprēķināt izteiksmes B=3*sin*²x+4*sin*x·*cos*x+*cos*²x lielāko un mazāko vērtību.

$$B=\frac{3(1+\cos 2x)}{2}+2\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3\cos 2x}{2}+2\sin 2x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}=$$

=2+2*sin*2x-*cos*2x

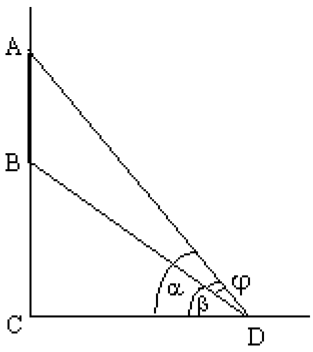
$$C=2\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right)=\sqrt{5}\sin(2x-\alpha)$$

Tāpēc B=2+$\sqrt{5}$ *sin*(2x-α)

Ja sin(2x-α)=1, tad C lielākā vērtība ir $\sqrt{5}$ un B lielākā vērtība ir $2+\sqrt{5}$;

ja sin(2x-α)=-1, tad C mazākā vērtība ir $-\sqrt{5}$ un B mazākā vērtība ir $2-\sqrt{5}$.

18. Piemērs. Uz vienas taisnā leņķa malas ir dots nogrieznis AB. Aprēķināt, cik tālu uz otras leņķa malas ir jāatzīmē punkts, lai AB no tā būtu redzams vislielākajā leņķī.



Pieņemam, ka meklētais punkts ir D
Apzīmējam BC=a; AC=b; CD=x

$\angle$ADC=α; $\angle$ BDC=β
Tad $\angle$ADB=α-β=φ.

Aprēķināsim tgφ un izmantosim īpašību: jo lielāks tgφ, jo lielāks φ (φ šaurs leņķis).

No ΔBCD tgβ=$\frac{a}{x}$; no ΔACD tgα=$\frac{b}{x}$

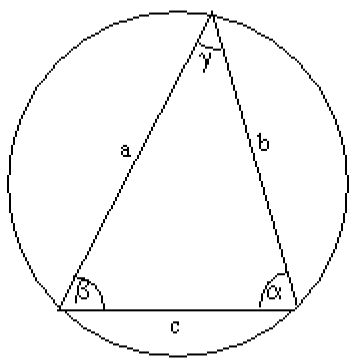
$$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}\cdot\frac{a}{x}}=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

Daļas vērtība ir vislielākā, ja saucējs ir vismazākais. Tāpēc noskaidrosim, kādām x vērtībām saucējs ir mazākais:

$$x+\frac{ab}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}}=2\sqrt{ab}$$

Saucēja vērtība ir vismazākā, ja $x=\sqrt{ab}=\sqrt{CB\cdot AC}$, pie kuras tgφ un tātad arī φ būs lielākais.

19. Piemērs. Riņķī ievilkts trijstūris. Kādā gadījumā malu kvadrātu summa ir vislielākā ?



Izmantosim sinusu teorēmu

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

a=2R*sin*α; b=2R*sin*β; c=2R*sin*γ

Mums jāaprēķina
$a^2+b^2+c^2=4R^2 sin^2\alpha+4R^2 sin^2\beta+4R^2 sin^2\gamma= =4R^2(sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2\gamma)=*$
Ievērosim, ka α+β+γ=π, y=π-(α+β) un $sin^2(\pi-(\alpha+\beta))=sin^2(\alpha+\beta)$. Tāpēc
$*=4R^2(sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2(\alpha+\beta))=$

$$= 4R^2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + 1 - \cos^2(\alpha+\beta)\right) =$$

$$=4R^2\left(1-\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}+1-cos^2(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=4R^2(2-cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)-cos^2(\alpha+\beta))=$$

(atdalīsim pilno kvadrātu)

$$=4R^2\left(2-\left(cos^2(\alpha+\beta)+2\cdot\frac{1}{2}cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{4}cos^2(\alpha-\beta)\right)+\frac{1}{4}cos^2(\alpha-\beta)\right)=$$

$$=4R^2\left(2-\left(cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}cos(\alpha-\beta)\right)^2+\frac{1}{4}cos^2(\alpha-\beta)\right)$$

Iekavu vērtība būs lielākā, ja $cos^2(\alpha-\beta)=1$ un $cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}cos(\alpha-\beta)=0$.

Ja $cos^2(\alpha-\beta)=1$, tad $cos(\alpha-\beta)=1$

$$\alpha-\beta=0$$

$$\alpha=\beta$$

Tātad $cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}cos(\alpha-\beta)=0$

$$cos2\alpha+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow cos2\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$2\alpha=\frac{2\pi}{3}\ ;\ \alpha=\frac{\pi}{3}\ ;\ \text{tad } \beta=\frac{\pi}{3} \text{ un } \gamma=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Vislielākā malu kvadrātu summa ir vienādmalu trijstūrim.

Uzdevumi.

1. Atrast funkcijas $f(x)=2cosx-sin^2x$ lielāko vērtību.

2. Noteikt funkcijas a) $f(x)=sin^2x-3sinx$ mazāko vērtību,
b) $f(x)=sinx-cos^2x-1$ mazāko vērtību,
c) $f(x)=4sinx-cos^2x+4$ lielāko vērtību,
d) $f(x)=2cos^2x-cosx-1$ mazāko vērtību,
e) $f(x)=cos2x+3sinx+4$ lielāko un mazāko vērtību,
f) $f(x)=sin^2x+cosx-\frac{1}{2}$ lielāko un mazāko vērtību.

3. Aprēķināt lielāko un mazāko vērtību funkcijai:
1) $y=sin^4x+cos^4x$
2) $y=sin^6x+cos^6x$

4. Noteikt izteiksmes $cosx+sinx$ lielāko vērtību.

5. Aprēķināt lielāko un mazāko vērtību izteiksmēm
a) $\sqrt{2}\,sin\alpha+\sqrt{2}\,cos\alpha$
b) $\sqrt{3}\,cos\alpha-sin\alpha$
c) $\sqrt{3}\,sin\alpha-cos\alpha$
d) $\sqrt{2}\,cos\alpha-\sqrt{2}\,sin\alpha$

e) $\frac{2-7\cos\alpha}{10}$

6. Aprēķināt izteiksmes $(\sin x+\cos x)^3+\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$ mazāko vērtību.

7. Aprēķināt funkcijas $y=(\sin x+\cos x)^2$ vērtību kopu.

8. Aprēķināt funkcijas a) $y=6\cos x+8\sin x$

b) $y=3\sin 3x+7\cos 3x+\sqrt{2}$

vērtību apgabalu.

9. Noteikt funkcijas $y=2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x+5$ ekstrēmus.

10. Aprēķināt funkcijas $y=\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$ vērtību apgabalu.

11. Aprēķināt $\sin^2\alpha$, lai izteiksmei $\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha$ būtu vislielākā iespējamā vērtība.
12. Noteikt lielāko vērtību funkcijai $y=-\cos^4 x+\cos^2 x$.

13. Atrast funkcijas a) $y=3^{\sin x}$

b) $y=-\log_4\cos x$

lielāko un mazāko vērtību.

14. Atrast funkcijas $\log_2(\cos^2 2x+5\cos^2 x+6)$ lielāko vērtību.

15. Noteikt funkcijas $f(x)=\frac{1}{x^2+4\pi x+41}+\cos x$ lielāko vērtību.

16. Noteikt izteiksmes $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ lielāko un mazāko vērtību.

17. Atrast funkcijas $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}$ vērtību apgabalu.

5.§ EKSTRĒMU ATRAŠANA, PAMATOJOTIES UZ VISPĀRĪGO NEVIENĀDĪBU STARP VIDĒJO ARITMĒTISKO UN VIDĒJO ĢEOMETRISKO

Labi pazīstama ir tā sauktā Košī nevienādība:
ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - pozitīvi skaitļi, tad

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

pie tam vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Plaši pazīstams tās speciālgadījums diviem pozitīviem skaitļiem:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Parādīsim, kā atrod ekstrēmus, balstoties uz šīm teorēmām.

Teorēma. Divu pozitīvu skaitļu reizinājums, kuru summa ir konstants skaitlis, ir vislielākais, ja abi reizinātāji ir vienādi.

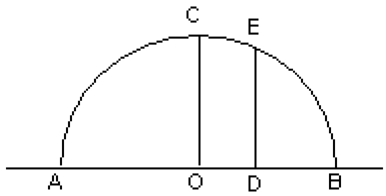
1. pierādījums. Pieņemam, ka S ir abu skaitļu summa, ja x - viens reizinātājs, tad otrs ir S-x.

Aplūkojam reizinājumu $x(S-x)=-x^2+Sx$. Šis kvadrātrinoms sasniedz lielāko vērtību, ja $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{S}{-2} = \frac{S}{2}$ un $S - x = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}$, tātad, ja abi reizinātāji ir vienādi.

Un šī reizinājuma $-x2 + Sx = -\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{S^2}{4}$ lielākā vērtība ir $\frac{S^2}{4}$.

2. pierādījums. Aplūkosim identitāti $xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$. Ja summa x+y ir konstants skaitlis, tad lielāko vērtību sasniegs, ja $(x-y)^2$ būs pēc iespējas mazāks. Bet, tā kā $(x-y)^2 \geq o$, tad tā mazākā iespējamā vērtiba ir pie x-y=0, t.i., ja x=y.

3. pierādījums. Atliek uz taisnes nogriezni AB=x+y=S un konstruē pusrinķi, kam AB ir diametrs.



Atliek $OC \perp AB$; $AO = OB = OC = \frac{S}{2}$; ΔABC - taisnleņlķa, $OC^2 = AO \cdot OB = \frac{S^2}{4}$. Novelk DE||OC; $AD=x_1$ un $DB=y_1$. Tad $AD \cdot DB=DE^2$, bet DE<OC.

Šo teorēmu var vispārināt arī patvaļīgam skaitam reizinātāju.

Teorēma. Vairāku pozitīvu skaitļu reizinājums $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, ja šo reizinātāju summa $x_1+x_2+...+x_n=S$ ir konstanta, sasniedz lielāko vērtību $\left(\frac{S}{n}\right)^n$, ja visi skaitļi ir vienādi.

Tas ir tiešs secinājums no Košī nevienādības.

1. Piemērs. Noteikt funkcijas lielāko vērtību

a) y=x(5-x)

Ievērosim, ka abu reizinātāju summa ir konstants skaitlis x+5- -x=5, tāpēc funkcija sasniegs lielāko vērtību, ja abi reizinātāji vienādi: $x=5-x \Rightarrow 2x=5$

$$x=\frac{5}{2} \text{ un y lielākā vērtiba } y=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}.$$

b) y=x(3-2x)

Lai y būtu lielākā vērtība, ari 2y jābūt lielākajai vērtībai: 2y=2x(3-2x) => 2x+3-2x=3, tāpēc lielākā vērtība ir, ja 2x=3-2x; tad $x=\frac{3}{4}$ un $y=\frac{3}{4}\left(3-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}$.

c) y=x(4-nx)

y sasniegs lielāko vērtību, ja arī ny sasniedz lielāko vērtību: ny=nx(4-nx) $\Rightarrow$ nx+4-nx=4, tāpēc nx=4-nx, 2nx=4, $x=\frac{2}{n}$ un $y=\frac{2}{n}\left(4-\frac{2n}{n}\right)=\frac{4}{n}$

d) $y=x^2(9-x^2)$

$x^2+9-x^2=9$, tāpēc $x^2=9-x^2$, $x^2=\frac{9}{2}$, $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ un y lielākā y vērtība ir $y=\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{81}{4}$.

e) $y=x^2(9-5x^2)$

y sasniegs lielāko vērtību, ja arī 5y sasniegs lielāko rērtību: 5y=5 $x^2(9-5x^2)$ => $5x^2+9-5x^2=9$, tāpēc $5x^2=9-5x^2$, $x^2=\frac{9}{10}$ un lielākā vērtība $y=\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{2}=\frac{81}{20}$.

f) $y=x^2\sqrt{a^2-x^2}$

y sasniegs lielāko vērtību pie tās pašas x vērtības, kur y^2: $y^2=x^4(a^2-x^2)$ un y^2 sasniegs lielāko vērtību, ja $\frac{1}{4}y^2$ sasniegs lielāko vērtību: $\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{4}x^4(a^2-x^2)$, $\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{2}x^2\ \frac{1}{2}x^2(a^2-x^2)$. Ievērosim, ka $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2+a^2-x^2=a^2$, tāpēc lielākā vērtība būs, ja $\frac{1}{2}x^2=a^2-x^2$, $\cdot x^2=\frac{2a^2}{3}$, $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ un $y=\frac{2a^2}{3}\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{3}}=\frac{2a^2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{3}}=\frac{2a^2|a|}{3\sqrt{3}}$.

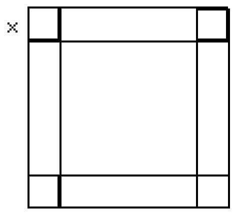
2. Piemērs. Aprēķināt izteiksmes $A=x^3y$ lielāko vērtību, ja x+y=a.

Izsakot y=a-x, iegūstam $A=x^3y=x^3(a-x)$. A sasniegs lielāko vētību, ja arī 3A sasniegs lielāko vērtību: 3A=x·x·x·3(a-x).

Ievērosim, ka x+x+x+3(a-x)=3a, tāpēc lielākā vērtība izteiksmei būs, ja x=3(a-x):

$$x=\frac{3a}{4},\ y=a-\frac{3a}{4}=\frac{a}{4} \text{ un } A=\frac{27a^3}{64}\cdot\frac{a}{4}=\frac{27a^4}{256}.$$

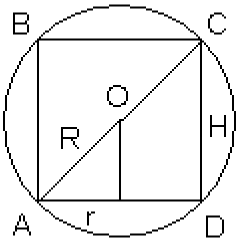
3. Piemērs. Kvadrātveida skārda loksnei ar malas garumu 6 no stūriem izgriezti vienādi kvadrāti un malas atlocītas, izveidojot kārbiņu bez vāka. Kādam jābūt izgrieztā kvadrāta malas garumam, lai kārbas tilpums būtu vislielākais?



Apzīmējam nogrieztā kvadrātiņa malas garumu ar x, tad kārbiņas pamata malas garums ir 6-2x un tilpums $V=(6-2x)^2x$. V būs lielākais.tad, ja arī 4V būs vislielākais: $4V=4(6-2x)^2x$.

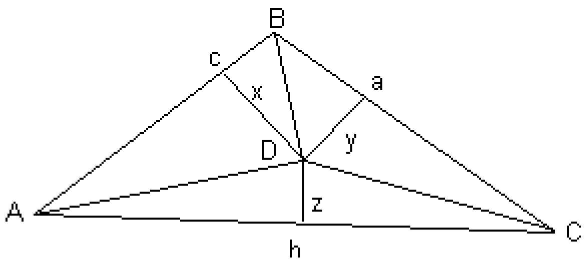
Summa 4x+(6-2x)+(6-2x)=12 ir konstanta, tāpēc V būs lielākais, ja 4x=6-2x, x=1 un V=16.

4. Piemērs. Lodē ar rādiusu R ievilkts cilindrs. Aprēķināt tā cilindra izmērus, kura sānu virsmas laukums ir lielākais.



Apzīmējam cilindra pamata rādiusu ar r un augstumu ar H. $(2R)^2=(2r)^2+H^2$ => $H=2\sqrt{R^2-r^2}$. Cilindra sānu virsmas laukums $S=2\pi rH=2r\pi\sqrt{R^2-r^2}$. Bet 2π ir konstante, tāpēc aplūkosim funkciju $y=r\sqrt{R^2-r^2}$; y būs lielākā vērtība, ja y^2 būs lielākā vērtība: $y^2=r^2(R^2-r^2)$. Abu reizinātāju summa ir $r^2+R^2-r+2=R^2$ - konstante, tāpēc funkcijas lielākā vērtība būs, ja $r+2=R^2-r^2$, $r^2=\frac{R^2}{2}$ un $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$; $H=\sqrt{2}R$.

5. Piemērs. Noteikt, kur trijstūra iekšpusē atrodas punkts, kura attālumu līdz malām reizinājums ir lielākais.



Pieņemsim, ka meklētais punkts ir D un attālumi no tā līdz trijstūra malām ir x; y; z.

Savienojam D ar trijstūra virsotnēm un aprēķinām $S_{ABC}=S_{ADB}+S_{BCD}+S_{ADC}$

$$S_{ABC}=\frac{cx}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{bz}{2}$$

2S=cx+ay+bz.

Tātad summa cx+ay+bz ir konstante 2S, tāpēc reizinājums $cx\cdot ay\cdot bz$ būs lielākais, ja visi saskaitāmie ir vienādi: $cx = ay = bz = \frac{2S}{3}$, tātad $x = \frac{2S}{3c} = \frac{2ch_c}{3c\cdot 2} = \frac{h_c}{3}$; $y = \frac{h_a}{3}$; $z = \frac{h_b}{3}$.

Tātad meklējamais punkts D ir mediānu krustpunkts.

Teorēma. Vairāku pozitīvu skaitļu summa, kuru reizinājums ir konstante, ir vismazākā, ja visi skaitļi ir vienādi.

Teorēmu var pierādīt līdzīgi paragrāfa sākumā dotajai teorēmai, kā arī, tieši atsaucoties uz to.

Viens pierādījums divu skaitļu gadījumā balstās uz identitāti $x + y = \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}$.

Citus pierādījumus atrodiet patstāvīgi.

6. Piemērs. Aprēķināt mazāko vērtību funkcijai

a) $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$

Ievērojam, ka $x\cdot\frac{1}{x} = 1$, tāpēc funkcija savu mazāko vērtību iegūs, ja abi saskaitāmie vienādi: $x = \frac{1}{x}$, $x^2=1$, $x=1$ (jo $x > 0$). Tātad mazākā vērtība ir $y=2$.

b) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$

Ievērosim, ka $\frac{x^2}{4}\cdot\frac{4}{x^2} = 1$, tāpēc pie $\frac{x^2}{4} = \frac{4}{x^2}$, $x^4=16$, $x=\pm 2$ funkcija sasniegs mazāko vērtību $y=2$.

c) $y = x + \frac{1}{x-2}$, ja $x > 2$.

Izteiksmes labajai pusei pieskaita un atņem 2: $y=x-2+\frac{1}{x-2}+2$. Šo saskaitāmo reizinājums $(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}\cdot 2=2$ - konstante, tādēļ mazākā y vērtība ir, ja $x - 2 = \frac{1}{x-2}$, $(x-2)^2=1$, $x=3$, būs $y=4$.

d) $y = \frac{x^4 + x^2 + 4}{x}$ ja $x > 0$.

I. Pārveidojam funkciju: $y=x^3+x+\frac{4}{x}=x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$. Visu saskaitāmo reizinājums $x\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1$, tātad to summa būs mazākā, ja $x^3=x=\frac{1}{x}$, $x=1$ un $y=6$.

II. Šo piemēru var atrisināt arī, izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, ja ir doti vairāki saskaitāmie:

$$x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ge 6\sqrt[6]{x^3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=6.$$

Kā redzams, mazākā iespējamā funkcijas vērtība ir 6.

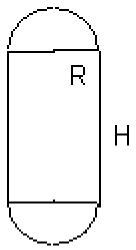
7. Piemērs. Noteikt izteiksmes $x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}$ mazāko vērtību.

Pārveidojam izteiksmi: $x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}= x^4+y^4+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^2y^2}$ un ievērojam, ka reizinājums $x^4\cdot y^4\cdot \frac{1}{x^2y^2}\cdot \frac{1}{x^2y^2}=1$, tātad mazākā vērtība izteiksmei būs, ja

$$x^4=y^4=\frac{1}{x^2y^2}:\ \begin{cases} x^4 = y^4 \\ x^4 = \frac{1}{x^2y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases},$$

tātad izteiksmes mazākā vērtība ir 4.

8. Piemērs. Figūra sastāv no cilindra, kurš ir noslēgts ar pussfērām. Aprēķināt figūras izmērus, ja tās tilpums ir V un virsmas laukums ir mazākais iespējamais.



Apzīmējam cilindra pamata un pussfēras rādiusu ar R un cilindra augstumu ar H. Tad tilpums $V=\pi R^2H+\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow H=\frac{V-\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2}$

Figūras virsmas laukums $S=2\pi RH+4\pi R^2=\frac{2\pi R(V-\frac{4}{3}\pi R^3)}{\pi R^2}+4\pi R^2=$

$$=2(\frac{V}{R}+\frac{2}{3}\pi R^2)=2(\frac{V}{R}+\frac{V}{R}+\frac{2}{3}\pi R^2).$$

Ievērosim, ka visu saskaitāmo reizinājums $\frac{V}{2R}\cdot\frac{V}{2R}\cdot\frac{2}{3}\pi R^2=\frac{2V^2\pi}{3}$ ir konstante, tāpēc virsmas laukums ir mazākais, ja visi saskaitāmie vienādi, t.i., $\frac{V}{2R}=\frac{2}{3}\pi R^2$, $4\pi R^3=3V$, $R^3=\frac{3V}{4\pi}$, $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, $H=\frac{V-\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi 3V}{4\pi}}{R^2\pi}=\frac{0}{R^2\pi}=0$, mazākais $S=4\pi R^2=4\pi(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}})^2$.

Figūras virsmas laukums ir mazākais, ja figūra sastāv tikai no pussfērām, t.i., tā ir lode.

9. Piemērs. Aprēķināt funkcijas $y = -x^8 - \frac{4}{x^2}$ lielāko vērtību.

$y = -x^8 - \frac{4}{x^2} = -\left(x^8 + \frac{4}{x^2}\right)$. Vispirms aplūkosim funkciju

$$y_1 = x^8 + \frac{4}{x^2} = x^8 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2};$$

reizinājums $x^8 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = 1$, tāpēc y_1 mazākā vērtība tiks iegūta, ja $x^8 = \frac{1}{x^2}$, $x^{10}=1$, x=1 vai x= -1, un tā ir 5. Tātad funkcijai $y=-(x^8+4)$ vērtība -5 būs lielākā.

Uzdevumi.

1. Aprēķināt mazāko vērtību funkcijai

1) $y=2x+\frac{1}{x}$, ja $x > 0$

2) $y=\frac{x^4}{5}+\frac{5}{x^4}$

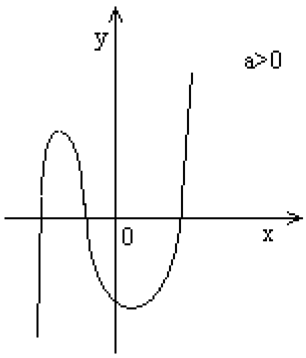
3) $y=\frac{1}{x+3}+x$, ja $x >-3$

4) $y=\frac{x^3+x+2}{x}$, ja $x > 0$

5) $y=x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, ja $x > 0$

6) $y=\frac{x^5+16}{x}$, ja $x > 0$.

6.§ TREŠĀS PAKĀPES FUNKCIJAS $Y=AX^3+BX^2+CX+D$, $A\neq 0$ EKSTRĒMI



Lai noteiktu šīs funkcijas maksimumus un minimumus, aplūkojam palīgtaisni y=t.

Ar dažādām t vērtībām dotās funkcijas grafikam ar taisni y=t var būt vai nu 1, vai 3 krustpunkti, vai arī 1 krustpunkts un 1 pieskaršanās punkts.

Mūs interesē tieši pēdējā iespēja.

Iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = t \end{cases}$$

un vienādojumu $ax^3+bx^2+cx+d=t$

$$ax^3+bx^2+cx+d-t=0 \quad (*)$$

Ja ar x_0 apzīmējam dotā grafika un taisnes krustpunkta abscisu, tad x_0 ir vienādojuma (*) sakne. Tāpēc vienādojumu (*) var izdalīt ar $x-x_0$, tādējādi pazeminot vienādojuma pakāpi.

$$\begin{array}{l|l}
ax^3 + bx^2 + cx + d - t & x-x_0 \\ \cline{2-2}
\underline{ax^3 - ax_0x^2} & ax^2+(b+ax_0)x+(c+bx_0+ax_0^2) \\
\quad (b+ax_0)x^2+ cx & \\
\quad \underline{(b+ax_0)x^2+(b+ax_0)x_0x} & \\
\qquad (c+bx_0+ax_0^2)x + d & \\
\qquad \underline{(c+bx_0+ax_0^2)x-(c+bx_0+ax_0^2)x_0} & \\
\qquad\qquad d+cx_0+bx_0^2+ax_0^3-t &
\end{array}$$

Esam ieguvuši dalījumu $ax^2+(b+ax_0)x+(c+bx_0+ax_0^2)$ un atlikumu $d+cx_0+bx_0^2+ax_0^3-t$. Tā kā x_0 ir vienādojuma sakne, tad atlikumam jābūt 0, jeb $d+cx_0+bx_0^2+ax_0^3-t=0$. Dalījumā iegūtajam polinomam $ax^2+(b+ax_0)x+(c+bx_0+ax_0^2)$ ir jābūt divām vienādām saknēm, tātad jābūt D=0:

$D=(ax_0+b)^2-4a(ax_0^2+bx_0+c)=0$

$a^2x_0^2+2abx_0+b^2-4a^2x_0^2-4abx_0-4ac=0$

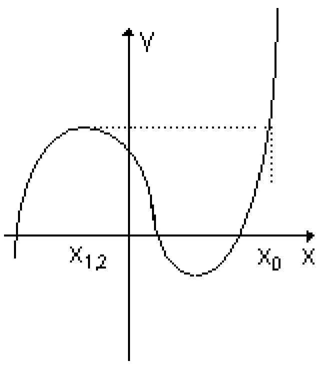
$-3a^2x_0^2-2abx_0^2+b^2-4ac=0$

$3a^2x_0^2+2abx_0^2+4ac-b^2=0$, no kurienes var aprēķināt

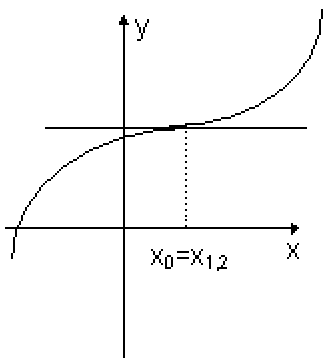
$$x_0 = \frac{-b \pm 2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$

Pie šīm x_0 vērtībām $x_1 = x_2 = \frac{-(ax_0+b)}{2a} = \frac{\frac{-a\left(-b \pm 2\sqrt{b^2-3ac}\right)}{3a} - b}{2a} =$

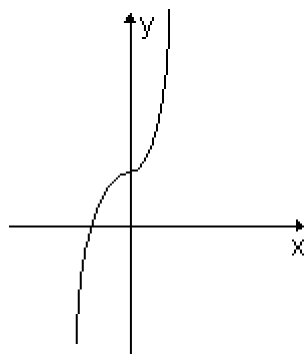
$$= \frac{b \pm 2\sqrt{b^2-3ac} - 3b}{3 \cdot 2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$



1.zīm.



2.zīm.

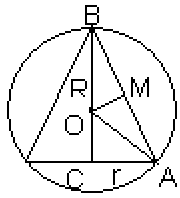


3.zīm.

Ja $b^2-3ac>0$, tad ir divas x_0 vērtības, kas atbilst maksimuma un minimuma taišņu krustpunktu abscisām (skat. 1.zīm.)

Ja $b^2-3ac=0$, grafikam ir pārliekuma punkts; ja $b^2-3ac<0$, tam nav lokālo ekstrēmu punktu. Šajos gadījumos ekstrēmu nav (skat. 2., 3.zīm.).

1. Piemērs. Kāds ir lielākais tilpums konusam, kuru var ievilkt lodē ar rādiusu R?
Azīmējam konusa pamata rādiusu ar r un augstumu ar h.



△COA: OC=h-R; AO=R; AC=r. Pēc Pitagora teorēmas
$OC^2+AC^2=AO^2$
$(h-R)^2+r^2=R^2$, tad
$r^2=2Rh-h^2$

Konusa tilpums ir $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(2Rh-h^2)h=\frac{\pi}{3}(2h^2R-h^3)$. Te V ir konstante, tāpēc aplūkojam funkciju $y=2Rh^2-h^3$.

Šai trešās pakāpes funkcijai a=-1, b=2R, c=0, d=0

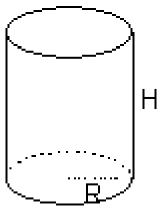
$$h=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}=\frac{-2R\pm\sqrt{4R^2}}{-3}=\frac{2R\pm 2R}{3}$$

$h_1=0$ (neder) $h_2=\frac{4R}{3}$;

$$r^2=\frac{2R\cdot 4R}{3}-\frac{16R^2}{9}=\frac{8R^2}{3}-\frac{16R^2}{9}=\frac{8R^2}{9}$$

Lielākais iespējamais tilpums ir $V=\frac{1}{3}\pi\frac{8R^2}{9}\cdot\frac{4R}{3}=\frac{32R^3\pi}{81}$.

2. Piemērs. No visiem cilindriem, kuru pilnas virsmas laukums ir 24π cm^2, noteikt to, kuram ir lielākais tilpums.



Apzīmē cilindra pamata rādiusu ar R, augstumu ar H. Pilnas virsmas laukums: $S=2\pi R^2+2\pi RH=24\pi$

$$R^2+RH=12$$

$$H=\frac{12-R^2}{R}$$

Cilindra tilpums: $V=\pi R^2H=\pi R^2\cdot\frac{12-R^2}{R}=12\pi R-\pi R^3$. Esam ieguvuši trešās pakāpes funkciju, kuras koeficienti ir a= –π, b=0, c=12π, d=0. Iegūstam $R=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}=\frac{\pm\sqrt{36\pi^2}}{3\pi}=\pm 2$,; tātad R=2, H=4.

3. Piemērs. Noteikt funkcijas $y=x^2(x-3)+5$ lielāko un mazāko vērtību intervālā [0;3].

Pārrakstām funkciju kā $y=x^3-3x^2+5$; koeficienti ir a=1; b= –3; c=0; d=5. Tātad savu maksimumu un minimumu šī funkcija sasniedz, ja $x=\frac{3\pm\sqrt{9}}{3}=\frac{3\pm 3}{3}$, $x_1=2$ un $x_2=0$: ja x=2, tad $y_{min}=1$, un, ja x=0, tad $y_{max}=5$.

Aprēķināsim funkcijas vērtības intervāla galapunktos. Galapunkts x=0 jau aplūkots; ja x=3, tad y=5.

Tātad funkcijas lielākā vērtība ir 5, mazākā – 1.

Uzdevumi.

1. Jāizgatavo konuss, kura veidule ir 15 cm gara. Kādam jābūt konusa augstumam, lai tā tilpums būtu vislielākais?
2. Noteikt funkcijas $f(x)=(x-2)(x^2+1)$ ekstrēmus.

7.§ EKSTRĒMU UZDEVUMU RISINĀŠANAS METOŽU MINIMUMS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDĒS

Šajā paragrāfā konspektīvi aplūkoti paaugstinātas grūtības pakāpes algebriska rakstura uzdevumi par vienargumenta un vairākargumentu funkciju lielāko un mazāko vērtību atrašanu, kurus izdodas īsi un skaisti atrisināt, nelietojot matemātiskās analīzes metodes. Turklāt mēs apskatām gan nosacīto, gan nenosacīto ekstrēmu meklēšanu.

Te netiek iekļauti pēc būtības diskrēta rakstura uzdevumi, kuru risināšanai lieto speciālas kombinatoriskas metodes (Dirihlē principu, vidējās vērtības metodi utt.).

Galvenās metodes, kuras izdodas izdalīt literatūrā sastopamajos uzdevumos, ir sekojošas.

1. Ekstrēmu uzdevumu risināšana, izmantojot nevienādības.
    1.1. Nevienādība $x^2\geq 0$
    1.2. Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.
    1.3. Nevienādības starp citiem vidējiem lielumiem.
    1.4. Košī-Bunjakovska nevienādība.
    1.5. Čebiševa nevienādība.
    1.6. Jensena nevienādība.
2. Ģeometriskas interpretācijas lietošana.
    2.1. Lauztas līnijas garums.
    2.2. Attālumu summa.
    2.3. Laukums.
3. Funkcijas vērtības pakāpeniska monotona mainīšana, izvēloties piemērotā veidā argumenta vērtības.
4. Funkcijas aizstāšana ar to mažorējošu funkciju.
5. Ekstrēma atrašana, konstruējot algoritmu tā meklēšanai.
6. Ekstrēma atrašana, lietojot zināmas funkciju īpašības (sevišķi kvadrāttrinoma īpašības).
7. Ekstrēma atrašana, izmantojot naturālu skaitļu un to nevienādību īpašības.
8. Ekstrēma pētīšana, izmantojot funkciju vērtības speciālā veidā izvēlētos punktos.

Aplūkosim dažus raksturīgākos piemērus.

1.1. uzdevums. Dots, ka $a^2+b^2+c^2+d^2 \le 1$. Atrast izteiksmes $(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4$ lielāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Viegli pārbaudīt, ka ir spēkā identitāte

$$(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4+(a+b)^4+(a+c)^4+$$
$$+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

(tā pazīstama no skaitļu teorijas; Lagranžs ar tās palīdzību pierādījis, ka katru naturālu skaitli var izsacīt ne vairāk kā 53 veselu skaitļu ceturto pakāpju summas formā). No šīs identitātes mēs viegli secinām, ka $(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4 \le 6$, un izteiksme var pieņemt vērtību 6 tad un tikai tad, ja $a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}$.

1.2. uzdevums. Dots, ka x, y, z, u ≥ 0 un $2x+xy+z+yzu=1$.

Atrast lielāko iespējamo izteiksmes $x^2y^2z^2u$ vērtību.

Atrisinājums. Ievērojam, ka dotās vienādības kreisās puses saskaitāmo reizinājums tikai ar konstantu koeficientu atšķiras no pētāmā reizinājuma. Tas uzvedina uz domām pētīt šo reizinājumu ar summas palīdzību. Galvenā sakarība starp nenegatīvu skaitļu reizinājumu un summu ir nevienādība starp to vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Tiešām, iegūstam $2x\cdot xy\cdot z\cdot yzu \le \left(\frac{1}{4}\right)^4$, tātad $x^2y^2z^2u \le \frac{1}{512}$. Vērtība $\frac{1}{512}$ tiek sasniegta, ja $2x=xy=z=yzu=\frac{1}{4}$; no šejienes $x=\frac{1}{8}$, y=2, $z=\frac{1}{4}$, $u=\frac{1}{2}$. Tātad meklējamais maksimums tiešām ir $\frac{1}{512}$.

1.3. uzdevums. Dots, ka $a_1+a_2+a_3+...+a_n=n$. Pierādīt, ka lieluma $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ mazākā iespējamā vērtība ir n.

Atrisinājums. Viegli saprast: ja $a_1=a_2=...=a_n$, tad vērtība n tiek sasniegta.

To, ka tā ir mazākā vērtība, pierādīsim divos dažādos veidos.

I. Saskaņā ar nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko iegūstam

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^2 = 1,$$

no kurienes seko vajadzīgais.

II. Apzīmējam $a_i=1+\alpha_i$, i=1;2;...;n. Tad $S= a_1^2+a_2^2+...+a_n^2= =(1+\alpha_1)^2+(1+\alpha_2)^2+...+(1+\alpha_n)^2= n+2(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)+ (\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2)$.

Tā kā $n= a_1+a_2+...+a_n= n+(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$, tad $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=0$. Tāpēc iegūstam $S=n+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2)\ge n$, ko arī vajadzēja pierādīt.

1.4.1. uzdevums. Atrast lielāko iespējamo izteiksmes $3\sin\alpha+4\cos\alpha$ vērtību.

Atrisinājums. Saskaņā ar Košī- Bunjakovska nevienādību $3\sin\alpha + 4\cos\alpha \le \sqrt{3^2+4^2}$. $\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=5$. Vērtība 5 tiek sasniegta, ja, piemēram, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ un $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Tātad meklējamais maksimums ir 5.

1.4.2. uzdevums. Dots, ka a,b,c - pozitīvi skaitļi un $abc=1$. Atrast izteiksmes $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$ mazāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Acīmredzot, ja $a=b=c=1$, tad izteiksmes vērtība ir $\frac{3}{2}$. Apzīmēsim $\frac{1}{a}=x$, $\frac{1}{b}=y$, $\frac{1}{c}=z$. Tad izteiksme pārveidojas par $S=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$, kur $xyz=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Saskaņā ar Košī - Bunjakovska nevienādību $\left((y+z)+(x+z)+(x+y)\right)S\geq(x+y+z)^2$, no kurienes seko, ka $S\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$. Tātad meklējamais minimums ir $\frac{3}{2}$.

1.5. uzdevums. Atrast vismazāko izteiksmes $\frac{a_1}{1^3}+\frac{a_2}{2^3}+...+\frac{a_n}{n^3}$ vērtību, ja $(a_1;a_2;...;a_n)$ ir skaitļu (1;2;...;n) kaut kāda permutācija.

Atrisinājums. Saskaņā ar Čebiševa nevienādību minētās izteiksmes vismazākā vērtība tiek sasniegta, ja atbilstošajos vektoros $(a_1;a_2;...;a_n)$ un $\left(\frac{1}{1^3};\frac{1}{2^3};...;\frac{1}{n^3}\right)$ skaitļu izkārtojumi pēc lieluma ir pretēji. Tāpēc tā ir $\frac{1}{1^3}+\frac{2}{2^3}+...+\frac{n}{n^3}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}$.

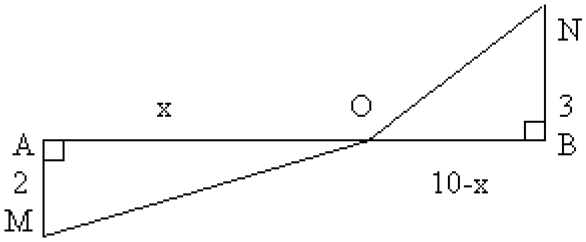
1.6. uzdevums. Atrast izteiksmes $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+...+\sin\alpha_n$ vislielāko vērtību, ja $0\leq\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\leq\pi$ un $\alpha_1+...+\alpha_n=\pi$.

Atrisinājums. Apzīmēsim $f(t)=\sin t$. Tad $f'(t)=\cos t$, $f''(t)=-\sin t$; intervālā $[0;\pi]$ $f''(t)\leq 0$, tātad funkcija $f(t)$ tajā izliekta uz augšu. Saskaņā ar Jensena nevienādību izliektām funkcijām pastāv sakarība

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\leq f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$, turklāt nevienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $x_1=x_2=...=x_n$. Tāpēc meklējamais maksimums ir $n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ un tiek sasniegts, ja $x_1=x_2=...=x_n=\frac{\pi}{n}$.

2.1. uzdevums. Atrast izteiksmes $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-20x+109}$ mazāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Aplūkojam zīmējumu.



Te AB=10, AM=2, BN=3, AO=x. Viegli pārbaudīt, ka apskatāmā izteiksme ir lauztas līnijas MON garums; tiešām, to var uzrakstīt kā

$\sqrt{x^2+2^2}+\sqrt{(10-x)^2+3^2}$.

Tas ir vismazākais, ja punkti M, O, N atrodas uz vienas taisnes; tas savukārt nozīmē, ka AO:OB=2:3, t.i., x=4. Iegūstam, ka meklējamā mazākā vērtība ir $5\sqrt{5}$.

2.2. uzdevums. Atrast izteiksmes
$|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-99|$
mazāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Apskatām uz skaitļu ass punktus 1;2;...;99 un patvaļīgu punktu x. Apskatāmā izteiksme ir punkta x attālumu summa līdz punktiem 1;2;...;99. Pasekosim, kā tā mainās, ja x pārvietojas pa skaitļu asi no $(-\infty)$ līdz $(+\infty)$.

Pārvietojoties no $(-\infty)$ līdz 1, visi attālumi samazinās par vienu un to pašu lielumu. Pārvietojoties no 1 līdz 2, samazināsies 98 attālumi, bet palielināsies viens; visas izmaiņas notiek par vienu un to pašu lielumu, tātad summa samazinās. Pārvietojoties starp 2 un 3, par vienu un to pašu lielumu palielinās 2 attālumi, bet samazinās 97, tātad summa samazinās. Līdzīgi turpinot, konstatējam: summa samazinās, punktam x pārvietojoties no $(-\infty)$ līdz 50, un palielinās tālākas kustības gaitā. tāpēc meklējamais minimums tiek sasniegts punktā x=50, un tā vērtība ir 2(1+2+...+49)=49·50=2450.

2.3. uzdevums. Atrast izteiksmes (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) lielāko iespējamo vērtību, ja a, b, c - pozitīvi skaitļi, kuru summa ir 1.

Atrisinājums. Ja kāda no iekavām ir 0, tad izteiksmes vērtība ir 0, ja kāda iekava ir negatīva, tad tāda ir tikai viena (tā, kurā lielākais no skaitļiem a, b, c ir ar mīnusa zīmi), un izteiksmes vērtība nav pozitīva. Ja visas iekavas ir pozitīvas, tad a, b, c var uzskatīt par tāda trijstūra malu garumiem, kura perimetrs ir 1. Kā zināms, lielākais laukums starp trijstūriem ar konstantu perimetru ir regulāram trijstūrim, tāpēc saskaņā ar Hērona formulu

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Ceļot nevienādības abas puses kvadrātā un ievērojot, ka a+b+c=1, iegūstam, ka $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\le\frac{1}{27}$, turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a=b=c=\frac{1}{3}$.

3. uzdevums. Zināms, ka $x_1;x_2;...;x_{100}\in[0;1]$. Atrast izteiksmes $\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|$ lielāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Aplūkosim patvaļīgus $x_1;x_2;...;x_{100}\in[0;1]$. Pieņemsim, ka tie izvietojas intervālā kārtībā $0\le x_1\le x_2\le...\le x_{99}\le x_{100}\le 1$.

Pārbīdīsim x_1 no pašreizējās pozīcijas uz 0. Pārbīdes rezultātā visas starpības, kas satur x_1, pēc moduļa pieaugs. Pēc tam tāpat pārbīdīsim x_2; šīs pārbīdes rezultātā viena starpība $|x_1-x_2|$ pēc moduļa samazināsies, bet 98 - pieaugs, tāpēc meklējamā summa pieaugs. Līdzīgi pārbīdām uz 0 argumentus x_3; x_4; ... ;x_{50}, bet uz 1 - argumentus x_{100}; x_{99}; ... ;x_{51} (tieši šādā secībā); pētāmās izteiksmes vērtība pieaug.

Tieši secinām, ka lielākā vērtība tiek sasniegta, ja $x_1=x_2=...=x_{50}=0$ un $x_{51}=...=x_{100}=1$. Tad šī vērtība ir 50·50=2500.

4. uzdevums. Zināms, ka $x_1+...+x_{100}=1$un visi skaitļi $x_1,x_2,...,x_{100}$ ir nenegatīvi. Atrast izteiksmes S= $x_1 \cdot x_2+ x_2 \cdot x_3+...+ x_{98} \cdot x_{99}+ x_{99} \cdot x_{100}$ lielāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Viegli saprast, ka $S \le (x_1 + x_3+...+x_{99})(x_2 + x_4+...+x_{100})$. Savukārt no nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko tālāk seko, ka $S \le \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{99} + x_{100}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Vērtība $\frac{1}{4}$ tiek sasniegta, piemēram, ja $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ un $x_3=x_4=...=x_{100}=0$. Tātad meklējamais maksimums ir $\frac{1}{4}$.

5. uzdevums. A, B, C, D, E, F, G, H ir pilsētas. Zīmējumā dotajā tabulā ierakstītie skaitļi rāda, cik tūkstošus rubļu maksā ceļa uzbūvēšana no vienas pilsētas uz otru. Piemēram, rūtiņa, kas atrodas C rindiņas un E kolonnas krustojumā, rāda, ka ceļa uzbūvēšana no C uz E maksā 73 tūkst. rbļ. Kādi ceļi jāuzbūvē, lai pa tiem no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru un kopējās būves izmaksas būtu vismazākās iespējamās? (No viena ceļa uz otru var nogriezties tikai pašās pilsētās, ceļu krustojumu starp pilsētām nav.) Pamatojiet savu izvēli.

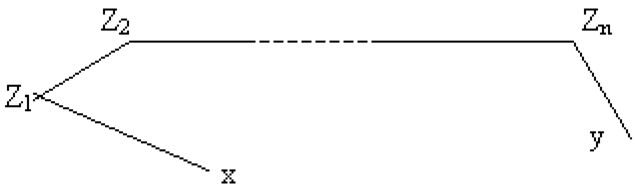
	A	B	C	D	E	F	G	H
A		84	87	77	82	78	93	86
B			85	54	65	51	59	81
C				69	73	76	75	67
D					96	53	56	58
E						91	63	61
F							79	57
G								94
H								

Atrisinājums. Šajā uzdevumā tikai tieši no vienas pilsētas uz otru (bez starppilsētām) uzbūvējamu ceļu sauksim par ceļu. Tādu ceļu sistēmu, pa kurā ieejošajiem ceļiem no katras pilsētas var aizbraukt uz katru un kas ir vislētākā no sistēmām ar šādu īpašību, sauksim par vislētāko sistēmu.

Ievērosim, ka visi uzbūvējamie ceļi ir ar dažādām izmaksām.

Lemma. Vislētākā sistēma noteikti satur vislētāk uzbūvējamo ceļu.

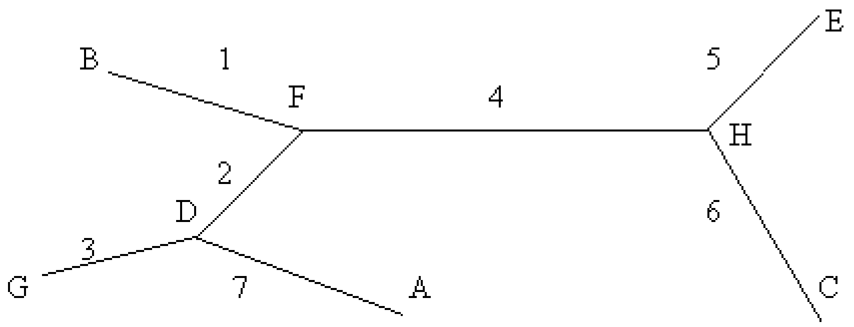
Pieņemsim, ka vislētāk uzbūvējamais ceļš savienotu pilsētas X un Y, bet vislētākajā sistēmā tas neietilpst. Tad no X uz Y šajā sistēmā var aizbraukt pa citiem ceļiem caur pilsētām $Z_1,...,Z_n$.



Uzbūvēsim ceļu starp X un Y, bet likvidēsim jebkuru no ceļiem XZ_1, Z_1Z_2, ... Z_nY. Iegūtā sistēma ir lētāka par iepriekšējo (jo ceļš XY ir lētāks par likvidēto ceļu), un pa tās ceļiem var aizbraukt no jebkuras pilsētas uz jebkuru. (Pierādīsim, ka jaunajā sistēmā tiešām no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru. Ņemsim divas pilsētas U un V. Pieņemsim, ka likvidētais ceļš ir Z_kZ_{k+1}. Ja vecajā sistēmā no U uz V varēja aizbraukt, nebraucot pa ceļu Z_kZ_{k+1}, tad jaunajā to var izdarīt, posma Z_kZ_{k+1} vietā izmantojot posmu Z_kZ_{k-1} ...Z_1 XY Z_n ... Z_{k+1}.) Tātad sākumā sākumā ņemtā sistēma nav bijusi vislētākā, kas ir pretrunā ar pieņēmumu. Lemma pierādīta.

Tātad vislētākajā sistēmā jāietilpst vislētākajam ceļam. Kad tas uzbūvēts, abas pilsētas, kuras tas savieno, varam uzskatīt par vienu pilsētu. Tātad esam ieguvuši pilsētu sistēmu, kurā ir par vienu pilsētu mazāk nekā sākotnējā. Šai sistēmai atkal varam pielietot lemmu, utt. Jāievēro tikai, ka, pielietojot lemmu jaunajai, reducētajai pilsētu sistēmai, nav jāņem vērā vēl neuzbūvētie ceļi, kas savieno tādas pilsētas, kuras savieno jau uzbūvēto ceļu virknes; tādas pilsētas tiek uzskatītas par vienu.

Rīkojoties pēc šādas metodes, iegūstam sekojošu ceļu sistēmu:



Pie ceļiem pievienotie cipariņi rāda kārtību, kādā tos iegūst pēc iepriekš aprakstītās metodes.

6. uzdevums. Atrast lielāko vērtību, kādu nenegatīviem x var pieņemt izteiksme $f(x)=\sqrt{x^2+100}-x$

Atrisinājums. Aplūkosim funkciju $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+100}-x}=\frac{\sqrt{x^2+100}+x}{\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+100}-x\right)}=\frac{1}{100}\left(\sqrt{x^2+100}+x\right).$

Tā kā $\sqrt{x^2+100}+x$ ir augoša funkcija pie $x\geq 0$ un pieņem pozitīvas vērtības, tad tās minimums ir punktā x=0, kas ir funkcijas f(x) maksimuma punkts. Tātad f(x) lielākā vērtība ir 10, un tā tiek sasniegta punktā x=0.

Risinājumā izmantota funkcijas $\sqrt{x^2+100}+x$ monotonā augšana un funkcijas $\frac{1}{f(x)}$ monotonā dilšana apskatāmajā apgabalā.

7. uzdevums. Atrast izteiksmes $\left|36^n-5^m\right|$ mazāko iespējamo vērtību, ja m un n - naturāli skaitļi.

Atrisinājums. Ievērosim, ka 36^n visiem naturāliem n beidzas ar ciparu 6, bet 5^m visiem naturāliem m beidzas ar ciparu 5. Tāpēc $\left|36^n-5^m\right|$ beidzas ar 1 vai ar 9. Ja n=2 un m=1, tad izteiksmes vērtība ir 11. Lai pierādītu, ka tas ir minimums, jāpamato, kāpēc šī vērtība nevar būt ne 1, ne 9.

Pieņemsim, ka $\left|36^n - 5^m\right|=1$, tad jābūt $36^n-5^m=1$, kas pārveidojas par $36^n-1=5^m$ un tālāk par $(6^n-1)\cdot(6^n+1)=5^m$. Saskaņā ar aritmētikas pamatteorēmu skaitļiem 6^n-1 un 6^n+1 abiem jābūt no skaitļu virknes

1; 5; 25; 125;... ; 5^k;.... Bet tā nevar būt, jo šajā virknē nav divu skaitļu, kas viens no otra atšķiras par 2. Tātad izteiksme nevar pieņemt vērtību 1.

Pieņemsim, ka $\left|36^n - 5^m\right|=9$; tad jābūt $36^n-5^m=9$ un $5^m=9+36^n$. Tā nevar būt, jo iegūtās vienādības labā puse dalās ar 3, bet kreisā - nē.

Tātad apskatāmās izteiksmes minimums tiešām ir 11.

8. uzdevums. Dots, ka a, b, c - reāli skaitļi un visiem x no intervāla [0;1] pastāv sakarība $|ax^2+bx+c|\le 1$.

Atrast izteiksmes $|a|+|b|+|c|$ lielāko iespējamo vērtību.

Atrisinājums. Izmantojam uzdevuma nosacījumos doto faktu pie x=0; x=1/2; x=1. Iegūstam nevienādības $|f_1|\le 1$, $|f_2|\le 1$, $|f_3|\le 1$, kur

$$\begin{cases} c = f_1 \\ c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}a = f_2 \\ c + b + a = f_3 \end{cases}$$

Atrisinot šo lineāro vienādojumu sistēmu, iegūstam

$a=2f_1-4f_2+2f_3$, tāpēc $|a|\le 8$

$b=-3f_1+4f_2-f_3$, tāpēc $|b|\le 8$

$c=f_1$, tāpēc $|c|\le 1$.

Tātad $|a|+|b|+|c|\le 17$.

Piemērs $8x^2-8x+1=2(2x-1)^2-1$ parāda, ka vērtība 17 ir sasniedzama.

Tātad meklējamais maksimums ir 17.

LITERATŪRA

1. А. Д. Кутасов, Т. С. Пиголкина и др.
Пособие по математике для поступающих в вузы
Наука Москва 1988

2. А. Г. Мордович
Алгебра и начала анализа
Высшая школа Москва 1987

3. Е. Б. Ваховский, А. Ф. Рыбкин
Задачи по элементарной математике
Наука Москва 1969

4. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. М. Шабунин
Лекции и задачи по элементарной математике
Наука Москва 1974

5. И. Х. Сивашинский
Функции и графики
Наука Москва 1975

6. И. Х. Сивашинский
Задачи по элементарной математике
Просвещение Москва 1966

7. П. С. Моденов
Экзаменационные задачи по математике
Просвещение Москва 1969

8. С. И. Туманов
Поиск решения задачи
Просвещение Москва 1969

9. Ф. Ф. Нагибин
Экстремумы
Просвещение Москва 1969

10. Составитель, З. А. Скопец
Дополнительные главы по курсу математики
Просвещение Москва 1969

11. С. И. Зетель
Задачи на максимум и минимум
Огиз. Гозтехиздат Москва 1948 Ленинград

12. И. Х. Сивашинский
Неравенства в задачах
Наука Москва 1967

13. С. М. Гуль, С. М. Соакян
Алгебра и начала анализа
Высшая школа Москва 1975

14. И. Х. Сивашинский
Пособие по математике для техникумов
Высшая школа Москва 1970

15. Задачи для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе
Просвещение Москва 1969

16. Журнал Квант 1990, 2

17. Журнал Математика 1986, 4; 1989, 6