EKSTRĒMU UZDEVUMI
5. DAĻA

ATTĀLUMI. VAIRĀKARGUMENTU FUNKCIJAS

A. Cibulis
Latvijas Universitāte

Rīga

2004

SATURS

IEVADS

Grāmatas “Ekstrēmu uzdevumi” 5. daļā iekļautas trīs nodaļas. Tāpat kā iepriekšējās grāmatas daļās elementāri risinājumi joprojām ir galvenais šīs daļas saturs. Pirmā un lielākā nodaļa, kas aizņem apmēram trīs piektdaļas no visa 5. daļas materiāla, veltīta “attālumiem”. Attāluma jēdzienam, kas raksturo apskatāmo objektu tuvību, matemātikā ir īpaša nozīme. Uzdevumi par attāluma noteikšanu veido plašu ekstrēmu uzdevumu klasi. Noteikt attālumu starp punktu un taisni, punktu un plakni, starp šķērsām taisnēm, starp divām līknēm, starp funkciju grafikiem, plašākā izpratnē – starp punktu kopām, nozīmē risināt minimizācijas uzdevumu. Uzdevumu sarežģītība var variēt ļoti plašā diapazonā: no triviāliem uzdevumiem līdz neatrisinātām matemātikas problēmām. Tiek doti lietoto jēdzienu skaidrojumi, kā arī uzdevumu risināšanai nepieciešamo formulu izvedumi.

Daudzus uzdevumus par attāluma noteikšanu, to skaitā arī studentiem paredzētos, var atrisināt ar elementāriem paņēmieniem, metodēm.

Darba saturs nebūt nepretendē uz apskatāmās tēmas plašu vai izsmeļošu izklāstu. Tas ir tikai neliels ieskats atsevišķa tipa elementāri risināmos uzdevumos. Vairākas šeit neizvērstas tēmas var tikt izstrādātas skolēnu pētnieciskajos darbos.

Šajā darba daļā ir iekļauta arī neliela apjoma nodaļa par ekstrēmu noteikšanu vairākargumentu funkcijām, kā arī nodaļa par nosacītā ekstrēma uzdevumiem. Nosacītā ekstrēma uzdevumi samērā bieži satopami matemātikas olimpiādēs, tiesa, vārdi “nosacītais ekstrēms” to formulējumos neparādās, jo pēc tiem attiecīgajā kontekstā nav nekādas vajadzības.

Ne visi uzdevumu risinājumi izklāstīti tradicionālā veidā. Ir piedāvāti arī daži sofismi vai samērā vienkāršas kļūdas saturoši risinājumi, kuros lasītājam pašam vajadzētu ne tikai atrast pareizo risinājumu, bet arī saprast, kur citi risinātāji pieļāvuši kādu kļūdu, paviršību.

Kaut izklāsts ir elementārā līmenī, tomēr tā satura “sagremošanai” skolēniem jābūt pacietīgiem un pietiekami labi matemātiski sagatavotiem. Uzdevumu risinājumos bieži tiek lietotas klasiskās nevienādības (nevienādība starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko, Koši nevienādība), kuras detalizēti aplūkotas darba iepriekšējās daļās.

Atsauces uz literatūru dotas formā [KR], [Sad, 3, 30-31], kur skaitļi norāda citētā avota lappuses.

19. nodaļa
Attālumi

Uzdevumi par attāluma noteikšanu veido plašu ekstrēmu uzdevumu klasi. Tā satur ļoti daudzveidīgus un dažādas grūtības pakāpes uzdevumus: vienkāršus vingrinājumus (piemēram, atrast attālumu starp kvadrāta diagonāles galapunktiem; attālumu no trijstūra virsotnes līdz tā pamatam, t. i., trijstūra augstuma garumu, utt.), olimpiāžu līmeņa uzdevumus, kā arī ļoti sarežģītas un neatrisinātas matemātikas problēmas. Daudzus uzdevumus par minimālā attāluma noteikšanu, to skaitā arī tādus, kas paredzēti studentiem, var atrisināt ar elementāriem paņēmieniem, metodēm. Elementāri risinājumi ir galvenais šīs iedaļas saturs, tomēr tiek doti arī lietoto jēdzienu skaidrojumi, kā arī formulu izvedumi. Vārds "Piemērs" lietots, lai apzīmētu tos uzdevumus, kuru formulējumi ņemti no citiem avotiem. Iedaļas saturs nebūt nepretendē uz apskatāmās tēmas plašu izklāstu. Tas ir tikai neliels ieskats atsevišķa tipa elementāri risināmos uzdevumos. Vairākas tēmas, kas attiecas uz šo iedaļu, var tikt izvērstas skolēnu pētnieciskajos darbos.

Dažkārt skolēniem tiek piedāvāti šāda tipa nekorekti formulēti uzdevumi: uzzīmēt attālumu no "lāča līdz kokam". Kas ir attālums? Vai tas ir skaitlis vai kāda līnija? Gandrīz droši, ka tas nav īsti skaidrs ne tai mērķauditorijai, kurai piedāvāti šādi formulēti uzdevumi, ne arī pašiem sastādītājiem.

Attālumu starp diviem plaknes punktiem A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), kur a_k (k = 1, 2) ir šo punktu abscisas un b_k ordinātas, izsaka formula (iegūst kā sekas no Pitagora teorēmas)

$$\mathrm{d(A,B)} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\ .$$

Trīsdimensiju telpā attālums starp punktiem A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) ir vienāds ar

$$\mathrm{d(A,B)} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}\ .$$

Pēc analoģijas var definēt arī attālumu starp diviem n-dimensiju telpas punktiem A(a_1, a_2, …, a_n) un B(b_1, b_2,…, b_n):

$$\mathrm{d(A,B)} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}\ .$$

Matemātikā ar <u>attālumu</u> d(X, Y) starp divām figūrām X un Y saprot vismazāko no attālumiem d(x, y) starp šo figūru punktiem ($x \in X$, $y \in Y$).
Attālumu d(A, B) starp diviem punktiem A un B apzīmē ar |AB|. Taču nereti vienkāršības dēļ |AB| vietā raksta AB, t. i., nogriezni AB apzīmē tāpat kā tā garumu. Tā ir neprecizitāte, kas parasti nerada divdomības. Runājot par attālumiem, mēs arī dažkārt lietosim šo ērto pierakstu. Ar pierakstu F(x, y) sapratīsim funkcijas F vērtību punktā (x, y). Punkta koordinātu atdalīšanai lieto arī semikolu (x; y).

Attālums no punkta līdz punktu kopai

Parasti punktu kopas lomā tiek ņemti taisnes, plaknes, dažādu līkņu, virsmu punkti.

Attālums no punkta līdz taisnei

Pieņemsim, ka jāatrod attālums d(A, T) no uzdota punkta A(p, q) līdz taisnei T: $y = kx + b$.
Izvēlamies patvaļīgu taisnes T punktu P(x, y). Tad attāluma kvadrāts ir

$$d^2(\mathrm{A, P}) = (x-p)^2 + (y-q)^2 = (x-p)^2 + (kx+b-q)^2.$$

1. Atveram iekavas un pēc vienkāršiem pārveidojumiem iegūstam kvadrātfunkciju:

$$d^2 = x^2 - 2px + p^2 + (kx)^2 + 2kx(b - q) + q^2.$$

$$d^2 = (1 + k^2)x^2 + 2[k(b - q) - p]x + p^2 + (b - q)^2.$$

Viena no iespējām ir izdalīt pilno kvadrātu un tad atrast kvadrātfunkcijas minimālo vērtību. Otra nedaudz racionālāka iespēja ir noteikt apskatāmās funkcijas – parabolas – virsotnes koordinātas. Trešā iespēja, kas nedaudz atvieglina tehnisko darbu, ir šāda. Ievēro, ka parabolas

$$y = ax^2 - 2bx = x(ax - 2b),\ a > 0,$$

minimuma punkts ir sakņu viduspunkts, t. i., punkts $x_{\min} = \frac{b}{a}$ un vērtība šajā punktā ir vienāda ar $y_{\min} = -\frac{b^2}{a}$. Izmantojot šo faktu aprēķinām d^2 izteiksmes minimālo vērtību:

$$d^2_{\min} = -\frac{[p - k(b-q)]^2}{k^2+1} + p^2 + (b-q)^2 = \frac{(k^2+1)[p^2 + (b-q)^2] - [p - k(b-q)]^2}{k^2+1} =$$

$$\frac{k^2p^2 + (b-q)^2 + 2pk(b-q)}{k^2+1} = \frac{(kp+b-q)^2}{k^2+1} \Rightarrow d_{\min} = \frac{|kp+b-q|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Uzrādīsim elegantāku risinājumu, pārformulējot doto uzdevumu citos apzīmējumos.

2. Apzīmēsim $u = p - x$, $v = kx + b - q$. Tad jārisina šāds uzdevums:

$$\min d^2 = \min(u^2 + v^2) = ?$$
$$uk + v = pk + b - q.$$

Lietojam Košī nevienādību

$$(pk + b - q)^2 = (uk + v\cdot 1)^2 \leq (u^2 + v^2)(k^2 + 1) = d^2(k^2 + 1).$$

no kurienes

$$d^2 \geq \frac{(pk+b-q)^2}{k^2+1} \Rightarrow d_{\min} = \frac{|pk+b-q|}{\sqrt{k^2+1}} \quad \text{(PT)}.$$

<u>Piezīme</u>. Ja taisne ir uzdota formā $ax + by + c = 0$, tad attālums d no punkta (x_0, y_0) līdz taisnei ir vienāds ar $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Košī nevienādība ir ērts līdzeklis, lai atrastu attālumu no punkta līdz plaknei arī vairākdimensiju telpās.

<u>1. piemērs</u>. Atrast attālumu no punkta (2, –2, 3) līdz plakņu $2x - y + 3z = 1$ un $-x + 3y + z = -3$ šķēlumam. [EG, 872]

Plakņu šķēlums būs taisne. Lai noteiktu šo taisni, izsakām z no otrās vienādības un ievietojam pirmajā:

$$z = x - 3y - 3,\ 2x - y + 3(x - 3y - 3) = 5x - 10y - 9 = 1,\ x = 2y + 2.$$

$$z = 2y + 2 - 3y - 3 = -y - 1.$$

Taisnes punktus pierakstām formā $(2t + 2,\ t, -t - 1)$ un sastādām attāluma kvadrātu:

$$d^2 = (2t + 2 - 2)^2 + (t + 2)^2 + (-t - 1 - 3)^2 = 4t^2 + (t + 2)^2 + (t + 4)^2 =$$

$$6t^2 + 12t + 20 = 6t(t + 2) + 20.$$

Minimuma punkts ir $t = 1$ un atbilstošā minimālā vērtība $d^2 = 38$.

Attālums no punkta līdz līknei

Attālums d no punkta (p, q) līdz funkcijas $y = f(x)$ grafikam ir vienāds ar

$$d = \sqrt{(p-x)^2 + (q-(f(x))^2} .$$

Ērtāk ir meklēt minimumu attāluma kvadrātam

$$d^2 = (p - x)^2 + (q - f(x))^2 \to \min.$$

Atkarībā no uzdevuma mainīgais x pieder reālu skaitļu kopai vai kādai šīs kopas apakškopai. Skaidrs, ka punkts, kurš minimizē attāluma kvadrātu, minimizē arī pašu attālumu. Līdzīgi rīkojamies arī tad, kad jānosaka attālums no punkta (p, q) līdz līknei $\{x(t), y(t)\}$. Šai gadījumā meklējam minimumu attāluma kvadrātam

$$d^2 = (p - x(t))^2 + (q - (y(t))^2 \to \min,$$

kad parametrs t pieder kādai uzdotai kopai.

<u>2. piemērs</u>. Atrast attālumu no (2, 0) līdz līknei $x^2 + y^2 = 1$.
Tas, ka tuvākais līknes punkts ir (1, 0) jau pateikts priekšā šādā formulējumā "Pierādīt, ka (1; 0) ir punktam (2; 0) tuvākais punkts uz līknes $x^2 + y^2 = 1$." [Ant, 248].

Līkne $x^2 + y^2 = 1$ ir riņķa līnija ar rādiusu 1 un centru koordinātu sākumpunktā O. Punkts A(2, 0) atrodas uz X-ass. Ar K apzīmēsim nogriežņa OA krustpunktu ar riņķa līniju. Tad no ģeometriskiem apsvērumiem skaidrs, ka |KA| ir minimālais attālums no punkta K līdz riņķa līnijai. Vienkāršs un īss ir arī algebrisks risinājums. Attāluma kvadrāts

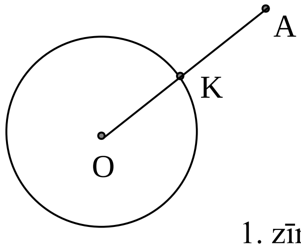
$$d^2 = (x - 2)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + 1 - x^2 = - 4x + 5$$

būs minimāls, ja x būs iespējami liels. Tā kā $x \le 1$, tad $d_{\min} = 1$, ja $x = 1$.
Arī patvaļīgam punktam A(p, q) ir spēkā īpašība: attālums no punkta A līdz riņķa līnijai $x^2 + y^2 = r^2$ ir vienāds ar |AK|, sk. 1. zīmējumu. Šo ģeometrisko intuīciju apstiprināsim ar algebrisku pierādījumu. Pārveidojumos izmantosim Košī nevienādību:

$$d^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = - 2(px + qy) + p^2 + q^2 + r^2 \ge$$

$$-2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2} + p^2+q^2+r^2 = -2r\sqrt{p^2+q^2} + p^2+q^2+r^2 = (\sqrt{p^2+q^2} - r)^2 \Rightarrow$$

$$d = \left|\sqrt{p^2+q^2} - r\right|.$$



1. zīm.

No proporcionalitātes nosacījuma p: $q = x : y$ izriet, ka punkts (x, y), kas minimizē attālumu, atrodas uz taisnes, kas savieno doto punktu A ar riņķa līnijas centru.

3. piemērs. Atrast punktus uz elipses, $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$, kuri ir vistuvāk punktam a) (2, 0); b) punktam $(\sqrt{8}; 0)$. [DG, 295]

Aplūkojam attāluma kvadrātu no patvaļīga punkta $(p, 0)$ līdz elipsei.

$$d^2(x) := (x-p)^2 + y^2 = (x-p)^2 + 9 - 9x^2 = -8x^2 - 2px + p^2 + 9$$

Parabolai zari vērsti uz leju, tāpēc tā minimumu sasniedz pieļaujamā x maiņas intervāla [-1, 1] galapunktā(os). Tā kā $d^2(1) = (p-1)^2$ un $d^2(-1) = (p+1)^2$, tad $d_{\min} = d(1) = |p-1|$, ja $p > 0$ un $d_{\min} = d(-1) = |p+1|$, ja $p < 0$.

Piezīme. Aplūkotajā piemērā punkts ir ņemts uz koordinātu ass. Uzdevums par attāluma noteikšanu no patvaļīga punkta līdz elipsei ir būtiski sarežģītāks. Tam ir ciešs sakars ar Apolonija (ap 260-170 p.m.ē.) uzdevumu: "Atrast attālumu no punkta līdz elipsei. Cik normāles var novilkt no punkta līdz elipsei? ". [GT, 171, 187-189] (Ar *normāli* saprot taisni, kas perpendikulāra pieskarei.)

4. piemērs. Atrast punktus uz parabolas $y = x^2 + 2x$, kuri ir vistuvāk punktam $(-1, 0)$. Grāmatā [EG, 872] uzdevums ievietots starp tiem, kurus (studentiem) paredzēts risināt ar Lagranža reizinātāju metodi. Uzrādīsim elementāru risinājumu.

Meklējam minimumu attāluma kvadrātam:

$$d^2 = (x+1)^2 + (x^2+2x)^2 \to \min.$$

$$d^2 = x^2 + 2x + 1 + (x^2+2x)^2 = \left((x^2+2x) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

No šejienes secinām, ka meklējamo punktu abscisas ir kvadrātvienādojuma $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$ atrisinājumi, t. i., $x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tas, ka minimālais attālums realizējas divos dažādos punktos, izskaidrojams vienkārši, proti, dotais punkts $(-1, 0)$ atrodas uz parabolas simetrijas ass.

5. piemērs. Atrast funkcijas $x^2 + y^2$ ekstrēmus, ja $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$.

Piezīme. Uzdevumam ir šāda ģeometriskā jēga. Punkts $P(x, y)$ ir līknes $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ punkts, bet $d^2 = x^2 + y^2$ ir attāluma (no P līdz koordinātu sākumpunktam) kvadrāts. Punkts, kurš minimizē (vai maksimizē) attāluma kvadrātu minimizē arī pašu attālumu. Grāmatā [TF, 213] prasīts "Atrast punktus uz līknes $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$, kuri ir vistuvāk koordinātu sākumpunktam". Studentiem paredzēto uzdevumu var atrisināt nemaz nezinot, ka dotā vienādība definē kādu līkni un to kāda "izskatās" šī līkne.

Uzrādīsim īsu un turklāt ļoti vienkāršu risinājumu. Izmantojot nevienādību

$$-(x^2+y^2) \le 2xy \le x^2 + y^2$$
$$-d^2 \le 2xy \le d^2,$$

redzams, ka $5d^2 = 5x^2 + 5y^2 = 4 + 6xy$ var mainīties šādās robežās: $4 - 3d^2 \le 5d^2 \le 4 + 3d^2$.

No šejienes secinām, ka $4 \le 8d^2$ un $2d^2 \le 4$, tāpēc $\frac{1}{2} \le d^2 \le 2$.

Punktus, kuros attālums d sasniedz ekstremālās vērtības, vienkārši atrast, ja izmanto nosacījumus, kad lietotās nevienādības kļūst par vienādībām, proti, $x = -y$ un $x = y$. Pirmajā gadījumā no vienādības $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ iegūstam, ka $x = -y = \pm\frac{1}{2}$ un $d_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, bet otrajā, ka $x = y = \pm 1$ un $d_{\max} = \sqrt{2}$.

Attālums no punkta līdz plaknei

Attālums no punkta (x_0, y_0, z_0) līdz plaknei $Ax + By + Cz + D = 0$ ir vienāds ar

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Šo formulu var pierādīt dažādos veidos. Elementāru un īsu formulas izvedumu iegūst, lietojot Košī nevienādību. Risinām nosacītā minimuma uzdevumu

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \to \min$$
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Attāluma formula izriet no vienkāršiem pārveidojumiem

$$|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax - By - Cz| =$$
$$|A(x_0 - x) + B(y - y_0) + C(z - z_0)| \le \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$
$$|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| \le \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot d \;\Rightarrow\; d_{\min} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. piemērs. Aprēķināt attālumu no punkta (– 2; – 4; 3) līdz plaknei $2x + y + 2z + 3 = 0$ un no punkta (3; 7; 4) līdz plaknei $4x - 3y - 1 = 0$. [KZZ2, 89]

Ievietojot doto punktu koordinātas attāluma formulā, dabū:

$$1)\; d = \frac{|-4 - 4 + 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}; \quad 2)\; d = \frac{|12 - 21 - 1|}{\sqrt{25}} = 2.$$

Piezīme. Minētajā uzdevumu krājumā pirmā varianta atbildē -“3”- ieviesusies drukas kļūda.

7. piemērs. Aprēķināt attālumu starp plaknēm:
$2x + y - 2z - 6 = 0$ un $2x + y - 2z - 15 = 0$;
$3x - 2y + 6z - 8 = 0$ un $3x - 2y + 6z - 36 = 0$;
$x + 2y + 2z - 9 = 0$ un $2x + 4y + 4z + 15 = 0$

Krājumā [KZZ2, 89] jau iepriekš pateikts, ka plaknes ir paralēlas. Zinot šo faktu, var ņemt patvaļīgu vienas plaknes punktu un aprēķināt attālumu no tā līdz otrai plaknei. Piemēram, ērti ņemt attiecīgi šādus pirmās plaknes punktus (3, 0, 0), (0, – 4, 0) un (9, 0, 0) un izmantot attāluma formulu. Pēc vienkārša aprēķina iegūsim, ka attālums starp plaknēm šajos trīs variantos attiecīgi ir 3 un 4 un 5,5.
trešajā variantā

Attālums no punkta līdz virsmai

8. piemērs. Atrast $\min(x^2 + y^2 + z^2)$, ja $x^2 - yz = 5$.
“Atrast punktus uz virsmas $x^2 - yz = 5$, kuri ir vistuvāk koordinātu sākumpunktam.” [Ant, 948]

Uzdevums atrisināms divās rindiņās. Ievērojam, ka

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 + yz + y^2 + z^2 = 5 + (y + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}z^2 \geq 5 \Rightarrow d_{\min} = \sqrt{5}.$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $y = z = 0$ un $x^2 = 5$.

9. piemērs. Atrast minimālo attālumu no virsmas $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ punkta līdz koordinātu sākumpunktam. (Grāmatā [EG, 870] uzdevums risināts ar Lagranža reizinātāju metodi, kas aizņem apmēram 1 lpp.)

Uzrādīsim elementāru uzdevuma

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = ?, \ xy + 2xz = 5\sqrt{5}$$

risinājumu. No nevienādības $(x - ay)^2 \geq 0$ izriet, ka jebkuriem reāliem skaitļiem x un y un pozitīviem a ir spēkā:

$$2xy \leq \frac{x^2}{a} + ay^2.$$

Izvēlēsimies a lomā piemērotus skaitļus p un q, kuri tiks precizēti vēlāk, un novērtēsim $xy + 2xz$:

$$10\sqrt{5} = 2xy + 4xz \leq \frac{x^2}{p} + py^2 + \frac{2x^2}{q} + 2qz^2 = \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{q}\right)x^2 + py^2 + 2qz^2.$$

Ņemsim p un q tā, lai visi trīs koeficienti būtu vienādi, t. i., $p = 2q$ un

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 2q \Rightarrow \frac{5}{2q} = 2q \Rightarrow q^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Pateicoties šādai izvēlei,

$$10\sqrt{5} \leq 2q(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 10 \Rightarrow d_{\min} = \sqrt{10}.$$

Atbilstošie minimuma punkti ir $(\sqrt{5}, 1, 2)$ un $(-\sqrt{5}, -1, -2)$.

10. piemērs. Aprēķināt $\min(x^2 + y^2 + z^2)$, ja $xy^3z^2 = 16$.
"Atrast punktus uz $xy^3z^2 = 16$ grafika, kuri atrodas vistuvāk koordinātu sākumpunktam." [Sw, 769]

Viena no iespējām, kā iegūt elementāru risinājumu, ir nevienādības $A \geq G$ izmantošana:

$$d^2 := x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \frac{16}{xy^3} = x^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{8}{xy^3} + \frac{8}{xy^3}.$$

No vienādības $xy^3z^2 = 16$ izriet, ka reizinājums xy ir pozitīvs lielums. Attāluma kvadrātu esam uzrakstījuši kā sešu pozitīvu saskaitāmo summu, kuru reizinājums ir $\frac{64}{27}$, t. i., nemainīgs lielums. Šī summa būs minimāla, ja visi saskaitāmie vienādi. Lielumu x aprēķinām no vienādības $(x^2)^6 = \frac{64}{27} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow d^2 = 6x^2 = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, kas ir prasītā minimālā vērtība.

11. piemērs. Atrast punktus uz vienības sfēras, kuri ir vistuvāk un vistālāk no punkta (4, 2, 1). [EG, 872]

Doto punktu A savieno ar sfēras centru O. Taisnes AO krustpunkti ar doto sfēru ir meklējamie punkti. Algebrisku pamatojumu iegūst, lietojot Košī nevienādību, kā 2. piemērā.

Attālums starp funkciju grafikiem

12. piemērs. Atrast attālumu starp taisnēm $(3t, 2t, t)$ un $(2t, 2t + 3, 2t)$. [Ant, 948]

Elementārs risinājums:
$d^2 = (3t - 2t)^2 + (2t - 2t - 3)^2 + (t - 2t)^2 = 2t^2 + 9$, no kurienes $d_{\min} = 3$.

13. piemērs. Atrast punktu uz parabolas $y = x^2$, kurš ir vistuvāk taisnei $y = 2x - 4$. [Min, 150]

Apzīmējam meklējamo parabolas punktu ar (t, t^2). Šoreiz parastais paņēmiens, kad meklē minimumu attāluma kvadrātam, tehniski grūti realizējams (neracionāls). Jo pēc pārveidojumiem:

$$d^2 = (t - x)^2 + (t^2 - 2x + 4)^2 = (t - x)^2 + ((t^2 + 4) - 2x)^2 =$$
$$t^2 - 2xt + x^2 + (t^2 + 4)^2 - 4x(t^2 + 4) + 4x^2 =$$
$$5x^2 - 2x(t + 2t^2 + 8) + t^2 + (t^2 + 4)^2 =$$
$$\left(\sqrt{5}x - \frac{2t^2 + t + 8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{(2t^2 + t + 8)^2}{5} + t^2 + (t^2 + 4)^2 \geq \frac{1}{5}(5t^2 + 5(t^2 + 4)^2 - (2t^2 + t + 8)^2)$$

rodas vajadzība meklēt minimumu ceturtās pakāpes polinomam.

Mērķi var sasniegt ievērojami ātrāk, lietojot formulu (PT), sk. iedaļu "Attālums no punkta līdz taisnei". Saskaņā ar šo formulu attālums no patvaļīga parabolas punkta (t, t^2) līdz taisnei $y = 2x - 4$ ir vienāds ar

$$d = \frac{|2t - 4 - t^2|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|t^2 - 2t + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{(t - 1)^2 + 3}{\sqrt{5}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

No šejienes skaidrs, ka parabolas punkts, kas minimizē attālumu ir (1, 1).
Piezīme. Zinot, ka $t = 1$, kā sekas iegūstam:

$$P(t) := 5t^2 + 5(t^2 + 4)^2 - (2t^2 + t + 8)^2 \geq P(1) = 9,$$

kā arī to, ka šo polinomu var izteikt formā $P(t) := ((t - 1)^2 + 3)^2$.

14. piemērs. Noteikt attālumu no taisnes, kas iet caur punktiem (3; 0), (0; 4), līdz parabolai $y = 2x - x^2$.

"Taisne l iet caur punktiem (3; 0), (0; 4). Punkts A atrodas uz parabolas $y = 2x - x^2$. Noteikt attālumu no punkta A līdz taisnei l, ja A sakrīt ar koordinātu sākumpunktu. Noteikt punkta A koordinātas, ja tas atrodas uz parabolas un attālums no tā līdz taisnei l ir vismazākais." [KZZ1, 165]

Uzrādīsim elementāru risinājumu. Zinot, ka OB = 3, OC = 4 (2. zīm.), aprēķinām CB. Pēc Pitagora teorēmas CB = 5. Attālumu d no punkta O līdz taisnei BC nosakām no vienādības $d \cdot |BC| = |OB| \cdot |OC|$ (tā izsaka divkāršotu taisnleņķa trijstūra OBC laukumu). $d = 12:5 = 2{,}4$.

Lai atrastu attālumu $d = |EP|$ no parabolas līdz taisnei BC, aplūkosim trijstūrim OCB līdzīgu trijstūri EDP, sk. 2. zīmējumu.

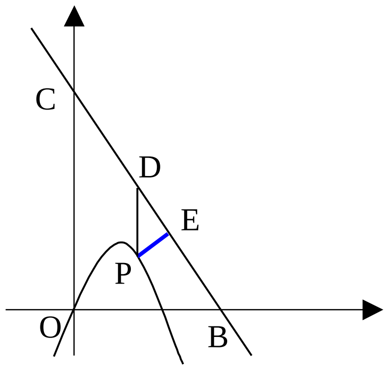
$$\frac{EP}{PD} = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow EP = \frac{3}{4} PD.$$

Taisnes BC vienādojums ir $y = 4 - \frac{4}{3}x$. Ja parabolas punkta P koordinātas ir (x, $2x - x^2$), tad punkta D koordinātas ir $(x, 4 - \frac{4}{3}x)$. Aprēķinām nogriežņa PD garumu:

$$PD = 4 - \frac{4}{3}x - (2x - x^2) = x^2 - \frac{10}{3}x + 4.$$

Garums |PD| būs minimāls, ja $x = \frac{5}{3}$ (parabolas virsotnes abscisa). Tātad

$$\min |PE| = \min \frac{3}{4}|PD| = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{25}{9} - \frac{50}{9} + 4\right) = -\frac{25}{12} + 3 = \frac{11}{12}.$$



2. zīm.

Cik viegli kļūdīties

Atrast attālumu no parabolas $y = \sqrt{x}$ līdz punktam (c, 0).

Anniņa. Izsaku attāluma kvadrātu starp doto punktu (c, 0) un patvaļīgu parabolas punktu $(x, \sqrt{x})$:

$$d^2 = (c - x)^2 + x = x^2 + (1 - 2c)x + c^2.$$

Izdalu pilno kvadrātu

$$\left(x + \frac{1-2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2c}{2}\right)^2 + c^2 \geq -\left(\frac{1-2c}{2}\right)^2 + c^2 = -\frac{1}{4} + c.$$

Izvelkot kvadrātsakni, iegūstu minimālo attālumu $d = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$.

Jānītis. Šāds rezultāts nevar būt pareizs. Acīmredzami, ka punkts (0, 0) pieder parabolai un tātad attālumam vajadzēja iznākt 0.

Anniņa. Tiešām. Precizēšu, ka iegūtā attāluma formula ir pareiza tad, ja zemsaknes izteiksme ir nenegatīva, t. i., ja $4c - 1 \geq 0$.

Jānītis. Ja $c = \frac{1}{4}$, tad iznāk, ka $d = 0$. Bet punkts ar šādu abscisu nepieder parabolas grafikam!

Maijiņa. No Anniņas risinājuma skaidrs, kādā punktā realizējas minimālais attālums. Tas ir tad, kad $x + \frac{1-2c}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1-2c}{2} = c - \frac{1}{2}$. Vērtība $c = \frac{1}{4}$ nav pieļaujama, jo tad $x < 0$.

Pieļaujami ir tikai tādi c, kuriem $x = c - \frac{1}{2} \geq 0$, t. i., $c \geq \frac{1}{2}$.

Jānītis. Iebilstu, jo tad nepamatoti tiek izslēgts, piemēram, punkts $x = 0$. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem pieļaujami ir visi c.

Pēterītis. Nu tad atbilde ir šāda: ja $c \geq \frac{1}{2}$, tad minimālais attālums ir tas, ko atrada Anniņa, bet citos gadījumos $d = c$.

Jānītis. Jā, tā ir, bet tikai ar nelielu precizējumu: $d = |c|$.

Jautrīte. Šis precizējums mani neuztrauc, bet mulsina tas, ka formula $d = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$ neatbilst garuma mērvienībai. Iedomāsimies, ka $c = 1\text{cm}$ (centimetrs). Tad, kas tā par attāluma mērvienību kvadrātsakne no "cm"?

Norādījums. Izveidojiet zīmējumu, tad būs vienkāršāk saprast, kāda ir pareizā atbilde.

Piezīme. Grāmata [TF, 213] prasīts: "Atrast punktu uz līknes $y = \sqrt{x}$, kurš ir vistuvāk punktam $(c, 0)$: (a) ja $c \geq \frac{1}{2}$, (b) ja $c < \frac{1}{2}$."

Attālums starp taisnēm

Risinot uzdevumus par attālumu noteikšanu starp taisnēm, var noderēt šāda informācija. "Divas taisnes sauc par *šķērsām*, ja tās nekrustojas un nav paralēlas. Nogriezni, kura galapunkti atrodas uz divām dotajām šķērsajām taisnēm un kurš ir perpendikulārs pret abām šīm taisnēm, sauc par *šķērso taišņu kopējo perpendikulu*. Attālums starp divām šķērsām taisnēm ir vienāds ar šo taišņu kopējā perpendikula garumu.

Triju perpendikulu teorēma. Taisne, kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra pret slīpni tad un tikai tad, ja tā ir perpendikulāra pret slīpnes projekciju." [REM]

"Attālumu starp šķērsām taisnēm var noteikt arī šādi:

1) novelk plakni β, kura ir perpendikulāra pret vienu no šķērsajām taisnēm ($a \perp \beta$);

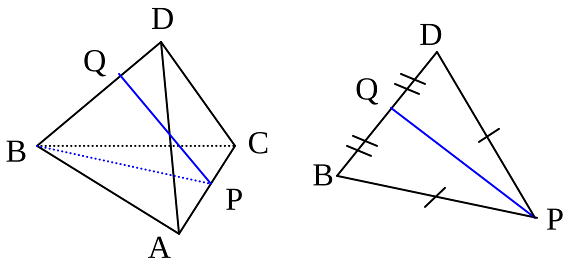
2) projicē šajā plaknē taisnes a un b (a projicējas par punktu A, bet b par taisni CE);

3) aprēķina attālumu no punkta A līdz taisnei CE, tas arī ir meklētais attālums." [KZZ2, 167]

15. piemērs. Aprēķināt attālumus starp tetraedra šķautnēm, ja tās visas vienādas ar a.

Iespējami divi gadījumi: šķautnes krustojas (tad attālums ir 0) un – šķautnes nekrustojas. Pēdējā gadījumā jānosaka attālums starp divām šķērsām taisnēm. Noteiksim attālumu starp taisnēm BD un AC (3. zīm.). Kur jāatrodas punktam P uz taisnes AC un punktam Q uz taisnes BD, lai attālums |QP| būtu vismazākais? Nav grūti ievērot, ka tie ir nogriežņu AC un BD viduspunkti. Ja P ir AC viduspunkts, tad DP $\perp$ AC un BP $\perp$ AC. Vienādsānu trijstūra BDP augstums PQ ir nogriežņu BD un AC kopējais perpendikuls. Tā garumu d nosakām pēc Pitagora teorēmas:

$$d^2 = BP^2 - BQ^2 = BA^2 - AP^2 - BQ^2 = a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



3. zīm.

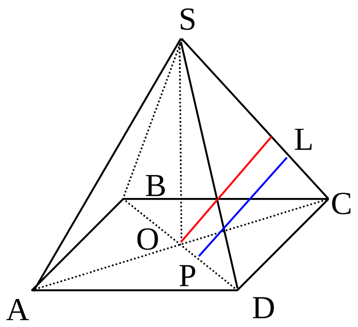
16. piemērs. Regulāras piramīdas SABCD pamata ABCD mala ir a, bet sānu šķautne ir $2a$. Aplūko nogriežņus, kuru viens galapunkts atrodas uz pamata diagonāles BD, bet otrs uz sānu šķautnes SC. Noteikt vismazāko no šādu nogriežņu garumiem. [KZZ1, 208. uzd.]

Aplūkosim piramīdu SABCD (4. zīm.). No kvadrāta centra O novelkam perpendikulu OE pret SC (5. zīm.). Plakne ASC ir perpendikulāra pret plakni ABCD. Tas nozīmē, ka SC projekcija uz pamata plakni ir OC. Tā kā BD ir perpendikulārs pret OC, tad BD ir perpendikulārs arī pret OE. Tātad OE ir šķērso taišņu BD un SC kopējais perpendikuls. Noteiksim OE garumu. Pēc Pitagora teorēmas

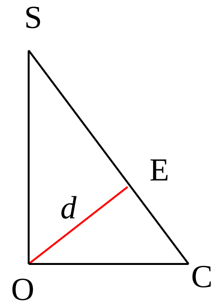
$$\mathrm{OS}^2 = \mathrm{SC}^2 - \mathrm{OC}^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{7a^2}{2} \Rightarrow \mathrm{OS} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$

No vienādības SC·OE = SO·OC (tā izsaka divkāršotu trijstūra OSC laukumu) izriet, ka

$$2a \cdot \mathrm{OE} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \mathrm{OE} = \frac{a\sqrt{7}}{4} .$$



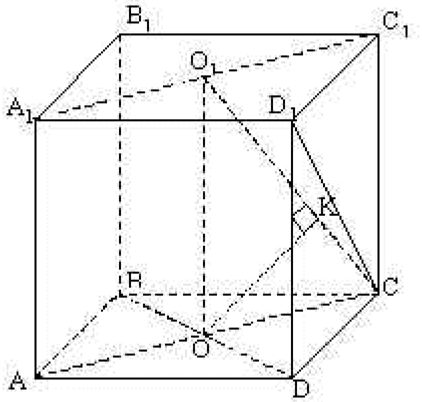
4. zīm.



5. zīm.

17. piemērs. “Dots kubs, kura šķautnes garums ir a. Aprēķināt attālumu starp kuba divu blakus esošo skaldņu diagonālēm, kurām nav kopīgo punktu. [LU iestājeksāmenu uzdevums 1999. g., B līmenis, 5. uzdevums]

Internetā ir atrodams šāds "Risinājums: Dots: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - kubs, AB = a



Zīmējuma pamatojums:
1. Projicē abas diognāles plaknē A_1ACC_1.
2. BD projekcija ir punkts O, jo taisne perpendikulāra plaknei .
   D_1C projekcija - O_1C.
3. OK - tuvākais attālums starp taišņu projekcijām.
   Jāaprēķina : OK.

$AC = \sqrt{2}a$ – pēc Pitagora teorēma;

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$OO_1 = a,$

$$O_1C = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$S_{OO_1C} = \dfrac{OK \cdot O_1C}{2}$ vai arī $S_{OO_1C} = \dfrac{OO_1 \cdot CO}{2}$, no kurienes seko

$$OK \cdot O_1C = OO_1 \cdot CO$$

$$OK = \frac{OO_1 \cdot CO}{O_1C}$$

$$OK = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a = \frac{2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

Atbilde: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$."

Piezīme. Piedāvātais risinājums satur dažas paviršības un neracionālu pierakstu. Piemēram, netiek paskaidrots, kāpēc attālumu starp šķērsām taisnēm var aizstāt ar attālumu starp šo taišņu projekcijām uz jebkuru vai tomēr uz kādu piemērotu plakni. Vajadzīgais paskaidrojums atrodams grāmatā [KZZ2, 167]. Ģeometriskais risinājums "nepasaka", kuri diagonāļu punkti realizē minimālo attālumu.

Uzdevuma risinājuma labāks izklāsts (tiesa, tam nav pievienots zīmējums) ir atrodams, piemēram, grāmatā [PŠ, 18] "Dots kubs ar malas garumu 1. Atrast leņķi un attālumu starp šķērsām divu blakus skaldņu diagonālēm."

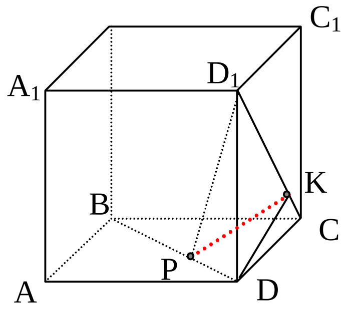
Attālums aprēķināts šādi: "Viegli pārbaudīt, ka taisne *BD* ir perpendikulāra plaknei ACA_1C_1; tāpēc taisnes projekcija uz šo plakni būs nogriežņa *AC* viduspunkts *M*. Analoģiski punkta B_1 projekcija uz šo plakni būs nogriežņa A_1C_1 viduspunkts N. Tādējādi attālums starp AB_1 un BD ir vienāds ar attālumu starp punktu M un taisni AN. Ja taisnleņķa trijstūra katetes ir vienādas ar a un b, bet tā hipotenūza ir vienāda ar c, tad attālums no taisnā leņķa virsotnes līdz hipotenūzai ir vienāds ar ab/c. Taisnleņķa trijstūrim AMN katetes ir vienādas ar 1 un $1/\sqrt{2}$, tāpēc tā hipotenūza vienāda ar $\sqrt{3/2}$, bet meklējamais attālums vienāds ar $1/\sqrt{3}$." [PŠ, 22-23]

Uzrādīsim citu algebriska rakstura risinājumu, kurā netiek izmantota projicēšana un kurā ģeometriskajai iztēlei nav lielas nozīmes. Izmantoto metodi var viegli vispārināt uz gadījumiem, kad šķērsu taišņu vietā aplūko citas līknes.

Bet, vispirms iepazīsimies ar dažiem "zemūdens akmeņiem", kuri var paklupināt vai samulsināt ne vienu vien risinātāju.

Sofisms: ***Divi kopējie perpendikuli***

Aprēķināt (minimālo) attālumu PK starp kuba skaldņu diagonālēm, sk. 7. zīmējumu.



7. zīm.

Anniņa. Apzīmēju: PK = d, PD = x, KC = y.

Pieņemu, ka PK ir taišņu BD un D_1C kopējais perpendikuls. Izsaku KD^2 divos veidos, no taisnleņķa trijstūra PKD, lietojot Pitagora teorēmu, un no trijstūra CKD, lietojot kosinusu teorēmu. Tā kā D_1C ir kvadrāta diagonāle, tad leņķis D_1CD ir 45 grādi.

$$d^2 + x^2 = a^2 + y^2 - ay\sqrt{2} \qquad (1)$$

Analogi divos veidos izsaku PC^2:

$$d^2 + y^2 = a^2 + x^2 - ax\sqrt{2} \qquad (2)$$

No (1) atņemu (2):

$$x^2 - y^2 = y^2 - x^2 - ay\sqrt{2} + ax\sqrt{2}$$

$$2x^2 - 2y^2 = a\sqrt{2}(x - y).$$

Saīsinu vienādības abas puses ar $(x - y)$.

$$2(x + y) = a\sqrt{2},$$

$$x + y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad (3).$$

Saskaitu (1) un (2)

$$2d^2 = 2a^2 - ay\sqrt{2} - ax\sqrt{2}$$

$$2d^2 = 2a^2 - a\sqrt{2}(x + y)$$

Aizstāju $x + y$ ar sakarības (3) labo pusi:

$$2d^2 = 2a^2 - a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = 2a^2 - a^2 = a^2$$

$$d^2 = \frac{a^2}{2},\ d = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tātad minimālais attālums starp BD un D_1C ir $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Jānītis.
Aprēķināšu attālumu no D līdz D_1C. Kvadrātam diagonāles ir perpendikulāras, tāpēc meklējamais attālums ir puse no diagonāles garuma, t. i., $DK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ja K ir kvadrāta DD_1C_1C centrs. Redzam, ka Anniņai kaut kur ir kļūda, jo, vai tad var būt divi minimālie attālumi?
Anniņa. Kāpēc gan ne? Pirmkārt, mums nav mācīts, ka minimālais attālums starp šķērsām taisnēm var sasniegties tikai vienā vietā. Otrkārt, paralēlām taisnēm minimālais attālums ir visās vietās.
Jānītis. Veikšu rūpīgāku pārbaudi. Ja $PK = DK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, kur K ir skaldnes DD_1C_1C centrs, tad trijstūris PKD ir vienādsānu trijstūris ar pamatu DP. Bet augstums KE, kas novilkts no virsotnes pret pamatu DP ir īsāks nekā atrastais minimālais attālums DK. Tas ir absurds.

Kur kļūda?
Jānītis. Kļūda nav tālu jāmeklē! Anniņa vienādības abas puses saīsināja ar $(x - y)$, citiem vārdiem ir veikusi dalīšanu ar nulli. Tas nozīmē, ka minimālais attālums realizēsies gadījumā, kad $x = y$.

Jautrīte. Ja tā, tad no (1) dabūjam, ka jāmeklē minimums izteiksmei

$$d^2 + x^2 = a^2 + x^2 - ax\sqrt{2} \Rightarrow d^2 = a^2 - ax\sqrt{2} \to \min .$$

Ņemot $x = a$, nonākam pie absurda, ka $d^2 < 0$.

Izskaidrojiet šo sofismu!

<u>18. piemērs</u>. Atrast attālumu starp divām taisnēm, ja viena no tām iet caur punktiem (0, 0, 0) un (1, 2, 3), bet otra – caur punktiem (0, 1, 0) un (1, 3, 3).

Dotās taisnes pierakstīsim formā $(x, 2x, 3x)$ un $(t, 2t + 1, 3t)$ un sastādīsim attāluma kvadrātu starp šiem punktiem:

$$d^2 = (x - t)^2 + (2x - 2t - 1)^2 + (3x - 3t)^2.$$

Apzīmēsim $u = x - t$. Tad

$$d^2 = u^2 + (2u - 1)^2 + (3u)^2 = 14u^2 - 4u + 1 = 2u(7u - 2) + 1.$$

Minimuma punkts ir $u_{\min} = \frac{1}{7}$ un meklējamais attālums $d = \sqrt{\frac{5}{7}}$.

<u>Eksāmena uzdevuma risinājums ar algebrisku metodi</u>.

Novietosim kubu tā, lai AD atrastos uz X-ass, AB uz Y-ass un AA_1 uz Z-ass (sk. 7. zīm.). Tad punktu B, D, C un D_1 koordinātas ir $B(0, a, 0)$, $D(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$ un $D_1(a, 0, a)$. Taisnes BD punktus uzdosim formā $(t, a - t, 0)$, bet taisnes D_1C punktus formā $(a, u, a - u)$. Parametru vērtības $t = 0$ un $t = a$, $u = 0$ un $u = a$ atbilst attiecīgi punktiem B un D, D_1 un C. Uzrakstām attāluma kvadrātu starp aplūkojamo taišņu punktiem:

$$d^2 = (a - t)^2 + (u + t - a)^2 + (a - u)^2 = 2t^2 + t(2u - 4a) + a^2 + 2(u - a)^2.$$

Iegūtā funkcija ir parabola attiecība pret t. Tā sasniedz minimālo vērtību punktā (parabolas virsotnes abscisa)

$$t = -\frac{2u - 4a}{4} = a - \frac{u}{2} \quad (*).$$

Ievietojot šo t vērtību d^2 izteiksmē, iegūtu kvadrātfunkciju attiecībā pret u. Bet, mērķi var sasniegt nedaudz racionālākā veidā. Simetrijas dēļ (d^2 izteiksme nemainās, ja t un u mainām vietām) formula (*) ir spēkā, ja t un u mainām vietām. Atrisinām sistēmu

$$\begin{cases} 2t = 2a - u \\ 2u = 2a - t \end{cases} \Rightarrow t = u = \frac{2a}{3} \Rightarrow d^2 = 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Piezīme. Šis risinājums ļauj pateikt, kurā vietā realizējas minimālais attālums |PK|. Zinot, ka $t = u = \frac{2a}{3}$, vienkārši aprēķināt punkta P(t, $a - t$, 0) un K(a, u, $a - u$) koordinātas: $\mathrm{P}\left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, 0\right)$, $\mathrm{K}\left(a, \frac{2a}{3}, \frac{a}{3}\right)$. No šejienes izriet, ka $\mathrm{DP} = \mathrm{CK} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Tas nozīmē, ka Jānīša secinājums (sk. augstāk izklāstīto sofismu) par to, ka minimums realizēsies gadījumā $x = y$, ir pareizs.

Atrisiniet elementārā veidā

1. Atrast attālumu no kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ virsotnes A līdz plaknei A_1C_1D. No kuras kuba virsotnes attālums līdz šai plaknei ir vislielākais.
2. Atrast attālumu starp trijstūriem A_1C_1D un AB_1C.
3. Regulāras četrstūra prizmas augstums ir h, bet pamata mala – a. Aprēķināt pamata malas attālumu līdz tai prizmas diagonālei, kas šo pamatu nekrusto. [KUK, 53]
4. Atrast funkcijas $y = x^2 + 1$ grafika punktu, kurš ir vistuvāk punktam (3, 7). [Sw]
5. Atrast attālumu no punkta (–1, 3, 2) līdz plaknei $x - 2y + z = 4$. [Ant, 948]
6. Atrast attālumu starp taisnēm ($3t$, $2t$, t) un ($2t$, $2t + 3$, $2t$)
7. Atrast attālumu no punkta (2, 1, –1) līdz plaknei $4x - 3y + z = 5$. [Sw, 769]

Grāmatā [Ant] doti 16 uzdevumi, kurus paredzēts risināt, izmantojot Lagranža reizinātājus. Daži no tiem:

8. Atrast taisnes $2x - 4y = 3$ punktu, kurš ir vistuvāk sākumpunktam. [Ant, 956]
9. Atrast plaknes $x + 2y + z = 1$ punktu, kurš ir vistuvāk sākumpunktam.
10. Atrast plaknes $4x + 3y + z = 2$ punktu, kurš ir vistuvāk punktam (1, –1, 1).
11. Atrast virsmas $xy - z^2 = 1$ punktu, kurš ir vistuvāk sākumpunktam. [Ant, 956]
12. Atrast attālumu no sfēras $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ līdz punktam (2, 3, 4). [Sw, 777]
13. Atrast attālumu no plakņu $3x + 2y + z = 6$, $x - 4y + 2z = 8$ šķēluma līdz sākumpunktam. [Sw]
14. Atrast vistuvāko un vistālāko riņķa līnijas $x^2 + y^2 = 45$ punktu līdz punktam (1, 2). [Ant, 956]
15. Atrast funkcijas $y = x^3$ grafika punktu, kurš ir vistuvāk punktam (4, 0) un noteikt šī punktā x-koordinātu. [Sw]
16. Atrast punktam (3; 4) vistuvāko punktu uz riņķa līnijas $x^2 + y^2 = 1$. [Sad, 27]
17. Atrast koordinātu sākumpunktam vistuvāko punktu uz līknes $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$. [Sad, 27]

18. Aprēķināt punkta $M(2; -1; 3)$ attālumu līdz taisnei. [UKAM, 55]:

$$1)\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1};\quad 2)\ \begin{cases} x=t+1, \\ y=-t+2, \\ z=2t; \end{cases}\quad 3)\ \begin{cases} x-y=0, \\ z=3. \end{cases}$$

19. Aprēķināt attālumu starp taisnēm [UKAM, 55]

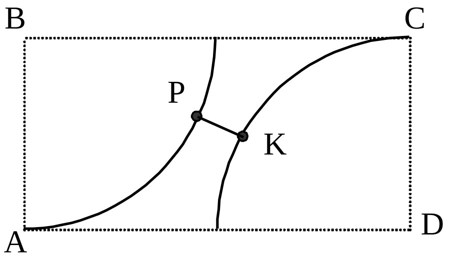
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}\ \text{un}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

20. Koordinātu plaknē doti divi punkti A(-8; 0) un B(0; -6) (garums mērīts centimetros). Punkts A sāk vienmērīgi pārvietoties ar ātrumu 0,2 cm/s abscisu ass virzienā, bet punkts B – ar ātrumu 0,4 cm/s ordinātu ass virzienā. Pēc cik sekundēm attālums starp šiem punktiem būs vismazākais? [EMP]

21. Dots kubs ar šķautni a. Cik gara ir īsākā lauztā līnija, kas atrodas uz kuba virsmas un savieno divas pretējās kuba virsotnes [KUK, 53]

22. Aprēķināt $\min[(x-u)^2 + (y-v)^2]$, ja $x^2 + (y-1)^2 = 1$ un $(u-2)^2 + v^2 = 1$.

23. Divas salas jāsavieno ar tiltu tā, lai tilta garums PK, sk. 7. zīmējumu, būtu vismazākais. Salu krasti, kuri jāsavieno, ir riņķa līniju loki ar centru attiecīgi taisnstūra ABCD virsotnēs B un D un rādiusu AB. Zinot taisnstūra malu garumus a un b, aprēķināt tilta minimālo garumu un noteikt vietu, kurā tas jābūvē?



8. zīm.

Attālumu kvadrātu summa

Kāds punkts minimizē attālumu kvadrātu summu līdz trijstūra virsotnēm un kāds līdz trijstūra malām? Kāds punkts minimizē attālumu kvadrātu summu līdz uzdotiem n punktiem? Uzdevumi, kuros jāmeklē ekstremālās vērtības attālumu kvadrātu summai, parasti ir vienkāršāki nekā uzdevumi, kuros jāmeklē pašu attālumu summa. Statistikā, ekonomikā plaši lieto mazāko kvadrātu metodi, minimizēta tiek tieši (noviržu) attālumu kvadrātu summa, nevis pašu attālumu summa. Daži uzdevumi par attālumu kvadrātu summu ir atrisināti darba iepriekšējās daļās. Piemēram, kā jāizvēlas trīs punkti uz riņķa līnijas, lai attālumu kvadrātu summa būtu vislielākā? [C3].

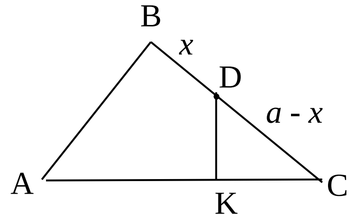
1. uzdevums. Taisnleņķa trijstūrī ABC katete $BC = a$ un tā veido ar hipotenūzu AC leņķi α. Punkts D atrodas uz katetes BC, un starp visiem BC punktiem tā attālumu kvadrātu summa līdz taisnēm AC un AB ir vismazākā. Aprēķināt BD. [KZZ1]

Apzīmēsim |BD| = x, sk. 9. zīm. Tad |DK| = $(a - x)\sin C$ un attālumu kvadrātu summa S līdz taisnēm AC un AB ir vienāda ar

$$S = x^2 + (a - x)^2\sin^2 C = (1 + \sin^2 C)x^2 - 2ax\sin^2 C + a^2\sin^2 C.$$

Kvadrātfunkcijas S minimuma punkts ir $x_{\min} = \dfrac{a\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ un minimālā vērtība

$$S_{\min} = -\frac{a^2\sin^4\alpha}{(1+\sin^2\alpha)} + a^2\sin^2\alpha = \frac{a^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$



9. zīm.

2. uzdevums. Doti punkti A, B, C un D. Pierādīt, ka

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2,$$

turklāt vienādība tiek sasniegta tikai tad, ja ABCD – paralelograms. [Pr, 9]

Grāmatā [Pr, 15-16] uzdevums risināts ar vektoru palīdzību, atsaucoties uz dažiem iepriekš atrisinātiem uzdevumiem. Atrisināsim uzdevumu ar citu metodi. Vispirms precizēsim, ka dotie punkti neatrodas uz vienas taisnes. Pretējā gadījumā vienādība var pastāvēt arī tad, kad punkti A, B, C, un D neveido paralelogramu. Piemēram,

A(–1, 0), B(–2, 0), C(1, 0), D(2, 0).

Pieņemsim, ka punktu koordinātas attiecīgi ir (x_i, y_i). Tad jāpierāda šāda nevienādība, to apzīmēsim ar (*),

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 +$$
$$+ (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 \geq (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2.$$

Apzīmēsim: $a = x_1 - x_2$, $b = x_2 - x_3$, $c = x_3 - x_4$, $d = x_4 - x_1$. Tad $a + b = x_1 - x_3$, $b + c = x_2 - x_4$ un $a + b + c + d = 0$. Ievērosim, ka (*) iegūstama kā sekas no šādas nevienādības

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)^2 + (b + c)^2.$$

Par tās pareizību pārliecināmies pēc vienkāršiem pārveidojumiem:

$$d^2 \geq 2ab + b^2 + 2bc$$

$$(a + b + c)^2 \geq 2ab + b^2 + 2bc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 2ab + b^2 + 2bc$$

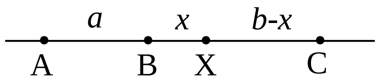
$$a^2 + c^2 + 2ca \geq 0.$$

Nevienādība pārvēršas par vienādību, ja $a = -c$, t. i., $x_1 - x_2 = x_4 - x_3$ un $y_1 - y_2 = y_4 - y_3$. Iegūtās vienādības nozīmē, ka vektori AB un CD ir paralēli un vienādi pēc moduļa.

Cik viegli kļūdīties!

Uz taisnes doti trīs punkti A, B, C. Atrast punktu X, lai attālumu kvadrātu summa no X līdz A, līdz B un C būtu vismazākā.

Anniņa.
Apzīmēšu attālumus starp A un B, B un C attiecīgi ar a, un b. Ar x apzīmēju attālumu no meklējamā punkta x līdz punktam B, sk. 10. zīm.



10. zīm.

Tad attāluma kvadrātu summa ir

$$S := (a + x)^2 + x^2 + (b - x)^2.$$

Apzīmēšu $u = a + x$, $v = b - x$.
Tad jāmeklē minimums kvadrātu summai $S = u^2 + x^2 + v^2$ pie nosacījuma

$$u + x + 2v = (a + x) + x + (2b - 2x) = a + 2b.$$

Lietoju Košī nevienādību

$$(u + x + 2\text{v})^2 \leq (1^2 + 1^2 + 2^2)(u^2 + x^2 + v^2)$$
$$(a + 2b)^2 \leq 6S.$$

Tātad $S \geq \dfrac{(a+b)^2}{6}$ un $\min S = \dfrac{(a+b)^2}{6}$.

Jānītis.
Punktu A, B, C koordinātas apzīmēju ar a, b, c. Nezināmā punkta koordinātu apzīmēju ar x. Tad jāmeklē minimums kvadrātu summai

$$S := (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2.$$

Apzīmēju $a - x = u$, $b - x = v$, $x - c = w$ un risinu minimizācijas uzdevumu:

$$\min S = \min(u^2 + v^2 + w^2) = ?$$
$$u + v + 2w = a + b - 2c.$$

Lietoju Košī nevienādību:

$$(u + v + 2w)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 2^2)(u^2 + v^2 + w^2)$$
$$(a + b - 2c)^2 \leq 6(u^2 + v^2 + w^2) = 6S.$$

No šejienes dabūju

$$\min 6S = (a + b - 2c)^2.$$

Kam taisnība?

Maijiņa.
Lai atbildētu, jāsakārto apzīmējumi, Anniņa ar Jānīti a, b, c lieto dažādās nozīmēs. Anniņas a, b apzīmēsim ar a_A un b_A , bet Jānīša ar a_J, b_J un c_J. Starp šiem apzīmējumiem pastāv šādas sakarības:
$a_A = b_J - a_J$
$b_A = c_J - b_J$
$a_A + 2b_A = b_J - a_J + 2(c_J - b_J) = - a_J - b_J + 2c_J = - (a_J + b_J - 2c_J)$

Tā kā $k^2 = (- k)^2$, tad abiem iegūts viens un tas pats rezultāts.

Kārlītis. Vēl varētu pastāvēt šaubas, vai iegūtā nevienādība var kļūt arī par vienādību. Lai noskaidrotu minimuma eksistences jautājumu, minimizācijas uzdevumu

$$\min S = \min(u^2 + v^2 + w^2) = ?$$
$$u + v + 2w = a + b - 2c$$

interpretēšu ģeometriski. Apzīmēju $D = a + b - 2c$, tad $u + v + 2w - D = 0$ ir plakne, bet $u^2 + v^2 + w^2$ izsaka attālumu no šīs plaknes punkta (u, v, w) līdz koordinātu sākumpunktam. Zināms, ka šis attālums d ir vienāds ar

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|D|}{6} = \frac{|a + b - 2c|}{6}.$$

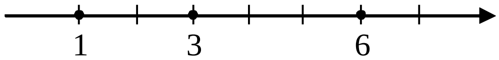
Jautrīte. Nesteigsimies ar atbildi. Pārbaudīsim vēl vienu variantu. Ievērojam, ka ne tikai Jānīša risinājumā izmantotais lielums $u + v + 2w$ ir konstants lielums, bet arī

$$u - 2v - w = a - x - 2(b - x) + c - x = a - 2b + c$$

ir konstants lielums. Tāpat kā Anniņa un Jānītis lietoju Košī nevienādību:

$$(u - 2v + w)^2 \le (1^2 + 2^2 + 1^2)(u^2 + v^2 + w^2)$$
$$(a - 2b + c)^2 \le 6S$$
$$S \ge \frac{(a - 2b + c)^2}{6}.$$

Apskatīsim gadījumu $a = 3$, $b = 6$, $c = 1$ (sk. 11. zīm.).



11. zīm.

Tad $(a - 2b + c)^2 = (3 - 12 + 1)^2 = 64$, bet $(a + b - 2c)^2 = (3 + 6 - 2)^2 = 49$.
Tas nozīmē, ka visi iepriekšējie risinājumi tomēr nav devuši pareizo atbildi.
Jānītis. Kā tā? Vērtība "49" taču ir mazāka nekā tavējā "64".
Jautrīte. Mans piemērs parāda, ka minimālā vērtība nevar būt mazāka par "64".
Atrodiet defektus Anniņas un Jānīša risinājumā. Kāda ir pareizā atbilde? Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Noskaidrosim, kāds punkts minimizē attālumu kvadrātu summu un attālumu summu līdz trijstūra virsotnēm. Vai abu minimizācijas uzdevumu

$$\min(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2) \text{ un } \min(|OA| + |OB| + |OC|)$$

atrisinājumu dod viens un tas pats punkts O_{min}?

Attālumu kvadrātu summa līdz trijstūra virsotnēm

Mediānu krustpunkta ekstremālā īpašība

Attālumu kvadrātu summu līdz trijstūra virsotnēm minimizē mediānu krustpunkts.

Pierādījums. Apzīmēsim meklējamā punkta O koordinātas ar (x, y) un uzskatīsim, ka trijstūris novietots tā, ka A = (0, 0), B = (p, q) un C = (u, 0). Tad

$$|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 = x^2 + y^2 + (x - p)^2 + (y - q)^2 + (x - u)^2 + y^2 =$$
$$3x^2 - 2x(p + u) + 3y^2 - 2yq + p^2 + q^2.$$

Iegūtā izteiksme ir kvadrātiska funkcija, kas savu minimumu sasniedz parabolu

$$3x^2 - 2x(p + u) \text{ un } 3y^2 - 2yq$$

virsotnēs, t. i.,

$$x = \frac{p+u}{3}, \quad y = \frac{q}{3}.$$

Ievērojam, ka iegūtais punkts (x, y) nav nekas cits kā mediānu krustpunkts.
Mediānu krustpunktu mēdz saukt arī par centroīdu (vai smaguma centru). Pie šāda jēdziena nonāca jau Arhimēds, aplūkojot homogēnas trīsstūrveida plāksnes smaguma centru.
Piezīme. Risinājumā nekur netika izmantots tas, ka ABC ir trijstūris. Citiem vārdiem, A, B un C var būt patvaļīgi plaknes punkti.

3. uzdevums. Atrast nogriežņa $[a, b]$ punktu c, lai attālumu kvadrātu summa $(c - a)^2 + (c - b)^2$ būtu minimāla.

4. uzdevums. Uz taisnes doti trīs punkti P_1, P_2 un P_3. Kur jāņem ceturtais punkts, lai attālumu kvadrātu summa būtu minimāla?

Uzskatīsim, ka punktu P_1, P_2 un P_3 koordinātas ir attiecīgi a, b un c. Tad jāminimizē funkcija

$$F = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 = 3x^2 - 2x(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2.$$

Šai kvadrātfunkcijai minimuma punkts ir $x_{\min} = \dfrac{a+b+c}{3}$, t. i., triju skaitļu a, b un c vidējais aritmētiskais A. Atradīsim F minimālo vērtību

$$F_{\min} = 3A^2 - 6A^2 + a^2 + b^2 + c^2 =$$
$$-\frac{(a+b+c)^2}{3} + a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}\left(3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a+b+c)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc\right) = \frac{1}{3}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right).$$

Noskaidrosim, kā vispārināma “simetriskā” formula

$$\min\left((x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2\right) = \frac{1}{3}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

n punktu gadījumā.

5. uzdevums. Uz taisnes doti n punkti P_1, P_2, ..., P_n. Kāds punkts minimizē attālumu kvadrātu summu S? Aprēķināt S, ja punktu koordinātas ir attiecīgi a_1, a_2, ..., a_n.

Ar A un K apzīmēsim attiecīgi doto skaitļu a_1, a_2, ..., a_n vidējo aritmētisko un kvadrātisko. Tad

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^2 - 2xa_i + a_i^2) = nx^2 - 2x\sum_{i=1}^{n}a_i + \sum_{i=1}^{n}a_i^2 = nx^2 - 2xnA + nK^2 =$$

$$= nx(x-2A) + nK^2 \geq -nA^2 + nK^2 = n(K^2 - A^2).$$

Minimuma punkts ir vidējais aritmētiskais $x_{\min} = A$, bet minimālā vērtība $S_{\min} = n(K^2 - A^2)$.

Vingrinājums. Pierādiet, ka

$$\min \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i<j}^{n} (a_i - a_j)^2$$

6. uzdevums. Doti trīs punkti A, B un C. Kur jāņem ceturtais punkts, lai attālumu kvadrātu summa būtu minimāla?

7. uzdevums. Doti n plaknes punkti $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Kāds punkts minimizē attālumu kvadrātu summu S? Aprēķināt S, ja punktu koordinātas ir attiecīgi $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$.

Nezināmā punkta M koordinātas apzīmēsim ar (x, y). Tad

$$|P_iM|^2 = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = x^2 - 2xa_i + (a_i)^2 + y^2 - 2yb_i + (b_i)^2.$$

Apzīmējam ar A un B, K_a un K_b attiecīgi skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko un summējam visus attālumus, kad i mainās no 1 līdz n:

$$S = nx^2 - 2xnA + n(K_a)^2 + ny^2 - 2ynB + n(K_b)^2.$$

Minimuma punkta koordinātas ir (sk. 8. uzd.)

$$x_{\min} = A,\ y_{\min} = B \text{ un } S_{\min} = n(K_a^2 - A^2) + n(K_b^2 - B^2).$$

Piezīme. Grāmatā [Zet,193-194] ir pierādīta Leibnica teorēma: "*Attālumu kvadrātu summa no patvaļīga punkta līdz sistēmas punktiem ir vienāda ar attālumu kvadrātu summu no centroīda līdz sistēmas punktiem, kurai pieskaitīts ar sistēmas punktu skaitu pareizināts attāluma kvadrāts no centroīda līdz punktam.*" No teorēmas kā sekas iegūts punkts (centroīds), kurš minimizē attālumu kvadrātu summu. Leibnica teorēmu vieglāk uztvert formulas veidā:

$$\sum_{i=1}^{n} P_iM^2 = \sum_{i=1}^{n} P_iC^2 + nMC^2$$

Formulas pierādījums. Izvērstā veidā vienādības kreisā un labā puse attiecīgi ir:

$$\sum P_iM^2 = \sum \left((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \right) =$$

$$\sum P_iC^2 + nMC^2 = \sum \left((a_i - A)^2 + (b_i - B)^2 \right) + n(x - A)^2 + n(x - B)^2 .$$

Summēšana pēc noklusēšanas tiek veikta, kad i mainās no 1 līdz n. Formulas pareizība izriet no šādiem pārveidojumiem:

$$\sum (A - a_i) = \sum A - \sum a_i = nA - nA = 0$$

$$\sum (x - a_i)^2 = \sum \left((x - A) + (A - a_i) \right)^2 = \sum (x - A)^2 + \sum (A - a_i)^2 \text{, jo}$$

$$\sum 2(x - A)(A - a_i) = 2(x - A) \sum (A - a_i) = 0.$$

Attālumu kvadrātu summa līdz trijstūra malām

Atrast punktu P, kurš minimizē attālumu kvadrātu summu līdz trijstūra malām.

1. risinājums. Grāmatā [FL, 29] atrodams šāds risinājums (sk. 12. zīm.):

"Ar x, y, z apzīmē patvaļīga punkta P attālumus līdz trijstūra ABC malām BC, AC, AB un ar a, b, c šo malu garumus. Lieto identitāti

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=(ax+by+cz)^2+$$
$$+\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 \quad (30)$$

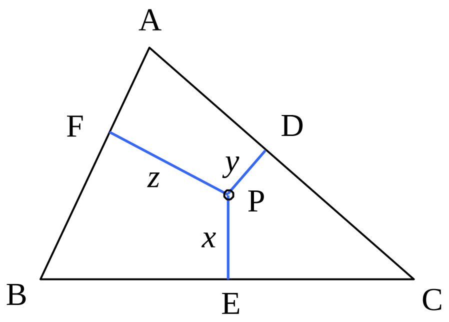
(ko pārbauda, atverot abās pusēs iekavas) un ievēro, ka ax + by + cz ir trijstūra ABC divkāršots laukums, tātad neatkarīgs no x, y, z. Tādēļ (30) kreisajai pusei un līdz ar to summai $x^2 + y^2 + z^2$ minimālā vērtība ir tādā punktā P, kur

$$\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=0\text{.”}$$

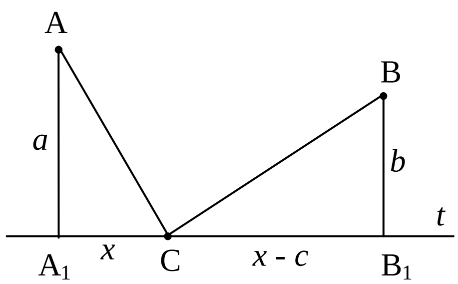
“*Trijstūra ABC punkts, kura attālumu kvadrātu summa līdz trijstūra malām ir minimālā, ir šī trijstūra Lemuāna punkts.* (Šo rezultātu publicējis uzdevuma veidā Liljē 1809.g.).”

Piezīme. Pierādījumā lietotajā identitātē pēdējie trīs saskaitāmie nozīmē determinantus. Pati identitāte pazīstama ar nosaukumu Lagranža vai Košī-Lagranža identitāte, sk., piemēram, [C1, 79]. Nepieciešamie paskaidrojumi un īsas vēsturiskas ziņas dotas [FL, 23]: “*Taisni, kas attiecībā uz trijstūra bisektrisi ir simetriska ar mediānu, pēc Dokaņa (d'0cagne) parauga sauc par trijstūra simediānu.* Trijstūra simediānas iet caur kopīgu punktu K, ko sauc par Lemuāna punktu (E.Lemoine). Par šo punktu Lemuāns referēja 1873.g. matemātiķu kongresā, uzrādot kādas desmit tā īpašības, un tādēļ to sāka saukt par Lemuāna punktu. Šo punktu jau daudz agrāk pazinis Liljē (Simon Lhuilier; Dažreiz to arī sauc par Grebe punktu vai simedianu punktu. Terminus "Lemuāna punkts", "Lemuāna taisne" ieveda beļģu matemātiskā žurnāla "Mathesis" redaktors Neubergs pagājušā gadsimta astoņdesmitajos gados.”

Papildu ziņas. Emile Lemoine (1840-1912). Ernst Wilhelm Grebe (1804-1874). Joseph Neuberg (1840-1926). (L’Huillier S. A. J., 1750-1840).



12. zīm.



13. zīm.

2. risinājums. Ievēro, ka $|BC|x + |AC|y + |AB|z = ax + by + cz = 2L$, kur L – trijstūra ABC laukums. Lieto Košī nevienādību:

$$4L^2 = (ax + by + cz)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\text{, no šejienes izriet, ka}$$

$$\min(x^2+y^2+z^2)=\frac{4L^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Nevienādība kļūst par vienādību, ja $x = ak$, $y = bk$, $z = ck$, kur $k=\dfrac{2L}{a^2+b^2+c^2}$.

8. uzdevums. Doti divi punkti A, B un taisne *t*. Atrast taisnes punktu C, lai attālumu kvadrātu summa līdz C būtu minimāla (13. zīm.).

Attālumu $|A_1B_1|$ starp punktu A un B projekcijām uz taisni *t* apzīmēsim ar *c*. Tad kvadrātu summa $|AC|^2 + |CB|^2 = x^2 + a^2 + b^2 + (x-c)^2$. Šai funkcijai minimuma punkts ir $x = \frac{c}{2}$, t. i., A_1B_1 viduspunkts. Atzīmēsim, ka punkts, kas minimizē $|AC|^2 + |CB|^2$ nav atkarīgs ne no punktu A un B attālumiem līdz taisnei, ne arī no tā vai šie punkti atrodas vienā vai dažādās taisnes pusēs.

Mazāko kvadrātu metode

Lai novērstu domstarpības, atzīmēsim, ka šī metode nav ekstrēmu uzdevumu risināšanas metode. Vajadzība risināt ekstrēmu uzdevumu rodas saistībā ar šīs metodes pamatojumu.

Atrast noteiktas klases funkciju *f*, kas atrodas vistuvāk uzdotiem plaknes punktiem

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n).$$

(Statistikā punkti raksturo to vai citu lielumu mērījumus.) Ko nozīmē vistuvāk? Mazāko kvadrātu metodē tuvības raksturošanai izvēlas šādu attālumu kvadrātu summu (no kurienes arī saprotams metodes nosaukums):

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 \to \min .$$

Vienkāršākajā, bet svarīgā un praktiski bieži lietotā gadījumā tiek meklēta optimālā (tikko minētajā nozīmē) taisne $f(x) = ax + b$. Studentiem paredzētos mācību līdzekļos taisnes koeficientus a un b parasti nosaka ar atvasinājumu palīdzību, sk., piemēram, [RGPB]. Noteiksim koeficientus a un b elementārā veidā, summu S, uzrakstot kā otrās pakāpes polinomu attiecībā pret mainīgajiem a un b.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \to \min .$$

Atvērsim iekavas: $(y_i - ax_i - b)^2 = y_i^2 + (ax_i)^2 + b^2 - 2ax_i y_i - 2by_i + 2abx_i$.
Lai saīsinātu pierakstu, lietosim apzīmējumus:

$$k^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ l^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2,\ p = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ q = \sum_{i=1}^{n} y_i,\ r = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Tad

$$S = l^2 + a^2k^2 + nb^2 - 2ar - 2bq + 2abp = a^2k^2 + 2a(bp - r) + nb^2 - 2bq + l^2.$$

$$S = \left(ak + \frac{bp - r}{k}\right)^2 - \frac{(bp - r)^2}{k^2} + nb^2 - 2bq + l^2 =$$

$$= \left(ak + \frac{bp - r}{k}\right)^2 + \frac{b^2}{k^2}(nk^2 - p^2) - \frac{2b}{k^2}(qk^2 - pr) + l^2 - \frac{r^2}{k^2}.$$

No šejienes nosakām meklējamās taisnes koeficientus:

$$b_{\min} = \frac{qk^2 - pr}{nk^2 - p^2},\ a_{\min} = \frac{r - bp}{k^2}.$$

Tēma minipētījumam

Apzīmēsim ar d_i attālumu no punkta $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, līdz taisnei $ax + by + c = 0$.

Kāda taisne minimizē attālumu kvadrātu summu? Ievērot, ka šī summa nav tā pati, kas iepriekš aplūkotā summa *S*. Kāda taisne minimizē attālumu summu? Sastādīt elementāri risināmus uzdevumus par formulēto tēmu.

Attālumu summa

Dosim nelielu ieskatu uzdevumos, kuros jāminimizē attālumu summa. Noskaidrosim, kāds punkts P minimizē attālumu summu |PA| + |PB| + |PC| līdz trīs uzdotiem punktiem A, B un C. Uzdevums par attālumu summas minimumu ir ievērojami sarežģītāks nekā ārēji līdzīgais un jau atrisinātais uzdevums, kurā jānosaka attālumu kvadrātu summa.

Salīdzināsim divus uzdevumus.
U1. Dots punkts A un taisne T. Atrast punktu P uz dotās taisnes, lai attālums |AP| būtu minimāls.
U2. Dots punkts A un taisne T. Atrast punktu P uz dotās taisnes, lai attāluma |AP| kvadrāts būtu minimāls.
Vai abos uzdevumos prasīto lielumu minimizē viens un tas pats punkts? Nu, kā gan citādi! Tagad salīdzināsim šādus divus uzdevumus.
U3. Dots nogrieznis [A, B]. Atrast punktu P, lai attālumu summa PA + PB būtu minimāla.
U4. Dots nogrieznis [A, B]. Atrast punktu P, lai attālumu kvadrātu summa $|PA|^2 + |PB|^2$ būtu minimāla.
Uzdosim to pašu jautājumu: *vai abos uzdevumos prasīto lielumu minimizē viens un tas pats punkts?* Tagad vajadzētu izteikties jau piesardzīgāk. Punkts, kurš ir otrā uzdevuma (U2) atrisinājums ir arī U1 atrisinājums, bet otrādi var nebūt.

Attālumu summa līdz taisnes punktiem

9. uzdevums. Uz taisnes doti trīs dažādi punkti A, B, C. Atrast punktu X, lai attālumu summa no X līdz A, līdz B un C būtu vismazākā.
10. uzdevums. Aprēķināt $\min(|x-1| + |x-2| + |x-5|)$.
11. uzdevums. Aprēķināt $\min(|x-a| + |x-b| + |x-c|)$.

Apzīmējot punktu A, B un C koordinātas attiecīgi ar *a, b* un *c* un meklējamā punkta koordinātu ar *x*, iegūsim, ka 9. un 11. uzdevums ir līdzvērtīgi.

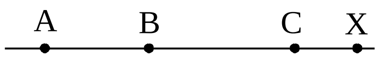
1. risinājums. Izmantosim nevienādību $|x| + |y| \geq |x + y|$. Uzskatīsim, ka *a, b* un *c* ir sakārtoti tā, ka $a < b < c$.

$$|x-a| + |x-b| + |x-c| = |x-a| + |c-x| + |x-b| \geq$$

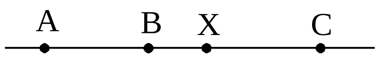
$$\geq |x-a+c-x| + |x-b| = |c-a| + |x-b| \geq |c-a|.$$

Novērtējums ir precīzs, ja $x = b$, jo $|b-a| + |b-c| = |c-a|$.

2. risinājums. Pieņemsim, ka X ir meklētais minimuma punkts. Tad X nevar atrasties pa labi no C, jo tādā gadījumā, pārvietojot X virzienā uz punktu C, mēs samazinātu visus trīs attālumus: AX + BX + CX > AC + BC + CX ≥ AC + BC. (14. zīm.). Ja X atrodas starp B un C, tad summa BX + XC = BC nav atkarīga no punkta X vietas (15. zīm.). Šajā gadījumā AX + BX + XC = AX + BC ≥ AB + BC = AC. Skaidrs, ka attālumu summa nevar būt mazāka par BC. Ja X atrastos pa kreisi no B, tad attālumu summa būtu lielāka nekā AC. Tātad X = B ir vienīgais minimuma punkts.



14. zīm.



15. zīm.

<u>3. risinājums</u>. Tā kā jebkuram punktam X ir spēkā novērtējums: AX + XC $\geq$ AC, tad

$$AX + XC + XB \geq AC + XB \geq AC.$$

Novērtējums ir precīzs, ja X = B.

<u>12. uzdevums</u>. Pieņemot, ka $a < b < c < d$ – fiksēti skaitļi, atrast vismazāko vērtību funkcijai

$$S(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|.$$

<u>13. uzdevums</u>. Uz taisnes doti 4 dažādi punkti A, B, C, un D. Atrast punktu X, lai attālumu summa no X līdz A, B, C un D būtu vismazākā.

Uzskatīsim, ka punkti ir sakārtoti: A < B < C < D. Tad abi uzdevumi ir līdzvērtīgi. Jebkuram punktam X ir spēkā: AX + XD $\geq$ AD un BX + XC $\geq$ BC. Tātad

$$AX + XD + BX + XC \geq BC + AD.$$

Novērtējums ir precīzs jebkuram punktam X, kurš atrodas starp B un C, ieskaitot arī pašus šos punktus.

<u>14. uzdevums</u>. Atrast izteiksmes $|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| + |x - 9| + |x - 11|$ mazāko iespējamo vērtību. [AB, 39; (paredzēts 7. kl.)]

<u>15. uzdevums</u>. Uz taisnes doti 6 punkti secībā A < B < C < D < E < F. Atrast punktu X, kurš minimizē attālumu summu S līdz šiem punktiem.

Katram X ir spēkā: AX + XF $\geq$ AF, BX + XE $\geq$ BE, CX + XD $\geq$ CD. Tātad summas S minimālā vērtība ir AF + BE + CD, ko realizē jebkurš X, kurš atrodas starp C un D.

14. uzdevuma nosacījumos: AF = 11 – 1= 10, BE = 9 – 3 = 6, CD = 7 – 5 = 2 un minimālā summa ir 10 + 6 + 2 = 20.

Punktu "sapārošanas" un novērtējuma ideja dod vienkāršu arī vispārīgā uzdevuma, kad jāminimizē attālums līdz n uzdotiem taisnes punktiem, risinājumu. Samērā garš un skolēnus atbaidošs pierādījums ir dots grāmatā [VG, 70], kur ir pierādītas divas teorēmas par attālumu summu. Pirmā no tām ir šāda:

<u>Teorēma</u>. Funkcija $f(x) = \sum_{i=1}^{2n} |x - a_i|$, kur $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{2n}$ – konstantes, un $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n}$, savu minimumu sasniedz nogrieznī, kura galapunkti ir virknes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ divi vidējie locekļi:

$$y_{\min} = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Otrajā teorēmā ietverts gadījums, kad n ir nepārskaitlis.

<u>16. uzdevums</u>. Pieņem, ka $x_1 < x_2 < \ldots\ x_n$ ir taisnes punkti. Atrast punktu x, lai attālumu summa no x līdz šiem n punktiem būtu minimāla.

<u>Piezīme</u>. Uzdevumu ir aplūkojuši D. G. Batčerts un Leo Mozers 1952. gadā žurnālā "Scripta Mathematica", (221.-236. lpp.) publicētajā rakstā "Lūdzu, neskaitļojiet". [Hon, 8]

R. Honsbergers piedāvā šādu lielisku uzdevumu par attālumu summu: "*Ņujorkā šaha meistaru ir vairāk nekā visā pārējā ASV teritorijā. Tiek plānots šaha turnīrs, kurā piedalīsies visi meistari. Nolemts, ka turnīrs notiks tādā vietā, līdz kurai visiem šaha meistariem kopā būtu jānobrauc vismazākais attālums. Ņujorkas meistari apgalvo, ka šim kritērijam atbilst*

Ņujorka, bet meistari no Rietumu piekrastes uzstāj uz to, ka labākā sacensību vieta būtu tā pilsēta, kura atrodas spēlētāju kopas smaguma centrā. Kur jānotiek turnīram?” [Hon, 7]

Starp uzdevumiem, kuros jāminimizē attālumu summa, ir vairāki slavenību vārdā nosaukti ekstrēmu uzdevumi. Atgādināsim tos.
Hērona uzdevums. Doti divi punkti A un B vienā pusē taisnei T. Uz taisnes T atrast tādu punktu C, lai AC + CB būtu minimāls.

Faņano-Švarca uzdevums**.** Dots trijstūris ABC; atrast uz tā malām AB, BC un CA tādus punktus X, Y un Z, lai XY + YZ + ZX būtu minimāls.

Fermā-Šteinera uzdevums. Dotajā šaurleņķa trijstūrī atrast punktu P, kuram attālumu summa līdz trijstūra virsotnēm ir minimāla. Plašākā nostādnē: atrast plaknē tādu punktu, lai attālumu summa līdz uzdotajiem trīs punktiem būtu vismazākā.

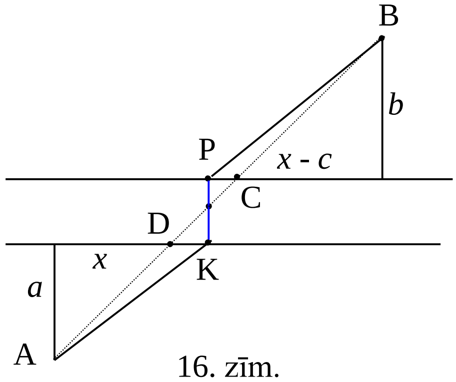
Vēsturiskas ziņas, kā arī pirmo divu uzdevumu izvērsti risinājumi ir doti autora darba “Ekstrēmu uzdevumi” iepriekšējās daļās [C1, C3].

Minēsim dažus elementāri atrisināmus uzdevumus par attālumiem, kuri pēc būtības ir Hērona uzdevuma dažādas modifikācijas.

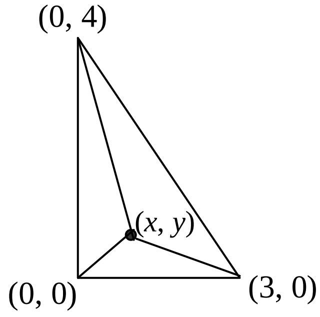
“Uz taisnes $x + y = 1$ atrast punktu, no kura attālumu summa līdz punktiem A(1; 2) un B(4; 1) ir vismazākā.” [EMP]

Grāmatā [TF, 214] Hērona uzdevumam dota šāda “ekonomiska” interpretācija:
“Divas pilsētas, kuras atrodas taisnas upes vienā pusē, vienojās kopīgi būvēt sūkņu staciju un attīrīšanas iekārtas. Pieņemot, ka pilsētu attālumi līdz upei ir a un b un ka attālums starp pilsētām c, pierādīt, ka ūdensvada cauruļu kopējais garums no pilsētām līdz upei ir vismaz $\sqrt{c^2 + 4ab}$.” Uzdevums paredzēts patstāvīgai risināšanai un atzīmēts kā tāds, kuru jūs varat risināt bez diferenciālrēķiniem, priekšroku dodot kādai citai metodei.

17. uzdevums. Divus ciemus A un B atdala upe, kuras platums ir h (sk. 16. zīm.). Pāri upei perpendikulāri tās krastiem jāuzbūvē tilts PK. Kurā vietā jābūvē tilts, lai attālums AK + KP + PB būtu minimāls? Kāds celtnieks uzskata, ka tilta vieta jāizvēlas saskaņā ar 16. zīmējumā doto shēmu, t. i., jāatrod taisnes AB krustpunkti D un C ar upes krastiem un PK jāiet caur DC viduspunktu. Noskaidrojiet, vai viņam ir taisnība? Aplūkot uzdevuma vispārinājumus, kad ciemus atdala vairākas upes un kad upju krasti nav paralēli.



16. zīm.



17. zīm.

Minimālais attālums līdz trīs punktiem

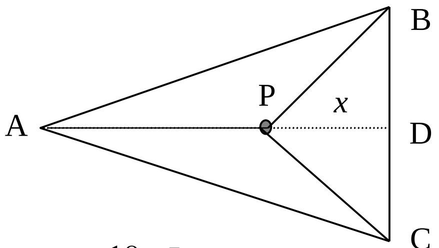
Tagad pievērsīsimies trešajam slavenajam uzdevumam, izklāstu iesākot ar dažiem ievaduzdevumiem.

Fermā-Šteinera uzdevums

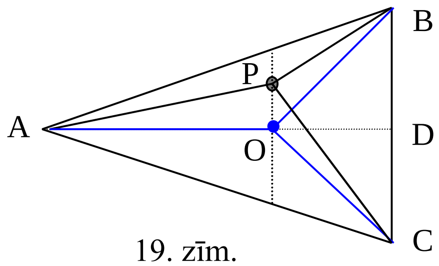
18. uzdevums. Dots vienādsānu trijstūris, kuram augstums AD vienāds ar h un pamata malas garums ar a, sk. 18. zīm. Atrast punktu P uz AD, no kura attālumu summa līdz trijstūra virsotnēm ir vismazākā.
19. uzdevums. Dots vienādsānu trijstūris, kuram augstums AD vienāds ar h un pamata malas garums ar a, sk. 19. zīm. Atrast punktu P, no kura attālumu summa līdz trijstūra virsotnēm ir vismazākā.

Šāda tipa uzdevumus mēdz formulēt piesaistot tos dažādām sadzīves situācijām. Piemēram, kur vajadzētu būvēt kādu radiostaciju, elektrosadales punktu, gāzes sadales staciju, ceļu sazarošanās mezglu, lai minimizētu kopējo attālumu vai optimizētu kādu citu lielumu. Piemēram, grāmatā [EG, 213] patstāvīgai risināšanai piedāvāts uzdevums par TV kompāniju, kas vēlas būvēt signālu pastiprināšanas staciju tādā vietā P starp trīs mājām, lai minimizētu kabeļu garumu no P līdz trim mājām. Uzdevuma parametri atbilst gadījumam BD = DC = 50 un AD = 200.

Atrisināsim 19. uzdevumu. Vispirms ievērosim, ka punktam P jāatrodas uz AD. Pretējā gadījumā varētu samazināt attālumu summu. Ja P neatrodas uz AD, tad novelkam caur punktu P taisni PO, kas paralēla BC (19. zīm.). Tad |AP| > |AO|, kā arī |PB| + |PC| > |BO| + |OC|, jo no visiem trijstūriem ar kopēju pamatu (BC) vismazākais perimetrs ir vienādsānu trijstūrim.



18. zīm.



19. zīm.

Meklējamo attālumu izsaka funkcija:

$$|\mathrm{AO}|+2|\mathrm{OB}| = h - x + 2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}} = h - x + \sqrt{4x^2+a^2}\ .$$

Minimuma atrašanai izmantosim šādu paņēmienu:

$$m = -x+\sqrt{4x^2+a^2} \ \Rightarrow (m+x)^2 = 4x^2+a^2 \Rightarrow 3x^2-2mx+a^2-m^2=0 \ \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{m\pm\sqrt{m^2-3(a^2-m^2)}}{3} = \frac{m\pm\sqrt{4m^2-3a^2}}{3}, \quad 4m^2-3a^2\geq 0 \Rightarrow \ m\geq\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Minimālā summas |AO| + 2|OB| vērtība ir $h+m=h+\frac{a\sqrt{3}}{3}$ un $x_{\min}=\frac{m}{3}$. No vienādības $h-\frac{m}{3}+2|\mathrm{OB}|=h+m$ izriet, ka $|\mathrm{OB}|=\frac{2m}{3}$. Tā kā |OB| = 2|OD|, tad leņķis OBD ir 30°, leņķis

BOD ir 60^o, bet leņķis BOC ir 120^o. Ievērosim, ka arī leņķi AOB un AOC ir 120^o. Tātad punkts P minimizē attālumu summu tad, ja visas trijstūra malas no šī punkta ir redzamas 120 grādu lielā leņķī. Un tomēr risinājums vēl jāprecizē! Nav atbildēts, kas notiek gadījumā, kad $h < x_{\min} = \frac{m}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{9}$. Uzdevuma noteikumi pieļauj jebkuras pozitīvas trijstūra augstuma AD vērtības. Risinājuma sākumā, sastādot attālumu izteiksmi ir uzskatīts, ka $h > x$. Pretējā gadījumā, kad $x \geq h$ attālumu summa ir

$$x - h + 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Šī funkcija ir augoša kā divu augošu funkciju summa un tai minimums ir tad, kad $x = h$, t. i., kad P sakrīt ar trijstūra virsotni A. Tātad, ja platais leņķis BAC ir lielāks vai vienāds ar 120^o, tad attālumu summu minimizē virsotne A.

Izrādās, ka **leņķa lielums 120^o** nav nejaušība. Šāda īpašība raksturīga arī Fermā-Šteinera uzdevumam, kuram ir plaši lietojumi un tālejoši vispārinājumi. Atzīmēsim, ka grāmatā [FL] ir aplūkots īpašs punkts (Lemuāna punkts), kā arī pierādīts, ka tas minimizē attālumu kvadrātu summu līdz trijstūra malām, bet nav aplūkots īpaši nozīmīgs punkts, kurš minimizē attālumu summu līdz trijstūra virsotnēm.

Punktu, kurš minimizē attālumu summu līdz trīs uzdotiem punktiem sauc par Fermā punktu (sauc arī par Toričelli vai Šteinera punktu.) Detalizētāku informāciju sk. [Tih, 35; C1].

20. uzdevums. Atrast funkcijas $\sqrt{(x^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ minimumu.

21 uzdevums. Pierādīt, ka $\sqrt{(x^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \geq \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

22. uzdevums. Pierādīt, ka $\min \sqrt{(x^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Šo uzdevumu ģeometriskā interpretācija dota 17. zīmējumā. Taisnleņķa trijstūrī ar katetēm 3 un 4 atrast punktu P(x, y) kurš minimizē attālumu summu līdz trijstūra virsotnēm. Būtu interesanti noskaidrot, vai kāds skolēns spētu pierādīt 21. uzdevuma nevienādību ar algebriskiem pārveidojumiem.

Ja trīs punktu koordinātas apzīmētu attiecīgi ar (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) un meklējamā punkta – ar (x, y), tad mums vajadzētu prast atrast minimuma punktu funkcijai

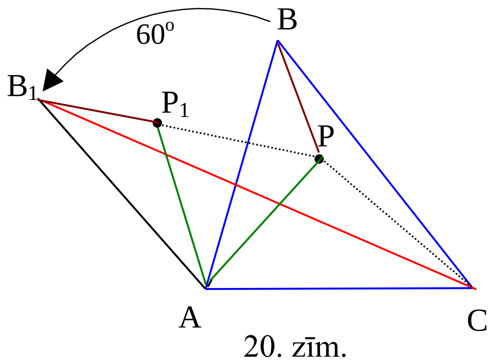
$$F(x,y) := \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} + \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2} + \sqrt{(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2} \to \min$$

Izdarīt to tiešā veidā pat ar atvasinājumu palīdzību būtu visai sarežģīti. Par laimi Fermā-Šteinera uzdevumam ir ģeometrisks risinājums, turklāt tik skaists, ka pamatoti saucams par matemātikas šedevru. Fermā-Šteinera uzdevumam ir zināmi arī fizikāla, eksperimentāla rakstura risinājumi, sk., piemēram, [Kv; KR]. Zinot šo ģeometrisko risinājumu, var atrast funkcijas F minimuma punktu, kā arī aprēķināt 20. uzdevuma funkcijas minimālo vērtību.

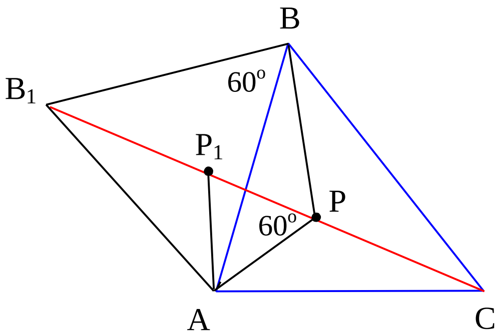
Fermā-Šteinera uzdevuma ģeometrisks risinājums

Risinājuma pamatā ir vienkārša ģeometriska ideja – pagrieziens.
Aplūkosim trijstūri ABC, kura iekšienē atrodas punkts P un kuram visi leņķi mazāki par 120 grādiem (20. zīm.). Pagriezīsim trijstūri ABC par 60 grādiem par centru ņemot virsotni A. Tad punkts B attēlojas par punktu B_1, bet punkts P par kādu punktu P_1. Leņķis P_1AP ir 60^o un P_1A = AP (pagrieziens nemaina malu garumu), tas nozīmē, ka trijstūris P_1AP ir vienādmalu trijstūris. Pateicoties šādam pagriezienam, summu AP + BP + PC var aizstāt ar lauztās līnijas

B_1P_1PC garumu, jo $AP = P_1P$ un $B_1P_1 = BP$. Lauztās līnijas garums nevar būt mazāks par taisnes nogriežņa B_1C garumu. Atliek noskaidrot, kad lauztā līnija pārvēršas par taisnes nogriezni. Tas notiek tad, kad punkts P un tā attēls P_1 atrodas uz taisnes B_1C (21. zīm.). Šajā gadījumā leņķis B_1P_1A un tātad arī leņķis BPA būs 120^o. Arī leņķis APC (kā leņķa P_1PA papildleņķis) būs 120^o. Skaidrs, ka arī atlikušais leņķis BPC būs 120^o. Vēl atzīmēsim, ka trijstūrī nevar būt vairāk par vienu tādu punktu, no kura visas trijstūra malas redzamas 120 grādu lielā leņķī.
Piezīme. Šo eleganto risinājumu ir atradis students Bjūkners (Bückner) no Kēningsbergas [RT, 46].



20. zīm.

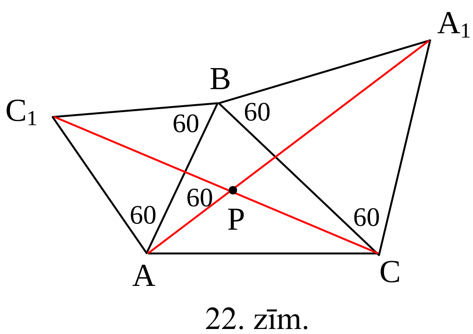


21. zīm.

Fermā punkta konstrukcija

Tā pēc būtības ir dota Fermā-Šteinera uzdevuma risinājumā. Ja uz dotā trijstūra ABC malām kā pamatiem konstruē vienādmalu trijstūrus ABC_1, BCA_1 un ACB_1, tad nogriežņi AA_1, BB_1 un CC_1 krustojas Fermā punktā. Pietiek konstruēt tikai divus vienādmalu trijstūrus ABC_1 un BCA_1 un atrast nogriežņus AA_1 un CC_1 krustpunktu P (22. zīm.). Konstrukcija bija zināma jau 17. gs. vidū.

Aplūkosim trijstūri ABA_1 un iztēlosimies, ka tas tiek pagriezts par 60 grādiem tā, ka punkts A attēlojas par punktu C_1. Tad punkts A_1 attēlojas par C un trijstūris ABA_1 – par trijstūri C_1BC. Tā kā mala AA_1 pēc pagrieziena kļūst par malu CC_1, tad leņķis starp šīm malām (leņķis C_1PA) ir 60 grādu. Tātad leņķis APC ir 120 grādu.
Piezīme. Interesanti, ka grāmatā [KG, 102-103], kur dota Fermā punkta konstrukcija, nav minēta šī punkta ekstremālā īpašība.



22. zīm.

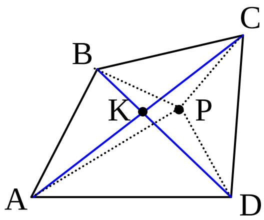
23. uzdevums. Noskaidrojiet patstāvīgi, kāds punkts minimizē attālumu summu līdz trijstūra malām.

Minimālais attālums līdz četriem punktiem

Kāds punkts minimizē attālumu summu līdz četriem uzdotiem punktiem $P_i(a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, 4$? Tagad mums jāmeklē minimuma punkts funkcijai

$$F(x,y) := \sum_{i=1}^{4} \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \to \min$$

Pirmajā brīdī šķiet negaidīti, ka funkcijai, kas sastāv no 4 kvadrātsaknēm, minimuma punktu atrast ir daudz vienkāršāk nekā līdzīgai funkcijai, kas sastāv no 3 kvadrātsaknēm.
Viegli saprast, ka izliektam 4-stūrim (23. zīm.) punkts, kas minimizē attālumu summu līdz virsotnēm ir diagonāļu krustpunkts. Jebkuram citam punktam P attālumu summa ir lielāka, jo AP + PC > AC un BP + PD > BD.



23. zīm.

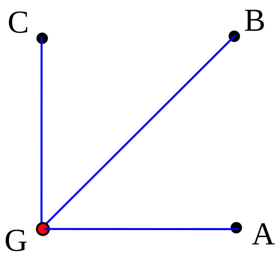
24. uzdevums. Noskaidrojiet, kāds punkts minimizē attālumu summu līdz 4-stūra virsotnēm, ja 4-stūris nav izliekts.

Cauruļvadu tīkls

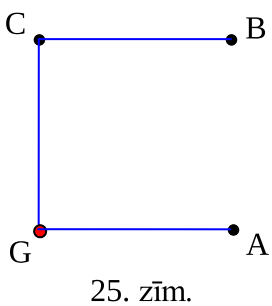
Gāze, kura tiek iegūta punktā G, jānovada uz trim pilsētām A, B un C. Kāds cauruļvadu tīkls, kurš savieno G ar A, B un C būs visīsākais? Atrisināt uzdevumu, kad A, B, C un D ir vienības kvadrāta virsotnes.

Uzdevums "Dzelzceļa tīkls", kurā prasīts atrast minimālā garuma tīklu, kas savieno četras pilsētas A, B, C, un D (kvadrāta virsotnes, AB = 100 km) aplūkots grāmatā [Sth].

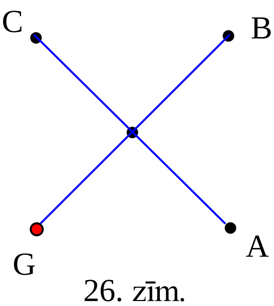
Visīsākie nogriežņi, kas savieno G ar A, G ar C un G ar B ir attiecīgi kvadrāta mala un diagonāle ar kopējo tīkla garumu $d = 2 + \sqrt{2}$ (24. zīm.). Tomēr tas nav mazākais garums. Īsākais garums katrā atsevišķā posmā tomēr var nedot minimālā garuma tīklu. Piemēram, 25. zīmējumā redzamais savienojums ar garumu 3 ir īsāks. Vēl īsāks ir 26. zīmējumā redzamais tīkls ar garumu $d = 2\sqrt{2}$. Šķiet, ka īsāka vairs nav un tomēr...



24. zīm.



25. zīm.



26. zīm.

Aplūkosim 27. zīmējumā redzamo tīklu, kurš ir simetrisks pret PK. Pieņemsim, ka kvadrāta malas garums ir a. Tad tīkla garums vienāds ar

$$d(x) = a - 2x + 4\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = a - 2x + 2\sqrt{4x^2 + a^2} = a + 2(-x + \sqrt{4x^2 + a^2}) = a + 2f(x).$$

Tieši šāda funkcija $f(x) = -x + \sqrt{4x^2 + a^2}$ parādījās 19. uzdevuma risinājumā. Tās minimālā vērtība un minimuma punkts ir:

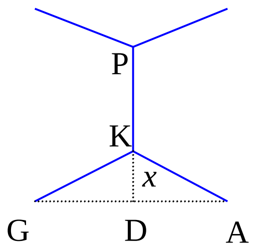
$$f_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ x_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow d_{\min} = a(1 + \sqrt{3}).$$

Salīdzinām iegūto garumu (vienības kvadrātam a = 1) ar līdz šim labāko rezultātu $2\sqrt{2}$, ko dod 27. zīmējumā redzamais tīkls.

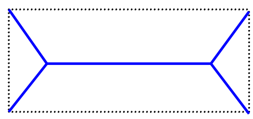
$$1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ 1 + 2\sqrt{3} + 3 < 8 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{3} < 2.$$

Uzlabojums jūtams jau pirmajā ciparā aiz komata: $1 + \sqrt{3} = 2{,}732... < 2\sqrt{2} = 2{,}828$. Ievērosim, ka atrastajam minimālajam tīklam ir spēkā: |GK| = 2|KD|, tas nozīmē, ka leņķis KGD ir vienāds ar 30°, leņķis GKD ar – 60°, bet visi trīs leņķi sazarošanās punktā K ir vienādi ar 120°. Var pierādīt, ka nevienam citam tīklam vairs nevar būt mazāks garums. Pamēģiniet to izdarīt patstāvīgi. Ja neizdodas, sk., piemēram, grāmatu [Sth].

<u>22. uzdevums</u>. Pieņemot, ka minimālā garuma tīkla struktūra it tādā kā 28. zīmējumā atrodiet tā garumu.



27. zīm.



28. zīm.

Minimālā garuma ceļi, tīkli (īsāk minimālie tīkli) dažādos aspektos var būt piemērota tēma skolēnu konkursa darbos. Piemēram, atrast minimālā garuma tīklus, ja punkti G, A, B un C ir taisnstūra, romba, trapeces, patvaļīga četrstūra virsotnes. Atrast minimālos tīklus, kas savieno regulāra piecstūra, sešstūra utt. virsotnes. Censties atrast iespējami maza garuma tīklus, kuri savieno domino, trimino, tetramino un pentamino kvadrātu virsotnes un jūsuprāt šķiet minimāli.

Papildu ziņas par minimālo tīklu struktūru

Var atrast, piemēram, [CGG; G; EEM5; KR; Kv; ŠČJ]

http://www.css.tayloru.edu/~bbell/steiner/

http://www.colorstudy.com/static/ianb/old/steiner/summary.html

http://mathworld.wolfram.com/FermatPoints.html

20. nodaļa
Vairākargumentu funkcijas ekstrēmi

Daudzus ekstrēmu uzdevumus, kurus studenti parasti risina ar diferenciālrēķinu palīdzību (risināšanas metodes bieži vien “uzspiež” paši pasniedzēji), var atrisināt arī ar elementārām metodēm. Nereti mācību līdzekļos tā vai cita metode tiek ilustrēta ar piemēriem (vai, kas ir vēl sliktāk, tikai ar vienu šai metodei nebūtisku piemēru), kurus var atrisināt vienkāršāk, turklāt iztiekot bez šīs metodes. Citiem vārdiem, aplūkotie piemēri nemotivē vajadzību pēc izklāstītās metodes. Kāpēc “zvirbuļi jāšauj ar lielgabalu”? Situāciju, kad kādu, pietiekami universālu un spēcīgu metodi ilustrē tikai ar triviālu piemēru var salīdzināt ar to, ka ābola noplūkšanai, izmanto modernus pacēlājus”. Mācību līdzekļos, kur prasīts “izpētīt funkciju uz ekstrēmiem”, “noteikt funkcijas ekstrēmus” bieži vien netiek precizēts par kādiem ekstrēmiem ir runa. Parasti pēc uzdevumu satura vai dotajām atbildēm var saprast, ka runa ir bijusi (tikai) par lokāliem ekstrēmiem. Dažkārt mācību līdzekļos dotie risinājumi ir nepilnīgi, piemēram, netiek pamatots, ka atrastais lokālais ekstrēms ir arī globāls.

Vairāku uzdevumu risināšanā lietderīgi izmantot to, ka funkcijas $ax^2 + bx$ ekstremālā vērtība ir $\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$ – maksimums, ja $a < 0$ un minimums, ja $a > 0$. Šo īpašību saīsināti apzīmēsim ar (ev) – parabolas ekstremālā vērtība. Vairākargumentu funkciju ekstremālās īpašības var būtiski atšķirties no viena argumenta funkciju ekstremālajām īpašībām. Šādas situācijas raksturojoši piemēri aplūkoti nodaļas beigās.

Gaismas stara metode

Gaismas stara metode ir substitūciju metodes atsevišķs gadījums, kad vienu no mainīgajiem, piemēram, y aizstāj ar kx. Pieļaujamā argumentu kopa tiek “izstaigāta” pa taisnēm, it kā pārmeklēta ar gaismas staru, raugoties, kurā vietā funkcijai varētu būt ekstrēms vai kāda cita mūs interesējoša īpašība. Šī metode noteikta tipa divargumentu funkciju pētīšanu ļauj reducēt uz vienargumenta funkciju pētīšanu. Metodes tehniskā realizācija bieži vien ir apgrūtinoša, nereti apskatāmo uzdevumu var atrisināt ātrāk, lietojot citas metodes. Aplūkosim dažus piemērus.

<u>1. piemērs</u>. Aprēķināt minimālo vērtību funkcijai $F(x, y) = x^2 - xy + y^2$

Apzīmējam $y = kx$. Tad $F = x^2(1-k+k^2) = x^2\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0 \Rightarrow \min F = 0$.

Minimuma punkts ir (0, 0).

<u>2. piemērs</u>. Aprēķināt minimālo vērtību funkcijai $u(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

Rīkojoties kā iepriekš dabūjam:

$$u = x^2 - 4xy + y^2 = x^2(1 - 4k + k^2) = x^2((k-2)^2 - 3).$$

Atšķirībā no 1. piemēra tagad minimuma nav. Par to viegli pārliecināties, ņemot, piemēram, $k = 2$. Tad $F = -3x^2$ var pieņemt pēc patikas mazas vērtības.

<u>3. piemērs</u>. Kādiem c funkcijai $F(x, y) = x^2 - cxy + y^2$ eksistē minimums?

Apzīmējam $y = kx$ un F pārveidojām formā:

$$F = x^2(1 - ck + k^2) = x^2\left[\left(k - \frac{c}{2}\right)^2 + 1 - \frac{c^2}{4}\right].$$

No šejienes secinām, ka funkcijai F eksistē minimums (min$F$ = 0) tikai tad, kad $c \leq 2$.

Piezīme. Šos trīs piemērus var atrisināt nedaudz vienkāršāk, izdalot pilnos kvadrātus, t. i., uzrakstot F formā:

$$F = \left(x - \frac{cy}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{c^2y^2}{4} = \left(x - \frac{cy}{2}\right)^2 + \frac{(4 - c^2)y^2}{4}.$$

Pilno kvadrātu metode aplūkota turpmāk atsevišķā iedaļā.

4. piemērs. Aprēķināt min($x^4 + y^4 - 4xy$). [UAM, 23. lpp.]

Apzīmējam $y = kx$, $x^2 = t$. Var uzskatīt, ka $k > 0$, jo minimums būs tad, kad $xy > 0$.

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy = x^4(1 + k^4) - 4x^2k = t^2(1 + k^4) - 4tk.$$

Iegūta kvadrātfunkcija attiecībā pret t. Saskaņā ar (ev) un nevienādību $A \geq G$:

$$F \geq -\frac{16k^2}{4(1 + k^4)} = -\frac{4}{(\frac{1}{k^2} + k^2)} \geq -\frac{4}{2} = -2.$$

Novērtējums ir precīzs, ja $k = 1$. Tas nozīmē, ka $y = x$. Funkcijas $2t^2 - 4t$ minimuma punkts ir $t = 1$. Minimālo vērtību F sasniedz punktos (1, 1) (–1, –1).

5. piemērs. Aprēķināt min($x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$).

Apzīmēsim $y = kx$. Tad

$$x^4 + k^4x^4 - 2x^2 - 4kx^2 - 2k^2x^2 = x^4(1 + k^4) - 2(1 + k)^2x^2 =$$

$$= \left(x^2\sqrt{1 + k^4} - \frac{(1 + k)^2}{\sqrt{1 + k^4}}\right)^2 - \frac{(1 + k)^4}{1 + k^4} \geq -\frac{(1 + k)^4}{1 + k^4}.$$

No šejienes atrodam minimuma punktu:

$$x^2 = \frac{(1 + k)^2}{1 + k^4} \Rightarrow x_{\min} = \pm\frac{1 + k}{\sqrt{1 + k^4}}$$

Lai atrastu minimālo funkcijas vērtību, risinām uzdevumu

$$\frac{(1 + k)^4}{1 + k^4} \to \max.$$

Pierādīsim, ka maksimālā vērtība ir 8 (to iegūst, ņemot $k = 1$).

$$\frac{(1 + k)^4}{1 + k^4} \overset{?}{\leq} 8 \Leftrightarrow (1 + k)^4 \leq 8 + 8k^4.$$

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem iegūstam, ka

$$(k - 1)^2(7k^2 + 10k + 7) \geq 0.$$

Novērtējums ir precīzs, ja

$$k = 1 \Rightarrow x_{\min} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y_{\min} = \pm\sqrt{2}.$$

Atbilde. Minimālā funkcijas f vērtība ir (–8).

Piezīme. Uzdevums ar diferenciālrēķinu palīdzību risināts mācību līdzeklī [Tok]. Turklāt nav pamatots, ka atrastais ekstrēms ir globāls. Gandrīz tādas pašas funkcijas ($x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$) ekstrēmus prasīts atrast [GK, BN, UAM]. Ņemot y vietā ($-y$) iegūst 5. piemēra funkciju.

Pilno kvadrātu metode

Ar šo metodi var noskaidrot, vai noteiktas klases vairākargumentu funkcijām (parasti otrās kārtas polinomiem) ir ekstrēms, kā arī noteikt punktu, kurā tas tiek sasniegts. Metode teorētiski vienkārša, taču tās tehniskā realizācija bieži vien ir samērā gara.

Ilustrēsim metodi ar vairākiem piemēriem

6. piemērs. Atrast funkcijas $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ ekstrēmus, ja $-2 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 3$. [Sw, 769]

Maksimālo f vērtību dod tiešais novērtējums, kad x un y vietā ievieto lielākās pieļaujamās vērtības: $f \leq 16 + 24 + 27 = 67$. $\max f(x, y) = f(4, 3) = 67$. Minimuma iegūšanai izdalām pilno kvadrātu: $f(x, y) = (x + y)^2 + 2y^2 \geq 0$. Novērtējums ir precīzs, ja $y = 0$ un $x = 0$. Iegūstam, ka $\min f(x, y) = f(0, 0) = 0$.

7. piemērs. Atrast $\min z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1$. [UAM]

$$z = 4x^2 - 2x(y + 1) + y^2 - 4y + 1 = \left(2x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 + y^2 - 4y + 1 =$$

$$= \left(2x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(4y^2 - 16y + 4 - y^2 - 2y - 1\right) = \frac{1}{4}(4x - y - 1)^2 + \frac{1}{4}(3y^2 - 18y + 3) =$$

$$= \frac{1}{4}(4x - y - 1)^2 + \frac{3}{4}(y^2 - 6y + 1) = \frac{1}{4}(4x - y - 1) + \frac{3}{4}\left((y-3)^2 - 8\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(4x - y - 1)^2 + \frac{3}{4}(y - 3)^2 - 6 \geq -6\,.$$

No šejienes skaidrs, ka $\min z = -6$. Minimuma punkta koordinātas ir $y = 3$ un $x = 1$.

2. uzdevums. Atrast $\min P = x^2y^2 + y^2 + x^2 - 4xy + 1$.

Izdalām pilnos kvadrātus

$$P = (xy - 1)^2 + (x - y)^2 - 1 \geq -1.$$

Minimums tiks sasniegts, ja $xy = 1$ un $x = y$. Tātad $\min P = P(1, 1) = P(-1, -1) = -1$.

3. uzdevums. Atrast $\min P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$.

Pilno kvadrātu izdalīšanu var veikt dažādos veidos.

V1.

$$P = x^2 - x\,(y + z) + y^2 + z^2 - yz =$$

$$= \left(x - \frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 - yz = \left(x - \frac{y+z}{2}\right)^2 + \frac{3y^2 + 3z^2 - 6yz}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{y+z}{2}\right)^2 + \frac{3(y-z)^2}{4} \geq 0 .$$

Minimums tiek sasniegts tad, ja $x = y = z$, t. i., bezgalīgi daudzos punktos (x, x, x), kur x patvaļīgs skaitlis.
V2. Labi zināms ir arī šāds pārveidojums:

$$2P = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 – 2xy – 2yz – 2zx = (x – y)^2 + (y – z)^2 + (z – x)^2 \geq 0.$$

8. piemērs. Atrast maksimuma punktu "peļņas" funkcijai

$$P(x, y) = (10 – x)x + (12 – 2y)y + x + y – (x + y)^2 – 10.$$

Mācību līdzeklī Sad, 5-6, 10, 13] uzdevums par peļņas P maksimumu risināts ar pirmās un otrās kārtas atvasinājumu palīdzību. Jautājums vai iegūtais lokālais ekstrēms ir arī globāls netiek apspriests. Pārveidosim P, lai varētu ērtāk izdalīt pilno kvadrātu:

$$P = – 2x^2 – 3y^2 – 2xy + 11x + 13y – 10,$$
$$–2P = 4x^2 + 6y^2 + 4xy – 22x – 26y + 20 = (2x + y – 5{,}5)^2 + 5y(y – 3) + 20 – 5{,}5^2$$

No šejienes izriet, ka funkcijas ($–2P$) minimuma (globālā) punktam koordinātas ir: $y = 1{,}5$ un $x = 2$. Skaidrs, ka punkts, kas minimizē funkciju ($–2P$) maksimizē funkciju P.

Mainīgo fiksēšanas metode

Aplūkosim divu argumentu otrās kārtas polinomu

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_3.$$

Ievērosim, ka katram fiksētam y funkcija

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + (a_{12}y + a_1)x + a_{22}y^2 + + a_2y + a_3.$$

ir kvadrātfunkcija (parabola) attiecībā pret x. Parabolas virsotnes abscisa ir $x = -\frac{a_{12}y + a_1}{2a_{11}}$.

Tāpat katram fiksētam x funkcija

$$F(x, y) = a_{22}y^2 + (a_{12}x + a_2)y + a_{11}x^2 + a_1x + a_3$$

ir kvadrātfunkcija (parabola) attiecībā pret y. Šīs parabolas virsotnes abscisa ir

$$y = -\frac{a_{12}x + a_2}{2a_{22}} .$$

Apvienojot, iegūstam, ka funkcijas F ekstrēmu punkts (x, y) apmierina šādu ekstrēma nepieciešamo nosacījumu, ko saīsināti apzīmēsim ar (ENS)

$$\begin{cases} 2a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ 2a_{22}y + a_{12}x + a_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(ENS)}$$

Uzsvērsim, ka (ENS) var nebūt pietiekams, t. i., šis nosacījums vēl negarantē, ka punkts, kas apmierina (ENS) noteikti ir ekstrēma punkts.

Piezīme. Līdzīgi spriežot, var iegūt (ENS) arī cita tipa vairāku argumentu funkcijām.

Piemēram, funkcijai $P(x, y) = x^2 – y^2$ atbilstošais (ENS) ir: $\{2x = 0,\ 2y = 0\}$, bet punkts (0, 0) nav ne maksimuma, ne minimuma (pat lokālā) punkts. Tas skaidrs no tā, ka

$$P(0, 0) = 0,\ P(x, 0) = x^2 \geq 0 \text{ un } P(0, y) = – y^2 \leq 0.$$

Savukārt funkcijai $F(x, y) = x^2 + y^2$, kurai atbilstošais (ENS) ir tieši tas pats: $\{2x = 0, 2y = 0\}$, punkts (0, 0) ir minimuma punkts, jo $x^2 + y^2 \geq 0$.

Uzrakstīsim (ENS) 7. piemēra funkcijai $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1$:

$$\begin{cases} 8x - 2y - 2 = 0 \\ 2y - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3.$$

Ja ir "aizdomās turamais", proti punkts (1, 3), tad var veikt papildu "izmeklēšanu", lai noskaidrotu vai tas ir vai nav meklētais ekstrēma punkts. Tagad uzrādīsim īsāku pamatojumu (salīdzinājumā ar to kāds dots 7. piemēra risinājumā), ka (1, 3) ir minimuma punkts. Uzrakstām funkciju z šādā formā:

$$z = 3(x-1)^2 + [(x-1)-(y-3)]^2 - 6 = 3(x-1)^2 + (x-y+2)^2 - 6.$$

9. piemērs. Atrast reizinājuma xyz ekstrēmus, ja uzdota summa $x + y + z = 1$.

Mācību līdzeklī [Sad, 30-31] šis piemērs risināts ar Lagranža reizinātāju metodi un iegūts secinājums "Punkts $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ir funkcijas nosacītā minimuma punkts". Citētajā līdzeklī ar minimuma punktu domāts lokālā minimuma punkts. Ja skaitļi x, y un z būtu pozitīvi, tad norādītais punkts būtu arī globālā minimuma punkts, kas izriet no nevienādības $G \leq A$. Tā kā formulējumā nav prasības par skaitļu pozitivitāti, tad uzdevumam ekstrēmi (globālie) neeksistē. Par to viegli pārliecināties, aplūkojot punktus $(-x, -x, 2x + 1)$.

10. piemērs. Pozitīviem x, y atrast maksimālo $xy(4 - x - y)$ vērtību.
Apzīmēsim $t = x + y$ un divas reizes lietosim nevienādību $G \leq A$.

$$xy(4-x-y) \leq \frac{t^2}{4}(4-t) = \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2}(4-t) \leq \frac{1}{27}\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2} + (4-t)\right)^3 = \frac{64}{27}.$$

Vienādība pastāv, ja $\frac{t}{2} = 4 - t,\ t = \frac{8}{3};\ x = y = \frac{4}{3}$.

Piezīme. Mācību līdzeklī [Tok] funkcijas $F(x, y) = xy(4 - x - y),\ x, y \in R$ ekstrēmi meklēti ar diferenciālrēķinu palīdzību. Turklāt jautājums, vai ar šo metodi atrastais lokālais maksimums ir arī globāls netiek aplūkots. Globālo ekstrēmu šai funkcijai nav. Piemēram, ņemot $x = -1$, . dabū $F(-1, y) = y(y - 5)$, kas var pieņemt pēc patikas lielas vērtības. Savukārt, $F(4, y) = -4y^2$ var pieņemt pēc patikas mazas vērtības.

Īpaši piemēri

Viena argumenta polinomam P ir spēkā īpašība: ja visiem x: $P(x) > 0$, tad eksistē minimuma punkts t. i., tāds m, ka $\min P(x) = P(m)$. Piemēram, visiem x ir spēkā:

$$P(x) := x^2 - 2x + 4 > 0 \text{ un } \min P(x) = P(1) = 3.$$

Vai šāda īpašība ir spēkā arī divargumentu polinomam? Analizēsim polinomu

$$P = x^2y^2 + x^2 - 2xy + 1.$$

Pēc pilno kvadrātu izdalīšanas iegūstam, ka

$$P = x^2y^2 + x^2 - 2xy + 1 = (xy - 1)^2 + x^2 > 0.$$

Nevienādība ir stingra, jo abi saskaitāmie nevar būt vienādi ar nulli vienlaicīgi. Tomēr polinomam neeksistē minimuma punkts! Tiešām, izvēloties $y = k,\ x = \frac{1}{k}$, dabūjam, ka pirmais saskaitāmais ir nulle, bet otrais var būt pēc patikas mazs, jo k vietā varam ņemt, piemēram, 10, 100, 1000, utt.

Neparasta virsma

Viena argumenta funkcijai f piemīt šāda īpašība: ja eksistē tāds pozitīvs skaitlis c, ka visiem x no intervāla $(a, a + c)$ ir spēkā $f(a) > f(x)$ un visiem t no intervāla $(a - c, a)$ ir spēkā $f(a) > f(t)$, tad a ir stingra lokālā maksimums punkts. Vai šādas īpašības analogs ir spēkā arī vairākargumentu funkcijām? Vai mēs varam droši zināt, ka divargumentu funkcijai $F(x, y)$ punktā (a, b) ir lokāls maksimums, ja zinām, ka funkcijai F punktā (a, b) ir lokāls maksimums uz katras taisnes, kas iet caur punktu (a, b)?

Pieņemsim, ka mums ir ragaviņas un mēs atrodamies uz kādas virsmas punktā M. Ja neatkarīgi no tā, kādā virzienā mēs braucam, mēs uz kādu brīdi (kaut vai ļoti īsu) braucam uz leju, vai tad no šejienes izriet, ka M ir virsmas augstākais punkts (vismaz lokāli, t. i., salīdzinot ar citiem punktiem no kādas pietiekami mazas punkta M apkārtnes).

Aplūkosim šādu divu mainīgo polinomu
$$P(x, y) = (x^2 - y)(3y - x^2).$$

Koordinātu sākumpunktu apzīmēsim ar O. Uz taisnes $x = 0$ funkcija P minimumu sasniedz punktā O, jo $P(0, y) = -\ 3y^2$. Arī uz otras koordinātu ass funkcija P minimumu sasniedz punktā O, jo $P(x, 0) = -\ x^4$. Tagad izvēlamies patvaļīgu taisni $y = kx,\ k \neq 0$, kas iet caur O un aprēķinām polinoma vērtības “uz šīs taisnes”:

$$P(x, kx) = (x^2 - kx)(3kx - x^2) = x^2(x - k)(3k - x).$$

Tā kā reizinājums $(x - k)(3k - x)$ ir negatīvs, kad $x = 0$, kā arī tad, kad x atrodas kādā pietiekami mazā nulles apkārtnē U(0), tad $P(x, kx) \leq 0$ šajā apkārtnē. Un tomēr (0, 0) nav polinoma P maksimuma punkts! Tas tādēļ, ka $P(0, 0) = 0$, bet

$$P\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{3x^2}{2} - x^2\right) = \frac{x^4}{4} > 0\,.$$

Vai nav pārsteidzoši, ka, attālinoties no koordinātu sākumpunkta pa jebkuru taisni, mēs samazinām savu atrašanās augstumu, bet, attālinoties pa parabolu $y = 0{,}5x^2$, nē?

21. nodaļa
Nosacītā ekstrēma uzdevumi

Ar nosacītā ekstrēma uzdevumiem saprot tādus uzdevumus, kuros kādai funkcijai jāmeklē ekstrēms, ja uzdoti nosacījumi, ierobežojumi uz funkcijas argumentu kopu. Vairums no ekstrēmu uzdevumiem pēc savas būtības ir nosacītā ekstrēma uzdevumi. Ģeometriska rakstura uzdevumi, kā likums, ir uzdevumi ar ierobežojumiem (malu garumiem, laukumiem, tilpumiem jābūt pozitīviem lielumiem; trijstūra divu malu garumu summai jābūt lielākai par trešās malas garumu utt.). Uzdevumi par attālumiem starp līknēm, virsmām, figūrām, punktu kopām ir tipiski nosacītā ekstrēma uzdevumi.
Aplūkosim vairākus paņēmienus, metodes, ar kuru palīdzību daudzus uzdevumus, kurus parasti risina, izmantojot matemātiskās analīzes aparātu, var atrisināt elementārā veidā. Elementārie risinājumi ir ne tikai vienkāršāki, bet bieži vien arī īsāki. Uzdevumu risināšanu nereti atvieglo atbilstošs zīmējums.

1. piemērs. Atrast funkcijas $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ ekstrēmus, ja $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Acīmredzams, ka min $f = f(0, 0) = 1$ un max $f = 5$. Tomēr, grāmatā [Sw, 765] uzdevums risināts ar parciālo atvasinājumu palīdzību.

2. piemērs. Atrast maksimālo reizinājuma xyz vērtību, ja x, y un z pozitīvi skaitļi un $x + y + z = 5$. (“Atrast visus plaknes $x + y + z = 5$ punktus pirmajā oktantā, kuros funkcijai $f = xyz$ ir maksimālā vērtība.” [Ant, 948])

Elementārs risinājums iegūstams, lietojot īpašību: reizinājums ir maksimāls, ja $x = y = z$.

3. piemērs. Atrast max$|x^2 - 3x + 2|$, ja $1 \leq x \leq 2{,}5$.
Grūtāk uztverams formulējums dots grāmatā [Ant, 248]: “Atrast tādu vismazāko M vērtību, ka $|x^2 - 3x + 2| \leq M$ visiem x intervālā $\left[1, \frac{5}{2}\right]$.”

Apzīmēsim $F := x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Maksimālā vērtība modulim $|F|$ būs parabolas virsotnē $x = 1{,}5$ vai apskatāmā intervāla galapunktā. Aprēķinām šīs vērtības: $F(1) = 0$, $|F(1{,}5)| = 0{,}25$. $F(2{,}5) = 0{,}75$. Tātad maksimālā vērtība ir intervāla galapunktā. Ievērosim, ka šajā piemērā max $|F| =$ max F, t. i., moduļa ņemšana nepalielināja funkcijas maksimālo vērtību.

4. piemērs. Atrast min$|x^2 - 3x + 2|$, ja $1{,}5 \leq x \leq 1{,}75$.
“Atrast tādu vislielāko m vērtību, ka $|x^2 - 3x + 2| \geq m$ visiem x intervālā $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$.” [Ant, 248].
Pēc iepriekšējā piemēra $|F| = |(x - 1)(x - 2)|$ ir dilstoša intervālā $1{,}5 \leq x \leq 2$, jo $x = 1{,}5$ ir parabolas virsotnes abscisa, bet $x = 2$ – sakne. Tātad min$F = F(1{,}75) = 0{,}1875$.

1. uzdevums. Atrast max$(c^x + c^y)$, ja $c > 0$ ir uzdots skaitlis un $c^{2x} + c^{2y} = k^2$.

Apzīmējot $u = c^x$ un $v = c^y$, iegūstam elementāri atrisināmu uzdevumu: atrast max$(u + v)$, ja $u^2 + v^2 = k^2$. Mācību līdzeklī [Sad, 29] ņemtas vērtības $c = e$ un $k^2 = 2e^2$ un uzdevums risināts ar Lagranža reizinātāju metodi.

5. piemērs. “Dota ražošanas funkcija $z = 300x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, kur x ir darbaspēka resursu izlietojums, bet y – kapitāla resursu izlietojums. Darbaspēku resursu vienas vienības izmaksas ir 50 lati,

bet kapitāla resursu vienības izmaksas ir 100 lati. Ražošanas procesa budžets ir 15 000 lati. Aprēķināt to resursu izlietojumu, kāds nepieciešams maksimālai produkcijas izlaidei." [RGPB, 87]

Lai atrisinātu uzdevumu

"Funkcijai $f(x,y) = 300x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ meklējam maksimumu ar nosacījumu $50x + 100y = 15000$.", autori izmanto Lagranža funkciju; pirmās un otrās kārtas parciālos atvasinājumus; otrās kārtas diferenciāli un noskaidro, ka tas ir negatīvs. Beigās izdarīts piesardzīgs secinājums, ka "maksimālā produkcijas izlaide iespējama tad, ja resursu izlietojums ir šāds: $x = 100$ vienības un arī $y = 100$ vienības." [RGPB, 88]

Atzīmēsim, ka doto vienādību varēja vienkāršot: $x + 2y = 300$. Lietojot nevienādību $G \leq A$ starp vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko "piesardzīgā" secinājuma pareizību var pamatot divās rindiņās:

$$z = 300x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 300\sqrt[3]{x \cdot y \cdot y} \leq 300 \cdot \frac{x+y+y}{3} = 100 \cdot 300 = 30000.$$

Nosacījums, kad nevienādība kļūst par vienādību ir: $x = y = 100$.

Arī patstāvīgai risināšanai piedāvātos nosacītā ekstrēma uzdevumus [RGPB, 89-90] var atrisināt ar elementārām metodēm.

Dosim vairāku piedāvāto uzdevumu elementārus risinājumus.
Atrast funkcijas z ekstrēmus pie dotajiem nosacījumiem:
$z = 3x + 4y, \ \ x^2 + y^2 = 9$;
$z = 3xy, \ \ x^2 + y^2 = 4$;
$z = x^2 + y^2, \ \ x + y = 1$;
$z = 12xy - 3y^2 - x^2, \ \ x + y = 16$;
$z = 5x^2 + 6y^2 - xy, \ \ x + 2y = 24$;
$z = x^2 + y^2, \ \ 2x + 3y = 4$.

Pirmo piemēru var ātri atrisināt, lietojot Košī nevienādību:

$$z^2 = (3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25 \cdot 9 \Rightarrow |z| \leq 15.$$

Ekstremālās vērtības $z = 15$ un $z = -15$ sasniedzas attiecīgi punktos $x = \pm\frac{9}{5}$, $y = \pm\frac{12}{5}$.

Otrā piemēra risināšanā ērti izmantot nevienādību

$$-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$-4 \leq 2xy \leq 4$$
$$-6 \leq 3xy \leq 6.$$

Pārējie četri piemēri reducējami (piemēram, izsakot x un ievietojot to z izteiksmē) uz ekstrēmu noteikšanu kvadrātfunkcijai.

6. piemērs. Atrast maksimumu funkcijai $f = x^2y^3$, ja $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y = 20$.

Grāmatā [AC] uzdevums risināts ar Lagranža reizinātāju metodi, turklāt netiek pamatots, ka atrastais ekstrēms ir globāls. Elementāru risinājumu iegūst, pārveidojot funkciju f un lietojot nevienādību $G \leq A$:

$$8f = 8x^2y^3 = (x)(x)(2y)(2y)(2y).$$

Piecu reizinātāju summa ($2x + 6y = 40$) ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums ir maksimāls, ja $x = 2y$, t. i., ja $y = 4$ un $x = 8$. Atbilde. $\max f = 8^4 = 4096$.

7. piemērs. Atrast maksimumu funkcijai $f(x, y) = 100x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, ja $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 10$. [AC]

Aplūkojam funkciju F: $= x^3y$, ko iegūst, atmetot reizinātāju 100 un kāpinot funkciju f kvadrātā. Tad

$$3F = (x)(x)(x)(3y)$$

Četru reizinātāju summa ($3x + 3y = 30$) ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums ir maksimāls, ja $x = 3y$, t. i., ja $y = 2{,}5$ un $x = 7{,}5$.

$$\max f = \max 100\sqrt{F} = \frac{100 \cdot 7{,}5^2}{\sqrt{3}} = 1875\sqrt{3}.$$

8. piemērs. Noteikt funkcijas $z(x, y) = 2x + xy + y^2$ lielāko un mazāko vērtību, ja $x \geq 0$, $y \leq 0$, $y \geq x - 8$. [RGPB, 88]

Pieļaujamā kopa, kurā jāmeklē ekstrēmi ir trijstūris ar virsotnēm (0, 0), (8, 0) un (0, –8). Ievērosim, ka fiksētam y funkcija z ir lineāra (tās grafiks ir taisne). Tas nozīmē, ka z savus ekstrēmus sasniedz x maiņas intervāla galapunktos. No dotajiem nosacījumiem izriet, ka $0 \leq x \leq y + 8$, $|y| \leq 8$. Ja $x = 0$, tad

$$z = y^2 \Rightarrow 0 \leq z \leq 64.$$

Ja $x = y + 8$, tad

$$z(y + 8, y) = 2(y + 8) + (y + 8)y + y^2 = 2y^2 + 10y + 16 = 2y(y + 5) + 16.$$

Šī kvadrātfunkcija y maiņas intervāla galapunktos $[-8, 0]$ pieņem vērtības $z(0, -8) = 64$ un $z(8, 0) = 16$, bet minimuma punktā $y = -2{,}5$ ir pozitīva.

Atbilde. $\min z = z(0, 0) = 0$, $\max z = z(0, -8) = 64$.

15 tipveida piemēri ar kopēju prasību "Noteikt funkcijas $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ vislielāko un vismazāko vērtību slēgtā apgabalā, kuru ierobežo līnijas..." atrodami inženiertehnisko specialitāšu maģistrantiem paredzētajā mācību līdzeklī [UAM, 23].

Atrisināsim pirmo un pēdējo no šiem 15 uzdevumiem.

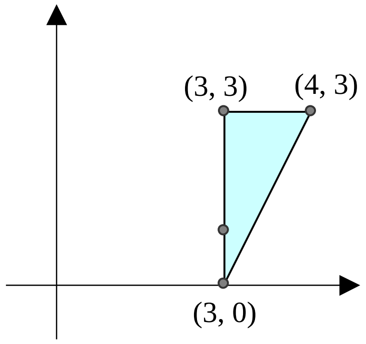
Pirmajā piemērā jāaplūko apgabals, ko ierobežo līnijas $x = 3$, $y = 3$ un $y = 3x - 9$. Apgabals ir trijstūris, sk. 29. zīmējumu. Ievērosim, ka

$$z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 1.$$

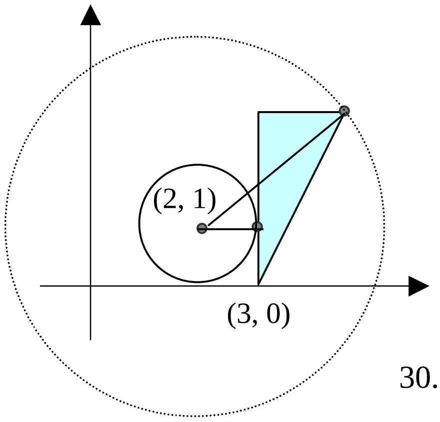
Novērtēsim z. Tā kā $3 \leq x \leq 4$, tad

$$z \leq (4 - 2)^2 + (3 - 1)^2 - 1 = 7 \text{ un } z \geq (3 - 2)^2 + (1 - 1)^2 - 1 = 0.$$

Atbilde. $\max z = z(2, 1) = 7$, $\min z = z(3, 1) = 0$.



29. zīm.



30. zīm.

Uzrādīsim otru risinājumu, kas faktiski ir uzdevuma ģeometriskā interpretācija.
Funkcija z pieņem nemainīgas vērtības uz riņķa līnijām ar centru punktā (2, 1). (Matemātikā līnijas, kuras visos punktos funkcija pieņem vienu un to pašu vērtību sauc par funkcijas līmeņlīnijām). Mainot riņķa līnijas $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$ rādiusu, iegūstam dažādas funkcijas $z = r - 1$ vērtības. Mazākā un lielāka r vērtība dos atbilstoši mazāko un lielāko z vērtību. Iedomāsimies, ka r pakāpeniski pieaug, sākot no nulles vērtības. Kādam r riņķa līnija pirmo reizi sasniegs (krustos) pieļaujamo vērtību kopu – iekrāsoto trijstūri T? No 30. zīmējuma skaidrs, ka mazākais r ir vienāds ar 1, kas dod $z_{min} = 1 - 1 = 0$. Riņķa līnija pieskaras trijstūra malai punktā (3, 1). Tālāk palielinot r riņķa līnija, izies ārpus T. Tas notiek tad, kad riņķa līnija sasniedz trijstūra virsotni (4, 3). Attālums starp (4, 3) un (2, 1) ir lielākais pieļaujamais rādiuss: $r^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, kas nozīmē, ka $z_{max} = 8 - 1 = 7$.

Pirmajos 14 piemēros apgabalu ierobežo taisnes nogriežņi, bet pēdējā piemērā apgabals ir parabolas segments: $4x^2 - 4 \le y \le 0$, kur $|x| \le 1$. Vienkārši pamatot, ka $z_{min} = z(1, 0) = 1$:

$$z = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1 \ge (1-2)^2 + (0-1)^2 - 1 \ge 1.$$

Sarežģītāk ir atrast z maksimumu.

$$z = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1 \le (x-2)^2 + (4x^2 - 4 - 1)^2 - 1 = (x-2)^2 + (4x^2 - 5)^2 - 1 =$$

$$x^2 - 4x + 4 + 16x^4 - 40x^2 + 24 = \mathrm{P}(x) := 16x^4 - 39x^2 - 4x + 28.$$

Jānosaka maksimums ceturtās pakāpes polinomam, ja $|x| \le 1$. Maksimumu P sasniedz kādā nogriežņā [–1, 1] iekšējā punktā, jo P(0) = 28, P(1) = 1 un P(–1) = 9. Zināms [C1, 64], ka šis ekstrēmu punkts x_{max} ir nosakāms kā attiecīga trešās pakāpes polinoma sakne.

$$\mathrm{P}_1(x) := 64x^3 - 78x - 4 = 0.$$

Viegli pārbaudīt, ka $\mathrm{P}_1(-\frac{1}{20}) < 0$, bet $\mathrm{P}_1(-\frac{1}{19}) > 0$. Tas nozīmē, ka $-\frac{1}{19} < x_{max} < -\frac{1}{20}$.

Tā kā z maksimālā vērtība neizsakās ar kādu pietiekami "ērtu" izteiksmi, iespējams, ka uzdevuma noteikumos ieviesusies kāda drukas kļūda.

9. piemērs. Noteikt funkcijas $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ ekstremālās vērtības, ja $x \le 0$, $y \le 0$ un $x + y \ge -3$.

Uzdevumu var atrisināt ar dažādām metodēm. Ar matemātiskās analīzes metodēm uzdevums ir risināts grāmatā [KRB1, 522.-524.]. Uzdevumu var atrisināt būtiski īsāk un vienkāršāk.

Apzīmēsim $u = x + y$. Tad u pieder nogrieznim [– 3, 0]. Ņemot vērā, ka dotajā apgabalā $xy \le 0$, novērtēsim z:

$$z = u^2 + u - 3xy \le u^2 + u.$$

Iegūtā parabola $u^2 + u$ maksimumu sasniedz pieļaujamā intervāla galapunktā $u = -3$. Novērtējums ir precīzs, ja $xy = 0$. Tas nozīmē, ka $z_{max} = u_{max} = 6$, kas realizējas divos punktos: $(0, -3)$ un $(-3, 0)$. Lai noteiktu minimumu, lietojam šādu novērtējumu:

$$z = u^2 + u - 3xy \ge u^2 + u - \frac{3(x+y)^2}{4} = \frac{u^2}{4} + u \ge -1.$$

Pirmais novērtējums ir precīzs, ja $x = y$, bet otrais, ja $u = -2$. Tātad $z_{min} = z(-1, -1) = -1$.

10. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ ekstrēmus trijstūrī ar virsotnēm, $(7, 7)$, $(-1, -1)$ un $(7, -1)$

Grāmatā [Sw, 769] piemērs risināts ar atvasinājumu palīdzību. Atrisināsim šo uzdevumu elementārā veidā, lietojot piemērotus funkcijas novērtējumus.

Pieļaujamo trijstūra punktu kopu var raksturot ar nevienādībām:

$$-1 \le x \le 7, \quad -1 \le y \le x.$$

Funkciju f uzrakstām formā:

$$f = (x - 2y)^2 - 4y^2 + y^3 + 4y = (x - 2y)^2 + y(y^2 - 4y + 4) = (x - 2y)^2 + y(y - 2)^2.$$

Ja $y \le 0$, tad $f \le (x - 2y)^2 \le (7 + 2)^2 = 81$.

Savukārt, ja $y \ge 0$, tad $4y(y - x) \le 0 \Rightarrow (x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 \le x^2 \Rightarrow$

$$f \le x^2 + y(y - 2)^2 \le 7^2 + 7(7 - 2)^2 = 224.$$

Tātad $\max f(x, y) = f(7, 7) = 224$.

Pierādīsim, ka $\min f = f(-1, -1) = -8$.

1. Skaidrs, ka minimuma punkts var atrasties tikai tai apgabala daļā, kur $y \le 0$. Ja $y > 0$, tad $f = (x - 2y)^2 + y(y - 2)^2 \ge 0$.

2. Ja $x > 1$, tad $f = x^2 - 4xy + y^3 + 4y > 1 + 0 - 1 - 4 = -4$. Tātad minimuma punkts var atrasties tikai tai apgabala daļā, kur $y \le 0$ un $x \le 1$.

3. Vēl atlicis gadījums, kad $|x| \le 1$. Ir spēkā novērtējums:

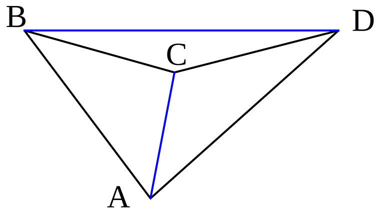
$$f = x^2 - 4xy + y^3 + 4y \ge f(x, -1) = x^2 + 4x - 1 - 4 = (x + 2)^2 - 9 \ge (-1 + 2)^2 - 9 = -8.$$

Tiešām,

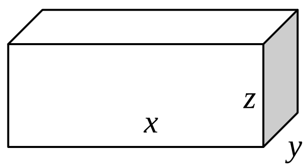
$$f(x, y) - f(x, -1) = -4x(y + 1) + y^3 + 1 + 4(y + 1) = (y + 1)(y^2 - y + 1 + 4(1 - x)) \ge 0.$$

2. uzdevums. Noteikt maksimālo laukumu, kāds var būt četrstūrim ABCD, kuram uzdota malu garumu summa $|AC| + |BD| = k > 0$. (31. zīm.).

Laukumu četrstūrim ABCD izsakām kā trijstūru ABC un ACD laukumu summu: $L(ABCD) = |AC| \cdot h_1 + |AC| \cdot h_2$, kur h_1 un h_2 attiecīgie augstumi pret pamatu AC. Ievērojam, ka $h_1 + h_2 \le |BD|$. Vienādība pastāv tad, ja nogriežņi AC un BC ir perpendikulāri. Tātad $L(ABCD) \le |AC| \cdot |BD|$. Divu skaitļu reizinājums (ja fiksēta reizinātāju summa) ir maksimāls tad, ja abi skaitļi vienādi.



31. zīm.



32. zīm.

Atbilde. $L_{\max} = \frac{k^2}{4}$. Ir bezgalīgi daudz optimālo četrstūru. Tiem visiem piemīt īpašība: BD $\perp$ AC un |BD| = |AC|.

Piezīme. Speciāls gadījums "Izliekta četrstūra diagonāles veido taisnu leņķi, bet to garumu summa ir 6 cm. Kāds ir lielākais iespējamais šī četrstūra laukums?" patstāvīgai risināšanai piedāvāts [KZZ2, 35]

Optimālā pasta paka

11. piemērs. ASV Pasts pārsūtīšanai pieņem tikai tādas kastes, kuru garākā mala kopā ar pakas šķērsgriezuma perimetru nepārsniedz 84 collas. Atrast izmērus vislielākā tilpuma pieļaujamajai kastei (taisnstūra paralēlskaldnim).
Šāds uzdevums patstāvīgai risināšanai piedāvāts grāmatā [TF, 212]. Uzdevums atrodams arī grāmatā [Sw, 769]. Gandrīz tāda paša nosaukuma (kā [TF]) un apjoma grāmatā [EG, 862] 84 collu vietā minēts lielāks skaitlis – 108 collas. Iespējams, ka mainījušies pasta noteikumi. No matemātikas viedokļa nav būtiski kādu tieši dotā lieluma vērtību izvēlas. Šis saistošais uzdevums, īpaši noformējuma un izklāsta ziņā slavējamā grāmatā [EG], risināts ar parciālo atvasinājumu palīdzību. Uzrādīsim elementāru un apmēram 10 reizes īsāku risinājumu.

Apzīmēsim pakas izmērus attiecīgi ar x, y un z (32. zīm.). Tad jāmeklē maksimums tilpumam

$$V = xyz, \text{ ja } x + 2y + 2z \leq 108.$$

Izmantosim nevienādību starp vidējo ģeometrisko un aritmētisko $G \leq A$:

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{x \cdot 2y \cdot 2z} \leq \frac{x + 2y + 2z}{3} \leq \frac{108}{3} = 36.$$

Tātad $4V \leq 36^3$ un $V \leq 36^2 \cdot 9 = 11664$. Vislielāko tilpumu iegūst, ņemot $x = 2y = 2z = 36$.

Piezīme. Citi uzdevumi par optimāliem taisnstūra paralēlskaldņiem ir aplūkoti [C1, 52-54] Grāmatā [Ant, 944-947] risināts uzdevums par materiāla ekonomiju, izgatavojot vaļēju kasti (bez vāka) pie nosacījuma: $V = 32\ \text{ft}^3$ ("ft" – pēda). Izmantoti 1. un 2. kārtas parciālie atvasinājumi, noskaidrots, ka atrastais ekstrēms ir lokāls minimums funkcijai $S = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$ un dota svarīga piebilde "Stingri runājot, atrisinājums nav pilnīgs, jo mēs neesam parādījuši, ka S *absolūtais minimums* ir tad, kad $x = y = 4$ un $z = 2$, mēs esam ieguvuši tikai relatīvo minimumu. Problēma pierādīt, ka relatīvais ekstrēms ir arī absolūtais ekstrēms var būt sarežģīta divu un vairāku argumentu funkcijām un netiks aplūkota šajā tekstā. Tomēr praktiskās problēmās no fizikāliem vai ģeometriskiem apsvērumiem parasti ir skaidrs, ka atrasts ir absolūtais ekstrēms." [Ant, 948]
Citētajā tekstā "*absolūtais minimums*" ir jāsaprot kā globālais, bet "relatīvais" – kā lokālais minimums.

12. piemērs. Noteikt funkcijas $F = x^2 + 2xy$ ekstrēmus, ja $(2x + y)^2 = 1$. [E]

Analizējam divas iespējas:
1) $2x + y = 1$. Tad $y = 1 - 2x$ un

$$F(x, 1 - 2x) = x^2 + 2x(1 - 2x) = -3x^2 + 2x = x(2 - 3x).$$

2) $2x + y = -1$. Tad $y = -1 - 2x$ un

$$F(x, -1-2x) = x^2 + 2x(-1-2x) = -3x^2 - 2x = -x(2+3x).$$

Abos gadījumos parabolām zari vērsti uz leju un tās maksimumu sasniedz sakņu viduspunktā:

$$\max F(x, y) = F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = F\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Minimālās vērtības nav. Izvēloties, piemēram, $x = n$, $y = 1 - 2x$, $n = 1, 2, \ldots$ varam iegūt pēc patikas mazas F vērtības.

13. piemērs. Noteikt funkcijas $f = x^2 + 2xy + y^2$ ekstrēmus, ja $x^2 + 2y^2 = 1$. [E]

1. risinājums. Tā kā $f = (x+y)^2 \geq 0$, tad $\min f = 0$, ja $x = -y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Vispirms atradīsim maksimumu funkcijai $x + y$. Lietosim Košī nevienādību:

$$x + y = x\cdot 1 + (y\cdot\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2+2y^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Tātad $\max f = \frac{3}{2}$. Košī nevienādība kļūst par vienādību, ja $x = 2y$. Tas dod

$$4y^2 + 2y^2 = 6y^2 = 1,\ y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6},\ x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{6}.$$

2. risinājums. Maksimuma noteikšanai lietosim nevienādību

$$(x-ky)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + k^2y^2 \geq 2xyk.$$

Ņemsim $k = 2$. Tad $4xy \leq x^2 + 4y^2$ un

$$f = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x^2+4y^2) =$$

$$= x^2\left(1+\frac{1}{2}\right) + y^2(1+2) = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 = \frac{3}{2}(x^2+2y^2) = \frac{3}{2}.$$

Vienādība pastāv, ja $x = ky = 2y$. Minimumu atrod kā 1. risinājumā.

3. risinājums. Studenti parasti izsaka $x = \pm\sqrt{1-2y^2}$ un tad ar atvasinājuma palīdzību meklē ekstrēmus funkcijām $1 - 2y^2 \pm \sqrt{1-2y^2}\,y + y^2$.

Piezīme. Funkcijai $f(x) = 2x\sqrt{1-2x^2} - x^2$ maksimumu var atrast ar elementārām metodēm. Lietot apzīmējumu $1 - 2x^2 = u^2$ un izmantot nevienādību $4ux \leq 4x^2 + u^2$.

14 piemērs. Atrast funkcijas $f = x^2 + 2xy$ ekstremālās vērtības, ja $x^2 + 2y^2 = 1$. [E]

1. risinājums. Apzīmē $x = ky$. Tad

$$k^2y^2 + 2y^2 = 1,\ y^2 = \frac{1}{k^2+2},$$

$$f = k^2y^2 + 2ky^2 = \frac{k^2+2k}{k^2+2} = 1 + \frac{2(k-1)}{k^2+2}.$$

Apzīmē $t = k - 1$ un $g(t) := \dfrac{t}{(t+1)^2+2} = \dfrac{t}{t^2+2t+3} = \dfrac{1}{t+\frac{3}{t}+2}$.

Funkcijas $t+\frac{3}{t}$, $t > 0$, minimuma punkts ir $t=\sqrt{3}$. Savukārt $t=-\sqrt{3}$ ir šīs funkcijas maksimuma punkts, ja $t < 0$. Tas dod

$$\max g(t) = g(\sqrt{3}) = \frac{1}{2+2\sqrt{3}}, \quad \min g(t) = g(-\sqrt{3}) = \frac{1}{2-2\sqrt{3}}$$

$$\max f = 1+\frac{1}{1+\sqrt{3}} = 1+\frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Maksimuma punkts:

$$y^2 = \frac{1}{k^2+2} = \frac{1}{(t+1)^2+2} = \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2+2} = \frac{3-\sqrt{3}}{12}$$

$$x = ky = (t+1)y = (\sqrt{3}+1)y$$

$$\min f = 1+\frac{1}{1-\sqrt{3}} = 1+\frac{1+\sqrt{3}}{1-3} = \frac{\sqrt{3}-1}{-2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Minimuma punkts:

$$y^2 = \frac{1}{(1-\sqrt{3})^2+2} = \frac{3+\sqrt{3}}{12}$$

$$x = (1-\sqrt{3})y.$$

<u>2. risinājums</u>. Apzīmē $x = \cos t$, $y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$. Tad

$$f = \cos^2 t + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos t \sin t = \frac{1+\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t + \frac{1}{2}.$$

Lietosim Košī nevienādību

$$\left|\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t\right| \le \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tātad $\max f(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\min f(x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Lietotais paņēmiens ļauj ātri noteikt funkcijas ekstrēmus, bet atšķirībā no pirmā risinājuma vēl jāpārvar tehniskas grūtības, lai atrastu punktus, kuros tiek sasniegtas šīs vērtības. Košī nevienādība kļūst par vienādību, ja $tg 2t = \sqrt{2}$. Zinot šo sakarību, var noteikt $x = \cos t$, un $y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$.

<u>3. risinājums</u>. Lieto nevienādību

$$-\frac{x^2}{a} - ay^2 \le 2xy \le \frac{x^2}{b} + by^2, \quad a, b > 0,$$

ko iegūst kā sekas no identitātes:$(x - cy)^2 = x^2 + 2cxy + c^2y^2 \ge 0$. Novērtējam funkciju *f*:

$$x^2 - \frac{x^2}{a} - ay^2 \le f = x^2 + 2xy \le x^2 + \frac{x^2}{b} + by^2$$

$$x^2(1-\frac{1}{a}) - ay^2 \le f \le x^2(1+\frac{1}{b}) + by^2.$$

Izvēlamies pozitīvus a un b tā, lai

$$1-\frac{1}{a}=-\frac{a}{2}, 1+\frac{1}{b}=\frac{b}{2} \Rightarrow a^2+2a-2=0,\ b^2-2b-2=0$$

$$a=-1+\sqrt{3}, b=1+\sqrt{3}.$$

$$(-\frac{a}{2})(x^2+2y^2)\le f \le \frac{b}{2}(x^2+2y^2)$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}=-\frac{a}{2}\le f\le \frac{b}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ekstrēmu punktu x un y noteikšanai izmanto nosacījumus, pastāvot kuriem lietotās nevienādības kļūst pat vienādībām, t. i., $x = ay$ un $x = by$. No vienādībām

$$(ay)^2 + 2y^2 = 1 \text{ un } (by)^2 + 2y^2 = 1$$

iegūstam, ka

$$y^2_{\min}=\frac{1}{a^2+2}=\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2+2}=\frac{1}{6-2\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{12}.$$

$$y^2_{\max}=\frac{1}{b^2+2}=\frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2+2}=\frac{1}{6+2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{12}.$$

Atrisiniet elementārā veidā

1. Atrast $4x^3 + y^2$ ekstrēmus, ja $2x^2 + y^2 = 1$. [Ant, 956]
2. Atrast maksimumu reizinājumam $\sin x \sin y$, kur x un y taisnleņķa trijstūra šaurie leņķi.
3. Atrast vektoru trīsdimensiju telpā, kura garums ir 5 un kura komponenšu summa ir vislielākā. [Ant, 957]
4. Atrast maksimumu funkcijai $P = x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$, ja $x, y > 0$ un $x + y = 20000$. [Sad, 15]
5. Minimizēt funkciju $x^2 + y^2 + z^2$, ja $x + y + z = 0$ un $x - y = 2$. [Sad, 19]
6. Minimizēt funkciju $x^2 + y^2$ pie nosacījuma $x + y \geq 1$. [Sad, 20]
7. Atrast minimumu funkcijai $xy + y^2$, ja $xy^2 = 2$. [Sad, 29]
8. Noteikt funkcijas $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ lielāko un mazāko vērtību slēgtā apgabalā, ko ierobežo līnijas: $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 5 = 0$. [RGPB, 89]
9. Noteikt funkcijas $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ lielāko un mazāko vērtību taisnstūrī, kura virsotnes atrodas punktos: $A(1; -3)$, $B(1; 2)$, $C(4; 2)$, $D(4; -3)$. [RGPB, 89]
10. Metāla plāksnes temperatūra $T(x, y)$ punktā (x, y) ir $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Skudra atrodas uz šīs plāksnes un rāpo pa riņķa līniju, kuras rādiuss ir 5 un centrs koordinātu sākumpunktā. Kādu visaugstāko un viszemāko temperatūru sastop skudra savā ceļā. [Ant, 957]

Literatūra

[AB] Andžāns A., Bērziņš A. *Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1998, 224 lpp.
[AC] Aliprantis C. D., Chakrabarti S. K. *Solutions manual for games and decision making*, New York, Oxford: Oxford University Press, 2000, 209 pp.
[Ant] Anton H. *Calculus, with analytic geometry*, Second ed., USA, John Wiley & Sons, 1984,1108+A121+Index9.
[BN] Бугров Я. С., Никольский С. М. *Задачник*, Москва, Наука, 1982, 192с.
[C1] Cibulis A. *Ekstrēmu uzdevumi 1. daļa*. – 2003, Rīga, LU, 104 lpp.
[C2] Cibulis A. *Ekstrēmu uzdevumi 2. daļa*. – 2002, 63 lpp. (http://liis.lv)
[C3] Cibulis A. *Ekstrēmu uzdevumi 3. daļa*. – 2002, 104 lpp. (http://liis.lv)
[C4] Cibulis A. *Ekstrēmu uzdevumi 4. daļa*. – 2003, 50 lpp. (http://liis.lv)
[DG] Deborah H., Gleason M., et al. *Calculus*, International ed. USA, John Wiley & Sons, 1994, 685 pp.
[CGG] Chung F., Gardner M., Graham R. *Steiner trees on a checkerboard*, Mathematics Magazine, vol. 62, No. 2, April 1989, 83-96.
[E] *Vairāku argumentu funkciju diferenciālrēķini un integrālrēķini. Funkciju virknes un rindas*, sastād. G. Eņģelis, Rīga, LVU, 1983, 27 lpp.
[EEM5] *Энциклопедия элементарной математики,кн.V. Геометрия.* Москва, Наука, 1966, 624 с.
[EG] Ellis R., Gulick D. *Calculus, with analytic geometry*, Fifth ed. Sounders College Pulishing, USA, 1994, 1024+A70+Index19.
[EMP] *Elementārās matemātikas praktikums*. *I daļa*, LU, Rīga, 1990, 90 lpp. (Autori: Šteiners K., Āboltiņa B., Mencis J., Zariņš P.)
[FL] Fogels E. Lejnieks E. *Trijstūru ģeometrija*, Rīga, LU, 2001, 59 lpp. (http://liis.lv)
[G] Гарднер М. *Поиск минимальных деревьев Штейнера на шахматной доске*, В мире науки, 1986, N6, 96-100 с.
[GK] Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. *Сборник задач по высшей математике, том* 1, (изд. 13-ое), ГИТТЛ, Москва, 1957, 282 с.
[GT] Галеев Э М., Тихомиров В М. *Краткий курс теории экстремальных задач*, Издат. Московск. университета, 1989, 206 с.
[Hon] Хонсбергер Р., *Математические изюминки*, Москва, Наука, 1992, 176 с.
[Kv] Кратчайшие сети, Квант, 1990, N3, 17-24.
[KG] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л., *Новые встречи с геометрией*, Москва, Наука, 1978, 224с.
[KR] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика?*, Москва, Просвещение, 1967, 558с.
[KRB1] Kronbergs E., Rivža P., Bože D. *Augstākā matemātika 1 daļa*, Rīga, Zvaigzne, 1988, 534 lpp.
[KUK] *Konkursa uzdevumu krājums algebrā, ģeometrijā un trigonometrijā*, Rīga, LVU, 1960, 218 lpp.
[KZZ1] Kriķis D., Zariņš P., Ziobrovskis V. *Diferencēti uzdevumi matemātikā, 1. daļa*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1991, 390 lpp.
[KZZ2] Kriķis D., Zariņš P., Ziobrovskis V. *Diferencēti uzdevumi matemātikā, 2. daļa*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1993 (2. izdevums), 224 lpp.
[Min] Минорский В. П. *Сборник задач по высшей математике*, Москва, Физматгиз, 1959, 360 с. (5. izdevums.)
[Pr] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии. Ч. 2*, Москва, Наука, 1991, 240с. (2. izdevums)

[PŠ] Прасолов В. В, Шарыгин И.Ф. *Задачи по стереометрии*,
Москва, Наука, 1989, 288с.
[REM] *Rokasgrāmata elementārajā matemātikā*, Rīga, Zvaigzne, 1982, 512 lpp.
[RGPB] Revina I., Gulbe M., Peļņa M., Bāliņa S. *Uzdevumu krājums matemātikā ekonomistiem*, Zvaigzne ABC, 1997, 168 lpp.
[RT] Радемахер Г., Теплиц О., *Числа и фигури*, Москва, Наука, 1966, 264с.
[Sad] Sadirbajevs F. *Ievads optimizācijā*, Daugavpils, Saule, 2003, 88 lpp.
[Sth] Штейнгауз Г. *Сто задач*, Москва, 1959, 160 с.
[Sw] Swokowsky E. W. *Calculus, with analytic geometry*, Alternate edition, USA, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1983, 934+A63 pp. (1. izd. 1979)
[Š1] Šteiners K. *Matemātiskās analīzes elementi*, Rīga, Zvaigzne, 1993, 320 lpp.
[ŠČJ] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геомерические неравенства, и задачи на максимум и минимум*, Москва, Наука, 1970, 335 с.
[TF] Thomas G. B., Finney R. L. *Calculus and analytic geometry*, Addisson-Wesley Publishing, USA, sixth edition, 1984, xxiii+1041pp+A89+I11 (1.izd. 1951. g.)
[Tih] Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах*,
Москва, Наука, 1986, 190 с.
[Tok] Tokarenko A. *Uzdevumu krājums augstākā matemātikā ekonomistiem, 1., 2. d*.,
Rīga, 2004 (Ekonomikas un kultūras augstskola.)
[UAM] *Uzdevumi augstākajā matemātikā* /sast. A. Āboltiņs, R. Rasmanis/,
Jelgava, LLU, 1997, 42 lpp.
[UKAM] *Uzdevumi krājums augstākajā matemātikā*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1996, 328 lpp. /sast. D. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence/ (1. izdevums 1984)
[VG] Возняк Г. М., Гусев В. А. *Прикладаные задачи на экстремумы*,
Москва, Просвещение, 1985, 144с.
[Zet] Зетель С. И. *Задачи на максимум и минимум*,
ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1948, 224 с.