EKSTRĒMU UZDEVUMI

IZLIEKTĪBA

4. DAĻA

A. Cibulis
Latvijas Universitāte

Rīga
2003

SATURS

IEVADS

Matemātikā un it sevišķi ekstrēmu uzdevumu teorijā izliektības jēdzienam ir īpaša nozīme. Tēlaini izsakoties, mēs to varētu salīdzināt ar aisbergu, kurš no elementārās matemātikas viedokļa redzams tikai virspusēji, fragmentāri un nav aptverams visā tā krāšņumā un varenībā. Matemātikā ir izveidojies atsevišķs virziens – izliektā analīze, kurā, kā jau rāda pats nosaukums, galvenais pētniecības objekts ir tieši *izliektība*. Izliekto analīzi parasti raksturo kā matemātikas nozari, kas atrodas starp ģeometriju un analīzi. To varētu raksturot arī kā ģeometrijas un analīzes simbiozi (starpstāvokli, krustpunktu). Izliektās analīzes ģeometriskos pamatus ir izstrādājis vācu matemātiķis un fiziķis H. Minkovskis (1864-1909). Izliektajai analīzei ir daudzveidīgi lietojumi dažādās nozarēs, piemēram, optimizācijā, variāciju rēķinos, funkcionālanalīzē, teorētiskajā mehānikā, ekonomikā, lineārajā un nelineārajā plānošanā (programmēšanā). Ir pat virziens ar nosaukumu "izliektā programmēšana". Vairāki izliektās analīzes jautājumi ir piemēroti darbā ar skolēniem (fakultatīvajās nodarbības, gatavojoties matemātikas olimpiādēm, matemātikas pulciņos, skolēnu konkursa darbos).

Šī grāmatas daļa veltīta galvenokārt izliektām funkcijām un dažiem to lietojumiem ekstrēmu uzdevumu risināšanā. Tāpat kā iepriekš tiek aplūkotas tikai elementārās ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes. Ekstrēmu uzdevumu daudzveidība, pat to, kas risināmi ar elementārām metodēm, dažādiem paņēmieniem, ir pārsteidzoši liela.

Kaut gan izklāsts ir pasniegts tādā līmenī, ko pieņemts saukt par elementāru, tomēr, lai lasītu un saprastu piedāvāto materiālu, skolēniem būs nepieciešama diezgan liela garīgā piepūle un matemātiskā sagatavotība. Skolas matemātikas kursā jēdzieni "izliekta kopa", "izliekta funkcija", manuprāt, vispār netiek aplūkoti (vismaz kaut cik sistematizēti). Šajā grāmatas daļā (atšķirībā no iepriekšējām) "teorētiskais" materiāla izklāsts aizņem ievērojami lielāku vietu nekā konkrētu uzdevumu risināšana.

Izliektībai ir veltīta plaša literatūra, tiesa, tā nav paredzēta skolēniem. Cik zināms, latviešu valodā līdz šim nav ticis izdots neviens skolēniem paredzēts mācību līdzeklis, kas būtu veltīts "izliektībai". Ir daži studentiem paredzēti mācību līdzekļi optimizācijā [Eng; Ra], kuros izliektībai ir veltīti atsevišķi punkti. Saturīgu speciāli izliektībai veltītu rakstu ir publicējis M. Bergers [Ber]. Klasika ir amerikāņu matemātiķa R. Rokafellara grāmata "Izliektā analīze"[Rok], sk. arī [http://www.amath.washington.edu/people/faculty/rockafellar/]
Tā ir pirmā monogrāfija, kas veltīta izliektajai analīzei. Grāmatas [Rok] tulkotāji atzīmē, ka R. Rokafellars ir aptvēris ļoti plašu materiālu, turklāt devis vienkāršu tā izklāstītu, ka autors ir tīrs analītiķis, par ko liecina tas, ka grāmatā, kas piesātināta ar ģeometriskiem jēdzieniem un spriedumiem, nav neviena zīmējuma.

Ekstrēmu uzdevumu risināšanā liela nozīme ir nevienādībām, īpaši tām, kas saista dažādus tā saucamos vidējos lielumus. Grāmatas 1. daļā [C1] plašāk tika aplūkotas divas ievērojamas nevienādības: nevienādība starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko un Košī nevienādība. Tagad goda vietā celta izliektās analīzes svarīgākā nevienādība – Jensena nevienādība. Abas iepriekš minētās nevienādības var iegūt kā sekas no Jensena nevienādības.

Darbā var atrast tēmas, kas piemērotas skolēnu patstāvīgiem pētījumiem. Risināts kombinatoriskās ģeometrijas uzdevums par minimālā izliekta režģu daudzstūra noteikšanu. Salīdzinājumā ar rakstā [Rab] atrodamajiem rezultātiem četros gadījumos ir uzrādīti daudzstūri ar mazākiem laukumiem. Risinājumā izmantota Pīka formula, kura pati par sevi ir interesanta un skolēniem piemērota tēma. Dotas īsas ziņas par formulas autoru A. Pīku.

Darba beigu daļā doti vairāki pamācoši piemēri par funkciju ekstrēmiem. Tie var būt noderīgi arī darbā ar studentiem.
Izmantotās literatūras saraksts ir dots darba beigās.

16. nodaļa **Izliektība**

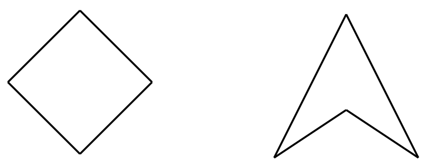
Matemātikā ir izveidojies atsevišķs virziens – izliektā analīze, kurā, kā jau rāda pats nosaukums, galvenais pētniecības objekts ir tieši *izliektība*. Vairāki izliektās analīzes jautājumi ir piemēroti darbā ar skolēniem (fakultatīvajās nodarbības, gatavojoties matemātikas olimpiādēm, matemātikas pulciņos, skolēnu konkursa darbos). Šajā nodaļā galvenā uzmanība pievērsta izliektu funkciju ekstremālajām īpašībām, bet izliektas kopas aplūkotas tikai nedaudz. Vairākus ekstrēmu uzdevumus par izliektām figūrām var atrast grāmatā [JB]. Tās priekšvārdā autori izsaka apgalvojumu, ka izliektu figūru teorija ir vienīgā mūsdienu matemātikas nodaļa, kas neizmanto būtiski nekādas tā saucamās "augstākās matemātikas" daļas. Ka šīs teorijas metodes ir ļoti skaistas, asprātīgas un nereti nebūt ne vienkāršas, bet tās, kā likums, ir pilnīgi elementāras un var tikt izskaidrotas vecāko klašu skolēniem… Ka laba ilustrācija teiktajam ir A. Aleksandrova grāmata "Izliekti daudzskaldņi" [Al]. Tagad, kad pagājuši vairāk nekā 50 gadu, kopš rakstīti šie vārdi un publicētas minētās grāmatas, daudz kas ir mainījies. Manuprāt, tagad skolēnu un pat daudzu matemātikas skolotāju sagatavotība ne tuvu nav atbilstoša tam, lai varētu lasīt un saprast [Al]. Skolēniem padziļinātai lasīšanai par izliektām figūrām var ieteikt grāmatu "Izliektas figūras un daudzskaldņi" [Lus].
No ekstrēmu uzdevumu teorijas viedokļa izliektībai īpašu nozīmi piešķir tas, ka izliektas funkcijas lokāls ekstrēms ir arī globāls.

Izliektas kopas un funkcijas

Jēdzieni – izliekta figūra, kopa, funkcija, līkne – nav sveši arī elementārajā matemātikā. Sk., piemēram, [REM, 351. lpp.], kur dota šāda vispārpieņemta definīcija.
"Figūru sauc par izliektu, ja nogrieznis, kas savieno divus (jebkurus) šīs figūras punktus ir šīs figūras apakškopa, t. i., ja visi šī nogriežņa punkti pieder pie figūras."

Gadījumā, kad figūra ir daudzstūris, nereti tiek lietotas šādas definīcijas:
- Daudzstūri sauc par **izliektu**, ja visi tā leņķi ir mazāki par 180 grādiem.
- Daudzstūri sauc par **izliektu**, ja tas atrodas vienā pusē jebkurai taisnei, kas ir šī daudzstūra malas pagarinājums.

Katrs trijstūris ir izliekts. Bet jau starp četrstūriem pastāv arī neizliekti četrstūri, t. i., tādi, kas nav izliekti, sk. 1. zīmējumu.



1. zīm.

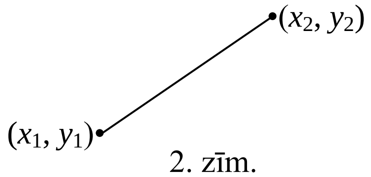
Vairākdimensiju gadījumā izliektu kopu definē šādi:
1. definīcija. Kopu $A \subset R^n$ sauc par **izliektu**, ja visiem $x_1, x_2 \in A$ nogrieznis $[x_1, x_2] \subset A$.
2. definīcija. Kopu $[x, y] := \{z \in R^n : z = \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0, 1]\}$ sauc par **nogriezni** n-dimensiju telpā R^n.

Lieto arī šādu algebriska tipa definīciju.
3. definīcija. Kopu $K \subset R^n$ sauc par izliektu, ja tā satur visas savu elementu izliektās kombinācijas.
4. definīcija. Par elementu x_1, x_2, ..., x_n **izliektu kombināciju** sauc jebkuru lineāru kombināciju $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$ ar nenegatīviem koeficientiem λ_k, kuru summa vienāda ar "1".

Ja aplūko nogriezni plaknē, kura galapunktu koordinātas ir (x_1, y_1), (x_2, y_2), (sk. 2. zīm), tad iegūst formulu

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\}$$

Turpmāk šī formula mums noderēs izliektas funkcijas ģeometriskai raksturošanai.



2. zīm.

Dažas ekstrēmu problēmas izliektām kopām

Atrast vismazāko kopu, kas satur trīs uzdotus punktus.
Kāds var būt vismazākais laukums izliektai figūrai, ja tās iekšienē iespējams pagriezt vienības nogriezni par 360 grādiem?
Kādai izliektai figūrai ar uzdotu diametru un platumu ir vismazākais laukums?
Izliektām plaknes figūrām ir spēkā šādas nevienādības:

$$\pi D^2 \geq 4L$$
$$P^2 \geq 4\pi L$$
$$D\pi \geq P.$$

kur D, L un P ir attiecīgi figūras diametrs, laukums un perimetrs. [JB, 6. paragrāfs]

Izliektu režģa daudzstūru minimālie laukumi

Kāds ir vismazākais laukums izliektam režģa n-stūrim?

Turpmāk vārdu "režģa" (tur, kur nevajadzētu rasties pārpratumiem) bieži vien nerakstīsim.
Cik zināms, vispārīgā gadījumā šī problēma nav atrisināta. Problēmas formulējums un rezultāti par pirmajiem 22 daudzstūriem ir apkopoti S. Rabinoviča rakstā [Rab]. Tur dotas daudzstūru laukumu minimālās (vai uz to brīdi labākās zināmās) vērtības, bet ne paši daudzstūri. Turpmāk dotajā tabulā pēdējās trīs kolonnas ir ņemtas no tikko minētā raksta. Minimālo daudzstūru meklēšanai atsevišķa nodaļa tika veltīta Inetas Umbraško bakalaura darbā (LU, Rīga, 2003). Divos gadījumos (n = 15 un n = 19), viņai izdevās atrast daudzstūri ar mazāku laukumu nekā rakstā [Rab], toties liktenis atspēlējās dažos citos gadījumos, kuros viņai neizdevās atkārtot norādītās laukuma vērtības.

Atrisināsim formulēto ekstrēmu uzdevumu pirmajiem sešiem n-stūriem. Turpmāk izmantosim Pīka formulu:

$$L_n = i + \frac{b}{2} - 1,$$

kur L_n ir n-stūra laukums, bet i un b – režģu punktu skaits attiecīgi apskatāmā n-stūra iekšienē un uz tā robežas.

Īsas vēsturiskas ziņas

Georgs Aleksandrs Pīks ir dzimis 1859. gada 10. augustā, Vīnē. Doktora grādu viņš ir ieguvis Vīnes Universitātē, 1880. gadā, aizstāvot disertāciju par Ābela integrāļiem. Pīks ir mācījies pie divām slavenībām – austriešu fiziķa un filozofa Ernsta Maha (1838-1916) un vācu matemātiķa Fēliksa Kleina (1849-1925). Pīks mira 1942. gada 26. jūlijā *Theresienstadt* koncentrācijas nometnē. Pīka formula daudzstūra laukuma aprēķināšanai pirmo reizi publicēta 1899. gadā. [Pick G. *Geometrisches zur Zahlenlehre* – Z. d. Vereines Lotos, Praga, 1899.]
Plašāk pazīstama tā kļuva 1969. gadā pēc poļu matemātiķa Hugo Šteinhauza (1887-1972) saistoši uzrakstītās grāmatas *Mathematical Snapshots*, sk. arī [Šth]. Skolēniem ieteicama lasāmviela par Pīka teorēmu un vairākiem tās lietojumiem ir raksts [Vas]. Pīka teorēmai ir dažādi vispārinājumi, sk. piemēram [Var].

Pīka formulas pierādījums

Viens no vienkāršākajiem un skolēniem piemērotākajiem pierādījumiem ir veicams pēc šādas shēmas: vispirms pierāda Pīka formulu taisnstūrim, tad taisnleņķa trijstūrim, pēc tam patvaļīgam trijstūrim un beidzot daudzstūrim, pēdējo sadalot trijstūros.

Taisnstūris

Aplūkosim patvaļīgu taisnstūri, ar malām m un n, sk. 3. zīmējumu. Ievērosim, ka režģa punktu skaits uz taisnstūra horizontālās un vertikālās malas ir attiecīgi m + 1 un n + 1, bet režģa punktu skaits šo malu iekšienē ir attiecīgi m – 1 un n – 1. Aprēķinām taisnstūra laukumu:

$$L = mn;$$

režģa punktu skaitu i taisnstūra iekšienē:

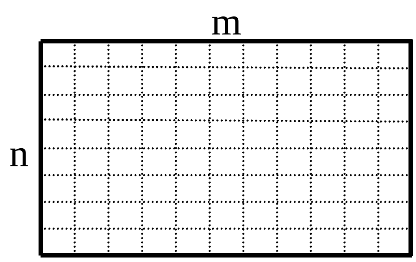
$$i = (m-1)(n-1);$$

un režģa punktu skaitu b uz taisnstūra malām:

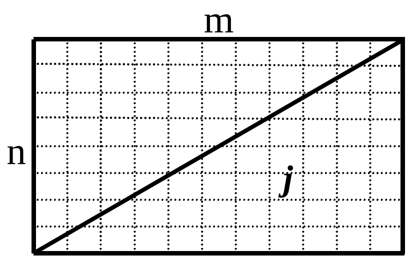
$$b = 2(m-1) + 2(n-1) + 4 = 2m + 2n.$$

Vienkārša pārbaude apstiprina Pīka formulas pareizību taisnstūrim

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (m-1)(n-1) + m + n - 1 = mn - m - n + 1 + m + n - 1 = mn.$$



3. zīm.



4. zīm.

Taisnleņķa trijstūris

Apzīmēsim ar j, t un d attiecīgi punktu skaitu taisnleņķa trijstūra iekšienē, uz tā robežas un uz hipotenūzas, neskaitot tās galapunktus. Papildinām taisnleņķa trijstūri līdz taisnstūrim, sk. 4. zīmējumu. Ievērosim, ka starp taisnstūra un trijstūra punktu skaitu pastāv šādas vienādības:

$$i = 2j + d$$
$$b = 2(t - d) - 2.$$

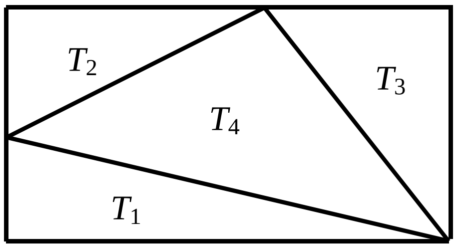
Izmantojot šīs vienādības un Pīka formulu taisnstūrim, iegūstam:

$$L = i + \frac{b}{2} - 1 = 2j + d + t - d - 1 - 1 = 2j + t - 2 = 2(j + \frac{t}{2} - 1),$$

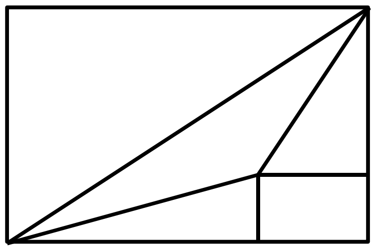
kas arī nozīmē Pīka formulas pareizību taisnleņķa trijstūrim.

Patvaļīgs trijstūris

Trijstūri T_4 papildinām līdz taisnstūrim T, sk. 5. zīm. Gadījums, kad trijstūri papildinot līdz taisnstūrim, tiek izmantoti trīs taisnleņķa trijstūri un viens taisnstūris, (sk. 6. zīmējumu) analizējams līdzīgi.



5. zīm.



6. zīm.

Trijstūru T_k, k = 1, 2, 3, 4 laukumu, iekšējo un robežas punktu skaitu apzīmēsim attiecīgi ar L_k, i_k un b_k. Ar i un b, tāpat kā iepriekš, apzīmēsim taisnstūra T iekšējo punktu un robežas punktu skaitu. Trijstūra T_4 laukumu L_4 var izteikt no vienādības:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4,$$

kur L ir taisnstūra T laukums. Saskaņā ar iepriekš konstatēto Pīka formula ir pareiza taisnleņķa trijstūriem un taisnstūriem, tāpēc jāpierāda, ka (ērtāka pieraksta dēļ laukumu vienādības formulas $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, abas puses pareizinātas ar 2):

$$2i + b - 2 = 2i_1 + b_1 - 2 + 2i_2 + b_2 - 2 + 2i_3 + b_3 - 2 + 2i_4 + b_4 - 2$$

$$2i + b - 2 = 2(i_1 + i_2 + i_3 + i_4) + (b_1 + b_2 + b_3) + b_4 - 8.$$

Iekavās iekļautos lielumus var izteikt no šādām gandrīz acīmredzamām vienādībām:

$$b_1 + b_2 + b_3 = b + b_4$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + b_4 - 3.$$

(Trijstūra T_4 virsotnes vienādības $b_1 + b_2 + b_3 = b + b_4$ abās pusēs ir ieskaitītas divas reizes; otrajā vienādībā "3" jāatskaita, jo trijstūra T_4 trīs virsotnes ietilpst tā robežas punktu skaitā b_4). Tātad

$$2i + b - 2 = 2(i - b_4 + 3) + b + 2b_4 - 8$$
$$2i + b - 2 = 2i + b - 2,$$

kas arī bija jāpierāda.

Patvaļīgs daudzstūris

Pīka formulas pareizība patvaļīgam daudzstūrim D izriet no tā, ka daudzstūri var sadalīt trijstūros un no šāda apgalvojuma:

Ja D ir sadalīts ar diagonāli divos daudzstūros D_1 un D_2 un Pīka formula ir pareiza daudzstūriem D_1 un D_2, tad tā ir pareiza arī daudzstūrim D.

Daudzstūru D, D_1 un D_2, iekšējo un robežas punktu skaitu apzīmēsim attiecīgi ar i, i_1, i_2, b, b_1 un b_2. Punktu skaitu uz D diagonāles, (kas atdala daudzstūrus D_1 un D_2) neskaitot tās galapunktus, apzīmēsim ar d. Tad, izmantojot vienādības

$$i = i_1 + i_2 + d$$
$$b = b_1 + b_2 - 2d - 2,$$

iegūstam Pīka formulu daudzstūrim D.

$$2L = 2L_1 + 2L_2 = 2i_1 + b_1 - 2 + 2i_2 + b_2 - 2 =$$
$$2(i_1 + i_2) + (b_1 + b_2) - 4 = 2(i - d) + b + 2d + 2 - 4 = 2i + b - 2.$$

Piezīme. Pīka formulai ir zināmi arī vairāki citi pierādījumi. Grāmatās [AZ, Ša] tā pierādīta, izmantojot slaveno Eilera formulu. Eilers Pēterburgas zinātņu akadēmijas rakstos 1758. gadā publicēja formulu: V – M + S = 2, kas saista jebkura izliekta daudzskaldņa virsotņu, malu un skaldņu skaitu. Plaknes gadījumā daudzskaldņa vietā var aplūkot sakarīgu grafu ar V virsotnēm, S apgabaliem (skaldnēm) un M malām (šķautnēm) un Eilera formulu pierakstīt kā V + S – M = 1.

Minimālais trijstūris

Jebkuram režģa trijstūrim $b \geq 3$, jo uz tā robežas ir vismaz trīs režģa punkti. Pēc Pīka formulas

$$\mathrm{L}_3 = i + \frac{b}{2} - 1 \geq i + \frac{3}{2} - 1 = i + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Režģa trijstūrus, kuru vienīgie režģa punkti ir trijstūra virsotnes, parasti sauc par elementāriem trijstūriem. Jebkura elementārā trijstūra laukums ir 0,5.

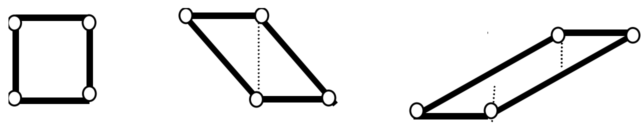
Piezīme. No tā, ka elementārā trijstūra laukums ir 0,5 izriet vienkāršs novērtējums: $\mathrm{L}_n \geq \frac{n}{2}$. Izliektam n-stūrim šis novērtējums ir precīzs tikai pirmajām divām n vērtībām: $n = 3$ un $n = 4$. Rakstā [Rab] ir dots šāds netriviāls un būtiski labāks novērtējums: $2L_n \geq \left\lceil \frac{n^3}{4\pi^2} \right\rceil$. Nevienādības labajā pusē lietotās "iekavas" nozīmē veselo daļu no augšas. Ja $n = 3$, tad saskaņā ar šo novērtējumu: $2L_3 \geq \left\lceil \frac{27}{4\pi^2} \right\rceil = \lceil 0{,}68... \rceil = 1$. Ja $n = 4$, tad $2L_4 \geq 2$. Pārbaude nākamajai n vērtībai rāda, ka arī šis novērtējums nav precīzs: $2L_5 \geq \left\lceil \frac{125}{4\pi^2} \right\rceil = \lceil 3{,}16... \rceil = 4$, jo kā pierādīts punktā "Minimālais piecstūris", nav tāda izliekta režģa piecstūra ar laukumu 2.

Minimālais četrstūris

Saskaņā ar novērtējumu $\mathrm{L}_n \geq \frac{n}{2}$ minimālais laukums, kāds var būt izliektam režģu 4-stūrim ir 1. To var secināt arī neatsaucoties uz šo novērtējumu.
Režģu četrstūrim uz tā robežas ir vismaz 4 režģu punkti (virsotnes), kas nozīmē, ka $b \geq 4$. Pēc Pīka formulas:

$$L_4 = i + \frac{b}{2} - 1 \geq i + \frac{4}{2} - 1 = i + 1 \geq 1.$$

Viegli parādīt, ka novērtējums ir precīzs, sk. 7. zīmējumu. Redzams, ka uzdevuma atrisinājumam nav unitātes. Ir bezgalīgi daudz izliektu četrstūru, ar minimālo laukumu. Visiem šiem četrstūriem iekšējo režģu punktu skaits ir 0.



7. zīm. $L_4 = 1$

Minimālais piecstūris

Pierādīsim, ka jebkuram izliektam režģu piecstūrim ir spēkā novērtējums:

$$L_5 \geq \frac{5}{2}.$$

Piecstūris ar šādu minimālo laukumu ir uzrādīts 9. zīmējumā.
Minimālo piecstūri apzīmēsim ar M. Ievērosim, ka minimālajam piecstūrim $b = 5$. Citiem vārdiem, daudzstūra virsotnes ir vienīgie režģa punkti uz daudzstūra M robežas. Tiešām, ja izliekta piecstūra mala, neskaitot tās galapunktus, saturētu vēl kādu režģa punktu, tad no šāda piecstūra varētu iegūt izliektu piecstūri ar mazāku laukumu. Tātad M nebūtu minimālais piecstūris. Piemēram, no 8. zīmējumā redzamā piecstūra ABCDE, kura mala DE satur režģu punktu F, var iegūt izliektu piecstūri ABCFE.

Iedalīsim daudzstūra virsotnes pēc to koordinātām šādās četrās klasēs:

(nepāra, nepāra), (nepāra, pāra), (pāra, nepāra), (pāra, pāra).

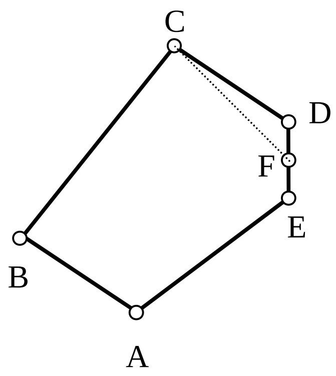
Ievērosim, ka vienas klases virsotnēm piemīt šāda svarīga īpašība:
nogriežņa viduspunkts, kas savieno vienas klases virsotnes ir režģa punkts,
(jo, gan divu pārskaitļu, gan divu nepārskaitļu pussumma ir vesels skaitlis) Izliektības dēļ visi nogriežņa punkti, to skaitā arī mūs interesējošais viduspunkts, pieder apskatāmajam daudzstūrim. Ja daudzstūrim ir 5 virsotnes, tad vismaz divas no tām pieder vienai un tai pašai klasei, jo virsotņu ir vairāk nekā klašu. Tātad šo virsotņu savienojošā nogriežņa viduspunkts V ir režģa punkts. Tā kā V neatrodas uz minimālā daudzstūra malas, tad tas ir iekšējs punkts, t. i., $i \geq 1$. Pēc Pīka formulas dabūjam:

$$L_5 = i + \frac{b}{2} - 1 \geq 1 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

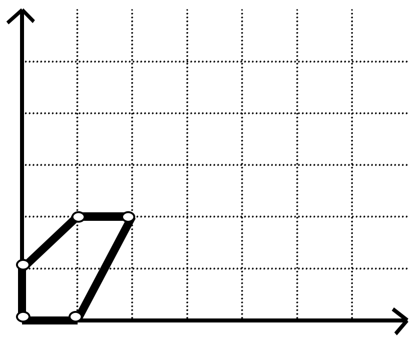
Piezīme. Uzdevums pierādīt, ka jebkura izliekta piecstūra, kuram virsotnes ir režģa punktos, laukums nav mazāks par 2,5 ir piedāvāts 1990. gada Ziemeļamerikas matemātikas sacensībās [The William Lowell Putnam Mathematics Competition http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnam/ ; http://www.kalva.demon.co.uk/putnam/putn90.html]

Sekas. Katrs izliekts režģa piecstūris satur vismaz vienu iekšēju režģa punktu, bet minimālais piecstūris satur tieši vienu iekšēju režģa punktu.

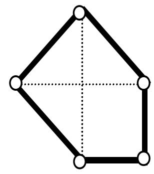
Atzīmēsim, ka minimālais piecstūris nav viens vienīgs. Piemēram, minimāls laukums ir 9. zīmējumā redzamajam piecstūrim ar virsotnēm: (0, 0), (1, 0), (2, 2), (1, 2), (0, 1) kā arī simetriskam piecstūrim, kāds redzams 10. zīmējumā.



8. zīm.



9. zīm.



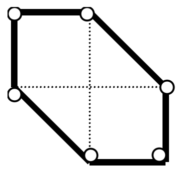
10. zīm. $L_5 = 2{,}5$

Minimālais sešstūris

Pierādīsim, ka $\min L_6 = 3$. Sešstūris ar minimālo laukumu ir uzrādīts 11. zīmējumā.
Uz sešstūra robežas izvēlamies trīs pēc kārtas sekojošas virsotnes, kas veido trijstūri un, savienojot tās, sadalām sešstūri divās daļās - trijstūrī un piecstūrī. Tā kā

$$L_3 \geq 0{,}5 \text{ un } L_5 \geq 2{,}5,$$

tad ir spēkā novērtējums $L_6 \geq 3$. Cits spriedums: tā kā izliektam piecstūrim $i \geq 1$, tad arī sešstūrim $i \geq 1$. Pīka formula sešstūrim dod novērtējumu $L_6 \geq 3$.



11. zīm. $L_6 = 3$

Minimālais septiņstūris

Teorēma. Izliektam 7-stūrim ir vismaz četri iekšēji režģa punkti.

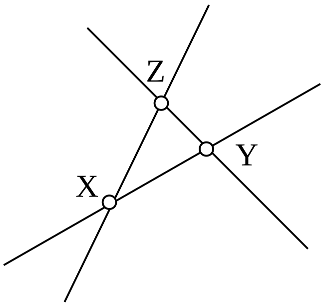
Pierādījums. Apzīmēsim minimālā izliekta n-stūra iekšējo punktu skaitu ar m(n) un pierādījumu veiksim pēc šādas shēmas;

$$m(7) \geq 1 \;\Rightarrow\; m(7) \geq 2 \;\Rightarrow\; m(7) \geq 3 \;\Rightarrow\; m(7) \geq 4.$$

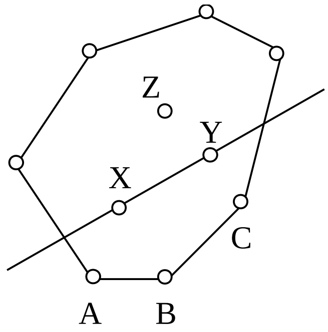
Nevienādība $m(7) \geq 1$ izriet no iepriekš iegūtā novērtējuma $m(5) \geq 1$, jo izliekta 7-stūra piecas virsotnes veido izliektu 5-stūri.

Iekšēju 7-stūra punktu apzīmēsim ar X un caur to novilksim taisni. Šai taisnei vienā pusē atrodas vismaz četras 7-stūra virsotnes (virsotne var atrasties arī uz pašas taisnes). Šīs četras virsotnes kopā ar punktu X veido izliektu piecstūri. Tā kā izliektam piecstūrim ir vismaz viens iekšējs punkts, tad $m(7) \geq 2$.

Ja 7-stūrī ir divi iekšēji punkti, tad apgalvojuma "$m(7) \geq 2 \;\Rightarrow\; m(7) \geq 3$" pierādījums pēc būtības ir tāds pats kā tikko uzrādītais. Caur 7-stūra diviem iekšējiem punktiem X un Y novelk taisni XY. Taisnei XY vienā pusē atrodas vismaz četras 7-stūra virsotnes (virsotne var atrasties arī uz pašas taisnes), sk. 13. zīmējumu. Šīs četras virsotnes kopā ar punktu X veido izliektu piecstūri. Tātad $m(7) \geq 3$.



12. zīm.

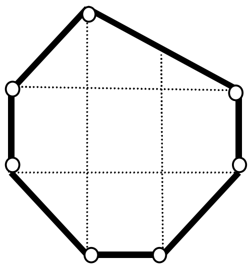


13. zīm.

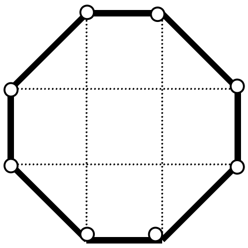
Ja 7-stūrī ir trīs iekšēji punkti X, Y un Z, tad savienojam šos punktus ar taisnēm XY, YZ un ZX, sk. 12. zīmējumu. Ja visi trīs punkti atrastos uz vienas taisnes, tad, spriežot tāpat kā iepriekš, iegūtu izliektu piecstūri un tādējādi arī vajadzīgo novērtējumu $m(7) \geq 4$. No trīs taisnēm XY, YZ un ZX izvēlamies to, kuras vienā pusē ir vismaz trīs 7-stūra virsotnes un kuras otrā pusē ir punkti X, Y un Z. Tāda taisne vienmēr eksistē. (Ja katrai taisnei XY, YZ un ZX taisnes tajā pusē, kura nesatur trijstūri XYZ, būtu tikai divas 7-stūra virsotnes, tad tās kopā nevarētu veidot 7-stūri.) Izvēlētās taisnes divi punkti kopā ar 7-stūra trīs virsotnēm veido izliektu piecstūri (13. zīmējumā tas ir piecstūris ABCYX), kura iekšienē ir vismaz viens režģa punkts. Tātad $m(7) \geq 4$. No šejienes un Pīka formulas izriet:

$$L_7 = i + \frac{b}{2} - 1 \geq 4 + \frac{7}{2} - 1 = 6{,}5$$

Izliekts 7-stūris ar minimālo laukumu ir parādīts 14. zīmējumā.



14. zīm. $L_7 = 6{,}5$



15. zīm. $L_8 = 7$

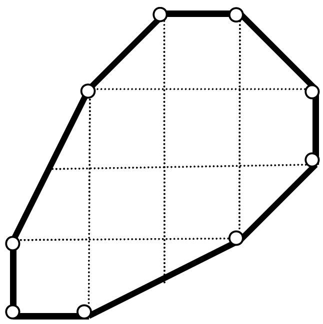
Uzdevums. Uzrādīt citu izliektu režģa 7-stūri ar laukumu 6,5. Noskaidrot, vai minimālo 7-stūru ir bezgalīgi daudz? Vai starp tiem ir simetrisks 7-stūris? Kuram no minimālajiem 7-stūriem ir vismazākais perimetrs?

Minimālais astoņstūris

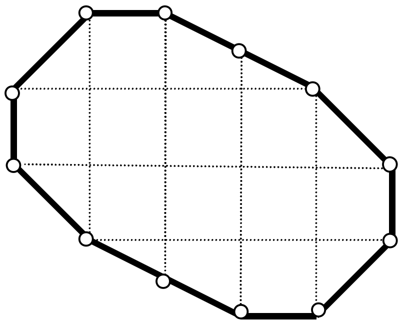
Minimālā astoņstūra laukuma noteikšana nesagādā jaunas grūtības, jo no 14. zīmējumā redzamā minimālā 7-stūra vienkārši iegūt 8-stūri ar 4 iekšējiem punktiem, sk. 15. zīmējumu. Tā kā $m(8) \geq m(7)$, t. i., iekšējo punktu skaits minimālajam 8-stūrim nevar būt mazāks kā 7-stūrim, tad Pēc Pīka formulas

$$L_8 = i + \frac{b}{2} - 1 \geq 4 + \frac{8}{2} - 1 = 8\,.$$

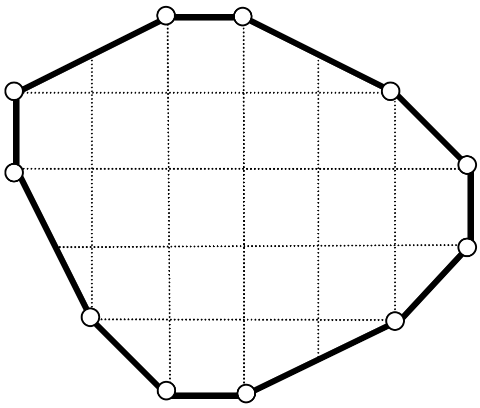
Pārējām n vērtībām, n = 9, 10, ..., 20, ir atrasti šādi izliekti n-stūri, sk. 16.-28. zīm. Vai varat samazināt laukumu kādam no uzrādītajiem n-stūriem?



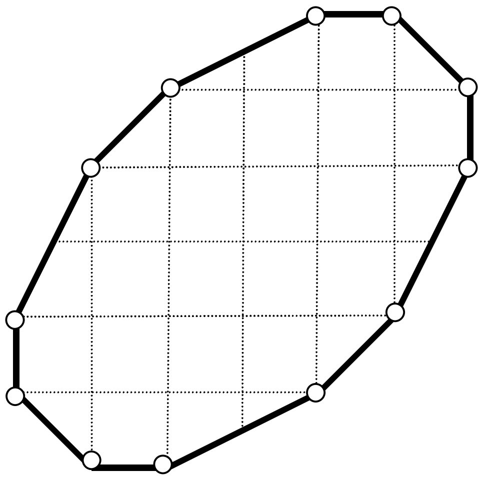
16. zīm. $L_9 = 10{,}5$



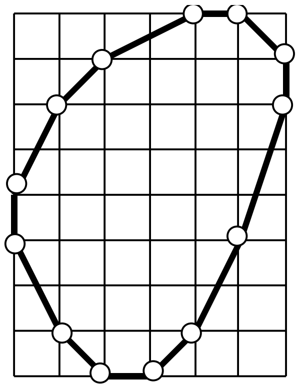
17. zīm. $L_{10} = 14$



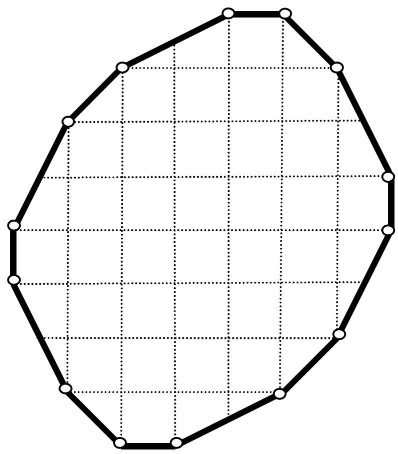
18. zīm. $L_{11} = 21{,}5$



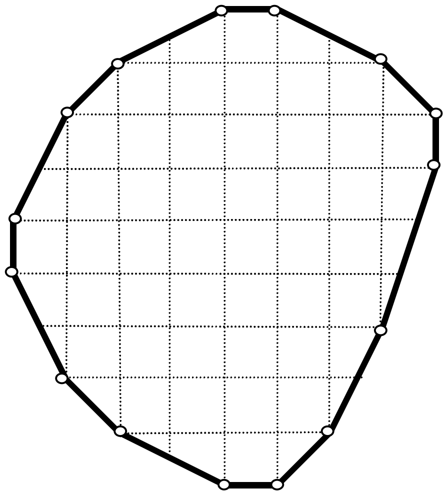
19. zīm. $L_{12} = 24$



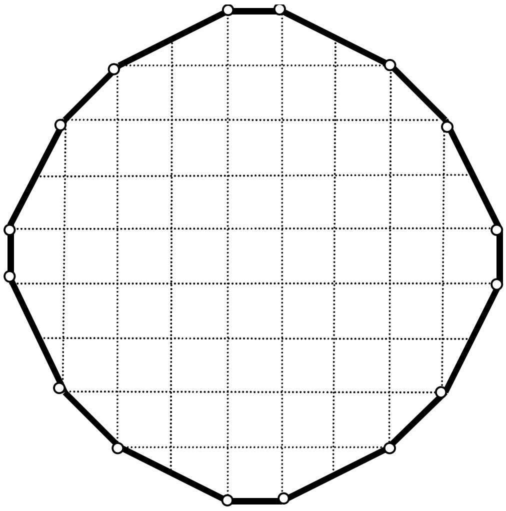
20. zīm. $L_{13} = 32{,}5$



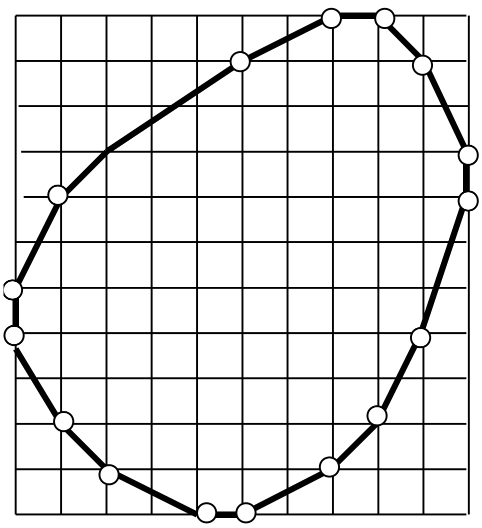
21. zīm. $L_{14} = 40$



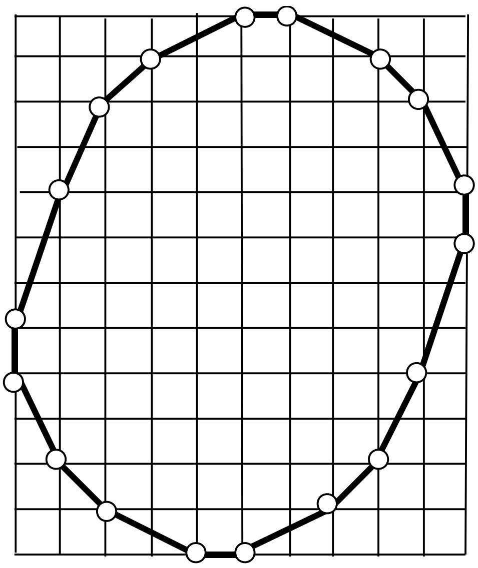
22. zīm. $L_{15} = 51{,}5$



23. zīm. $L_{16} = 59$



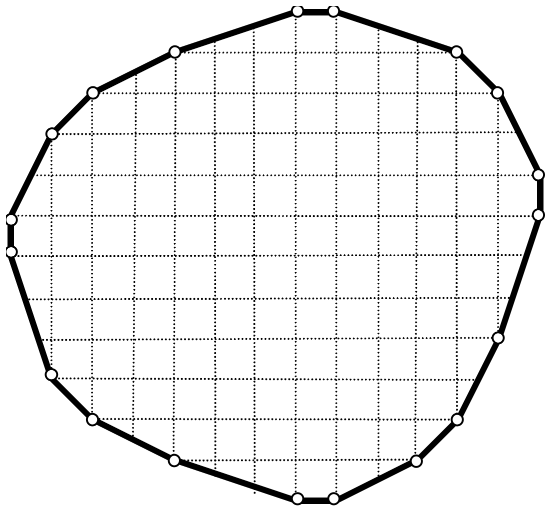
24. zīm. $L_{17} = 76{,}5$



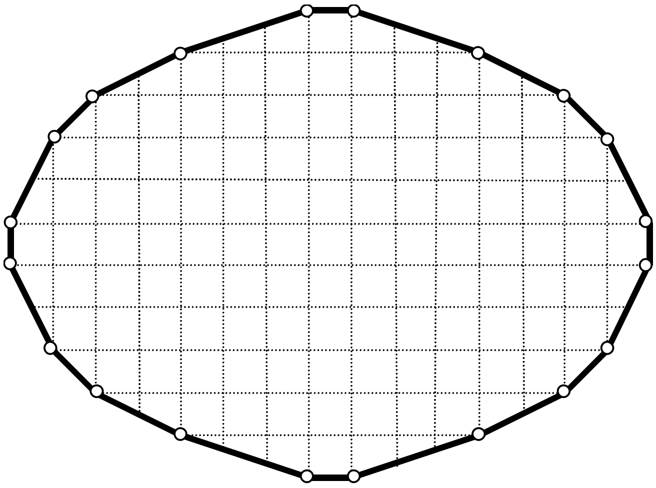
25. zīm. $L_{18} = 87$

Daudzstūri, kas redzami 16.-19., 21.-23. un 26-27. zīm. atrodami Inetas Umbraško bakalaura darbā "Režģu daudzstūri", Rīga, LU, 2003.

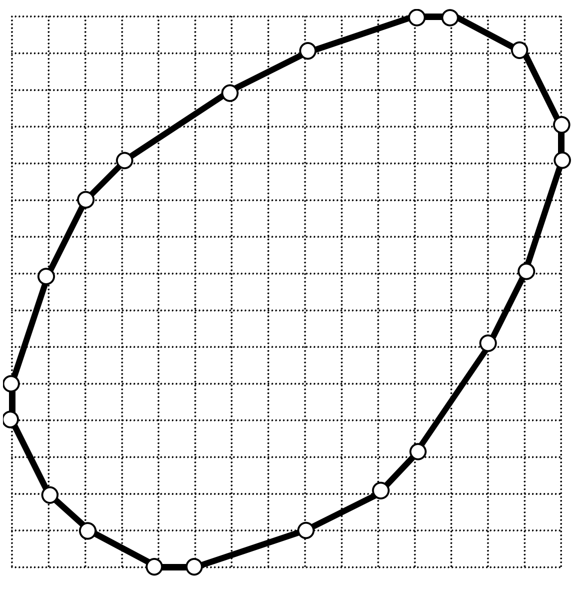
Atrodiet patstāvīgi izliektu 22-stūri, kuram laukuma vērtība ir tāda kā norādīts tabulā!



26. zīm. $L_{19} = 116{,}5$



27. zīm. $L_{20} = 121$



28. zīm. $L_{21} = 151{,}5$

Rezultātu tabula

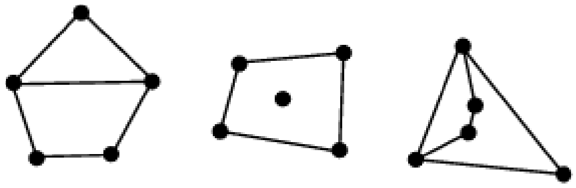
Virsotņu skaits n	Laukums L	Apakšējā robeža 2L(n)	Minimālā vērtība 2L(n)	Augšējā robeža 2L(n)
4	1	2	2	2
5	2,5	4	5	5
6	3	6	6	6
7	6,5	9	13	13
8	7	13	14	14
9	10,5	19	21	27
10	14	26	28	28
11	21,5	34	[39, 43]	49
12	24	44	48	50
13	32,5	56	65	81
14	40	70	80	82
15	**51,5**	86	[99, 109]	125
16	59	104	118	126
17	**76,5**	125	[147, 173]	183
18	87	148	174	184
19	**116,5**	174	[209, 241]	257
20	121	203	242	258
21	**151,5**	235	[285, 327]	349
22	164	270	328	350

Laukuma vērtības, kas atzīmētas **treknāk**, ir mazākas salīdzinājumā ar tām, kas uzrādītas rakstā [Rab] dotajā tabulā.

Saskaņā ar šo tabulu 11-stūris ir mazākais daudzstūris, par kuru nav droši zināms, vai uzrādītā laukuma vērtība tiešām ir minimālā.

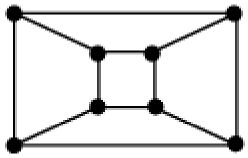
Laimīgu beigu problēma [http://mathworld.wolfram.com/HappyEndProblem.html]

Aplūko plaknes punktu konfigurācijas, kas atrodas vispārīgā stāvoklī, t. i., nekuri trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Noteikt vismazāko plaknes punktu skaitu g(n) tā, lai tie vienmēr definētu izliektu n-stūri.
Problēmu tā nosaucis slavenais P. Erdešs, jo divi pirmie problēmas risinātāji (E. Klein un G. Szekeres) vēlāk apprecējušies.



29. zīm.

Piemēram, g(3) = 3, bet g(4) > 5, jo četri plaknes punkti ne vienmēr veido izliektu četrstūri, sk. 1. zīmējumu. Izrādās, ka jebkuri pieci punkti (vispārīgā stāvoklī) definē kādu izliektu četrstūri, t. i., g(4) = 5. Šo faktu pamatoja E. Klein, pierādot, ka katra piecu punktu konfigurācija ir līdzvērtīga vienai no tām, kas dotas 29. zīmējumā.



30. zīm.

Cik punktu jāņem, lai tie vienmēr definētu kādu izliektu piecstūri? No 30. zīmējuma redzams, ka astoņu punktu vēl nepietiek. Vienādību g(5) = 9 ir pierādījis E. Makai.

To, ka g(n) eksistē katram n ir pierādījis Erdešs un Szekeres (1935), viņi ir ieguvuši novērtējumu

$$2^{n-2}+1 \le g(n) \le C_{n-2}^{2n-4}+1,$$

1998. gadā ir iegūti šādi novērtējumi:

$$g(n) \le C_{n-2}^{2n-4}+7-2n$$

$$g(n) \le C_{n-2}^{2n-5}+2.$$

Izliektas funkcijas

Aplūkosim vienargumenta funkcijas, kas definētas kādā reālu skaitļu kopā X. Parasti X ir intervāls (a, b), nogrieznis $[a, b]$ vai visa reālo skaitļu kopa R. Daudzi no formulētajiem rezultātiem ir vienkārši vispārināmi arī uz vairākargumentu funkcijām.

4. definīcija. Izliektā kopā X definētu funkciju f sauc par **izliektu**, ja visiem x_1, x_2 no X ir spēkā nevienādība

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \text{(IN)}$$

un par ieliektu jeb (antiizliektu), ja nevienādībā (IN) ņemta zīme "$\geq$".
Funkciju f sauc par **stingri izliektu**, ja nevienādībā (IN) ņem stingrās nevienādības zīmi, ievērojot dabisku atrunu $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1,\ x_1 \neq x_2$.
(IN) sauksim par izliektības nevienādību.

Šo nevienādību sauc arī par Jensena nevienādību, sk., piemēram, [JT, 178. lpp.].
Lietosim arī nevienādības (IN) ekvivalentu pierakstu (apzīmēts: $\lambda_2 = 1 - \lambda$)

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

5. definīcija. Funkciju, kas definēta izliektā kopā un tās punktos apmierina nevienādību

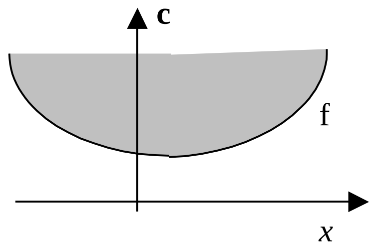
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \text{(J2)}$$

sauc par **J-izliektu funkciju** jeb **izliektu pēc Jensena**.
(Jensens Johans Ludvigs, 1859-1925, dāņu matemātiķis, izstrādāja izliektu funkciju teorijas pamatus.)

Izliektu funkciju nereti definē ar nevienādību (J2), proti, ja visiem x_1, x_2 no kāda intervāla ir spēkā nevienādība (J2), tad funkciju f sauc par izliektu šajā intervālā. Sk., piemēram, [ME1, 793. lpp]. Skaidrs, ka (J2) izriet no (IN), ja pēdējā ievieto $\lambda = \frac{1}{2}$. Prasība (J2) ir vājāka nekā (IN). Definējot kādu jēdzienu, vājākas prasības pašas par sevi rada loģisku interesi un ļauj operēt ar plašāku funkciju klasi. Tiesa, vājāki pieņēmumi var sarežģīt izvedumus, prasīt labāku matemātisko sagatavotību un ne vienmēr būt piemēroti mācību procesā.
Kādi nosacījumi jāprasa no funkcijas f, lai abas definīcijas būtu līdzvērtīgas, t. i., lai no (J2) izrietētu (IN)? Izrādās, "pavisam maz". Var pierādīt, ka pietiek ar funkcijas nepārtrauktību.

6. definīcija. Funkciju f: $X \subset R^n \to \overline{R}$ sauc par izliektu, ja tās virsgrafiks jeb epigrafs epif :=$\{(x, c)$: $x \in X$, $c \in R$, $c \geq f(x)\}$ir izliekta kopa.
Virsgrafika piemērs shematiski attēlots 31. zīmējumā kā ietonētā plaknes daļa.

Vingrinājums. Pierādīt, ka 4. un 6. definīcija ir līdzvērtīgas.



31. zīm.

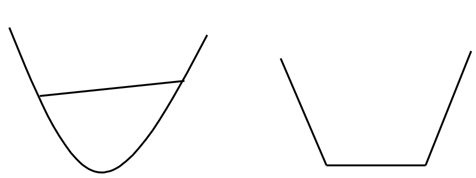
Piezīme. Mācību literatūrā var atrast jēdzienus "izliekts uz augšu", "izliekts uz leju" un izliektas funkcijas definīcijas, kurās izmanto pieskares jēdzienu. Turklāt funkcija, kas

“mums” ir izliekta, citur var tikt saukta par ieliektu, sk., piemēram, [BS, KRB, Oz, Š1, 172-173. lpp.].
“Līkne apskatāmā punktā ir izliekta jeb konveksa, ja blakus punkti atrodas zem tangentes, kas iet caur apskatāmo punktu” [Oz, 148. lpp.]
“*f* grafiks ir ieliekts, ja visi līknes punkti atrodas virs jebkuras no pieskarēm, kas novilktas līknes punktos; pretējā gadījumā grafiks ir izliekts” [BS, 119. lpp.]
“Diferencējamas funkcijas y = f(x) grafiku intervālā $]a; b[$ sauc par *izliektu* jeb par *izliektu uz augšu*, ja tas atrodas zem grafika jebkuras pieskares minētajā intervālā.” [KRB, 307. lpp.]
Izliektas funkcijas definīcija ar (IN) palīdzību ir ekstrēmu uzdevumu teorijas klasika, tā salīdzinot ar tikko minētā tipa definīcijām ir vienkāršāka un piemērota plašākai funkciju klasei. Piemēram, vai funkcijas $F_1(x) = x$, $F_2(x) = -x$, $F_3(x) = |x|$ ir izliektas?
Visas šīs funkcijas apmierina nevienādību (IN) un tātad ir izliektas. Atzīmēsim, ka funkcijai F_3 punktā $x = 0$ pieskare neeksistē. Tas nozīmē, ka definīcijas, kurās izmanto pieskares jēdzienu, nedod atbildi (vismaz bez precizēšanas) par šīs vienkāršās funkcijas izliektību. Viena no grāmatām matemātiskajā analīzē, kur izliektība definēta ar nevienādību (IN) ir [Zor].

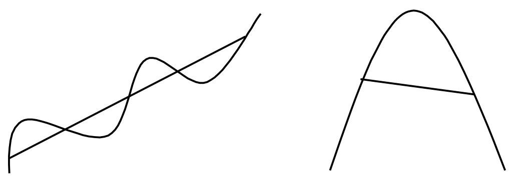
2. Izliektas funkcijas ģeometriskā interpretācija

Izliektas funkcijas grafiks atrodas zem hordas (t. i., ne augstāk kā horda), kas savieno jebkurus divus grafika punktus.

Apskatīsim piemērus, kuri ilustrē šo īpašību. 32. zīmējumā parādītās funkcijas ir izliektas. Otrā no tām nav stingri izliekta. Savukārt 33. zīmējumā redzamās funkcijas nav izliektas. Funkcijas $F_1(x) = x$, $F_2(x) = -x$ ir izliektas, bet nav stingri izliektas.

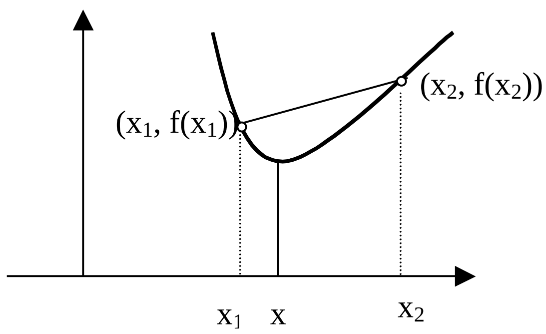


32. zīm.



33. zīm.

Pieņemsim, ka ir dota funkcija *f*, kuras grafiks parādīts 34. zīmējumā. Izvēlamies divus patvaļīgus grafika punktus $(x_1, f(x_1))$ un $(x_2, f(x_2))$ un savienojam tos ar hordu (taisnes nogriezni).



34. zīm.

Izvēlamies patvaļīgu x no (x_1, x_2). Izmantojot nogriežņa definīciju, x var izteikt kā $x_1 + (1-\lambda)x_2$, kur $\lambda \in (0,1)$. Salīdzināsim funkcijas f un hordas vērtību punktā $x = \lambda x_1 + (1- \lambda) x_2$). Pēc izliektības definīcijas:

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Saskaņā ar nogriežņa definīciju lielums, kas atrodas šīs nevienādības labajā pusē, ir tieši hordas vērtība punktā x, jo nogrieznis ar galapunktiem (x_1, y_1), (x_2, y_2), kur $y_1 = f(x_1)$ un $y_2 = f(x_2)$, uzrakstāms kā

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\} =$$
$$= \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\}.$$

Tātad izliektas funkcijas grafiks atrodas zem attiecīgās hordas .

Manuprāt, skolēniem vienkāršāk uztverams būtu šāds pamatojums. Atrodam taisni, kas iet caur diviem punktiem (x_1, y_1) un (x_2, y_2). Taisnes vienādojumu var iegūt, piemēram, no līdzīgiem trijstūriem:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1.$$

Ja funkcijas f grafiks atrodas zem šīs taisnes, tad

$$f(x) \le y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1.$$

Ņemsim $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$), $y_1 = f(x_1)$ un $y_2 = f(x_2)$. Tad

$$x - x_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x_1 = x_1 (\lambda - 1) + (1-\lambda) x_2 = (x_2 - x_1)(1-\lambda)$$

un

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)) \le (y_2 - y_1)(1-\lambda) + y_1 = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

kas nav nekas cits kā izliektības nevienādība.

Tātad funkcijas grafika īpašība vienmēr atrasties zem attiecīgās hordas nozīmē funkcijas izliektību un otrādi – izliektas funkcijas grafiks vienmēr atrodas zem attiecīgās hordas.

Piezīme. Izliektām funkcijām, kurām eksistē pieskare, var dot citu ģeometrisku interpretāciju, proti, izliektas funkcijas grafiks vienmēr atrodas virs tā pieskares.

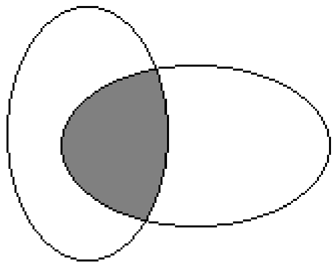
Izliektu kopu un funkciju īpašības

Formulēsim vairākas izliektu funkciju un kopu īpašības un vairākas no tām arī pierādīsim. Tā kā šajā darbā ekstrēmu uzdevumi tiek aplūkoti no elementāro metožu viedokļa, tad te apzināti netiek minētas tās īpašības (kaut arī ļoti svarīgas), kas saistītas ar funkcijas atvasinājumu izmantošanu. Izliektu funkciju īpašības var izmantot un tās arī tiek izmantotas daudzu citu rezultātu iegūšanā, tai skaitā vairāku svarīgu nevienādību pierādīšanā.

I1. Izliektu kopu M_k, $k \in I$, šķēlums ir izliekta kopa.

Indeksu kopa I var būt arī bezgalīga, piemēram I = N.

Piemērs. Divu izliektu kopu, sk. 35. zīmējumu, šķēlums ir ietonētā daļa.



35. zīm.

Pierādījums. Apzīmēsim kopu M_k, $k \in I$, šķēlumu ar X un pieņemsim, ka kopai X pieder punkti x_1, x_2. Tad saskaņā ar šķēluma definīciju punkti x_1, x_2 pieder visām kopām M_k. Tā kā M_k ir izliektas kopas, tad jebkuram $\lambda \in [0, 1]$ punkts $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ pieder visām kopām M_k un tātad arī šo kopu šķēlumam X, kas arī nozīmē kopas X izliektību.

Piemēri. Ja $M_k = \left[0, \frac{1}{k}\right]$, $k \in N$, tad visu šo kopu šķēlums ir kopa {0}, t. i., kopa, kas sastāv tikai no viena punkta. Savukārt, ja $M_k = \left(0, \frac{1}{k}\right]$, $k \in N$, tad šo kopu šķēlums ir tukša kopa, jo nav tāda punkta, kurš vienlaicīgi piederētu visām kopām M_k.
Izliektu kopu apvienojums var nebūt izliekta kopa.

Nākamās īpašības formulējumā tiek aplūkotas citas darbības ar kopām: kopas reizināšana ar skaitli un kopu saskaitīšana. Kopu saskaitīšana nav tas pats, kas kopu apvienošana.
Pieņemsim, ka A, B un X ir *R* apakškopas un *c* patvaļīgs skaitlis no *R*. Tad *c*X definē kā kopu kas sastāv no visiem tiem elementiem *cx*, kur *x* pieder X. Savukārt kopu summu A + B definē kā kopu, kas sastāv no visiem elementiem *a* + *b*, kur *a* pieder A un *b* pieder B.

Piemēri. Ja X = {0; 5}un *c* = 6, tad *c*X = {0; 30}. Ja X = (0, 5] un *c* = 6, tad *c*X = (0, 30].
Ja A = (1, 2) un B = (3, 4), tad A + B = (4, 6), bet 2A + 3B = (2, 4) + (9, 12) = (11, 16).

Skaitļiem ir spēkā distributīvā īpašība (x + y)z = xz + yz. Vai šīs īpašības analogs

$$(x + y)M = xM + yM$$

ir spēkā arī skaitļu kopām M?
Ja x = 2, y = 3 un M = (1, 2), tad 5M = (5, 10), 2M + 3M = (2, 4) + (3, 6) = (5, 10). Piemērs apstiprina īpašību.
Ja x = 2, y = 3 un M = {1; 2}, tad 5M = {5; 10}, bet

$$2M + 3M = \{2; 4\} + \{3; 6\} = \{5; 7; 8; 10\}.$$

Tātad vienādība (x + y)M = xM + yM patvaļīgu kopu klasē nav spēkā. Vai tā ir spēkā kādā šaurākā kopu klasē?
Anniņa. Jā, ir! Viegli nojaust, ka vienādība jāpierāda izliektām kopām. Ņemu patvaļīgu elementu p no kopas (x + y)M. Tad eksistē kāds z no M, ka p = (x + y)z = xz + yz. Tā kā xz pieder kopai xM un yz pieder kopai yM, tad šo elementu summa xz + yz = p pieder kopai xM + yM. Tātad esmu pierādījusi ka kopa (x + y)M ir kopas xM + yM apakškopa. Vēl atliek pierādīt, ka arī kopa xM + yM ir kopas (x + y)M apakškopa.
Ņemu patvaļīgu p no kopas xM + yM. Tad eksistē kāds z no M, ka p = xz + yz = (x + y)z. Tātad p pieder kopai (x + y)M , kas arī bija jāpierāda.
Jānītis. Fantastika! Tu esi pierādījusi vienādību (x + y)M = xM + yM, kura augstāk ir atspēkota ar vienkāršu piemēru. Turklāt nekur neesi izmantojusi izliektību.

Maijiņa. Es zinu, kur "tas suns aprakts". No tā, ka p pieder kopai xM + yM, neseko, ka eksistē tāds z, ka p = xz + yz . Šajā vietā jāraksta tā: eksistē u no M un eksistē v no M, ka p = xu + yv.

Anniņa. Piekrītu un laboju savu pierādījumu. Nepieciešams, lai elements p = xu + yv piederētu kopai (x + y)M. Tātad jāatrod tāds z no M, lai xu + yv = (x + y)z. Lūk, kāds būs meklējamais z: $z = \frac{xu + yv}{x + y}$.

Jānītis. Savādi gan! Joprojām neesi izmantojusi izliektību.

Anniņa. Skaties! Apzīmēju $\lambda = \frac{x}{x+y}$. Tad $1-\lambda = 1-\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y}$. Tā kā u un v pieder kopai M, tad arī z = λu + (1– λ)v pieder M, kas arī bija jāpierāda.

Un tomēr *Anniņai* vēl joprojām ir kļūda. Kāda?

(Jāprasa, lai koeficienti *x* un *y* būtu pozitīvi.)

I2. Izliektu kopu lineāra kombinācija ir izliekta kopa.

Par kopu $X_1, ..., X_n$ lineāru kombināciju sauc summu $c_1X_1 + ...+ c_nX_n$, kur $c_1,..., c_k$ – patvaļīgi reāli skaitļi.

I3. Izliekta kopa satur visas savu elementu izliektās kombinācijas.

Atgādināsim, ka par elementu $x_1, x_2, ..., x_n$ izliektu kombināciju sauc jebkuru lineāru kombināciju $\lambda_1x_1 + ...+ \lambda_nx_n$ ar nenegatīviem koeficientiem λ_k un summu "1" ($\lambda_1 + ...+ \lambda_n = 1$).

I4. Jebkura skaitļu $x_1, x_2, ..., x_n$ izliekta kombinācija ir šo skaitļu "vidējais", t. i., atrodas starp minimālo un maksimālo skaitli:

$$\min\{x_k\} \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \le \max\{x_k\}.$$

Pierādījums. Skaitļus x_k sakārtosim nedilstošā secībā. Neierobežojot vispārīgumu, var uzskatīt, ka: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Tad, ņemot vērā vienādību $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, pēc vienkāršiem pārveidojumiem iegūstam vajadzīgo izliektās kombinācijas novērtējumu.

$$x_1 \le x_k \Rightarrow \lambda_k x_1 \le \lambda_k x_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_1 \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \Rightarrow x_1 \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

$$x_k \le x_n \Rightarrow \lambda_k x_k \le \lambda_k x_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \le x_n$$

I5. Ja izliektas kopas punktos $P_1, P_2, ..., P_n$ ir sakoncentrētas masas $m_1, m_2, ..., m_n$, tad šo punktu masas centrs arī pieder šai izliektai kopai.

Masas centra koordinātas aprēķina pēc formulas $x_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k$, $y_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k$,

kur $m = m_1 + \ldots + m_n$. Īpašība I5 izriet no I3. Ieteicama grāmata par masas centriem ir [Bal].

I6. Funkcijas $f : [a, b] \to R$ stingra izliektība ir līdzvērtīga jebkurai no šādām trīs nevienādībām (un tātad šīs nevienādības izriet viena no otras):

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t},$$

$$\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-t},$$

kur $x_1 < t < x_2$ patvaļīgi skaitļi no $[a, b]$.

Nevienādību ģeometriskā jēga ir saskatāma no 36. zīmējuma. Attiecības, kas uzrakstītas šo nevienādību kreisajās un labajās puses, ir attiecīgo taišņu virziena koeficienti. Pirmā nevienādība nozīmē, ka taisnes P_1P virziena koeficients ir mazāks nekā taisnes P_1P_2 virziena koeficients. Jeb, ka taisnes P_1P grafiks pa labi no punkta P_1 atrodas zem taisnes P_1P_2 grafika. Otrajā nevienādībā ir salīdzināti taišņu P_1P_2 un PP_2 virziena koeficienti. Savukārt trešajā nevienādībā – taišņu P_1P un PP_2 virziena koeficienti.

Uzrādīsim stingru I6 pierādījumu. Pirmo nevienādību pārrakstām veidā:

$$f(t) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(t-x_1)+f(x_1).$$

Nevienādības labā puse nav nekas cits kā taisnes P_1P_2 vienādojums attiecībā pret $x = t$. Saskaņā ar augstāk izklāstīto izliektas funkcijas ģeometrisko interpretāciju šī nevienādība ir līdzvērtīga funkcijas f stingrai izliektībai. Tagad atliek pierādīt, ka visas trīs minētās nevienādības ir līdzvērtīgas. Viena iespēja ir ņemt izliektības nevienādību, ievietot tajā piemērotas λ vērtības un iegūt formulētās nevienādības. Ieteicam kā vingrinājumu to izdarīt patstāvīgi.

Pierādījumā izmantosim citu pieeju, kas mērķi ļauj sasniegt ātrāk.

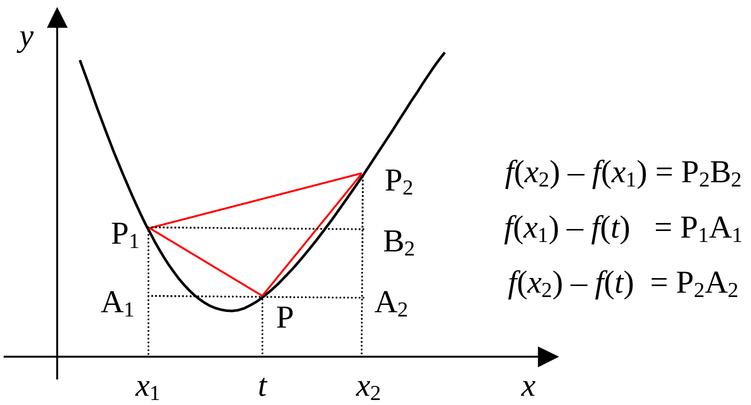
Apzīmējam

$$a = f(t) - f(x_1),\ b = t - x_1,\ c = f(x_2) - f(t),\ \ d = x_2 - t.$$

un pārrakstām dotās trīs nevienādības:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d},\quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},\quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Tā kā daļu saucēji visās trīs nevienādībās ir pozitīvi, tad katra no šīm nevienādībām ir līdzvērtīga tam, ka $ad < bc$.



36. zīm.

Apgalvojums I6 ir noderīgs, piemēram, īpašību I7 un I10 pierādīšanā.

I7. Funkcijas $f: [a, b] \to R$ stingra izliektība ir līdzvērtīga tam, ka katrai fiksētai viena argumenta vērtībai funkcija $\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ ir augoša attiecībā pret otru argumentu.

I8. Izliektu funkciju summa ir izliekta funkcija.
Šī īpašība izriet no **I9**.

I9. Izliektu funkciju nenegatīva lineāra kombinācija ir izliekta funkcija, t. i.,

$$(f_1, \ldots, f_n - \text{izliektas}, c_k \geq 0) \Rightarrow (c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)\text{- izliekta funkcija.}$$

<u>Pierādījums</u>. Katrai funkcijai f_k, $k = 1, \ldots, n$, uzrakstām izliektības nevienādību,

$$f_k(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f_k(x_1) + \lambda_2 f_k(x_2),$$

un to pareizinām ar nenegatīvu skaitli c_k. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam izteikto apgalvojumu par lineārās kombinācijas izliektību:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x_1) + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x_2),$$

I10. Izliekta funkcija f: $R \to R$ ir nepārtraukta.
Intervālā (a, b) izliekta funkcija ir nepārtraukta.
Īpašība ir spēkā arī n-dimensiju telpā R^n. Viens no īsākajiem nepārtrauktības pierādījumiem ir atrodams [JT, 182. lpp.].
<u>Pierādījums</u>. Pieņemsim, ka izliekta funkcija f ir definēta kāda punkta x_0 apkārtnē un pierādīsim, ka f ir nepārtraukta šajā punktā. Neierobežojot vispārīgumu, uzskatīsim, ka $x_0 = 0$. Pretējā gadījumā mēs varētu pārbīdīt funkcijas f grafiku, jeb f vietā aplūkot funkciju $f_1(x) = f(x - x_0)$. Grafika pārbīde saglabā gan nepārtrauktību gan izliektību. Gluži tāpat, neierobežojot vispārīgumu, uzskatīsim, ka $f(0) = 0$. Aplūkosim kādu punkta 0 apkārtni, t. i., intervālu $I_c = (-c, c)$, kurš ietilpst f definīcijas kopā. Tā kā f ir izliekta, tad tās grafiks atrodas zem taisnes, kas savieno punktus $(-c, f(-c))$ un $(c, f(c))$. Tas nozīmē, ka f ir ierobežota no augšas ar kādu skaitli M. Neierobežojot vispārīgumu var uzskatīt, ka $M > 0$. Citiem vārdiem, visiem x no $(-c, c)$ ir spēkā novērtējums $f(x) \leq M$.

Izvēlamies patvaļīgu ε no intervāla $(0, M)$ un apzīmējam $p = \dfrac{\varepsilon}{M}$, $I_p = (-pc, pc)$. Tad $0 < p < 1$ un $I_p \subset I_c$. Ievērosim, ka jebkuru punktu x no I_p var izteikt kā divu intervāla I_c punktu, proti, $\dfrac{x}{p}$ un 0, izliektu kombināciju:

$$x = p\left(\frac{x}{p}\right) + (1-p)\cdot 0 \Rightarrow$$

$$f(x) \leq p \cdot f\left(\frac{x}{p}\right) + (1-p)\cdot f(0) \leq p \cdot M \qquad (*).$$

Izsakām 0 kā divu punktu izliektu kombināciju un atkal lietojam f izliektību:

$$0 = \frac{1}{1+p}x + \frac{p}{1+p}\left(-\frac{x}{p}\right) \Rightarrow$$

$$f(0) \leq \frac{1}{1+p} f(x) + \frac{p}{1+p} f\left(-\frac{x}{p}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{p}{1+p} f\left(-\frac{x}{p}\right) \leq \frac{1}{1+p} f(x) \Rightarrow -pf\left(-\frac{x}{p}\right) \leq f(x) \Rightarrow$$

$$-p \cdot M \leq -pf\left(-\frac{x}{p}\right) \leq f(x).$$

No šejienes un (*) izriet, ka

$$-p\cdot M \le f(x) \le pM .$$

Ievietojot p vietā sākumā izvēlēto vērtību $p = \frac{\varepsilon}{M}$, iegūstam, ka visiem x no intervāla $\left(-\frac{\varepsilon c}{M}, \frac{\varepsilon c}{M}\right)$ ir spēkā novērtējums: $-\varepsilon \le f(x) \le \varepsilon$, kas arī nozīmē f nepārtrauktību punktā $x = 0$. (Funkcijas f vērtības tiecas uz nulli, ja ε tiecas uz nulli.) ǂ

<u>Sekas</u>. Slēgtā intervālā definēta izliekta funkcija var būt pārtraukta tikai intervāla galapunktos. Vienkāršs šādas funkcijas piemērs:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0, 1) . \end{cases}$$

I11. Izliektu funkciju $f_1, \ldots, f_n$: $X \to R$ maksimālā funkcija $F(x) := \max f_k(x)$, $1 \le k \le n$, ir izliekta funkcija.

<u>Piemērs</u>. Funkciju $f(x) = x^2$ un $g(x) = x$ maksimālā funkcija $F(x) = \max(f(x), g(x))$ ir šāda:

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & x \notin [0, 1] \\ x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

<u>Pierādījums</u>. Pārbaudām, vai maksimālajai funkcijai F ir spēkā (IN). Izdarot novērtējumus, izmantojam funkciju f_k izliektību un to, ka maksimums no divu funkciju summas nepārsniedz atsevišķi ņemtu maksimumu summu:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \max_k f_k(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \max_k \left[\lambda f_k(x) + (1-\lambda) f_k(y)\right] \le$$

$$\le \max_k \lambda f_k(x) + \max_k (1-\lambda) f_k(y) = \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) .$$

<u>Vingrinājums</u>. Pierādīt vai atspēkot, ka izliektu funkciju minimālā funkcija ir ieliekta funkcija.

I12. Izliektai funkcijai lokāls ekstrēms ir arī globāls. (Stingri izliekta funkcija minimumu var sasniegt tikai vienā punktā.)

Šai izliektu funkciju īpašībai un tās vispārinājumiem ir īpaša nozīme ekstrēmu uzdevumu teorijā.

<u>Pierādījums</u>.

Pierādīsim formulēto īpašību izliektas funkcijas minimumam.

(Izliekta funkcija $f : [a, b] \to R$ maksimumu sasniedz nogriežņa galapunktā a vai b. Ja izliekta funkcija maksimumu sasniedz arī intervāla iekšējā punktā, tad tā ir konstanta. Šo apgalvojumu pamatojums tiek atstāts lasītājiem kā vienkāršs vingrinājums.)

Dots:

$$f : X \to R \text{ un } \forall x \subset U(a): f(x) \ge f(a),$$

kur $U(a)$ ir punkta a kāda apkārtne no izliektas kopas X. Jāpierāda, ka

$$\forall x \in X : f(x) \ge f(a).$$

Pierādīsim šo sakarību no pretējā. Pieņemsim, ka $\exists b \in X : f(b) < f(a)$. Tad,

$$\lambda b + (1-\lambda)a \in X,\ \lambda \in (0, 1),$$

jo X ir izliekta kopa. No f izliektības un nosacījuma $f(b) < f(a)$ dabūjam:

$$f(\lambda b + (1-\lambda)a) \le \lambda f(b) + (1-\lambda) f(a) = \lambda[f(b) - f(a)] + f(a) < f(a) .$$

Tātad

$$f(\lambda(b-a)+a) < f(a).$$

Tā kā pietiekami mazam λ, punkts $\lambda(b-a)+a \in U(a)$, tad punkta a apkārtnē ir atrasts tāds punkts, kurā funkcijas f vērtība ir vēl mazāka nekā lokālā minimuma punktā, kas ir pretrunā ar doto.

I13. Stingri izliekta funkcija f: $[a, b] \to R$ dilst pa kreisi no tās minimuma punkta x_0 un aug pa labi no tā, t. i.,

$$a \le p < q \le x_0 \Rightarrow f(p) > f(q),$$
$$x_0 \le u < v \le b \Rightarrow f(u) < f(v).$$

Pierādījums.

Pēc (IN)

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)v) \le \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(v) < f(v)$$

Ņem patvaļīgu u no $[x_0, v]$. Izvēlas $\lambda \in [0,1]$ tā, lai $\lambda x_0 + (1-\lambda)v = u$. Tad

$$f(u) < f(v).$$

Līdzīgi no

$$f(\lambda p + (1-\lambda)x_0) \le \lambda f(p) + (1-\lambda) f(x_0) < f(p),$$

ņemot λ tā, lai $\lambda p + (1-\lambda)x_0 = q$ iegūst

$$f(q) < f(p).$$

I14. Ja f un g ir izliektas funkcijas un f ir nedilstoša, tad saliktā funkcija $h(x) = f(g(x)$ ir izliekta.

Pierādījums.

$$h(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = f(g(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \le$$
$$\le f(\lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(y)) \le \lambda_1 f(g(x)) + \lambda_2 f(g(y)) =$$
$$= \lambda_1 h(x) + gl_2 h(y).$$

Jensena nevienādība

I15. Izliektai funkcijai ir spēkā Jensena nevienādība.

Ja f ir izliekta kopā X, tad visiem $x_1,\ldots, x_n$ no X ir spēkā:

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \qquad \text{(JN)}$$

Izliektai funkcijai ir spēkā vispārinātā Jensena nevienādība, to apzīmēsim ar (VJN):

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots\ldots + \lambda_n f(x_n),$$

kur visi λ_k nenegatīvi skaitļi un $\lambda_1 + \ldots\ldots + \lambda_n = 1$. Stingri izliektai funkcijai vienādība pastāv tikai tad, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Nevienādību (JN) var "lasīt" šādi: izliektas funkcijas vērtība no vidējā aritmētiskā nepārsniedz funkcijas vērtību vidējo aritmētisko.

Piezīme. Grāmatā [Bal, 34. lpp.] vispārinātā Jensena nevienādība formulēta funkcijām, kas "izliektas uz augšu":

$$f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{M}\right)>\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\cdots+m_n(x_n)}{M}$$

Bieži vien (VJN) sauc vienkārši par Jensena nevienādību. Jensens šīs nevienādības integrālo analogu un izliektu funkciju teorijas pamatus ir publicējis 1906. gadā [*Acta Math*. 30, (1906), 175-193]. Taču (VJN) pirms Jensena (1899. g.) ir aplūkojis vācu matemātiķis Helders [MO; HLP]. Izliektu kopu un funkciju teorijas vispārīgos pamatus divdesmitā gadsimta sākumā ir izveidojis vācu matemātiķis un fiziķis H. Minkovskis [Rok, 434. lpp.].

Vispirms pierādīsim apgalvojumu "(IN) $\Rightarrow$ (VJN)". Izrādās, ka to izdarīt ir vienkāršāk nekā pierādīt apgalvojumu "(J2) $\Rightarrow$ (JN)".
Lietosim matemātisko indukciju pēc *n*. Ja n = 2, tad (VJN) sakrīt ar (IN).
Pieņemsim, ka (VJN) ir spēkā, ja $n = k$. Pierādīsim, ka tad (VJN) ir spēkā, ja $n = k+1$.
Skolēniem lietderīgi vispirms iepazīties ar (VJN) pierādījumu trīs mainīgo gadījumā, kas atbilst induktīvajai pārejai "$2\to 3$".
Pārveidosim pierādāmās nevienādības

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)\,,$$

kreiso pusi un divas reizes lietosim izliektības nevienādību (IN)

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)=f(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{1-\lambda_1})\le$$
$$\le\lambda_1f(x_1)+(1-\lambda_1)f(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}x_2+\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}x_3)\le$$
$$\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)\,.$$

Tā kā x_1 un x_3 pieder izliektai kopai X, tad arī punkts

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}x_2+\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}x_3$$

pieder funkcijas *f* definīcijas kopai, jo koeficientu summa ir 1:

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}+\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_2+\lambda_3}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1-\lambda_1}{1-\lambda_1}=\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1}=1\,.$$

Pierādījums "(IN) $\Rightarrow$ (VJN)" vispārīgā gadījumā.
Uzskatīsim, ka neviens no λ_k nav vienāds ar "1". Pretējā gadījumā visi pārējie "λ–s" būtu nulles un pierādījums triviāls.
Apzīmēsim

$$z=\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\cdot x_2+\cdots+\frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda_1}\cdot x_{k+1}\,.$$

Tā kā visi reizinātāji pie "*x*-iem" ir nenegatīvi un to summa ir "1":

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}+\cdots+\frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1}-\lambda_1}{1-\lambda_1}=\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1}=1,$$

tad punkts *z* pieder izliektai kopai X un saskaņā ar induktīvo pieņēmumu ir spēkā:

$$f(z)\le\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}f(x_2)+\cdots\frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k+1}}f(x_{k+1})\,.$$

Tagad izmantojot *f* izliektību, sk. (IN), vienkārši iegūstam vispārināto Jensena nevienādību:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) z) \le \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(z) \le$$
$$\le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Pierādījums "(J2) $\Rightarrow$ (JN)".
Vispirms aplūkosim (JN) pierādījumu it kā vienkāršākajā gadījumā, t. i., kad jāveic pāreja no $n = 2$ uz $n = 3$. Nereti atsevišķs gadījums satur tās grūtības, kuru pārvarēšana ļauj viegli tikt galā arī ar vispārīgo gadījumu.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_n)}{3}$$

Ja ir četri saskaitāmie, tad pierādījums iegūstams divas reizes lietojot (J2):

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right) \le \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} f\left(\frac{(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)}{2}\right) \le \frac{1}{4} f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Vai līdzīgā veidā iespējams iegūt pierādījumu trīs saskaitāmo gadījumā?
Nav grūti saskatīt, ka Jensena nevienādības pierādījuma shēma četriem mainīgajiem ir derīga 8, 16, 32 utt. mainīgajiem. Citiem vārdiem, pamatosim induktīvo pāreju $k \mapsto 2k$. Pēc tam lietosim induktīvo pāreju "uz leju".
Piezīme. Šāda veida asprātīgu indukciju nevienādības starp vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko (G $\le$ A) pierādīšanai kādreiz lietoja viens no matemātiskās analīzes pamatlicējiem Koši. Atgādināsim, ka nevienādību G $\le$ A var pierādīt ievērojami vienkāršāk, iztiekot bez minētā veida indukcijas, sk. [Cib], bet (JN) salīdzinājumā ar G $\le$ A ir cietāks rieksts.

Lai iegūtu īsāku un, manuprāt, skolēniem vieglāk pārskatāmu pierādījumu (salīdzinājumā ar tiem, kas atrodami citētajā literatūrā), lietosim apzīmējumus:

$f_k = f(x_k)$,

$A_k = \dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}$ – vidējais aritmētiskais,

$A(f_1, \ldots, f_k) = \dfrac{f_1 + \ldots + f_k}{k}$ – funkcijas f vērtību vidējais aritmētiskais.

Zinot, ka (JN) pareiza k saskaitāmajiem, jāpierāda, ka tā pareiza arī $2k$ saskaitāmajiem, t. i., jāpierāda induktīvā pāreja:

$$f(A_k) \le A(f_1, \ldots, f_{k+1}) \Rightarrow f(A_{2k}) \le A(f_1, \ldots, f_{2k})$$

Skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ vidējo aritmētisko A_{2k} uzrakstīsim kā divu lielumu A_k un B_k vidējo aritmētisko, kur A_k saskaņā ar apzīmējumu ir pirmo k saskaitāmo vidējais aritmētiskais, bet $B_k = \dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}$ ir pēdējo k saskaitāmo $x_{k+1}, \ldots, x_{2k}$ vidējais aritmētiskais. Tad, lietojot (J2) un Jensena nevienādību lielumiem $f(A_k)$, $f(B_k)$, iegūstam:

$$f(A_{2k}) = f\left(\frac{A_k + B_k}{2}\right) \le \frac{1}{2}(f(A_k) + f(B_k)) \le$$

$$\leq \frac{1}{2}(A(f_1,\ldots,f_k)+A(f_{k+1},\ldots,f_{2k}))=A(f_1,\ldots,f_{2k}).$$

Indukcija uz leju $(k+1)\mapsto k$ **.**

Pierādīsim, ka no (JN) pareizības (k + 1) mainīgajiem izriet (JN) pareizība k mainīgajiem, t. i.,

$$f(A_{k+1})\leq A(f_1,\ldots,f_{k+1})\Rightarrow f(A_k)\leq A(f_1,\ldots,f_k).$$

Ņem $x_{k+1}=A_k$. Tad

$$A_{k+1}=\frac{(x_1+\ldots+x_k)+x_{k+1}}{k+1}=\frac{kA_k+A_k}{k+1}=A_k.$$

Citiem vārdiem, x_{k+1} ir izvēlēts tā, lai $A_{k+1}=A_k$. Pateicoties šādai izvēlei:

$$f(A_k)=f(A_{k+1})\leq\frac{(f_1+\ldots+f_k)+f_{k+1}}{k+1}=\frac{kA(f_1,\ldots,f_k)+f(A_k)}{k+1}\Rightarrow$$

$$(k+1)f(A_k)\leq kA(f_1,\ldots,f_k)+f(A_k)\ \Rightarrow$$

$$f(A_k)\leq A(f_1,\ldots,f_k).$$

Piezīme. (VJN) pierādījumu var atrast arī skolēniem paredzētā literatūrā. Sk., piemēram, [Šk] Šajā rakstā pierādījuma izklāsts ir samērā garš un "smagnējs"; funkcijas izliektība netiek definēta ar (IN) palīdzību, bet, vadoties pēc kādas mācību grāmatas "Algebra un analīzes elementi", tiek lietoti jēdzieni "izliekta uz augšu" un "izliekta uz leju". Autors šos jēdzienus definē diferencējamām funkcijām atkarībā no tā vai funkcijas grafiks atrodas zem vai virs funkcijas grafika pieskares. Jēdziens "funkcija izliekta uz leju" atbilst tam, kas mums ir izliekta funkcija.

Pierādījums ar "interpretāciju metodi", lietojot materiālu punktu sistēmas masas centra jēdzienu, atrodams 1959. gadā izdotajā ievērojamajā grāmatā [Bal, 155. lpp.]

Latviešu valodā publicēts (VJN) pierādījums ir atrodams 1993. g. izdotajā brošūrā [VA, 19.-21. lpp.].

Pamatojoties uz formulētajām īpašībām var konstruēt daudzas izliektas funkcijas.

Vienkāršāko funkciju izliektība

Vispirms aplūkosim skolas matemātikā labi pazīstamas funkcijas un pierādīsim to izliektību vai J-izliektību pēc definīcijas.

Lineāra funkcija

1. uzdevums. Pierādīt funkcijas $f(x) = bx + c$ izliektību. Vai f ir stingri izliekta?

Ievietojam doto funkciju izliektības nevienādībā:

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$$
$$b(\lambda u + (1-\lambda)v) + c \leq \lambda(bu + c) + (1-\lambda)(bv + c).$$
$$b\lambda u + b(1-\lambda)v) + c \leq \lambda bu + \lambda c + (1-\lambda)bv + (1-\lambda)c.$$

Tā kā nevienādības abas puses ir vienādas, f ir izliekta, bet nav stingri izliekta.

Kvadrātfunkcija

2. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija $f(x) = x^2$ ir J-izliekta.
Jāpierāda nevienādība (J2), t. i.:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2 \ge 0.$$

Ievērosim, ka šī nevienādība $A^2 \le K^2$ izsaka saistību starp vidējo aritmētisko un kvadrātisko divu saskaitāmo gadījumā.

3. uzdevums. Pierādīt funkcijas $f(x) = x^2$ izliektību.
Jāpierāda, ka :

$$(\lambda u+(1-\lambda)v)^2 \le \lambda u^2+(1-\lambda)v^2$$
$$\lambda^2u^2+(1-\lambda)^2v^2+2\lambda(1-\lambda)uv \le \lambda u^2+(1-\lambda)v^2$$
$$(\lambda-\lambda^2)u^2-2\lambda(1-\lambda)uv+(1-\lambda-(1-\lambda)^2)v^2 \ge 0$$
$$(\lambda-\lambda^2)(u^2-2uv+v^2) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda-\lambda^2)(u-v)^2 \ge 0$$

Ievērosim, ka $\lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda) \ge 0$. Tātad f ir izliekta. Turklāt funkcija $f(x) = x^2$ ir stingri izliekta, jo nevienādība ir stingra, ja $0 < \lambda < 1$ un u nesakrīt ar v.
kas arī bija jāpierāda.

4. uzdevums. Pierādīt funkcijas $f(x) = ax^2 + bx + c$ stingro izliektību, ja $a > 0$.

Izvedumus var veikt pēc iepriekšējā uzdevuma parauga. Taču mērķi var sasniegt ātrāk. Dotā funkcija ir izliekta kā izliektu funkciju summa. Lai funkciju summa būtu stingri izliekta pietiek, ja kāds no summas locekļiem ir stingri izliekta funkcija. Aplūkojamajā piemērā ax^2 ir stingri izliekta funkcija.

5. uzdevums. Pierādīt funkcijas $f(x) = ax^2 + bx + c$ stingro ieliektību, ja $a < 0$.

Hiperbola

6. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ir izliekta kopā $(0,+\infty)$.
Saskaņā ar definīciju jāpierāda, ka visiem pozitīviem x, y un $t \in [0, 1]$ ir spēkā nevienādība

$$f\big(tu+(1-t)v\big) \le tf(u)+(1-t)f(v)$$
$$\frac{1}{tu+(1-t)v} \le \frac{t}{u}+\frac{1-t}{v} \;\Leftrightarrow$$
$$uv \le \big(tv+(1-t)u\big)\big(tu+(1-t)v\big) \;\Leftrightarrow$$
$$uv \le t^2uv+t(1-t)v^2+t(1-t)u^2+(1-t)^2uv \;\Leftrightarrow$$
$$0 \le uv\big(t^2+(1-t)^2-1\big)+t(1-t)(u^2+v^2) \;\Leftrightarrow$$
$$0 \le 2uvt(1-t)(u^2-2uv+v^2) \;\Leftrightarrow$$
$$0 \le 2uvt(1-t)(u-v)^2.$$

No šejienes secinām, ka f ir stingri izliekta norādītajā kopā.

7. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija $g(t)=\frac{1}{t}$ ir ieliekta kopā $(-\infty, 0)$.

Var spriest līdzīgi, kā risinot iepriekšējo uzdevumu. Taču mērķi var sasniegt arī atrāk. Funkcijas $f(x)=\frac{1}{x}$ izliektība kopā $(0,+\infty)$ ir līdzvērtīga funkcijas $(-\frac{1}{x})$ ieliektībai tajā pašā kopā. Apzīmējot $t=-x$, iegūstam, ka funkcija $\frac{1}{t}$ ir ieliekta kopā $(-\infty, 0)$, kas arī bija jāpierāda.

8. uzdevums. Pierādīt, ka pozitīviem a un x funkcija $\frac{a}{x}+bx$ ir stingri izliekta.

Dotā funkcija ir stingri izliekta kā divu izliektu funkciju summa. Pirmā no tām (hiperbola) ir stingri izliekta funkcija.

Piezīme. Funkcija $f=\frac{a}{x}+bx$ bieži parādās dažādos ekstrēmu, kā arī matemātikas olimpiāžu uzdevumos. Grāmatas "Ekstrēmu uzdevumi" 2. daļā šai funkcijai ir veltīta atsevišķa nodaļa. Atgādināsim, ka no f stingrās izliektības izriet, ka funkcijai f ir tikai viens minimuma (globālā) punkts.

Eksponentfunkcija

9. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija 2^x ir J-izliekta.
10. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija 10^x ir J-izliekta.
Funkcija $f(x) = 10^x$ ir J-izliekta, jo

$$10^{\frac{x+y}{2}} \le \frac{1}{2}(10^x+10^y) \Leftrightarrow \left(10^{\frac{x}{2}}-10^{\frac{y}{2}}\right)^2 \ge 0.$$

Līdzīgi risināms nākamais uzdevums.
11. uzdevums. Pierādīt, ka katram pozitīvam a funkcija a^x ir J-izliekta.

Logaritmiskā funkcija

12. uzdevums. Pierādīt, ka logaritmiska funkcija $f(x)=-\lg x,\ x>0$, ir J-izliekta.

Tās J-izliektība ir līdzvērtīga nevienādībai $G \le A$ divu pozitīvu saskaitāmo gadījumā:

$$\lg\frac{a+b}{2} \ge \frac{1}{2}(\lg a+\lg b) \Leftrightarrow$$

$$\lg\frac{a+b}{2} \ge \frac{1}{2}\lg ab = \lg\sqrt{ab} \ \Leftrightarrow\ \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}\ \ (a, b > 0).$$

Te vēl izmantots tas, ka lg ir augoša funkcija.

13. uzdevums. Pierādīt, ka katram $a > 0$ funkcija $\lg(1 + a^x)$ ir J-izliekta.

Pakāpes funkcija

14. uzdevums. Pierādīt, ka x^4 ir stingri izliekta funkcija.
Pierādīt prasīto var pēc definīcijas vai atsaucoties uz īpašību par saliktās funkcijas $f(g(x))$ izliektību.
15. uzdevums. Pierādīt, ka x^3 ir izliekta funkcija pozitīviem x un ieliekta negatīviem x.
16. uzdevums. Pierādīt, ka $\sqrt{x}$ ir ieliekta funkcija.

Trigonometriskās funkcijas

17. uzdevums. Pierādīt, ka sin$x$ ir J-ieliekta nogrieznī [0, π]

Jāpierāda nevienādība

$$\sin\left(tx+(1-t)y\right)\geq t\sin x+(1-t)\sin y\,,\ \text{ja}\ x,y\in[0,\pi]\ \text{un}\ t=\frac{1}{2}\,.$$

Apzīmē $x = u + v$, $y = u - v$. Tad $x + y = 2u$ un

$$\sin u\geq\frac{1}{2}\sin(u+v)+\frac{1}{2}\sin(u-v)\,.$$

Vienkāršojam nevienādību, lietojot sinusa no divu leņķu summas un starpības formulas:

$$\sin u\geq\sin u\cos v$$

Tā kā $u=\dfrac{x+y}{2}\in[0,\pi]$, tad sin$u \geq 0$ un pierādāmā nevienādība ir līdzvērtīga acīmredzami patiesai nevienādībai $1\geq\cos v$.

Līdzīgi risināms nākamais uzdevums.

18. uzdevums. Pierādīt, ka cos x ir J-ieliekta nogrieznī $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

19. uzdevums. Pierādīt, ka tg$x$ ir stingri J-izliekta intervālā $[0,\frac{\pi}{2})$.

Apzīmē x = u + v , y = u – v. Tad x + y = 2u un jāpierāda nevienādība

$$\mathrm{tg}\,\frac{x+y}{2}\leq\frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\ x+\mathrm{tg}y\right)\ \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{tg}u \leq \mathrm{tg}(u + v) + \mathrm{tg}(u - v).$$

Pārveidojam nevienādības labo pusi:

$$2\mathrm{tgu}\leq\frac{\mathrm{tgu}+\mathrm{tgv}}{1-\mathrm{tgutgv}}+\frac{\mathrm{tgu}-\mathrm{tgv}}{1+\mathrm{tgutgv}}=\frac{2\mathrm{tgu}(1+\mathrm{tg}^2\mathrm{v})}{1-(\mathrm{tgutgv})^{2}}$$

Tā kā $\mathrm{u}=\dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}\in[0,\frac{\pi}{2})$, tad tgu ≥ 0 un nevienādību var vienkāršot:

$$1\leq\frac{1+\mathrm{tg}^2\mathrm{v}}{1-(\mathrm{tgutgv})^{2}}\,.$$

Nevienādība ir spēkā, ja daļas saucējs ir pozitīvs. Saucēja pozitivitāte izriet no tā, ka $\mathrm{v}=\dfrac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ un no tā, ka cos(u + v) = cosx > 0. Tātad cosucosv > sinusinv, no kurienes: 1 > tgutgv.

20. uzdevums. Pierādīt, ka ctg$x$ ir stingri J-ieliekta intervālā $[0,\frac{\pi}{2})$.

21. uzdevums. Pierādīt, ka arctg$x$ ir J-ieliekta intervālā $[0,+\infty)$.

Piezīme. Nevienādību, kas raksturo sin$x$, cos$x$ un tg$x$ J-izliektību, pierādījumi ir atrodami, piemēram, grāmatā [Siv]

22. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}$ ir izliekta.

Pierādīsim pēc definīcijas, ka f ir stingri izliekta, ja a nav nulle. Neierobežojot vispārīgumu, var uzskatīt, ka a pozitīvs. Ņem dažādus u, v no $[-a, a]$ un patvaļīgu $\lambda \in (0;1)$. Tad jāpierāda nevienādība

$$\sqrt{(\lambda u+(1-\lambda)v)^2+a^2} < \lambda\sqrt{u^2+a^2}+(1-\lambda)\sqrt{v^2+a^2}$$

Kāpināsim abas nevienādības puses kvadrātā:

$$\lambda^2u^2+2\lambda(1-\lambda)uv+(1-\lambda)^2v^2+a^2<$$

$$<\lambda^2(u^2+a^2)+(1-\lambda)^2(v^2+a^2)+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{(u^2+a^2)(v^2+a^2)}$$

$$2\lambda(1-\lambda)uv-a^2<2\lambda(1-\lambda)\sqrt{(u^2+a^2)(v^2+a^2)}$$

Izdalām abas nevienādības puses ar $2\lambda(1-\lambda)>0$

$$uv-a^2<\sqrt{(u^2+a^2)(v^2+a^2)}$$

Kāpinām nevienādības abas puses kvadrātā

$$(uv)^2-2uva^2+a^4<(uv)^2+(ua)^2+(av)^2+a^4\,.$$

$$0<a^2(u-v)^2.$$

Stingrā izliektība pierādīta.

Jensena nevienādības daži lietojumi

23. uzdevums. Iegūt nevienādības starp harmonisko, ģeometrisko, aritmētisko un kvadrātisko vidējo: $H \le G \le A \le K$ kā sekas no (JN).

Lai iegūtu $A \le K$, aplūkosim izliektu funkciju $f(x)=x^2$. Saskaņā ar (JN):

$$f(A)\le A(f_1,\ldots,f_n)\ \Rightarrow\ A^2\le\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}\Rightarrow$$

$$|A|\le\sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}=K\,.$$

Tagad aplūkosim logaritmisko funkciju

$$f(x)=-\lg x,\ \ x>0\,.$$

Tās J-izliektība pierādīta augstāk.
Saskaņā ar (JN):

$$-\lg(A)\le-\frac{1}{n}(\lg x_1+\ldots+\lg x_n)=-\frac{1}{n}\lg G^n\Rightarrow\lg G\le\lg A$$

Tā kā lg ir augoša funkcija, tad $G \le A$.

Ņemot $x_k=t_k^{-1},\ k=1,\ldots,n$, nevienādībā $\frac{1}{A}\le\frac{1}{G}$, iegūstam:

$$\frac{n}{x_1+\ldots+x_n}\le\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}\Leftrightarrow H\le G.$$

Piezīme. Nevienādības $H\le G\le A\le K$ ar citiem paņēmieniem iegūtas grāmatas “Ekstrēmu uzdevumi” 1. daļā.

24. uzdevums. Iegūt Košī nevienādību $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$ kā sekas no (JN).

Uzrakstām (JN) funkcijai $f(t) = t^2$.

$$(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n)^2 \le \lambda_1 t_1^2 + \dots + \lambda_n t_n^2$$

Uzskatīsim, ka neviens no x_k un y_k nav nulle. Pretējā gadījumā Košī nevienādībā varētu samazināt saskaitāmo skaitu n un aplūkot nevienādību ar visiem nenulles locekļiem.

Ņem

$$\lambda_k = \frac{x_k^2}{B}, \quad t_k = \frac{y_k B}{x_k},$$

kur $B = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Izvēle likumīga, jo visi λ_k ir pozitīvi un to summa ir 1. Ievietojam

$$\lambda_k t_k = x_k y_k, \quad \lambda_k t_k^2 = \frac{x_k^2}{B} \cdot \frac{y_k^2 B^2}{x_k^2} = y_k^2 B$$

Jensena nevienādībā:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} y_k^2 B = B \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

25. uzdevums. Pozitīviem x, y, a un b pierādīt nevienādību $x^a y^b \le ax + by$, ja $a + b = 1$.
Šī nevienādība ir nevienādības $G \le A$ vispārinājums (divu mainīgo gadījumā), ar pēdējo tā sakrīt, ja $a = b = \frac{1}{2}$.

$$x^a y^b = 10^{a \lg x} 10^{b \lg y} = 10^{a \lg x + b \lg y} =$$
$$= f(a \lg x + b \lg y) \le af(\lg x) + bf(\lg y) =$$
$$a 10^{\lg x} + b 10^{\lg y} = ax + by.$$

Piezīme. Ja a un b racionāli skaitļi, kuru summa 1, tad nevienādību $x^a y^b \le ax + by$, var iegūt kā sekas no vispārīgās nevienādības $G \le A$: $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Ņemam pirmos m skaitļus šajā nevienādībā vienādus ar x un pārējos $n - m$ skaitļus vienādus ar y:

$$(x^m y^{n-m})^{\frac{1}{n}} \le \frac{mx + (n-m)y}{n} \Rightarrow x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{n-m}{n}} \le \frac{mx}{n} + (1 - \frac{m}{n}) y.$$

26. uzdevums. Pierādīt Heldera nevienādību: visiem pozitīviem p un q, kuriem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ir spēkā:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Apzīmēsim: $A=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B=\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $x_k=\left(\frac{a_k}{A}\right)^p$, $y_k=\left(\frac{b_k}{B}\right)^q$. Neierobežojot vispārīgumu, var uzskatīt, ka a_k un b_k ir pozitīvi. Tad jāpierāda nevienādība $\sum\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B}\le 1$.
Ievērosim, ka visu x_k un y_k summas ir vienādas ar "1". Izmantojot iepriekšējā uzdevumā pierādīto nevienādību $x_k^a y_k^b \le ax_k+by_k$, pēc vienkāršiem pārveidojumiem iegūstam, ka

$$\sum\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B}=\sum(x_k)^{\frac{1}{p}}(y_k)^{\frac{1}{q}}\le\sum\left(\frac{1}{p}x_k+\frac{1}{q}y_k\right)=\frac{1}{p}\sum x_k+\frac{1}{q}\sum y_k=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

<u>27. uzdevums</u>. Iegūt Heldera nevienādību, pieņemot, ka funkcija $f(t)=t^p$, $t\ge 0$, $p>1$, ir J-izliekta. Vai varat pierādīt šīs funkcijas J-izliektību ar elementārām metodēm (neizmantojot diferenciārēķinus)?

<u>28. uzdevums</u>. Atrast maksimālo vērtību summai $\sin x+\sin y+\sin z$, ja $x+y+z=\pi$.
Funkcija $f(t)=\sin t$ ir J-ieliekta nogrieznī $[0;\pi]$. Lietojam (JN) ieliektai funkcijai:

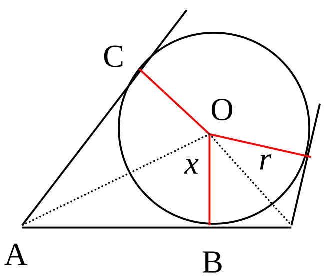
$$f(x)+f(y)+f(z)\le 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

$$\sin x+\sin y+\sin z=f(x)+f(y)+f(z)\le 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tātad $\sin x+\sin y+\sin z\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Vienādība tiek sasniegta, ja $x=y=z$.

<u>29. uzdevums</u>. Pierādīt, ka no visiem n-stūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir regulāram n-stūrim.

Dotā riņķa rādiusu apzīmēsim ar r un ap to apvilkta n-stūra M laukumu ar L. Punktus, kuros riņķis pieskaras n-stūra malām, savienojam ar riņķa centru O, sk. 37. zīm. Tad apskatāmais n-stūris ir sadalīts n četrstūros, kuru laukumu summa ir L.



37. zīm.

Aprēķināsim viena četrstūra laukumu:

$$AB=r\,\mathrm{tg}x,\ L_{ABOC}=2L_{ABO}=r^2\,\mathrm{tg}x.$$

Apzīmējot attiecīgos trijstūra leņķus ar $x_1, ..., x_n$, izsakām n-stūra M laukumu:

$$L(M)=r^2(\mathrm{tg}x_1+...+\mathrm{tg}x_n).$$

Ievērosim, ka $x_1+\cdots+x_n=\pi$. Tangensa funkcija intervālā $[0,\frac{\pi}{2})$ ir J-izliekta, tātad tai ir spēkā (JN). Izvēlamies visus λ vienādus ar $\frac{1}{n}$:

$$tg\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{tg(x_1)+\cdots+tg(x_n)}{n}\quad\Rightarrow$$

$$r^2tg\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)=r^2tg\frac{\pi}{n}\leq r^2\cdot\frac{tg(x_1)+\cdots+tg(x_n)}{n}=L(M)\quad\Rightarrow$$

$$r^2tg\frac{\pi}{n}\leq L(M)$$

Nevienādība pārvēršas vienādībā, ja visi x_k ir vienādi. Vēl atliek ievērot, ka nevienādības kreisās puses loceklis ir regulāra n-stūra, kas apvilkts ap doto riņķi, laukums.

Daži uzdevumi par izliektām funkcijām patstāvīgai risināšanai

30. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot: ja funkcija $f: R \to R$ ir izliekta, tad arī $\left(-\dfrac{1}{f}\right)$ ir izliekta.

31. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot: ja funkcija $f: R \to R$ ir izliekta, tad vismaz viena no funkcijām $\dfrac{1}{f}$, $-\dfrac{1}{f}$ ir izliekta.

32. uzdevums. Atrast visas izliektas funkcijas, kuras definē ar formulu $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

33. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka izliektas un nenegatīvas funkcijas kvadrāts ir izliekta funkcija.

34. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot: ja pozitīvas funkcijas kvadrāts ir izliekta funkcija, tad arī pati funkcija ir izliekta.

35. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka divu izliektu funkciju reizinājums ir izliekta funkcija.

36. uzdevums. Noskaidrot vai funkcijas $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-1$ ir izliektas un vai to reizinājums ir izliekts kopā R.

37. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka divu izliektu pozitīvu funkciju reizinājums ir izliekta funkcija.

38. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka divu izliektu funkciju f, $g : R \to R$ kompozīcija jeb saliktā funkcija $f(g(x))$ ir izliekta.

39. uzdevums. Noskaidrot vai viena no saliktām funkcijām $f(g(x))$ un $g(f(x))$ ir izliekta, ja $f(x)=x^2$ un $g(x)=x^2-1$.

40. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka vismaz viena no saliktām funkcijām $f(g(x))$ vai $g(f(x))$ ir izliekta, ja f, $g : R \to R$ ir izliektas funkcijas.

41. uzdevums. Atrast funkcijas $f = x^2$, $x > 0$, inverso funkciju un pierādīt, ka tā ir ieliekta.

42. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka izliektas funkcijas $f: R \to R$ inversā funkcija (ja tā eksistē) ir ieliekta.

44. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka monotona funkcija $f: R \to R$ vienmēr ir vai nu izliekta vai arī ieliekta.

45. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot: ja f ir izliekta gan nogriezni $[-1, 0]$, gan nogriezní $[0, 1]$, tad tā ir izliekta arī šo nogriežņu apvienojumā $[-1, 1]$.

17. nodaļa **Funkcija** $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-(c-x)^2}$

Noskaidrosim, kā funkcijas *f* ekstrēmus var atrast ar elementārām metodēm. Atkarībā no konstantēm *a, b* un *c* funkcija *f* maksimumu vai minimumu var sasniegt definīcijas kopas iekšienē vai galapunktā. Vispirms aplūkosim piemērus, kas raksturo iespējamās situācijas. Pēc tam funkcijas ekstrēmu pētīšanā izmantosim izliektības jēdzienu. Atcerēsimies, ka pēc izskata līdzīga funkcija $h(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$ radās, risinot Hērona uzdevumu, kurš dažādos aspektos ir aplūkots darba 1. daļā. Vai uzdevumu ārējā līdzība būs saskatāma arī apskatāmās funkcijas ekstremālajās īpašībās? Vai kāds no Hērona uzdevuma risinājumiem var dot pavedienu arī šīs funkcijas ekstrēmu meklēšanā.

Piemēri

1. piemērs. Funkcija *f* maksimumu sasniedz definīcijas kopas iekšējā punktā.
Noteikt ekstrēmus funkcijai

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(1-x)^2}\ .$$

Nosakām funkcijas definīcijas kopu (šīs nodaļas ietvaros runa ir par tā saucamo dabīgo definīcijas kopu):

$$\begin{cases}1-x^2\ge 0,\\ 1-(1-x)^2\ge 0\end{cases}$$

$$-1\le x\le 1,\ \ 0\le x\le 2\ \Rightarrow\ x\in[0,1].$$

Pierādīsim, ka funkcija maksimālo vērtību sasniedz nogriežņa [0, 1] viduspunktā:

$$f(x)\le f(\frac{1}{2})=\sqrt{3}\,.$$

Kāpinām nevienādības $f(x)\le\sqrt{3}$ abas puses kvadrātā:

$$1-x^2+1-(1-x)^2+2\sqrt{(1-x^2)(1-(1-x)^2)}\le 3$$

$$1-x^2+1-1+2x-x^2+2\sqrt{(1-x^2)(2x-x^2)}\le 3$$

$$2\sqrt{x^4-2x^3-x^2+2x}\le 2x^2-2x+2$$

$$\sqrt{x^4-2x^3-x^2+2x}\le x^2-x+1.$$

Kāpinām vēlreiz abas puses kvadrātā:

$$x^4-2x^3-x^2+2x\le x^4-2x^3+3x^2-2x+1$$

$$-4x^2+4x-1\le 0$$

$$-(2x-1)^2\le 0.$$

Tātad max $f(x)=\sqrt{3}$.

Pierādīsim, ka funkcijas minimālā vērtība ir 1. Šo vērtību funkcija sasniedz nogriežņa galapunktos: $f(0)=1$ un $f(1)=1$. Kāpinām nevienādības $f(x)\ge 1$ abas puses kvadrātā

$$1-x^2+1-1+2x-x^2+2\sqrt{(1-x^2)(2x-x^2)}\ge 1$$

$$2\sqrt{(1-x^2)(2x-x^2)}\ge 2x^2-2x=2x(x-1)$$

Nevienādība ir spēkā , jo tās labā puse ir negatīva, ja $0<x<1$.

2. piemērs. Definīcijas kopa ir tukša.

Noteikt ekstrēmus funkcijai

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(3-x)^2}\,.$$

Nosakām definīcijas kopu:

$$1-x^2\geq 0;\ 1-(3-x)^2\geq 0\,.$$
$$-1\leq x\leq 1,\ \ 2\leq x\leq 4.$$

Tā kā definīcijas kopa ir tukša, tad var uzskatīt, ka uzdevums nav formulēts korekti.

3. piemērs. Definīcijas kopa sastāv tikai no viena punkta.
Noteikt ekstrēmus funkcijai

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(2-x)^2}$$

Nosakām definīcijas kopu:

$$1-x^2\geq 0,\ 1-(2-x)^2\geq 0$$
$$-1\leq x\leq 1,\ 1\leq x\leq 3$$

Tā kā definīcijas kopa sastāv tikai no viena punkta $x = 1$, tad

$$\min f(x) = \max f(x) = f(1) = 0.$$

4. piemērs. Estrēms netiek sasniegts uzdotā intervāla iekšienē.
Intervālā [3, 5] noteikt ekstrēmus funkcijai

$$f=\sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-(3-x)^2}\,.$$

Vispirms pierādīsim, ka dotajā intervālā f ir dilstoša funkcija kā divu dilstošu funkciju summa. Parabolai $25 - x^2$ zari vērsti uz leju un virsotne ir punktā $x = 0$, tātad tā ir dilstoša pa labi no “0”. Arī parabolai

$$25-(3-x)^2=(2+x)(8-x)$$

zari ir vērsti uz leju. Tai virsotne ir punktā $x = 3$, ko var noteikt kā sakņu $x_1 = -2$, $x_2 = 8$ viduspunku. Tā kā abas parabolas ir dilstošas dotajā intervālā un kvadrātsakne no dilstošas funkcijas ir dilstoša funkcija, tad apgalvojums par f dilšanu ir pierādīts. Tātad
$\max f(x) = f(3) = 9$ un $\min f(x) = f(5) = \sqrt{21}$ un

Sarežģītāk būtu noskaidrot, vai funkcija $f=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{25-(3-x)^2}$ ir monotona, piemēram, intervālā $x\in[0,1]$. Turpmāk tiks dota recepte, kas ļaus noskaidrot ne tikai šīs, bet arī jebkuras citas apskatāmā tipa funkcijas monotonitātes intervālus.

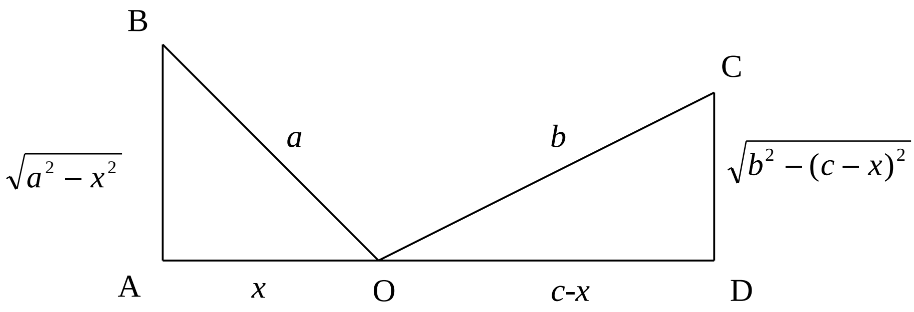
Ģeometriskā interpretācija

Vai uzdevumam noteikt maksimālo vērtību funkcijai

$$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-(c-x)^2}$$

var piešķirt kādu ģeometrisku jēgu?

Ja konstantes a, b un c ir pozitīvas, tad uzdevuma ģeometriskā interpretācija ir šāda:
Atrast punkta O stāvokli uz nogriežņa AD, lai dotā garuma nogriežņu BO un CO projekciju summa AB + CD būtu vislielākā, sk. 38. zīm.
Jeb, kādās daļās jāsadala nogrieznis AD, lai summa AB + CD būtu vislielākā?
Var iztēloties, ka BO un OC ir divi stieņi, kas punktā O savienoti ar šarnīru tā, ka O pārvietojoties pa taisni AD, otri stieņa gali slīd attiecīgi pa taisnēm AB un DC.



38. zīm.

Nosacījumi, kas saista *a, b* un *c*

Tā kā funkcija f nav atkarīga no a un b zīmes, tad uzskatīsim, ka šie lielumi ir pozitīvi.
Nosakām pieļaujamās x vērtības:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \textbf{,}\ b^2 - (c - x)^2 \geq 0$$

$$-a \leq x \leq a \textbf{,}\ c - b \leq x \leq c + b$$

$$x \in [-a,\ a] \cap [c - b,\ c + b] \textbf{.}$$

Šo divu intervālu šķēlums būs tukša kopa, ja $a < c - b$ vai $c + b < -a$. Tātad, lai f definīcijas kopa nebūtu tukša, nepieciešams, lai $a \geq c - b$ un $c + b \geq -a$. Lietojot moduļa zīmi, šos divus nosacījumus var pierakstīt īsāk:

$$|c| \leq a + b.$$

Vienkārši pārbaudīt (izdariet to patstāvīgi), ka iegūtais nosacījums ir arī pietiekams, lai f definīcijas kopa nebūtu tukša.
Nosacījumu: $|c| \leq a + b$ var iegūt īsāk. Funkcijas f zemsaknes izteiksmēm jābūt nenegatīvām, tāpēc

$$|x| \leq a,\ |c - x| \leq b\ \Rightarrow\ |c| = |c - x + x| \leq |c - x| + |x| \leq a + b.$$

Ievērosim, ka

$$[c - b,\ c + b] = [a,\ 2a + b],\ \text{ja}\ c = a + b,$$

$$[c - b,\ c + b] = [-a - 2b,\ -a],\ \text{ja}\ c = -(a + b).$$

Tas nozīmē, ka vienādības $|c| = a + b$ gadījumā f definīcijas kopa sastāv tikai no viena punkta: $x = a$, ja $c = a + b$, un $x = -a$, ja $c = -(a + b)$. Ekstrēmu noteikšana funkcijai, kurai definīcijas kopa sastāv tikai no viena punkta, ir triviāla, tāpēc turpmāk uzskatīsim, ka funkcijas f parametri a, b ($a > 0$, $b > 0$) un c apmierina nosacījumu:

$$|c| < a + b.$$

Funkcijas *f* ieliektība

Pierādīsim, ka funkcija f ir stingri ieliekta. Apzīmēsim:

$$f_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ \ f_2(x) = \sqrt{b^2 - (c - x)^2}\ .$$

Vispirms pierādīsim f_1 stingro ieliektību. Funkcijas f_1 ieliektība nav atkarīga no a zīmes, tāpēc neierobežojot vispārīgumu, uzskatīsim, ka a ir pozitīvs. Ņem dažādus u, v no $[-a,\ a]$ un patvaļīgu $\lambda \in (0; 1)$. Tad jāpierāda nevienādība

$$\sqrt{a^2 - (\lambda u + (1 - \lambda)v)^2} > \lambda\sqrt{a^2 - u^2} + (1 - \lambda)\sqrt{a^2 - v^2}\ .$$

Kāpinām abas nevienādības puses kvadrātā:

$$a^2 - \lambda^2 u^2 - 2\lambda(1-\lambda)uv - (1-\lambda)^2 v^2 >$$
$$> \lambda^2 a^2 - \lambda^2 u^2 + (1-\lambda)^2 a^2 - (1-\lambda)^2 v^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}$$

$$-2\lambda(1-\lambda)uv > (2\lambda^2 - 2\lambda)a^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}$$

$$-2\lambda(1-\lambda)\left(uv - a^2 + \sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}\right) > 0$$

Tā kā $2\lambda(\lambda - 1) < 0$ tad vēl jāpierāda nevienādība

$$\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)} + uv - a^2 < 0.$$

Tās pareizība izriet no pārveidojumiem:

$$(a^2-u^2)(a^2-v^2) < (a^2 - uv)^2$$

$$a^4 - (av)^2 - (ua)^2 + (uv)^2 < a^4 - 2uva^2 + (uv)^2 .$$

$$0 < a^2 (u - v)^2 .$$

Funkcijas f_2 ieliektību var secināt no f_1 ieliektības, jo, apzīmējot $x - c = y$, iegūstam aplūkotā tipa funkciju. Tātad f ir ieliekta (stingri) kā divu ieliektu funkciju summa.

Funkcijas *f* maksimuma punkts

Vispirms noteiksim, kādam vajadzētu "izskatīties" f ekstrēmu punktam, nerūpējoties par izvedumu stingru pamatotību. Apzīmēsim

$$x = a\sin x$$
$$c - x = b\sin v.$$

Tad funkcijas f maksimuma noteikšanu aizstāsim ar šādu uzdevumu:

$$m = a\cos u + b\cos v \to \max .$$

Kāpināsim abas puses kvadrātā:

$$m^2 = a^2\cos^2 u + b^2\cos^2 v + 2ab\cos u\cos v$$

Iegūtajai vienādībai pieskaitīsim vienādības $c = a\sin x + b\sin v$ kvadrātu:

$$c^2 = a^2\sin^2 u + b^2\sin^2 v + 2ab\sin u\sin v$$

$$m^2 + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(u - v)$$

$$m^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab\cos(u - v).$$

Tā kā $\cos(u - v) \le 1$, tad

$$m^2 \le a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$
$$m \le \sqrt{(a+b)^2 - c^2} .$$

Ekstrēms tiks sasniegts tad, ja $\cos(u - v) = 1$ jeb tad, ja $u - v = 2\pi k$, $u = v + 2\pi k$.

Ievietosim šo u vērtību izteiksmēs $x = a\sin x$ un $c - x = b\sin vi$:

$$x = a\sin(v + 2\pi k) = a\sin v .$$

$$c - x = b\sin(v + 2\pi k) = b\sin v .$$

Izdalot pēdējo divu formulu kreisās un labās puses, izteiksim x:

$$\frac{c-x}{x} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{c}{x} = \frac{b}{a} + 1 = \frac{a+b}{a}$$

$$x = \frac{ac}{a+b}.$$

Piezīme. Šāda ekstrēmu punkta izteiksme pazīstama no Hērona uzdevuma. Ja iepriekš zināms, ka krišanas un atstarošanās leņķi vienādi, sk. 37. zīm., tad

$$\frac{x}{a} = \frac{c-x}{b} \Rightarrow xb = ac - ax \Rightarrow \quad x = \frac{ac}{a+b}$$

No tā, ka f ir ieliekta, var secināt, ka punkts $x^* = \dfrac{ac}{a+b}$ ir funkcijas f maksimuma punkts.

Stingrs šī apgalvojuma pierādījums dots nākamajā punktā.

Funkcijas f monotonitātes intervāli

Teorēma. Pieņemsim, ka a, $b > 0$ un funkcija $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - (c-x)^2}$ ir definēta kopā $[x_1, x_2]$ un $x^* := \dfrac{ac}{a+b}$ ir šī nogriežņa iekšējs punkts. Tad f ir augoša nogriezni $[x_1, x^*]$ un dilstoša nogriezni $[x^*, x_2]$. Savukārt, ja x^* nepieder (x_1, x_2), tad funkcija f ir monotona visā nogriezni $[x_1, x_2]$.

Pierādījums. Formulētā apgalvojuma pareizību var ērti pierādīt, izmantojot f ieliektību. Ja stingri ieliektai funkcijai f nogriežņa iekšienē eksistē maksimuma punkts, tad f ir augoša pa kreisi un dilstoša pa labi no šī maksimuma punkta. Savukārt, ja izliektai (ieliektai) funkcijai nogriežņa iekšienē nav ekstrēma punkta, tad funkcija ir monotona. Pieņemsim, ka x^* pieder nogrieznim $[x_1, x_2]$ un pierādīsim, ka visiem x no šī nogriežņa ir spēkā nevienādība.

$$f(x) \le f\left(\frac{ac}{a+b}\right).$$

Atrodam funkcijas vērtību punktā $x^* = \dfrac{ac}{a+b}$:

$$f\left(\frac{ac}{a+b}\right) = \sqrt{a^2 - \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}} + \sqrt{b^2 - \left(c - \frac{ac}{a+b}\right)^2} =$$

$$= \frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - \frac{b^2c^2}{(a+b)^2}} = \sqrt{(a+b)^2 - c^2}\ .$$

Pierādīsim nevienādību:

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - (c-x)^2} \le \sqrt{(a+b)^2 - c^2}\ .$$

Kāpinām nevienādības abas puses kvadrātā:

$$a^2 - x^2 + b^2 - (c-x)^2 + 2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - (c-x)^2)} \le (a+b)^2 - c^2$$

$$2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - (c-x)^2)} \le 2x^2 - 2cx + 2ab$$

Abas nevienādības puse izdalām ar 2 un kāpinām kvadrātā:

$$a^2b^2 - a^2(c-x)^2 - b^2x^2 + x^2(c-x)^2 \le x^2(x-c)^2 + a^2b^2 + 2abx(x-c)$$

$$-a^2(c-x)^2 - b^2x^2 + 2abx(c-x) \le 0$$

$$(a(c-x) - bx)^2 \ge 0$$

kas arī bija jāpierāda.

Sekas. Ja a, $b > 0$ un $a + b \geq |c|$. Tad punkts $x^* = \dfrac{ac}{a+b}$ ir funkcijas f maksimuma punkts.

5. piemērs. Noteikt ekstrēmus funkcijai

$$f = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{25 - (3 - x)^2}\text{ , ja } x \in [0, 1]$$

Lietojam teorēmu. Tā kā $x^* = \dfrac{ac}{a+b} = \dfrac{9}{8}$ atrodas ārpus definīcijas kopas, tad f ir monotona un savus ekstrēmus sasniedz dotā intervāla galapunktos.
Aprēķinām funkcijas f ekstremālās vērtības:

$$\min f(x) = f(0) = 7,\quad \max f(x) = f(1) = \sqrt{8} + \sqrt{21} = 7{,}4...$$

Šajā piemērā funkcija ir augoša dotajā intervālā. Nākamajā piemērā uzrādīta apskatāmā veida funkcija, kas ir dilstoša dotajā intervālā.

6. piemērs. Noteikt ekstrēmus funkcijai

$$f = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{25 - (3 - x)^2}\text{ , ja } x \in [2, 3]$$

Pēc iepriekšējā piemēra x^* atrodas ārpus definīcijas kopas. Saskaņā ar teorēmu f ir monotona un savus ekstrēmus sasniedz dotā intervāla galapunktos. Aprēķināsim f ekstremālās vērtības:

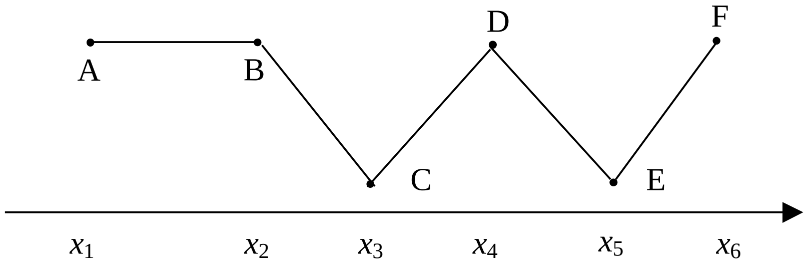
$$\min f(x) = f(3) = 5,\quad \max f(x) = f(2) = \sqrt{5} + \sqrt{24} = 7{,}1...$$

Nodaļu beigsim ar kontroljautājumu:
Vai apskatāmajā funkciju klasē ir tādas funkcijas, kas monotonas visā savā dabīgajā definīcijas kopā $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$?
Ja atbilde uz šo jautājumu nav skaidra, tad ieteicams vēlreiz uzmanīgi izlasīt iepriekš izklāstīto materiālu.
Iepriekšējos divos piemēros aplūkotās funkcijas dabīgā definīcijas kopa ir [- 2, 3]. Šajā kopā funkcija nav monotona, jo

$$f(-2) = \sqrt{5} < f(0) = 7,\ f(0) > f(3) = 5.$$

18. nodaļa **Pamācoši piemēri**

1. piemērs.
Funkcijai, sk. 39. zīm., ir divi minimuma (globālā) punkti x_3 un x_5 un bezgalīgi daudz lokālā minimuma punktu, kas pieder $[x_1, x_2)$. Savukārt maksimuma punkti ir ne tikai x_1, x_2, x_4 un x_6, bet arī jebkurš nogriežņa $[x_1, x_2]$ punkts. Viens un tas pats punkts var būt gan maksimuma, gan minimuma punkts. Funkcijai $f = 0$ visi punkti ir gan maksimuma, gan minimuma punkti.



39. zīm.

2. piemērs. Uzrādiet ierobežotu funkciju, kuras grafika skice ir kā 40. zīmējumā, t. i., funkciju, kurai ir tieši viens minimuma un tieši viens maksimuma punkts. Vai der polinoms?

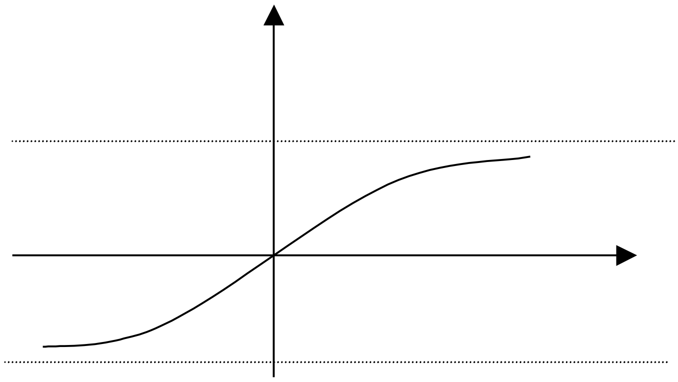
40. zīm.

Viena no vienkāršākām prasītā tipa funkcijām ir $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Paskaidrojiet, kāpēc neder polinoms.

3. piemērs. Funkcijai $f(x) = x$ nav neviena ekstrēma. Uzrādiet funkciju, kuras grafika skice ir tāda kā 41. zīmējumā, t. i., ierobežotu funkciju, kurai nav neviena ekstrēma. Der $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Vai šāda funkcija var būt divu polinoms dalījums?
Anniņa. Nevar! Lūk, pierādījums! Pirmkārt, saucējā esošajam polinomam nav reālu sakņu. Pretējā gadījumā dalījums nevarētu būt ierobežota funkcija. Tas nozīmē, ka šī polinoma pakāpei jābūt pārskaitlim. Otrkārt, abu polinomu pakāpēm jābūt vienādām. Pretējā gadījumā grafiks nevarētu tuvoties taisnei $x = \text{const} > 0$. Treškārt, šādu polinomu vecāko koeficientu attiecībai jābūt pozitīvai, jo polinomu dalījums pirmajā kvadrantā ir pozitīvs. Bet tad dalījums būs pozitīvs arī ceturtajā kvadrantā, kas neatbilst 3. zīmējumā redzamajam grafikam.
Jānītis. Var! Lūk, piemērs!

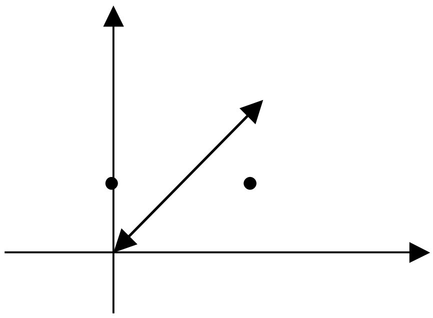
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, & x \geq 0, \\ \dfrac{x}{1-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Kam taisnība?



41. zīm. Kopā R definēta ierobežota funkcija, kurai nav ekstrēmu.

4. piemērs. 42. zīmējumā ir uzrādīta grafika skice nogrieznī definētai ierobežotai funkcijai, kurai nav neviena ekstrēma (globālā). Šai funkcijai nogriežņa galapunkti ir lokālā ekstrēma punkti.



42. zīm. Nogrieznī definēta ierobežota funkcija, kurai nav ekstrēmu.

5. piemērs. Vai jebkurai nogrieznī definētai ierobežotai funkcijai vienmēr eksistē vismaz viens lokāls ekstrēms? Izrādās, ka nē! Aplūkojiet funkciju f: $[0, 2] \to R$, kas punktā $x = 1$ ir vienāda ar 0 un kas racionāliem skaitļiem x, $x \neq 1$, piekārto $x(2–x)$, bet pārējiem skaitļiem $x(x–2)$.

6. piemērs. Funkcijai $y = \sin x$ ir bezgalīgi daudz ekstrēma punktu. Vai funkcijai var būt bezgalīgi daudz ekstrēma (stingra) punktu arī tad, ja tā definēta ierobežotā kopā? Var! Konstrukcijas ideja vienkārša. Izvēlēsimies funkciju, kas pieņem tikai divas vērtības. Viena no tām būs maksimālā un otra minimālā vērtība. Funkciju, kas racionāliem skaitļiem piekārto 1 un iracionāliem 0, sauc par Dirihlē funkciju. Dirihlē funkcija ir pārtraukta katrā punktā.

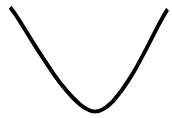
7. piemērs. Vai pareiza hipotēze: ja ierobežotā kopā definētai nepārtrauktai funkcijai f ir bezgalīgi daudz ekstrēma (globālā) punktu, tad f ir konstanta kādā intervālā?

Nav pareiza! Funkcijai $\sin \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$, ir bezgalīgi daudz ekstrēma punktu.

8. piemērs. Vai pareiza hipotēze: ja slēgtā intervālā definētai nepārtrauktai funkcijai f ir bezgalīgi daudz ekstrēma (globālā) punktu, tad f ir konstanta kādā intervālā?

Nav pareiza! Funkcija $f(x) = \left| x \sin \frac{1}{x} \right|$, $f(0) = 0$, savu minimumu sasniedz bezgalīgi daudzos punktos $x = \frac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \ldots$

9. piemērs. Kāds izskatās nepārtrauktas funkcijas grafiks stingra minimuma punkta apkārtnē? Parasti to attēlo tādu kā 43. zīmējumā. Kāpēc parasti? Vai tad tā nav vienmēr? Pieredze ar "labām" funkcijām (x^2, sin$x$ utt.) apstiprina, ka pa kreisi no stingra minimuma punkta funkcija dilst, bet pa labi aug, kā arī šādas grafiskas attēlošanas lietderību. Izrādās, ka stingra minimuma punkta apkārtnē grafikam ne vienmēr jābūt izliektam, t. i., tādam kā 43. zīmējumā.



43. zīm.

Precizēsim, ka par funkcijas f: X$\to$ R stingra minimuma punktu sauc tādu punktu x_0 no X, ka visiem x no X, $x \neq x_0$, ir spēkā nevienādība

$$f(x) > f(x_0).$$

Konstruēsim funkciju, kuras grafiks "svārstās" starp divām parabolām x^2 un $4x^2$. Ņemsim

$$f(x) = 3x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| + x^2, \quad f(0) = 0.$$

Tad punkts $x = 0$ ir funkcijas f stingra minimuma punkts. Tā kā funkcija ir pāru (tās grafiks ir simetrisks pret Y asi) tad pietiek pierādīt, ka f nav augoša nevienā intervālā $(0, c)$. Punktos $x = \frac{1}{k\pi}$ funkcijas f grafiks pieskaras apakšējai parabolai, bet punktos, kuros $\sin \frac{1}{x} = 1$, t. i., punktos $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, augšējai parabolai. Uzrādīsim $x_1 < x_2$, kuriem $f(x_1) > f(x_2)$. Tas nozīmēs, ka f nav augoša. Fiksētam c izvēlēsimies naturālu k tik lielu, lai punkti x_1 un x_2:

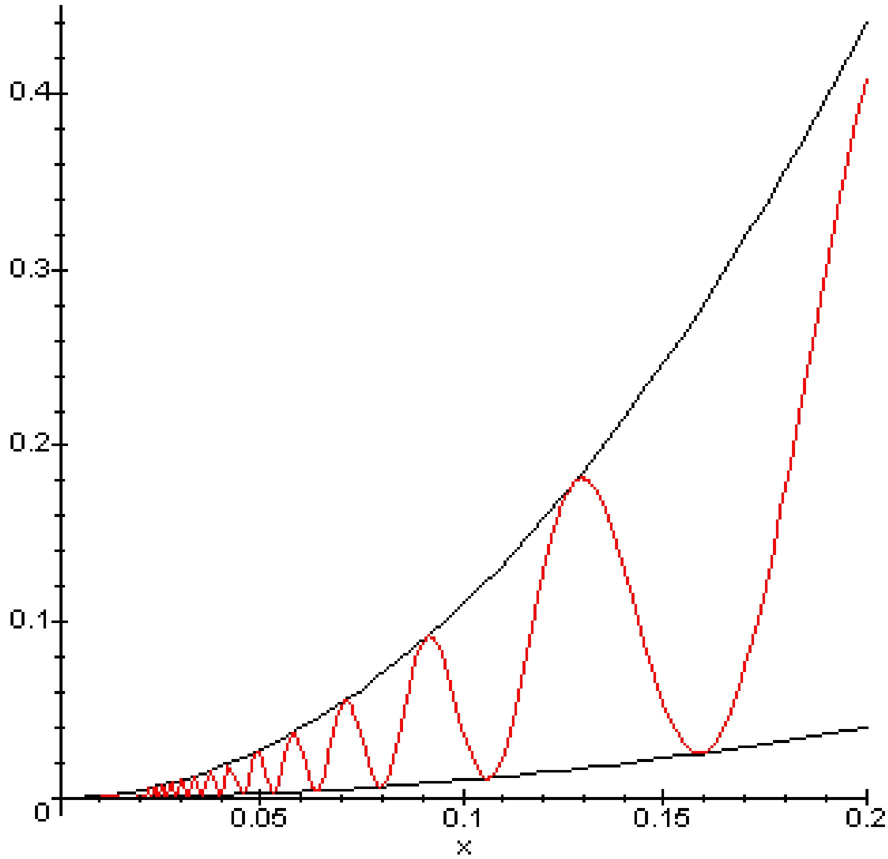
$$x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4\pi k} < x_2 = \frac{1}{2\pi k},$$

atrastos intervālā $(0, c)$. Tad $f(x_1) = 4x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$, jo $2x_1 > x_2$.

Funkcijai f līdzīgas funkcijas

$$x^2 + 10x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$$

grafiks ir parādīts 44. zīmējumā. Koeficients "10" izvēlēts pēc dažiem eksperimentiem ar programmu "Mapple", lai iegūtu uzskatāmāku grafiku. Nereti gadās, ka noapaļošanas kļūdu dēļ, datorprogramma izdod grafiku, kas būtiski atšķiras no funkcijas īstā grafika.



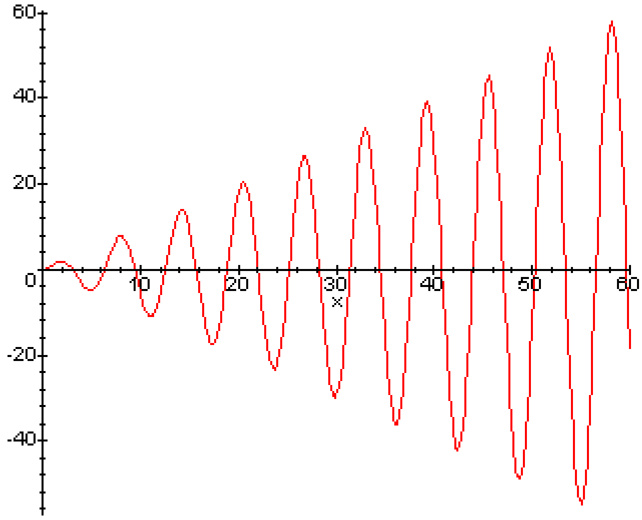
44. zīm. Nepārtraukta funkcija, kura nav izliekta nevienā stingrā minimuma (globālā) punkta apkārtnē.

10. piemērs. Vai pareizs apgalvojums: ja nepārtrauktai funkcijai ir bezgalīgi daudz lokālo ekstrēmu, tad tai ir arī globāls ekstrēms? Nav pareizs? Sk 45. zīmējumu.

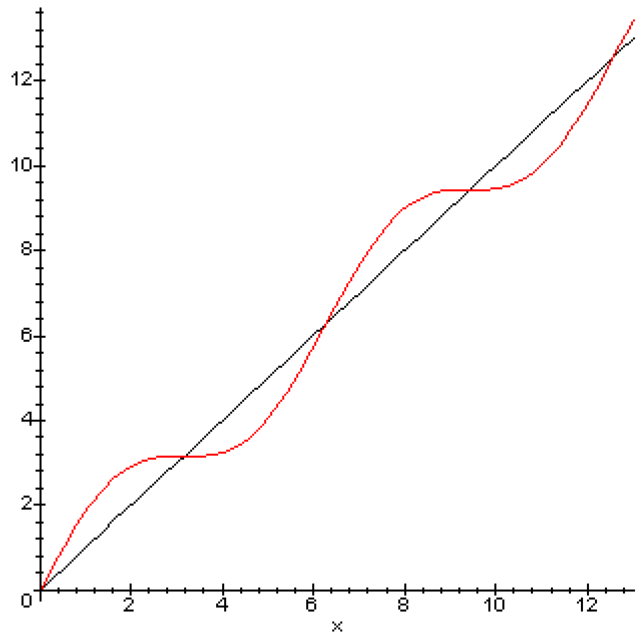
11. piemērs. Augošas funkcijas, kurai ir bezgalīgi daudz pārliekuma punktu, grafiks attēlots 46. zīmējumā. Ar nepārtrauktas funkcijas *f* pārliekuma punktu saprot tādu punktu *a*, kura apkārtnē *f* maina izliektības veidu (virzienu). Precīzāk, eksistē tāds intervāls $(a - c, a + c)$, ka šajā intervālā pa kreisi no *a* funkcija ir izliekta (ieliekta), bet pa labi ieliekta (izliekta).

12. piemērs. Vai pareizs apgalvojums: ja funkcijai nogriežņa iekšienē nav neviena ekstrēma punkta, tad funkcija ir monotona.

Atbilde rodama no 5. piemēra.



45. zīm. Funkcijai $x\sin x$ ir bezgalīgi daudz lokālo ekstrēmu, bet nav neviena globālā ekstrēma.



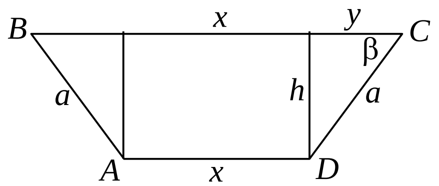
46. zīm. Augoša funkcija “$x + \sin x$”, kurai ir bezgalīgi daudz pārliekuma punktu.

Sofisms par optimālo reni

Ūdens noteces kanāla dziļums ir h; tā šķērsgriezums ir vienādsānu trapece, kuras laukums L. Cik platam jābūt kanālam, lai, ūdenim tekot, berze gar kanāla dibenu un sānu sienām būtu minimāla (t. i., šo virsmu laukums būtu vismazākais)?
Būtu interesanti zināt, kādu atbildi paredzējuši uzdevumu krājuma [EMP, 38.lpp.] sastādītāji?

Anniņa.
Jārisina minimizācijas uzdevums, sk. 47. zīmējumu,

$$\min(2a + x) = ?,\ \text{ja}\ L = (x + y)h,$$



47. zīm.

Tā kā

$y = a\cos\beta$, $\frac{h}{a} = \sin\beta \Rightarrow a = \frac{h}{\sin\beta}$, tad minimizējamo izteiksmi var izteikt kā viena mainīgā funkciju:

$$f = 2a + (x + y) - y = 2a + \frac{L}{h} - a\cos\beta = a(2 - \cos\beta) + \frac{L}{h} = h\frac{2 - \cos\beta}{\sin\beta} + \frac{L}{h}.$$

Pierādu, ka $f \geq h\sqrt{3} + \frac{L}{h}$,

$$\frac{2 - \cos\beta}{\sin\beta} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$2 - \cos\beta \geq \sqrt{3}\sin\beta$$

$$2 \geq \sqrt{3}\sin\beta + \cos\beta$$

$$1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = \sin(\beta + 30^\circ)$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $\beta = 60^\circ$. Tātad f minimālā vērtība ir $h\sqrt{3} + \frac{L}{h}$.

Jānītis. Pārbaudīšu Anniņas risinājumu, ja $L = h = \sqrt{3}$. Tad

$$f = h\sqrt{3} + \frac{L}{h} = 3 + 1 = 4.$$

Zinot, ka $\beta = 60^\circ$, nosaku $a = \frac{h}{\sin\beta} = 2$. Tas nozīmē, ka $f = 2a + x = 4 + x > 4$, kas pretrunā ar to, ka f minimālā vērtība ir 4.

Anniņa. Savādi. Mans risinājums ir pārāk skaists, lai tas būtu nepareizs. Es laikam zinu, kur ir kļūda! Tāda trapece, kurai laukums vienāds ar augstumu nemaz nevar eksistēt.

Jānītis. Tomēr var! Piemēram, trapecei, kurai $x = y = \frac{1}{2}$ un augstums $h = 1$, sk. 47. zīmējumu, laukums ir tieši 1.

Anniņa. Jā, tiešām! Bet šai trapecei leņķis β nav 60 grādu.

Jānītis. Nav un tam droši vien šajā gadījumā nav arī jābūt 60 grādu.

Pēterītis. Noskaidrošu, vai funkcijai

$$g(t) = \frac{2 - \cos t}{\sin t}$$

ir vēl kādi citi ekstrēmi. Jādomā, ka kāds no lokāliem funkcijas g ekstrēmiem dos uzdevuma atrisinājumu Jānīša minētajā gadījumā. Vispirms pierādīšu, ka funkcija g ir dilstoša intervālā no nulles līdz 60 grādiem. Ņemsim $0 < \alpha < \beta \leq 60^0$. Tad jābūt

$$g(\alpha) > g(\beta) \Leftrightarrow \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} > \frac{2 - \cos\beta}{\sin\beta} \Leftrightarrow$$

$$(2 - \cos\alpha)\sin\beta > (2 - \cos\beta)\sin\alpha \Leftrightarrow 2(\sin\beta - \sin\alpha) > \cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha$$

$$4\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} > \sin(\beta - \alpha) = 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

.

Tagad atliek ievērot, ka $2\cos\frac{\beta+\alpha}{2} > \cos 60^0 = 1$.

Lai pierādītu, ka funkcija g aug intervālā $60^0 < \alpha < \beta < 90^0$, jāpierāda nevienādība

$$2\cos\frac{\beta+\alpha}{2} < \cos\frac{\beta-\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} < 3\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 1 < 3tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\alpha}{2}.$$

Pēdējā nevienādība aplūkojamajā intervālā ir spēkā. Tātad funkcijai g ir tikai viens lokālā minimuma punkts 1. kvadrantā.

Jautrīte. Pirmkārt, Pēterīša secinājumu par funkcijas g monotonitātes intervāliem var iegūt ātrāk. Funkciju g var pārveidot šādas funkcijas formā $ku + \frac{1}{u}$, kuras ekstrēmi un monotonitātes intervāli kādreiz jau analizēti:

$$g(t) = \frac{2 - \cos t}{\sin t} = \frac{3\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{3tg^2\frac{t}{2} + 1}{2tg\frac{t}{2}} = \frac{3}{2}tg\frac{t}{2} + \frac{1}{2tg\frac{t}{2}}.$$

Otrkārt, Anniņa nav aplūkojusi visus gadījumus. Vēl pastāv tādas trapeces, kurām augšējais pamats ir īsāks par apakšējo. Manuprāt, gadījumā, kad trapeces laukums ir mazs salīdzinājumā ar tās augstumu, tieši starp šādām trapecēm jāmeklē uzdevuma atrisinājums.

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Literatūra IV daļai

[Al] Александров А.Д. *Выпуклые многогранники*, ГИТТЛ,Москва-Ленинград,1950,428 с.

[Bal] Балк М.Б.,*Геометрические приложения понятия о центре тяжести*,М.,Физматгиз,1959,232 с.

[BS] Buiķis M., Siliņa B. *Matemātika. Definīcijas. Formulas. Aprēķinu algoritmi*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1997, 288 lpp.

[Ber] Berger M., *Convexity*, The American Mathematical Monthly, 1990, vol. 97, N8, 650-678.

[C1] Cibulis A. *Ekstrēmu uzdevumi 1. daļa*. – 2003, Rīga, LU, 104 lpp.

[EMP] *Elementārās matemātikas praktikums*. *I daļa*, LU, Rīga, 1990, 90 lpp. (Autori: Šteiners K., Āboltiņa B., Mencis J., Zariņš P.)

[En] Engelsons J. *Optimizācijas metodes*, Rīga, LVU, 1985, 100 lpp.

[ET] Экланд И.,Темам Р.,*Выпуклый анализ и вариационные проблемы*,М.,Мир,1979,400с.

[HLP] Харди Г.Г.,Литллвуд Д.Е.,Полиа Г. *Неравенства*, Москва,ИЛ,1948(1932),456 с.

[JB] Яглом И.М,Болтянский В.Г.,*Выпуклые фигуры*, Москва-Ленинград, ГИТТЛ,1951, 344 с.

[JT] Иоффе А.Д.,Тихомиров В.М.,*Теория экстремальных задач*, Москва, Наука,1974,480с.

[REM] *Rokasgrāmata elementārajā matemātikā*, Rīga, Zvaigzne, 1982, 512 lpp.

[KRB] Kronbergs E., Rivža P., Bože D. *Augstākā matemātika 1. daļa*, Rīga, Zvaigzne, 1988, 534 lpp.

[Lus] Люстерник Л.А. *Выпуклые фигуры и многогранники*, ГИТТЛ,Москва,1956,212 с.

[ME1] *Математическая энциклопедия 1*,Москва,Советская Энциклопедия,1977.

[Oz] Ozols O. *Ievads augstākā matemātikā,* Latvijas valsts izdevniecība, Rīga, 1947, 326 lpp.

[Rab] Rabinowitz S. *$O(n^3)$ bounds for the area of a covex lattice n-gon*, Geombinatorics, April 993, Issue 4, Volume II, 85-88.

[Rai] Raitums U., *Optimizācijas metodes. Lekciju kurss*, Rīga, LU, 2002, 83 lpp.

[Rok] Рокафеллар Р.,*Выпуклый анализ*, М.,Мир,1973, с.470 [Rockafellar R. T., *Convex Analysis*, Vol. 28 of Princeton Math. Series, Princeton Univ. Press, 1970 (470 pp.)]

[Sk] Скопец З.А. *Геометрические миниатюры*, Москва,Просвещение,1990,224 с.

[Siv] Сивашинский И.Х. *Неравенства в задачах*, Москва,Наука,1967,304с.

[Ša] Шашкин Ю.А.*Эйлерова характеристика*,Москва,Наука,1984,96 с.

[Š1] Šteiners K. *Matemātiskās analīzes elementi*, Rīga, Zvaigzne, 1993, 320 lpp.

[Šth] Штейнгауз Г.*Математический калейдоскоп*,Москва,Наука, 1981,160 с.

[Šk] Шкапенюк М.,*Выпуклость функций и доказательство неравенств*,Квант,1980,N3,21-24 с.

[Var] Varberg D. E., *Pick's Theorem Revisited*, The American Mathematical Monthly, v. 92(1985), 584-587

[Vas] Васильев Н.Б. *Вокруг формулы Пика*, Квант,1974,N12,с.39–43.

[Zet] Зетель С.И. *Задачи на максимум и минимум*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1948, 224 с.

[Zor] Зорич В.А. *Математический анализ часть 1*, Москва,Наука,1981,544с