EKSTRĒMU UZDEVUMI

3. DAĻA

A. Cibulis
Latvijas Universitāte

Rīga

2002

SATURS

Ievads

Ekstrēmu uzdevumu daudzveidība, pat to, kas risināmi ar elementāriem paņēmieniem, ir pārsteidzoši liela. Grāmatas 1. daļā plašāk tika aplūkota ievērojamā nevienādība $G \leq A$, kas saista vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko. Savukārt 2. daļā galvenā loma tika atvēlēta citai klasiskai nevienādībai – Košī nevienādībai. Grāmatas 3. daļā abas šīs nevienādības tiek plaši lietotas vairāku citu uzdevumu risināšanā.

Par vissenākajiem ekstrēmu uzdevumiem uzskata tā dēvētos izoperimetriskos uzdevumus (kāda figūra ierobežo vislielāko laukumu, ja uzdots tās perimetrs?). Jau Aristotelim (4. gs. p. m. ē.) bija zināms, ka "visietilpīgākās" figūras ir riņķis un lode attiecīgi starp plaknes un telpas figūrām. Ģeometriskie maksimumu un minimumu uzdevumi sastopami senatnes visu trīs dižāko matemātiķu – Eiklīda, Arhimēda un Apolonija – darbos. Saskaņā ar Enciklopēdisko vārdnīcu [EV, 55. lpp.] Eiklīda slavenajos "Elementos" (6. grāmatā) atrodams visvienkāršākais un, ticams, ka arī visvecākais ekstrēmu uzdevums, proti, kādam taisnstūrim ar uzdotu perimetru ir vislielākais laukums? Apmēram pusi no darba 3. daļas aizņem materiāls par izoperimetriskiem daudzstūriem. Darbā īpaša vieta ir ierādīta klasiskajai Zēnodora problēmai: kādam n-stūrim ar uzdotu perimetru ir vislielākais laukums? Atsevišķs punkts veltīts maksimālā daudzstūra (un vispār uzdevuma atrisinājuma) eksistences problēmai.

Pārējās pēc apjoma mazākās nodaļās dots divu citu klasisku uzdevumu – Arhimēda un Faņano uzdevuma – risinājums, kā arī aplūkotas dažas funkciju klases, kurām ekstrēmus var noteikt ar elementārām metodēm.

Darbā dota gan teorētiskā, gan praktiskā daļa. Turklāt ne visi uzdevumu risinājumi izklāstīti tradicionālā veidā, kad mērķi cenšas sasniegt pa iespējami "taisnāko" ceļu, t. i., ekonomējot laiku vai izklāsta apjomu. Praksē, risinot kādu jaunu problēmu, mums reti kad izdodas uzreiz (bez kļūdām, bez eksperimentēšanas) atrast īsāko, vienkāršāko risinājumu. Ceļā uz mērķi, laiku pa laikam tiek aplūkoti dažādi sānceliņi, skolēnu raksturīgākās kļūdas, maldus risinājumi utt.

Elementāro metožu aspekts ir ļoti piemērots skolēnu un skolotāju vajadzībām, sevišķi gatavojoties matemātikas olimpiādēm.

Izmantotās literatūras saraksts ir dots darba beigās.

11. nodaļa **Izoperimetriski daudzstūri**

Ar **izoperimetriskām figūrām** (grieķu *isos* nozīmē vienāds, vienlīdzīgs; *perimetros* – plaknes figūras robežas garums) saprot figūras, kuru perimetrs ir nemainīgs lielums. Ar **izoperimetrisku uzdevumu** šajā nodaļā sapratīsim tādu uzdevumu, kurā jāmeklē noteikta tipa daudzstūris ar maksimālo laukumu, ja uzdots tā perimetrs, bet izoperimetriskā uzdevuma atrisinājumu īsāk sauksim par **maksimālo** vai **optimālo** daudzstūri. Izoperimetriski uzdevumi, vispārīgi runājot, ir tādi uzdevumi, kuros jānosaka ekstrēms kādam lielumam, ja aplūko noteiktas klases figūras ar uzdotu perimetru. Šis lielums ne vienmēr ir laukums, var būt, piemēram, figūras diametrs, smaguma centra augstums.

Labu, skolēniem piemērotu grāmatu "Izoperimetri" ir uzrakstījis D. A. Križanovskis (1883-1939) [Kr]. Tajā galvenā uzmanība tiek veltīta problēmai: kādai no visām plaknes figūrām ar vienu un to pašu perimetru ir vislielākais laukums? Jau senajā Grieķijā bija zināms, ka riņķim ir lielāks laukums nekā jebkurai citai figūrai ar tādu pašu perimetru, ka lodei ir lielāks tilpums nekā jebkuram citam ķermenim ar tādu pašu virsmas laukumu. Tiesa, zināt vēl nenozīmē prast pierādīt. Pitagora teiciena: *brīnišķīgākais no ķermeņiem ir lode, brīnišķīgākā no plaknes figūrām ir riņķis* pamatā, droši vien, ir šo figūru optimalitāte. Grieķu matemātiķis Zēnodors maksimālajām figūrām ir veltījis speciālu traktātu "Par figūrām, kurām ir vienāda perifērija". Viņa sacerējums diemžēl nav saglabājies. Par laimi Pappa (3. gs.) un Aleksandrijas Teona (4. gs.) darbos ir minēti 14 Zēnodora apgalvojumi. Svarīgākie no tiem:

1) no diviem regulāriem daudzstūriem ar vienādu perimetru lielāks būs tas, kam lielāks leņķu skaits;
3) ja riņķim un regulāram daudzstūrim ir vienāds perimetrs, tad riņķis būs lielāks;
11) no visiem daudzstūriem ar vienādu perimetru un vienādu malu skaitu vislielākais būs regulārs daudzstūris;
14) katrs no pieciem regulāriem daudzskaldņiem mazāks par lodi ar tādu pašu virsmas laukumu.

No 3) un 11) Zēnodors secināja, ka no visām figūrām ar vienādu perimetru vislielākais laukums ir riņķim. Stingru riņķa un lodes optimalitātes pierādījumu 1884. gadā uzrādīja vācu matemātiķis Švarcs (Schwarz K. H. A., 1843-1921) [BB2].

Zēnodora uzdevums

(*Zenodorus,* 3 – 2 gs. p. m. ē., sengrieķu matemātiķis.)

No visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru atrast n-stūri ar vislielāko laukumu. [T, 16. lpp.]

Pirms analizēt vispārīgo gadījumu aplūkosim vairākus atsevišķus uzdevumus un dažādus elementārus paņēmienus, metodes to risināšanā, kā arī sniegsim īsas vēsturiskas ziņas. Ja mērķi var sasniegt, ejot pa vienu ceļu, vai ir vērts iepazīties vēl ar citiem ceļiem? Bieži vien to darīt ir vērts. Vairāku paņēmienu izmantošana, apgūšana viena un tā paša uzdevuma risināšanā var būt noderīga ne tikai redzesloka paplašināšanai vai kā treniņš skolēniem. Svarīgi apzināties, ka kāds no atsevišķā uzdevuma risinājumiem var būt piemērots citu sarežģītāku uzdevumu risināšanā, var kalpot kā atslēga plašiem vispārinājumiem. Kaut gan Zēnodora uzdevums ir matemātikas "klasika", kuru slīpējuši daudzi izcili matemātiķi, tomēr tā risināšanā vēl var atrast jaunas nianses.

Zēnodora uzdevums trijstūrim

Regulāram trijstūrim piemīt šāda izoperimetriskā īpašība:

Izoperimetriskā teorēma trijstūriem. No visiem trijstūriem ar vienu un to pašu perimetru vislielākais laukums ir regulāram trijstūrim.

Kādreiz šo teorēmu pierādīja tā. Pieņemsim, ka ABC ir maksimālais trijstūris ar perimetru *p*. Tad tā visām malām jābūt vienādām. Tiešām, ja AB nav vienāds ar BC, tad var konstruēt vienādsānu trijstūri AB_1C ar to pašu pamatu AC un to pašu perimetru *p*, bet ar lielāku laukumu nekā maksimālajam trijstūrim. Iegūts absurds, proti, ka izoperimetriskajam trijstūrim AB_1C ir vēl lielāks laukums nekā maksimālajam trijstūrim ABC.

Grāmatā [Kr] ir izklāstīti divi šādas izoperimetriskās lemmas pierādījumi.

No diviem dažādiem trijstūriem ar vienādiem pamatiem un vienādām sānu malu summām mazāks laukums ir tam, kuram pieder mazākais un lielākais leņķis no četriem leņķiem pie minētajiem pamatiem.

No šīs lemmas izriet trijstūra AB_1C eksistence.

Lemmu savā 1. metodē, pierādot riņķa izoperimetrisko īpašību izmantoja, vācu matemātiķis J. Šteiners (Steiner J., 1796-1863). Viņš līdz 18 gadu vecumam nebija ieguvis faktiski nekādu izglītību, pat rakstīja ar grūtībām un tomēr, kā raksta D. Križanovskis kļuva par ģeometrijas ģēniju. Labs apstiprinājums teicienam: *mācīties nekad nav par vēlu*.

Aplūkosim vairākus lemmas pierādījumus.

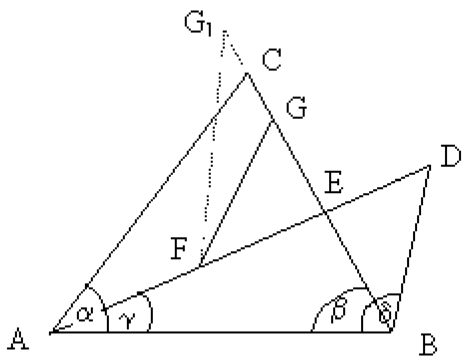
1. pierādījums balstās uz lemmas ģeometrisku ilustrāciju, ko dod elipse, kuras fokusos atrodas trijstūru kopējā pamata galapunkti. Elipsi var definēt kā līkni, kuras patvaļīgam punktam attālumu summa līdz diviem dotiem punktiem (fokusiem) ir nemainīgs lielums.

2. pierādījums ir vienkāršs, bet diezgan garš. Tas veikts ar elementārās ģeometrijas līdzekļiem. Turpmāk dotais pierādījums atšķiras no oriģināla [Kr, 28.-30. lpp.] tikai ar nebūtiskām izmaiņām.

Novietojam trijstūrus ACB un ADB uz kopējā pamata tā, lai garākās abu trijstūru malas izietu no pamata viena un tā paša galapunkta (1. zīm.). Tad attiecīgie trijstūru leņķi ar virsotni A būs mazāki nekā trijstūru leņķi ar virsotni B:

$$\alpha \le \beta,\ \gamma < \delta \quad \text{vai} \quad \alpha < \beta,\ \gamma \le \delta$$

(vienādības zīme attiecas uz to gadījumu, kad viens no trijstūriem ir vienādsānu; abi trijstūri nevar būt vienādsānu nebūdami tajā pašā laikā kongruenti)



1. zīm.

Leņķi a un b nevar būt vienādi, jo pretējā gadījumā trijstūri būtu kongruenti. Pieņemsim, ka $\alpha > \gamma$. Tad $\delta > \beta \ge \alpha > \gamma$, jo trijstūra ADB virsotnei D jāatrodas ārpus trijstūra ACB (pretējā gadījumā perimetri nebūtu vienādi). Tātad pierādīts, ka *vislielākais un vismazākais no četriem leņķiem pie pamata pieder vienmēr vienam un tam pašam trijstūrim*. Pierādīsim, ka tam pašam trijstūrim pieder arī visgarākā un visīsākā mala, t. i., $AD > AC \ge BC > BD$.

Ja $AD = AC$, tad arī $BC = BD$ (jo sānu malu summas vienādas); bet šādā gadījumā trijstūri būtu kongruenti, kas pretrunā ar nosacījumu. Tagad pieņemsim, ka $AD < AC$. Tad, spriežot kā iepriekš, būs $BD > BC$. Pirmā no šīm nevienādībām parāda, ka leņķis ACD mazāks nekā leņķis ADC, bet otrā, – ka leņķis BCD, kas ir tikai leņķa ACD daļa, lielāks nekā leņķis BDC. Bet tas nav iespējams, jo leņķis BDC ir lielāks nekā leņķis ADC. Tātad pierādāmā sakarība starp sānu malām vienmēr patiesa.

Tagad parādīsim, sekojot Šteineram, ka *laukums trijstūrim ADB, kuram saskaņā ar pierādīto, vienlaicīgi ir gan vislielākais un vismazākais leņķis, gan visgarākā un visīsākā mala, ir mazāks nekā laukums trijstūim ACB* (1. zīm.).

Tā kā $\gamma < \beta$, tad $BE < AE$. Tāpēc, ja uz EA atliek Nogriezni $EF = EB$, tad F atradīsies starp A un E. Atliksim uz EC nogriezni $EG = ED$. Punktam G jāatrodas starp E un C. Tiešām, ja G sakristu ar C, tad trijstūri CEF un DEB būtu vienādi un mala CF būtu vienāda ar DB. Bet

$$AC + CB = AD + DB$$

jeb

$$AC + CE + EB = AF + FE + ED + DB;$$

no šejienes, ņemot vērā vienādības

$$CE = ED, \quad EB = EF,$$

dabūjam, ka

$$AC = AF + DB = AF + FC,$$

kas nav iespējams.

Ja punkts G_1, kuram $EG_1 = ED$, atrastos uz EC pagarinājuma punktam C otrā pusē, tad analoģisks spriedums novestu pie absurda rezultāta, ka taisne AC vienāds ar lauztu līniju AF G_1C.
Tā kā trijstūri EDB un EFG ir vienādi, tad laukums trijstūrim ADB vienāds ar trijstūru AEB un EFG laukumu summu, kas kopumā ir tikai daļa no trijstūra ACB, Tātad laukums trijstūrim ADB ir mazāks nekā trijstūrim ACB, kas arī bija jāpierāda.

No pierādītā izriet, ka katram trijstūrim, kurš nav vienādsānu, ir vislielākais un vismazākais leņķis, tāpēc tā laukums ir mazāks nekā vienādsānu trijstūra (ar kopēju pamatu un perimetru) laukums.

3. pierādījums. Kombinējot ģeometriskos un algebriskos līdzekļus uzrādīsim īsāku lemmas pierādījumu.
1. uzdevums. Pierādīt nevienādību

$$(p - x)(p - y) \leq (p - x_1)(p - y_1)$$

ja $x + y = x_1 + y_1$ un y_1 atrodas starp skaitļiem x un y.

Izteiksim $x_1 = x + y - y_1$. Tad jāpierāda

$$(p - x)(p - y) \leq (p - x - y + y_1)(p - y_1)$$
$$(p - x)(p - y - p + y_1) \leq (p - y_1)(y_1 - y)$$
$$(y_1 - y) (p - x - p + y_1) \leq 0$$
$$(y_1 - y)(y_1 - x) \leq 0.$$

Ja neviens no reizinātājiem nav nulle, tad tie ir ar dažādām zīmēm, jo y_1 atrodas starp skaitļiem x un y.

Apzīmēsim (sk., 1. zīm): $AD = a$, $AB = x$, $BD = y$, $AC = x_1$, $BC = y_1$, p un L trijstūra ABD pusperimetrs un laukums. Tad pēc Hērona formulas:

$$L^2 = p(p - a)(p - x)(p - y).$$

Var izmantot 1. uzdevumā pierādīto nevienādību, jo $p(p - a) > 0$, $x + y = x_1 + y_1$ pēc lemmas nosacījuma, bet tas, ka y_1 atrodas starp x un y, izriet no lemmas pierādījuma pirmajā daļā iegūtās nevienādības $AD > AC \geq BC > BD$. Tātad

$$L^2\,(ADB) \leq p(p - a)(p - x_1)(p - y_1) = L^2(ACB).$$

Ievērosim, ka izoperimetriskās teorēmas pierādījumā tika izmantota nevis pati izoperimetriskā lemma, bet sekas no tās, proti, ka *vienādsānu trijstūrim AB_1C ar to pašu pamatu AC un to pašu perimetru p, ir lielāks laukums nekā trijstūrim ADC.* Atzīmēsim, ka nevienādību

$$\text{Laukums}(AB_1C) \geq \text{Laukums}(ADC),$$

kas pastāv starp vienādsānu trijstūri AB_1C un patvaļīgu izoperimetrisku trijstūri ABC, var pierādīt visai īsi un vienkārši, neizmantojot šo lemmu. Taču šai lemmai ir ne tikai vēsturiska nozīme, tā ir noderīga vairāku citu uzdevumu risināšanā. Pirms iepazīties ar turpmāk doto nevienādības pierādījumu (sk. 1. lemmu), pamēģiniet atrast paši savu.

J. Šteiners iepriekš minēto izoperimetriskās teorēmas pierādījumu esot uzskatījis par pareizu un stingru. Tomēr tas viņu nav apmierinājis pilnībā. Viņš norāda: ja doti divi dažādi izoperimetriski trijstūri, viens vienādmalu, bet otrs nē, tad šāds pierādījums nedod iespēju tieši parādīt, ka lielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim. Šai sakarā D. Križanovskis raksta:

"Mēs teiktu, ka uzrādītais pierādījums aizklātā (slēptā) veidā pieņem vislielākā trijstūra ar doto perimetru *eksistenci* un ka tieši šis apstāklis Šteinerā izraisa vajadzību pēc tiešas divu trijstūru – vienādmalu un ne vienādmalu – salīdzināšanas[1)]."

Komentārā 1) viņš atzīmē, ka tomēr nav skaidrs, kā Šteiners varēja būt apmierināts ar teorēmas par riņķi pierādījumu, kurā arī tiek pieņemta meklējamās maksimālās figūras eksistence.

Neņemos apgalvot, ka maksimāla trijstūra eksistence bija tieši tas, kas izsauca zināmu neapmierinātību ar lemmas pierādījumu. Gandrīz droši, ka diskomfortu Šteineram sagādāja tas, ka trijstūra aizstāšana ar vienādsānu trijstūri var nekad nenovest (pēc galīga soļu skaita) līdz vienādmalu trijstūrim. Iedomāsimies, ka mums dots trijstūris ar malām (3; 5; 6). Pirmajā solī aizstāsim šo trijstūri ar vienādsānu trijstūri (4; 4; 6), saglabājot perimetru, bet palielinot laukumu. Tā turpinot, otrajā solī iegūsim trijstūri (4; 5; 5) ar tādu pašu perimetru, bet lielāku laukumu, trešajā solī – (4,5; 4;5, 5), ceturtajā – (4,5; 4,75; 4,75) utt. Var pierādīt, ka tā konstruētā trijstūru virkne tiecas uz vienādmalu trijstūri, turklāt neatkarīgi no sākotnējā trijstūra izvēles. Ideju, kad tiek konstruēta izoperimetrisku vienādsānu trijstūru virkne, katrreiz palielinot (vai vismaz nesamazinot) trijstūra laukumu, ir izmantojis šveiciešu matemātiķis Luljērs (L'Huillier S. A. J., 1750-1840). Tā kā te ir darīšana ar bezgalīgu procesu, korektai idejas realizēšanai vajadzētu izmantot nebūt ne elementāro robežas jēdzienu. Taču šeit nav vajadzības lietot robežas jēdzienu, jo var iztikt ar elementārās matemātikas līdzekļiem. Tāda veida pierādījumus, kuri mūs bezgalīgi tuvina mērķim, bet nekad nenoved pašā mērķī, slavenais vācu matemātiķis L. Dirihlē (Dirichlet P. G. L., 1805-1859) nosauca par *asimptotiskiem* pierādījumiem.

J. Šteiners izdomāja asprātīgu, izteikti ģeometriska rakstura teorēmas pierādījumu, kurā patvaļīgs trijstūris tiek salīdzināts ar vienādmalu trijstūri un pierādīts, ka pēdējam laukums ir lielāks.

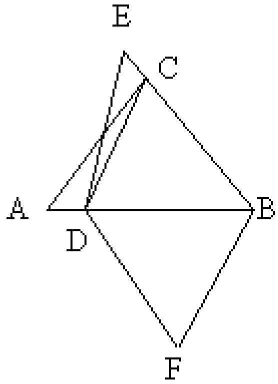
Šteinera pierādījums

Doto trijstūri ar perimetru *p* pārveido par vienādsānu trijstūri ACB saglabājot perimetru un ņemot par pamatu AB garāko (vai vienu no garākajām) dotā trijstūra malu, sk. 2. zīm. Tā kā pamats AB ir garāks par katru no sānu malām, tad tas ir garāks par perimetra trešdaļu. Tāpēc, ja uz pamata atliek nogriezni BD, kas vienāds ar perimetra trešdaļu, tad punkts D atradīsies starp A un B.

Uz malas BC pagarinājuma vienmēr atradīsies tāds punkts E, ka

$$DE + EC = DA + AC,$$

kas nozīmē, ka trijstūru ABC un DEB perimetri ir vienādi.



2. zīm.

Tā kā BC mazāks nekā perimetra trešdaļa, tad BC < BD, tā ka leņķis BDC mazāks nekā leņķis BCD, un tātad leņķis ADC lielāks nekā leņķis DCE, t. i., no diviem izoperimetriskiem trijstūriem ADC un DCE pirmajam ir lielāks leņķis pie pamata. Pēc izoperimetriskās lemmas laukums trijstūrim ADC ir mazāks nekā trijstūrim DCE. Pieskaitot trijstūra DCB laukumu dabūjam, ka laukums trijstūrim ACB mazāks nekā laukums trijstūrim DEB. Tagad konstruējam uz pamata BD vienādmalu trijstūri DFB ar to pašu perimetru *p*. Tā laukums ir lielāks nekā izoperimetriskā trijstūra DEB laukums, jo pamats vienāds ar *p*/3, bet sānu malas vienādas. Tādējādi trijstūris DFB ir vienādmalu un pēc laukuma pārsniedz patvaļīgi izvēlētu izoperimetrisku trijstūri. [Kr, 33-34. lpp.]

Pierādījums, izmantojot Hērona formulu.

Aplūkosim patvaļīgu trijstūri ar uzdotu perimetru. Ja *a, b, c*, trijstūra malas, *p* – pusperimetrs un L laukums, tad pēc Hērona formulas

$$L = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Reizinātāju $(p-a)(p-b)(p-c)$ summa ir nemainīgs lielums, tāpēc šis reizinājums un līdz ar to arī laukums būs vislielākais, ja tie visi būs vienādi, t. i., $a = b = c$, kas arī bija jāpierāda.

Kā redzams, pierādījums ir ļoti īss. Tiesa, tas kļūtu ievērojami garāks, ja to vajadzētu papildināt ar Hērona formulas un faktiski šeit izmantotās nevienādības $G \leq A$ (starp ģeometrisko un aritmētisko vidējo) pierādījumu.

Piezīme. Uzdevumu “Noteikt trijstūri ar doto perimetru 2p, bet maksimālo laukumu” neparastā veidā – ar Lagranža reizinātāju metodi (!) – risinājis E. Leimanis [Lei, 130. lpp.]. Turklāt netiek apspriests jautājums, vai ar šo metodi atrastais punkts dod maksimumu.

Zēnodora uzdevums četrstūrim

Jāpierāda, ka no visiem 4-stūriem ar uzdotu perimetru P vislielākais laukums L ir kvadrātam K.

Ģeometrisks risinājums.

Pierādījumu veiksim pēc klasiskās shēmas, kurā patvaļīgs 4-stūris pakāpeniski tiek pārveidots par lielāku (pēc laukuma) četrstūri, kamēr iegūst kvadrātu. Nevienādību ķēdītes

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) \leq L(a, a, a_3, a_4) \leq L(a, a, b, b) \leq L(c, c, c, c) \leq L(K)$$

iegūšanas mehānisms balstās uz diviem vienkārši pierādāmiem apgalvojumiem, kuri turklāt tiek izmantoti arī citu uzdevumu risināšanā. Nosauksim tos par lemmām.

1. lemma. No visiem trijstūriem ar uzdotu pamatu un pārējo divu malu summu vislielākais laukums ir vienādsānu trijstūrim.
2. lemma. No visiem trijstūriem ar uzdotām divām malām vislielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim.

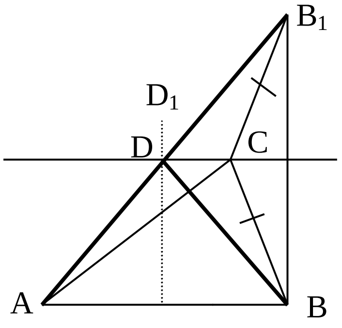
Dosim uzskatāmu lemmu pierādījumu. (Vērīgs lasītājs šo apgalvojumu pareizību var saprast pēc 3.-4. zīmējuma, iztiekot pat bez paskaidrojošās daļas.)

1. Aplūkosim vienādsānu trijstūri AD_1B, kur AB un $AD_1 + D_1B$ ir fiksēti lielumi, sk. 3. zīm. Salīdzināsim šī trijstūra laukumu ar cita trijstūra ACB laukumu, ja pēdējam $AC + CB = AD_1 + D_1B$. Novelkam pamatam AB paralēlu taisni DC. Trijstūra laukums vienāds ar tā pamata un augstuma reizinājuma pusi. Tāpēc trijstūra ACB laukums nav atkarīgs no virsotnes C atrašanās vietas uz šīs taisnes. Vienādsānu trijstūrim ADC perimetrs ir mazāks nekā trijstūrim ACB, jo

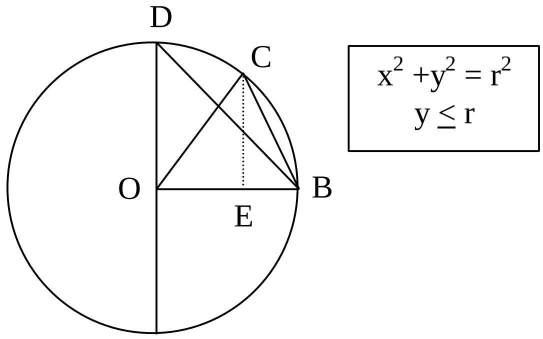
$$AC + CB = AC + CB_1 > AB_1 = AD + DB_1 = AD + DB.$$

Tagad atliek ievērot, ka vienādsānu trijstūra AD_1B laukums ir lielāks par trijstūra ADC laukumu.

2. Aplūkojam patvaļīgu trijstūri ar malām OC un OE_1, kur punkts E_1 atrodas uz nogriežņa OB pa kreisi no B, Šī trijstūra laukums ir mazāks nekā trijstūra COB laukums, sk. 4. zīm. Savukārt trijstūra COB laukums ir mazāks nekā taisnleņķa trijstūra DOB laukums, jo pēdējam ir lielāks augstums. Ievērosim, ka augstums $CE = y \leq r$ kļūst maksimāls tad, kad $y = r$.



3. zīm.



4. zīm.

<u>Piezīme</u>. Lemmu īsi pierādījumi, izmantojot Hērona formulu un nevienādību $G \leq A$ ir doti grāmatas pirmajā daļā.

<u>Algebrisks risinājums, izmantojot 4-stūra laukuma formulu.</u>

Pieņem, ka a, b, c un d ir izliekta 4-stūra ABCD malu garumi, β un δ tā pretējie leņķi un L laukums, sk. 5. zīm. Tad

$$4L = 2ab\sin\beta + 2\mathrm{cd}\sin\delta. \qquad (1)$$

Pēc kosinusu teorēmas

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\beta - 2cd\cos\delta. \qquad (2)$$

Kāpinām (1) un (2) abas puses kvadrātā un saskaitām iegūtās vienādības:

$$16L^2 = 4a^2b^2\sin\beta^2 + 8abcd\sin\beta\sin\delta + 4c^2d^2\sin\delta^2$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2\cos\beta^2 - 8abcd\cos\beta\cos\delta + 4c^2d^2\cos\delta^2.$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2 - 8abcd(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta) + 4c^2d^2$$

Izmantojam formulu divu leņķu summas kosinusam un veicam vienkāršus pārveidojumus.

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2 - 8abcd(\cos(\beta + \delta) + 4c^2d^2$$

$$16L^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\beta + \delta) \qquad (3)$$

$$16L^2 = (2ab + 2cd)^2 - 8abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\beta + \delta)$$

$$16L^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) =$$

$$= (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 16abcd\cos^2\frac{\beta + \delta}{2}$$

$$16L^2 = [(c + d)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - (c - d)^2] - 16abcd\cos^2\frac{\beta + \delta}{2}$$

$$16L^2 = (c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 16abcd\cos^2\frac{\beta + \delta}{2}.$$

Apzīmējam $a + b + c + d = 2p$. Tad

$$16L^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) - 16abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}$$

$$L^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) - 16abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}$$

$$L = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}}. \qquad (4)$$

Iegūta formula četrstūra laukuma aprēķināšanai, kas pēc būtības ir Hērona formulas vispārinājums. No šīs formulas izriet, ka laukums L būs maksimāls tad, kad kosinuss no atbilstošā leņķa būs nulle, t. i.,

$$\cos^2\frac{\beta+\delta}{2} = 0 \Rightarrow \beta+\delta = 180^0.$$

Tātad

$$L \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad (5)$$

Tagad izmantosim nevienādību $G \leq A$, saskaņā ar kuru zemsaknes izteiksme būs maksimāla tad, kad visi 4 reizinātāji vienādi, kas dod :

$$a = b = c = d,$$

$$L \leq (p-a)^2 = (2a-a)^2 = a^2.$$

Līdz ar to esam atrisinājuši Zēnodora uzdevumu 4-stūrim.

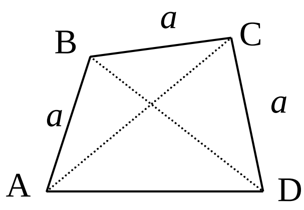
Piezīme. Nosacījumu: $(\beta+\delta) = 180^0$ varēja iegūt ātrāk, sk formulu (3). Tās labā puse būs maksimāla, ja $\cos(\beta+\delta) = -1$.
Piezīme. Formula (4) ir atrodama vairākās grāmatās, sk., piemēram, [Bla, Zet], kur dots arī tās izvedums. Savukārt ļoti akurātais V. Blaške [Bla, 46. lpp.], pierādot formulu četrstūra laukuma F aprēķināšanai:

$$F^2 = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4) - s_1s_2s_3s_4\cos^2\theta,$$

kur $2s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$, bet θ – divu pretējo četrstūra leņķu vidējais aritmētiskais, atsaucas uz 1914. gadā vācu valodā iznākušu grāmatu. Atzīmēsim, ka vācu ģeometra V. Blaškes (1885-1962) ievērojamā grāmata pirmo reizi iznāca 1916. gadā.

Sekas no četrstūra laukuma formulas (4).

- Hērona formula trijstūrim. (Ņemt $d = 0$).
- No visiem 4-stūriem ar uzdotām malām vislielākais laukums ir tam, ap kuru var apvilkt riņķa līniju. (Vispirms secinām, ka maksimālajam četrstūrim pretējo leņķu summa ir 180^0. Tad atsaucamies uz skolas ģeometrijas faktu: ja 4-stūra pretējo leņķu summa ir 180^0, tad ap to var apvilkt riņķa līniju.)
- No visiem četrstūriem ar kopēju pamatu un trīs vienādām malām vislielākais laukums ir vienādssānu trapecei. (Ja četrstūris ABCD, sk. 5. zīm., ir ievilkts riņķī, tad tam ievilktie leņķi CAD un BDA ir vienādi, jo balstās uz vienādām hordām. Tas pats sakāms par leņķiem CAB un BDC.)

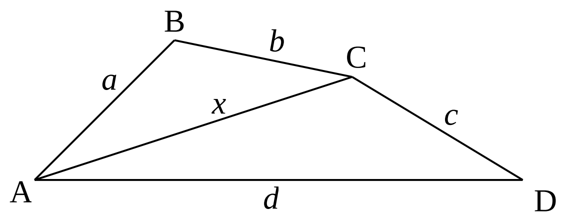


5. zīm.

Vai otrajam secinājumam varat atrast ģeometrisku pierādījumu?

<u>Risinājums, izmantojot Hērona formulu un Košī nevienādību</u>.

Izteiksim četrstūra laukumu L pēc Hērona formulas kā divu trijstūru laukumu summu, sk. 6. zīmējumu.



6. zīm.

$$4\mathrm{L}_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b)} =$$

$$=\sqrt{[(a+b)^2-x^2)]\,[(x^2-(a-b)^2]}$$

$$4\mathrm{L}_{\mathrm{ACD}} = \sqrt{(c+d+x)(c+d-x)(x+d-c)(x-d+b)} =$$

$$\sqrt{[(c+d)^2-x^2)]\,[(x^2-(c-d)^2]}$$

$$4\mathrm{L} = \sqrt{[(x^2-(a-b)^2][(a+b)^2-x^2)]} + \sqrt{[(c+d)^2-x^2)]\,[(x^2-(c-d)^2]}$$

Lietosim Košī nevienādību $xu + yv \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$:

$$4\mathrm{L} \le \sqrt{[(x^2-(a-b)^2+(c+d)^2-x^2)]\,[(a+b)^2-x^2+x^2-(c-d)^2]} = \qquad (*)$$

$$= \sqrt{[(c+d)^2-(a-b)^2+]\,[(a+b)^2-(c-d)^2]}$$

Līdz ar to citā veidā un nedaudz īsāk esam ieguvuši jau minēto nevienādību, sk. (5).

$$4\mathrm{L} \le \sqrt{(c+d+a-b)(c+d-a+b)(a+b+c-d)(a+b-c+d)} \qquad (**)$$

Četru reizinātāju summa ir konstants lielums (divkāršots 4-stūra perimetrs), tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja tie visi būs vienādi, t. i., $a = b = c = d$. Košī nevienādība kļūst par vienādību, ja $xv = uy$. Izmantojot šo proporcionalitātes nosacījumu no (*) dabūjam $x = a\sqrt{2}$, kas nozīmē, ka leņķis starp maksimālā 4-stūra malām AB un BC, kā arī starp CD un DA ir taisni. (Te varēja izmantot arī faktu, ka no trijstūriem ar uzdotām divām malām vislielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim.) Tātad no visiem četrstūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir kvadrātam.

<u>Sekas</u>.

Starp četrstūra laukumu L(a, b, c, d) un pusperimetru $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ pastāv nevienādība

$$L(a, b, c, d) \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$

Zēnodora uzdevums sešstūrim

Jāpierāda, ka no visiem izoperimetriskiem 6-stūriem vislielākais laukums L ir regulāram 6-stūrim R.

Izoperimetrisko problēmu 6-stūrim risināsim pēc shēmas:

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4\,, a_5, a_6) \leq L(a, a, b, b, c, c) \leq 2L(a, b, c,) \leq L(R).$$

Pirmā nevienādība izriet no 1. lemmas, kuras "realizācija" atspoguļota 7. zīmējumā. No patvaļīga 6-stūra ABCDEF, nepalielinot tā perimetru un saglabājot ar raustīto līniju attēlotos nogriežņus, iegūstam 6-stūri $AB_1CD_1EF_1$, kam $AB_1 = B_1C$, $CD_1 = D_1E$, $EF_1 = F_1A$. Nākamajā solī 6-stūrī $AB_1CD_1EF_1$ apgāžam trijstūri D_1EF_1. Iegūtajam 6-stūrim $AB_1CF_1DE_1$ saglabājas gan laukums, gan perimetrs. Kaut gan laukums nav palielinājies, tomēr tas nenozīmē, ka 2. pārveidojums ir bijis bez jēgas. Pēc šī pārveidojuma tiek iegūts 6-stūris, kas sastāv no diviem vienādiem 4-stūriem. Tas nozīmē, ka ir pamatota otrā nevienādība

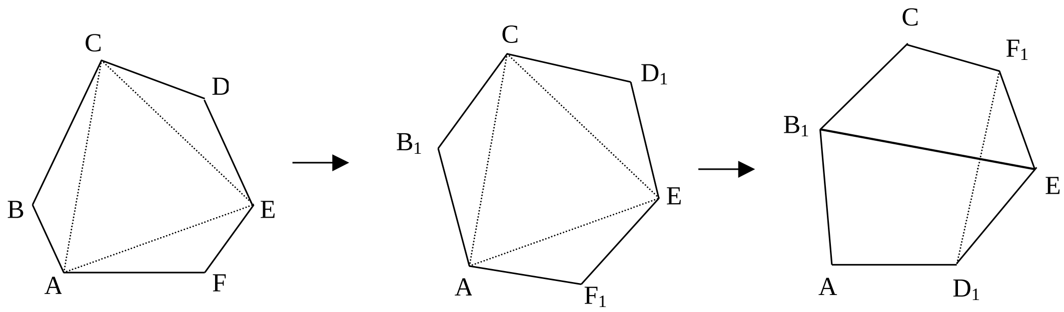
$$L(a, a, b, b, c, c) \leq 2L(a, b, c,).$$

Izoperimetrisko problēmu 6-stūrim esam reducējuši uz tāda maksimālā 4-stūra meklēšanu, kam uzdota trīs malu summa. Tagad pierādīsim lemmu, no kuras izriet, vajadzīgais rezultāts, proti, ka no visiem 6-stūriem ar uzdotu perimetru, maksimālais laukums ir regulāram 6-stūrim.

Lemmas par vienādsānu trapeci

L1. *No visiem* 4-*stūriem ar uzdotu trīs malu summu vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei – regulāra* 6-*stūra pusei.*

L2. *No visiem* 4-*stūriem ar uzdotu pamatu un trīs vienādām malām vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei.*



7. zīm.

<u>Algebrisks pierādījums</u>. Meklējamā 4-stūra (6. zīm.) malu garumus apzīmēsim ar a, b, c un d un uzskatīsim, ka dota malu AB, BC un CD summa: $a + b + c = 3s$. Tad saskaņā ar iepriekš iegūtajām Sekām

$$L(a, b, c, d) \le \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Zemsaknes izteiksmē pirmo trīs reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc šī izteiksme būs maksimāla tad, kad tie visi ir vienādi, t. i.,

$$p - a = p - b = p - c \Rightarrow \ a = b = c = s \Rightarrow$$

$$p - a = \frac{a+b+c+d}{2} - a = \frac{3s+d}{2} - s = \frac{s+d}{2}$$

$$p - d = \frac{a+b+c+d}{2} - d = \frac{3s-d}{2}$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \le \sqrt{\frac{s+d}{2}\cdot\frac{s+d}{2}\cdot\frac{s+d}{2}\cdot\frac{3s-d}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{48}(s+d)(s+d)(s+d)(9s-3d)}.$$

Zemsaknes izteiksmē četru reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja tie visi būs vienādi:

$$s + d = 9s - 3d \Rightarrow \ 4d = 8s \ \Rightarrow \ d = 2s.$$

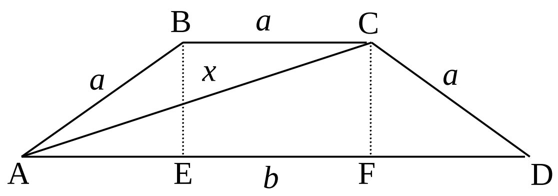
$$L(a, b, c, d) \le \sqrt{\frac{1}{48}}(s+d)^2 = \sqrt{\frac{1}{48}}(s+2s)^2 = \frac{9s^2}{\sqrt{48}} = \frac{3\sqrt{3}s^2}{4}.$$

Tātad nevienam 4-stūrim laukums nav lielāks kā regulāra 6-stūra pusei.

Aprēķināsim laukumu vienādsānu trapecei, sk. 8. zīm.

$$AE = FD = \frac{b-a}{2}$$

$$CF^2 = CD^2 - FD^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2-(b-a)^2}{4}.$$



8. zīm.

$$L = \frac{a+b}{2}CF = \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{4a^2-(b-a)^2}{4}} \Rightarrow$$

$$4L = (a+b)\sqrt{4a^2-(b-a)^2} = (a+b)\sqrt{(3a-b)(a+b)}$$

Tātad vienādsānu trapeces gadījumā nevienādība kļūst par vienādību. No šī risinājuma pagaidām nav skaidrs, vai trapece ir vienīgā figūra ar maksimālo laukumu. Lai to uzzinātu, atgriezīsimies pie izmantotās nevienādības un noskaidrosim, kad tā kļūst par vienādību. Vienlaicīgi iegūsim otrās lemmas pierādījumu, proti, ka

$$L(a, a, a, b) \leq L(\text{vienādsānu trapecei}).$$

Izteiksim 4-stūra ABCD laukumu kā divu trijstūru laukumu summu, sk. 8. zīmējumu. Trijstūriem ABC un CDA laukumu var aprēķināt pēc Hērona formulas.

$$4L(a, a, a, b) = \sqrt{x^2(4a^2-x^2)} + \sqrt{[(a+b)^2-x^2)][(x^2-(a-b)^2]} \leq$$

$$\leq \sqrt{x^2+[(a+b)^2-x^2)} \cdot \sqrt{(4a^2-x^2)+[(x^2-(a-b)^2]} =$$

$$(a+b)\sqrt{4a^2-(b-a)^2} = 4L(\text{trapecei}).$$

Šeit lietota Košī nevienādība $xu + yv \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$. Tā kļūst par vienādību, tikai tad, ja x : u = y : v (proporcionalitātes nosacījums):

$$x : u = y : v \Leftrightarrow xv = yu \Leftrightarrow x^2v^2 = y^2u^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2[x^2 - (a-b)^2] = [(a+b)^2 - x^2](4a^2 - x^2)$$

$$x^4 - x^2(a-b)^2 = (a+b)^2(4a^2 - x^2) - 4a^2x^2 + x^4$$

$$-x^2(a-b)^2 = (a+b)^2(4a^2 - x^2) - 4a^2x^2$$

$$x^2[4a^2 + (a+b)^2 - (a-b)^2] = 4a^2(a+b)^2$$

$$x^2(4a^2 + 4ab) = 4a^2(a+b)^2$$

$$x^2 = a(a+b).$$

Tagad atliek ievērot, ka 4-stūris, kuram četras malas ir *a*, *a*, *a*, *b* un diagonāle ar tikko atrasto garumu, nosakāms viennozīmīgi. Šis 4-stūris nav nekas cits kā vienādsānu trapece. Tai diagonāles garums ir, sk. 8. zīmējumu:

$$AC^2 = AF^2 + FC^2$$

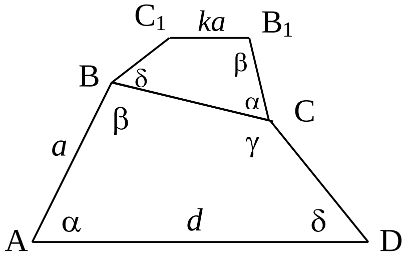
$$AF = b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2},\ CF^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 - (b-a)^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{4a^2 - (b-a)^2}{4} = a(a+b).$$

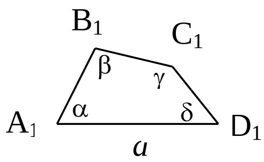
Tātad trapece ir vienīgais maksimālais četrstūris abās lemmās.

<u>L2 ģeometrisks pierādījums</u>.

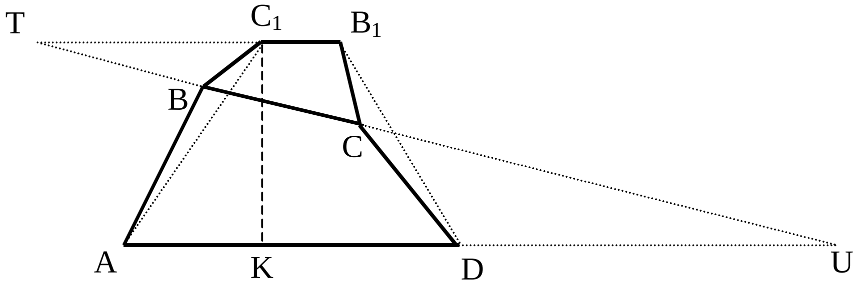
Četrstūri ABCD papildināsim līdz vienādsānu trapecei AC_1B_1D, veicot šādu konstrukciju (9.-11. zīm.):



9. zīm



10. zīm



11. zīm.

1) Izveidojam ABCD samazinātu kopiju $A_1B_1C_1D_1$ tā, lai garākā mala AD pēc samazināšanas sakristu ar BC. Citiem vārdiem, ņemam četrstūrim ABCD līdzīgu četrstūri $A_1B_1C_1D_1$ ar malām *kd, ka , ka, ka,* kur līdzības koeficients *k* izraudzīts tā, lai $kd = a$.

2) Četrstūri $A_1B_1C_1D_1$ pievienojot sākotnējam četrstūrim ABCD iegūstam daudzstūri ABC_1B_1CD. Malas AD un C_1B_1 ir paralēlas, jo krustleņķi T un U, kādos taisne BC krusto taisnes AD un B_1C_1 ir vienādi (ar $180^0 - \alpha - \beta$).

3) Trijstūri ABC_1 un DCB_1 ir vienādi, jo tiem starp divām vienādām malām atrodas vienādi leņķi: leņkis $B_1CD = 360^0 - \alpha - \gamma = \beta + \delta$.

Trapecei laukums vienāds ar pamatu pussumas (viduslīnijas) un augstuma *h* reizinājumu. Trapecei AC_1B_1D viduslīnijas garums $(d + ak)/2$ ir nemainīgs lielums. Lai iegūtu maksimālo laukumu, jāņem iespējami liels augstums h. Ievērosim, ka palielinot vienādsānu trapeces sānu malas garumu, vienlaicīgi palielinās arī augstums. Tā kā AC_1 garums nepārsniedz malu AB un BC_1 garumu summu, tad maksimālo malas garumu trapecei AC_1B_1D dabū, "iztaisnojot" leņķi ABC_1, t. i., ņemot $\beta + \delta = 180^0$.

Piezīme. Šo secinājumu var iegūt arī, lietojot Pitagora un kosinusu teorēmu:

$$h^2 = |AC_1|^2 - |AK|^2$$

$$h^2 = a^2 + (ka)^2 - 2ka^2\cos(\beta+\delta) - \left(\frac{d-ka}{2}\right)^2$$

No šejienes redzams, ka trapeces augstums h būs maksimāls, ja $\cos(\beta + \delta) = -1$.

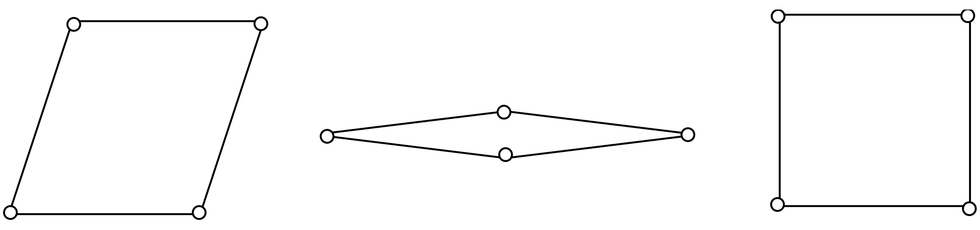
Tātad maksimālajam četrstūrim pretējo leņku summas ir vienādas un līdz ar to ap maksimālo četrstūri var apvilkt riņķa līniju. Nosacījums, ka pretējo leņku summas ir vienādas kopā ar nosacījumu, ka četrstūrim trīs malas ir vienādas, dod vajadzīgo rezultātu, ka ABCD būs vienādsānu trapece.

Pamēģiniet šo ģeometrisko pierādījumu piemērot vispārīgam gadījumam, lai pierādītu, ka no visiem četrstūriem ar uzdotiem malu garumiem vislielākais laukums ir tam, ap kuru var apvilkt riņķa līniju.

Četru šarnīru metode

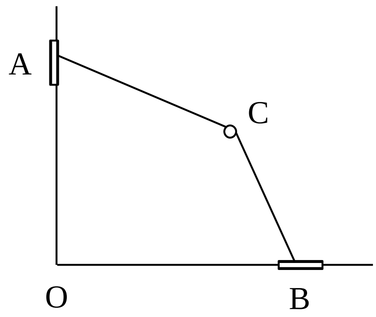
Mehānikā ar šarnīru (locīklu) saprot kāda mehānisma atsevišku daļu tādu savienojumu, ka viena daļa var rotēt attiecībā pret otru. Kā piemērus, kur lieto šarnīra savienojumus var minēt logu, durvju viras; šķēres, dažādus cirkuļus, satvērējus utt.

Kā ļoti vienkāršu konstrukciju ar četriem šarnīriem varam iztēloties rombu, kur šarnīru lomā būs tā virsotnes. (12. zīm.). Trijstūri var viennozīmīgi uzdot ar trīs malām, bet pārējo daudzstūru viennozīmīgai raksturošanai ar malu garumiem vien vēl nepietiek. Nemainot malu garumus, bet mainot leņķus var iegūt dažādas formas rombus (12. zīm.). Kā zināms, maksimālo rombu (pēc laukuma) iegūst tad, ja visi tā leņķi kļūst taisni. Turpmāk aplūkotajā šarnīru metodē taisnam leņķim ir būtiska nozīme.



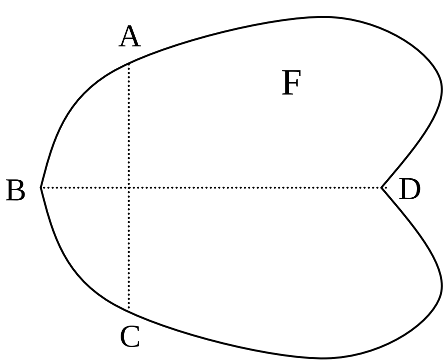
12. zīm.

Nav jādomā, ka kustīgās konstrukcijās jābūt vismaz četriem šarnīriem. Piemēram, 13. zīmējumā redzamajā konstrukcijā ir tikai viens šarnīrs – punktā C. Turklāt uzdevums noteikt leņķi starp malām AB un BC, lai laukums OACB būtu maksimāls, nebūt nav triviāls. Atrisiniet uzdevumu, pieņemot, ka leņķis O taisns un ka stieņu AC un BC, kas savienoti ar šarnīru punktā C, gali A un B var slīdēt attiecīgi pa taisnēm OA un OB.

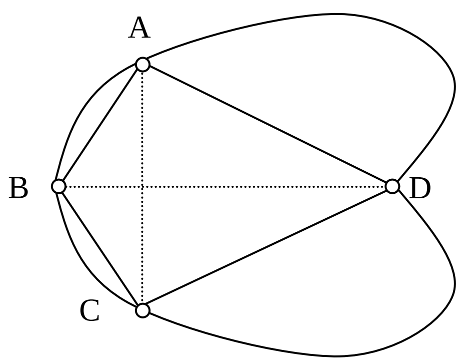


13. zīm.

Šteiners ieteica vienkāršu ģeometrisku konstrukciju, kura ļauj palielināt plaknes figūras (ja vien tā nav riņķis) laukumu, saglabājot tās perimetru. Tā kā šajā konstrukcijā izmanto 4 šarnīrus, to mēdz saukt par *četru šarnīru Šteinera metodi*. Tās saturu ilustrēsim, aplūkojot kādu simetrisku figūru F, piemēram kā 14. zīmējumā. Uz figūras F robežas izvēlas kādu punktu A, lai leņķis BAD nebūtu taisns. Tad simetrijas ass galapunktos, punktā A un tam simetriskajā (pret BD) punktā C "novieto" šarnīrus (15. zīm.). Mainot šarnīru četrstūrim leņķus, mainās tā laukums, bet apskatāmās figūras F daļai ārpus šī četrstūra saglabājas gan laukums, gan perimetrs. Četrstūra ABCD laukums palielinās vienlaicīgi ar trijstūra ABD laukumu. Bet trijstūrim BAD ar fiksētām malām AB un AD laukums būs vislielākais tad, ja leņķis A būs taisns. Tātad tiklīdz no kāda punkta figūras simetrijas ass redzama leņķī, kas nav taisns, tā figūras laukumu iespējams palielināt.



14. zīm.

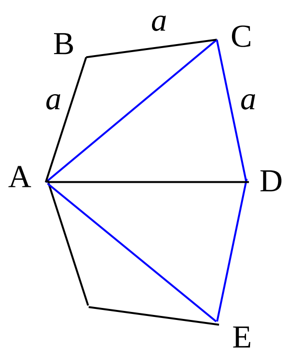


15. zīm.

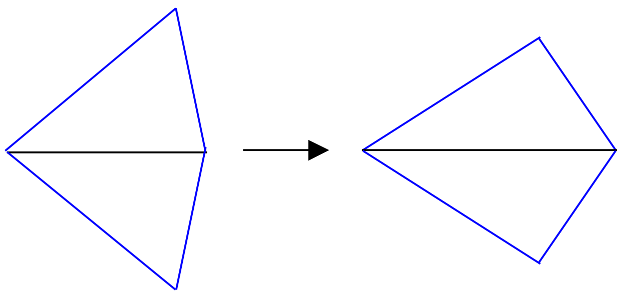
Piezīme. Kā rīkoties, ja sākotnējai figūrai nav nevienas simetrijas ass? Pavisam vienkārši. Šādā gadījumā veic nelielus priekšdarbus. Figūru pārveido par simetrisku figūru, saglabājot perimetru un palielinot tās laukumu. Pēc Šteinera figūras simetrizāciju veic izvēloties uz līknes (figūras robežas) divus punktus, kuri perimetru sadala vienādās daļās un savieno šos punktus ar hordu. Horda figūru F sadala divās daļās, kas var atšķirties pēc laukuma. Izvēlas to daļu, kurai laukums lielāks un izveido simetrisku figūru, kura sastāv no izvēlētās daļas un tās spoguļattēla. Šteinera figūras laukuma palielināšanas metode ir publicēta darbā [Steiner, Gesammelte Werke, Berlin, 1882, 2. sēj.]

Izmantojot četru šarnīru metodi un nevienādību $G \leq A$ uzrādīsim vēl vienu lemmas L2 pierādījumu. Ievērosim, ka L2 apgalvojums ir līdzvērtīgs šādam:
No visiem vienādmalu sešstūriem ar uzdotu malu vislielākais laukums ir regulāram sešstūrim.

Pierādījums. Ja četrstūris ABCD nav vienādsānu trapece, tad tam vismaz viens no leņķiem ABD vai ACD nav taisns. (Ja abi šie leņķi ir taisni, tad trijstūri ABD un ACD ir vienādi kā taisnleņķa trijstūri ar vienādām katetēm. Līdz ar to leņķi BAD un CDA ir vienādi). Attēlosim četrstūri ABCD simetriski pret pamatu AD (16. zīm.). Uzskatīsim, ka leņķis ACD nav taisns. Tad iedomāsimies, ka četrstūra ACDE virsotnēs ir šarnīri. Kādā stāvoklī jāatrodas četrstūra ACDE malām, lai tā laukums būtu vislielākais? Tā kā trijstūrim ar divām fiksētām malām (AC un CD) laukums ir vislielākis tad, kad leņķis starp šīm malām ir taisns, tad ACDE (tas sastāv no diviem vienādiem trijstūriem) būs maksimāls, ja leņķis ACD ir taisns (17. zīm.)



16. zīm.



17. zīm.

Pēc šāda pārveidojuma jaunajam sešstūrim malu garumi ir tie paši, bet laukums lielāks. Turklāt jaunais sešstūris ir “tuvāks” regulāram (salīdzinājumā ar iepriekšējo) tai ziņā, ka leņķi ACD un AED ir taisni. leņķi. (Ievilkti leņķi, kas balstās uz riņķa līnijas diametru ir taisni.) Ja leņķis ABD nav taisns, tad aprakstīto procedūru principā var atkārtot

vēlreiz. Diemžēl tas "izbojās" iepriekš saniegto – leņķis ACD vairs nebūs taisns.
Tagad risināsim uzdevumu:
No visiem četrstūriem ABCD *ar trīs vienādām malām un un taisnu leņķi* ACD *atrast maksimālo.*
Apzīmēsim leņķa B pusi ar β un cosβ ar u. Tad

$$L = L_{ABCD} = L_{ABC} + L_{CDA}$$

$$L = \frac{1}{2}a^2 \sin B + a^2 \sin \frac{B}{2} = a^2(\sin\beta\cos\beta + \sin\beta)$$

Lai noteiktu funkcijas g := sinβcosβ + sinβ = sinβ(cosβ + 1) maksimumu, ērti aplūkot tās kvadrātu. (funkcija g sasniedz maksimumu turpat kur g^2, jo visiem pieļaujamiem argumentiem $g \geq 0$).

$$g^2 = \sin^2\beta(\cos\beta + 1)^2 = (1 - \cos^2\beta)(\cos\beta + 1)^2$$

$$g^2 = (1 - u)(1 + u)^3$$

$$3g^2 = (3 - 3u)(1 + u)(1 + u)\ )(1 + u).$$

Četru pozitīvu reizinātāju summa ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja tie visi vienādi.

$$3 - 3u = 1 + u$$

$$u = \cos\beta = 0{,}5.$$

Tā kā β ir šaurs leņķis, tad tas ir vienāds ar 60 grādiem. Tātad leņķis B vienāds ar 120 grādiem, kas arī bija vajadzīgs.

Zēnodora uzdevums piecstūrim

Jāpierāda, ka no visiem izoperimetriskiem 5-stūriem vislielākais laukums L ir regulāram 5-stūrim R.
Aplūkojamais uzdevums piecstūrim salīdzinājumā ar sešstūri, šķiet, ir "cietāks rieksts", vismaz ar iepriekš lietotajiem paņēmieniem vien neizdodas pārkost šo riekstu.

Pirmkārt, ja pierādījumu veic pēc shēmas

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \leq L(a_6, a_6, a_3, a_4, a_5) \leq L(a_6, a_6, a_7, a_7, a_5) \leq$$
$$\leq L(b, b, b, b, c) \leq L(a, a, a, a, a) \leq L(R),$$

tad nepieciešama jauna ideja, lai pamatotu, ka maksimālajam piecstūrim visas malas būs vienādas. Aizstājot divas blakusesošās malas ar divām vienādām malām (saglabājot to summu), mēs varam iegūt piecstūri ar četrām vienādām malām (piemēram, pēc 6. zīm. dotā parauga). Šāds malu vienādošanas process, vispārīgi runājot, nekad var nenovest līdz mērķim – vienādmalu daudzstūrim. Sešstūrim problēmu izdevās atrisināt elementārā veidā, jo sešstūri varējām aizstāt ar diviem vienādiem noteikta tipa četrstūriem sk. 3. lemmu.

Otrkārt, arī tad, ja mēs zinām, ka piecstūrim visas malas ir vienādas, vēl ir jāpārvar grūtības, lai pierādītu, ka arī visiem leņķiem jābūt vienādiem.

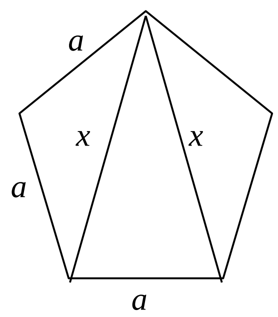
Nevienādības L(a, a, a, a, a) $\le$ L(R) pierādījums

Vispirms ievērosim, ka pietiek aplūkot tikai tādus vienādmalu piecstūrus, kuriem leņķi pie pamata vienādi, jo
No visiem četrstūriem ar kopēju pamatu un trīs vienādām malām vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei. (sk., piemēram, sekas no 4-stūra laukuma formulas; apgalvojuma daži citi pierādījumi aplūkoti turpmāk.)

Izteiksim piecstūra (sk. 18. zīm.) laukumu kā trīs trijstūru laukumu summu.

$$\mathrm{L}(a,a,x)=\frac{x}{4}\sqrt{4a^2-x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{L}=\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}+\frac{a}{4}\sqrt{4x^2-a^2}$$



18. zīm.

Novērtēsim laukuma L izteiksmes katru locekli, izmantojot ļoti vienkāršu nevienādību.

$$(ku-v)^2 \ge 0 \Rightarrow 2uv \le ku^2+\frac{v^2}{k}, \ k>0.$$

$$4\mathrm{L}=2x\sqrt{4a^2-x^2}+a\sqrt{4x^2-a^2}=2(px)\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{p}+aq\cdot\frac{\sqrt{4x^2-a^2}}{q}\le$$

$$\le (px)^2+\frac{4a^2-x^2}{p^2}+\frac{a^2q^2}{2}+\frac{4x^2-a^2}{2q^2}=\left(p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{q^2}\right)x^2+\left(\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)a^2$$

Izvēlēsimies šādus p un q:

$$p^2=\sqrt{5-\sqrt{20}}$$
$$q^2=\sqrt{5+\sqrt{20}}\,.$$

Kāpēc tāda nebūt ne acīmredzama, ja ne mistiska, izvēle? Noslēpums drīz tiks atklāts. Pirmkārt, skaitļi p un q ir ņemti tā, lai koeficients pie x^2 būtu nulle. Ievērosim, ka

$$p^2q^2=\sqrt{5}, \quad q^4=5+\sqrt{20},$$

un veiksim vienkāršu pārbaudi

$$p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{q^2}=0$$

$$p^2+\frac{2}{q^2}=\frac{1}{p^2}$$

$$p^2q^2+2=\frac{q^2}{p^2}$$

$$p^2q^2+2=\frac{q^4}{p^2q^2}$$

$$5+2\sqrt{5}=5+\sqrt{20}\,.$$

Otrkārt, skaitļus p un q vajadzētu izraudzīties tā, lai izdarītais novērtējums būtu precīzs jeb lai atlikušais loceklis

$$\left(\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)a^2$$

sakristu ar regulāra piecstūra laukumu. Vai to vispār var panākt? Jā, var! Par to liecina samērā vienkārša pārbaude. Ir spēkā

$$\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}=\frac{5}{p^2}\,.$$

Tiešām,

$$\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}=\frac{5}{p^2}\Leftrightarrow\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}=\frac{1}{p^2}\Leftrightarrow\frac{q^4-1}{2q^2}=\frac{1}{p^2}$$

$$q^4p^2-p^2=2q^2\Leftrightarrow q^4p^4-p^4=2q^2p^2\Leftrightarrow 5-(5-\sqrt{20})=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{20}=\sqrt{20}\,.$$

Vēl jāpierāda, ka $\frac{5a^2}{p^2}=4\mathrm{L(R)}$, t. i., ka vienādības kreisā puse nav nekas cits kā regulāra piecstūra laukums. Aprēķināsim L(R) kā piecu vienādu trijstūru laukumu summu. Ja trijstūra pamats ir *a* un augstums *h*, tad

$$\mathrm{L}=5\frac{ah}{2},\ h:\frac{a}{2}=\mathrm{ctg}36^0\Rightarrow h=\frac{a}{2}\mathrm{ctg}36^0\Rightarrow\mathrm{L(R)}=\frac{5a^2\mathrm{ctg}36^0}{4}=\frac{5a^2}{4\mathrm{ctg}54^0}\,.$$

No vienādības $\frac{5a^2}{\sqrt{5-\sqrt{20}}}=\frac{5a^2}{\mathrm{ctg}54^0}$ secinām, ka jābūt

$$\mathrm{ctg}54^0=\sqrt{5-\sqrt{20}}.$$

Pirmajā brīdī, šķiet, pārsteidzoši, ka $\mathrm{ctg}54^0$ iespējams izteikt ar kvadrātsakņu palīdzību. Kā var pārliecināties par iegūtās sakarības $\mathrm{ctg}54^0=\sqrt{5-\sqrt{20}}$ pareizību? “Pārliecība”, ko dos kalkulators vai dators, izskaitļojot abiem lielumiem vairākus ciparus aiz komata (0,7265425280...) vēl nav stingrs pierādījums. Formulu krājumos trigonometrisko funkciju vērtības, kā likums, tiek dotas tikai leņķiem, kuri ir 15 grādu daudzkārtņi (30, 45, 60, 75, 90). Patīkams izņēmums ir formulu krājums [CC]. Tajā [107. lpp.] ir dotas visu četru trigonometrisko funkciju (sin, cos, tg un ctg) vērtības 18, 36, 54, 72 grādu lieliem leņķiem. To skaitā:

$$\sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \cos 54^0 = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\quad \mathrm{tg}54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\quad \mathrm{ctg}54^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Pārbaudīsim, vai abas ctg 54^0 izteiksmes sakrīt.

$$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5-\sqrt{20}} \Leftrightarrow 10-2\sqrt{5} = (5-\sqrt{20})(\sqrt{5}+1)^2$$

$$10-2\sqrt{5} = (5-\sqrt{20})(2\sqrt{5}+6) \Leftrightarrow 10\sqrt{5}+30-20-6\sqrt{20}$$

$$10-2\sqrt{5} = 10+10\sqrt{5}-12\sqrt{5}.$$

Zēnodora problēmas risinājums vēl nav pilnīgs, jo tika pieņemts, ka piecstūrim visas malas ir vienādas. Lemma par malu vienādību tiks pierādīta pēc komentāriem, turklāt vispārīgā gadījumā.

Risinot izoperimetrisko problēmu piecstūrim, kā blakus rezultātu esam ieguvuši vienkāršāku, "kompaktāku" formulu $\mathrm{ctg}54^0 = \sqrt{5-\sqrt{20}}$ salīdzinājumā ar iepriekš aplūkoto.

Komentāri. Ir vairāki paņēmieni, kā ar kvadrātsakņu palīdzību izteikt trigonometrisko funkciju vērtības leņķiem, kuri ir 18 grādu daudzkārtņi. Viens no tiem pamatojas uz trigonometrisko pārveidojumu izmantošanu, kuru rezultātā tiek iegūts kvadrātvienādojums attiecībā pret meklējamo vērtību.
Apzīmē $x = 18^0$. Tad

$$\cos(4x + x) = 0$$
$$\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x = 0$$
$$\cos 4x \cos x - 2\sin 2x \cos 2x \sin x = 0$$
$$\cos 4x \cos x - 4\sin x \cos x \cos 2x \sin x = 0$$
$$\cos 4x - 4\sin^2 x \cos 2x = 0$$
$$2\cos^2 2x - 1 - 2(1 - \cos 2x)\cos 2x = 0$$
$$4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 1 = 0.$$
$$\cos 2x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

Saskaņā ar apzīmējumu $\cos 2x = \cos 36^0$ ir pozitīvs skaitlis. Tāpēc

$$\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Izmantojot šo formulu, dabūtu

$$ctg54^0 = \frac{\cos 54^0}{\sin 54^0} = \frac{\sin 36^0}{\cos 36^0} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 36^0}}{\cos 36^0} = \frac{4\sqrt{16-(1+2\sqrt{5}+5)}}{4(1+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{(1+\sqrt{5})}.$$

<u>Zelta griezuma izmantošana</u>. Zelta griezuma skaitlis Φ (lieto arī citus apzīmējumus)

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ir viena no matemātikas fundamentālajam konstantēm, kurai ir veltītas pat veselas grāmatas, sk., piemēram, [Vas]. Šeit aprobežosimies tikai ar vienu šī slavenā skaitļa izmantošanas aspektu. Aplūkosim trijstūri, kāds redzams 19. zīmējumā. Tāds zīmējums, nepamatojot tā korektumu, ir dots grāmatā [Vas]. Ja pamata garums ir Φ un leņķi pie pamata 72 grādi, tad kāpēc DE = 1?

Novelkot leņķa A bisektrisi AE, iegūst vienādsānu trijstūri ABE. Tā kā AE = EB un AE = AC = Φ , tad arī AE = AC = Φ. DE, kas novilkts paralēli pamatam AC, garumu apzīmēsim ar v. Tad no trijstūru ABC un DBE līdzības

$$\frac{\Phi}{v} = \frac{v+\Phi}{\Phi} \Rightarrow \Phi^2 = v^2 + v\Phi .$$

No šejienes un vienādības

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

izriet

$$v^2 + v\Phi - \Phi - 1 = 0 \ \Rightarrow (v-1)(v+\Phi) = 0.$$

Tā kā v + Φ > 0, tad v = 1, kas arī bija jāpamato.

Papildinām 19. zīmējumu, novelkot tajā DF perpendikulāri AE (20. zīm.) Tad

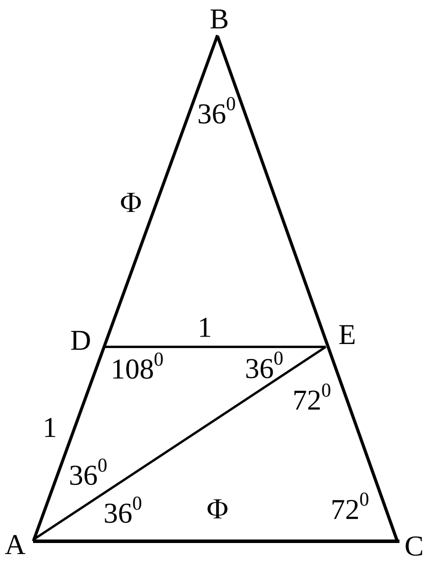
$$\frac{FE}{DE} = \cos 36^0 \ \Rightarrow \frac{\Phi}{2} = \cos 36^0 .$$

Vēl pierādīsim, ka $\mathrm{ctg}54^0 = \sqrt{5-\sqrt{20}}$. Ērtākai aprēķinu veikšanai lietderīgi izmantot pārveidojumus:

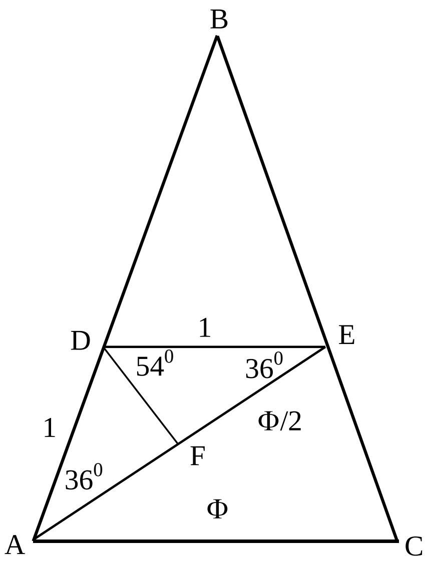
$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \Rightarrow \frac{1}{\Phi^2} = (\Phi-1)^2 = 2 - \Phi$$

$$\mathrm{ctg}^2 54^0 = \frac{DF^2}{FE^2} = \frac{1-FE^2}{FE^2} = \frac{4}{\Phi^2} - 1 = 4(2-\Phi) - 1 = 7 - 4\Phi = 5 - 2\sqrt{5} .$$

Funkcija, kas izsaka piecstūra laukumu nav vienkārša. Tiem, skolēniem vai studentiem, kuri zina atvasinājumu, ieteicams izmēģināt savus spēkus šīs funkcijas maksimuma atrašanā.



19. zīm.



20. zīm.

Trijstūrus ar leņķiem (36^0, 36^0, 108^0) un (36^0, 72^0, 72^0) mēdz saukt par zelta trijstūriem. No zelta trijstūra nogriežot zelta trijstūri, atkal var iegūt zelta trijstūri.

Zinot trigonometrisko funkciju vērtības 15 un 18 grādu daudzkārtņiem, var iegūt šo funkciju vērtības 3 grādu daudzkārtņiem.

<u>Par minimizācijas uzdevumu</u>.

$$\min\left(\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)=?\text{, pie nosacījuma } p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{q^2}=0\,.$$

Tiešā ceļā sasniegt šo mērķi ar mūsu rīcībā esošajiem līdzekļiem būtu visai apgrūtinoši. Tāpēc izmantosim "mazas viltības". Ievērosim, ka lietotā nevienādība

$$2uv \le ku^2+\frac{v^2}{k}$$

pārvēršas par vienādību tikai tad, kad

$$ku=v \quad\Rightarrow\quad ku^2=\frac{v^2}{k}\,,$$

t. i., kad labās puses abi saskaitāmie ir vienādi. Tas nozīmē, ka laukuma izteiksmes novērtējumā vienādība varēs pastāvēt tikai tad, kad

$$(px)^2=\frac{4a^2-x^2}{p^2},\qquad \frac{a^2q^2}{2}=\frac{4x^2-a^2}{2q^2}$$

jeb

$$p^2x=\sqrt{4a^2-x^2},\;\; aq^2=\sqrt{4x^2-a^2}\,.$$

Regulāram piecstūrim leņķis starp malām ir 108 grādi. Tāpēc (sk. zīm.)

$$\frac{x}{2}:a=\sin 54^0 \Rightarrow x=2a\sin 54^0\,.$$

Tagad skaitļus p un q var noteikt pavisam vienkārši:

$$p^2=\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{x}=\frac{\sqrt{4a^2(1-\sin 54^0)}}{2a\sin 54^0}=\text{ctg}54^0$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{4x^2 - a^2}}{a} = \sqrt{16\sin^2 54^0 - 1}\,.$$

<u>Sekas</u>. $\mathrm{ctg}54^0 - \mathrm{tg}54^0 + \dfrac{2}{\sqrt{16\sin^2 54^0 - 1}} = 0$. Grūtāks būs uzdevums šādā formulējumā: kas lielāks $\mathrm{ctg}54^0 - \mathrm{tg}54^0$ vai $\dfrac{2}{\sqrt{16\sin^2 54^0 - 1}}$?

Atrisināt minimizācijas uzdevumu

$$\min\left(\frac{4}{p} + \frac{q}{2} - \frac{1}{2q}\right) = ?, \quad \text{ja} \quad p - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 0, \; p,\, q > 0.$$

Atrast minimumu funkcijai

$$f(x) = \frac{15 - 10x^2 - x^4}{4x(1 - x^2)}, \quad 0 < x < 1.$$

Uzdevums iegūts no iepriekšējā uzdevuma, izsakot q un ievietojot to minimizējamās funkcijas izteiksmē.

Atrast maksimālo vērtību izteiksmei $8uv + \sqrt{16u^2 - 1}$, ja $u^2 + v^2 = 1$.

Atrast maksimumu funkcijai $4\sin 2t + \sqrt{16\sin^2 t - 1}$.

Atrast maksimumu funkcijai $4\sin t + \sqrt{7 - 8\cos t}$.

Par nevienādību L(*a*, *a*, *a*, *b*) ≤ L(vienādsānu trapecei)

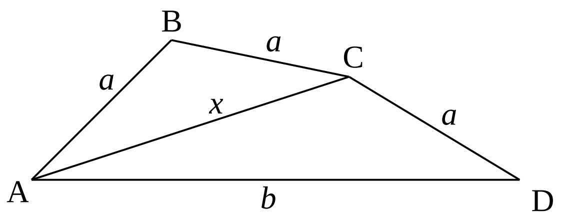
Iepriekš izmantotais pierādījums, kas balstās uz četrstūra laukuma formulu (4) nav no īsākajiem.

Mērķi ātrāk var sasniegt, ja lieto Košī nevienādību (21. zīm.)

$$\mathrm{L}(a,a,a,b) = \mathrm{L}_{\mathrm{ABC}} + \mathrm{L}_{\mathrm{CDA}} = \frac{x}{4}\sqrt{4a^2 - x^2} + \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (b-a)^2]} \le$$

$$\le \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + (a+b)^2 - x^2} \cdot \sqrt{4a^2 - x^2 + x^2 - (b-a)^2} = \frac{1}{4}(a+b)\sqrt{4a^2 - (b-a)^2}\,.$$

Tagad atliek tikai ievērot, ka iegūtā izteiksme ir laukums vienādsānu trapecei ar pamatu b un sānu malu a.



21. zīm.

Lemma par vienādmalu n-stūri

Malu vienādība ir nepieciešams nosacījums, lai n-stūrim ar uzdotu perimetru būtu vislielākais laukums.

Citiem vārdiem, optimālais n-stūris jāmeklē starp vienādmalu n-stūriem.

Dažkārt lieto arī šādu (neprecīzu) formulējumu: *No visiem izoperimetriskiem n-stūriem lielāks laukums ir tam, kuram visas malas vienādas*. Formulējums var radīt divdomības. Piemēram, taisnstūrim ar malām 1 un 3 laukums ir 3 un perimetrs 8. Bet vienādmalu četrstūrim (rombam) ar tādu pašu perimetru laukums var būt arī mazāks.

Lemmu var pierādīt negaidīti vienkārši. Pierādījums balstās uz divu trijstūru laukumu salīdzināšanu: no diviem trijstūriem ar malām (x, y, c) un (a, b, c), kur $x < a < y$ un $x + y = a + b$ lielāks laukums ir otrajam trijstūrim. Izteiksim laukumu pēc Hērona formulas. Tad jāpierāda nevienādība

$$p(p - x)(p - y)(p - c) < p(p - a)(p - b)(p - c).$$

jeb, kas ir līdzvērtīgi,

$$(p - x)(p - y) < (p - a)(p - b) \Leftrightarrow$$
$$(p - x)(p - y) < (p - a)(p - x + a - y) \Leftrightarrow$$
$$(p - x)(p - y) < (p - a)(p - x) + (p - a)(a - y) \Leftrightarrow$$
$$(p - x)(p - y - p + a) < (p - a)(a - y) \Leftrightarrow$$
$$(p - x)(a - y) - (p - a)(a - y) < 0 \Leftrightarrow$$
$$(a - y)(a - x) < 0.$$

Pēdējā nevienādība un līdz ar to arī nevienādība starp trijstūru laukumiem ir pareiza, jo (saskaņā ar doto $x < a < y$) reizinātāji $(a - y)$ un $(a - x)$ ir ar dažādām zīmēm.

Aplūkosim patvaļīgu n-stūri. Ar M, m un A apzīmēsim attiecīgi tā malu maksimālo, minimālo un vidējo garumu (A = perimetrs/n). Pieņemsim, ka šim n-stūrim ne visas malas ir vienāda garuma (pretējā gadījumā vajadzīgais būtu pierādīts). Tad $m < A < M$. Novietojam īsāko un garāko malu blakus vienu otrai. To var izdarīt, nemainot n-stūra ne perimetru, ne laukumu. Malu pārkārtošanas shēma parādīta 22. zīmējumā. Ja FC un AB ir attiecīgi visgarākā un visīsākā mala, tad pēc trijstūra FBA "apgāšanas" vajadzīgās malas BC un AB nonāks blakus.

Pēc tam, kad malas ar garumu m un M ir novietotas blakus, aizstājam tās ar malām A un $m + M - A$. Ņemot vērā iepriekš pierādīto, ir spēkā:

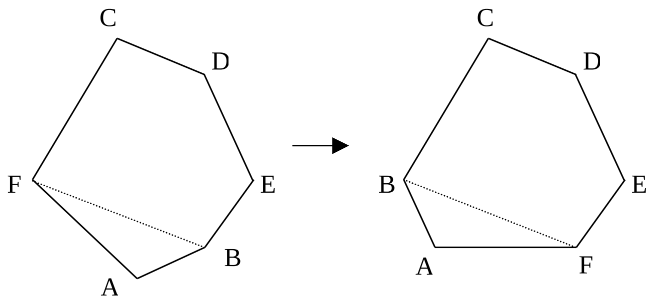
$$L(M, m, c) \leq L(A, M + m - A, c).$$

Tas nozīmē, ka iegūts jauns n-stūris ar to pašu perimetru, bet ar lielāku laukumu. Turklāt jaunajam n-stūrim vismaz viena mala vienāda ar aritmētisko vidējo A. Šādu malu vienādošanas procedūru atkārto tik ilgi, kamēr visas n-stūra malas kļūst vienādas ar A. Mērķa sasniegšanai būs jāveic ne vairāk kā n-1 aizvietošanas operācija:

$$m \to A, \quad M \to (M + m - A).$$

Der atzīmēt, ka tieši uz šādu aizvietošanas operāciju balstās viens no visīsākajiem un "visskaistākajiem" nevienādības $G \leq A$ pierādījumiem. Sk., piemēram, [Cib1]. Izrādās, ka malu aizvietošanu ar aritmētisko vidējo ir lietojis jau

R. Šturms (1841-1919, vācu matemātiķis) savā grāmatā “Maxima und minima in der elmentaren Geometrie, Teubnier, 1910. D. Križanovskis [Kr, 57. lpp.] piezīmē, ka šis interesantais paņēmiens maksimumu un minimumu pētīšanā agrāk acīm redzot nav ticis lietots, kaut gan R. Šturms par to ir ziņojis jau 1884. gadā (Journal fur Mathematic, 97)

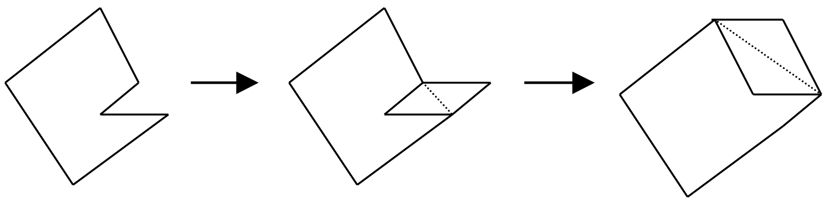


22. zīm.

Zēnodora teorēma

No visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim.

<u>Pierādījums</u>. Pietiek aplūkot tikai izliektus n-stūrus. Ja n-stūris nav izliekts, tad, nepalielinot perimetru, no tā varētu iegūt izliektu n-stūri ar lielāku laukumu, piemēram, pēc 23. zīm. parādītā parauga.



23. zīm.

Meklējamo n-stūri, kuram ir vislielākais laukums un uzdots perimetrs īsāk sauksim par **maksimālo** n-stūri. Saskaņā ar lemmu par vienādmalu daudzstūri maksimālais n-stūris būs vienādmalu n-stūris. Līdz mērķim vēl atlicis tikai “viens” solis – pierādīt, ka arī visiem leņķiem jābūt vienādiem. Vārds “viens” pēdiņās likts apzināti, jo šī soļa veikšanu, tēlaini izsakoties, var salīdzināt ar Gordija mezgla atšķetināšanu. Atkarībā no izvēlētā pierādījuma pēdējais “solis” var sastāvēt, vispārīgi runājot, no bezgalīgi daudziem sīkākiem soļiem. Ja neiedziļinās “sīkumos”, tad šo Gordija mezglu var pārcirst ar vienu vēzienu. Lūk, kā!

Ja maksimālajam n-stūrim būtu divi dažādi leņķi, tad varētu uzkonstruēt jaunu n-stūri, kuram ir tāds pats perimetrs, bet laukums lielāks. Iegūta pretruna, jo maksimālais n-stūris jau pēc definīcijas ir tāds, par kuru lielāka (pēc laukuma) vairs nav. Tātad pieņēmums par leņķu dažādību ir aplams.

Daži paņēmieni, kā pierāda maksimālā daudzstūra leņķu vienādību

1. <u>Hērona uzdevuma izmantošana</u>. [T, 19. lpp]

Ja maksimālajam n-stūrim ne visi leņķi ir vienādi tad starp tiem noteikti būs divi tādi, kas atrodas viens otram blakus un nav vienādi. Ja $n > 4$, tad būs arī divi tādi, kuri neatrodas viens otram blakus un nav vienādi. Tiešām, ņemsim viens otram sekojošus leņķus, α, β, γ, δ, ε, kur $\alpha \neq \beta$. Tad, apgalvojums pareizs, ja $\alpha \neq \gamma$ vai $\beta \neq \delta$. Atliek analizēt situāciju α, β, α, β, ε. Tā kā 1. un 4. leņķis ir dažādi, mērķis sasniegts. Tādējādi no aplūkojamā n-stūra var izvēlēties divus dažādus vienādsānu trijstūrus, kuriem nav kopēju iekšēju punktu. Pieņemsim, ka tie ir FED un POR (24. zīm.). Noteiktības dēļ uzskatīsim, ka leņķis E ir lielāks nekā leņķis O. Pārvietosim šos divus trijstūrus kā parādīts 25. zīm. Tagad atcerēsimies iepriekš risināto Hērona uzdevumu. Kur jāatrodas punktam H uz taisnes TU, lai attālumu summa PH + HF būtu vismazākā? Kā zināms, attālumu summu minimizē tāds punkts H, ka leņķis PHF vienāds ar leņķi FHU. Tādējādi trijstūrus FED un POR var aizstāt attiecīgi ar FHD un PHR, "ietaupot" perimetru. Vēl vairāk, arī laukumu summa ir pieaugusi, t. i.,

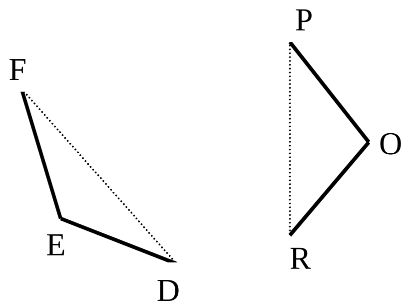
$$L_{FED} + L_{POR} < L_{PHR} + L_{FHD}.$$

Tiešām, aizstājot trijstūri POR ar PHR, laukumu esam samazinājuši par $2L_{PHE}$, toties, aizstājot trijstūri FED ar FHD, laukumu esam palielinājuši par $2L_{FHE}$. Viegli saprast, ka

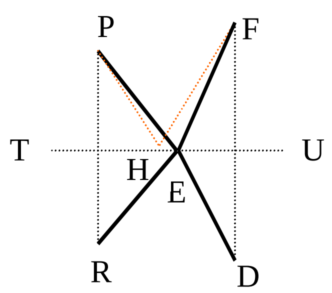
$$2L_{PHE} < 2L_{FHE}.$$

Tā kā trijstūriem PEH un FEH ir kopējs pamats, tad lielāks laukums ir tam, kuram lielāks augstums, t. i, : $L_{PHE} < L_{FHE}$.

Tātad uzrādītais paņēmiens dod iespēju palielināt apskatāmā n-stūra (ja vien tam ir dažādi leņķi) ar uzdotu perimetru p_0 laukumu, pat samazinot tā perimetru. Skaidrs, ka no n-stūra ar perimetru p_1 var iegūt jaunu n-stūri ar perimetru $p_0 > p_1$, nesamazinot pirmā laukumu.



24. zīm.



25. zīm.

2. Izmanto malu pagarināšanu. [Kr, 61. lpp.]

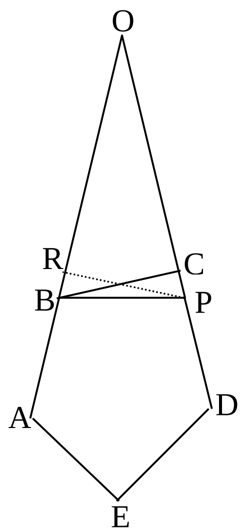
Šis paņēmiens, manuprāt, nav tik elegants kā pirmais. Aplūko vienādmalu daudzstūri, kurš nav regulārs. Tam būs divi dažādi leņķi, kuri atrodas blakus. Pieņemsim, ka tie ir leņķi ABC un BCD, un ka pirmais no tiem ir lielāks. Malas AB un CD pagarina līdz krustpunktam O. Pastāv trīs iespējas, sk. 26.-28. zīmējumu, kur vienādmalu n-stūra lomā ņemts piecstūris ABCD. Krustpunkts O var atrasties vienā vai otrā malas BC pusē (26.-27. zīm.), vai arī malas AB un CD ir paralēlas (28. zīm). Gadījumā, kad malas AB un CD nav paralēlas, samainām vietām malas OB un OC, tā ka B un C nonāks attiecīgi punktos P un R. Tā iegūstam jaunu daudzstūris ARPDE. Ja malas AB un CD ir paralēlas, tad jauno n-stūri ARPDE konstruējam pēc 28. zīmējumā dotā parauga. (Punktu P iegūst kā punkta B ortogonālu projekciju uz taisni CD un punktu R kā punkta C ortogonālu projekciju uz taisni AB.)

Tā kā pēc pieņēmuma leņķi ABC un BCD ir dažādi, tad taisnes CB un PR nevar sakrist, un tajā pašā laikā ir spēkā

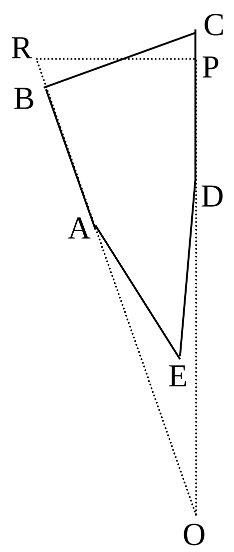
BR = CP, BC = PR

un trijstūru BCP un BPR laukumi ir vienādi.

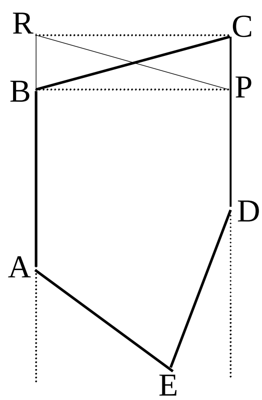
Tātad n-stūrim ARPDE ir tāds pats laukums un perimetrs kā sākotnējam n-stūrim ABCDE. Bet, tagad jaunajam n-stūrim malas AR un RP nav vienādas. Aizstājot trijstūri ARP ar vienādsānu trijstūri, saglabājot to pašu pamatu AP, mēs palielināsim laukumu, nepalielinot perimetru R. Tādējādi neregulārs n-stūris nevar būt maksimālais pat tad, kad tam visas malas vienādas.



26. zīm.



27. zīm.

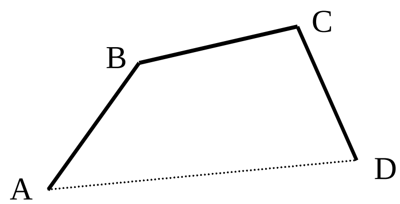


28. zīm.

Abi šie paņēmieni pēc leņķu vienādošanas "izbojā" malu garumus. Ja sākumā n-stūrim visas malas bija vienādas, tad pēc pārveidojuma dažu malu garumi var nebūt vienādi. Nākamajā punktā uzrādīts paņēmiens, kuram šis trūkums nepiemīt.

3. <u>Izmanto lemmu par vienādsānu trapeci</u>.

Ja vienādmalu n-stūris nav regulārs, tam būs divi dažādi leņķi, kuri atrodas blakus jeb kuriem ir kopēja mala. Pieņemsim, ka tie ir leņķi B un C (29. zīm.). Tad saskaņā ar lemmu par vienādsānu trapeci četrstūrim ABCD ar fiksētu pamatu AD un trīs vienāda garuma malām vislielākais laukums būs tad, kad tas kļūs par vienādsānu trapeci. Vienādsānu trapecei leņķi pie pamatiem ir vienādi, kas arī vajadzīgs.



29. zīm.

<u>Piezīme</u>. Uzrādītajam pierādījumam piemīt defekts. Kāds? Nav pamatota maksimālā n-stūra eksistence. Var precizēt, ka eksistences problēma izvēlētajā pierādījuma shēmā attiecas tikai uz vienādmalu daudzstūriem. Visu trīs iepriekš aprakstīto leņķu vienādošanas paņēmienu lietojums ir šāds: ja vienādmalu maksimālais n-stūris nav regulārs, tad var iegūt jaunu n-stūri ar lielāku laukumu un to pašu perimetru. Šāda tipa defekts – ne tik viegli pamanāma, "smalka kļūda", grāmatā [RT, 166. lpp.] raksturota kā ļoti rupja loģiska kļūda, kura esot palikusi nepamanīta divus gadsimtus un kura pirmoreiz esot atklāta tikai 19. gs. otrajā pusē. Kļūdas atklājējs ir slavenais vācu matemātiķis K. Veierštrāss. (Weierstrass, 1815- 1897). Eksistences pamatošana bieži vien ir saistīta ar neelementāru līdzekļu izmantošanu. Ekstrēmu uzdevumu teorijā viens no šādiem pamatlīdzekļiem ir Veierštrāsa teorēma. Vienkāršākā gadījumā tā apgalvo, ka nogrieznī definēta nepārtraukta funkcija sasniedz savas ekstremālās vērtības.

Par eksistences problēmu

Kamēr neiedziļinās "sīkumos" problēmas bieži vien nerodas, netiek pat apzinātas. Lai nu kur, bet matemātikā eksistences jautājumiem jāpievērš un arī tiek pievērsta īpaša uzmanība. Daudzu citu profesiju pārstāvjiem eksistences jautājumi vispār nesagādā raizes vai pat, un ne bez pamata, šķiet traucējoši (viņu arguments: mēs analizējam, aprakstām, pētām tikai to, kas eksistē). Pārlieku detalizēta katra soļa pamatošana var stipri aizkavēt vai pat padarīt par neiespējamu mērķa sasniegšanu. Ir pazīstams trāpīgs salīdzinājums, ka tīrā matemātika pēta tā kā vajadzīgs to, ko var, bet lietišķā to, kas vajadzīgs, tā kā var.

Divu izcilu fiziķu teicieni:

- *Es kategoriski uzskatu, ka no matemātikas, ko māca fiziķiem, jāizmet visādas eksistences teorēmas, pārlieku stingri pierādījumi utt.* (Nobeļa prēmijas laureāts (1962) fizikā Ļevs Landau)
- Normālam cilvēkam nav nekā atbaidošāka kā klīniska definīciju, aksiomu un teorēmu secība, kuru radījuši tīro matemātiķu darbi. Loģiskā stingrība, kas sasniegta ar tamlīdzīgiem pētījumiem, ir ārkārtīgi vērtīga, taču tā nez vai var parādīties pirms mēs esam uztvēruši pašu ideju" (D. Zaimens).

Senie grieķi rēķināja garumus, laukumus, tilpumus dažkārt visai sarežģītām ģeometriskām konstrukcijām, bet jautājums par tādu lielumu pastāvēšanu viņiem neradās. Zēnodoram, vēlāk Šteineram un daudziem citiem maksimālā n-stūra eksistence bija pati par sevi saprotama.

Dirihlē esot nesekmīgi centies pārliecināt savādnieku Šteineru par viņa pierādījumu nepietiekamību. Tomēr apgalvot, ka Šteiners eksistences jautājumu ir ignorējis pilnībā, būtu nepatiesi. Vienā vietā [Steiner, Gesammelte Werke, Berlin, 1882, 2. sēj. 197. lpp.] viņš ir piezīmējis "…tiešām, pierādījums veicams ļoti īsi, ja pieņem, ka vislielākā figūra eksistē" [Bla, 13. lpp.]

Pārdomu vērta ir it kā paradoksālā situācija, ka "pliks" pieņēmums par maksimālā n-stūra eksistenci ir tik auglīgs. Šāda situācija, kad pieņēmums par kāda ekstremālā elementa eksistenci dod iespēju sasniegt mērķi ātrāk, vienkāršāk, nekā ar citiem paņēmieniem, novērojama ne tikai ekstrēmu uzdevumos. Matemātikā tas nav nekas neparasts. Eksistences pieņēmumu var izmantot (un to arī izmanto), lai iepriekš prognozētu, kāds varētu būt meklējamais elements, objekts. Pieņēmumi, kas balstās uz ticamību vai aklu pārliecību, ne vienmēr ir pareizi.

Turpmāk piedāvāti vairāki piemēri, kuros maksimālais vai minimālais elements neeksistē.

Perrona piemērs

Lai ilustrētu defektu pierādījumos, kuros eksistences pieņēmumu uzskata par pašsaprotamu, Perrons (1880-1975, vācu matemātiķis) piedāvāja ļoti vienkāršu, taču pamācošu piemēru.

Apzīmēsim ar N vislielāko naturālo skaitli.

(Analoģijai – apzīmēsim ar P maksimālo n-stūri)

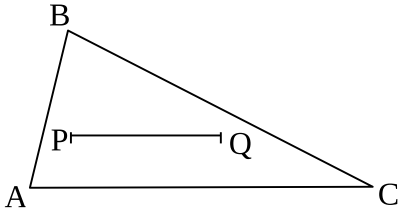
> Pierādīsim, ka $N = 1$. Tiešām, ja pieņem, ka $N > 1$, tad $M = N \cdot N > N$. Iegūta pretruna, proti, M ir lielāks par vislielāko skaitli N.
>
> Tātad pieņēmums, ka $N > 1$ nav pareizs. No šejienes izriet, ka $N = 1$.

Grāmatā [Han, 48. lpp.] šis piemērs nosaukts par Perrona paradoksu.

Maksimālais attālums starp punktiem

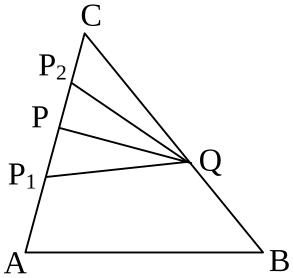
Piemērs no [RT, 164. lpp.], kuru autori izvēlējušies kā "galēji" vienkāršu, lai īpaši ērti varētu izgaismot jautājuma principiālo pusi. Autori ir devuši ļoti detalizētu analīzi.

"Dots trijstūris (iztēlosimies, ka tas izgriezts no kartona.) *Kādi divi trijstūra punkti P un Q* (*ieskaitot malas*) *atrodas vistālāk viens no otra*? (30. zīm.) Uzminēt atbildi šeit ir pavisam vienkārši: tie būs visgarākās trijstūra malas galapunkti. Bet, kā to pierādīt? Visiem šāda veida pierādījumiem ir viena kopēja recepte, kas ātri dod rezultātu. Spriež tā: ja viens no punktiem P un Q, piemēram, P atrodas trijstūra iekšienē, tad attālums starp tiem nebūs maksimālais, jo uz nogriežņa PQ turpinājuma ir vēl punkts P_1, kas atrodas no Q vēl tālāk un tomēr vēl aizvien trijstūra iekšienē. Ja abi punkti atrodas uz trijstūra malām, bet tā, ka viens no tiem, piemēram P, nesakrīt ar trijstūra virsotni, tad gluži tāpat uz tās pašas malas var atrast punktu P_1, kurš no Q atrodas tālāk kā P. Par to viegli pārliecināties ar elementāru spriedumu palīdzību, gan gadījumā, kad nogrieznis PQ perpendikulārs tai trijstūra malai, uz kuras atrodas P (31. zīm.), gan arī gadījumā, kad tas nav perpendikulārs (32. zīm.) Tādējādi maksimums iespējams tikai tajā gadījumā, kad abi punkti ir trijstūra virsotnes. Tāpēc nogrieznim PQ jābūt trijstūra malai turklāt, dabiski, visgarākajai.

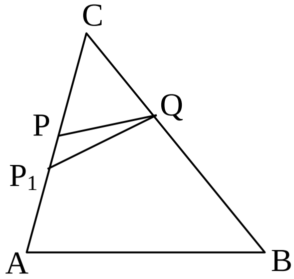


30. zīm.

Kļūda, kuru satur tikko izklāstītais risinājums, kļūs acīmredzama, ja mēs mēģināsim lietot mūsu metodi šāda ārkārtīgi vienkāršai figūrai. (33. zīm.) Skaidrs, ka šai figūrai, kas turpinās līdz bezgalībai, nevar uzrādīt tādu punktu pāri, kuri būtu viens no otra maksimālā attālumā; jo tālāk, piemēram, punkts P pavirzās pa labi, jo lielāks būs attālums MP. Neskatoties uz to, spriešanas metode, ko mēs tikko esam aprakstījuši, ir lietojama arī šai figūrai.

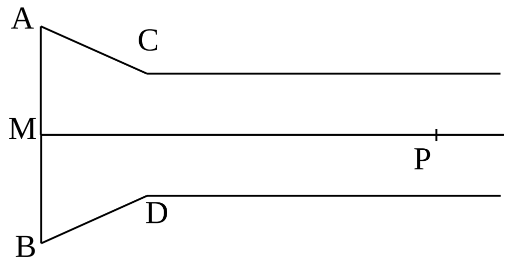


31. zīm.



32. zīm.

Lai kur arī atrastos punkti P un Q, figūras iekšienē vai uz tās perimetra, pat tad, kad P un Q atrodas kādās divās no četrām figūras virsotnēm, var, acīmredzami, atrast tādu punktu P_1 punkta P tuvumā, kurš atrodas no Q vēl tālāk, izņemot vienu vienīgu gadījumu, kad PQ ir nogrieznis AB. Mēs lietojām šeit to pašu principu; visiem punktveida pāriem, izņemot A, B, atrodam tādu pāri, kuram attālums kļūst lielāks; neviens pāris, izņemot A, B, nevar dot maksimumu. No šejienes, stingrā atbilstībā ar iepriekšējo pierādījumu, mums vajadzētu secināt, ka šis maksimums ir AB. Acīmredzami, ka pēc formas šis izvedums ir pilnīgi analoģisks iepriekšējam. Bet šeit tas noved pie nepareiza rezultāta. No kurienes gan mums zināms, ka tas dod drošu rezultātu iepriekšējos gadījumos."



33. zīm.

Maksimālais pirmskaitlis

Ne tik "caurspīdīgs" ir jautājums par maksimālā pirmskaitļa eksistenci. Kāpēc gan, tas nevarētu eksistēt? Lūk, cik asprātīgi sprieda Eiklīds! Pieņemsim, ka $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ir visi iespējamie pirmskaitļi. Aplūkosim visu šo pirmskaitļu reizinājumu un pieskaitīsim tam 1. Tad

$$p = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$$

ir jauns pirmskaitlis. Tas tāpēc, ka p nedalās ne ar vienu no pirmskaitļiem un bez tam nesakrīt ne ar vienu no tiem. Tātad pieņēmums, ka pirmskaitļu skaits ir galīgs dod pretrunu. Tas nozīmē, ka maksimālā pirmskaitļa nemaz nav.

Maksimālais pirmskaitlis intervālā (n, 2n)

Daudz sarežģītāk būtu noskaidrot, vai vienmēr starp n un 2n ir vismaz viens pirmskaitlis. Ja ne vienmēr, tad aplūkotā veida pirmskaitļu kopā varētu izvirzīt jautājumu par maksimālā pirmskaitļa eksistenci. Atzīmēsim, ka Bertrana (1822-1900, franču matemātiķis) hipotēzi: "S*tarp n un* $2n - 2$ *katram naturālam* $n > 3$, *eksistē vismaz viens pirmaskaitlis*." pirmais 1859. gadā pierādīja P. Čebiševs. (krievu matemātiķis un mehāniķis, 1821-1894)

Iepriekšējie piemēri var radīt iespaidu vai pat pārliecību, ka kopas maksimālais elements neeksistē tāpēc, ka kopas elementi nav ierobežoti no augšas. Vārds J. Šteineram: "*Ja figūrām ar dotu perimetru var būt dažādi laukumi, un ja tiem tomēr nav iespēju bezgalīgi pieaugt, tad starp figūrām jāeksistē vai nu vienai maksimālajai, vai vairākām dažādu formu* *maksimālajām figūrām, t. i., figūrām, kuru formas ir dažādas un laukumi vienādi un kuras pārspēj visu citu figūru laukumus*". [KR, 18. lpp.]. Salīdzināšanai līdzīgs apgalvojums: ja izoperimetrisku daudzstūru laukumi ir ierobežoti no apakšas, tad jāeksistē minimālajam daudzstūrim. Apgalvojums ir nepatiess, jo gandrīz vai acīmredzami, ka minimālais daudzstūris neeksistē. Savādi, ka J. Šteiners šādam salīdzinājumam nav pievērsis uzmanību.

Ar to vien, ka kopa ir ierobežota no augšas nepietiek, lai eksistētu maksimālais elements.

Ierobežota kopa, kurai neeksistē ne maksimālais ne minimālais elements

Kopa, kas sastāv no visiem racionāliem skaitļiem q, kuri atrodas intervālā (0, 1).

Bezgalīga summa

Ar ko vienāda summa

S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +… = ?

Anniņa. Skaidrs, ka S = 0.

S = (1 – 1) + (1 – 1) + (1 – 1) +… = 0.

Jānītis. Rindas elementus, sākot no otrā, ievietoju iekavās.

$$S = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots = 1.$$

Paijiņa. Pārrakstu S izteiksmi šādi

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots).$$

Lielums, kas atrodas iekavās nav nekas cits kā S, ko nosaku no sakarības S = 1 – S. Dabūju S = 0,5.

Kam taisnība?

Kādreiz šādi pārveidojumi likās paši par sevi saprotami pat rūdītiem matemātiķiem. Piemēram Pizas universitātes profesors Gido Grandi (1671-1742) esot uzskatījis, ka veids kā no S = 0 var iegūt S = 1, ir pamatojums tam, kā dievs no nekā radīja kaut ko. Savukārt vienādību S = 0,5 esot atzinis par pareizu plaša profila izcilais vācu zinātnieks Leibnics (1646-1716). Viņa pamatojums balstījās uz ģeometrisko progresiju

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}.$$

Ņemot x = 1 iegūst S = 0,5.

Sofisms

Atrast izteiksmes $absin\alpha + cdsin\beta$ *vislielāko vērtību, ja a, b, c un d pozitīvi skaitļi, kuru summa* $a + b + c + d = S$.

Anniņa. *Dotā izteiksme man ir pazīstama, – tā nav nekas cits kā divkāršots četrstūra laukums.*

$$2L = absin\alpha + cdsin\beta \leq ab + cd \leq \frac{S}{4}\cdot\frac{S}{4}+\frac{S}{4}\cdot\frac{S}{4}=\frac{S^2}{8}.$$

Šeit es izmantoju faktu, ka sinuss nepārsniedz 1, kas starp citu nozīmē, ka atbilstošie leņķi ir taisni, kā arī zināšanas par to, ka no visiem četrstūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir kvadrātam. Ja perimetrs ir S, tad kvadrāta mala acīmredzami ir $\frac{S}{4}$.

Jānītis. Aplūkošu gadījumu, kad

$$S = 4,\ a = b = 0,\ c = d = 2.$$

Tad $ab + cd = 4$, *kas ir vairāk nekā* $\frac{S^2}{8}=\frac{16}{8}=2$. *Tātad Anniņai kaut kur ir kļūda.*

Anniņa. Piemērs nav korekts, jo dots, ka a, b, c un d pozitīvi skaitļi.

Jānītis. *Labi, lai tā būtu. Manu piemēru var uzlabot. Ņemšu*

$$S = 4,\ a = b = \frac{1}{2},\ c = d = \frac{3}{2}.$$

Tad $ab + cd = \frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{10}{4}>2$.

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Trijstūris ar maksimālo laukumu

Šis ļoti pamācošais piemērs (sofisms) ir izklāstīts darba 1. daļā.

Trijstūris ar minimālo perimetru

Dotajā trijstūri ievilkt trijstūri ar minimālo perimetru. Vai uzdevumam eksistē atrisinājums, ja trijstūris nav šaurleņķa.? (Sk. 15. nodaļu.)

Riņķī ievilktu un ap riņķi apvilktu daudzstūru ekstremālās īpašības

Ar Zēnodora uzdevumu cieši saistīti ir uzdevumi, kuros jāmeklē optimālais daudzstūris, kas ievilkts dotajā riņķī vai apvilkts ap doto riņķi. Ekstrēmu uzdevumos riņķim ir īpaša nozīme. Iesāksim ar sofismu.

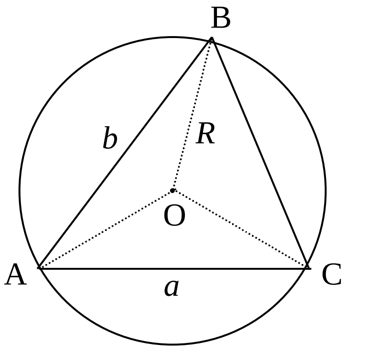
Sofisms

Kādam trijstūrim, kas ievilkts riņķī ar rādiusu R, ir vislielākais laukums?

Anniņa. Izsaku trijstūra ABC laukumu kā vienādsānu trijstūru AOB, BOC un COA laukumu summu (34. zīm.). Šo trijstūru leņķus ar virsotni

7riņķa centrā O apzīmēšu attiecīgi ar α, β un γ. Katram no tiem laukumu aprēķināšu pēc formulas: $L = \frac{1}{2}xy\sin\varphi$. Tā kā visas sānu malas ir vienādas ar apvilktā riņķa rādiusu, tad

$$L = \frac{1}{2}R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$



34. zīm.

Pēc kosinusu teorēmas iegūstu sakarības starp malām un leņķiem.

$$|AC|^2 = a^2 = 2R^2(1-\cos\alpha)$$
$$|AB|^2 = b^2 = 2R^2(1-\cos\beta)$$
$$|BC|^2 = c^2 = 2R^2(1-\cos\gamma).$$

Izsaku leņķus

$$\cos\alpha = 1 - \frac{a^2}{2R^2}$$
$$\cos\beta = 1 - \frac{b^2}{2R^2}$$
$$\cos\gamma = 1 - \frac{c^2}{2R^2}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(1-\frac{a^2}{2R^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{R^2} - \frac{a^4}{4R^4}} = \frac{a}{2R^2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Pēc analoģijas

$$\sin\beta = \frac{b}{2R^2}\sqrt{4R^2 - b^2}$$
$$\sin\gamma = \frac{c}{2R^2}\sqrt{4R^2 - c^2}.$$

Tagad pēc sinusu aizvietošanas iegūstu, ka

$$L = \frac{1}{4}\left(a\sqrt{4R^2 - a^2} + b\sqrt{4R^2 - b^2} + c\sqrt{4R^2 - c^2}\right)$$

Novērtēšu laukuma izteiksmi, lietojot nevienādību $xy \le \frac{x^2 + y^2}{2}$:

$$L \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2 + 4R^2 - a^2}{2} + \frac{b^2 + 4R^2 - b^2}{2} + \frac{c^2 + 4R^2 - c^2}{2}\right) = \frac{3R^2}{2}.$$

Nevienādība pārvēršas par vienādību, ja $a = b = c$. Tātad vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim.

Jānītis. *Tavs risinājums ir pārāk garš. Aprēķināšu laukumus trijstūriem AOB, BOC un COA pēc vienkāršākas formulas: pamats reiz augstums dalīts ar divi. Augstumus šiem trijstūriem var aprēķināt pēc Pitagora teorēmas.*

$$h_a = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}\ .$$

Analoģiski

$$h_b = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - b^2}$$

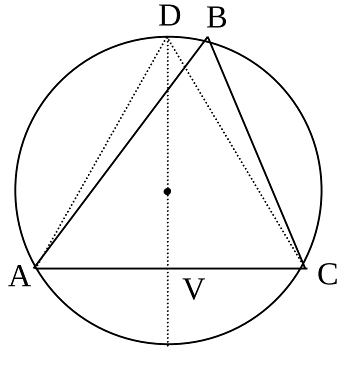
$$h_c = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c^2}\ .$$

Tātad

$$L = \frac{1}{2}(h_a + h_b + h_c)\,,$$

kas izvērstā veidā ir tā pati izteiksme, ko ieguva Anniņa.

Maijiņa. Pierādīšu, ka maksimālajam trijstūrim visi leņķi ir vienādi. Pieņemsim, ka tā nav. Tad var uzskatīt, ka atšķirīgie leņķi atrodas pie pamata AC, sk. 35. zīm. Aplūkoju patvaļīgu dotajā riņķī ievilktu trijstūri ABC. Fiksēju pamatu AC un meklēju punkta B stāvokli uz riņķa līnijas, lai ABC laukums būtu maksimāls. Laukums ir puse no pamata un augstuma reizinājuma. Tā kā pamats fiksēts, tad augstums būs maksimāls tad, ja punkts B būs AC vidusperpendikula galapunkts. Pieņēmums, ka maksimālajam trijstūrim ir dažādi leņķi dod pretrunu. Tātad maksimālais trijstūris ir vienādmalu.



35. zīm.

Pēterītis. ***Maijiņas pierādījums ir īss un skaists. Tomēr tas man ne visai patīk. Iedomāsimies trijstūri ar 10, 40 un 130 grādu lieliem leņķiem. Tad pēc pirmās leņķu vienādošanas Maijiņa var iegūt vienādsānu trijstūri ar 70 grādu leņķiem pie pamata. Pēc otrās vienādošanas iegūtu vienādsānu trijstūri ar leņķiem 55^0, 55^0 un 70^0. Tā***

viņa pamazām tuvotos vienādmalu trijstūrim, nekad to precīzi nesasniedzot.
Es piedāvāšu vēl īsāku pierādījumu. Tā kā trijstūra malu garumi ir proporcionāli loku garumiem, kuri balstās uz šīm malām, un loku garumu summa ir 2πR, t. i., tā nav atkarīga no malu garumiem, tad mums faktiski ir jārisina izoperimetriskais uzdevums. Labi zināms, ka no visiem trijstūriem ar uzdotu perimetru, vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim.

Atrodiet kļūdas vai nepilnības iepriekš izklāstītajos risinājumos.

Kārlītis. Regulāra trijstūra ar malu a laukums ir $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ja tas ir ievilkts riņķī ar rādiusu R, tad $a^2 = 3R^2$. Tātad $L(R) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Salīdzinu šo lielumu ar Anniņas iegūto novērtējumu.

$$L(R) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} < \frac{3R^2}{2}$$
$$\sqrt{3} < 2.$$

Pārsteidzoši, ka Anniņai tomēr ir iegūts lielāks laukums.

Jānītis. Tas nav nekas pārsteidzošs, jo Anniņas novērtējums nav precīzs.

Anniņa. Kā nav? Pats vari pārliecināties, ka mans novērtējums

$$L \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+4R^2-a^2}{2} + \frac{b^2+4R^2-b^2}{2} + \frac{c^2+4R^2-c^2}{2}\right) = \frac{3R^2}{2}$$

ir precīzs. Vienādību iegūstam, ņemot $a = b = c$.

Jānītis. Man pagaidām nav ko iebilst.

Kārlītis. Bet man ir! Galu galā jāuzrāda konkrētās a, b un c vērtības, kurām nevienādība pārvēršas par vienādību. Anniņa "pa ceļam" lietoja vēl vienu nevienādību

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2},$$

nepārbaudot, vai tā var kļūt par vienādību.

Anniņa. Pārbaudīsim! Šī nevienādība kļūst par vienādību tad, kad $x = y$. Nevienādība tika lietota, lai novērtētu trīs reizinājumus

$$a\sqrt{4R^2-a^2},\ b\sqrt{4R^2-b^2},\ c\sqrt{4R^2-c^2}$$

Zinot, ka $a = b = c$, pietiek pārbaudīt tikai nosacījumu

$$a = \sqrt{4R^2-a^2}.$$

Nosaku a:

$$a^2 = 4R^2 - a^2$$
$$2a^2 = 4R^2$$
$$a^2 = 2R^2$$

$$a = R\sqrt{2}.$$

Jānītis. Pārbaudīsim, vai šāds *a* ir pieļaujams. Riņķī ievilkta regulāra trijstūra malas garums ir vienāds ar $R\sqrt{3}$, kas ir lielāks nekā Anniņas piedāvātais malas garums $a = R\sqrt{2}$. Kaut kāda mistika, ka ar īsākām malām var iegūt lielāku laukumu!

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Ir spēkā šādas divas teorēmas par riņķī ievilktiem daudzstūriem:

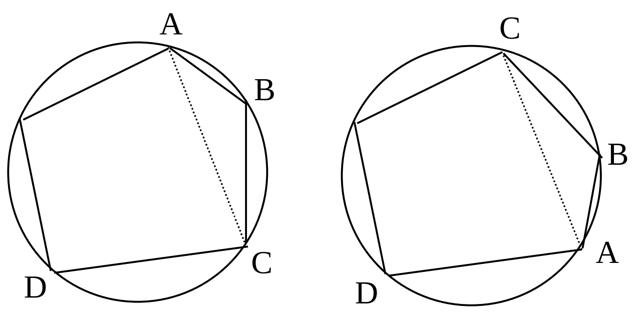
T1. *No visiem n-stūriem, kas ievilkti riņķī vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim.*

T2. *No visiem n-stūriem, kas ievilkti riņķī vislielākais perimetrs ir regulāram n-stūrim.*

Piezīme. Pirmās teorēmas apgalvojumu var raksturot kā pašu par sevi saprotamu, jo no visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim un to var ievilkt riņķī. Taču otrais apgalvojums pirmajā brīdī var samulsināt, jo no visiem n-stūriem ar uzdotu laukumu regulāram n-stūrim ir nevis vislielākais, bet gluži otrādi – vismazākais perimetrs.

Pierādījums. Abas teorēmas var pierādīt ar vienu un to pašu metodi.

Izmantosim jau iepriekš lietoto paņēmienu par malu vienādošanu. Aplūkosim patvaļīgu n-stūri. Ar M un m apzīmēsim attiecīgi tā malu maksimālo un minimālo garumu, bet ar h dotajā riņķī ievilkta regulāra n-stūra malas garumu. (h ir tādas hordas garums, kura savelk riņķa līnijas loka n-o daļu). Pieņemsim, ka šim n-stūrim ne visas malas ir vienāda garuma (pretējā gadījumā vajadzīgais būtu pierādīts). Tad $m < h < M$. Pārkārtojam n-stūra malas tā, lai īsākā un garākā mala būtu blakus vienu otrai. To var izdarīt, nemainot n-stūra ne perimetru, ne laukumu, kā arī neizejot ārpus dotā riņķa. Malu pārkārtošanas shēma parādīta 36. zīmējumā. Ja DC un AB ir attiecīgi visgarākā un visīsākā mala, tad pēc trijstūra ABC "apgāšanas" vajadzīgās malas AB un DC nonāks blakus.



36. zīm.

“Lemmas par vienādmalu n-stūri” pierādījumā malas ar garumu m un M tika aizstātas ar malām, kuru garumi ir A un $m + M - A$, t. i., lai saglabātos malu summa. Tagad, kad n-stūris ir ievilkts riņķī, šis paņēmiens neder, jo mums jāraugās, lai pēc malu aizstāšanas to galapunkti atkal atrastos uz dotās riņķa līnijas. Uzskatīsim, ka pēc malu pārkārtošanas n-stūra garākā mala ir AC, bet īsākā CB (37. zīm.). Trijstūri ABC aizstāsim ar trijstūri ADC, saglabājot pamatu AC. Riņķa līnijas punkts D ir izvēlēts tā, ka DC ir šajā riņķī ievilkta regulāra n-stūra mala. Saskaņā ar apzīmēto $m = |CB| < |CD| = h < M$. Jāpierāda, ka trijstūris ADC pārspēj trijstūri ABC gan pēc laukuma, gan pēc perimetra. Tas, ka

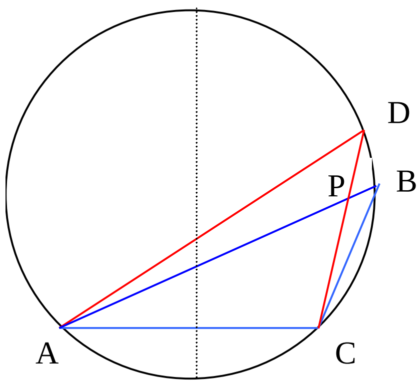
$$L_{ADC} > L_{ABC}$$

ir gandrīz vai acīmredzams. Abiem trijstūriem ir kopējs pamats, bet pirmajam ir lielāks augstums.

Citu pamatojumu šai nevienādībai var gūt no sprieduma par perimetriem. Lai pierādītu, ka arī

$$Per_{ADC} > Per_{ABC}$$

izmantosim trijstūru ADP un CBP līdzību. Šiem trijstūriem visi leņķi ir vienādi, jo leņķi ADP un ABC ir vienādi kā ievilkti leņķi, bet leņķi APD un CPB kā krustleņķi.



37. zīm.

Līdzīgiem trijstūriem malas ir proporcionālas, t. i.,

$$|AD| = k|BC|$$
$$|DP| = k|PB|$$
$$|PA| = k|PC|.$$

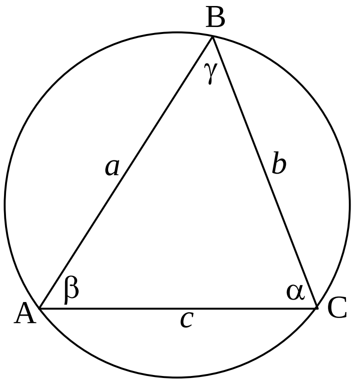
Tā kā $AD > BC$, tad $k > 1$. Salīdzināsim summu $AD + DC$ ar $AB + BC$. Pēc vienkāršiem un līdzvērtīgiem pārveidojumiem secinām, ka pirmā summa ir lielāka

$$AD + DC > AB + BC$$
$$AD + DP + PC > AP + BP + BC$$
$$k|BC| + k|PB| + PC > k|PC| + BP + BC$$
$$(k-1)|BC| + (k-1)|PB| > (k-1)|PC|$$
$$|BC| + |PB| > |PC|.$$

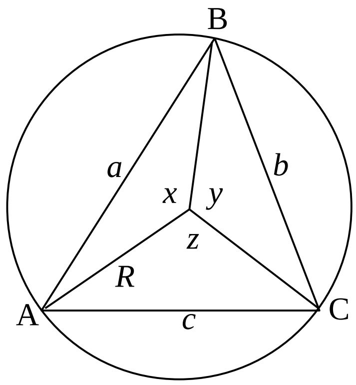
(Trijstūra divu malu summa ir lielāka par trešo malu.)

Piezīme. Pierādījumus var atrast, piemēram, [JB]. Tur trijstūru perimetru salīdzināšana veikta nedaudz garāk ar citu paņēmienu, izmantojot zīmējuma papildināšanu.

No visiem trijstūriem, kas ievilkti riņķī vislielākā malu summa ir regulāram trijstūrim. Vai šis rezultāts saglabāsies, ja malu summu aizvietosim ar malu kvadrātu summu?



38a. zīm.



38b. zīm.

Riņķī ievilkts trijstūris. Kādā gadījumā malu kvadrātu summa ir vislielākā? [VR, 41. lpp.] Izmantosim sinusu teorēmu. (38a. zīm.)

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$a=2R\sin\alpha;\ \ b=2R\sin\beta;\ \ \mathrm{c}=2\mathrm{R}\sin\gamma$

Mums jāaprēķina

$a^2+b^2+c^2=4R^2\sin^2\alpha+4R^2\sin^2\beta+4\mathrm{R}^2\sin^2\gamma=4\mathrm{R}^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=*$

Ievērosim, ka $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ un $\sin^2(\pi-(\alpha+\beta))=\sin^2(\alpha+\beta)$

Tāpēc

$$*=4R^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)=$$

$$=4R^2\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos2\beta}{2}+1-\cos^2(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=4R^2\left(1-2\frac{\cos2\alpha+\cos2\beta}{2}+1-\cos^2(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=4R^2(2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta))=$$

(atdalīsim pilno kvadrātu)

$$=4R^2(2-(\cos^2(\alpha+\beta)+2\cdot\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta))=$$

$$=4R^2(2-(\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta))^2+\frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta))$$

Iekavu vērtība būs lielākā, ja $\cos^2(\alpha-\beta)=1$ un $\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)=0$

Ja $\cos^2(\alpha-\beta)=1$, tad $\cos(\alpha-\beta)=1$, $\alpha-\beta=0$, $\alpha=\beta$

Tātad $\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)=0$

$\cos 2\alpha+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$

$2\alpha=\frac{2\pi}{3}$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$; tad $\beta=\frac{\pi}{3}$ un $\gamma=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

Vislielākā malu summa ir vienādmalu trijstūrim.

Racionālāks risinājums. Pēc kosinusu teorēmas:

$$a^2 = 2R^2(1-\cos x)$$
$$b^2 = 2R^2(1-\cos y)$$
$$c^2 = 2R^2(1-\cos z),$$

kur – x, y un z leņķi, ko veido apvilkta riņķa rādiusi R, sk. 38b. zīmējumu. No šejienes

$$a^2+b^2+c^2 = 2R^2(3-\cos x-\cos y-\cos z).$$

Pierādīsim, ka

$$\cos x+\cos y+\cos z \geq -\frac{3}{2}$$
$$\cos x+\cos y+\cos(x+y) \geq -\frac{3}{2}.$$

Apzīmēsim: $x = u + v$, $y = u - v$. Tad $\cos x+\cos y = 2\cos u\cos v$ un $\cos(x+y)=\cos 2u = 2\cos^2 u-1$ un jāpierāda nevienādība

$$2\cos u\cos v+2\cos^2 u-1 \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$4\cos u\cos v+4\cos^2 u+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(2\cos u+\cos v)^2+1-\cos^2 v \geq 0.$$

Piezīme. Saskaņā ar pierādījumu nevienādība

$$\cos x+\cos y+\cos z \geq -\frac{3}{2}$$

ir spēkā ne tikai trijstūra leņķiem, bet patvaļīgiem leņķiem, kuru summa ir 180 grādu.

Ir spēkā šādas divas teorēmas par daudzstūriem, kas apvilkti ap riņķi:

T3. *No visiem n-stūriem, kas apvilkti ap riņķi, vismazākais laukums ir regulāram n-stūrim.*

T4. *No visiem n-stūriem, kas apvilkti ap riņķi, vismazākais perimetrs ir regulāram n-stūrim.*

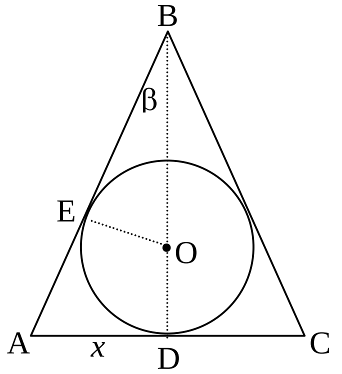
Ievērosim, ka šīs teorēmas ir līdzvērtīgas. Tas izriet no formulas

$$L = pr,$$

saskaņā ar kuru, minimizējot laukumu, vienlaicīgi tiek minimizēts perimetrs, un otrādi, minimizējot perimetru, vienlaicīgi tiek minimizēts laukums.

Vispirms aplūkosim apvilktus trijstūrus.

1. uzdevums. No visiem vienādsānu trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, atrast to, kuram ir vismazākais laukums.



39. zīm.

Apzīmēsim dotā riņķa rādiusu ar r, apvilktā vienādsānu trijstūra pamata AC garumu ar 2x, un trijstūra ABC virsotnes leņķa lielumu ar 2β un augstumu pret AC ar h. Tad

$$\mathrm{L} = xh.$$

Pēc Pitagora teorēmas

$$|\mathrm{EB}|^2 = |\mathrm{OB}|^2 - |\mathrm{OE}|^2 = (h-r)^2 - r^2 = h^2 - 2rh.$$

Sakarību starp x un h iegūsim no trijstūru ADB un OEB līdzības

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EB}} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{r}{\mathrm{EB}}$$

$$x = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}.$$

Ievietojot atrasto x laukuma izteiksmē, dabūjam

$$\mathrm{L} = \frac{rh^2}{\sqrt{h^2 - 2hr}}.$$

Tagad pierādīsim nevienādību

$$\mathrm{L} = \frac{rh^2}{\sqrt{h^2 - 2hr}} \geq 3\sqrt{3}r^2 \Leftrightarrow$$

$$h^4 \geq 27r^2(h^2 - 2hr) \Leftrightarrow$$

$$h^3 - 27h^2r + 54r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(h^2 - 6hr + 9r^2)(h + 6r) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(h - 3r)^2(h + 6r) \geq 0.$$

No šejienes secinām, ka laukums būs minimāls, tikai tad, ja $h = 3r$. Tas nozīmē, ka OB = $2r$, $\beta = 30^0$ un divreiz lielākais leņķis ABC vienāds ar 60^0. Ja vienādsānu trijstūrim viens leņķis ir 60^0, tad tas ir regulārs trijstūris. Tātad no visiem vienādsānu trijstūriem, kas apvilkti ap riņķi, regulāram trijstūrim ir vismazākais laukums.

2. uzdevums. No visiem trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, atrast to, kuram ir vismazākais laukums.
Vispirms iepazīsimies ar šāda uzdevuma risinājumu
No visiem trijstūriem ar dotu leņķi α, kuri apvilkti ap doto riņķi, atrast trijstūri ar vismazāko perimetru un tādējādi ar vismazāko laukumu [Zet, 93. lpp.]
"Izsakot trijstūra pusperimetru ar ievilkta riņķa rādiusu r, dabūjam:

$$p = r\, ctg\frac{\alpha}{2} + r\, ctg\frac{\beta}{2} + r\, ctg\frac{\gamma}{2} =$$

$$= r\left[ctg\frac{\alpha}{2} + r\, ctg\frac{\beta}{2} + ctg\left(90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= r\, ctg\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\beta}{2}\left(90^0 - \frac{x+\beta}{2}\right) = r\, ctg\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\beta}{2} tg\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Perimetram vismazākā vērtība ir vienlaicīgi ar $ctg\frac{\beta}{2} tg\frac{\alpha+\beta}{2}$, t. i., ja $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.
(Te autors atsaucas uz iepriekš atrisinātu šādu uzdevumu.)
Kādam x funkcijai

$$y = tg\frac{x}{2} \cdot ctg\frac{\alpha+x}{2}$$

ir vismazākā vērtība, ja a – šaurs leņķis (nemainīgs)?
Ir spēkā:

$$y = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha+x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\alpha+x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right) + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)}}{1 + \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)}}$$

Pieaugot pozitīvam lielumam $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)$, daļas skaitītājs aug, saucējs dilst, tāpēc y, pieaugot pozitīvam $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)$, aug. Tādēļ y vērtība ir vislielākā vienlaicīgi ar vislielāko $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)$ vērtību, t. i., kad $\frac{\alpha}{2}+x = 90^0$; no šejienes $x = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.
Vislielākā y vērtība ir

$$tg\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right) ctg\left(45^0 + \frac{\alpha}{4}\right) = tg^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Un tā meklējamais trijstūris ir vienādsānu ar doto virsotnes leņķi α.”

<u>Cits risinājums</u>.

Aplūkosim vienādsānu trijstūri ABC, kurš apvilkts ap doto riņķi un kuram viens leņķis fiksēts (40. zīmējumā tas ir leņķis B) Pierādīsim, ka jebkuram citam trijstūrim ar to pašu leņķi B laukums ir mazāks. Izvēlamies kādu punktu P uz riņķa līnijas, kas nesakrīt ar malas AC viduspunktu. Uzskatīsim, ka P atrodas zem leņķa bisektrises BD. Novelkot perpendikulāri rādiusam OP malu EG, iegūstam ap doto riņķi apvilktu trijstūri BEG. Ar K apzīmējam AC un EG krustpunktu. Saskaņā ar P izvēli, tas atradīsies zem bisektrises. Tāpēc AK < KC. Lai pierādītu, ka

$$L_{BEG} > L_{ABC},$$

salīdzināsim trijstūru KAF un KEC laukumus. Ievērosim, ka pietiek pamatot nevienādību

$$L_{KAF} < L_{KEC},$$

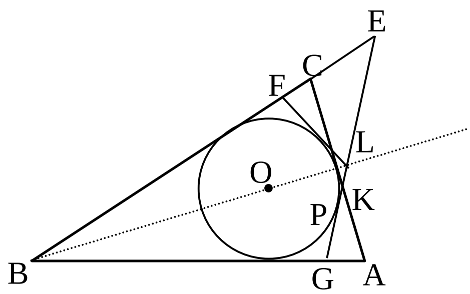
kas pēc zīmējuma ir it kā acīmredzams. Pārliecināsimies, ka FK < KM. Uz malas BE atliksim punktam F simetrisku (attiecībā pret bisektrisi BM) punktu F_1. Tad $MF_1 = MF$, leņķi B F_1M un BFM ir vienādi, bet leņķis BEF ir mazāks nekā leņķis MF_1E:

$$\angle BEF = 180^0 - \angle BFM - \angle FBE$$

$$\angle EF_1M = 180^0 - \angle BFM.$$

Trijstūrī pret mazāku leņķi atrodas īsāka mala, tāpēc

$$FK < FM = F_1M = ME < KE.$$



40. zīm.

Tagad no CK > KA, EK > KF un leņķu CKE un AKF vienādības izriet vajadzīgā nevienādība

$$L_{KAF} < L_{KEC}.$$

Tātad esam pierādījuši, ka

no visiem trijstūriem ar fiksētu leņķi, kuri apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir vienādsānu trijstūrim.

Atzīmēsim, ka vienlaicīgi ar laukumu tiek minimizēts arī trijstūra perimetrs P, kas ir tiešas sekas no laukuma formulas L = *pr*.

No šejienes un iepriekšējā uzdevuma izriet

Teorēma. *No visiem trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums un vismazākais perimetrs ir regulāram trijstūrim.*

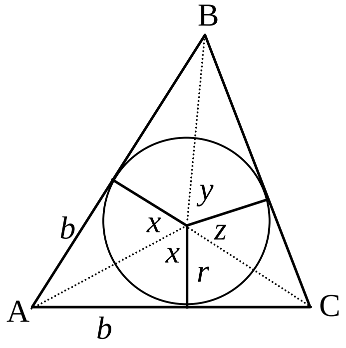
Kur kļūda?

Noteikt minimumu izteiksmei

$$\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z,$$

ja $x + y + z = 180^0$ un visi leņķi šauri.

Anniņa. Ievērosim, ka dotās izteiksmes minimuma meklēšana ir līdzvērtīga jau aplūkotajam uzdevumam par riņķim ar rādiusu r apvilkta minimālā trijstūra meklēšanu, sk. 41. zīm.



41. zīm.

Trijstūra ABC laukumu izteikšu kā sešu taisnleņķa trijstūru laukumu summu. Divu vienādu taisnleņķa trijstūru ar katetēm b un r laukums ir br. Tā kā $b = r\text{tg}x$, tad $br = r^2\text{tg}x$. Saskaitot trīs šāda tipa lielumus, iegūstu, ka trijstūra ABC laukums L izsakāms kā

$$\text{L} = r^2(\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z).$$

Vēl jāpārbauda dotais nosacījums par leņķu summu. Tas ir spēkā, jo summa $2x + 2y + 2z$ vienāda ar 360 grādiem. Zināms, ka no visiem trijstūriem, kas apvilkti ap uzdotu riņķi, minimālais laukums ir regulāram trijstūrim. Tam ir spēkā $2x = 2y = 2z = 120^0 \Rightarrow x = y = z = 60^0 \Rightarrow$

$$\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z = 3\sqrt{3}.$$

Jānītis. Izteikšu z.

$$z = 180^0 - (x + y) \Rightarrow \text{tg}\,z = -\text{tg}(x + y).$$

$$\text{T} := \text{tg}x + \text{tg}y - \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y} = (\text{tg}x + \text{tg}y)\left(1 - \frac{1}{1 - \text{tg}x\text{tg}y}\right)$$

$$\text{T} = (\text{tg}x + \text{tg}y)\frac{-\text{tg}x\text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y}.$$

Ja $x = y$, tad $\text{T} = \dfrac{-2\text{tg}^3 x}{1 - \text{tg}^2 x}$. Pārbaudei ņemšu $x = 60^0$:

$$\frac{-2\mathrm{tg}^3 60^0}{1-\mathrm{tg}^2 60^0} = \frac{-2(\sqrt{3})^3}{1-3} = 3\sqrt{3},$$

Šajā gadījumā iegūta tāda pati vērtība kā Anniņai. Tagad ņemšu $x = 30^0$. Tad

$$\frac{-2\mathrm{tg}^3 30^0}{1-\mathrm{tg}^2 30^0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \ \ ???$$

Tas nozīmē, ka Anniņa nav ieguvusi minimumu. Viņai jāmeklē kļūda.

Anniņa. Tev pašam jāmeklē kļūda, ja negatīvas vērtības vispār nevar rasties. Katrs no saskaitāmajiem tg$x$, tg$y$ un tgz taču ir pozitīvs, nu vismaz nenegatīvs.

Maijiņa. Izmantošu formulu $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$. Tad

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y - \mathrm{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} - \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} =$$

$$= \sin(x+y)\left(\frac{1}{\cos x \cos y} - \frac{1}{\cos(x+y)}\right) =$$

$$= \sin(x+y)\frac{\cos(x+y) - \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos(x+y)} = \sin(x+y)\frac{-\sin x \sin y}{\cos x \cos y \cos(x+y)} =$$

$$= -\mathrm{tg}(x+y)\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y \to \min .$$

Saskaņā ar Anniņu vajadzētu būt nevienādībai

$$-\mathrm{tg}(x+y)\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y \geq 3\sqrt{3},$$

par kuras pareizību es stipri šaubos. Jo, ņemot $x = 0$, iegūtu, absurdu: $0 \geq 3\sqrt{3}$.

Anniņa. Es savukārt šaubos, par tavas izvēles pareizību. Manuprāt, $x = 0$ nav šaurs leņķis.

Maijiņa. Es vēl neesmu beigusi savu spriedumu. Ja jau nevienādība ir nepareiza ar $x = 0$, tad tā būs nepareiza arī nulles tuvumā. Citiem vārdiem, ņemot x > 0, bet tuvu nullei, iegūsim, ka nevienādības kreisā puse arī būs tuva nullei.

Dosim īsāku pierādījumu tam, ka *no visiem trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir regulāram trijstūrim*.

Izmantosim laukumu formulu (sk. 41. zīm., kā arī *Anniņas* risinājumu):

$$L = r^2(\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tgz}).$$

Izsakot $z = 180^0 - (x + y)$, iegūsim:

$$T := \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tgz} = \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y - \mathrm{tg}(x+y) = \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y - \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}.$$

$$T = \frac{(\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y)\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y - 1} \geq \frac{2\sqrt{\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y}\,\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y - 1} \qquad (1)$$

Te lietota nevienādība $A \geq G$. Saucējs ir pozitīvs lielums, jo tāds ir T un tam turklāt skaitītājs ir pozitīvs. Apzīmē reizinājumu tg$x$tg$y$ ar t^2. Tad

$$T \geq \frac{2t^3}{t^2-1} \geq 3\sqrt{3}.$$

Pēdējās nevienādības pareizība izriet no parastiem pārveidojumiem:

$$2t^3 \geq 3\sqrt{3}(t^2-1) \Leftrightarrow 2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(t^2 - 2\sqrt{3}t + 3)(2t + \sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{3})^2(2t + \sqrt{3}) \geq 0.$$

Redzam, ka vienādība tiek sasniegta, ja $t = \sqrt{3}$. Savukārt nevienādība (1) kļūst par vienādību, ja tg$x$ = tg$y$. Tas nozīmē, ka visi seši taisnleņķa trijstūri (41. zīm.) ir vienādi un ka trijstūris ABC ir regulārs, kas arī bija jāpierāda.

Grāmatā [Tot] 1. nodaļas 3. paragrāfā "Regulāru daudzstūru ekstremālās īpašības" konspektīvā formā dots ļoti skaists T3 pierādījums, kuru varētu raksturot kā matemātikas pērli jeb kā mīlēja teikt slavenais Pauls Erdešs (1913-1996) tas ir pierādījums no Grāmatas.

Pieņem, ka:
k – uzdots riņķis;
Q – ap riņķi k apvilkts regulārs n-stūris;
P – patvaļīgs n-stūris, kas apvilkts ap riņķi k;
K – ap Q apvilkts regulārs n-stūris
Sk. 41. zīmējumu, kas atbilst gadījumam n = 4.

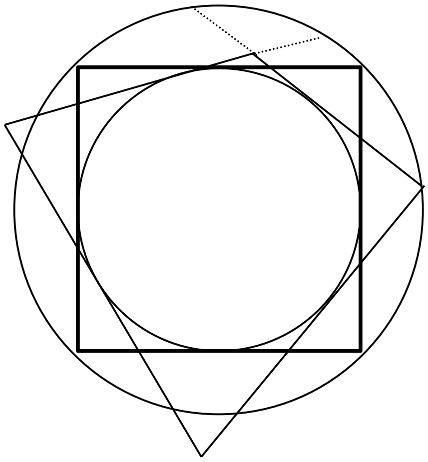
"Segmentus, ko no K atšķeļ P malas, kas ņemtas cikliskā secībā, apzīmēsim ar s_1, s_2, …, s_n. Laukuma P daļu, kas atrodas riņķa K iekšienē, var izteikt šādā veidā:

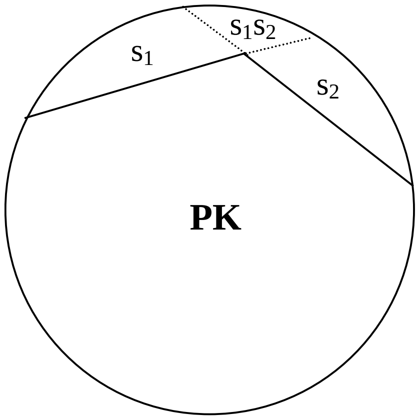
$$PK = K - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + s_1s_2 + s_2s_3 \ldots + s_n s_1;$$

pietiek ievērot, ka $s_1 + s_2 + \ldots + s_n - (s_1s_2 + s_2s_3 \ldots + s_n s_1)$ izsaka visu to K daļu kopējo laukumu, kuras ir ārpus P, Tādējādi

$$PK \geq K - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = Q.$$

un vienādība tiek sasniegta tikai tad, kad neviena no P virsotnēm neatrodas K iekšienē. Tā kā pēdējais nosacījums ir spēkā tikai gadījumā P = Q pierādījums līdz ar to ir pabeigts pilnībā." [Tot, 26. lpp.]





41. zīm. 42. zīm.

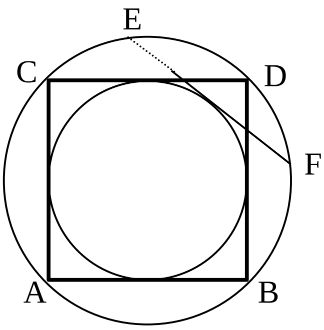
<u>Komentāri par pierādījumu</u>. Pierādījumā lietotie apzīmējumi var radīt divdomības. Īsāku pierakstu dēļ mēs dažkārt vienu un to pašu apzīmējumu lietojam dažādās nozīmēs. Piemēram, ar AB saprotam gan nogriezni, trijstūra malu, gan tā garumu. Pierādījumā apzīmējums "PK" nozīmē divu figūru P un K kopējo laukumu. Ar s_1, s_2 , …, s_n tiek saprasts gan pats segments, gan tā laukums, ar "reizinājumu" s_1s_2 tiek saprasts divu aplūkoto segmentu kopējais laukums. Kāpēc vienādībā

$$PK = K – (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + s_1s_2 + s_2s_3\ldots + s_n s_1$$

parādās lielumi s_1s_2 , s_2s_3, …, s_n ? Atskaitot no lielā riņķa laukuma "K" segmentu s_1 un s_2 laukumus, mēs divas reizes esam atskaitījuši šo segmentu kopējo laukumu "s_1s_2", sk. 42. zīm. Lai saglabātu vienādību, tas jāpieskaita. Kāpēc

$$K – (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = Q?$$

Vienādība acīmredzama gadījumā, ja s_1, s_2, …, s_n ir lielā riņķa K segmenti, kurus veido šai riņķī ievilkta regulāra n-stūra malas un tām atbilstošie loki (42. zīmējumā regulārais n-stūris ir kvadrāts ABCD, kura malas no K atšķeļ 4 segmentus). Tā kā visas lielā riņķa hordas, kuras pieskaras mazajam riņķim ir vienādas (pēc garuma) ar regulāra n-stūra malu, (sk. 43. zīmējumu, kur |AB| = |EF|) tad visi segmenti s_1, s_2 , …, s_n ir vienādi (pēc laukuma) ar segmentu, ko no lielā riņķa atšķeļ ap mazo riņķi apvilkts regulārs n-stūris.



43. zīm.

Tēmas patstāvīgam darbam

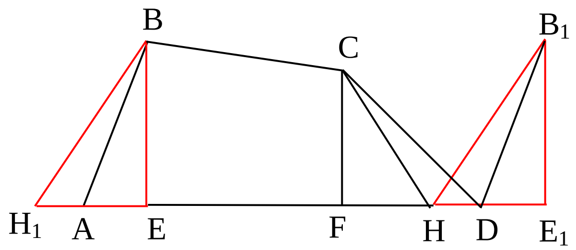
Vai varat atrisināt Zēnodora problēmu, izmantojot tikai elementārās matemātikas līdzekļus?

(Risinājumi, kuros izmanto bezgalīgus procesus, robežpārejas šeit netiek uzskatīti par elementāriem. Pietiek pierādīt, ka no visiem vienādmalu n-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim.)

Vai varat atrast ģeometriska rakstura pierādījumu tam, ka no visiem četrstūriem ABCD ar uzdotām malām AB = BC = CD = a un AD = $b \neq a$ vislielākais laukums ir trapecei. Noskaidrojiet, vai der šāds pierādījums? Tas veikts trīs soļos.

1. L(a, a, a, b) $\leq$ L(x, a, y, b), kur L(x, a, y, b) – laukums attiecīgam četrstūrim, kura malas x, y veido vienādus leņķus ar pamatu un x + y $\leq$ 2a.

Uzskatīsim, ka četrstūrim ABCD leņķis A ir lielāks nekā leņķis D (44. zīm.).



44. zīm.

Novelkam augstumus BE un CF. Konstruējam trijstūri DB_1E_1, kas vienāds ar trijstūri ABE, kur punkts E_1 atrodas uz malas AD pagarinājuma. Uz pamata AD izvēlamies tādu punktu H, kas minimizē attālumu summu CH + HB_1. Saskaņā ar iepriekš risināto Hērona uzdevumu punktam H piemīt īpašība: leņķis CHF vienāds ar leņķi B_1HE_1. Aplūkosim četrstūri H_1BCH, kurš konstruēts tā, ka trijstūris H_1BE vienāds ar trijstūri HB_1E_1. Četrstūrim H_1BCH perimetrs ir samazinājies, bet laukums palielinājies, jo:

$$L(H_1BA) = L(HB_1D) > L(CDH).$$

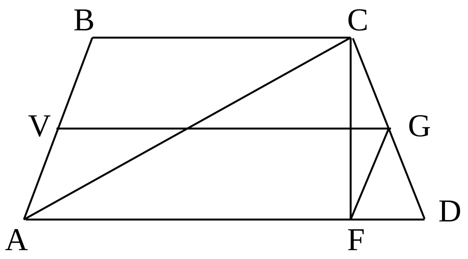
(Trijstūriem HB_1D un HCD ir kopējs pamats, bet pēdējam augstums ir mazāks.) No šejienes izriet, ka

$$L(H_1BCH) > L(ABCD).$$

Četrstūrim H_1BCH saskaņā ar konstrukciju leņķi pie pamata ir vienādi. Taču H_1BCH vēl nav vienādsānu trapece, jo mala H_1B ir garāka, bet mala CH īsāka nekā a. Nākamajā punktā konstruēsim vienādsānu trapeci, kurai laukums lielāks nekā četrstūrim H_1BCH. , bet kurai ar tādiem pašiem palielināsim pierādīsim, ka Tā kā šo malu summa ir mazāka par a, tad var iegūt vienādsānu trapeci

2. L(x, a, y, b) $\leq$ L(z, a, z, b), kur L(z, a, z, b) – laukums vienādsānu trapecei ar $z \leq a$.

Nevienādības pierādījumā izmantosim vienkārši kostatējamu faktu, ka vienādsānu trapecei diagonāle ir garāka nekā viduslīnija. Tiešām, ja VG (45. zīm.) ir trapeces ABCD viduslīnija un CF $\perp$ AD, tad VG = AF. (Trijstūris FGD ir vienādsānu.) Tā kā taisnleņķa trijstūrim hipotenūza garāka par kateti, tad AC > AF.

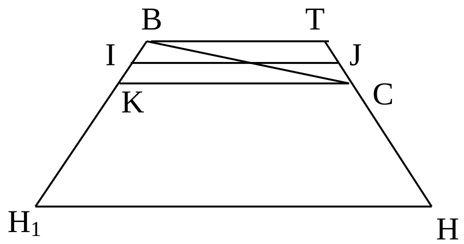


45. zīm.

Tagad četrstūri H_1BCH (46. zīm.) papildinām līdz vienādsānu trapecei H_1BTH un IJ izvēlamies kā vienādsānu trapeces KBTC viduslīniju. Tad trapece H_1IJH ir vienādsānu trapece ar malām, kuru garumi nepārsniedz *a*.

3. $L(x, y, x, b) \leq L(a, a, a, b)$, kur $L(x, y, x, b)$ – laukums vienādsānu trapecei ar pamatu *b* un malām, kas nepārsniedz *a*.

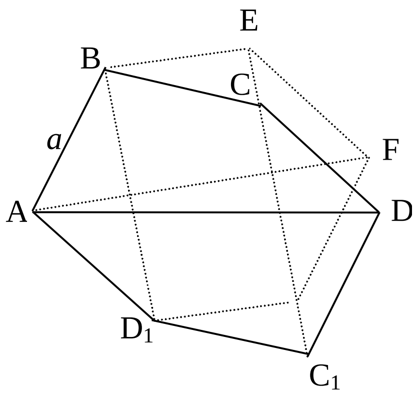
Vienādsānu trapeci ar īsākām malām var paplašināt līdz vienādsānu trapecei ar garākām malām palielinot laukumu.



46. zīm.

Vai, izmantojot 47. zīmējumā redzamo konstrukciju, jūs varētu pierādītu nevienādību

$L(a, a, a, b) \leq$ L(vienādsānu trapecei).



47. zīm.

D. Križanovska grāmatā ir iekļauts redaktora papildinājums “Luljēra uzdevums un Krāmera uzdevums”. Tajā aplūkotas divas ievērojamas teorēmas, kurām ir ciešs sakars ar klasisko izoperimetrisko uzdevumu. (Starp citu, man nav zināms, vai šīs teorēmas ir atrodamas arī kādā matemātikas enciklopēdijā)

Luljēra teorēma.
No visiem (*izliektiem*) *n-stūriem ar dotiem leņķiem* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *un malu summu, kas vienāda ar p, vislielākais laukums ir tam, kuru var apvilkt ap riņķa līniju.*
Krāmera[1] teorēma.
No visiem (*izliektiem*) *n-stūriem ar dotām malām* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*un doto leņķu summu, kas vienāda ar* $2d(n-2)$) *vislielākais laukums ir tam, kuru var ievilkt riņķa līnijā.*

Nosacījums par leņķu summu $2d(n-2)$ ir lieks, jo izliektam daudzstūrim citādi nemaz nevar būt. Šīs teorēmas var formulēt nedaudz īsāk:

No visiem (izliektiem) n-stūriem ar dotiem leņķiem un perimetru maksimālais laukums ir tam, kura malas pieskaras riņķa līnijai.

No visiem n-stūriem ar dotām malām vislielākais laukums ir tam, kura virsotnes atrodas uz riņķa līnijas.

Formulēsim Luljēra un Krāmera uzdevumu vienkāršākajā gadījumā:

Luljēra uzdevums. *Pierādīt, ka no visiem izliektiem četrstūriem ar uzdotiem leņķiem un uzdotu perimetru vislielākais laukums ir tam, kurā var ievilkt riņķa līniju.*

Krāmera uzdevums. *Pierādīt, ka no visiem izliektiem četrstūriem ar uzdotiem malu garumiem vislielākais laukums ir tam, ap kuru var apvilkt riņķa līniju.*

Ar šiem pēc formulējuma vienkāršajiem uzdevumiem ir nodarbojušies daudzi cilvēki. Ir atrasti dažādi risinājumi, sk. piemēram, [JB, Zet, Pal, Lusterniks]. Starp tiem ir arī tādi, kuros izmantoti tikai elementārās matemātikas līdzekļi.

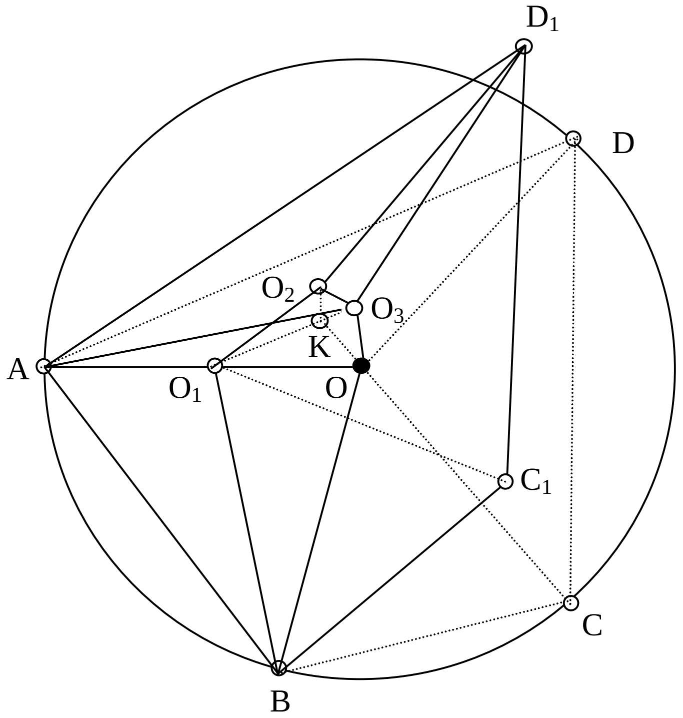
Īpašu ievērību ir pelnījis Viktora Palamodova (dz. 1938. g. Ribinskā) risinājums, kurš grāmatā [Kr, 103. lpp.] raksturots kā ļoti elegants. Viņš abu uzdevumu tīri ģeometriskus risinājumus esot piedāvājis 1952. gadā. Tas nozīmē, ka viņam tad bija tikai 14 gadu. Skolēns (no Maskavas) vēlāk savu risinājumu ir publicējis augstvērtīgā krājumā *Математическое просвещение*, [Pal] kas tagad ir kļuvis par bibliogrāfisku retumu. Diemžēl minētais krājums ir piedzīvojis tikai 5 (?) izlaidumus (sējumus).
V. Palamodovs ir kļuvis par ievērojamu matemātiķi, doktora ("lielā" jeb habilitētā) grādu ieguvis 28 g vecumā, veicis pētījumus diferenciālvienādojumu, funkciju teorijā.

Vai vadoties pēc autora risinājumā izmantotās konstrukcijas (48. zīm.), kurā tiek salīdzināti divu četrstūru laukumi, jūs varētu atrisināt Krāmera uzdevumu? Manuprāt, V. Palamodova risinājums [Pal] ir samērā garš un diezgan grūti pārskatāms. Vismaz tāds iespaids radās pēc pirmā lasījuma. Lai lasītājs novērtētu risinājuma elegantumu, protams, vajadzētu iepazīties ar pirmavotu.

Vai gadījumā, kad četrstūrim trīs malas ir vienādas, jūs varētu atrast vienkāršāku risinājumu?

Vēl viens Krāmera uzdevuma risinājums, kurā izmanto figūru līdzību un arī algebriskus pārveidojumus ir dots grāmatā [ŠČJ2, 241.-243. lpp.; JB].

1) Cramer G., 1704-1752, šveiciešu matemātiķis.



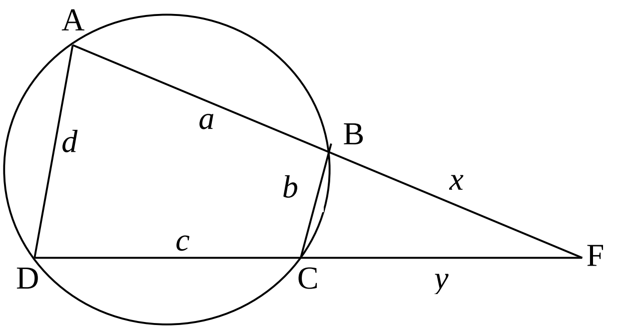
48. zīm.

Vai varat atrast riņķī ievilkta n-stūra laukuma formulu, ja tam ir uzdoti visu malu garumi?

<u>Uzdevums</u>. Pēc četrām malām noteikt riņķī ievilkta četrstūra laukumu. [Zet, 178. lpp.] Pieņem, ka riņķī ievilkts četrstūris ABCD ar malām AB = *a*, BC = *b*, CD = *c* un DA = *d*. (49. zīm.) Apzīmēsim BF ar *x*, CF ar *y*. Tad, ņemot vērā, ka leņķis BCA vienāds ar leņķi BAD (riņķi ievilktiem četrstūriem pretējo leņķu summas ir vienādas ar 180 grādiem), iegūsim

$$\frac{a+x}{y}=\frac{d}{b}; \quad \frac{c+y}{x}=\frac{d}{b}; \quad ab+bx=dy;$$

$$bc+by=dx; \quad bx-dy=-ab; \quad dx-by=bc\,.$$



49. zīm.

Tagad veicam pārveidojumus:

$$x=\frac{b(dc+ab)}{d^2-b^2}; \qquad y=\frac{b(bc+ad)}{d^2-b^2};$$

$$a + b + c + d = 2p; \quad x + y + b = 2p;$$
$$p' = \frac{b(c+b+a-b)}{2(d-b)} = \frac{b(p-b)}{d-b}$$
$$p' - x = \frac{b(a+b+d-c)}{2(b+d)} = \frac{b(p-c)}{b+d}$$

$$p' - y = \frac{b(b+c+d-a)}{2(b+d)} = \frac{b(p-a)}{b+d}$$
$$p' - b = \frac{b(b+a+c-d)}{2(d-b)} = \frac{b(p-d)}{d-b}$$
$$S_{BFC} = \frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$S_{AFD} = \frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$

Daži uzdevumi
ar praktisku ievirzi, kurus var atrisināt ar izklāstītajiem paņēmieniem vai iegūt kā sekas no atbilstošā vispārīgā rezultāta.

Optimālā rene, grāvis, kanāls.
No trīs vienādiem dēļiem ar platumu a cm jāizgatavo rene, kuras šķērsgriezumam ir trapeces forma. Kā to izdarīt tā, lai renes caurlaides spēja būtu vislielākā (*šķērsgriezuma laukums vislielākais*) [Nag, 49. lpp.]

No trīs vienāda platuma dēļiem jāizgatavo ūdens noteces rene, kuras šķērsgriezumam ir vienādsānu trapeces veids. Kādam jābūt leņķim starp trapeces sānu malu un pamatu, lai renes caurlaides spēja būtu vislielākā, t. i., lai trapeces laukums būtu vislielākais? [Š1]

No skārda jāizgatavo vaļēja rene tā, lai tās būtu vienādsānu trapeces forma, kuras pamati un sānu malas ir vienādas ar 5 *dm. Kādam jābūt renes platumam, lai tajā ietilptu visvairāk ūdens?* [Sav, 66. lpp.]

Purvu nosusināšanai jāizrok vaļējs kanāls, kura šķērsgriezums ir vienādsānu trapece. Kanāls jāierīko tā, lai zudumi, kas, ūdenim tekot, rodas berzes dēļ, būtu vismazākie. Kādam slīpuma leņķim šie zudumi būs vismazākie, ja kanāla šķērsgriezuma laukums ir S, bet dziļums h. [Sav, 66. lpp.]

Jumiķis vēlas izgatavot visietilpīgāko vaļēju ūdens tekni, kurai dibens un sāni būtu 10 *cm plati un kuras sāni attiecībā pret dibenu būtu vienādā slīpumā. Kādam jābūt ūdens teknes platumam tās augšā. Atb.* 20 cm. [GL, 328. lpp.]

Aplūkosim simetrisku piecstūri, kuram 4 malas ir vienādas un uzdots perimetrs P = 4*a* + *c* (50. zīm.). Tā laukumu izteiksim kā trīs trijstūru laukumu summu.

$$L_1 = \frac{1}{4}x\sqrt{(4a^2 - x^2)}\,,\ \ L_2 = \frac{1}{4}c\sqrt{(4x^2 - c^2)}$$

$$L = 2L_1 + L_2 \ \Rightarrow\ 4L = 2\,x\sqrt{(4a^2 - x^2)} + c\sqrt{(4x^2 - c^2)}\,.$$

Vai varat pierādīt nevienādību

$$4L = 2\,x\sqrt{(4a^2 - x^2)} + c\sqrt{(4x^2 - c^2)} \le \frac{P^2}{5\sqrt{5-\sqrt{20}}}\ ?$$

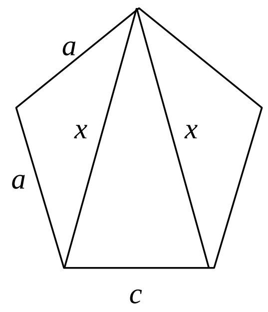
Pieņemsim, ka laukuma izteiksme tiek novērtēta ar šādu nevienādību

$$(qx - y)^2 \ge 0 \Rightarrow\ 2xy \le qx^2 + \frac{y^2}{q},\ \ q > 0.$$

$$4L \le qx^2 + \frac{4a^2 - x^2}{q} + \frac{rc^2}{2} + \frac{4x^2 - c^2}{2r} = \left(q - \frac{1}{q} + \frac{2}{r}\right)x^2 + \frac{c^2}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) + \frac{4a^2}{q}\,.$$

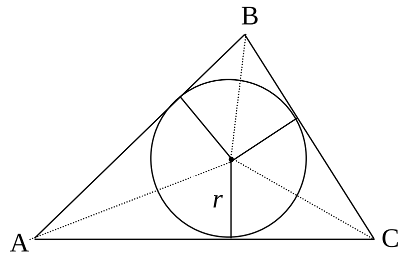
Vai iespējams izvēlēties q un r tā, lai

$$\left(q - \frac{1}{q} + \frac{2}{r}\right)x^2 + \frac{c^2}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) + \frac{4a^2}{q} \le \frac{P^2}{5\sqrt{5-\sqrt{20}}}\ ?$$



50. zīm.

Pierādiet, ka no visiem izoperimetriskiem trijstūriem vislielāko ievilktu riņķi satur vienādmalu trijstūris (50. zīm.). Vispāriniet rezultātu.



51. zīm.

Pierādiet, ka katram trijstūrim ABC ir spēkā nevienādība

$$r \le \frac{\sqrt{\sqrt{3}L}}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{9}\,p \le \frac{1}{2}R\,,$$

kur r, ir trijstūrī ABC (50. zīm.) ievilktas, R ap to apvilktas riņķa līnijas rādiuss, p – pusperimetrs un S trijstūra ABC laukums.

Pierādiet vienkāršāku nevienādību

$$r \le \frac{1}{2}R \text{ jeb } R \ge 2r,$$

kāda pastāv starp ievilkta un apvilkta riņķa rādiusiem. Kādā gadījumā pastāv vienādība? Kā mainās konstante $\frac{1}{2}$, ja visu trijstūru klasi sašaurina uz taisnleņķa trijstūriem?

Atzīmēsim ka "vidējā" nevienādība

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}L}}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{9}p \text{ jeb } L \le \frac{\sqrt{3}}{36}(2p)^2$$

ir tā saucamā slavenā *izoperimetriskā nevienādība*. Tā dod atbildi uz jautājumu, kāds var būt vislielākais laukums figūrai (konkrētajā gadījumā trijstūrim) ar uzdotu perimetru. Šāda tipa uzdevumiem ir praktiska interese. Kādu vislielāko zemes gabalu var ierobežot, ja mūsu rīcībā esošais materiāls ļauj uzcelt žogu ar garumu $2p$ un ja mums jābūvē noteiktas formas žogs (piemēram, trijstūris vai četrstūris). Kā mainās risinājums, ja uzdevuma noteikumi paredz kādus citus ierobežojumus? Piemēram, zemes gabals var atrasties pie kādas ēkas sienas, upes un ne visur tā ierobežošanā jāizmanto žogam paredzētais izejmateriāls? Sk, [Kr, ŠČJ].

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

1. uzdevums. Pierādīt, ka no visiem 4-stūriem ar pamatu d un uzdotu pārējo trīs malu summu s, s > d, vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei ar trīs vienādām malām.

2. uzdevums. Atrast maksimālo vērtību funkcijai

$$3\sin 2\alpha + 2\sqrt{3}\sin^2\alpha.$$

3. uzdevums. Pierādīt nevienādību

$$\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin\alpha\sqrt{4\sin^2\beta - \sin^2\alpha} \le 3\sqrt{3}.$$

4. uzdevums. Pierādīt nevienādību

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + 2\sqrt{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)} \times$$
$$\times\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma)(\sin\beta - \sin\alpha + \sin\gamma)} \le 3\sqrt{3} \qquad (1)$$

ja α, β, un γ šauri leņķi.

5. uzdevums. Atrast maksimālo vērtību funkcijai

$$3x\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{3}x^2.$$

6. uzdevums. Pierādīt nevienādību

$$x\sqrt{1-x^2} + 2y\sqrt{1-y^2} + x\sqrt{4y^2 - x^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

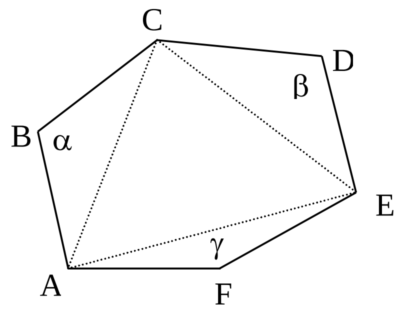
7. uzdevums. Pierādīt nevienādību

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} +$$
$$+\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y-x+z)} \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Visi šīs grupas uzdevumi ir sastādīti, izmantojot izoperimetrisku 6-stūru ekstremālo īpašību, proti, no visiem 6-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram 6-stūrim.

Aplūkosim 6-stūri, kuram visas malas vienādas ar 1 un izteiksim tā laukumu L kā 4 trijstūru laukumu summu. Apzīmēsim AC = x, CE = y, EA = z. (52. zīm.). Tad

$$\frac{x}{2}=\sin\frac{\alpha}{2},\quad \frac{y}{2}=\sin\frac{\beta}{2},\quad \frac{z}{2}=\sin\frac{\gamma}{2},$$



52. zīm.

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta+\frac{1}{2}\sin\gamma+\sqrt{\frac{x+y+z}{2}\cdot\frac{x+y-z}{2}\cdot\frac{x-y+z}{2}\cdot\frac{y-x+z}{2}}=$$

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Zināms, ka maksimālais laukums ir regulāram 6-stūrim, tāpēc $\max \mathrm{L}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Nevienādība (1) no iegūtā rezultāta atšķiras tikai ar apzīmējumiem. Nevienādība (2) izriet no (1), jo

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,.$$

Atrisināsim 2. uzdevumu, lietojot Košī nevienādību:

$$3\sin 2\alpha+2\sqrt{3}\sin^2\alpha=3\sin 2\alpha+\sqrt{3}(1-\cos 2\alpha)=\sqrt{3}+3\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha\le$$

$$\le\sqrt{3}+\sqrt{9+3}\cdot\sqrt{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}=3\sqrt{3}\,.$$

Atrisināsim 6. uzdevumu, vairākkārt lietojot vienkāršu nevienādību

$$2uv\le u^2+v^2.$$

$$f=x\sqrt{1-x^2}+2y\sqrt{1-y^2}+x\sqrt{4y^2-x^2}=$$

$$=px\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{p}+2py\cdot\frac{\sqrt{1-y^2}}{p}+\frac{x}{p}\cdot p\sqrt{4y^2-x^2}\le$$

$$\le\frac{p^2x^2}{2}+\frac{1-x^2}{2p^2}+p^2y^2+\frac{1-y^2}{p^2}+\frac{x^2}{2p^2}+\frac{p^2(4y^2-x^2)}{2}=$$

$$=\left(p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{4p^2}{2}\right)y^2+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{p^2}=\left(3p^2-\frac{1}{p^2}\right)y^2+\frac{3}{2p^2}$$

Ņemsim p tādu, lai koeficients pie y^2 būtu vienāds ar nulli. Šādas izvēles pamatā ir tas, ka mēs vēlamies atrast funkcijas f iespējami precīzu novērtējumu.

$$p^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad f\le\frac{3}{2p^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vienādība $\max f = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ tiek sasniegta, ja $x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Vai, izdarot piemērotu novērtējumu, jūs varētu pierādīt nevienādību (2)?

10. uzdevums. Noteikt maksimālo vērtību summai $ab + cd$, ja a, b, c un d pozitīvi skaitļi, kuriem $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

12. nodaļa **Funkcija** $f = \dfrac{t^n}{(t-a)^m}$

Vispirms atrisināsim divus piemērus, kuri ir atsevišķs funkcijas *f* gadījums. Tad aplūkosim dažus saistoša rakstura piemērus, kuros parādās aplūkojamā veida funkcija.

Šajā nodaļā bieži lietosim šādas sekas no nevienādības $G \leq A$: *ja pozitīvu lielumu summa ir nemainīgs lielums, tad to reizinājums ir maksimāls, ja tie visi vienādi*. Īsāk šīs sekas apzīmēsim ar SK (**s**umma **k**onstanta).

<u>1. piemērs</u>. Atrast funkcijas $\dfrac{x^2}{x-1}$ vismazāko vērtību, ja x > 1.

Uzdevumu atrisināsim ar vairākiem paņēmieniem ar mērķi kādu no tiem turpmāk piemērot funkcijas *f* minimuma noteikšanā.

1. (vērtību kopas izmantošana)

No sakarības $\dfrac{x^2}{x-1} = y$ izslēgsim x:

$$x^2 = y(x-1)$$

$$x^2 - yx + y = 0.$$

Lai kvādrātvienādojumam attiecībā pret x būtu atrisinājums, tā diskriminantam D jābūt nenegatīvam.

$$D = y^2 - 4y \geq 0$$
$$y(y-4) \geq 0.$$

No šejienes $y \geq 4$ vai $y \leq 0$. Gadījums $y \leq 0$ neder, jo saskaņā ar nosacījumu x > 1 jābūt y > 0. Tas nozīmē, ka $y_{min} = 4$. Šo vērtību iegūst, ņemot x = 2.

2. (substitūcijas izmantošana)

Apzīmēsim t = x – 1. Tad pozitīviem t jāmeklē minimums funkcijai

$$\frac{(1+t)^2}{t} = \frac{1+2t+t^2}{t} = \frac{1}{t} + t + 2.$$

Labo pusi novērtēsim, izmantojot nevienādību starp aritmētisko un ģeometrisko vidējo.

$$\frac{1}{t} + t + 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{t} \cdot t} + 2 = 4.$$

Vienādību dod t = 1. Tātad x = 2 ir minimuma punkts.

3. (apgrieztā lieluma izmantošana)

Meklēsim maksimumu daļai

$$\frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Apzīmējot $t = \frac{1}{x}$ dabūjam kvadrātfunkciju $t - t^2$, kura maksimumu sasniedz tās virsotnē $t = 0{,}5$. Tātad sākotnējā funkcija punktā $x = 2$ sasniedz minimumu.

Atbilde. $\min\limits_{x>1} \frac{x^2}{x-1} = 4$. Minimums tiek sasniegts punktā $x = 2$.

Sekas. $\min\limits_{t>a} \frac{t^2}{t-a} = 4a$. Minimums tiek sasniegts punktā $x = 2a$.

2. piemērs. Atrast funkcijas $\frac{x^3}{x-1}$ vismazāko vērtību, ja $x > 1$.

Viegli saprast, ka tagad mērķi neizdosies sasniegt ar pirmo paņēmienu. Atšķirībā no iepriekšējā piemēra, tagad minimums jāmeklē sarežģītākai funkcijai

$$\frac{(1+t)^3}{t} = \frac{1+3t+3t^2+t^3}{t} = \frac{1}{t} + 3t + t^2 + 3.$$

Tomēr otrais paņēmiens ir derīgs, jo labo pusi var pārrakstīt vajadzīgajā formā:

$$\frac{1}{t} + 3t + t^2 + 3 = \left(\frac{3}{4t} + 3t\right) + \left(\frac{1}{8t} + \frac{1}{8t} + t^2\right) + 3.$$

Iekavās iekļautajiem saskaitāmajiem piemīt īpašība – to reizinājums nav atkarīgs no t. Saskaņā ar nevienādību $A \geq G$ saskaitāmo summa būs minimāla, ja tie savstarpēji vienādi. Vēl vairāk, abi iekavās iekļautie lielumi savu minimumu sasniedz vienā un tajā pašā punktā, jo:

$$\frac{3}{4t} = 3t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

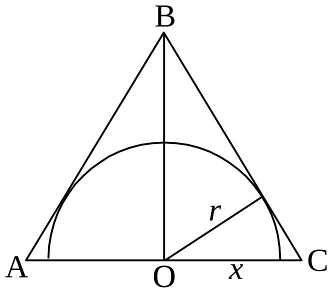
$$\frac{1}{8t} = t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Atbilde. $\min\limits_{x>1} \frac{x^3}{x-1} = \frac{27}{4}$. Minimums tiek sasniegts punktā $x = \frac{3}{2}$.

Sekas. $\min\limits_{t>a} \frac{t^3}{t-a} = \frac{27}{4}a^2$. Minimums tiek sasniegts punktā $t = \frac{3}{2}a$.

Daži saistoši uzdevumi.

3. piemērs. Atrast vienādsānu trijstūri ar vismazāko laukumu, kurš apvilkts ap doto pusriņķi. (53. zīm.)



53. zīm.

Apvilkta trijstūra ABC augstumu pret pamatu AC apzīmēsim ar h un laukumu rēķināsim pēc formulas

$$L = xh.$$

Pēc Pitagora teorēmas $|AC|^2 = x^2 + h^2$. Iegūsim sakarību starp x un h, izsakot divos veidos trijstūra ABC laukumu (var izmantot arī trijstūru un līdzību):

$$xh = r\sqrt{x^2 + h^2}\ .$$

Nav būtiski, kuru no nezināmajiem x vai h izteikt, jo tie abi sakarībā ietilpst simetriskā veidā.

$$x^2h^2 = r^2(x^2 + h^2)$$

$$x^2(h^2 - x^2) = r^2h^2$$

$$x^2 = \frac{r^2h^2}{h^2 - r^2}\ .$$

Laukuma vietā aplūkosim tā kvadrātu (pozitīvas funkcijas kāpināšana kvadrātā nemaina minimuma punktu).

$$L^2 = x^2h^2 = \frac{r^2h^4}{h^2 - r^2}$$

Apzīmējot $t = h^2$, dabūjam funkciju

$$f(t) = \frac{r^2t^2}{t - r^2}\ .$$

Izmantojot kādu no minētajiem trīs paņēmieniem, iegūsim, ka $t_{\min} = 2r^2$, $h^2 = 2r^2$. Tas nozīmē, ka minimālais laukums būs vienādsānu taisnleņķa trijstūrim.

<u>Sekas</u>. No visiem rombiem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir kvadrātam.

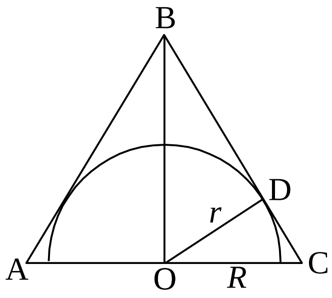
<u>4. piemērs</u>. No visiem vienādsānu trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vienādmalu trijstūrim ir vismazākais laukums un vismazākais perimetrs. [Zet, 69. lpp.]

Norādījums. Izteikt laukuma kvadrātu kā funkciju $L^2 = \dfrac{r^2x^3}{x - 2r}$, kur x – trijstūra augstums, r- riņķa rādiuss.

<u>5. piemērs</u>. Ap puslodi apvilkt konusu ar vismazāko tilpumu. Atrast optimālā konusa virsotnes leņķi.

Konusa augstumu apzīmēsim ar x, pamata rādiusu ar R, tilpumu ar V un lodes rādiusu ar r (54. zīm.). Tad

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 x.$$



54. zīm.

Starp mainīgajiem R un x pastāv sakarība

$$Rx = r\sqrt{R^2 + x^2}.$$

(To iegūst, divos veidos izsakot taisnleņķa trijstūra BOC laukumu, vai, izmantojot trijstūru BOC un BOD līdzību.) Izsakot R:

$$R^2 = \frac{x^2 r^2}{x^2 - r^2}.$$

un ievietojot to tilpuma izteiksmē, iegūtu funkciju

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{x^3}{x^2 - r^2}.$$

Dalījums $W = \dfrac{x^3}{x^2 - r^2}$ atšķiras no aplūkojamā veida funkcijas $\dfrac{t^3}{t-a}$ (tam saucējā mainīgais ieiet 2. pakāpē). Kā rīkoties? Viena no iespējām meklēt piemērotu substitūciju. Noskaidrosim, kā mainās tilpuma izteiksme, ja izsakām otru mainīgo x.

Apzīmējot $R^2 = t$, dabūjam apskatāmā veida funkciju $\dfrac{t^3}{t - r^2}$, kura minimumu sasniedz punktā $t = \dfrac{3}{2}r^2$ (sk. 2. piemēru). Tātad

$$R^2 = \frac{3}{2}r^2, \quad x^2 = \frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} = 3r^2$$

Minimālā konusa virsotnes leņķi α var noteikt, vispirms nosakot pusleņķa sinusu

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$$

vai uzreiz no laukumu vienādības: $|BC|^2 \sin\alpha = 2Rx$.

$$\sin\alpha = \frac{2Rx}{R^2 + x^2} = \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3}{2} + 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Minimālā konusa virsotnes leņķis izteikts grādos ir 70,528…

Piezīme. Kā blakus rezultātu esam ieguvuši šādu vienādību

$$2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Substitūciju, ar kuras palīdzību no funkcijas $\frac{x^3}{x^2 - r^2}$ var pāriet uz funkciju $\frac{t^3}{t - r^2}$ satur piemērā lietotā sakarība $Rx = r\sqrt{R^2 + x^2}$. Apzīmēsim $x = \frac{yr}{\sqrt{y^2 - r^2}}$. Tad $x^2 - r^2 = \frac{y^2 r^2}{y^2 - r^2} - r^2 = \frac{r^4}{y^2 - r^2}$, $\frac{x^3}{x^2 - r^2} = \frac{y^3}{r\sqrt{y^2 - r^2}}$. Pēdējo vienādību kāpinot kvadrātā un y^2 apzīmējot ar u, iegūsim vajadzīgā veida funkciju $\frac{u^3}{u - r^2}$.

6. piemērs. Ap lodi ar rādiusu r apvilkt konusu ar vismazāko tilpumu. Atrast minimālā konusa virsotnes leņķi.
Atrast vismazāko tilpumu konusam, kurš apvilkts ap lodi ar rādiusu a. [GK, 114. lpp.]

Iegūstiet patstāvīgi ap lodi apvilkta konusa tilpuma formulu

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{x^2}{x - 2r},$$

kur x konusa augstums.
Saskaņā ar 1. piemēru tilpums V būs minimāls, ja $x = 4r$. Zinot šo sakarību, viegli noskaidrot, ka minimālā konusa tilpums ir divas reizes lielāks nekā dotās lodes tilpums. Minimālā konusa virsotnes leņķi β var noteikt no sakarības

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}.$$

Tagad 2. piemēra risinājumu vispārināsim patvaļīgam n. Uzskatīsim, ka $t > a$ un funkcijas f izteiksmē, ņemsim $t = ay$. Tad $y > 1$ un

$$f = \frac{t^n}{t - a} = \frac{a^n y^n}{ay - a} = a^{n-1} \cdot \frac{y^n}{y - 1}.$$

Apzīmēsim $x = y - 1$. Tad $x > 0$, $y = x + 1$ un

$$f = a^{n-1} \cdot \frac{(x+1)^n}{x}.$$

Skaitliskais koeficients neietekmē minimuma atrašanās vietu, tāpēc meklēsim minimumu funkcijai

$$g(x) := \frac{(x+1)^n}{x},\ x > 0.$$

1. Ja $n = 1$, tad funkcija g ir monotona, jo

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > 1 \ .$$

Funkcijai minimuma nav. Funkcijas g vērtības var būt pēc patikas tuvas skaitlim 1, nekad to nesasniedzot, jo $x > 0$.

2. Ja $n = 2$, tad

$$\min g(x) = g(1) = 4,$$

$$\frac{(1+\mathrm{x})^2}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{x} + 2 \geq 4 \, .$$

3. Ja $n = 3$, tad saskaņā ar 2. piemēra risinājumu

$$g(x) = \frac{(x+1)^3}{x} = x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3 = \left(x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x}\right) + \left(\frac{3}{4x} + 3x\right) + 3$$

$$\min \ g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4} \, .$$

4. Ja $n = 4$, tad

$$g(x) = \frac{(x+1)^4}{x} = x^3 + 4x^2 + 6x + \frac{1}{x} + 4 =$$

$$= \left(x^3 + \frac{1}{81x} + \frac{1}{81x} + \frac{1}{81x}\right) + \left(4x^2 + \frac{4}{27x} + \frac{4}{27x}\right) + \left(6x + \frac{6}{9x}\right) + 4 \, .$$

Katrs iekavās iekļautais lielums kļūst minimāls, ja:

$$x^3 = \frac{1}{81x}, \ \ 4x^2 = \frac{4}{27x}, \ \ 6x = \frac{6}{9x} \, .$$

No šejienes iegūstam minimuma punktu vērtību $x = \frac{1}{3}$ un

$$\min \ g(x) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{256}{27} \, .$$

Vai arī visiem pārējiem n, līdzīgā veidā var atrast funkcijas $g(x) := \frac{(x+1)^n}{x}, x > 0$, minimumu? Vadoties no risinājumiem, kad aplūkojām atsevišķas n vērtības, var izvirzīt hipotēzi, ka šī funkcija minimumu sasniedz punktā $x_{\min} = \frac{1}{n-1}$. Jeb, citiem vārdiem, ka visiem pozitīviem x un $n > 1$ ir spēkā nevienādība:

$$\frac{(x+1)^n}{x} \geq \frac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}} \, .$$

Pēc Ņūtona binoma formulas:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k ,$$

kur $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ – kombināciju skaits no n elementiem pa k.

$$\frac{1}{x}(1+x)^n = \mathrm{C}_n^1 + \frac{\mathrm{C}_n^0}{\mathrm{x}} + \mathrm{C}_n^2 x + \mathrm{C}_n^3 x + \ldots + \mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Labo pusi uzrakstīsim kā $\mathrm{C}_n^1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, kur

$$f_1 = \frac{\mathrm{C}_n^2}{(n-1)^2 x} + \mathrm{C}_n^2 x,$$

$$f_2 = \frac{2\mathrm{C}_n^3}{(n-1)^3 x} + \mathrm{C}_n^3 x^2,$$

$$\ldots$$

$$f_k = \frac{k\mathrm{C}_n^{k+1}}{(n-1)^{k+1} x} + \mathrm{C}_n^{k+1} x^k.$$

Funkcijas f_1 labās puses saskaitāmo reizinājums ir nemainīgs lielums (nav atkarīgs no x). Tāpēc šo saskaitāmo summa būs minimāla, ja

$$\frac{\mathrm{C}_n^2}{(n-1)^2 x} = \mathrm{C}_n^2 x \Rightarrow x = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Līdzīgi spriežam par f_2, vispirms to pārveidojot kā trīs saskaitāmo summu:

$$f_2 = \frac{2\mathrm{C}_n^3}{(n-1)^3 x} + \mathrm{C}_n^3 x^2 = \mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{(n-1)^3 x} + \frac{1}{(n-1)^3 x} + x^2\right).$$

Funkciju f_k uzrakstām kā k + 1 saskaitāmo summu, kuru reizinājums nav atkarīgs no x:

$$f_k = \mathrm{C}_n^{k+1}\left(\frac{1}{(n-1)^{k+1} x} + \frac{1}{(n-1)^{k+1} x} \cdots \frac{1}{(n-1)^{k+1} x} + x^k\right).$$

Tā kā katra funkcija $f_1,\ldots,f_n$ minimumu sasniedz vienā un tajā pašā punktā $x = \frac{1}{n-1}$, tad tajā pašā punktā to sasniedz arī funkcija g.

Un tomēr pierādījumā viena vieta ir palikusi nepamatota. Vai varat saskatīt kāda?

Mēs neesam pamatojuši, ka funkcijās $f_1,\ldots,f_n$ ietilpstošo attiecīgo saskaitāmo summa ir vienāda ar $\frac{C_n^0}{x}$, t. i., ka

$$\frac{\mathrm{C}_n^2}{(n-1)^2} + \frac{2\mathrm{C}_n^3}{(n-1)^3} + \cdots + \frac{(n-1)\mathrm{C}_n^n}{(n-1)^n} = 1 \text{ jeb } \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\mathrm{C}_n^k}{(n-1)^k} = 1.$$

Pamēģiniet šo interesanto sakarību pierādīt patstāvīgi!

Tagad uzrādīsim citu īsāku un vienkāršāku funkcijas f minimuma atrašanas paņēmienu.

Meklēsim maksimumu apgrieztajam lielumam

$$h = \frac{1}{f} = \frac{t-a}{t^n} = \frac{1}{t^{n-1}} - \frac{a}{t^n} = \frac{1}{t^{n-1}}\left(1 - \frac{a}{t}\right)$$

Apzīmēsim, $\frac{a}{t} = y$. Tad

$$h = \frac{y^{n-1}}{a^{n-1}}(1-y) = ky^{n-1}(1-y).$$

Ņemot vērā, ka koeficients k neietekmē minimuma punkta atrašanās vietu, aplūkosim reizinājumu

$$y^{n-1}(1-y) = y \cdot y \cdot \ldots \cdot y \cdot [(n-1-(n-1)y]\frac{1}{n-1}.$$

Pirmo n reizinātāju summa ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums ir vislielākais, ja tie visi vienādi.

$$y = n-1-(n-1)y$$

$$yn = n-1$$

$$y = \frac{n-1}{n}.$$

Pēc ievietošanas iegūstam, ka funkcijas f minimuma punkts ir

$$t_{\min} = \frac{an}{n-1} \quad \text{un} \quad \min_{t>a} \frac{t^n}{t-a} = \frac{(n-1)^{(n-1)}}{n^n a^{n-1}}.$$

Uzrādīsim vēl dažas funkcijas, kuru minimumu vai maksimumu var atrast līdzīgā veidā.

Polinoms $P_n = x(1-x)^n$

Meklēsim maksimumu polinomam P_n pozitīviem x. Tā kā P_n ir negatīvs, ja $x > 1$, tad pietiek aplūkot tikai x no intervāla (0, 1).

Kāpināsim polinomu n-jā pakāpē un pārveidosim reizinājumu tā, lai varētu lietot sekas SK:

$$P^n = x^n(1-x^n)^n$$

$$nP^n = (nx^n)(1-x^n)\ldots(1-x^n)$$

Pozitīvu reizinātāju summa ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja tie visi vienādi:

$$nx^n = 1-x^n$$

$$x^n = \frac{1}{n+1}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

Tātad visiem pozitīviem x ir spēkā nevienādība:

$$x(1-x^n) \le \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

No šejienes var iegūt dažādas citas nevienādības. Ņemsim $x = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, tad

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \iff \frac{n^2-1}{n^2} < \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1-\frac{1}{n+1}.$$

Polinoms $t^n(1-t)$
Apzīmējot $x = 1-t$, iegūstam iepriekš analizēto polinomu.

Dalījums $f = \dfrac{x^n}{x^2-a^2}$, $x > a > 0$
Jānosaka minimumus. Meklēsim maksimumu apgrieztajam lielumam.

$$\frac{1}{f} = \frac{x^2-a^2}{x^n} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{a^2}{x^n}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x^{n-2}}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right).$$

Substitūcija $t = \dfrac{a}{x}$, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{t}{a}$, ļauj pāriet uz polinomu:

$$\frac{1}{f} = \frac{t^{n-2}}{a^{n-2}}(1-t^2).$$

$$g := t^k(1-t^2)$$

Pārveidosim polinomu, kāpinot to kvadrātā, ar nolūku izmantot sekas SK.

$$g^2 = t^{2k}(1-t^2)(1-t^2).$$

Apzīmējam $y = t^2$. Tad

$$g^2 = y^k(1-y)(1-y) = c^k\left(\frac{y}{c}\right)^k(1-y)(1-y)$$

Izvēlamies c, lai reizinātāju summa

$$\frac{ky}{c}+1-y+1-y = \left(\frac{k}{c}-2\right)y+2$$

nebūtu atkarīga no y, t. i., $c = \dfrac{k}{2}$. Tad reizinājums būs maksimāls, ja

$$\frac{y}{c} = 1-y$$

$$y = c - cy,\ \ y(1+c) = c$$

$$y = \frac{c}{1+c} = \frac{k}{2+k}.$$

Tagad nosakām minimuma punktu x:

$$t = \sqrt{y} = \sqrt{\frac{k}{k+2}} \ \Rightarrow\ x = \sqrt{t} = \sqrt[4]{\frac{k}{k+2}}.$$

<u>Piemērs</u>. Funkcija $h = \dfrac{y^n}{(y-a)^{n-2}}$. Atrast minimumu, ja $y > a$.

Tās minimumu var noteikt, ar dažādiem paņēmieniem. Viens no tiem – izmantot iepriekš aplūkoto funkciju f un tās izteiksmē ievietot $x = \dfrac{rt}{\sqrt{t^2-r^2}}$. (Šāda sakarība parādījās uzdevumā par minimālā tilpuma konusu, kurš apvilkts ap lodi, sk 5. piemēru) Tad

$$x^2 = \frac{r^2t^2}{t^2-r^2}, \quad x^2 - r^2 = \frac{r^2t^2}{t^2-r^2} - r^2 = \frac{r^4}{t^2-r^2}.$$

$$f = \frac{x^n}{x^2-r^2} = \frac{r^n t^n (t^2-r^2)}{(t^2-r^2)^{\frac{n}{2}} r^4} = \frac{r^{n-4}t^n}{(t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$f^2 = \frac{r^{2n-8}t^{2n}}{(t^2-r^2)^{n-2}}.$$

Apzīmējot $y = t^2$, iegūstam funkciju $h_1 = \dfrac{a^{n-4}y^n}{(y-a)^{n-2}}$, kas no h atšķiras tikai ar skaitlisku reizinātāju. Taču ir ērtāks paņēmiens, kurš turklāt ļauj analizēt plašāku funkciju klasi.

Polinoms $Q = t^k(1-t)^m$

Jānosaka polinoma Q maksimums pozitīviem t, ja k, m naturāli skaitļi. Lai varētu lietot sekas SK, pārrakstām polinomu Q citā formā:

$$Q = c^k\left(\frac{t}{c}\right)^k (1-t)^m.$$

Izvēlamies c tā, lai $k + m$ reizinātāju summa S nebūtu atkarīga no t.

$$S = \frac{kt}{c} + m(1-t) = \left(\frac{k}{c} - m\right)t + m.$$

To panāk, ņemot $c = \dfrac{k}{m}$. Reizinājums būs maksimāls, ja visi reizinātāji vienādi:

$$\frac{t}{c} = 1 - t \;\Rightarrow\; t = c - ct \;\Rightarrow\; t(1+c) = c$$

$$t = \frac{c}{1+c} = \frac{k}{m+k}.$$

Tādējādi

$$\max_{t>0} t^k(1-t)^m = \frac{k^k m^m}{(k+m)^{k+m}}, \quad t_{\max} = \frac{k}{m+k}.$$

Dalījums $\dfrac{y^k}{(y-a)^m}$.

Jānosaka minimums, ja $y > a$ un $k > m$ – naturāli skaitļi.
Meklēsim maksimumu apgrieztajam lielumam

$$\frac{(y-a)^m}{y^k} = \frac{1}{y^{k-m}} \cdot \left(\frac{(y-a)}{y}\right)^m = \frac{1}{y^{k-m}}\left(1 - \frac{a}{y}\right)^m$$

Apzīmējam $t := \dfrac{a}{y}$. Tad $\dfrac{1}{y} = \dfrac{t}{a}$ un pēc ievietošanas iegūst polinomu pret t, kuru pareizinot ar a^{k-m}, dabūjam jau aplūkotā veida polinomu Q. Tādējādi minimuma punkts ir

$$y_{\min} = \frac{ak}{k-m} \text{ un } \min_{y>a} \frac{y^k}{(y-a)^m} = a^{k-m} \frac{k^k (k-m)^{m-k}}{m^m}.$$

Piemērs. Atrast maksimumu funkcijai

$$P = x^2(1-x^3), \text{ ja } x > 0.$$

Ievēro, ka pietiek ņemt x no intervāla (0, 1). Lai varētu lietot sekas SK, aplūkosim funkcijas kubu un to pārrakstīsim formā:

$$P^3 = x^6(1-x^3)^3 = \left(\frac{3x^3}{2}\right)\left(\frac{3x^3}{2}\right)(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)\cdot\frac{4}{9}$$

Pirmo piecu reizinātāju summa ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja

$$\frac{3x^3}{2} = 1 - x^3 \;\Rightarrow\; 3x^3 = 2 - 2x^3 \;\Rightarrow\; 5x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

Vispārināsim šo piemēru.

Polinoms $Q = x^k(1 - x^m)$

Noteikt maksimumu, ja $x > 0$, un k un m naturāli skaitļi.

Apzīmēsim $t = x^m$. Tad $x = \sqrt[m]{t}$, $x^k = \sqrt[m]{t^k}$.

$$Q = \sqrt[m]{t^k}(1-t)$$

$$Q^m = t^k(1-t)^m$$

Iegūts jau izanalizētais polinoms. Tam maksimuma punkts ir $t = \frac{k}{k+m}$.

Tādejādi

$$\max_{x>0} x^k(1-x^m) = \frac{m}{m+k}\sqrt[m]{\frac{k^k}{(k+m)^k}}, \quad x_{\max} = \sqrt[m]{\frac{k}{k+m}}.$$

Aplūkoto piemēru var vispārināt uz gadījumu, kad k un m racionāli skaitļi.

Funkcija $f(x) = \sqrt[k]{x}(1-\sqrt[m]{x})^n$

Atrast maksimumu.

Norādījums. Apzīmē $t = \sqrt[m]{x}$, Tad $x = t^m$ un $f = \sqrt[k]{t^m}(1-t)^n$. Kāpināt abas puses k-jā pakāpē un izmantot iepriekš izanalizēto polinomu

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

1. Atrast funkcijas $\frac{x^2}{2x-1}$ vismazāko vērtību, ja x > ½.

2. Atrast funkcijas $\frac{x^2}{2x-1}$ vismazāko vērtību, ja x $\geq$ 1.

3. Atrast funkcijas $\frac{x^2}{2x+1}$ vismazāko pozitīvo vērtību.
4. Atrast funkcijas $\frac{10^{2x}}{10^x - 1}$ vismazāko vērtību.
5. Atrast funkcijas $\frac{10^{2x}}{10^x - 1}$ vismazāko vērtību.
6. Atrast funkcijas $\frac{4^x}{2^{x-1} - 1}$ vismazāko vērtību.
7. Atrast funkcijas $\frac{5^x - 5}{5^{2x}}$ vislielāko vērtību.
8. Atrast funkcijas $\frac{(\lg x + 1)^3}{\lg x}$ vismazāko vērtību.
9. Atrast maksimumu funkcijai

$$\frac{x-a}{x^2}, \quad x > a .$$

10. Ar T_r un T_p apzīmēsim minimālos trijstūrus, kuri apvilkti attiecīgi ap riņķi un pusriņķi. Kuram no šiem trijstūriem ir mazāks laukums, ja zināms ka riņķis un pusriņķis ir vienlieli.
11. Atrast maksimumu reizinājumam $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3} + x)\,\mathrm{tg}x$, ja x ir 1. kvadranta leņķis.
12. Atrast minimumu summai $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + \mathrm{ctg}\frac{y}{2} + \mathrm{ctg}\frac{z}{2}$, ja x + y + z ir trijstūra leņķi.
13. Atrast minimumu summai $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma$, ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ un neviens no leņķiem nav plats.
14. Atrast maksimumu reizinājumam $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta$, ja α un β ir pirmā kvadranta leņķi, kuru summa lielāka nekā 90 grādu.
15. Atrast pozitīvu minimumu funkcijai $\frac{2\mathrm{tg}^3 x}{\mathrm{tg}^2 x - 1}$.
16. Pierādīt vai atspēkot nevienādību $3\sqrt{3} + tg(x+y)tgxtgy \le 0$, ja x un un y ir pozitīvi un to summa lielāka nekā $\frac{\pi}{2}$.
17. Pierādīt vienu no nevienādībām:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \le 1 - \frac{1}{n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2002^2}\right)^{2002} < 1 - \frac{1}{2003} .$$

18. Atrast maksimumu funkcijai $\sin^2 x(1 - \sin^3 x)$ ja x ir 1. kvadranta leņķis.
19. Atrast minimumu funkcijai $(\mathrm{tg}^6 t - 1)\mathrm{tg}^4 t$, ja $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

13. nodaļa **Arhimēda uzdevums**

Arhimēds būs slavens,
kamēr dzīvs būs kaut viens matemātiķis.
G. Hardijs

Arhimēds deva ne tikai formulas riņķa līnijas garuma, riņķa laukuma lodes tilpuma u. c. lielumu aprēķināšanai, bet pirmais piedāvāja metodi, ar kuras palīdzību var aprēķināt minētos lielumus dažādām ģeometriskām figūrām. Viņa metode pēc būtības sakrīt ar integrālrēķinu pamatidejām. Tādējādi Arhimēds par daudziem gadsimtiem apsteidza diferenciālrēķinu un integrālrēķinu pamatlicējus, kā arī šo ģēniju priekštečus: Kepleru, Fermā, Paskālu.

Arhimēda darbā "Par lodi un cilindru" ir šādas teorēmas:

1. Lodes virsmas laukums ir vienāds ar četrkāršotu tās lielā riņķa laukumu, t. i., $S = 4\pi R^2$.
2. Lodes tilpums ir vienāds ar četrkāršotu tāda konusa tilpumu, kura pamatā ir lielais riņķis, bet augstums vienāds ar lodes rādiusu, t. i., $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
3. Cilindra tilpums ir pusotras reizes lielāks nekā cilindrā ievilktas lodes tilpums.
4. Cilindra virsmas laukums, ieskaitot pamatus, ir vienāds ar $\frac{3}{2}$ cilindrā ievilktas lodes virsmas laukuma. [Br, 19. lpp.]

Nevienā no citētajām teorēmām netiek skarts kāds ekstrēmu uzdevums. Arhimēds ir nodarbojies arī ar riņķa izoperimetriskās un lodes izopifānās īpašības pamatošanu, t. i., ka riņķim ir vislielākais laukums un lodei vislielākais tilpums attiecīgi starp izoperimetriskām un izopifānām figūrām. Jēdziens izoperimetrisks jau ir skaidrots. Līdzīgā nozīmē lieto vārdu *izopifāns*. Ar *izopifānām* figūrām saprot tādas telpiskās figūras (ķermeņus), kurām ir viens un tas pats virsmas laukums. Arhimēda darbos, kuri saglabājušies līdz mūsdienām, izoperimetriskā problēma netiek minēta un mums diemžēl nav zināms viņa ieguldījums tās risināšanā. Tomēr viena izopifānā problēma ir formulēta un risināta viņa darbā "Par lodi un cilindru".

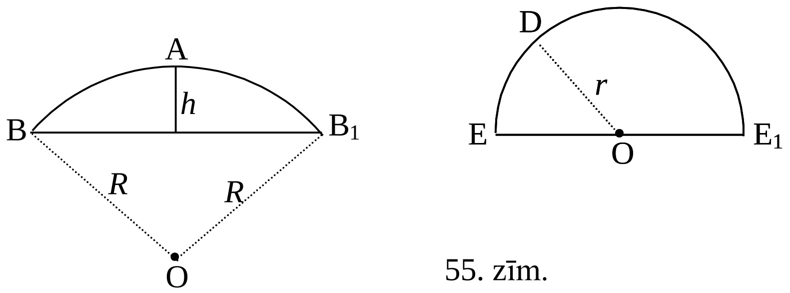
Arhimēda uzdevums (izopifānais)

(*Archimedes,* apt. 287 – 212 p. m. ē., sengrieķu matemātiķis, fiziķis.)

Atrast lodes segmentu ar vislielāko tilpumu no visiem segmentiem ar uzdotu sfēriskās virsmas laukumu. [T, 31. lpp.]

Vispirms iepazīsimies ar paša Arhimēda risinājumu. Tas ir izteikti ģeometriska rakstura risinājums. Toreiz matemātiķiem nebija iespēju izmantot algebras līdzekļus. Algebra kā tāda nemaz nepastāvēja.

Aplūko lodi ar rādiusu R un tās segmentu ar augstumu h un virsmas laukumu S_s. Lodes segmentu salīdzināsim ar puslodi, kurai ir tāds pats virsmas laukums S_p kā segmentam (55. zīm.).



55. zīm.

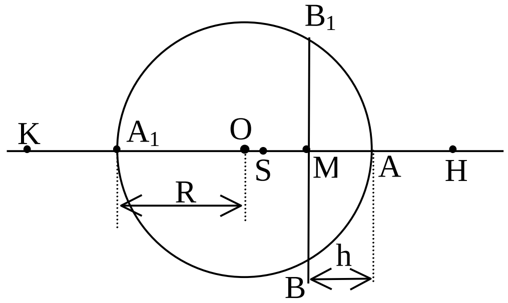
Sekojot Arhimēdam, atliksim uz taisnes A_1A (56. zīm.) tāda garuma nogriezni OH (Protams, apzīmējumi un izklāsta stils ir cits), ka konuss ar augstumu HM un pamata rādiusu MB ir vienliels ar lodes BAB_1 segmentu. Uz nogriežņa OA_1 turpinājuma atliksim nogriezni A_1K, kurš pēc garuma vienāds ar lodes rādiusu *R*. No konusa un segmenta tilpumu vienādības Arhimēds dabū proporciju

$$\frac{|\mathrm{HM}|}{|\mathrm{AM}|}=\frac{|\mathrm{KM}|}{|\mathrm{A_1M}|}.$$

Pārbaudīsim šo proporciju. Izmantosim no skolas zināmās konusa un lodes segmenta tilpuma formulas:

$\mathrm{V_k}=\frac{\pi}{3}|\mathrm{HM}|\,|\mathrm{MB}|^2$ – konusa ar pamatu MB un augstumu HM tilpums;

$\mathrm{V_s}=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$ – lodes segmenta ar augstumu h tilpums (*R* – lodes rādiuss).



56. zīm.

Ievērosim, ka $|\mathrm{MB}|^2=|\mathrm{MA_1}|\cdot|\mathrm{MA}|$. Tad

$$\mathrm{V_k}=\frac{\pi}{3}|\mathrm{HM}|\,|\mathrm{MB}|^2=\frac{\pi}{3}|\mathrm{HM}|\,|\mathrm{MA_1}|\,|\mathrm{MA}|=\mathrm{V_s}=$$
$$=\left(\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2\right)=\frac{\pi}{3}|\mathrm{KM}||\mathrm{AM}|^2 \qquad (1).$$

No šejienes uzreiz izriet minētā proporcija.

Tagad no puslodes un segmenta (46. zīm.) virsmu vienādības: $S_s=S_p$ secina, ka

$$|\mathrm{AB}|=|\mathrm{ED}|.$$

Tiešām,

$$|\mathrm{ED}|=r\sqrt{2},\ \ |\mathrm{AB}|^2=|\mathrm{AA_1}|\cdot|\mathrm{AM}|$$

Otrā vienādība izriet, no taisnleņķa trijstūru A_1AB un AMB līdzības (47. zīm.):

$$\frac{|AB|}{|AA_1|}=\frac{|AM|}{|AB|};$$

$$\pi|AB|^2=2\pi Rh=S_s=S_p=2\pi r^2=\pi|ED|^2\Rightarrow|AB|=|ED|.$$

Nākamajā solī Arhimēds atliek nogriezni AS (46. zīm.) , kas pēc garuma vienāds ar puslodes rādiusu *r* un pierāda nevienādību:

$$|A_1S|\cdot|AS|>|A_1M|\cdot|AM| \Leftrightarrow (2R-r)r>(2R-h)h,\ h\neq R.$$

Nevienādību viņš pamato ģeometriski: no diviem taisnstūriem ar vienādu perimetru lielāks laukums ir tam, kuram lielāks īsākās malas garums. Perimetri taisnstūriem attiecīgi ar malām $2R-r$, r un $2R-h$, h acīmredzami ir vienādi; bet salīdzinot malu garumus būtu jāpierāda, ka $\min\{2R-r, r\}>\min\{2R-h, h\}$). Dosim algebrisku nevienādības pamatojumu.

$$(2R-r)r>(2R-h)h \Leftrightarrow 2R(r-h)>r^2-h^2 \Leftrightarrow (r-h)(2R-r-h)>0.$$

Bez papildu nosacījuma šī nevienādību, vispārīgi runājot, nav spēkā. Taču mēs vēl neesam izmantojuši to, ka segmenta un puslodes virsmas laukumi vienādi. No šo laukumu vienādības dabūjam:

$$S_p=S_s \Leftrightarrow 2\pi r^2=2\pi Rh \Leftrightarrow r^2=Rh.$$

Šķirojam divus gadījumus. Ja $r>h$, tad abi reizinātāji ir pozitīvi, jo

$$r>h \Rightarrow 2Rh=2r^2>r^2+h^2>rh+h^2=(r+h)h.$$

Līdzīgi, ja $r<h$, tad abi reizinātāji ir negatīvi, jo

$$r<h \Rightarrow 2Rh=2r^2<r^2+h^2<rh+h^2=(r+h)h.$$

Ir spēkā (no vienādības $S_s = S_p$):

$$|AS|^2=|AM|\cdot|A_1K| \quad (\Leftrightarrow r^2=Rh).$$

Saskaitot šo vienādību ar nevienādību

$$|A_1S|\cdot|AS|>|A_1M|\cdot|AM| \quad (\Leftrightarrow (2R-r)r>(2R-h)h,\ h\neq R),$$

dabū

$$|AS|\,|AA_1|>|KM|\,|AM| \quad (\Leftrightarrow 2Rr>(3R-h)h)$$

Pareizinot ar |AM| un ņemot vērā (1), iegūstam

$$|AS|\,|AA_1|\,|AM|>|KM|\,|AM|^2 \quad (\Leftrightarrow 2Rrh>(3R-h)h^2) \qquad (2)$$

Izmantojot iepriekš iegūtās sakarības

$$|KM|\,|AM|^2=|HM|\,|MB|^2 \quad (\text{sk.}(1))$$

$$|AA_1|\,|AM|=|AB|^2=|ED|^2=2r^2$$

|AS| = |CD| = *r* (pēc konstrukcijas)

no (2) izriet

$$\frac{\pi}{3}|CD|\,|ED|^2>\frac{\pi}{3}|HM|\,|MB|^2=V_k=V_s$$

$$V_p=\frac{2\pi}{3}r^3>\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2=V_s,$$

kas arī bija jāpierāda.

Ievērojami īsāk Arhimēda uzdevumu var atrisināt izmantojot sekas SK no nevienādības $G \leq A$: *ja pozitīvu skaitļu summa ir konstants lielums, tad to reizinājums ir maksimāls, ja tie visi vienādi.*
Bet vispirms iepazīsimies ar šādu risinājumu.

Kam taisnība?
Anniņa. Mums jārisina uzdevums

$$V_s = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}) \to \max ,$$

ņemot vērā nosacījumu $r^2 = Rh$. (Tas iegūts no segmentu virsmu laukumu vienādības: $S_p = S_s \Leftrightarrow 2\pi r^2 = 2\pi Rh \Leftrightarrow r^2 = Rh$.)

Izsaku $h = \frac{r^2}{R}$ un ievietoju to segmenta tilpuma izteiksmē

$$V_s = \pi \frac{r^4}{R^2}(R - \frac{r^2}{3R})$$

$$3R^3 V_s = \pi r^4 (3R^2 - r^2)$$

Pareizinu abas puses ar 2 un labo pusi sadalu trīs reizinātājos:

$$6R^3 V_s = r^2 \cdot r^2 (6R^2 - 2r^2)$$

Reizinātāju summa ir konstanta, tāpēc vienādības labā puse savu maksimumu sasniedz tad, kad tie visi ir vienādi.

$$r^2 = 6R^2 - 2r^2$$

$$r^2 = 2R^2$$

$$r = R\sqrt{2}.$$

No šejienes un nosacījuma $r^2 = Rh$ iegūstu:

$$r^2 = 2R^2 = Rh, \; h = 2R.$$

Tas nozīmē, ka vislielākais tilpums ir segmentam, kura augstums sakrīt ar lodes diametru. Citiem vārdiem, šis segments sakrīt ar visu lodi.
Kam taisnība? Arhimēds aplūkojamo segmentu salīdzināja ar puslodi un parādīja, ka tam virsmas laukums lielāks.
Izskaidrojiet kļūdu!

Arhimēda uzdevumu par maksimālo lodes segmentu ievērojami īsāk un vienkāršāk var atrisināt, izmantojot nevienādību $G \leq A$.
<u>Algebrisks risinājums</u>.
Jāmeklē maksimums funkcijai

$$V = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}), \text{ ja } 2\pi Rh = S.$$

Izsakot R no dotā nosacījuma, iegūsim:

$$V = \pi h^2 (\frac{S}{2\pi h} - \frac{h}{3}) = \frac{Sh}{2} - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} h (\frac{3S}{2\pi} - h^2)$$

Aplūkojam funkcijas V kvadrātu; to sadalām reizinātājos tā, lai reizinātāju summa būtu nemainīgs lielums.

$$V^2 = \frac{\pi^2}{9 \cdot 2} \cdot (2h^2)(\frac{3S}{2\pi} - h^2)(\frac{3S}{2\pi} - h^2).$$

Saskaņā ar SK reizinājums būs maksimāls, ja

$$2h^2 = \frac{3S}{2\pi} - h^2.$$

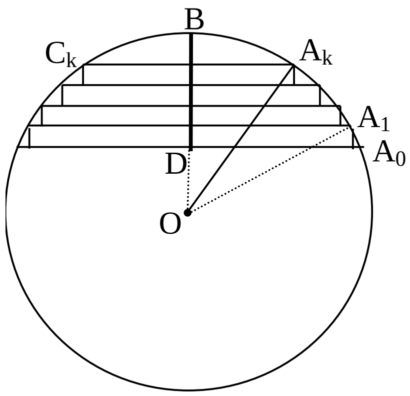
No šejienes $S = 2\pi h^2$. Tagad no vienādības

$$2\pi Rh = S$$

secinām, ka R = h. Tas nozīmē, ka segmenta tilpums ir maksimāls, ja tā augstums sakrīt ar rādiusu, t. i., ja segments ir puslode.

Komentāri

Arhimēda uzdevumu var atrisināt ar elementāriem līdzekļiem, turklāt īsi, ja vien iepriekš zināma lodes segmenta tilpuma formula. (Jāzin arī segmenta virsmas laukuma formula$2\pi Rh = S$). Kā var iegūt šo formulu? Ideja ir daudz vienkāršāka nekā tās īstenošanas process. Lodes segmentu aizstāj ar vienkāršākiem objektiem – cilindriem, tiesa lielā skaitā, sk. 57. zīmējumu, kur redzams shematisks lodes segmenta sadalījums pa slāņiem. Atrod cilindru tilpumu summu; tā tuvināti izsaka lodes segmenta tilpumu. Ja izdodas novērtēt šo tuvināšanas (jeb tā saucamo aproksimācijas) kļūdu un parādīt, ka tā pēc patikas maz atšķiras no nulles, tad var uzskatīt, ka mērķis sasniegts.



57. zīm.

Segmenta augstumu $|BD| = H$ sadalām n vienādās daļās un vienas daļas garumu apzīmējam ar h, t. i., $h = \frac{H}{n}$. Turpmāk vienkāršāka pieraksta dēļ vairākas reizes lietosim formulu

$$hn = H \qquad (1)$$

Cilindru tilpumus rēķinām pēc formulas: pamata laukums reiz augstums. Visiem izvēlētajiem cilindriem ir viens un tas pats augstums h. Cilindru pamatu rādiusus apzīmējam ar $r_1, \ldots, r_k$. Tad

$$V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$V_2 = \pi r_2^2 h$$

$$V_k = \pi r_k^2 h$$

$$V_1 + \ldots + V_n = \pi h(r_1^2 + \ldots + r_n^2).$$

Apzīmēsim $d = R - H$, kur R – lodes rādiuss. Izteiksim cilindru rādiusus $r_1, \ldots, r_k$ pēc Pitagora teorēmas (sk., zīm.):

$$r_1^2 = R^2 - (d + h)^2$$
$$r_2^2 = R^2 - (d + 2h)^2$$
$$r_k^2 = R^2 - (d + kh)^2$$

Izveidojam rādiusu kvadrātu summu:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 = nR^2 - nd^2 - 2dh\sum_{k=1}^{n} k - h^2 \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Vienādības labā puse satur divas n pēc kārtas ņemtu skaitļu summas. Pirmā no tām ir aritmētiskā progresija

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

bet otrā ir kvadrātu summa.

$$\sum_{n=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Šo formulu var pierādīt, piemēram, ar indukciju. Cits mazāk zināms pierādījums, kas balstās uz matemātisko rotaļlietu izmantošanu un ir saistīts ar ģeometrisku objektu pakošanu uzrādīts nodaļas beigās.

$$S_n = nR^2 - nd^2 - 2dh\frac{n(n+1)}{2} - h^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tagad izmantojam sakarību (1).

$$hS_n = HR^2 - Hd^2 - dHh(n+1) - Hh^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= H(R^2 - (R-H)^2) - (R-H)H^2 - dHh - \frac{1}{6}Hh^2(2n^2 + 3n + 1) =$$
$$= H(2RH - H^2) - (R-H)H^2 - \frac{1}{3}H^3 - dHh - \frac{H^2 h}{2} - \frac{Hh^2}{6} =$$
$$= H^2 R - \frac{H^3}{3} - (dH + \frac{H^2 h}{2} + \frac{Hh}{6})h.$$

Tātad esam ieguvuši, ka

$$V_n = \pi(H^2 R - \frac{H^3}{3}) - k_1 h,$$

kur $k_1 = \pi(dH + \frac{H^2 h}{2} + \frac{Hh}{6})$. Atzīmēsim, ka lielums *kh* pēc patikas maz atšķiras no nulles, jo mēs varam ņemt pēc patikas mazu *h*. (Jo vairāk slāņos sadalām lodes segmentu, jo mazāku *h* vērtību iegūstam). Iegūtā cilindru tilpumu summa ir lodes segmenta tilpuma novērtējums no apakšas, t. i.,

$$V_n = \pi(H^2 R - \frac{H^3}{3}) - k_1 h < V_s$$

Līdzīgi var iegūt novērtējumu no augšas

$$V_s < \pi(H^2 R - \frac{H^3}{3}) + k_2 h.$$

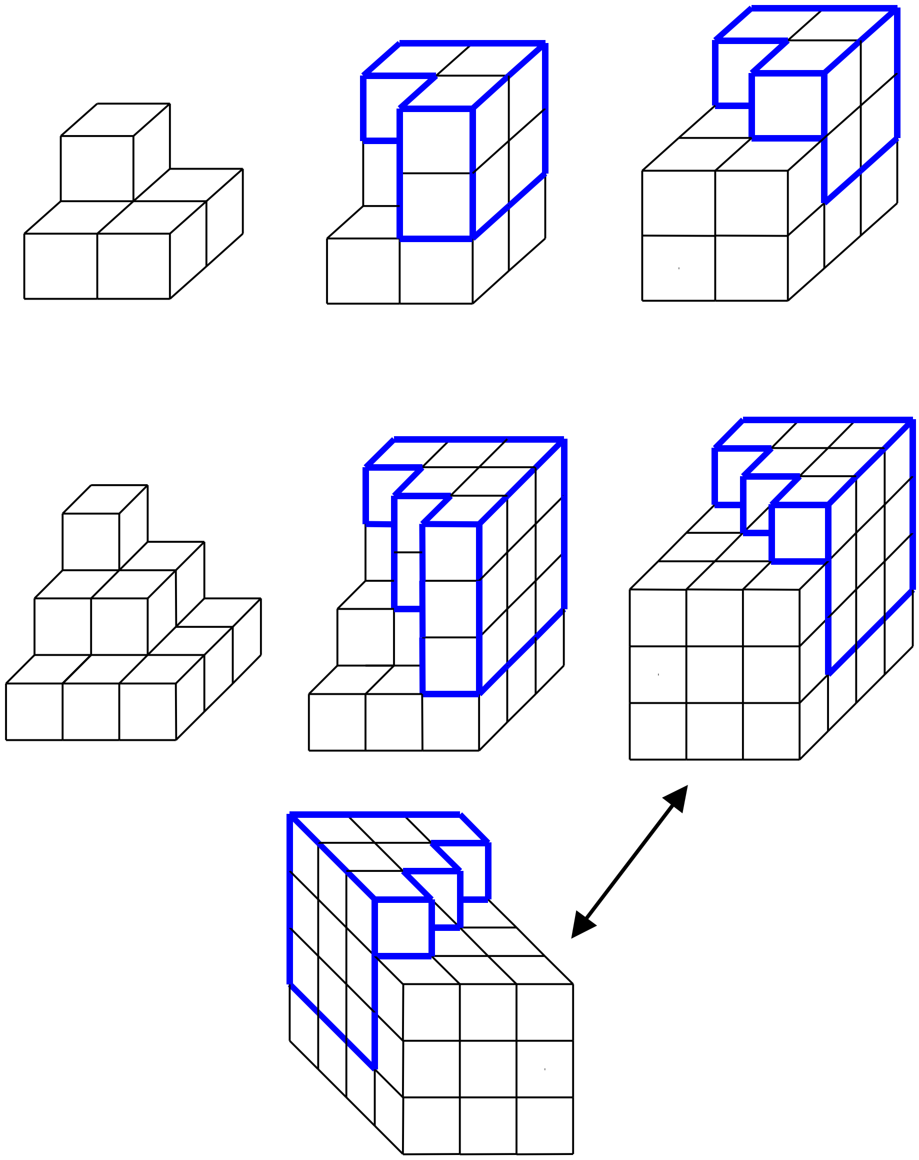
Apvienojot abus novērtējumus, iegūst, ka lodes apskatāmā segmenta tilpums pēc patikas maz atšķiras no

$$\pi(H^2R - \frac{H^3}{3}),$$

ko arī pasludina par lodes segmenta tilpumu.

$$\mathbf{6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = n(n+1)(2n+1)}$$

SKATIES!

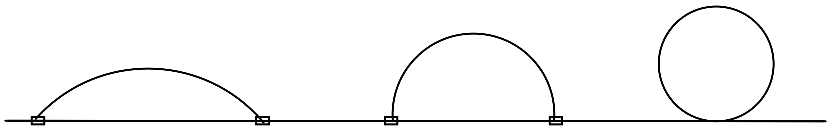


Atsevišķs bloks (klucis – piramīda) sastāv no $(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$ vienādiem kubiem. No sešiem vienādiem blokiem saliek paralēlskaldni ar izmēriem $n(n+1)(2n+1)$. Salikšanas shēma ir visai vienkārša un vienveidīga visiem n.

Daži Arhimēda uzdevuma analogi

Maksimālais riņķa segments

Vai jūs varētu atrisināt (ar elementāriem līdzekļiem) Arhimēda uzdevuma analogu, ja lodes segmentu aizstāj ar riņķa segmentu? Pirmajā brīdī varētu iesaukties, ka, – protams, jo riņķis ir plaknes figūra un plaknē viss ir vienkāršāk. Tomēr tā nav. Uzdevums par maksimālo riņķa segmentu ir būtiski sarežģītāks. Uzdevuma ģeometriska ilustrācija dota 58. zīm. Iedomāsimies, ka mums ir elastīga stieple ar garumu g, kuras gali var brīvi slīdēt pa taisni. Kuram no visiem riņķa segmentiem, būs vislielākais laukums? Atbildi (pēc analoģijas ar Arhimēda uzdevumu lodes segmentam) viegli uzminēt. Maksimālais segments būs pusriņķis. Bet, vai var atrast arī analoģisku pierādījumu? Nez vai. Lodes segmenta tilpumu izsaka kubiska funkcija, bet riņķa segmenta laukumu pavisam cita tipa funkcija, kas turklāt nav polinoms.



58. zīm.

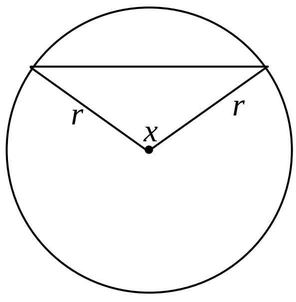
Laukumu L riņķa segmentam var aprēķināt kā atbilstošā sektora un trijstūra laukumu starpību (59. zīm.). Laukums sektoram ar centra leņķi x ir vienāds ar $L_1 = \frac{r^2 x}{2}$, bet laukums trijstūrim ir $L_2 = \frac{1}{2} r^2 \sin x$.

$$L = \frac{r^2}{2}(x - \sin x).$$

Loka, kurš atbilst centra leņķim x, garums ir vienāds ar $g = rx$. Izteiksim no šejienes r un to ievietosim segmenta laukuma izteiksmē.

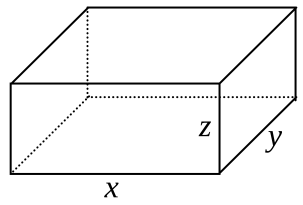
$$L = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{x - \sin x}{x^2}.$$

Lūk, kādai funkcijai būtu jāmeklē maksimums! Ar diferenciārēķinu palīdzību tas nav grūti izdarāms, bet vai to var izdarīt ar elementāriem līdzekļiem?



59. zīm.

Maksimālā kaste.



60. zīm.

Kādai vaļējai kastei ar uzdotu virsmas laukumu S ir vislielākais tilpums? (Materiāls kastes pamatam nav jātērē; kastes vietā var būt kāda ēka, baseins u. c.)

Jāmeklē maksimums tilpumam $V = xyz$, ja $2zx + 2zy + xy = S$.
Apzīmēsim $a = 2zx$, $b = 2zy$, $c = xy$.
Tad $a + b + c = S$ un $abc = 4(zxy)^2$. Izmantojam nevienādību $G \le A$:

$$4(zxy)^2 = abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{3}$$

$$zxy \le \sqrt{\frac{S^3}{12}}\ .$$

Vienādība pastāv, ja $a = b = c$, kas dod $x = y = 2z$. Tas nozīmē, ka kastes maksimālās kastes pamats ir kvadrāts, bet tās augstumam jābūt divreiz mazākam kā pamata malai.

14. nodaļa **Funkcija** $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+dx$

Viens no īpaši pievilcīgiem uzdevumiem, kurš reducējams uz virsrakstā izceltās funkcijas minimuma meklēšanu ir grāmatas 1. daļā analizētais uzdevums par bišu šūnu.

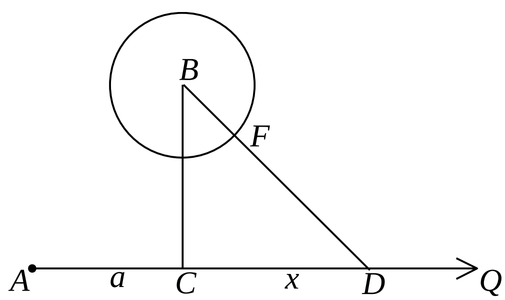
"Šūnas aplūkojamās daļas kopējā virsma

$$S=3a(2b-x)+3a\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}-x\text{ . ”}$$ [O, 159. - 160. lpp.]

Nozīmīga vēsturiska informācija par atsevišķiem ekstrēmu uzdevumiem un to risināšanas metodēm ir sniegta kanādiešu zinātnieka Mizē rakstā [Mus]. Raksta autors ir izvilcis no aizmirstības indiešu matemātiķi Ramčandru un viņa traktātu "Treatise on Problems of Maxima and Minima, Solved by Algebra", London:WM. H. Allen&CO. 7, Leadenhall Street, 1859.

Šis traktāts, jādomā, ir pirmavots vairākiem ekstrēmu uzdevumiem un to elementārām risināšanas metodēm. Viens no rakstā [Mus] citētajiem izvilkumiem attiecas uz šajā nodaļā aplūkojamo funkciju. Ramčandra savā traktātā risina šādu uzdevumu.

Kuģis izbrauc no vietas A virzienā AQ. Tajā pašā laikā laiva izbrauc no vietas B, lai pietuvotos kuģim. Pieņemot, ka laivas un kuģa ātrumi doti, atrast virzienu kādā jābrauc laivai, lai tā pietuvotos kuģim, cik vien iespējams tuvu. (61. zīm.)



61. zīm.

Ramčandras risinājums

"Pieņem, ka kuģa ātrums pret laivas ātrumu attiecas kā m: n; ka vietas D un F ir tās, kurās kuģis un laiva ir vistuvāk viens otram; ka ap centru B novilta riņķa līnija, kas iet caur F. Tad attālums DF, būdams vistuvākais attālums, un punkts F atrodas uz taisnas līnijas BD Tagad, lai iegūtu DF izteiksmi algebriskos terminos, pieņemsim, ka BC ir perpendikulārs AQ un ņemsim $AC = a$, $BC = b$, $CD = x$. Tad būs $\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{b^2+x^2}$. Turklāt tā kā $m : n :: AD$ jeb $a + x$: BF, mums būs $BF=\dfrac{na+nx}{m}$ un tādējādi

$$DF=\sqrt{b^2+x^2}-\frac{na+nx}{m}=\sqrt{b^2+x^2}-\frac{na}{m}-\frac{nx}{m}=\min,$$

ko apzīmēsim ar q, $\therefore \sqrt{b^2+x^2} - \frac{nx}{m} = q + \frac{na}{m}$, ko pieņemsim = r. Tagad ir acīm redzams, ka, tā kā $\frac{na}{m}$ ir nemainīgs lielums, un q = min., tad jābūt arī $q + \frac{na}{m}$ jeb r = min. $\therefore \sqrt{b^2+x^2} - \frac{nx}{m} = \min. = r$ jeb $\sqrt{b^2+x^2} = r + \frac{nx}{m}$, un tāpēc

$$b^2 + x^2 = r^2 + \frac{2nr}{m}x + \frac{n^2x^2}{m^2}$$

$$\therefore \frac{m^2-n^2}{m^2}x^2 - \frac{2nrx}{m} = r^2 - b^2,$$

$$x^2 - \frac{2rmn}{m^2-n^2}x = \frac{(r^2-b^2)m^{2\,2}}{m^2-n^2} \text{ ....(1)}$$

Atrisinot šo kvadrātvienādojumu, atrodam

$$x = \frac{mnr}{m^2-n^2} \pm \sqrt{\frac{(r^2-b^2)m^2(m^2-n^2) + m^2n^2r^2)}{(m^2-n^2)^2}} =$$

$$= \frac{mnr}{m^2-n^2} \pm \sqrt{\frac{\{m^2(m^2-n^2) + m^2n^2\}r^2 - b^2m^2(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2}} =$$

$$= \frac{mnr}{m^2-n^2} \pm \sqrt{\frac{m^4r^2 - b^2m^2(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2}}.$$

Jāatzīmē, ka šī problēma kļūst neatrisināma, ja m ir mazāks kā n, jo šajā gadījumā lielumam $-b^2(m^2-n^2)m^2$ jākļūst pozitīvam un tādējādi nepaliek nosacījuma, lai r varētu kļūt minimāls. Tagad ir acīmredzams, ka m^4r^2 jeb r nevar paņemt tik mazu, lai sakne kļūtu neiespējama. Tādējādi, kad r = min. jābūt

$$m^4r^2 = b^2m^2(m^2-n^2) \text{ un } \therefore r = \frac{b\sqrt{m^2-n^2}}{m} \text{ un}$$

$$x = \frac{mnr}{m^2-n^2} = \frac{nb}{\sqrt{m^2-n^2}} \text{ ; arī } DF = \sqrt{b^2+x^2} - \frac{na+nx}{m} = r - \frac{na}{m} =$$

$\frac{b\sqrt{m^2-n^2}}{m} - \frac{na}{m} = \frac{b\sqrt{m^2-n^2} - na}{m}$; no kurienes F stāvoklis ir zināms.

No iepriekš teiktā ir redzams, ka tā kā DF ir jābūt reālam pozitīvam lielumam, šī risinājuma metode ir derīga tikai gadījumā, ja m ir lielāks nekā n, un $b\sqrt{m^2-n^2}$ lielāks nekā na: …”

Komentāri

Turpmāk tiks izklāstīti arī citi (ērtāki) paņēmieni aplūkojamās funkcijas ekstrēmu noteikšanai.

Vairāki citi saistoši uzdevumi, kuri reducējami uz funkcijas f ekstrēmu meklēšanu, formulēti nodaļas beigās.

Apzīmējot $\frac{n}{m} = k < 1$ (kuģa ātrums lielāks nekā laivas ātrums.) un lietojot to pašu metodi (ko lietoja Ramčandra) mērķi var sasniegt ātrāk.

$$\sqrt{b^2 + x^2} - kx = q \Leftrightarrow b^2 + x^2 = k^2x^2 + 2kxq + q^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2(1-k^2) - 2kxq + b^2 - q^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{kq \pm \sqrt{k^2q^2 - (1-k^2)(b^2 - q^2)}}{1-k^2} = \frac{kq \pm \sqrt{q^2 - (1-k^2)b^2}}{1-k^2}.$$

Nosacījums, ka zemsaknes izteiksmei jābūt nenegatīvai: $q^2 \geq (1 - k^2)b^2$ dod meklējamo minimumu $q_{\min} = b\sqrt{1-k^2}$. Minimums tiek sasniegts punktā

$$x = \frac{kq_{\min}}{1-k^2} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Elegantu risinājumu iegūst, lietojot substitūciju $x = b\operatorname{tg} t$ un Košī nevienādību:

$$\sqrt{b^2 + x^2} - kx = b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} - k\operatorname{tg} t =$$

$$= \frac{b(1 - k\sin t)}{\cos t} \geq bq_0 = b\sqrt{1-k^2},$$

jo pēc Košī nevienādības

$$q_0 \cos t + k \sin t \leq \sqrt{q_0^2 + k^2} = 1.$$

No šejienes nosaka $q_0 = \sqrt{1-k^2}$.

Par vērtību kopas izmantošanu

Viena no elementārām metodēm ekstrēmu uzdevumu risināšanā ir funkcijas vērtību kopas izmantošana. Šo metodi ir izmantojis Ramčandra, risinot aplūkoto uzdevumu par minimālo attālumu starp kuģi un laivu. Darba 1. daļā šai metodei ir veltīta neliela apjoma nodaļa. Uzdevumu risināšana, kuros jāatrod funkcijas vislielākā vai vismazākā vērtība uzdotām (konkrētām) koeficientu skaitliskām vērtībām, parasti ir būtiski vienkāršāka nekā vispārīgā gadījuma, t. i., ar nenoteiktiem koeficientiem, analīze. Metodes lietošana nenoteiktu koeficientu gadījumā var būt visai apgrūtinoša. Atzīmēsim galvenos momentus tās lietošanā meklējot ekstrēmus funkcijai

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} + dx = y$$

$$ax^2 + bx + c = (y - dx)^2 = y^2 - 2dxy + d^2x^2$$

$$(a - d^2)x^2 + (b + 2dy)x + c - y^2 = 0.$$

Iegūts kvadrātvienādojums attiecībā pret x. Tā diskriminantam jābūt nenegatīvam (pretējā gadījumā nebūs atrisinājuma reālos skaitļos).

$$D_1 = (b + 2dy)^2 - 4(a - d^2)(c - d^2) \geq 0$$

$$b^2 + 4bdy + 4d^2y^2 - 4(ac - ay^2 - cd^2 + d^2y^2) \geq 0$$

$$4ay^2 + 4bdy + b^2 + 4cd^2 - 4ac \geq 0 \qquad (*)$$

Šīs kvadrātnevienādības (attiecībā pret y) pētīšanā savukārt var noderēt diskriminants D_2:

$$D_2 = 16b^2d^2 - 16a(b^2 + 4cd^2 - 4ac) =$$

$$= 16(b^2d^2 - ab^2 - 4acd^2 + 4a^2c) = 16(b^2 - 4ac)(d^2 - a).$$

Vai izmantojot šo informāciju, jūs varētu uzrādīt aplūkojamās funkcijas ekstrēmus un punktus, kuros tie tiek sasniegti? Ekstrēmi būs atkarīgi no koeficientiem a, b, c un d.

Izdalīsim vispārīgās nevienādības (*) īpašu gadījumu, kad b = 0.

$$ay^2 \geq c(a - d^2) \qquad (**)$$

Sofisms

Atrast pozitīvu minimumu funkcijai $y = \sqrt{x^2 - 2} - 2x$

Anniņa.

$$\sqrt{x^2 - 2} - 2x = y \iff x^2 - 2 = (y + 2x)^2$$

$$x^2 - 2 = y^2 + 4xy + 4x^2 \iff 3x^2 + 4xy + 2 + y^2 = 0$$

$$D = 16y^2 - 12(2 + y^2) = 4y^2 - 24$$

$$D \geq 0 \iff y^2 - 6 \geq 0, \quad y^2 \geq 6 \quad y \geq \sqrt{6}.$$

Tātad $y_{\min} = \sqrt{6}$.

Jānītis. Lai risinājums būtu pilnīgs, tev vēl jāuzrāda *x*, kuram tiek sasniegta šī minimālā vērtība.

Anniņa. Nosaku *x*, risinot kvadrātvienādojumu:

$$\sqrt{x^2 - 2} - 2x = \sqrt{6} \iff \sqrt{x^2 - 2} = 2x + \sqrt{6}$$

$$x^2 - 2 = 4x^2 + 4\sqrt{6}x + 6$$

$$3x^2 + 4\sqrt{6}x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{6} \pm \sqrt{24 - 3 \cdot 8}}{3} = \frac{-2\sqrt{6}}{3}.$$

Jānītis. Tomēr veikšu pārbaudi:

$$\sqrt{x^2 - 2} - 2x = \sqrt{\frac{24}{9} - 2} + \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{ ???}$$

Kaut kāda mistika! Minimālā pozitīvā *y* vērtība nav $\sqrt{6}$, kā tas izriet no Anniņas risinājuma.

Kāpēc lietotā metode (vērtību kopas izmantošana) apskatāmajā piemērā neļauj atrast minimumu?

Paijiņa. Mēs kārtējo reizi esam saskārušies ar neeksistences problēmu Metode nevar atrast to, kā nav. Ievērosim, ka funkcija y pieņem tikai negatīvas vērtības:

$$y = \sqrt{x^2 - 2} - 2x = \frac{x^2 - 2 - 4x^2}{\sqrt{x^2 - 2} + 2x} = \frac{-3x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 2} + 2x} < 0.$$

Jurītis. Man šķiet, ka arī Paijiņa kļūdās. Vismaz nav tiesa, ka y pieņem tikai negatīvas vērtības. Tā būtu, ja pieļautu tikai pozitīvus x.

Kā šo piemēru risinātu jūs? Labākai izpratnei ļoti ieteicams uzzīmēt funkcijas y grafiku.

<u>Trīs nevienādības</u>. Pierādīt vai atspēkot šādas nevienādības nenegatīviem a un tiem p, kuriem tās definētas:

(1) $\sqrt{x^2 + a^2} - px \geq a\sqrt{1 - p^2}$;

(2) $\sqrt{x^2 - a^2} - px \leq -a\sqrt{p^2 - 1}$;

(3) $\sqrt{a^2 - x^2} + px \leq a\sqrt{1 + p^2}$;

Anniņa. Izmantošu vispārīgajā gadījumā iegūtos nosacījumus, sk. (*), (**). Pirmās nevienādības gadījumā mums ir:

$$\mathrm{a} = 1,\ \mathrm{b} = 0,\ \mathrm{c} = a^2,\ \mathrm{d} = -p.$$

Veicu pārbaudi:

$$\mathrm{ay}^2 \geq \mathrm{c}(\mathrm{a} - \mathrm{d}^2) \Leftrightarrow \mathrm{y}^2 \geq a^2(1 - p^2)$$

$$\mathrm{y} \geq a\sqrt{1 - p^2}.$$

Tātad pirmā nevienādība ir spēkā.
Otrajā gadījumā:

$$\mathrm{a} = 1,\ \mathrm{b} = 0,\ \mathrm{c} = -a^2,\ \mathrm{d} = -p$$

$$\mathrm{y}^2 \geq \mathrm{c}(\mathrm{a} - \mathrm{d}^2) \Leftrightarrow \mathrm{y}^2 \geq -a^2(1 - p^2) = a^2(p^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\mathrm{y} \geq a\sqrt{p^2 - 1}.$$

Secinu, ka otrā nevienādība nav spēkā.
Trešajā gadījumā:

$$\mathrm{a} = -1,\ \mathrm{b} = 0,\ \mathrm{c} = a^2,\ \mathrm{d} = p$$

$$\mathrm{ay}^2 \geq \mathrm{c}(\mathrm{a} - \mathrm{d}^2) \Leftrightarrow -\mathrm{y}^2 \geq a^2(-1 - p^2) = -a^2(1 + p^2) \Rightarrow$$

$$y \leq a\sqrt{1 + p^2}$$

Tātad trešā nevienādība ir spēkā.

Jānītis. Pārbaudīšu nevienādību pareizību ar tiešo paņēmienu, kāpinot kvadrātā.

$$\sqrt{x^2+a^2} \geq px + a\sqrt{1-p^2}$$

$$x^2+a^2 \geq p^2x^2 + 2apx\sqrt{1-p^2} + a^2(1-p^2)$$

$$x^2(1-p^2) - 2apx\sqrt{1-p^2} + a^2p^2 \geq 0$$

$$\left(x\sqrt{1-p^2} - ap\right)^2 \geq 0 .$$

Tātad pirmā nevienādība pareiza.

Tagad pārbaudu otro nevienādību:

$$(\sqrt{x^2-a^2} \leq px - a\sqrt{p^2-1}$$

$$x^2-a^2 \leq p^2x^2 - 2apx\sqrt{p^2-1} + a^2(p^2-1)$$

$$0 \leq x^2(p^2-1) - 2apx\sqrt{p^2-1} + a^2p^2$$

$$0 \leq \left(x\sqrt{p^2-1} - ap\right)^2 .$$

Arī otrā nevienādība ir pareiza.

Beidzot pārbaudu trešo nevienādību:

$$\sqrt{a^2-x^2} \leq a\sqrt{1+p^2} - px$$

$$a^2-x^2 \leq a^2(1+p^2) - 2apx\sqrt{1+p^2} + p^2x^2$$

$$0 \leq x^2(1+p^2) - 2apx\sqrt{1+p^2} + a^2p^2$$

$$0 \leq \left(x\sqrt{1+p^2} - ap\right)^2$$

Arī tā ir pareiza. Tātad visas trīs nevienādības ir pareizas.

Kam taisnība? Atrodiet kļūdu Anniņas risinājumā.

<u>1. piemērs</u>. "Cilvēks atrodas uz salas 6 jūdžu attālumā no taisna krasta. Viņš vēlas nokļūt krasta punktā, kurš atrodas 10 jūdžu attālumā no salai tuvākā krasta punkta. Ja viņš var airēt 3 jūdzes stundā un iet pa krastu 5 jūdzes stundā, tad kāds ir viņa ātrākais ceļš?" [PCC, 263-265]

Salai tuvāko krasta punktu apzīmēsim ar T (62. zīm.) Mērķi, kurā jānonāk – ar M. Ar B apzīmēsim pagaidām nezināmo krasta punktu, kurā vispirms jānonāk, lai mērķi M varētu sasniegt visātrāk. Attālumu no punkta T līdz punktam B apzīmēsim ar x. Tad

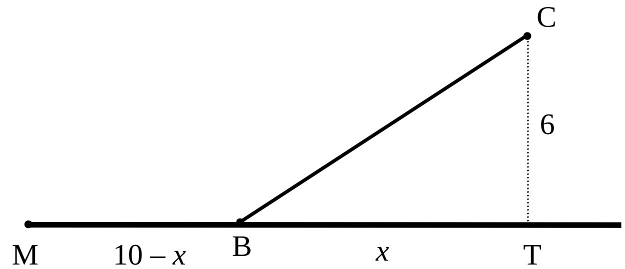
$$\mathrm{BC} = \sqrt{6^2 + x^2}\,, \ \mathrm{MB} = 10 - x.$$

Laiks, kas vajadzīgs ceļa BC un MB veikšanai attiecīgi ir:

$$t_1 = \frac{\mathrm{BC}}{3} = \frac{\sqrt{36+x^2}}{3}, \quad t_2 = \frac{10-x}{5}.$$

Saskaitot iegūtos lielumus, dabūjam funkciju, kas izsaka kopējo laiku atkarībā no ceļa *x*.

$$T(x) = \frac{\sqrt{36+x^2}}{3} + \frac{10-x}{5}$$



62. zīm.

Funkcijai jāmeklē minimums. To var atrast ar elementāriem paņēmieniem, turklāt vairākos veidos.

1. <u>Vērtību kopas izmantošana</u>.

No vienādības $T = \frac{\sqrt{36+x^2}}{3} + \frac{10-x}{5}$ izsaka *x*:

$$\left(T - \frac{10-x}{5}\right)^2 = \frac{36+x^2}{9} \iff \left(T - 2 + \frac{x}{5}\right)^2 = 4 + \frac{x^2}{9}$$

$$(T-2)^2 + \frac{2x}{5}(T-2) + \frac{x}{25}^{2} = 4 + \frac{x^2}{9} \iff (T-2)^2 + \frac{2x}{5}(T-2) = 4 + \frac{x^2}{9} - \frac{x}{25}^{2}$$

$$\frac{16x^2}{225} - \frac{2x}{5}(T-2) - (T-2)^2 + 4 = 0 \qquad (*)$$

Lai kvadrātvienādojumam attiecībā pret *x*, būtu atrisinājums, tā diskriminantam *D* jābūt nenegatīvam.

$$D = \frac{4}{25}(T-2)^2 - \frac{64}{225}(4-(T-2)^2) = \frac{100}{225}(T-2)^2 - \frac{256}{225} \geq 0$$

$$(T-2)^2 \geq 2{,}56$$

$$|T-2| \geq 1{,}6.$$

No šejienes $T \geq 3{,}6$ vai $T \leq 0{,}4$. Otrā nevienādība neder, jo saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$$T = \frac{\sqrt{36+x^2}}{3} + \frac{10-x}{5} \geq \frac{\sqrt{36+x^2}}{3} \geq \frac{\sqrt{36}}{3} = 2.$$

Tātad ātrākais laiks, kurā var sasniegt mērķi, ir $T = 3{,}6$. Atrodam *x*, kas atbilst šim laikam. To var iegūt kā kvadrātvienādojuma (*) sakni:

$$x = \frac{\frac{2}{5}(T-2) \pm \sqrt{D}}{\frac{32}{225}} = \frac{2}{5} \cdot 1{,}6 \cdot \frac{225}{32} = 4{,}5.$$

Kā redzams, risinājums ar šo paņēmienu ir samērā garš.

2. Eilera substitūcijas izmantošana.

Tā ļauj atbrīvoties no kvadrātsaknes. Eilera substitūcijas pazīstamas matemātiskajā analīzē; tās lieto integrēšanā, lai racionalizētu noteiktas klases funkcijas.

Pāriesim uz jaunu mainīgo t:

$$\sqrt{36+x^2} = x+t$$
$$36 + x^2 = x^2 + 2xt + t^2$$
$$x = \frac{36-t^2}{2t} = \frac{18}{t} - \frac{t}{2}.$$

Ievietojam x minimizējamās funkcijas T izteiksmē:

$$T = \frac{1}{3}\left(t + \frac{18}{t} - \frac{t}{2}\right) + 2 - \frac{1}{5}\left(\frac{18}{t} - \frac{t}{2}\right) =$$
$$= t\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{t}\left(6 - \frac{18}{5}\right) + 2 =$$
$$= \frac{4t}{15} + \frac{12}{5t} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{4t \cdot 12}{15 \cdot 5t}} + 2 = 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 = 3{,}6.$$

Te lietota nevienādība $A \geq G$ diviem saskaitāmajiem. Vienādība tiek sasniegta, ja

$$\frac{4t}{15} = \frac{12}{5t} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 9.$$

No šejienes

$$t = 3 \;\Rightarrow x = \frac{36-t^2}{2t} = 4{,}5.$$

3. Trigonometriskas substitūcijas izmantošana.

Apzīmējam $x = 6\text{tg}t$. Tad

$$T = 2\sqrt{1 + \text{tg}^2 t} + 2 - \frac{6}{5}\text{tg}t =$$
$$= \frac{2}{\cos t} - \frac{6\text{tg}t}{5} + 2 = \frac{2(5 - 3\sin t)}{5\cos t} + 2.$$

Tagad rodas jautājums, kā atrast minimumu funkcijai $\frac{5-3\sin t}{\cos t}$? Katrā ziņā tas ir izdarāms ar elementāriem līdzekļiem, jo mēs varam no šīs trigonometriskās funkcijas pāriet atpakaļ uz jau aplūkoto funkciju. Bet vai ir kāds cits ērtāks paņēmiens. Jā, ir!

Eleganti pierādāms, ka $\frac{5-3\sin t}{\cos t} \geq 4$, jo $4\cos t + 3\sin t \leq 5$ pēc Košī nevienādības. Kad pastāv vienādība? Tad, kad ir spēkā proporcionalitātes nosacījums. 4: 3 = cos$t$: sin$t$. No kurienes vienkārši iegūt, ka

$$\sin t = \frac{3}{5},\ \cos t = \frac{4}{5},\ tgt = \frac{3}{4} \text{ un tādējādi } x = 6\text{tg}t = 4{,}5.$$

Ir spēkā šāds vispārinājums: Ja $a \geq b > 0$ un $\cos t > 0$, tad

$$\frac{a - b\sin t}{\cos t} \geq \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Vienādība pastāv tikai tad, ja $\sin t = \frac{b}{a}$.

Apgalvojuma pareizība uzreiz izriet no Košī nevienādības (tā detalizēti aplūkota darba 2. daļā):

$$\sqrt{a^2 - b^2}\cos t + b\sin t \leq \sqrt{a^2 - b^2 + b^2} = a.$$

Tagad nedaudz modificēsim šo uzdevumu, pieņemot, ka sala atrodas 16 jūdžu attālumā no krasta. Vai tāda viena skaitļa aizstāšana ar otru var būtiski ietekmēt risinājumu ? Šķiet, ka nē. Bet nesteigsimies ar secinājumiem, pirms neesam atrisinājuši šo jauno uzdevumu.

Anniņa. Tagad jāmeklē minimums funkcijai

$$T(x) = \frac{\sqrt{16^2 + x^2}}{3} + \frac{10 - x}{5}.$$

Atrisināsim uzdevumu, lietojot trigonometrisko substitūciju $x = 16\mathrm{tg}t$. Tad

$$T = \frac{16\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t}}{3} + 2 - \frac{16\mathrm{tg}t}{5} = \frac{16}{3\cos t} - \frac{16\sin t}{5\cos t} + 2 = \frac{16(5 - 3\sin t)}{15\cos t} + 2.$$

Tāpat kā iepriekš, funkcija T minimumu sasniedz tur, kur to sasniedz daļa $\frac{5 - 3\sin t}{\cos t} \geq 4$, t. i., kad $\mathrm{tg}t = \frac{3}{4}$. Tas nozīmē, ka funkcijas T minimums ir vienāds ar $\frac{64}{15} + 2 = \frac{94}{15}$.

Jānītis. Zinot, ka $\mathrm{tg}t = \frac{3}{4}$, aprēķināšu $x = 16\mathrm{tg}t = 12$???

Tas ir absurds, jo x var mainīties tikai intervālā [0, 10]. Tātad Anniņa kaut kur ir kļūdījusies.

Anniņa. Man ir pretarguments. Tas, ka $x = 12$ nav nekāds absurds. Vajag vienīgi pareizi interpretēt iegūto rezultātu.

Jānītis. Kā?

Anniņa. Nu, piemēram, tā, ka vispirms aizbraucam uz punktu B, kurš atrodas 12 jūdžu attālumā no T un tad braucam uz mērķi M.

Jurītis. Tāda braukšana gan nevar būt ātrākā. Skaidrs, ka braukšana uzreiz uz mērķi prasīs mazāk laika. Pārbaudīšu, vai ceļa CM veikšanai vajag vismazāk laika. Tas nozīmē, ka jāpārbauda nevienādība

$$T(x) \geq T(10) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16^2 + x^2}}{3} + \frac{10 - x}{5} \geq \frac{\sqrt{16^2 + 10^2}}{3} = \frac{\sqrt{356}}{3}$$

Pārbaudei izmantošu trigonometrisko formu, sk. Anniņas risinājumu. Man jāpierāda vai jāatspēko nevienādība

$$T = \frac{16(5-3\sin t)}{15\cos t} + 2 \geq \frac{\sqrt{356}}{3}.$$

Tā kā $\frac{5-3\sin t}{\cos t} \geq 4$, tad jāpārbauda nevienādība

$$\frac{64}{15} + 2 \geq \frac{\sqrt{356}}{3} \Leftrightarrow \frac{94}{15} \geq \frac{\sqrt{356}}{3} \Leftrightarrow 94 \geq 5\sqrt{356} \Leftrightarrow 94 \geq 10\sqrt{89} \Leftrightarrow 8836 \geq 8900.$$

Secinu, ka tiešais ceļš CM tomēr nav visīsākais.

Paijiņa. Ja meklētais ekstrēms neatrodas intervāla iekšienē, tad tas, droši vien, atrodas intervāla galapunktā. Galapunktu $x = 10$ jau izbrāķēja Jurītis. Atliek pārbaudīt otru galapunktu $x = 0$.

$$T(x) \geq T(0) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16^2 + x^2}}{3} + \frac{10-x}{5} \geq \frac{16}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16^2 + x^2}}{3} \geq \frac{16}{3} + \frac{x}{5}$$

Kāpinu abas puses kvadrātā

$$\frac{16^2}{9} + \frac{x^2}{9} \geq \frac{16^2}{9} + \frac{32x}{15} + \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow \frac{16x^2}{225} \geq \frac{32x}{15} \Leftrightarrow x \geq 30.$$

Tātad arī šis galapunkts nedod minimumu.

Pēterītis. Es tomēr pats pārbaudīšu galapunktu $x = 10$. Drošāk ir veikt tiešu pārbaudi nekā pāriet uz trigonometrisko formu.

$$T(x) = \frac{\sqrt{16^2 + x^2}}{3} + \frac{10-x}{5} \geq \frac{\sqrt{16^2 + 10^2}}{3} = k \Leftrightarrow$$

$$\frac{16^2 + x^2}{9} \geq \left(k - 2 + \frac{x}{5}\right)^2 = (k-2)^2 + \frac{2x}{5}(k-2) + \frac{x}{25}^2$$

$$\frac{16x^2}{225} - \frac{2x}{5}(k-2) + \frac{256}{9} - (k-2)^2 \geq 0.$$

Lai kreisā puse būtu nenegatīva, to jāvar izteikt kā kvadrātu, t. i., formā $\left(\frac{4x}{15} - \frac{15(k-2)}{4}\right)^2$. Atliek pārbaudīt sakarību:

$$\frac{225(k-2)^2}{16} = \frac{256}{9} - (k-2)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{225}{16} + 1\right)(k-2)^2 = \frac{256}{9}.$$

Izvelkam no abām pusēm kvadrātsakni:

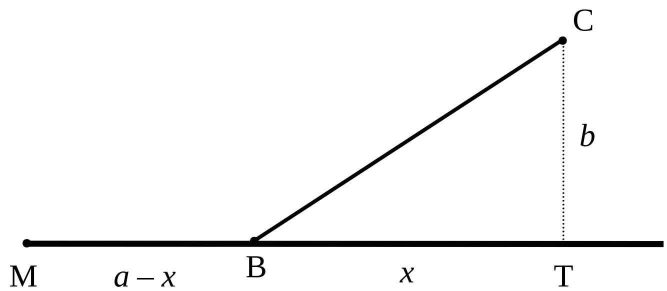
$$\frac{\sqrt{241}}{4}(k-2) \Leftrightarrow \frac{16}{3} \Leftrightarrow k - 2 = \frac{64}{3\sqrt{241}} \Leftrightarrow k = \frac{64}{3\sqrt{241}} + 2.$$

Iegūta pretruna, jo $k = \frac{\sqrt{356}}{3}$.

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

1. piemēra vispārinājums

Cilvēks atrodas uz salas C. Attālums no salas līdz taisnam krastam ir *b*. Viņam jānokļūst krastā punktā M, kurš no salai tuvākā krasta punkta T atrodas attālumā *a*, sk. 1. zīm. Kāds ir minimālais laiks, lai sasniegtu mērķi M, ja viņš var pārvietoties pa ūdeni ar ātrumu *v* un pa krastu ar ātrumu *w*, $w > v$? (63. zīm.)



63. zīm.

Pēc analoģijas ar 1. piemēru iegūstam minimizējamo funkciju

$$T(x) = \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v} + \frac{a - x}{w}$$

Apzīmēsim $x = b\,\mathrm{tg}\, t$. Tad

$$T = \frac{b\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t}}{v} - \frac{b\,\mathrm{tg} t}{w} + \frac{a}{w} =$$

$$= \frac{b}{vw}\left(\frac{w - v\sin t}{\cos t}\right) + \frac{a}{w} \geq \frac{b\sqrt{w^2 - v^2}}{vw} + \frac{a}{w}.$$

Šeit lietota Košī nevienādība $\sqrt{w^2 - v^2}\cos t + v\sin t \leq w$. Vienādība pastāv tikai tad, kad

$$\frac{w^2 - v^2}{v^2} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \Rightarrow \mathrm{tg} t = \sqrt{\frac{v^2}{w^2 - v^2}}.$$

No šejienes $x = b\,\mathrm{tg} t = \frac{bv}{\sqrt{w^2 - v^2}}$. Ja šāds *x* atrodas intervālā [0, *a*], tad tas ir meklējamais minimuma punkts. Tad

$$\min\left(\frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v} + \frac{a - x}{w}\right) = \frac{b\sqrt{w^2 - v^2}}{vw} + \frac{a}{w}, \quad x_{\min} = \frac{bv}{\sqrt{w^2 - v^2}}.$$

Pretējā gadījumā, t. i., kad

$$\frac{bv}{\sqrt{w^2 - v^2}} > a \tag{1}$$

jāveic papildu analīze.

Pierādīsim, ka pastāvot nosacījumam (1), laiku raksturojošā funkcija

$$T = \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v} + \frac{a - x}{w}$$

ir dilstoša intervālā [0, a] un tādējādi minimumu sasniedz galapunktā a.

Ņem $x < y,\ k := \frac{v}{w} < 1$. Tad jāpierāda nevienādība (saskaitāmo $\frac{a}{w}$ var atmest, jo tas monotonitāti neietekmē):

$$\sqrt{b^2 + x^2} - kx > \sqrt{b^2 + y^2} - ky \Leftrightarrow$$

$$k(y - x) > \sqrt{b^2 + y^2} - \sqrt{b^2 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$k(y - x)\left(\sqrt{b^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + x^2}\right) > b^2 + y^2 - b^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$k\left(\sqrt{b^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + x^2}\right) > y + x.$$

Pēdējo nevienādību sadalām divās atsevišķās nevienādībās, viena no kurām satur tikai y un otra tikai x. Pietiek pierādīt vienu no tām.

$$k\sqrt{b^2 + y^2} > y \Leftrightarrow k^2\left(b^2 + y^2\right) > y^2$$

$$k^2 b^2 > y^2(1 - k^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{k^2 b^2}{1 - k^2} > y^2$$

Izejot no (1), vienkārši pārveidojumi ļauj iegūt vajadzīgo nevienādību:

$$\frac{bv}{\sqrt{w^2 - v^2}} > a \Rightarrow \frac{bkw}{\sqrt{w^2 - (kw)^2}} > a \Rightarrow \frac{kb}{\sqrt{1 - k^2}} > a \Rightarrow \frac{k^2 b^2}{1 - k^2} > a^2 \geq y^2.$$

Vispārīgā gadījuma analīze

Lai pierādītu, ka uzdevumu $\sqrt{a_2 x^2 + a_1 x + a_0} + b_1 x + b_0 \mapsto extr$ var atrisināt ar elementāriem līdzekļiem, lietderīgi to aizstāt ar vienu no šādiem trīs pamatuzdevumiem.

$$\sqrt{x^2 + a^2} + kx + b \mapsto extr$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} + kx + b \mapsto extr$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} + kx + b \mapsto extr.$$

Aizstāšanu veic ar substitūciju $x = t - \frac{a_1}{2a_2}$. Kura tipa uzdevums tiks iegūts, tas atkarīgs no izejas funkcijas koeficientiem.

Pierādīsim šādu teorēmu.

Teorēma. Pieņem, ka $x \geq 0$, $a > 0$ un $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + kx$. Tad

- f ir augoša, ja $k \geq 0$;
- f ir dilstoša, ja $k \leq -1$;
- $\min f(x) = f\left(\frac{ak}{\sqrt{1-k^2}}\right) = a\sqrt{1-k^2}$, ja $-1 < k \leq 0$.

Pierādījums. Ja $k = 0$, tad $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ ir augoša. Ja $k > 0$, tad f ir augoša kā divu augošu funkciju summa.

Ja $k \leq -1$, tad izmantojot identitāti $\sqrt{a^2 + x^2} - x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}$, f pārrakstām šādā formā:

$$\sqrt{a^2 + x^2} - x + (1+k)x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + x} + (1+k)x .$$

Funkcija $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}$ ir dilstoša, jo tās saucējs ir augoša funkcija kā divu augošu funkciju summa. Arī funkcija $(1 + k)x$ ir dilstoša (ja $k < -1$). Tātad vienādības labajā pusē esošā funkcija ir dilstoša, kas arī bija jāpierāda.

Trešo apgalvojumu var pierādīt ar kādu no iepriekš aplūkotajiem paņēmieniem, var veikt arī tiešu pārbaudi, ko arī izdarīsim:

$$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + kx \geq a\sqrt{1-k^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + a^2 \geq a^2(1-k^2) - 2akx\sqrt{1-k^2} + k^2x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2(1-k^2) + 2akx\sqrt{1-k^2} + a^2k^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x\sqrt{1-k^2} + ak\right)^2 \geq 0 .$$

Pierādiet patstāvīgi šīs teorēmas analogus funkcijām:

$$g(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + kx$$

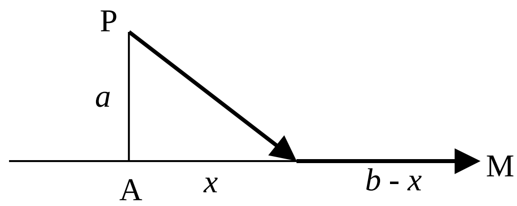
$$h(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + kx .$$

Uzdevumi ar praktisku ievirzi

Baložu lidojums. (sk. darba 1. daļu)

Virs ūdens palaists mājas balodis lido uz savu mājvietu tā, lai patērētu iespējami maz enerģijas. Pieņemot, ka e_1 un e_2 ($e_1 < e_2$) ir enerģijas patēriņš laika vienībā attiecīgi virs sauszemes un virs ūdens un ka tas ir proporcionāls nolidotajam attālumam, iegūst šādu ekstrēmu uzdevumu (64. zīm.).

$$\min(\mathrm{e}_2\sqrt{a^2 + x^2} + \mathrm{e}_1(b - x) = ?$$



64. zīm.

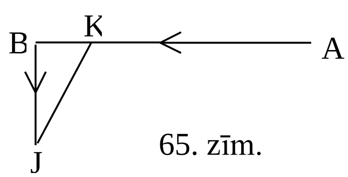
A, *B*, *C* ir 3 taisnstūra virsotnes, |*AB*| = *a*, |*BC*| =*b*. *B* un *C* savieno taisna šoseja. Gājēja ātrums pa šoseju ir v_1, citur $v_2 < v_1$. Kā jāiet gājējam, lai no *A* nokļūtu *C* visīsākā laikā? [E, 5. lpp.]

"Dzelzceļs uzbūvēts gar jūras krastu, sk zīm. 200 km attālumā no dzelzceļa atrodas sala S. Uz salu S produktus ved no pilsētas A, kura atrodas 600 km attālumā no punkta B. Kravu no A var transportēt uz salu tieši pa jūru vai kombinētā veidā, vispirms pa dzelzceļu un pēc tam pa jūru. Pārvadāšanas ātrums pa dzelzceļu ir 50 km/st, bet pa jūru 30 km/st. Kravas vienības pārvadāšanas izmaksas pa dzelzceļa 1 km ir divas reizes dārgākas nekā pa jūru. Jānosaka pārkraušanas punkta M vieta tā, lai pārvešanas laiks būtu minimāls." [Čer, 120-121. lpp.]

Apzīmējot attālumu AM ar *x*, pārkraušanas laiku raksturošanai iegūst funkciju:

$$t = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{(600 - x)^2 + 200^2}}{30}.$$

Minētajā grāmatā tās minimums meklēts ar atvasinājuma palīdzību. Turklāt no atrastajiem "kritiskajiem" punktiem, minimuma punkts izvēlēts bez stingra pamatojuma, atsaucoties uz uzdevuma ģeometrisko jēgu.



65. zīm.

*No punktiem A un B (*65*. zīm.) bultiņu norādītajā virzienā vienlaicīgi izbrauc kuģis un jahta. To ātrumi attiecīgi ir* v_k= 40 *km/st.*, v_j = 16 *km/st. Pēc cik ilga laika attālums starp tiem būs vismazākais, ja AB* = 145 *km?* [Nat, 15. lpp.]

Minimizējamā funkcija, kas raksturo jahtas nobraukto ceļu laikā *t*, būs šāda:
$\sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}$. Redzams, ka tā nesatur lineāro daļu un ir aplūkojamā veida funkcijas vienkāršs gadījums. Pietiek noskaidrot zemsaknes izteiksmes (kvadrātfunkcijas) minimumu.

"Mīnu kuģis noenkurojies 9 km attālumā no krasta vistuvākā punkta; no mīnu kuģa jānosūta ziņnesis uz kara nometni, kas atrodas 15 km attālumā, mērot pa krastu, līdz krasta punktam, kas vistuvāk mīnu kuģim. Ja ziņnesis, ejot kājām, var veikt 5 km stundā un airējot 4 km stundā, tad kādā krasta punktā viņam jāpiestāj, lai paspētu nokļūt nometnē visātrākajā laikā?” [GL, 327. lpp.]

“Cilvēks airu laivā atrodas 1 jūdzes attālumā no vistuvākā krasta punkta. Izdzirdējis ugunsgrēka signālu, viņš steidzas uz ugunsdzēsēju depo, kas atrodas 5 jūdžu attālumā no minētā punkta. Ja viņš var pārvietoties ar ātrumu 4 jūdzes stundā airējot un 5 jūdzes stundā skrienot, tad kā viņam vajadzētu pārvietoties, lai ugunsdzēsēju depo sasniegtu visātrāk?” [Hur, 179. lpp.] Tur prasīts atbildēt vēl uz šādiem jautājumiem: “Cik ātri viņš sasniegtu depo, ja viņš varētu airēt 3 jūdzes stundā? Cik ātri viņš sasniegtu depo, ja viņš varētu noskriet 4 jūdzes stundā un ja depo atrastos 2 jūdžu attālumā?”

“Tūrists iet no punkta *A*, kas atrodas uz šosejas, uz punktu *B*, kura attālums līdz šosejai ir 8 km. Attālums starp *A* un *B* ir 17 km. Kurā vietā tūristam jānogriežas no šosejas, lai visīsākā laikā nonāktu punktā *B*, ja viņa pārvietošanās ātrums pa šoseju ir 5 km/h, bet pēc nogriešanās no šosejas – 3 km/h?” [KZZ,166. lpp., Š1]

“Rūpnīca *A* atrodas attālumā *b* no pilsētas *B* un attālumā *a* no dzelzceļa, kas iet uz pilsētu *B*. Kādā leņķī pret dzelzceļu jābūvē šoseja, lai kravas pārvadājumu izmaksa no rūpnīcas uz pilsētu būtu vismazākā, ja pārvadājumi pa šoseju izmaksā *k* reizes dārgāk nekā pa dzelzceļu?” [Nag, 51. lpp., Š1]

15. nodaļa **Faņano - Švarca uzdevums**

(*J. F. Toschi di Fagnano,* 1715 – 1797, itāļu matemātiķis.)
(*Schwarz Carl Hermann Amandus,* 1843 – 1921, vācu matemātiķis.)
Uzdevuma formulējums un vēsturiskas ziņas dotas darba 1. daļā.

Faņano uzdevums

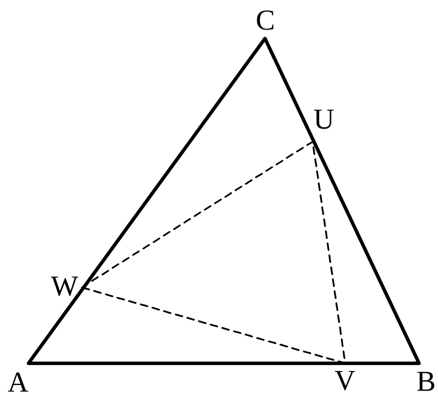
Dotajā šaurleņķa trijstūrī ABC ievilkt trijstūri UVW ar vismazāko perimetru.
[Ko, 38.-39. lpp.] Vairākās grāmatās [RT, Zet, KR], kur risināts šis uzdevums, pats Faņano netiek minēts. Uzdevumu Faņano formulējis 1775. gadā un to esot atrisinājis ar "rēķinu"(*при помощи вычислений*) palīdzību [KG, 108. lpp.] Ar "rēķiniem" tur domāti diferenciārēķini.
Faņano uzdevums pazīstams arī kā Švarca uzdevums, sk., piemēram, [GT, 170. lpp.]:
Uz katras no uzdotā trijstūra malām atrast pa tādam punktam, lai iegūtajam trijstūrim būtu vismazākais perimetrs.
(Ievērosim, ka šajā formulējumā nav prasības par to, ka trijstūrim jābūt šaurleņķa. Var uzskatīt, ka par Švarca uzdevumu saucams Faņano uzdevums, kura formulējumā izmests vārds "šaurleņķa".)

Izmantojot Hērona uzdevumu (tas aplūkots darba 1. daļā) viegli uzminēt Faņano uzdevuma atbildi. Aplūkosim trijstūri ABC (66. zīm.), kurā ievilkts trijstūris UVW. Fiksējam punktus U un W. Kur uz malas AB jāatrodas punktam V, lai attālumu summa UV + WV būtu vismazākā? Saskaņā ar Hērona uzdevuma risinājumu attālumu minimizē tāds punkts, kuram krišanas un atstarošanās leņķi vienādi, t. i., ∠AVW = ∠BVU. Tātad meklējamā trijstūra visas virsotnes jākonstruē tā, lai būtu spēkā minētā leņķu vienādība. Vai to vienmēr var izdarīt un, ja var, tad kā? Šaurleņķa trijstūrim to var izdarīt vienmēr, turklāt, meklējamais trijstūris nav nekas cits kā *ortocentriskais* trijstūris. Ne velti Faņano formulē uzdevumu šaurleņķa trijstūrim. Atgādināsim, ka par dotā trijstūra ABC ortocentrisko trijstūri sauc tādu trijstūri, kura virsotnes ir dotā trijstūra augstumu krustpunkti ar tā malām.

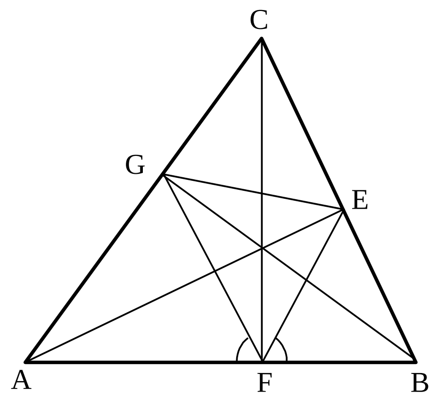
Švarca risinājums

Tas balstās uz spoguļattēlošanu un ortocentriska trijstūra īpašību izmantošanu. Švarcs izmantoja šādu teorēmu par ortocentrisku trijstūri:
Ortocentriskā trijstūra GEF (67. zīm.) *malas veido vienādus leņķus ar dotā trijstūra* ABC *malām, turklāt šie leņķi ir vienādi ar dotā trijstūra pretējās virsotnes leņķi, t. i.,*

$$\angle AFG = \angle BFE = \angle C$$
$$\angle AGF = \angle CGE = \angle B$$
$$\angle CEG = \angle BEF = \angle A.$$



66. zīm.



67. zīm.

Pierādīsim šo teorēmu, pamatojoties uz riņķī ievilktu leņķu īpašībām. (68. zīm.) Tā kā leņķi AGH un AFH ir taisni, tad ap četrstūri AGHF var apvilkt riņķa līniju ar diametru AH. Analoģiski riņķa līniju ar diametru BH var apvilkt ap četrstūri BFHE. Ir spēkā:

$\angle$ AHG = $\angle$ AFG (abi leņķi balstās uz vienu un to pašu loku).

$\angle$ AHG = $\angle$ EHB (krustleņķi).

$\angle$ EFB = $\angle$ EHB (abi leņķi balstās uz vienu un to pašu loku).

No šejienes izriet, ka $\angle$ AFG = $\angle$ BEF. Lai iegūtu vienādību

$$\angle AFG = \angle BFE = \angle C$$

ievērojam, ka

$$\angle HFE + \angle EFB = 90^0.$$

$$\angle GBC + \angle GCB = 90^0.$$

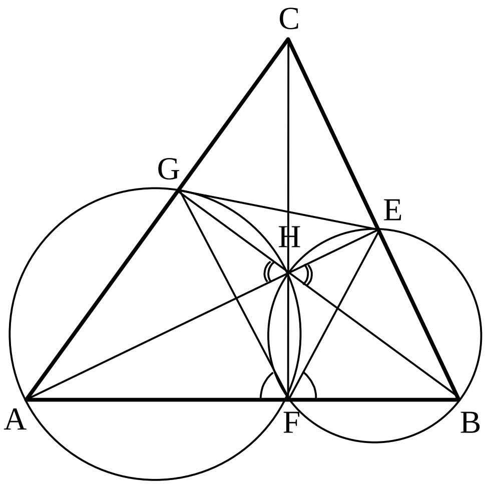
Tā kā pirmie divi leņķi vienādi (HFE un HBE balstās uz vienu un to pašu loku), tad arī EFB un GCB ir vienādi.

Līdzīgi spriežot, iegūst pārējās divas teorēmā formulētās leņķu vienādības. Teorēma pierādīta.

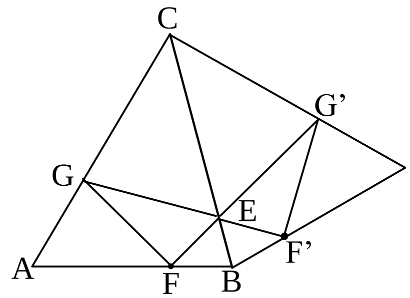
Ortocentriska trijstūra īpašība

Ja trijstūri ABC attēlo simetriski pret malu BC, tad ortocentriska trijstūra malas FE attēls FE’ atradīsies uz GE turpinājuma. (68. zīm.)

Apgalvojuma pareizība izriet no tā, ka ortocentriskajam trijstūrim leņķis BEF un ir vienāds ar leņķi CEG. Mala FE attēlojas par F’E tā, ka leņķis FEB vienāds ar leņķi BEF’. Tieši tikpat lielu leņķi veido malas GE turpinājums GF’ ar ar malu EB.



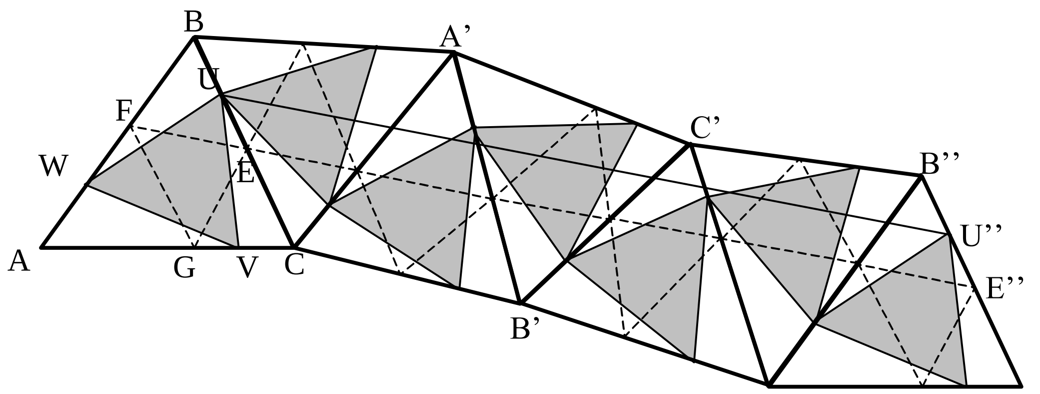
68. zīm.



69. zīm.

Tagad pāriesim pie Švarca pamatidejas izklāsta, kas atspoguļota 69. zīmējumā. Atspoguļosim trijstūri ABC pret malu BC ; tā iegūto trijstūri A'BC atspoguļosim pret malu CA'; iegūto trijstūri atkal atspoguļosim pret malu A'B' un tā sešas reizes, kamēr iegūsim trijstūri A"B"C". Ievērosim, ka pēdējo trijstūri var iegūt no ABC ar paralēlu pārnesi. Izdarot pirmos divus spoguļattēlus, mēs iegūstam to pašu rezultātu, ko dod trijstūra ABC pagriešana ap virsotni C par leņķi 2C. Gluži tāpat nākamo divu spoguļattēlu rezultāts ir līdzvērtīgs trijstūra AB'C' pagriešanai ap virsotni B' par leņķi 2B. Beidzot, pagriežot trijstūri A"B'C' par leņķi 2A, mēs nonākam gala stāvoklī. Tādējādi, kopējais pagriešanas leņķis ir vienāds ar 360^0, kas nozīmē, ka sākotnējais trijstūris pārejot uz gala stāvokli ir saglabājis savu orientāciju.

Izsekosim, kā mainās ortocentriska un patvaļīga trijstūra UVW stāvokļi, izdarot šīs atspoguļošanas. Pamatojoties uz ortocentriskā trijstūra īpašību (sk. Sekas), mala FE gan pirmajā spoguļattēlošanā, gan visās pārējās atradīsies uz FE turpinājuma – taisnes FE". Nogrieznis EE" sastāv no sešiem nogriežņiem, kuri ir ortocentriskā trijstūra EFG malu garumi, t. i., EE" garums ir vienāds ar divkāršotu ortocentriskā trijstūra perimetru.



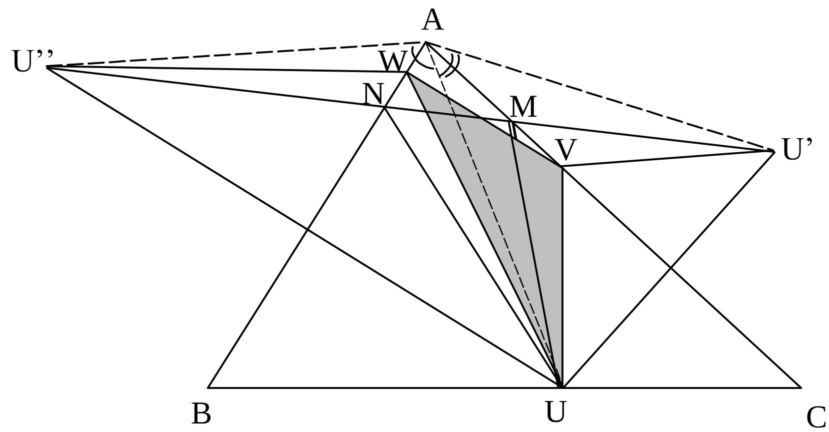
69. zīm.

Līdzīgi attiecīgās lauztās līnijas, kas savieno U un U", garums ir vienāds ar divkāršotu trijstūra UVW perimetru. Šīs lauztās līnijas garums nav īsāks par nogriežņa UU" garumu. Turklāt UU" un EE" garumi ir vienādi (Četrstūris UU"EE" ir paralelograms, jo UE = U"E" un BC paralēls B"C".)
Tādējādi ortocentriska perimetrs nav lielāks par jebkura cita dotajā trijstūrī ievilkta trijstūra perimetru, kas arī bija jāpierāda.

Citu, ne mazāk skaistu atrisinājumu, atrada H. Švarca students, vēlāk ievērojams ungāru matemātiķis – Leopolds Fejers (*Fejer*). Švarcam Fejera pierādījums esot ārkārtīgi paticis. Risinājums pamatoti tiek saukts par elegantu un pieskaitāms pie elementārās ģeometrijas šedevriem. Šo risinājumu var atrast, piemēram, H. Koksetera klasiskajā grāmatā H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, New York-London, 1961. Pirmoreiz šis pierādījums ir publicēts grāmatā [RT].

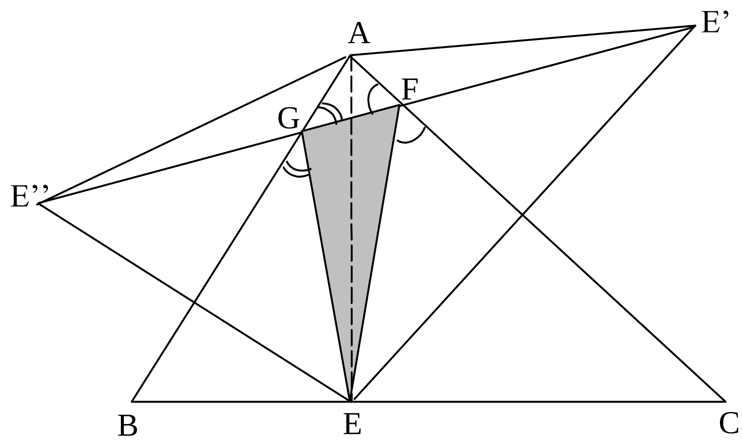
Fejera risinājums
Pieņem, ka UVW ir dotajā šaurleņķa trijstūrī ABC ievilkts trijstūris. Meklējam trijstūri ar vismazāko perimetru, ja šim trijstūrim viena virsotne atrodas fiksētā malas BC punktā U. Konstruējam nogriezni U'U", kur punkts U' ir punktam U simetrisks punkts attiecībā pret malu AB. Savukārt U" ir punktam U simetrisks punkts attiecībā pret malu AC. Nogriežņa U'U" krustpunktus ar trijstūra malām apzīmējam attiecīgi ar N un M. Trijstūris UNM ir meklētais. Šī trijstūra perimetrs ir vienāds ar U'U" garumu, jo pēc konstrukcijas U"N = NU un U'M = MU. Jebkurai citai punktu V un W izvēlei (uz malām AB un AC) lauztās līnijas U"WV U' garums būs lielāks nekā nogriežņa U'U" garums.

Tādējādi uzdevums reducēts uz punkta U tāda stāvokļa atrašanu, kuram U'U" garums ir minimāls. Ievēro, ka U"A = AU = AU', t. i., trijstūris U'AU" ir vienādsānu. Vēl vairāk, šim trijstūrim ir nemainīgs virsotnes leņķis U'AU". Tas ir vienāds ar divkāršotu dotā trijstūra leņķi A, jo $\angle$U"AB = $\angle$UAB un $\angle$U'AC = $\angle$UAC. Vienādsānu trijstūrim ar fiksētu virsotnes leņķi pamats būs visīsākais, ja tā mala būs iespējami īsa. Bet tā kā AU' = AU, tad īsākais pieļaujamais malas AU' garums ir vienāds ar trijstūra ABC augstumu AE (71. zīm.)



70. zīm.

Tagad konstruē meklējamo minimālo trijstūri (71. zīm.) kā trijstūri EFG, kur E ir augstuma AE projekcija uz pamatu BC un E''E' konstruēts saskaņā ar pierādījumā lietoto simetrijas principu. Salīdzina patvaļīgu ievilktu trijstūri UVW ar trijstūri EFG. Ja U nesakrīt ar E, tad saskaņā ar veikto pierādījumu attiecīgais nogrieznis U''U'un tādējādi perimetrs būs garāks nekā E''E'. Ja U sakrīt ar E, bet kāda no virsotnēm V vai W nesakrīt attiecīgi ar G un F, tad taisnes daļas E''GFE' vietā iegūtu lauztu līniju E''WVE', t. i., trijstūra UVW perimetrs lielāks nekā trijstūra EFG perimetrs.



71. zīm.

Ir zināmi arī citi aplukotā uzdevuma risinājumi. Sk. piemēram, [Zet;] Papildus ziņas par citiem šī uzdevuma aspektiem (piemēram, ja trijstūri ABC aizstāj ar patvaļīgu trijstūri; ja trijstūra vietā aplūko četrstūri)un vispārinājumiem var gūt [RT, 237-240. lpp.]

Literatūra

[AZT Andžāns A., Ziļicka T., Treilibs, *Uzdevumi matemātikas olimpiādēs*, Rīga, Zvaigzne, 1977, 390 lpp.

[Bl] Бляшке В., *Круг и шар*, Москва, Наука, 1967, 232 с.

[Br] Briedis Z. *Izcilie matemātiķi*, Rīga, Zvaigzne, 1972, 126 lpp.

[BB2] Бородин А. И., Бугай А. С., *Биографический словарь деятелей в области математики*, Киев «Радянська школа», 1979, 608 с.

[Cib1] Cibulis A. *Skaitlis e*, "Zvaigžņotā debess", 1996, Rudens, 51. - 54. lpp.

[CC] Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г., *Математические формулы*, Москва, Наука, 1985, 128 с.

[Čer] Черкасов А.Н. *Введение в высшую математику*, Москва, Наука, 1964, 244с.

[E] *Vairāku argumentu funkciju diferenciālrēķini un integrālrēķini. Funkciju virknes un rindas*, sastād. G. Eņģelis, Rīga, LVU, 1983, 27 lpp.

[EV] *Энциклопедический словарь юного математика*, Москва, Педагогика,1989, 352с.

[GL] Грэнвиль В.,Лузин Н. *Курс диференциального и интегрального исчисления, часть 1*, Москва -Ленинград, ГТТИ, 1933, 586 с. (12. izdevums.)

[GT] Галеев Э М.,Тихомиров В М. *Краткий курс теории экстремальных*

[Han] Hansen V. L. *Shadows of the Circle. Conic sections, Optimal Figures and Non-Euclidean Geometry*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998, 112 pp.

[Hur] Hurley J. F *Calculus,* USA, Wadsworth Publish. comp., 1987.

[JB] Яглом И. М., Болтянский В. Г., *Выпуклые фигуры*, Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1951, 344 с.

[KG] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л., *Новые встречи с геометрией*, Москва, Наука, 1978, 224с.

[Ko] Кокстер Г.С.М., *Введение в геометрию*, Москва, Наука,1966, 648с.

[Kr] Крыжановский Д.А. *Изопериметры*, Физматгиз,1959,116с.

[KR] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика?*, Москва, Просвещение, 1967, 558с.

[KZZ] Kriķis D., Zariņš P., Ziobrovskis V. *Diferencēti uzdevumi matemātikā, 1. daļa*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1991 (1. izdevums), 390 lpp.

[Lei] Leimanis E. *Ievads augstākā matemātikā, I daļa. Diferenciālrēķini*, Rīgā, 1943, Univ. Studentu padomes grāmatnīca, 130 lpp.

[Mus] Muses C. *De Morgan's Ramanujan: An incident in recovering our endangered cultural memory of mathematics,* The Mathematical Intelligencer, 1998, v.20, n.3, 47-51.

[Nag] Нагибин Ф.Ф. *Экстремумы*, Москва, Просвещение,1969, 120с.
[Nov] Новоселов С. И., *Специальный курс тригонометрии*, Москва, Советская Наука, 1953, 464 с.
[O] Ozols O. *Ievads augstākā matemātikā*, Latvijas valsts izdevniecība, Rīga, 1947, 326 lpp.
[Pal] Паламодов В. П. *О двух геометрических задачах на максимум*, Математическое просвещение, Вып. 5, Москва , 1960, 179-184,
[RT] Радемахер Г., Теплиц О., *Числа и фигури*, Москва, Наука, 1966, 264с.
[Sav] Савчук П. М., *Сборник задач по высшей математике*, Госуд. изд. физико-математической лит., Москва, 1956, 132с.
[Š1] Šteiners K. *Matemātiskās analīzes elementi*, Rīga, Zvaigzne, 1993, 320 lpp.
[ŠČJ1] Шклярский Д.О.,Ченцов Н.Н.,Яглом И.М. *Геомерические неравенства, и задачи на максимум и минимум*, Москва, Наука,1970,335с.
[ŠČJ2] Шклярский Д.О.,Ченцов Н.Н.,Яглом И.М. *Геомерические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*, Москва, Наука, 1974, 384с.
[T] Тихомиров В.М. *Рассказы о максимумах и минимумах*, Москва, Наука, 1986, 190с.
[Tot] Тот Л. Ф., *Расположения на плоскости на сфере и в пространстве*, Москва, Госуд. изд. физико-математической лит., 1958, 364с.
[Vas] Васютинский Н., *Золотая пропорция*, Москва, Молодая гвардия, 1990, 240 с.
[Zet] Зетель С. И. *Задачи на максимум и минимум*, Москва-Ленинград, ГИТТЛ,1948, 224с.