Agnis Andžāns, Jānis Čakste,
Tomass Larfelds, Līga Ramāna, Mārīte Seile

VIDĒJĀS VĒRTĪBAS METODE

Saturs

Priekšvārds

Matemātikā izstrādāti daudzi simti metožu, kuras sekmīgi lieto dažādu uzdevumu risināšanā. Šādu metožu skaits aizvien palielinās. Parasti katra metode paredzēta samērā šaurās uzdevumu grupas risināšanai un izveidota, ņemot vērā šis grupas īpatnības un specifiku.

Tomēr matemātikā ir arī tādas metodes, kuras nav saistītas ar kādu specifisku uzdevumu grupu, bet tiek lietotas visdažādākajās nozarēs. Tās nav tikai matemātikas metodes, bet domāšanas paņēmieni, kurus cilvēki lieto tiklab matemātisku problēmu risināšanā, kā arī citos dzīves gadījumos. Iepazīšanās ar šādām metodēm ir nepieciešama katram garīga darba veicējam.

Daudzas teorētiskās metodes matemātika (un arī dzīvē!) balstās uz šādu principu: **"Lai paveiktu lielas lietas, vismaz vienā virzienā jāsakoncentrē pietiekami lieli līdzekļi."** Protams, katrā konkrētajā gadījumā jēdzieni "lielas lietas", "virziens", "lieli līdzekļi" jāprecizē. Kā to izdarīt dažās matemātiskās situācijās, parādīts šajā grāmatā.

Grāmata paredzēta skolēniem, kas padziļināti interesējas par matemātiku. To var izmantot arī matemātikas skolotāji un pulciņu vadītāji. Iekļautā materiāla grūtības pakāpes ir ļoti dažādas. Daudzi piemēri un uzdevumi būs pa spēkam jau piektklasniekiem un sestklasniekiem, daļa- tikai lasītājam ar augstu matemātisko kultūru.

Grāmatā ir teorētiskais materiāls, piemēri un uzdevumi patstāvīgai risināšanai. Grūtāki uzdevumi un piemēri apzīmēti ar zvaigznīti *, sevišķi grūtie - ar burtu "k".
Lasītājam iesakām strādāt ar grāmatu aktīvi. Izlasot piemēru, pacentieties to atrisināt patstāvīgi, pirms lasiet autoru piedāvāto risinājumu! Tomēr autoru risinājumus lasīt noteikti vajag - tajos var parādīties jums iepriekš nezināmas risinājuma idejas un paņēmieni.

Galvenais, kam jāpievērš uzmanība - vispārējā lietoto spriedumu ievirze, nevis tikai abstrakti teorēmu formulējumi.

Katrā nodaļā starp patstāvīgai risināšanai piedāvātajiem uzdevumiem ir daudz tādu uzdevumu, kas tikai ar nebūtiskām detaļām atšķiras no tekstā analizētajiem piemēriem. Šie uzdevumi apzīmēti ar aplīti °.

Pēc piemērā vai uzdevuma atrisināšanas vai risinājuma izlasīšanas vienmēr padomājiet:
"Vai uzdevumu nevarēja atrisināt arī citādi?"
"Vai ar šo pašu spriedumu varētu pierādīt arī spēcīgāku rezultātu?"
"Kādus līdzīgus uzdevumus vēl varētu atrisināt, spriežot tādā pašā veidā?"

Rakstot grāmatu, izmantota plaša literatūra, arī vairāk nekā 30 valstu matemātikas olimpiāžu materiāli. Īpaši vēlamies izcelt Latvijas Universitātes līdzstrādnieku Kristīnes Āboliņas, Aivara Bērziņa, Ingas Frances, Mārtiņa Opmaņa, Sniedzes Sedolas sastādītos uzdevumus un pierādītos rezultātus (sk. tekstā un literatūras sarakstā), kā arī M. Opmaņa metodisko ideju par "nelīdztiesīgiem būriem".

Autori

IEVADDAĻA

1. nodaļa. Metodes pamati

1.1. Ievaduzdevumi

Apskatīsim pavisam vienkāršu uzdevumu.

1. piemērs. Pēterītim ir 3 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai starp šiem būriem ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 2 truši?

Uz šo jautājumu jūs noteikti uzreiz atbildēsiet apstiprinoši: "Nu protams! Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterītim katrā būrī būtu ne vairāk kā viens trusis. Tātad būros būtu ne vairāk kā 2 truši. Līdz ar to vismaz viens trusis atrastos brīvībā, ko Pēterītis negrib pieļaut nekādā ziņā".
Bet ja nu Pēterītim ir n +1 trusis un n būri? Vai starp šiem būriem noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 2 truši? Jūsu atbilde, spriežot līdzīgi, atkal būs apstiprinoša.

Ar līdzīgiem spriedumiem var atrisināt šādus uzdevumus.

1.° Ap galdu sēž 8 cilvēki. Pierādīt, ka starp viņiem ir vismaz divi cilvēki, kas dzimuši vienā nedēļas dienā.

2.° Skolā ir 370 skolēnu. Pierādīt, ka starp viņiem var atrast divus skolēnus, kas dzimuši vienā datumā.

3.° Klasē ir 13 skolēnu. Pierādīt, ka starp viņiem var atrast divus skolēnus, kas dzimuši vienā mēnesī.

4.° Vienīgajā ciemata kinoteātrī seansi sākas -$10.^{00}$, $12.^{00}$, 14^{00}, $16.^{00}$, $20.^{00}$. Kādu dienu 7 skolēni apmeklēja kino. Pierādīt, ka kādu seansu apmeklēja vismaz divi no viņiem.

Visos līdzšinējos risinājumos esam izmantojuši vienu un to pašu paņēmienu, kura pamatā ir teorēma.

1. teorēma (Dirihlē princips).

D_1 Ja vairāk nekā n priekšmeti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 priekšmeti.

Pierādīsim šo teorēmu.

Pieņemsim pretējo: nevienā grupā nav vairāk par vienu priekšmetu. Tā kā pavisam ir n grupu, tad tajās nav izvietoti vairāk par n priekšmetiem. Bet mums jāsadala grupās vairāk nekā n priekšmeti. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs. Tātad ir grupa, kurā ir vairāk nekā viens priekšmets, t.i., vismaz divi priekšmeti. Teorēma pierādīta.

Lasītājam, kuram patīk darbības ar algebriskām izteiksmēm, vienādībām, nevienādībām utt., varam dot formālāku izklāstu.

Atkal pieņemsim, ka nevienā grupā nav vairāk par vienu priekšmetu. Apzīmējot priekšmetu skaitu i-tajā grupā ar k_i ($i = 1; 2;\dots ; n$), iegūstam nevienādības $k_1 \le 1$; $k_2 \le 1$; $k_3 \le 1$; ...; $k_{n-1} \le 1$; $k_n \le 1$. Saskaitot tās, iegūstam:

$k_1 + k_2 + \dots + k_n \le 1 + \dots + 1$ (n reizes 1) jeb $k_1 + k_2 + \dots + k_n \le n$. Bet $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ir visu grupās sadalīto priekšmetu skaits, tātad tam jābūt lielākam par n.

Iegūta pretruna, kas pierāda teorēmu.

Parasti Dirihlē principu formulē šādi:

"Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens (tātad vismaz 2) truši."

Uz šo teorēmu turpmāk atsauksimies kā uz $\mathbf{D_1}$.

Pielietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs "būri" un kas - "truši". To var iemācīties, vienīgi risinot daudzus uzdevumus.

Iepriekš minētajos uzdevumos izvēle varētu būt šāda:

1. uzdevumā: "būri" - nedēļas dienas, "truši" - cilvēki ap galdu;
2. uzdevumā: "būri" - dažādie datumi (to ir 366), "truši" - skolēni;
3. uzdevumā: "būri" - mēneši, "truši" - skolēni;
4. uzdevumā: "būri" - seansi, "truši" - skolēni.

Aplūkosim vēl vairākus piemērus.

2. piemērs. Antropologi ir konstatējuši, ka cilvēka matu skaits nevar būt lielāks par 500000. Pierādīt, ka Rīgā dzīvo vismaz divi cilvēki ar vienādu skaitu matu.

1. atrisinājums. Mēģināsim spriest līdzīgi kā pirmajā piemērā par 3 trušiem. Tikai šoreiz "trušu" lomā būs Rīgā dzīvojošie cilvēki, bet "būrus" veidosim šādi (to būs 500001):

1. "būrī" ievietosim plikgalvjus,

2. "būrī" - tos cilvēkus, kuriem ir tieši 1 mats,

3. "būrī" - tos cilvēkus, kuriem ir tieši 2 mati,

....

500 001. "būrī" - tos cilvēkus, kuriem ir tieši 500 000 matu.

Atcerēsimies: mums jāpierāda, ka Rīgā dzīvo vismaz divi cilvēki ar vienādu skaitu matu. Tas nozīmē, ka jāpierāda: eksistē vismaz viens "būris", kurā mēs esam "ievietojuši" vismaz 2 cilvēkus. Pieņemsim pretējo, ka tāda "būra" nav. Tātad 1. "būris" ir tukšs vai arī tur ir viens cilvēks; arī 2. "būris" ir vai nu tukšs, vai arī tur ir viens cilvēks, utt.

Tātad visos "būros" kopā ir ne vairāk kā 1 + 1 +...+ 1 (500 001 reizi 1) = 500 001 cilvēks. Bet Rīgā dzīvo vairāk nekā 900 000 cilvēku, un katram no viņiem jāatrodas kādā no mūsu veidotajiem "būriem". Līdz ar to mūsu pieņēmums ir bijis aplams, un uzdevumā prasītais pierādīts.

2. atrisinājums. Izveidosim 500 001 grupu, kur

1. grupā atradīsies plikgalvji,

2. grupā - cilvēki, kuriem ir tieši 1 mats,

3. grupā - cilvēki, kuriem ir tieši 2 mati,

500 001. grupā - cilvēki, kuriem ir tieši 500 000 matu.

Šajās grupās mums jāiedala visi Rīgas iedzīvotāji, kuru ir vairāk nekā 900 000. Pēc $\mathbf{D_1}$ noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz 2 cilvēki, kas arī bija jāpierāda.

Ievērosim, ka uzdevuma atrisinājuma netiek apgalvots, ka Rīgā ir tieši divi un ne vairāk iedzīvotāju ar vienādu skaitu matu. Mēs tikai pierādījām, ka starp Rīgas iedzīvotājiem var atrast divus, kuriem ir vienāds skaits matu. Tas nenozīmē, ka Rīgā nevar būt 4, 5 vai 100 cilvēki ar vienādu skaitu matu.

Mēs arī neinteresējāmies par to, cik matu ir tiem diviem Rīgas iedzīvotājiem, kuriem to ir vienādi daudz; svarīgi, ka tādi vispār eksistē.

Spriedums tiek pamatots ar faktu, ka cilvēku Rīgā ir pārāk daudz, lai katrā "būrī" būtu ne vairāk kā viens no viņiem.

Atzīmēsim, ka mūsu spriedums nedod nekādas norādes par to, kā šos cilvēkus ar vienādo skaitu matu atrast. Tas tikai garantē, ka šādi cilvēki kaut kur Rīgā ir. Ievērosim, ka atrisinājums ar Dirihlē principa palīdzību bija īsāks.

3. piemērs. Planētas Alfa iedzīvotājiem uz galvas matu vietā aug antenas: katram ne vairāk kā 100 000. Pēc pēdējās iedzīvotāju skaitīšanas rezultātiem uz planētas dzīvo ne mazāk kā 8000000 iedzīvotāju. Pierādīt, ka ir iespējams atrast 80 planētas Alfa iemītniekus ar vienādu skaitu antenu.

1. atrisinājums. Šajā uzdevumā "trušu" lomā būs citplanētieši, bet "būrus" veidosim šādi:
1. "būrī" ievietosim plikgalvainos citplanētiešus;
2. "būrī" - tos, kuriem ir tieši 1 antena;
3. "būrī" - tos, kuriem ir tieši 2 antenas;
....
100 001. "būrī" - tos, kuriem ir tieši 100 000 antenas.

Iedomāsimies, ka visus alfiešus mēs esam ievietojuši "būros", vadoties pēc antenu skaita uz viņu galvām. Tad, pārfrāzējot uzdevumā prasīto, mums ir jāpierāda, ka noteikti ir "būris", kurā atrodas vismaz 80 citplanētiešu. Ievērosim, ka mēs neprasām, lai "būrī" būtu tieši 80 alfiešu. Galvenais, ka starp "būriem" (to skaits ir 100 001) noteikti ir viens (vienalga, kurš) "būris", kurā ir vismaz 80 citplanētiešu.

Pieņemsim pretējo, ka nevienā "būrī" nav vairāk par 79 citplanētiešiem. Tādā gadījumā mēs esam noslinkojuši un "būros" ievietojuši ne vairāk kā $100\ 001 \cdot 79 = 7\ 900\ 079$ alfiešus. Neizvietots palicis 99 921 citplanētietis. Skaidrs, ka, izvietojot arī šos alfiešus, noteikti atradīsies vismaz viens "būris", kurā būs vismaz 80 citplanētiešu.

Šī uzdevuma atrisinājums varētu būt īsāks, ja mēs būtu izmantojuši Dirihlē principa vispārinājumu.

2. teorēma (Dirihlē princips).

$\mathbf{D_2}$ **Ja vairāk nekā $m \cdot n$ priekšmeti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $m + 1$ priekšmets.**

Pierādījums. Pieņemsim, ka vairāk nekā m-n priekšmeti ir sadalīti n grupās. Apzīmēsim ar k. priekšmetu skaitu i-tajā grupā, kur $i = 1, 2, \ldots, n$, un pieņemsim pretējo, ka katrā grupā nav vairāk par m priekšmetiem. Tad 1. grupā ir m vai mazāk priekšmetu, tāpat 2., 3., ..., n grupā ($k_1 \leq m$; $k_2 \leq m$; ...;$k_n \leq m$. Līdz ar to visās grupās kopā ir tikai $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leq m + \ldots + m = m \cdot n$ priekšmetu. Bet ir dots, ka grupās ir sadalīti vairāk nekā $m \cdot n$ priekšmeti. Tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams, un noteikti eksistē grupa, kurā ir vismaz $m + 1$ priekšmets.
Uz šo teorēmu atsauksimies kā uz $\mathbf{D_2}$ un arī to sauksim par Dirihlē principu.

2. atrisinājums (izmantojot $\mathbf{D_2}$).

Izveidosim 100 001 grupu, kurā izvietoti $8\ 000\ 000 = 79 \cdot 100\ 001 + 99\ 921$ alfieši atkarībā no antenu skaita (1. grupā - plikgalvji, 2. grupā - tie, kuriem ir 1 antena, ..., 100 001. grupā - tie, kuriem ir 100 000 antenu). Pēc $\mathbf{D_2}$ eksistē grupa, kurā ir vismaz 79+1, t.i., vismaz 80 Alfas iemītnieki.

4. piemērs. Namā dzīvo 160 iedzīvotāji. Neviens no viņiem nav vecāks par 78 gadiem. Pierādīt, ka starp viņiem var atrast trīs tādus iedzīvotājus, kuru gadu skaits ir vienāds.

1.atrisinājums. Pieņemsim, ka starp nama iedzīvotājiem nevar atrast trīs tādus cilvēkus, kuru gadu skaits ir vienāds. Tad 0 gadu ir ne vairāk kā 2 iedzīvotājiem, ..., 78 gadi - ne vairāk kā

2 iedzīvotājiem. Tātad namā kopā dzīvo ne vairāk kā 2 + 2 + ... + 2 = 158 cilvēku. Bet, saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, namā ir 160 iedzīvotāji. Tātad pieņēmums ir aplams, un namā ir vairāk nekā divi iedzīvotāji, kuru gadu skaits ir vienāds.

2.atrisinājums. Visus namā dzīvojošos $79 \cdot 2 + 2 = 160$ cilvēkus sadalīsim 79 grupās atkarībā no to gadu skaita, 1. grupā būs cilvēki, kuriem ir 0 gadu, otrajā - tie, kuriem ir 1 gads, ... 79. grupā - tie, kuriem ir 78 gadi. Pēc $\mathbf{D_2}$ noteikti atradīsies grupa, kurā būs vismaz 3 cilvēki. No tā, kā grupas veidotas, seko, ka viņiem visiem būs vienāds gadu skaits, kas arī bija jāpierāda.

5. piemērs. *Namā dzīvo 160 iedzīvotāji, turklāt neviens no viņiem nav vecāks par 78 gadiem. Zināms, ka pašreiz nevienam nama iedzīvotājam nav 0; 1; ...; 13; 54; 55; ...; 59; 69; 72; 73; ...; 76 gadi. Pierādīt, ka starp viņiem var atrast četrus tādus iedzīvotājus, kuriem ir vienāds gadu skaits.*

Atrisinājums. Atkal apvienosim vienā grupā tos cilvēkus, kuriem ir vienāds gadu skaits. Taču šoreiz apskatīt 79 grupas un spriest tāpat kā iepriekšējā piemērā nav lietderīgi. Šāds domu gājiens mūs nenovedīs pie atrisinājuma. (Variet par to pārliecināties patstāvīgi.) Ievērosim, ka 26 no 79 mūsu apskatītajām grupām neietilpst neviens cilvēks. Tāpēc atmetīsim šīs grupas. Līdz ar to mums jāpierāda, ka starp 79 - 26 = 53 grupām noteikti ir tāda, kurā atrodas vismaz 4 cilvēki no 160 šajās grupās sadalītajiem cilvēkiem.

Ja visās grupās būtu ne vairāk kā 3 cilvēki, tad pavisam namā būtu ne vairāk kā $3 \cdot 53 = 159$ cilvēki. Bet pēc uzdevuma nosacījumiem namā ir 160 cilvēku. Tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams.

Visi turpmākie uzdevumi risināmi, izmantojot Dirihlē principu $\mathbf{D_1}$ vai $\mathbf{D_2}$ variantā. Centieties katru uzdevumu atrisināt divos veidos: gan izmantojot Dirihlē principu, gan bez tā!

5.° 34 skolēni rakstīja kontroldarbu. Nevienam nebija vairāk par 10 kļūdām. Pierādīt, ka vismaz 4 skolēni pieļāva vienādu skaitu kļūdu.

6.° Vai starp jebkurām 25 Latvijas monētām (t.i., 1 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant., 20 sant., 50 sant., 1 Ls, 2 Ls) noteikti ir vismaz 4 vienādas vērtības monētas?

7.° Klasē ir 40 skolēni. Vai noteikti ir tāds mēnesis, kurā savu dzimšanas dienu atzīmē ne mazāk kā 4 šīs klases skolēni?

8.° Skolā ir 30 klases, un tajās mācās 1000 skolēni. Pierādīt, ka šajā skolā ir klase, kurā mācās ne mazāk kā 34 skolēni.

9.° Bibliotēkā ir 1000 grāmatas. Nevienai grāmatai nav vairāk par 80 lappusēm. Pierādīt, ka bibliotēkā ir vismaz 13 grāmatas ar vienādu lappušu skaitu.

10.° Konferencē piedalījās 40 delegāti no 13 rajoniem. Pierādīt, ka vismaz no viena rajona bija ieradušies ne mazāk kā 4 delegāti.

11.° Pierādīt: no katriem 15 skolēniem var izraudzīties trīs, kas dzimuši vienā un tajā pašā nedēļas dienā.

12. A. Pierādīt: no jebkuriem 10 naturāliem skaitļiem var izraudzīties divus tādus skaitļus, kas sākas ar vienu un to pašu ciparu.

B. Pierādīt: no jebkuriem 11 naturāliem skaitļiem var izraudzīties divus tādus skaitļus, kas beidzas ar vienu un to pašu ciparu. (Pievērsiet uzmanību tam, ka minētais skaitļu daudzums abos punktos atšķiras!)

Iepriekš aplūkotajos piemēros visas grupas bija savstarpēji līdzvērtīgas, un nekādas atšķirības to starpā nebija novērojamas. Tagad aplūkosim piemēru, kurā visas grupas nav līdzvērtīgas un šī dažādība būtiski ietekmē uzdevuma atrisinājumu.

6. piemērs. *Pierādīt, ka starp jebkuriem 35 divciparu skaitļiem (pirmais cipars nav 0) var atrast 3 tādus skaitļus, kuru ciparu summas būtu vienādas.*

Atrisinājums. Izveidosim tabulu: gar tās horizontālo malu uzrakstīsim visas iespējamās skaitļa pirmā cipara vērtības, bet gar vertikālo malu - otrā cipara vērtības. Tabulas rūtiņās ierakstīsim kolonnas un rindiņas numuru summu (1.zīm). Esam izveidojuši atbilstību starp skaitļiem un to ciparu summām:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	...					
2	2	3	...						
3	3	...							
4	...								
5									
6									...
7								...	16
8							...	16	17
9						...	16	17	18

1.zīm.

Varat patstāvīgi pārliecināties, ka tabulā izmantoti visi divciparu skaitļi no 1 līdz 99. Pavisam iespējamas 18 dažādas ciparu summas vērtības (varam izveidot 18 dažādas grupas). Ja mēs rīkotos tāpat kā iepriekš, tad panākumus negūtu, jo 35 skaitļus 18 grupās var izvietot tā, ka nevienā no tām nav vairāk par diviem skaitļiem. Bet jāievēro, ka:

1) ciparu summas 1 un 18 katra ir tikai vienam skaitlim (10 un 99),

2) ciparu summas 2 un 17 katra ir tikai diviem skaitļiem (11; 20 un 89; 98).

Tātad šajās grupās vairāk skaitļu nevar būt neatkarīgi no tā, kādus 35 skaitļus izvēlamies.

Pieņemsim, ka šīs 4 grupas ir maksimāli piepildītas - tajās kopā ievietoti 6 skaitli. Tad atlikušajās 14 grupās jāievieto 29 skaitļi tā, lai katrā būtu ne vairāk kā 2 skaitļi.

Bet pēc Dirihlē principa noteikti iespējams atrast tādu "būri", kurā ir vismaz trīs skaitļi. Uzdevuma apgalvojums pierādīts.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

13.° Pierādīt, ka starp jebkuriem 78 trīsciparu skaitļiem (pirmais cipars nav 0) iespējams atrast 4 tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas.

14. Vilcienā atrodas 32 cilvēki, kas vecāki par 70 gadiem. Pierādīt, ka starp viņiem var atrast vai nu divus cilvēkus, kuri ir vecāki par 80 gadiem, vai arī 4 cilvēkus, kuru gadu skaits ir vienāds un nepārsniedz 80.

15. 17 skolēni rakstīja kontroldarbu. Viens no viņiem pieļāva 5 kļūdas, pārējie - mazāk. Pierādīt, ka var atrast 4 skolēnus, kas pieļāva vienādu kļūdu skaitu (varbūt nevienu).

1.2. Par "būru" celtniecību

Iepriekšējās nodaļas sākumuzdevumos pēc veiksmīgas grupu izvēles tālākais risinājuma ceļš jau bija skaidrs. Turklāt tas, kādas grupas katrā uzdevumā jāplāno, bija uzreiz skaidrs no paša uzdevuma. Tomēr var gadīties, ka grupas ("būri") jākonstruē "viltīgi" vai arī dažas šo grupu īpašības jāpierāda, pirms izmanto Dirihlē principu $\mathbf{D}_1$ vai $\mathbf{D}_2$ Dažus piemērus mēs redzējām iepriekšējās nodaļas noslēgumā.

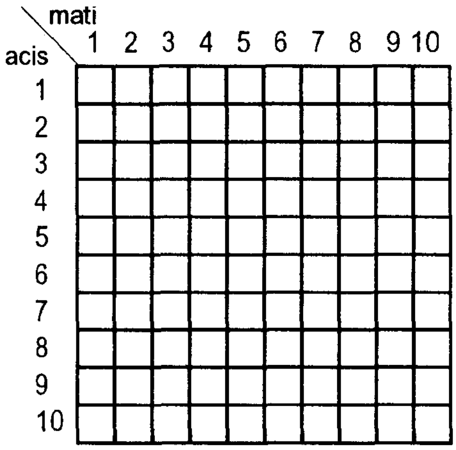
Šajā nodaļā aplūkosim vairākus piemērus, galveno uzmanību pievēršot "būru" konstruēšanas paņēmieniem.

<u>7 piemērs.</u> *Kvadrātveida tabula sastāv no 6x6rūtiņām. Katrā tās rūtiņā ierakstīts "+1", "-1" vai "0". Pierādīt, ka, aprēķinot katrā kolonnā, katrā rindiņā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summu, divas no tām būs vienādas.*

<u>Atrisinājums.</u> "Priekšmeti", kurus mēs izvietosim, būs aprēķinātās summas. To ir 14. Neviena no tām nav lielāka par 6 un nav mazāka par (- 6). Tātad summām iespējamas tikai 13 dažādas vērtības: -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Tā kā summu ir vairāk nekā vērtību ("trušu" vairāk nekā "būru"), tad no $\mathbf{D}_1$ seko: atradīsies divas summas ar vienādām vērtībām.

<u>8. piemērs.</u> *Nezinītim Ziedu pilsētā ir 101 draugs. Ir zināms, ka šajā pilsētā iedzīvotājiem var būt 10 dažādas acu krāsas un 10 dažādas matu krāsas. Vai noteikti var apgalvot, ka Nezinīša draugu vidū ir divi knauķi, kam sakrīt gan matu, gan acu krāsa?*

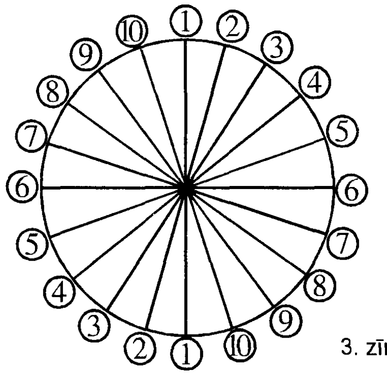
<u>Atrisinājums.</u> Izveidosim tabulu, kuras izmēri ir 10x10 rūtiņas (2.zīm.). Katra kolonna atbildīs vienai matu krāsai, katra rindiņa - vienai acu krāsai. Redzams, ka pavisam ir 100 dažādas acu un matu krāsu kombinācijas; katru no tām attēlo viena rūtiņa ("būris"). Tā kā draugu ir vairāk nekā rūtiņu, tad vismaz vienā "būrī" nonāk vismaz divi draugi; tiem arī sakrīt gan acu, gan matu krāsa.



2. zīm.

<u>9. piemērs.</u> *Ap apaļu galdu sēž 20 cilvēki: 11 vīrieši un 9 sievietes. Pierādīt, ka ir divi vīrieši, kas sēž viens otram pretī.*

<u>Atrisinājums.</u> Izveidosim 10 "būrus": katrs no tiem sastāv no divām pretī esošām vietām (3. zīmējumā vienam "būrim" piederošās vietas apzīmētas ar vienu un to pašu skaitli no 1 līdz 10). Tā kā 11 vīrieši izvietoti 10 "būros", tad divi no viņiem nonākuši vienā "būrī"; šie abi vīrieši arī sēž viens otram pretī.



3. zīm.

10. piemērs. Kādā darba vietā ir 4 aktīvisti. Viņi veido komisijas dažādu pasākumu veikšanai, turklāt komisijā var būt 1; 2; 3; 4 cilvēki. Nekādu divu komisiju sastāvi nedrīkst pilnīgi sakrist, un to skaits ir 9. Pierādīt, ka ir divas komisijas, kurām nav kopīga aktīvista.

Atrisinājums. Apzīmēsim aktīvistus ar A; B; C; D. Uzrakstīsim visas iespējamās komisijas; visas komisijas, izņemot vienu, tiks apvienotas pāros.

1) ABCD	šai komisijai pāra nav
2) A	BCD
3) B	ACD
4) C	ABD
5) 0	ABC
6) AB	CD
7) AC	BD
8) AD	BC

Šīs 8 grupas (7 komisiju pārus un vienu grupu, kurā ir viena komisija) uzskatīsim par "būriem"; par "trušiem" uzskatīsim aktīvistu izveidotās 9 komisijas. Saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ divas no šīm 9 komisijām ir vienā pāri, bet viegli redzēt, ka vienā pārī apvienotajām komisijām nav kopīga aktīvista (tieši pēc šī principa pāri ir veidoti).

11. piemērs. Pēterītim bija 100 aplīši, uz kuriem uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 100 (uz katra aplīša cits skaitlis). Skolotāja lika izvēlēties 4 aplīšus un izvietot tos tā, lai būtu pareiza vienādība O + O = O + O. *Aplīši bija izbiruši uz grīdas, un līdz šī uzdevuma saņemšanai viņš bija paguvis savākt tikai 21 aplīti. Vai ar tiem Pēterītim noteikti pietika, lai izpildītu skolotājas uzdevumu?*

Atrisinājums. Padomāsim, cik dažādu pāru var izveidot no Pēterīša salasītajiem aplīšiem (pārus, kas atšķiras tikai ar aplīšu kārtību, uzskatīsim par vienādiem; tā, piemēram, pāris 1 4 ir tas pats, kas 4 1). Iedomāsimies, ka katri divi aplīši savienoti ar aukliņu. Tā kā katram no 21 aplīša piestiprināti 20 aukliņu gali, tad pavisam ir $21 \cdot 20 = 420$ aukliņu gali; tā kā katrai aukliņai ir tieši 2 gali, tad aukliņu ir $420/2 = 210$. Tāpēc skaidrs, ka Pēterītis var izveidot pavisam 210 aplīšu pārus, izmantojot salasīto 21 aplīti. Šos pārus tālākajā spriedumā uzskatīsim par "trušiem".

Kādas var būt vienā pāri ietilpstošo skaitļu summas? Mazākā summas vērtība ir $1+2=3$; lielākā vērtība ir $99+100 = 199$. Tātad pavisam iespējamas $199-3+1 = 197$ dažādas summas vērtības: 3; 4; 5;...; 197; 198; 199. Šīs dažādās vērtības uzskatīsim par "būriem". Tā kā "trušu" ir vairāk nekā "būru", tad saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ kādā "būrī" ir vairāk nekā viens "trusis", t.i., kādā "būrī" ir vismaz divi "truši". Tas nozīmē, ka Pēterītim ir divi aplīšu pāri, kuros ietilpstošo skaitļu summas ir vienādas; pieņemsim, ka A+B=C+D (pāri ir A, B un C, D).

Neviens skaitlis neietilpst abos pāros; tiešām, ja, piemēram, būtu A = C, tad no A+B=C+D sekotu arī B = D un pāri A, B un C, D nebūtu dažādi. Tātad visi četri aplīši A, B, C**,** D ir dažādi, tāpēc Pēterītis no tiem var izveidot vienādību A + B = C + D.

Ievērojiet, ka šī piemēra risinājums, lietojot Dirihlē principu, vēl nebeidzās - sekoja būtisks spriedums par visu 4 aplīšu dažādību. Ar šādām situācijām sastapsimies vēl vairākkārt.

Turpmākajos divos piemēros "būri" un "truši" tiks veidoti ļoti viltīgi.

12^k *piemērs. Jānītis 50 pēc kārtas sekojošu dienu laikā atrisināja pavisam 79 uzdevumus. Turklāt katru dienu viņš atrisināja vismaz vienu uzdevumu. Pierādīt, ka var atrast vairākas pēc kārtas ņemtas dienas (varbūt vienu pašu), kuru laikā viņš atrisināja tieši 20 uzdevumus.*

Atrisinājums. Apzīmēsim uzdevumu skaitu, kurus Jānītis atrisināja pirmo n dienu laikā, ar a_n (n = 1; 2; 3;... ; 50). Tad $a_1 \geq 1$; $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{49} < a_{50} = 79$ (*).

Aplūkosim vēl skaitļus $a_1 + 20$; $a_2 + 20$; $a_3 + 20$;...; $a_{49} + 20$; $a_{50} + 20$. Saskaņā ar (*) iegūstam $21 \leq a_1 + 20 < a_2 + 20 < ... < a_{49} + 20 < a_{50} + 20 = 99$ (**).

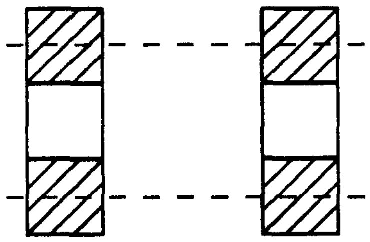
Skaitļus a_1; a_2;... ; a_{50}; $a_1 + 20$; $a_2 + 20$; ... ; $a_{50} + 20$ uzskatīsim par "trušiem"; to iespējamās vērtības - par "būriem". "Trušu" ir 100. Iespējamās vērtības ir no 1 līdz 99, tātad to ir 99 - par vienu mazāk nekā "trušu"; tās uzskatīsim par "būriem". Saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ vismaz divi "truši" nonāks vienā "būrī" (vismaz diviem skaitļiem būs vienādas vērtības). Skaidrs, ka nevar būt $a_i=a_j$ (ja $i \neq j$) vai $a_i + 20 = a_j + 20$ (ja $i \neq j$); tāpēc viens no vienādajiem skaitļiem ir no grupas $\{a_1; a_2;...; a_{50}\}$, bet otrs - no grupas $\{a_1 + 20; a_2 + 20;... a_{50} + 20\}$. Ja $a_i = a_j + 20$, tad $a_i - a_j = 20$. Saskaņā ar skaitļu a_1 , a_2 , a_3 ,..., a_{50} definīciju tas nozīmē, ka (j + 1) - ā, (j + 2) - ā, ..., i-ā dienās kopā Jānītis atrisināja tieši 20 uzdevumus.

13. piemērs. *Taisnstūris sastāv no 4 x 7 rūtiņām. Katra rūtiņa iekrāsota balta vai melna. Pierādīt, ka var atrast tādas divas rindiņas un divas kolonnas, kurās visas četras rūtiņas, kas atrodas to krustojumos, nokrāsotas vienā krāsā.*

Atrisinājums. Pierādīsim vairāk, nekā uzdevumā prasīts: pierādīsim, ka šādas divas rindiņas un divas kolonnas var atrast jau taisnstūri, kura izmēri ir 3 x 7 rūtiņas (t.i. uzdevumā minētās taisnstūra daļas robežās).

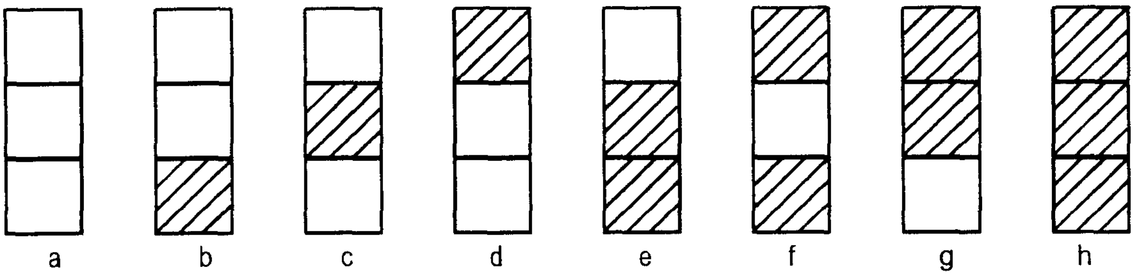
A. Ievērosim: katrā kolonnā (tā sastāv no 3 rindiņām) var atrast 2 rūtiņas, kas nokrāsotas vienā krāsā. Tas seko no Dirihlē principa $\mathbf{D_1}$: krāsas ir "būri", rūtiņas - "truši".

B. Tālāk ievērosim: ja divas kolonnas nokrāsotas vienādi, tad var atrast minētās 4 rūtiņas (abās kolonnās jāņem viens un tas pats vienādi nokrāsoto rūtiņu pāris, skat. 4. zīm.).



4. zīm.

C. Atzīmēsim, ka pavisam iespējami 8 dažādi kolonnu krāsojumi (tie visi parādīti 5. zīm.).

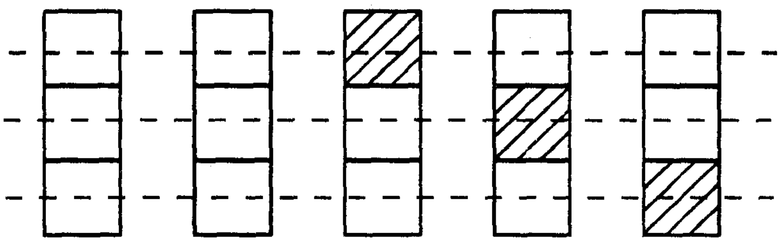


5. zīm.

Aplūkosim vairākus gadījumus.

C_1. Starp 7 kolonnām nav nevienas, kurā visas rūtiņas būtu iekrāsotas vienā krāsā (t.i. nav ne a tipa, ne h tipa kolonnas). Tādā gadījumā katra no šīm 7 kolonnām atbilst vienam no 6 tipiem: b, c, d, e, f, g. Saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ divas kolonnas atbilst vienam un tam pašam tipam, t.i., ir iekrāsotas vienādi. Saskaņā ar B punktu vajadzīgās 4 rūtiņas var atrast.

C_2. Pieņemsim, ka kāda no 7 kolonnām ir iekrāsota balta (t.i., atbilst tipam a). Ja kaut viena no 6 atlikušajām kolonnām atbilst kādam no tipiem a, b, c, d, tad, apskatot šo kolonnu un balto kolonnu, var atrast vajadzīgajā veidā novietotas 4 rūtiņas (skat. 6. zīm.).



6. zīm.

Atliek aplūkot gadījumu, kad neviena no 6 atlikušajām kolonnām neatbilst tipam a, b, c, d; tad katra no tām atbilst vienam no 4 tipiem e, f, g, h. Saskaņā ar Dirihlē principu $\mathbf{D_1}$ vismaz divas kolonnas atbilst vienam tipam. Izmantojot šīm divām kolonnām B punkta spriedumu, iegūstam vajadzīgās 4 melnās rūtiņas.

C_3. Kāda no 7 kolonnām ir iekrāsota viscaur melna. Šo gadījumu analizē līdzīgi C_2. Visi gadījumi izanalizēti, uzdevums atrisināts.

Komentārs. Šī uzdevuma risinājums ir ļoti pamācošs. Pirmkārt, ievērojiet, ka Dirihlē princips tika lietots divās pakāpēs: gan lai konstatētu vienādi iekrāsotu kolonnu esamību, gan lai tālāk konstatētu vienādi iekrāsotu rūtiņu esamību šajās kolonnas. Otrkārt, tika izšķirti vairāki gadījumi, un katrā no tiem Dirihlē princips tika lietots citā situācijā (6 "būri" un 7 "truši", 4 "būri" un 6 "truši"). Treškārt, pārsteigumu varētu izraisīt fakts, ka mēs sašaurinājām sākumā minēto taisnstūri (no 4x7 līdz 3 x 7): varētu likties, ka mēs labprātīgi esam pārgājuši uz sliktāku situāciju. Tiešām, lielākā taisnstūri taču vajadzīgo var atrast vismaz tikpat labi, cik mazākā! Pārbaudiet paši, ka taisnstūrī 4x7 šāda veida spriedumu izdarīt neizdotos: kolonnas, kuras sastāv no 4 rindiņām, var izkrāsot 16 veidos. Tātad, paliekot taisnstūri 4x7, būtu jāmeklē cits risināšanas ceļš.

Šāda situācija, kad it kā grūtāku uzdevumu atrisināt ir vieglāk, matemātikā (un arī dzīvē) sastopama ļoti bieži.

Lai atrisinātu uzdevumu, Dirihlē principu bieži nākas lietot ne tikai divas, bet arī vairāk reižu.

14. piemērs. Lingvistu konferencē piedalās 70 delegāti, kari runā 11 dažādās valodās. Ir zināms, ka vienā valodā sazinās ne vairāk kā 15 delegāti. Orgkomiteja nolēma, ka par *konferences oficiālo valodu tiks pieņemta valoda, kurā runā vismaz 5 delegāti. Pierādīt, ka konferencē runās vismaz 3 oficiālās valodās.*

Atrisinājums. Pēc **D2** starp 11 valodām, kuras tiek lietotas konferencē, noteikti ir viena valoda A, kurā runā vismaz 5 cilvēki. (Citādi konferencē nevarētu būt vairāk par $11\cdot 4 = 44$ delegātiem.) Tātad eksistē viena oficiālā valoda A. Tā kā ir dots, ka vienā valodā sazinās ne vairāk kā 15 cilvēki, tad arī valodu A zina ne vairāk kā 15 cilvēki.

55 (vai vairāk) cilvēki valodu A nezina. Pēc **D2** starp viņu lietotajām valodām noteikti ir viena valoda B, kurā sazinās vismaz 5 cilvēki. Citādi šajā grupā nevarētu būt vairāk par $10\cdot 4=40$ cilvēkiem; te 10 apzīmē visu valodu (bez A) skaitu. Pie tam šo valodu pārvalda ne vairāk kā 15 cilvēki.

40 (vai vairāk) delegātu nezina ne valodu A, ne valodu B. Pēc **D2** eksistē valoda C**,** kuru zina vismaz 5 cilvēki no šīs grupas. Citādi šajā grupā nevarētu būt vairāk par $9\cdot 4 = 36$ cilvēkiem.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka lingvistu konference būs vismaz 3 oficiālās valodas A, B un C. Dažreiz, lietojot Dirihlē principu, nākas ieviest pavisam jaunus jēdzienus, kas piemēroti konkrētam uzdevumam.

15. piemērs. *Festivālā piedalās 6 muzikanti. Katru dienu daži no viņiem uzstājas, bet citi sēž zālē un klausās (dienas laikā neviens muzikants savu "statusu" nemaina). Zināms, ka festivāls ilgst 3 dienas. Vai var noorganizēt mūziķu uzstāšanos tā, lai katrs no viņiem no zāles dzirdētu visus pārējos?*

Atrisinājums. To, ka viens muzikants, sēžot zālē, dzirdējis kādu citu, sauksim par vienas mūzikas vienības apgūšanu (tas arī ir solītais jēdziens). Sastādīsim tabulu, kas parāda, cik mūzikas vienību var apgūt vienā dienā:

Muzikantu skaits zālē	Muzikantu skaits uz	Apgūto mūzikas vienību skaits
0	6	$0\cdot6=0$
1	5	$1\cdot5=5$
2	4	$2\cdot4=8$
3	3	$3\cdot3=9$
4	2	$4\cdot2=8$
5	1	$5\cdot1 =5$
6	0	$6\cdot0=0$

Redzams, ka vienā dienā nevar tikt apgūtas vairāk par 9 mūzikas vienībām. Tā kā katram no 6 muzikantiem jādzird katrs no 5 pārējiem, tad pavisam jāapgūst $6\cdot5 = 30$ mūzikas vienības. Tam jānotiek 3 dienu laikā. Tā kā $30 > 3\cdot9$, tad kādā no šīm dienām jāapgūst vairāk nekā 9, t.i., vismaz 10 mūzikas vienības. Kā iepriekš redzējām, tas nav iespējams. Tātad ar 3 dienām šim mērķim nepietiek.

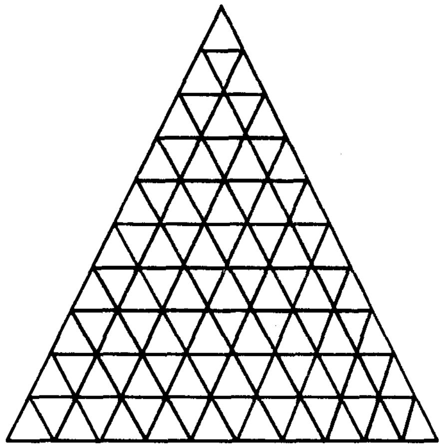
Nākošajā piemērā šķietami acīmredzamu "būra" izvēli nāksies aizstāt ar citu.

<u>16. piemērs.</u> Vienādmalu trijstūrī, kura malas garums ir 10, atzīmēts 201 punkts. Pierādīt, ka var novilkt riņķa līniju ar rādiusu 0,58, kuras iekšpusē atrodas vismaz 3 no šiem punktiem.

<u>Atrisinājums</u>. Šķietami skaidrs: trijstūris jāsadala 100 riņķos ar rādiusu 0,58! Tā kā $201>2\cdot100$, tad vismaz vienā no šiem riņķiem būs ne mazāk par 3 atzīmētiem punktiem.

Diemžēl trijstūri riņķos sadalīt nevar. Tāpēc nāksies meklēt citu risināšanas ceļu.

Sadalīsim trijstūri 100 mazos vienādmalu trijstūros ar taisnēm, kas paralēlas trijstūru malām (skat. 7. zīm.).



7. zīm.

Saskaņā ar **D**2 kādā no šiem trijstūriem ir vismaz 3 atzīmētie punkti. Tā kā mazā trijstūra malas garums ir 1, tad tā apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir $1/\sqrt{3} = 0{,}577...$ Ņemam šai riņķa līnijai koncentrisku riņķa līniju ar rādiusu 0,58; tā der par meklēto.

Nākošajā uzdevumā pēc Dirihlē principa lietošanas seko vēl citi spriedumi.

<u>17. piemērs.</u> Mākslinieku darbnīcā izgatavotas 36 skulptūras, kuru masa ir 490 kg, 495 kg, 500 kg, ..., 665 kg. Vai visas šīs skulptūras var aizvest ar 7 automašīnām, ja katrai no tām kravnesība ir 3 tonnas, ar katru automašīnu drīkst veikt tikai vienu reisu un automašīnas nedrīkst pārslogot?

<u>Atrisinājums.</u> Skulptūru kopējā masa ir 20 790 kg < 21 000 kg = $7\cdot3000$ kg. Tātad, ja skulptūru vietā būtu, piemēram, smiltis, kuras var brīvi sadalīt pa automašīnām, tad tās varētu aizvest saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Tomēr skulptūras sadalīt daļās nedrīkst, tāpēc tas vien, ka skulptūru kopējā masa ir mazāka nekā automašīnu kopējā kravnesība, vēl nepierāda, ka tās var aizvest tā, kā norādīts uzdevumā. Ievērosim, ka $36 = 7\cdot5 + 1$ skulptūras jāsadala pa 7 automašīnām. Tātad vismaz vienā automašīnā jāiekrauj ne mazāk kā 6 skulptūras. Bet pat 6 visvieglāko skulptūru kopējā masa ir $490 + 495 + 500 + 505 + 510 + 515 = 3015 > 3000$ (kg), tātad ir lielāka par to masu, kādu pieļaujams iekraut vienā automašīnā. Tas nozīmē, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas.

Savukārt nākošajā uzdevumā Dirihlē principu izmanto lielumiem, kas uzdevuma formulējumā nav "saskatāmi", un pēc tā lietošanas notiek pāreja uz mūs interesējošiem objektiem.

<u>18. piemērs.</u> Riņķa līnijā ievilkts regulārs divsimtstūris. Katra tā virsotne apzīmēta ar vienu no skaitļiem 1; 2; 3; ... ; 99. Pierādīt, ka var atrast tādas divsimtstūra virsotnes A, B, C, D, kuru veidotās hordas AB un CD ir vienādas un paralēlas un to galos ierakstīto skaitļu summas ir vienādas.

Atrisinājums. Aplūkosim 100 diametrus, kuru galapunkti ir divsimtstūra virsotnes. Katram no tiem aprēķināsim galapunktos ierakstīto skaitļu starpības absolūto vērtību. Skaidrs, ka iespējami tikai rezultāti 0; 1; 2;... ; 98 - skaitā 99. Saskaņā ar **D₁** divi no tiem būs vienādi. Pieņemsim, ka šo diametru galapunkti ir M; N un K; L, tajos ierakstītie skaitļi attiecīgi m; n; k; *l*, un m - n = k - *l*. Tad m + *l* = n + k. Acīmredzami par meklētajām hordām var ņemt ML un NK.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

Visos šajos uzdevumos var lietot Dirihlē principa variantu **D₁** vai **D₂**. Galvenais - piemērotā veidā izvēlēties "būrus" un "trušus".

16.° Kvadrātveida tabula sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ieraksta "+1", "-1" vai "0". Pierādīt, ka, aprēķinot katrā rindiņā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas, starp tām atradīsies divas vienādas summas.

17. Vai eksistē 11 pozitīvi divciparu skaitļi, kas veido augošu aritmētisku progresiju un kuru ciparu summas arī veido augošu aritmētisku progresiju tai pašā kārtībā?

18.° Klasē ir 6 aktīvisti. Viņi izveidojuši 30 komisijas. Ir zināms, ka katrām 2 komisijām ir vismaz viens kopīgs aktīvists. Pierādīt, ka var izveidot vēl vienu komisiju, lai šī īpašība saglabātos, turklāt jaunizveidotās komisijas sastāvs nedrīkst sakrist ne ar vienas jau esošās komisijas sastāvu.

19. Klasē ir 25 skolēni ar zilām, brūnām vai pelēkām acīm. Zināms, ka starp katriem trim bērniem vismaz diviem ir vienāds gadu skaits. Pierādīt, ka var atrast vai nu 3 zēnus, vai 3 meitenes, kas ir vienāda vecuma un ar vienādu acu krāsu.

20.* Pēterītim ir 69 kartītes. Uz tām uzrakstīti dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100 (uz katras kartītes - viens skaitlis). Pierādīt, ka var novietot 4 kartītes tā, ka tiek izpildīta vienādība □+□+□=□.

21.° Jānītis gatavojās matemātikas olimpiādei 11 nedēļas. Katru dienu viņš atrisināja vismaz vienu uzdevumu, bet, lai nepārpūlētos, nevienu nedēļu neatrisināja vairāk par 12 uzdevumiem. Pierādīt, ka var atrast vairākas pēc kārtas sekojošas dienas, kurās kopā Jānītis atrisināja tieši 21 uzdevumu.

22.* Kopā M ir 750 naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 1000. Zināms, ka n $\leq$ 499. Pierādīt, ka var atrast divus tādus M skaitļus, kuru starpība ir n.

23.* Taisnstūris sastāv no 5 x 41 rūtiņas. Katra rūtiņa izkrāsota vienā no divām krāsām. Pierādīt, ka var atrast tādas trīs rindiņas un trīs kolonnas, ka visas rūtiņas to krustpunktos iekrāsotas vienā krāsā.

24.* Parlamentā ir 65 deputāti. Nevienā no parlamenta komisijām nedarbojas visi deputāti. Ir zināms, ka katri divi deputāti darbojas kopā tieši vienā komisijā. Pierādīt, ka ir tāds deputāts, kas darbojas vismaz deviņās komisijās.

25.^{k} Uz 10 kartītēm uzrakstīti dažādi divciparu skaitļi (uz katras kartītes viens skaitlis). Pierādīt, ka no kartītēm var izveidot vienlaikus divas kaudzītes tā, lai kaudzīšu summas būtu vienādas. (Atļauts dažas kartītes neievietot nevienā no abām kaudzītēm.)

26.* Uz 10 kartītēm uzrakstīti dažādi naturāli skaitļi (uz katras kartītes viens skaitlis), kas nepārsniedz 55. Pierādīt, ka no kartītēm var vienlaikus izveidot divas kaudzītes tā, lai kaudzītēs būtu vienāds skaits kartīšu un skaitļu summas tajās būtu vienādas. (Atļauts dažas kartītes neievietot nevienā no abām kaudzītēm.)

27. Regulāra 100-stūra virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 100 (katra virsotne ar citu skaitli). Katrai malai aprēķina tās galu numuru starpību (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Pierādīt, ka vismaz divām malām šīs starpības būs vienādas.
28. Kādā svētdienā 6 draugi nolēma 7 kinoteātros apmeklēt seansus, kuri sākas plkst. $9.^{00}$, $10.^{00}$, $11.^{00}$,..., $17.^{00}$, $18.^{00}$, $19.^{00}$. Katru no seansiem 2 draugi skatījās vienā kinoteātrī, pārējie 4 - citā. Vakarā noskaidrojās, ka katrs no draugiem ir bijis visos 7 kinoteātros. Pierādīt, ka katrā no 7 kinoteātriem vismaz uz vienu seansu nav bijis neviens no 7 draugiem.
29. Dots, ka n - naturāls skaitlis, n > 1. Atis izvēlējās n + 2 naturālus skaitļus; neviens no tiem nepārsniedz 3n. Pierādīt, ka starp tiem var atrast tādus divus skaitļus, kuru starpība ir lielāka par n, bet mazāka par 2n.
30.* Tabula sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis (visi skaitļi ir dažādi). Zināms, ka katrā rindiņā skaitļi pieaug no kreisās uz labo pusi. Jānis pārkārtoja katrā kolonnā skaitļus tā, ka tie katrā kolonnā pieaug no augšas uz leju (skaitļi netika pārlikti no vienas kolonnas citā). Pierādīt, ka pēc pārkārtošanas skaitļi katrā rindiņā joprojām pieaug no kreisās uz labo pusi.
31. Starp skaitļiem 1 un 100 izvēlēti 11 skaitļi (ne noteikti veseli!). Pierādīt, ka starp tiem var atrast tādus divus skaitļus, kuru attiecība lielāka par 1, bet nepārsniedz 1,6.
32. Katrā no 28 - stūra virsotnēm jāieraksta viens no burtiem A; B; C; D; E; F; G; H, lai visas tā malas būtu apzīmētas ar dažādiem burtu pāriem. (Pāri XY un YX tiek uzskatīti par vienādiem; nav pieļaujamas malas, kurām abi gali apzīmēti ar vienu un to pašu burtu.) Vai to var izdarīt?
33. Kvadrāts sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Tas pilnībā pārklāts ar 55 plāksnītēm, kuru izmēri ir 2x2 (plāksnītes neiziet ārpus kvadrāta, to malas iet pa rūtiņu līnijām). Pierādīt, ka vienu no plāksnītēm var aizvākt, bet pārējās izvietot viņu vecajās vietās tā, lai kvadrāts joprojām būtu pilnībā pārklāts.
34. Rūtiņu burtnīcas lapā atzīmētas 37 rūtiņas. Pierādīt, ka no tām var izvēlēties 10 rūtiņas tā, ka jebkurām divām izvēlētajām rūtiņām nav ne kopējas malas, ne kopējas virsotnes.
35.[k] Klasē mācās 16 zēni un 16 meitenes. Katrs zēns draudzējas ar pāra skaitu meiteņu. Pierādīt, ka var izraudzīties dažus (vismaz vienu) zēnus tā, lai katra meitene draudzētos ar pāra skaitu (var būt 0) no izraudzītajiem zēniem.

1.3. Summas vai reizinājuma novērtēšana

1.3.1. Dirihlē principa sīkāka analīze

Iedomāsimies, ka mums jāatrisina šāds uzdevums.

U_1 11 maisiņi cukura, no kuriem katrs sver 1 kg, kaut kā salikti 10 kastēs. Pierādīt, ka vismaz vienā kastē ir vismaz 2 kg cukura.

Atrisinājums.

1. solis. Mēs apgalvojam, ka vismaz vienā kastē ir vairāk par 1 kg cukura. Tiešām, ja katrā kastē būtu ne vairāk par 1 kg cukura, tad visās 10 kastēs kopā būtu ne vairāk kā 10 kg cukura, bet kopā ir 11 kg. Tātad vismaz vienā kastē cukura daudzums pārsniedz 1 kg.

2. solis. Ja cukura daudzums kastē pārsniedz 1 kg, tad šajā kastē ir vairāk nekā viens maisiņš. **Tātad** tajā ir vismaz divi maisiņi, tātad vismaz 2 kg cukura. Uzdevums atrisināts.

Apskatīsim tagad šādu uzdevumu.

U_2 11 kg smalkā cukura kaut kā sabērti 10 kastēs. Vai var apgalvot, ka vismaz vienā kastē ir ne mazāk kā 2 kg cukura?

Protams, nē! Var taču gadīties, ka katrā kastē ir, piemēram, 11/10 kg cukura. Tad kopā ir 11 kg, bet nevienā kastē cukura daudzums nav ne 2 kg, ne vairāk par 2 kg. Kurā vietā mūsu pierādījums, kas derēja uzdevumam U_1, vairs neder uzdevumam U_2?

Risinājuma pirmais solis paliek pareizs arī šajā gadījumā; pārliecinieties par to patstāvīgi. Toties otrais solis uzdevumam U_2 vairs neder. Būtiska atšķirība: uzdevumā U_1 cukura daudzumu katrā kastē izsaka vesels skaits kilogramu, bet uzdevumā U_2 - nē. Vesels skaitlis, kas lielāks par 1, ir vismaz 2; turpretī patvaļīgs skaitlis (ne noteikti vesels), kas lielāks par 1, var būt arī mazāks par 2 (piemēram, skaitlis 1,1).

Nav grūti saprast, ka Dirihlē principa lietošana $\mathbf{D_1}$ vai $\mathbf{D_2}$ formā visos gadījumos patiesībā notiek pēc šādas shēmas:

1) izmanto kādu no teorēmām:

T1: ja $x_1 + x_2 + ... + x_N \ge a_1 + a_2 + ... + a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i \ge a_i$;

T2: ja $x_1 + x_2 + ... + x_N > a_1 + a_2 + ... + a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i > a_i$;

T3: ja $x_1 + x_2 + ... + x_N \le a_1 + a_2 + ... + a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i \le a_i$;

T4: ja $x_1 + x_2 + ... + x_N < a_1 + a_2 + ... + a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i < a_i$.

Šīs teorēmas ļoti vienkārši pierāda ar nevienādību saskaitīšanu no pretējā; lasītājam, kas grib pavingrināties algebrā, ieteicam to izdarīt patstāvīgi;

2) ja no uzdevuma nosacījumiem papildus vēl izriet, ka x_i ir veseli skaitļi, tad no iegūtajām nevienādībām iegūst spēcīgākas.

Piemēram: No $x \ge 4{,}8$ tādā gadījumā seko $x \ge 5$; no $x > 6$ seko $x \ge 7$; no $x < 1{,}2$ seko $x \le 1$; no $x < 4$ seko $x \le 3$, utt.

Bieži vien uzdevumu risināšanā pietiek ar minētā sprieduma pirmo daļu; noapaļošana nemaz nav nepieciešama.

Nākošajā punktā mēs parādīsim šādu risinājumu piemērus. Risinājumi idejiski līdzīgi Dirihlē principa lietojumam vai tā pierādījumam, bet, vienkāršoti runājot, "iztrūkst noapaļošanas" vai arī netiek ieviesti īpaši "būrī", kā Dirihlē principa gadījumā; runā tikai par pašu summu, nevis par tās sadalījumu "būros".

1.3.2. Summas novērtēšanas piemēri

19. piemērs. *Pierādīt: starp 10 dažādiem naturāliem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir vismaz 19.*

Atrisinājums. Sakārtosim šos 10 skaitļus augošā kārtībā: $A<B<C<D<E<F<G<H<I<J$. Tā kā A - naturāls skaitlis, tad $A \geq 1$. Tā kā $B > A$, iegūstam $B \geq 2$. Tā kā $C > B$, iegūstam $C \geq 3$. Līdzīgā ceļā iegūstam $D \geq 4$, $E \geq 5$, $F \geq 6$, $G \geq 7$, $H \geq 8$, $I \geq 9$, $J \geq 10$. Tāpēc $I+J \geq 9+10=19$. Tātad par meklējamajiem skaitļiem var ņemt abus lielākos skaitļus.

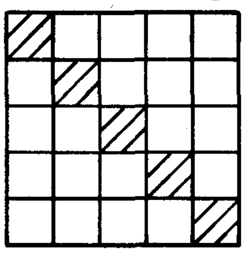
20. piemērs. *Piecu skaitļu summa ir 10. Pierādīt, ka starp tiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir vismaz 4.*

Atrisinājums. Sakārtojam skaitļus nedilstošā kārtībā: $A \leq B \leq C \leq D \leq E$. Pieņemam, ka $D+E<4$. Tad no šīm nevienādībām seko, ka arī $B + C < 4$. Tā kā $B + C < 4$ un $B \leq C$, tad $B<2$. (Tiešām, ja būtu $B \geq 2$, tad no $B \leq C$ sekotu $C \geq 2$ un $B + C \geq 4$.) Tā kā $A \leq B$ un $B < 2$, tad $A<2$. Saskaitot nevienādības $A<2$, $B+C<4$, $D+E<4$, iegūstam $A+B+C+D+E<10$, kas ir pretrunā ar doto. Tātad pieņēmums nepareizs, un $D + E \geq 4$. Uzdevums atrisināts.

21. piemērs. *21 zēnam kopā ir 2 lati. Pierādīt, ka var atrast divus zēnus, kam ir vienāds daudzums naudas.*

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka visiem zēniem ir dažāds naudas daudzums. Skaidrs, ka katram tas izsakāms ar veselu skaitu santīmu. Spriežot līdzīgi kā 19.piemēra risinājumā, iegūstam, ka kopējais naudas daudzums ir vismaz $0 +1+ 2 + ... + 19 + 20 = 210$ santīmu. Tā ir pretruna, jo, kopējais naudas daudzums ir 200 santīmu. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs. Uzdevums atrisināts.

22*. piemērs. *Tabula sastāv no 5x5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kaut kāds skaitlis; visu ierakstīto skaitļu summa S ir pozitīva. Pierādīt, ka tabulas rindiņas var pārkārtot tādā secībā (nevienas rindas iekšienē skaitļu kārtība mainīta netiek), ka iegūtajā tabulā uz galvenās diagonāles (skat. 8.zīm.) uzrakstīto skaitļu summa ir pozitīva.*



8. zīm.

Atrisinājums. Apskatām 5 dažādus rindiņu izkārtojumus: 1) sākotnējo, 2) to, kuru iegūst no sākotnējā, noņemot augšējo rindiņu un pieliekot to apakšā, 3) to, kuru iegūst no otrā, noņemot augšējo rindiņu un pieliekot to apakšā, 4) to, kuru līdzīgā ceļā iegūst no trešā, 5) to, kuru līdzīgā ceļā iegūst no ceturtā izkārtojuma. Apzīmēsim galvenās diagonāles skaitļu summas šajos izkārtojumos ar A; B; C; D; E. Nav grūti saprast, ka visos 5 izkārtojumos kopā katrs skaitlis tieši vienu reizi nonācis uz galvenās diagonāles (9.zīm. - katrā rūtiņā ierakstīts tā izkārtojuma numurs, kurā tas notiek ar šajā rūtiņā sākotnēji ierakstīto skaitli).

1	5	4	3	2
2	1	5	4	3
3	2	1	5	4
4	3	2	1	5
5	4	3	2	1

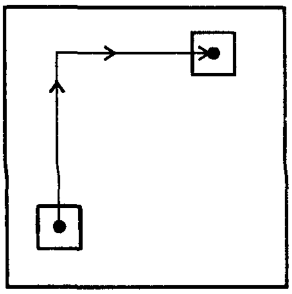
9. zīm.

Tāpēc A+B+C+D+E=S. Tā kā S>0, tad kādam no saskaitāmajiem arī jābūt pozitīvam. Tam atbilstošais izkārtojums arī der par meklēto. Uzdevums atrisināts.

<u>23. piemērs.</u> Dots, ka a un b - reāli skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2+2ax + b = 0$; $ax^2 + 2bx + 1 = 0$; $bx^2 + 2x + a = 0$ *eksistē sakne.*

<u>Atrisinājums.</u> Ja kaut viens no skaitļiem a, b ir nulle, tad tāds ir trešais vienādojums (pārbaudiet patstāvīgi). Ja $a \neq 0$ un $b \neq 0$, tad visi vienādojumi ir kvadrātvienādojumi; to diskriminanti ir $D_1 = a^2 - b$, $D_2 = b^2 - a$ un $D_3 = 1 - ab$. Visu diskriminantu summa $D_1+D_2+D_3=a^2+b^2+1 - a - b - ab = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2] \geq 0$, tātad kāds no diskriminantiem nav negatīvs; atbilstošajam vienādojumam ir saknes.

<u>24. piemērs.</u> Tabula sastāv no 8 x 8 rūtiņām. Tajās ierakstīti dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 64 (katrā rūtiņā - viens skaitlis). Pierādīt, ka eksistē divas rūtiņas ar kopīgu malu, kurās ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 5.



10. zīm.

<u>Atrisinājums.</u> Kādā rūtiņā ierakstīts 1, kādā 64. Apskatīsim īsāko "horizontāli vertikālo" ceļu no pirmās rūtiņas uz otro (skat., piem., 10.zīm.). Šis ceļš sastāv no ne vairāk kā 14 soļiem, katrā solī pārejot no rūtiņas uz tādu rūtiņu, kurai ar iepriekšējo ir kopīga mala. Ja katru soli mēs spertu starp rūtiņām, kurās ierakstīto skaitļu starpība nepārsniedz 4, tad starpība starp sākuma un beigu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem būtu ne lielāka par $4 \cdot 14 = 56$; bet tā ir $64 - 1 = 63$. Secinām: jau apskatītajā ceļā no 1 līdz 64 mēs kādā solī esam atraduši divas blakus rūtiņas, kurās ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 5.

<u>25.[k] piemērs.</u> Tabula sastāv no 17 x 17 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz 17; katrs šāds skaitlis ierakstīts tieši 17 rūtiņās. Pierādīt, ka var atrast tādu rindiņu vai tādu kolonnu, kurā ierakstīti vismaz 5 dažādi skaitļi.

<u>Atrisinājums.</u> Sauksim par kāda naturāla skaitļa n izplatību $\mathbf{I_n}$ to kolonnu un rindiņu kopējo skaitu, kurās atrodams kaut viens skaitļa n eksemplārs.

Vispirms pamatosim, ka katra skaitļa izplatība ir vismaz 9. Tiešām, ja kāds skaitlis atrodams x rindās un y kolonnās, tad tas nav atrodams nekur ārpus šo rindu un kolonnu krustpunktiem, tātad ir ierakstīts ne vairāk kā $x \cdot y$ rūtiņās. Tāpēc jābūt $x \cdot y \geq 17$. No nevienādības $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ seko, ka $I = x + y \geq 2\sqrt{17} > 8$. Tātad $I \geq 9$, jo I - naturāls skaitlis.

Tagad apskatīsim summu $S = I_1 + I_2 + ... + I_{17}$. No nupat pierādītā seko, ka $S \geq 9 \cdot 17 = 153$. Skaidrs, ka $I_1 + I_2 + ... + I_{17} = (r_1 + r_2 + ... + r_{17}) + (k_1 + k_2 + ... + k_{17})$, kur r_i - dažādo skaitļu skaits i-jā rindiņā un k_i - dažādo skaitļu skaits i-jā kolonnā (katra skaitļa piederība kādai rindiņai vai kolonnai dod "ieguldījumu" 1gan šīs vienādības kreisajā, gan labajā pusē). Tā kā 34 saskaitāmo summa nav mazāka par 153, tad vismaz viens no šiem saskaitāmajiem nav mazāks par *153/34*=4,5. Tā kā visi saskaitāmie r_i un k_i ir naturāli skaitļi, tad atbilstošais saskaitāmais nav mazāks par 5.

Atbilstošā rindiņa vai kolonna ir meklējamā. Uzdevums atrisināts.

26.[k] piemērs. *Pēc parlamenta ievēlēšanas deputāti izveidoja 12 frakcijas (katrs deputāts ietilpa tieši vienā frakcijā). Pēc pirmās plenārsēdes deputātu uzskati mainījās, un viņi apvienojās 16 jaunās frakcijās (katrs deputāts joprojām ietilpa tieši vienā frakcijā). Pierādīt, ka vismaz 5 deputāti tagad atrodas mazākās frakcijās nekā tūlīt pēc parlamenta ievēlēšanas.*

Atrisinājums. Ja deputāts ietilpst frakcijā, kurā ir x dalībnieki, teiksim, ka viņam ir nozīmība $1/x$. Pieņemsim, ka deputātu nozīmības pirmajā sadalījuma bija $a_1, a_2, ..., a_N$, bet otrajā- $b_1, b_2, ..., b_N$. Mums jāpierāda, ka vismaz pieciem dažādiem indeksiem i pastāv nevienādība $b_i > a_i$. Skaidrs, ka visu nozīmību summa katrā frakcijā ir 1; tāpēc visu parlamenta deputātu nozīmību summa pirmajā sadalījumā ir 12, bet otrajā tā ir 16. Katra deputāta nozīmība katrā sadalījumā ir pozitīvs skaitlis, kas nepārsniedz 1; tāpēc katra deputāta nozīmība, mainoties sadalījumam, mainās par lielumu, kas mazāks par 1. Ja palielinājušās tikai 4 deputātu nozīmības, tad nozīmību summa palielinājusies par mazāk nekā 4; tad tā nevar pieaugt no 12 uz 16. Tātad palielinājušās vismaz 5 deputātu nozīmības. Uzdevums atrisināts.

1.3.3. Reizinājuma novērtēšanas piemēri

Dažreiz, lietojot līdzīgu metodi, summas vietā aplūko reizinājumu.

Līdzīgi kā 1.3.1. nodaļā par summām, arī par reizinājumu ir spēkā viegli pierādāmas nevienādības (visi minētie skaitļi ir pozitīvi):

Tl': ja $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_N \geq a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i \geq a_i$;

T2': ja $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_N > a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i > a_i$.;

T3': ja $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_N \leq a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i \leq a_i$.;

T4': ja $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_N < a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$, tad vismaz vienam i pastāv nevienādība $x_i < a_i$.

Tās pierāda no pretējā ar nevienādību reizināšanas palīdzību; ieteicams to izdarīt lasītājam patstāvīgi.

Ilustrēsim to pielietošanu.

27. piemērs. *Dots, ka $0<a< 1$, $0 <b < 1$, $0 <c < 1$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $a(1 - b)$, $b(1- c)$, $c(1 - a)$ nepārsniedz $\frac{1}{4}$.*

Komentārs. Iepriekšējā risināšanas metode neder: mēs nevaram pierādīt, ka visu skaitļu summa nepārsniedz $\frac{3}{4}$, jo, piemēram, ja a = 0,98; b = c = 0,01, tad jau pirmais saskaitāmais viens pats ir lielāks par $\frac{3}{4}$. Jāmeklē cits ceļš.

Atrisinājums. Visu triju pētāmo skaitļu reizinājums

$R = a(1 - b)\cdot b(1 - c)\cdot c(1 - a) = a(1 - a)\cdot b(1 - b)\cdot c(1 - c)$.

Viegli saprast, ka katram x pastāv nevienādība $x(1-x)=x-x^2=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2\leq\frac{1}{4}$. Tāpēc $R\leq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$. Tagad skaidrs, ka nevar vienlaicīgi būt $a(1-b)>\frac{1}{4}$, $b(1-c)>\frac{1}{4}$, un $c(1-a)>\frac{1}{4}$; ja tā būtu, tad $R > \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$. Uzdevums atrisināts.

28. piemērs. Dots, ka α, β, γ, δ - šauri leņķi. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $\sin\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\beta\cdot\cos\gamma$, $\sin\gamma\cdot\cos\delta$, $\sin\delta\cdot\cos\alpha$ nepārsniedz $\frac{1}{2}$.

Atrisinājums. Apskatāmo 4 skaitļu reizinājums pēc reizinātāju pārkārtošanas pārveidojas par $(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)(\sin\beta\cdot\cos\beta)(\sin\gamma\cdot\cos\gamma)(\sin\delta\cdot\cos\delta)=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cdot\frac{1}{2}\sin2\beta\cdot\frac{1}{2}\sin2\gamma\cdot\frac{1}{2}\sin2\delta\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

Tā kā visi 4 uzdevumā dotie skaitļi ir pozitīvi, tad saskaņā ar **T3'** teorēmu kāds no tiem nepārsniedz $\frac{1}{2}$.

29.[k] piemērs. Kvadrāta malas garums ir 1. Tā iekšpusē atrodas izliekts n-stūris. Pierādīt, ka var atrast trīs pēc kārtas ņemtas n-stūra virsotnes A, B, C tā, lai trijstūra ABC laukums nepārsniegtu $8/n^2$.

Atrisinājums. Apzīmēsim n-stūra malu garumus pēc kārtas ar $a_1; a_2; \dots ; a_n$. Tā kā n-stūris ir izliekts un atrodas kvadrāta iekšpusē, tad $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 4$. Saskaņā ar teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam, ka $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leq\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=\frac{4}{n}$, no kurienes seko, ka $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\leq(4n)^n$ (*)

Aplūkosim visus iespējamos n trijstūrus, kuru virsotnes ir trīs pēc kārtas ņemtas n-stūra virsotnes. Saskaņā ar trijstūra laukuma formulu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ to laukumi nepārsniedz atbilstoši $\frac{1}{2}\cdot a_1\cdot a_2$; $\frac{1}{2}\cdot a_2\cdot a_3$; $\frac{1}{2}\cdot a_3\cdot a_4$; ...; $\frac{1}{2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n$; $\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot a_1$. Tāpēc šo laukumu reizinājums nepārsniedz $(\frac{1}{2})^n(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^2$. Ņemot vērā (*), iegūstam, ka n apskatāmo laukumu reizinājums nepārsniedz $(\frac{1}{2})^n[(\frac{4}{n})^n]^2 = (\frac{8}{n^2})^n$ Saskaņā ar **T3'** teorēmu vismaz viens no šiem laukumiem nepārsniedz $8/n^2$, ko vajadzēja pierādīt.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

36.° Pierādīt, ka no 100 dažādiem naturāliem skaitļiem var atrast trīs skaitļus, kuru summa ir lielāka par 296.

37.° Piecpadsmit zēniem pavisam ir 100 matemātikas grāmatas. Pierādīt, ka diviem zēniem ir vienāds skaits grāmatu.

38.° Atrisināt 22. piemēru, ja tabulas 5 x 5 vietā ir runa par tabulu, kas sastāv no n x n rūtiņām.

39. Septiņām meitenēm kopā ir 110 lelles. Pierādīt, ka var atrast četras meitenes, kam kopā ir vismaz 70 lelles. Zināms, ka visām meitenēm leļļu skaits ir dažāds.

40.° Dots, ka a, b, c - reāli skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $ax^2+2bx+c=0$; $bx^2 + 2cx + a = 0$; $cx^2 + 2ax + b = 0$ ir sakne.

41. Tabula sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Tajās ierakstīti dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 100 (katrā rūtiņā - viens skaitlis). Pierādīt, ka eksistē

a)° divas rūtiņas ar kopēju malu, kurās ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 6,

b) divas rūtiņas ar kopēju malu vai kopēju stūri, kurās ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 11,

c)^k divas rūtiņas ar kopējo malu, kurās ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 10.

42. Tabula sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstītie skaitļi neatšķiras vairāk nekā par 1.

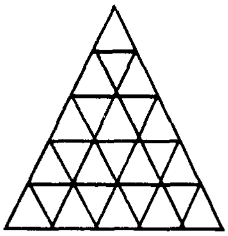
a) Pierādīt, ka ir skaitlis, kas ierakstīts vismaz 6 rūtiņās.

b)^k Pierādīt, ka ir skaitlis, kas ierakstīts vismaz 10 rūtiņās.

43. Regulārs trijstūris ABC sadalīts 25 mazos regulāras trijstūrīšos tā, kā parādīts 11.zīmējumā. Katrā trijstūrī ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 25 (dažādos trijstūros - dažādi skaitļi). Pierādīt, ka var atrast divus trijstūrīšus ar kopēju malu, kuros ierakstītie skaitļi atšķiras

a) vismaz par 3,

b) vismaz par 4.



11. zīm.

44. Dots 21 naturāls skaitlis; tie visi ir dažādi, un neviens no tiem nav lielāks par 71. Pierādīt, ka no šo skaitļu starpībām var izvēlēties četras starpības, kas visas savā starpā ir vienādas.

45. Doti 20 naturāli skaitļi; tie visi ir dažādi, un visi mazāki par 70. Pierādīt, ka no šo skaitļu starpībām var izvēlēties četras starpības, kas visas savā starpā ir vienādas.

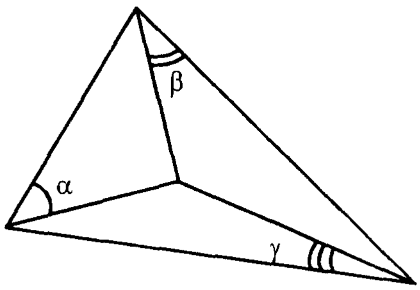
46.° Boksa sacensībās bokseri sadalīti 12 svara kategorijās un pavisam pārstāv 6 komandas. Pierādīt, ka var atrast vismaz 7 tādus bokserus, kam komandas biedru ir vairāk nekā sāncenšu viņa svara kategorijā.

47.^{k} Turnīrā piedalās 512 cīkstoņi. Vispirms tie sadalās pāros un cīnās katra pāra ietvaros; 256 uzvarētāji atkal cīnās pa pāriem, šo pāru 128 uzvarētāji - atkal, utt. (Tādu turnīru rīkošanas sistēmu sauc par olimpisko). Finālā cīnās abu iepriekšējo pāru - pusfinālu uzvarētāji. Pirms turnīra sākuma katram cīkstonim ir piešķirts kvalifikācijas numurs no 1 līdz 512 (katram cits); šis numurs turnīra gaitā nemainās. Cīņu sauc par interesantu, ja tajā piedalās cīkstoņi, kuru numuri atšķiras ne vairāk kā par 30. Pierādīt, ka turnīrā noteikti ir vismaz viena neinteresanta cīņa.

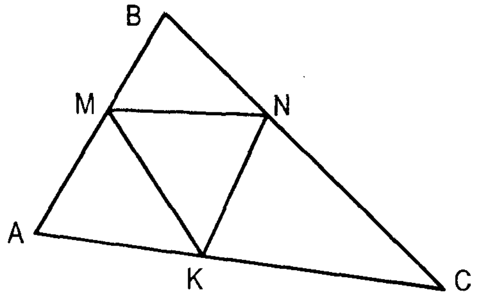
48. Dots, ka a, b, c, d, e, f, g, h, i - kaut kādi skaitļi.

Vai visi skaitļi aei, bfg, dhc, -ceg, -bdi, -afh var vienlaikus būt pozitīvi?

49.^{k} Pierādīt, ka vismaz viens no leņķiem α, β, γ (skat. 12.zīm.) nepārsniedz 30°.



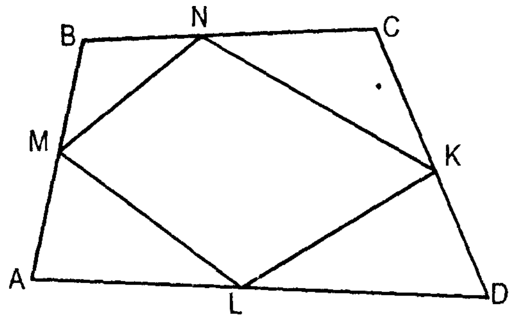
12. zīm.



13. zīm.

50. Pierādīt, ka vismaz vienam no trijstūriem AMK, BMN, CNK laukums nepārsniedz $\frac{1}{4}$ no ABC laukuma (sk. 13.zīm.; M, N, K - patvaļīgi malu AB, BC, CA iekšējie punkti).

51. Pierādīt, ka vismaz vienam no trijstūriem AML, BMN, CKN, DLK laukums nepārsniedz $\frac{1}{8}$ no ABCD laukuma (sk. 14.zīm; M, N, K, L - patvaļīgi malu AB, BC, CD, DA iekšējie punkti.).



14. zīm.

52.[k] Rindā uzrakstīti n reāli skaitļi a_1; a_2; ... ; a_n. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus skaitļus tā, lai vienlaicīgi tiktu izpildītas šādas īpašības:

a) nekādi trīs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi visi nav izvēlēti,

b) no katriem trim pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem ir izvēlēts vismaz viens,

c) izvēlēto skaitļu summas modulis nav mazāks par $\frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{6}$.

1.4. Vidējā vērtība un tās sakars ar aplūkotajām metodēm

Prasme raksturot mums apkārt sastopamās parādības un lielumus ar skaitļiem ir viens no svarīgākajiem cilvēka sasniegumiem. Skaitliskie raksturojumi - laukums, platums, ilgums, vecums, ātrums u.tml., ļauj ātri un ar mazu laika un vietas patēriņu radīt precīzu priekšstatu par aplūkojamo lietu vai procesu, paredzēt tā attīstību, sekas, novērtēt mūsu resursus, lai sasniegtu kādu vēlamu rezultātu vai aizkavētu kaut ko nevēlamu. Tie ļauj salīdzināt vairākas viendabīgas lietas un izvēlēties no tām piemērotāko.

Būtiskas ir prasmes no vieniem skaitliskiem raksturojumiem iegūt citus. Mēs, piemēram, protam aprēķināt taisnstūra laukumu, ja zinām tā garumu un platumu: protam aprēķināt ātrumu, ja zinām ceļu un tajā pavadīto laiku, utt.

Bieži sastopamas situācijas, kurās ar skaitliskiem lielumiem ir raksturots katrs objekts no kaut kādas kopas, piemēram, katram skolas skolēnam zināms viņa vecums. Ja skolā skolēnu ir daudz, tad šāda informācija ir jau izsmeļoša. taču nepārskatāma.

Vai no daudzajiem skaitļiem - visu skolēnu vecumiem - var izveidot vienu vai nedaudzus skaitļus, kuros būtu pietiekami bagātīga informācija par skolas sastāvu vecuma ziņā? Mēs visi zinām, ka - jā. Bieži tiek lietots jēdziens par skolēna vidējo vecumu, ar to saprotot atsevišķo skolēnu vecumu vidējo aritmētisko: $a(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$.

Dažreiz, bet daudz retāk, par vidējo lielumu, kas raksturo skaitļus $v_1, v_2, \ldots, v_n$, izvēlas t.s. vidējo ģeometrisko $g(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n}$, vidējo kvadrātisko $P^2(v) = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}}$, vidējo harmonisko $h(v) = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}$ utt. Tas, kāds vidējā lieluma jēdziens tiek lietots, ir atkarīgs no mūsu mērķiem - ko mēs gribam secināt, aplūkojot iegūto vidējo vērtību. Piemēram, ar vidējās vērtības palīdzību var censties raksturot klases sekmību. Ja mūs interesē vienīgi klases skolēnu iegūto zināšanu summa, mēs lietosim vidējo aritmētisko un uzskatīsim, ka klase, kurā iegūto atzīmju vidējais aritmētiskais ir augstāks, mācās labāk nekā klase, kurā šis rādītājs ir zemāks. Ja turpretī mēs uzskatīsim, ka ir svarīgi secināt, ka klasē nav atpalikušu skolēnu, mēs izmantosim vidējo ģeometrisko: skaidrs, ka pat viens mazs reizinātājs daudz būtiskāk iespaido daudzu skaitļu reizinājumu nekā viens mazs saskaitāmais - daudzu skaitļu summu. Savukārt, ja mums būs īpaši svarīgi uzsvērt, ka klasē ir daudz skolēnu ar izcilām zināšanām, bet atpalicēji šajā gadījumā nebūs svarīgi, mēs varētu lietot vidējo kvadrātisko vai pat vidējo kubisko lielumu $P^3(v) = \sqrt[3]{\frac{v_1^3 + v_2^3 + \ldots + v_n^3}{n}}$ utt. (Padomājiet paši, kāpēc šai gadījumā tas būtu piemērotāks!)

Turpmāk formulētās teorēmas attieksies uz visiem mūsu minētajiem vidējās vērtības jēdzieniem, pieņemot, ka mēs apskatām pozitīvus skaitļus. Ja tiek lietots aritmētiskā vidējā lieluma jēdziens, teorēmas paliek spēkā patvaļīgu (pozitīvu, negatīvu vai 0) skaitļu gadījumā.

3. teorēma par vidējo vērtību. Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.

Pierādīsim teorēmu vidējai aritmētiskai vērtībai a(v).

A. Pieņemsim no pretējā, ka visi skaitļi $v_1, v_2, \ldots v_n$ ir mazāki par to vidējo aritmētisko a(v). Saskaitot n nevienādības $v_1 < a(v)$, $v_2 < a(v), \ldots$; $v_n < a(v)$, iegūstam $v_1 + v_2 + \ldots + v_n < n \cdot a(v)$ vai, kas ir tas pats, $a(v) > \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$. Bet tā ir pretruna ar a(v) definīciju. Tātad vismaz vienam i nevienādība $v_i < a(v)$ netiek izpildīta, t.i., vismaz vienam i pastāv nevienādība $v_i \geq a(v)$, kas arī bija jāpierāda.

B. Pieņemsim no pretējā, ka visi skaitļi $v_1, v_2, \ldots v_n$ ir lielāki par to vidējo aritmētisko a(v). No nevienādībām $v_1 > a(v), \ldots, v_n > a(v)$ iegūstam $v_1+v_2+ \ldots +v_n > n \cdot a(v)$ vai $a(v) < \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$, kas ir pretrunā ar a(v) definīciju. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un teorēma pierādīta.

Ievērosim: no pierādījuma ir skaidrs, ka vidējā aritmētiskā gadījumā teorēma ir spēkā arī tad, ja daži no lielumiem $v_1, v_2, \ldots v_n$ ir negatīvi vai 0.

Teorēmas pierādījumu pārējām vidējām vērtībām iesakām veikt lasītājam patstāvīgi. Noskaidrojiet arī, vai pārējo vidējo vērtību gadījumos teorēmas ir pareizas, ja daži no lielumiem v_i ir negatīvi vai 0!

Ievērojiet šīs teorēmas analoģiju ar jau izmantotajām teorēmām **T1 - T4** un **T1' - T4'.** Nav grūti saprast arī, ka Dirihlē princips **D_1** izriet no 3.teorēmas par vidējo vērtību. Tiešām, pieņemsim, ka n būros izvietoti m truši un m > n. Tad vidējais trušu skaits vienā būrī ir

$a = {}^{m}\!/_{n} > 1.$ Saskaņā ar minēto teorēmu vismaz vienā būrī jābūt ne mazāk kā a trušiem; tā kā a>1un trušu skaits noteikti ir vesels skaitlis, tad šajā būrī ir vismaz 2 truši.

Lasītājs pats var pierādīt, ka arī Dirihlē princips $\mathbf{D_2}$ seko no nupat pierādītās teorēmas.

Tagad mēs varam formulēt vidējās vērtības metodes būtību.

Vidējās vērtības metode ir spriešanas paņēmiens, kas ļauj uzzināt informāciju par kādu atsevišķu lielumu, ja ir pieejama tikai informācija par visu lielumu vidējo vērtību (vai, kas ir tas pats, par visu lielumu summu, reizinājumu utt.).

Gandrīz visos gadījumos spriedumi, ko izdara ar vidējās vērtības metodi, ļauj tikai noskaidrot, ka starp aplūkojamiem lielumiem eksistē kāds elements ar to vai citu īpašību. Šie spriedumi nenorāda, kuram lielumam ir šī īpašība vai kā šādu lielumu atrast.

Parasti vidējās vērtības metodi lieto, izmantojot nupat formulēto 3. teorēmu par vidējo vērtību vai kādu no tās variantiem (Dirihlē principu $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$ utt.). Lasītājs pats bez grūtībām var pierādīt sekojošus apgalvojumus.

4. teorēma par vidējo vērtību. Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas ir mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi. Ja neviens no lielumiem nav mazāks par visu lielumu vidējo vērtību (vai arī neviens no lielumiem nav lielāks par visu lielumu vidējo vērtību), tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo vērtību.

Dažreiz svarīga loma ir arī nākošajai teorēmai.

5. teorēma par vidējo vērtību. Pieņemsim, ka dotas divas kopas $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ bez kopējiem elementiem un šo kopu elementus raksturo skaitļi $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_m$. Ja gan pirmās, gan otrās kopas elementu raksturlielumu vidējā vērtība ir lielāka par c, tad arī abu kopu apvienojuma elementu raksturlielumu vidējā vērtība ir lielāka par c.

Pierādījums. No dotā seko, ka $a_1 + a_2 + ... + a_n > n \cdot c$ un $b_1 + b_2 + ... + b_m > m \cdot c$; saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_m > (n + m) \cdot c$, no kurienes seko

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_m}{n + m} > c.$$

Šī nevienādība izsaka vajadzīgo vidējā aritmētiskā gadījumā. Ievērosim: no pierādījuma skaidrs, ka attiecībā uz vidējo aritmētisko šī teorēma ir spēkā arī tad, ja daži skaitļi ir negatīvi vai 0.

Lasītājs pats var pierādīt šo teorēmu arī citiem vidējiem lielumiem (vidējam ģeometriskajam, vidējam kvadrātiskajam utt.), kā arī līdzīgas teorēmas, kurās vārdi "ir lielāka" abās vietās aizstāti ar "ir mazāka", "nav lielāka", "nav mazāka".

Nupat pierādīto teorēmu var iztēloties šādi: sajaucot divus šķīdumus, kuru abu vielas koncentrācija lielāka par c, iegūst maisījumu, kurā vielas koncentrācija arī lielāka par c.

Ievērosim, ka šī teorēma nav spēkā, ja abām kopām ir kopīgi elementi (atceramies, ka apvienojumā katru elementu ieskaita tikai vienu reizi). Aplūkosim piemēru.

30. piemērs. Klasē katrs skolēns vai nu dzied, vai dejo, pie tam daži varbūt nodarbojas ar abiem pašdarbības veidiem. Dziedātāju vidējais augums ir lielāks par 1,70 m: dejotāju vidējais augums arī ir lielāks par 1,70 m. Vai klases skolēnu vidējais augums noteikti ir lielāks par 1,70 m?

Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Iedomāsimies klasi, kurā ir 20 skolēni, kuru augums ir 1,65 m, un 10 skolēni, kuru augums ir 1,77 m. Pieņemsim, ka dejo 10 skolēni, kuru augums ir 1,65 m, un visi 10 skolēni, kuru augums ir 1,77 m, bet dzied otri 10 skolēni, kuru augums ir 1,65 m, un visi 10 skolēni, kuru augums ir 1,77 m.

Viegli aprēķināt, ka gan dejotāju, gan dziedātāju vidējais augums ir $\frac{10 \cdot 1{,}65\text{m} + 10 \cdot 1{,}77\text{m}}{20} = 1{,}71m$. Tai pašā laikā visas klases vidējais augums ir $\frac{20 \cdot 1{,}65\text{m} + 10 \cdot 1{,}77\text{m}}{30} = 1{,}69m$, tātad mazāks par 1,70 m.

Iztirzāsim arī nākošo piemēru, kas ļaus izsargāties no nepatīkamām kļūdām.

31. piemērs. *Divpadsmitās "A" klases zēnu vidējais garums lielāks par divpadsmitās "B" klases zēnu vidējo garumu, bet divpadsmitās "A" klases meiteņu vidējais garums lielāks par divpadsmitās 'B' klases meiteņu vidējo garumu. Vai noteikti divpadsmitās "A" klases skolēnu vidējais garums ir lielāks par divpadsmitās "B" klases skolēnu vidējo garumu?*

Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Aplūkosim šādu piemēru:

1) 12."A" klasē mācās viens zēns, kura garums ir 1,78 m, un 20 meitenes, kuru garums ir 1,65 m;

2) 12. "B" klasē mācās 20 zēni, kuru garums ir 1,77 m, un 1meitene, kuras garums ir 1,65 m. Viegli pārbaudīt, ka 12."A" klases skolēnu vidējais garums ir mazāks par 1,70 m, bet 12."B" klases skolēnu vidējais garums - lielāks par 1,70 m. Tātad 12."A" klases skolēnu vidējais garums ir mazāks par 12."A" klases skolēnu vidējo garumu, kaut arī gan zēnu vidējais garums, gan meiteņu vidējais garums "A" klasē ir lielāks.

Aplūkosim vienu pierādīto teorēmu lietojumu.

32^k piemērs. *Trīsstūris sagriezts četrstūros. Pierādīt, ka vismaz vienam četrstūrim ir leņķis, kas nav mazāks par 120°.*

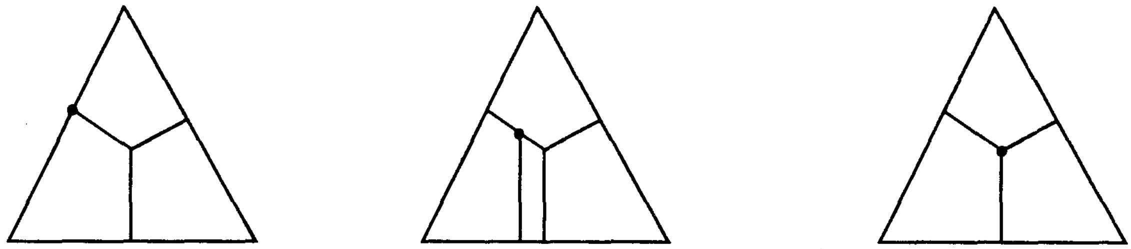
Atrisinājums. Apskatīsim punktus, kuros atrodas dalījuma četrstūra virsotnes. Acīmredzot tie var būt šādi:

a) punkti uz trīsstūra malas (15.a zīm.),

b) punkti trīsstūra iekšpusē, kuri dažiem četrstūriem ir virsotnes, bet citiem - malu iekšējie punkti (15.b zīm.),

c) punkti trīsstūra iekšpusē, kuros atrodas tikai četrstūra virsotnes, bet ne četrstūru malu iekšējie punkti (15.c zīm.),

d) trīsstūru virsotnes.



a b c

15. zīm.

Pieņemsim, ka visiem četrstūriem visi leņķi mazāki par 120°. Tad katrā tādā punktā, kāds attēlots 15.c zīmējumā, kopā sanāk vismaz 4 četrstūri (citādi leņķu summa šajā punktā būtu mazāka par 360°, bet tā nevar būt).

Tagad aprēķināsim visu četrstūru visu leņķu lielumu vidējo aritmētisko vērtību. Darīsim to divos veidos.

A. Apzīmēsim četrstūru skaitu ar n. Tā kā pavisam ir 4·n leņķi un to lielumu summa ir 360°·n, tad meklējama vidējā vērtība ir 360°·n /4n= 90°.

B. Novērtēsim vidējās vērtības atsevišķi to leņķu lielumiem, kuru virsotnes atrodas citu minēto tipu punktos.

B1. Katrā a) vai b) tipa punktā leņķu lielumu summa ir 180°, bet to skaits - vismaz 2; tāpēc katrā šādā punktā vidējā vērtība nepārsniedz 180°/2=90°.

B2. Katrā c) tipa punktā leņķu lielumu summa ir 360°, bet to skaits pēc iepriekš atzīmētā - vismaz 4; tāpēc katrā šādā punktā vidējā vērtība nepārsniedz 360°·n /4n= 90°.

B3. Visu to leņķu lielumu summa, kuru virsotnes atrodas d) tipa punktos, ir 180°, bet to skaits ir vismaz 3; to vidējā vērtība nav lielāka par 180°/3=60°, tātad ir mazāka par 90°.

Ievērojot, ka B1, B2 un B3 minēto leņķu kopas ir bez kopīgiem elementiem, līdzīgi kā pierādot 5.teorēmu par vidējo vērtību, varam secināt: visu leņķu vidējā vērtība ir mazāka par 90°. Bet tas ir pretrunā ar A punktā iegūto. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un vismaz viens kāda četrstūra leņķis nav mazāks par 120°.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

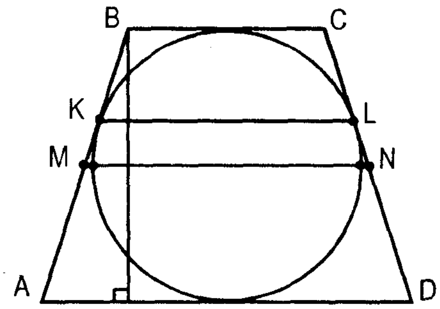
53.* Apzīmēsim pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko, vidējo ģeometrisko, vidējo harmonisko un vidējo kvadrātisko ar A_n, G_n, H_n, $P_n^{(2)}$. Pierādīt, ka $H_n \leq G_n \leq A_n \leq P_n^{(2)}$, pie tam vienādības pastāv tad un tikai tad, ja visi n skaitļi ir vienādi.

54.* Katram naturālam k ≥ 2 ieviesīsim jēdzienu par k-isko vidējo vērtību:

$$P^{(k)}(v) = \sqrt[k]{\frac{v_1^k + v_2^k + \ldots + v_n^k}{n}}.$$

Pierādīt, ka pozitīvu skaitļu gadījumā $P^{(2)}(v) \leq P^{(3)}(v) \leq \ldots \leq P^{(k)}(v) \leq \leq P^{(k+1)}(v) \leq \ldots$, pie tam vienādības pastāv tad un tikai tad, ja $v_1 = v_2 = \ldots = v_n$.

55.* Saskatiet 16.zīmējumā 53.uzdevuma atrisinājumu 2 pozitīvu skaitļu gadījumā. Te ABCD ir vienādsānu trapece, MN - tās viduslīnija, KL - ievilktās riņķa līnijas pieskaršanās punkti sānu malām.



16. zīm.

56.[k] Pamēģiniet izdomāt ģeometrisku pierādījumu 53.uzdevuma apgalvojumam 3 pozitīvu skaitļu gadījumā.

57.[k] Pierādīt: kubā, kura šķautnes garums a + b + c, var ievietot 27 paralēlskaldņus, kuru izmēri ir a·b·c. No šejienes secināt nevienādību $A_3 \geq G_3$ (sk. 53.uzd.).

58.° Pierādīt 3.teorēmu par vidējo vērtību vidējā ģeometriskā, vidējā harmoniskā un vidējā kvadrātiskā gadījumā.

59.° Pierādīt 4.teorēmu par vidējo vērtību vidējā ģeometriskā, vidējā harmoniskā un vidējā kvadrātiskā gadījumā.

60.° Pierādīt 5.teorēmu par vidējo vērtību vidējā ģeometriskā, vidējā harmoniskā un vidējā kvadrātiskā gadījumā.

61. Traukos A, B, C, D ir vārāmās sāls šķīdumi ūdenī. Zināms, ka traukā A sāls koncentrācija lielāka nekā traukā C, bet traukā B - lielāka nekā traukā D. Vai, salejot kopā šķīdumus no A un B, noteikti iegūs maisījumu ar lielāku sāls koncentrāciju, nekā salejot kopā šķīdumus no C un D?

62. Vai ir saprātīgs kādas partijas priekšvēlēšanu sauklis: "Mūsu partija centīsies panākt, lai katrs strādājošais saņemtu vairāk par vidējo darba algu"?

1.5. Dirihlē princips un vidējā vērtība uzdevumos par lielāko un mazāko vērtību atrašanu

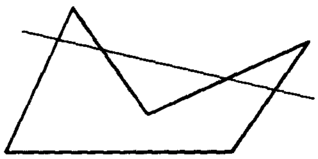
Bieži sastopami uzdevumi, kuros prasīts atrast kāda lieluma iespējami lielāko vai iespējami mazāko vērtību. Vēl biežāk šādu uzdevumu risinājumos sastopamas loģiska rakstura kļūdas. Aplūkosim piemēru.

33. piemērs. *Kāds lielākais daudzums 12-stūra virsotņu var atrasties uz vienas taisnes?*

Sekos virkne kļūdainu "atrisinājumu".

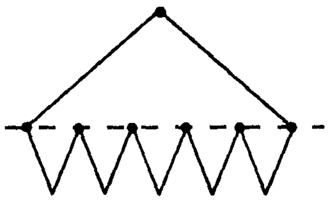
1. "atrisinājums". Taisne var krustot 12-stūra kontūru tikai 2 punktos, tāpēc lielākais skaits ir 2.

Komentārs. "Atrisinājuma" autors aizmirsis, ka bez izliektiem daudzstūriem, kam minētais apgalvojums ir spēkā, pastāv arī ieliekti daudzstūri, kuru kontūru taisne var krustot arī vairāk nekā 2 punktos (skat., piem., 17.zīm.). Tātad argumenti nav pārliecinoši.



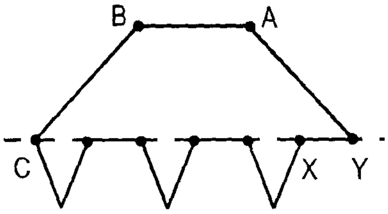
17. zīm.

2. "atrisinājums". Izveidosim 4 "ieliekumus", tādējādi panākot 6 virsotnes uz vienas taisnes. Vairāk šādu "zobiņu" vienu aiz otra novietot nevar. Tāpēc atbilde ir 6 (18. zīm.).



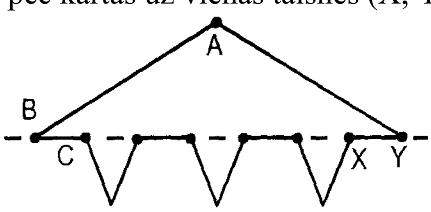
18. zīm.

Komentārs. Bet varbūt "zobiņiem" nav jāseko vienam aiz otra? Skat., piemēram.19. zīmējumu, kurā uz vienas taisnes atrodas 7 virsotnes!



19. zīm.

3. "atrisinājums". Maksimālais virsotņu skaits ir 7, kā tas redzams 19.zīmējumā. Cenšoties virsotni A pievienot šīm 7 uz vienas taisnes esošajām virsotnēm, ciešām neveiksmi - iegūstam trīs virsotnes pēc kārtas uz vienas taisnes (X, Y un A); tā nedrīkst būt.



20. zīm.

Komentārs. Bet ja nu uz šīs taisnes esošajām virsotnēm pievienotu nevis virsotni A, bet gan virsotni B, kā tas redzams 20.zīmējumā? Iegūtu 12-stūri, kam uz vienas taisnes atrodas 8 virsotnes.

Noslēdzošais komentārs. Kā mēs varam zināt, ka šī atbilde ir galīgā? Tiesa, virsotni A, kā arī trīs apakšējās virsotnes mūsu taisnei pievienot vairs nevar, bet varbūt visa konstrukcija pilnīgi "jāizjauc" un jāsāk veidot principiāli citādi? Varbūt tā varētu iegūt 9 vai pat vēl vairāk uz vienas taisnes esošas virsotnes?

No aplūkotajiem piemēriem jāsecina - kaut arī mums šķiet, ka esam ieguvuši labāko iespējamo rezultātu, bez pamatojuma to pieņemt nedrīkst. Intuīcija mūs var pievilt, kā nupat notika 3 reizes.

Lai pamatotu, ka kaut kāda lieluma lielākā iespējamā vērtība ir n, jāpamato divas lietas:

a) jāuzrāda piemērs, kurā šī vērtība tiešām ir n,

b) jāpamato, ka tā nekādā gadījumā nevar būt lielāka par n.

Ja kaut vienas no šīm pierādījuma daļām trūkst, uzdevumu nevar uzskatīt par atrisinātu.

Līdzīgi, lai pamatotu, ka kaut kāda lieluma mazākā iespējamā vērtība ir n:

a) jāuzrāda piemērs, kurā šī vērtība tiešām ir n,

b) jāpamato, ka tā nekādā gadījumā nevar būt mazāka par n.

Līdzīga tipa uzdevumos Dirihlē principu vai vidējās vērtības metodi parasti lieto otrās daļas b punkta pierādījumos. Atzīmēsim, ka šādi uzdevumi ir grūtāki nekā iepriekš aplūkotie divu iemeslu dēļ:

a) jāpierāda divi apgalvojumi, nevis viens,

b) sākumā nav zināma pareizā atbilde, tāpēc, piemēram, lietojot Dirihlē principu, nav skaidrs ne tikai tas, kāda tipa "būrus" veidot, bet arī - cik tie būs nepieciešami.

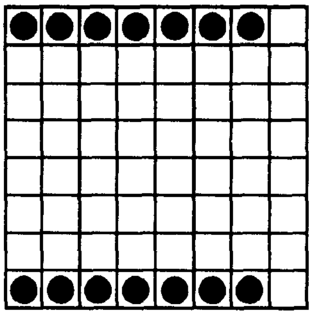
Aplūkosim vairākus piemērus.

<u>34. piemērs.</u> *Kādu vislielāko daudzumu laidņu var novietot uz šaha galdiņa tā, lai tie nesistu cits citu? (Pieņemsim, ka arī vienas krāsas laidņi sit cits citu.)*

<u>Atrisinājums.</u> Lai atrisinātu šādu uzdevumu, jāatrod skaitlis n ar divām īpašībām:

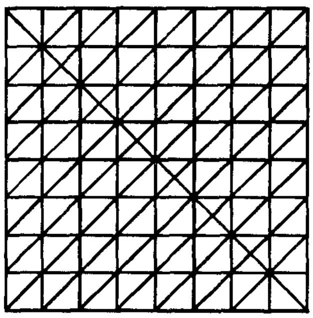
1) n laidņus var izvietot uz šaha galdiņa tā, lai tie cits citu nesistu,

2) mēs protam pierādīt, ka vairāk par n laidņiem izvietot tā, lai tie cits citu nesit, nevar. Pierādīsim, ka uzdevuma atbilde ir skaitlis 14. 21.zīmējumā parādīts, kā var novietot 14 laidņus tā, lai tie cits citu nesistu.



21. zīm.

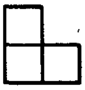
Lai pierādītu, ka 14 ir lielākais iespējamais laidņu skaits, izmantosim Dirihlē principu.



22. zīm.

Tiešām, visu šaha galdiņu var pārklāt ar 14 diagonālēm tā, kā parādīts 22. zīmējumā. Katra šāda galda rūtiņa pieder vismaz vienai no diagonālēm (dažas - divām). Ja uz šaha galdiņa novietosim vairāk nekā 14 laidņu, tad pēc Dirihlē principa vismaz divi laidņi atradīsies uz vienas diagonāles, tātad sitis viens otru.

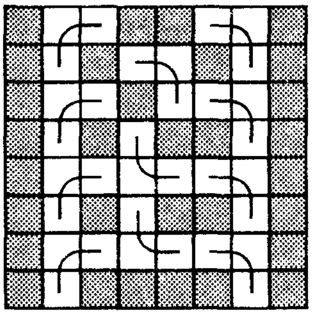
35. piemērs. *Kvadrāts sastāv no 8 x 8 rūtiņām. Kādu vismazāko daudzumu "stūrīšu" (paraugs parādīts 23.zīm.) var izgriezt no kvadrāta tā, lai no atlikušās daļas vairs nevienu tādu stūrīti izgriezt nevarētu?*



23. zīm.

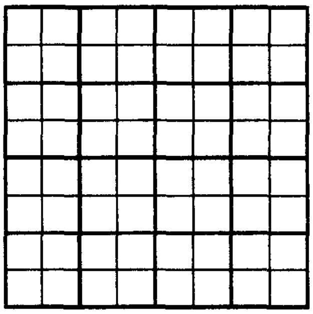
Atrisinājums. Parādīsim, ka šis mazākais skaits ir 11.

a) 24. zīmējumā redzams, kā sasniegt prasīto, izgriežot 11 stūrīšus. Iekrāsotās rūtiņas paliek neizgrieztas.



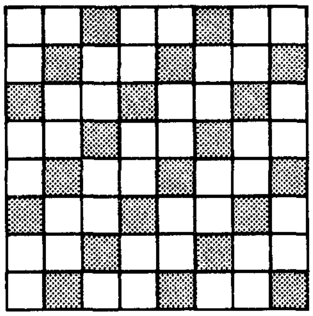
24. zīm.

b) Pamatosim, ka ar mazāk stūrīšiem nepietiek. Ja izgrieztu ne vairāk par 10 stūrīšiem, tad pāri paliktu vismaz $64 - 10 \cdot 3 = 34$ neizgrieztas rūtiņas. Tās kaut kā sadalītas pa 25.zīmējumā redzamajiem sešpadsmit 2x2 rūtiņu kvadrātiem. Tā kā $34 > 16 \cdot 2$, tad saskaņā ar **D_2** vismaz vienā šādā kvadrātā atrastos ne mazāk kā 3 neizgrieztas rūtiņas. Skaidrs, ka tās veido stūrīti.



25. zīm.

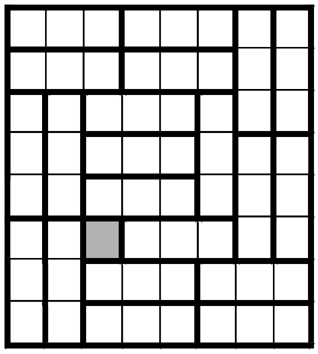
36. piemērs. *Kādu mazāko daudzumu rūtiņu jāiekrāso kvadrātā, kas sastāv no 8 x 8 rūtiņām, lai neiekrāsotajā daļā nevarētu izdalīt nevienu taisnstūri, kas sastāv no 3 x 1 rūtiņas?*



26. zīm.

Atrisinājums, a) Pietiek ar 21 rūtiņas iekrāsošanu; skat., piemēram, 26.zīmējumu.

b) Mazāk nekā ar 21 rūtiņas iekrāsošanu nepietiek. Aplūkosim 27.zīmējumu.



27.zīm

Katrā no tur parādītā 21 taisnstūra, kuru izmēri ir 3 x 1, jābūt vismaz vienai iekrāsotai rūtiņai, tāpēc pavisam to jābūt vismaz 21. (Lietojam Dirihlē principu: ja iekrāsoto rūtiņu būtu ≤ 20, tad kādai no tām jāatrodas vismaz divos no 27.zīmējumā redzamajiem taisnstūriem, bet tā nevar būt.)

<u>37. piemērs.</u> *Darbnīcā ir 5 dažādi darbgaldi. Pieņemti darbā 8 strādnieki. Viena strādnieka apmācīšana darbam pie viena darbgalda izmaksā 1000 latu. Zināms, ka katru dienu darbā ieradīsies tikai 5 strādnieki, bet iepriekš nav zināms - kuri. (Neierasties var katru dienu citi.) Ar kādām vismazākajām apmācības izmaksām var garantēt, ka visi darbgaldi katru dienu varēs strādāt neatkarīgi no tā, kuri strādnieki būs darbā? (Viens strādnieks katru dienu var apkalpot tikai vienu darbgaldu.)*

<u>Atrisinājums.</u> a) 28.zīmējumā tabulā redzams, kā sasniegt mērķi ar 20 000 Ls izmaksām. Krustiņš rūtiņā nozīmē, ka attiecīgais strādnieks māk strādāt pie atbilstošā darbgalda. Tiešām, ja darbā ierodas visi pieci šauri specializējušies strādnieki (D, E, F, G, H), tad katram var piešķirt savu darbgaldu; ja daži no viņiem neierodas, tad viņu vietā ir atnākuši tāds pats skaits universālo speciālistu, kas tos var aizvietot patvaļīgā kārtībā.

Strādn. / Darbgaldi	A	B	C	D	E	F	G	H
1	×	×	×	×				
2	×	×	×		×			
3	×	×	×			×		
4	×	×	×				×	
5	×	×	×					×

28. zīm.

b) Tagad parādīsim, ka ar 19 000 Ls (t.i., ar 19 apmācības kārtām) nepietiek. Pieņemsim, ka veiktas tikai 19 apmācības. Tā kā $19 < 5 \cdot 4$, tad ir darbgalds, pie kura prot strādāt ne vairāk par 3 strādniekiem (ja to prastu vismaz četri strādnieki, tad kopējais apmācību skaits būtu vismaz $5 \cdot 4 = 20$). Ja kādu dienu darbā neierodas tieši šie 3 strādnieki, attiecīgo darbgaldu nevar izmantot.

<u>38. piemērs.</u> *Kādu lielāko skaitu naturālu skaitļu, kas nepārsniedz 100, var izvēlēties tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu vienāda ar kādu trešo izvēlēto skaitli? (Veidot skaitļa summu pašam ar sevi nav atļauts.)*

Atrisinājums, a) Izvēloties 51 skaitli 50; 51; 52;...; 98; 99; 100, nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nav izvēlēta, jo katru divu izvēlēto skaitļu summa ir lielāka par 100.

b) Pierādīsim, ka vairāk par 51 skaitli izvēlēties nevar. Apzīmēsim maksimālo izvēlēto skaitli ar k. Aplūkosim divus pakārtotus gadījumus.

b_1) k - pāra skaitlis, k = 2m. Tad m $\leq$ 50. Aplūkosim "būrus" {1 un 2m-1}; {2 un 2m-2}; {3 un 3m-3};...;{m - 1 un m + 1}. "Būru" pavisam ir m - 1. Tā kā katrā "būrī" ietilpstošo skaitļu summa ir 2m (bet 2m ir starp izvēlētajiem skaitļiem!), tad saskaņā ar Dirihlē principu no "būriem" nedrīkst būt izvēlēti vairāk par m - 1 skaitļiem. Pievienojot vēl skaitļus 2m un varbūt m (lielāki par 2m nav izvēlēti, jo 2m bija lielākais izvēlētais skaitlis), iegūstam, ka kopējais izvēlēto skaitļu skaits nav lielāks par (m - 1) + 1 + 1 = m + 1, t.i., nepārsniedz 51.

b_2) k - nepāra skaitlis, k=2m+1. Tā kā $2m+1 \leq 100$, tad $2m \leq 99$ un $m \leq 49\frac{1}{2}$; m - vesels skaitlis, tāpēc no šejienes seko, ka m $\leq$ 49. Aplūkojot "būrus" {1 un 2m}; {2 un 2m - 1};...; {m un m+1}, līdzīgi kā b gadījumā, iegūstam, ka nav izvēlēti vairāk par m + 1 skaitļiem; tātad izvēlēto skaitļu skaits šajā gadījumā nepārsniedz pat 50.

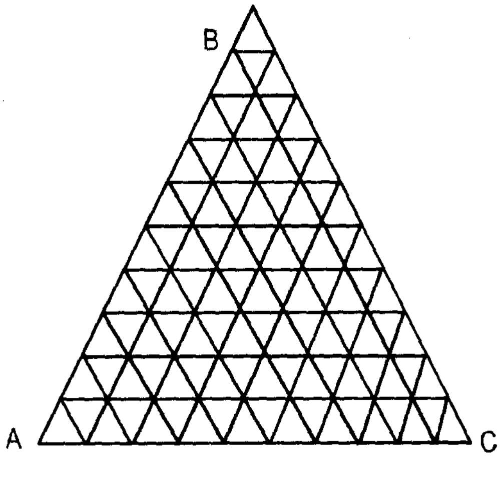
39. piemērs. *Rindā uzrakstīti 10 nenegatīvi skaitļi. Nekādu 3 pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nepārsniedz 3. Kāda var būt lielākā iespējamā visu 10 skaitļu summa?*

Atrisinājums, a) Piemērs 3; 0; 0; 3; 0; 0; 3; 0; 0; 3 parāda, ka šī summa var būt 12.
b) Apzīmēsim skaitļus ar a; b; c; d; e; f; g; h; i; j. Tā kā tie ir nenegatīvi, tad j $\leq$ h + i + j $\leq$ 3. Pieņemsim, ka visu skaitļu summa S ir lielāka par 12.
Tā kā S = (a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) + j, tad vismaz viens no šiem saskaitāmajiem ir lielāks par 12/4 = 3. Tā ir pretruna, tātad S $\leq$ 12. Tātad lielākā iespējamā summa ir 12.

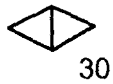
40. piemērs. *Naturālie skaitļi no 1 līdz 9 sadalīti trīs grupās pa 3 skaitļiem katrā. Katrā grupā aprēķināja tajā ietilpstošo skaitļu reizinājumu un no šiem reizinājumiem izvēlējās vislielāko. Kāda ir mazākā iespējamā izvēlētā reizinājuma vērtība ?*

Atrisinājums. Piemērs $1 \cdot 8 \cdot 9 = 72$, $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ parāda, ka šī vērtība var būt 72. Pieņemsim, ka tā nepārsniedz 71. Tad visu 9 skaitļu reizinājums nepārsniegtu $71 \cdot 71 \cdot 71 = 357911$. Bet šis reizinājums ir 362880. Iegūta pretruna. Tātad meklējamā minimālā vērtība ir 72.

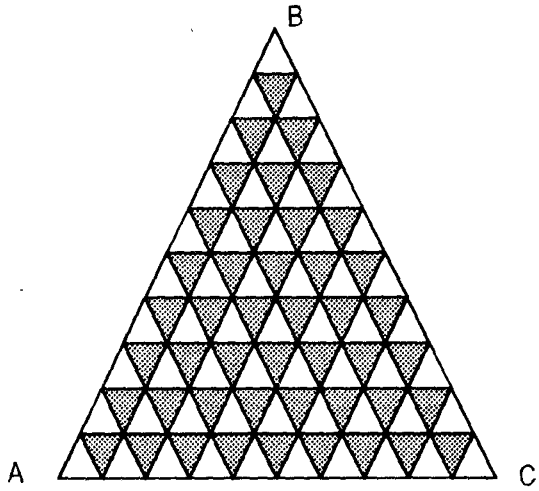
41. piemērs. *Regulārs trijstūris ar taisnēm, kas paralēlas tā malām, sadalīts 100 vienādos mazos regulāros trijstūros (sk. 29.zīm.). Kādu lielāko daudzumu tādu rombu, kāds parādīts 30. zīmējumā, var vienlaicīgi izgriezt no šī trijstūra (rombi var būt novietoti arī citādi) ?*



29. zīm.

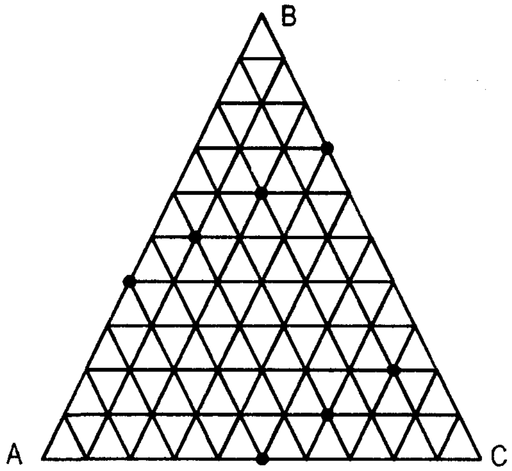

30. zīm.

Atrisinājums. Iekrāsosim dažus trijstūrus melnā krāsā tā, kā parādīts 31.zīmējumā. Skaidrs, ka katrā rombā ir viens melns trijstūris, pie tam katrā cits. Pēc **D**$_1$ rombu nevar būt vairāk kā melno trijstūru, t.i., to nav vairāk par 45. No otras puses, skaidrs, ka 45 rombus var izgriezt: pievienojot katram melnajām trijstūrim M to balto trīsstūri, kas atrodas tieši virs M, iegūstam 45 rombus bez kopējiem iekšējiem punktiem. Tātad uzdevuma atbilde ir 45.

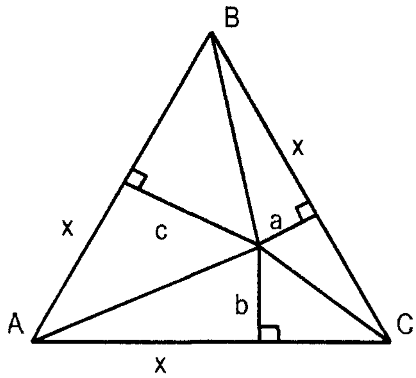


31. zīm.

42.[k] *piemērs. Regulārs trijstūris, kura malas garums ir 10, sadalīts 100 mazos vienādos trijstūros (skat. 29.zīm.). Kādu lielāko skaitu dalījuma trijstūra virsotņu var atzīmēt, lai nekādas divas no tām neatrastos uz taisnes, kas paralēla kādai trijstūra malai?*



32. zīm.



33. zīm.

Atrisinājums. a) Kā redzams 32. zīmējumā, var atzīmēt 7 virsotnes.

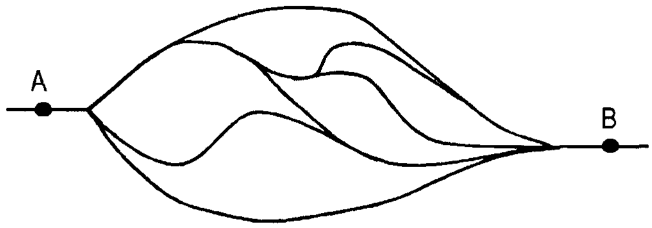
b) Pieņemsim no pretējā, ka izdevies atzīmēt 8 virsotnes saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Raksturosim katru virsotni ar 3 skaitļiem: a - attālums līdz malai BC**,** b - attālums līdz malai AC**,** c - attālums līdz malai AB**,** par vienu vienību pieņemot mazā trijstūrīša augstumu. Nav grūti saprast, ka visām mazo trijstūru virsotnēm pastāv sakarība $a+b+c=10$. (Visvieglāk to pierādīt, izsakot ABC laukumu kā triju trijstūru laukumu summu (skat. 33.zīm.): $L(ABC) = x\cdot 10/2=x\cdot a/2+x\cdot b/2+x\cdot c/2$, tātad $a+b+c=10$; x - ABC malas garums, bet ABC augstums ir 10.)

Izveidosim tabulu ar 8 rindām un 3 kolonnām. Katrā rindā ierakstīsim vienai virsotnei atbilstošās a, b, c vērtības: pirmajā kolonnā a, otrajā b, trešajā c.

Katrā kolonnā visiem skaitļiem jābūt atšķirīgiem: ja, piemēram, divām atzīmētajām virsotnēm sakrīt a vērtības, tad tie abi atrodas uz taisnes, kas paralēla BC. Tāpēc mazākā iespējamā vienas kolonnas skaitļu summa ir $0+1+2+3+4+5+6+7= 28$, bet mazākā iespējamā visas tabulas skaitļu summa ir $28\cdot 3 = 84$. Tātad vidējā skaitļu summa vienā rindiņā ir

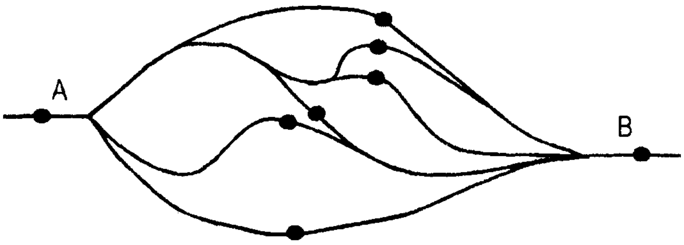
84/8=10,5, t.i., lielāka par 10. Tāpēc kādā rindiņā skaitļu summai arī jābūt lielākai par 10. Iegūta pretruna. Tātad meklējamais lielākais atzīmējamo virsotņu skaits ir 7.

43. piemērs. *Kāds ir lielākais skaits automašīnu, kuras, virzoties 34.zīmējumā parādītajā ceļu shēmā no kreisās uz labo pusi, var pārkārtoties jebkurā kārtībā? Automašīnas var mainīt kustības ātrumu vai apstāties, bet nedrīkst virzīties atpakaļgaitā. Kustības sākumā automašīnas nostājušās rindā pa kreisi no A cita aiz citas; kustības beigās automašīnas nostājušās pa labi no B rindā cita aiz citas. Ceļi ir tik šauri, ka apdzīšana nav iespējama.*



34. zīm.

Atrisinājums. a) Viegli saprast, ka 6 automašīnas var pēc kārtas iebraukt punktos, kas atzīmēti 34. zīmējumā, un apstāties tajos, bet pēc tam izbraukt no "labirinta" jebkurā kārtībā, jo neviena mašīna nav tai ceļā.



35. zīm.

b) Nav grūti saskaitīt, ka pavisam eksistē 6 ceļi, pa kuriem automašīna var izbraukt cauri parādītajam satiksmes mezglam saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Ja automašīnu būtu vairāk par 6, tad saskaņā ar Dirihlē principu vismaz divas no tām brauktu pa vienu un to pašu ceļu. Tas nozīmē, ka šo automašīnu savstarpējā kārtība netiktu mainīta; tātad visas automašīnas nevarētu pārkārtoties, piemēram, pretējā kārtībā. Tātad meklējamais maksimums ir 6.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

63. Kādu vislielāko daudzumu
    a) torņu,
    b) karaļu,
    c) dāmu,
    d) zirdziņu var novietot uz šaha galdiņa tā, lai neviena figūra neapdraudētu otru?
    (Uzskatām, ka arī vienas krāsas figūras apdraud cita citu.)

64.^{k} Atrisināt iepriekšējo uzdevumu, ja figūras jānovieto kvadrātā, kura izmēri ir
    a) 9 x 9 rūtiņas,
    b) n x n rūtiņas.

65.^{k} Kādu vismazāko daudzumu
    a) torņu,
    b) karaļu,
    c) laidņu
    jānovieto uz šaha galdiņa, lai visas neaizņemtās rūtiņas būtu apdraudētas?
    Piezīme: nav zināms skaists atrisinājums līdzīgam uzdevumam par zirdziņiem, dāmām.

66. Kāds ir lielākais torņu skaits, kuru var novietot uz šaha galdiņa, kura izmēri ir

a) 8 x 8 rūtiņas,

b) n x n rūtiņas tā, lai neviens no tiem neapdraudētu vairāk nekā vienu citu torni?

67.* Kādu lielāko skaitu rūtiņu var iekrāsot kvadrātā, kas sastāv no

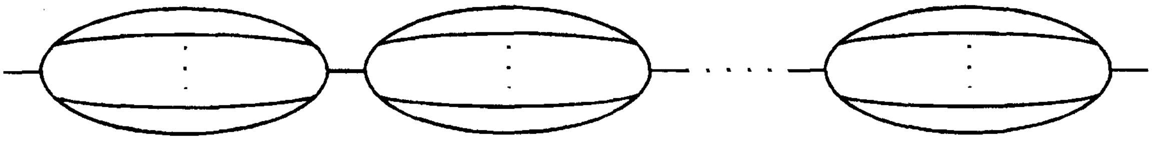
a) 8 x 8 rūtiņām,

b) 7 x 7 rūtiņām,

c) n x n rūtiņām

tā, lai neviens "stūrītis", kāds redzams 23.zīmējumā, nebūtu pilnībā iekrāsots?

68.* 36.zīmējumā attēlota satiksmes mezgla shēma. Satiksmes mezgls sastāv no k paralēlu ceļu kūļiem: pirmajā kūlī ir n_1 paralēli ceļi, otrajā - n_2 paralēli ceļi,..., k-jā kūlī ir n_k paralēli ceļi. Atbildēt uz 43. piemērā minēto jautājumu šāda ceļu mezgla gadījumā.



36. zīm.

69.[k] Pilsēta sastāv no 20 x 20 vienādiem kvadrātveida kvartāliem; kvartāla malas garums ir 100 m. Kvartālus norobežo ielas; iela ved arī visapkārt pilsētai pa tās ārējo kontūru. Kāds mazākais daudzums naudas maiņas punktu jāatver pilsētā, lai, jebkurā vietā izejot no mājas uz ielas, līdz tuvākajām punktam būtu jāiet ne vairāk kā pa divu kvartālu malām (pārvietoties drīkst tikai pa ielām)?

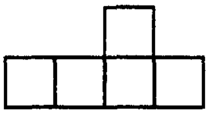
70.* Kāds mazākais daudzums rūtiņu jāiekrāso kvadrātā, kas sastāv no 8 x 8 rūtiņām, lai neiekrāsotajā daļā nevarētu ievietot nevienu

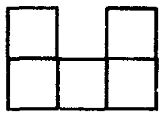
a) taisnstūri, kas sastāv no 1 x 2 rūtiņām,

b) taisnstūri, kas sastāv no 1 x 5 rūtiņām,

c) figūru, kas redzama 37. zīmējumā a,

d) figūru, kas redzama 37. zīmējumā b?





37. zīm.

71.* Kādu lielāko daudzumu dambretes dāmu var novietot uz 8 x 8 dambretes galdiņa melnajiem luciņiem tā, lai katru dāmu apdraudētu vismaz viena cita dāma?

72.* 1995 konfekšu kaudzītēs ir atbilstoši 1; 2, 3; ...; 1994; 1995 konfektes. Ar vienu gājienu var no vairākām kaudzītēm apēst vienādu konfekšu daudzumu. Kāds ir mazākais iespējamais gājienu skaits, ar kuru var panākt, lai visās kaudzītes būtu palicis vienāds skaits konfekšu (varbūt neviena)?

73.* Izliekta 8-stūra malas un diagonāles katra jānokrāso vienā krāsā tā, lai vienādi nokrāsotiem nogriežņiem nebūtu kopīgu punktu. Kāds mazākais krāsu skaits ļauj to izdarīt? (Uzskatām, ka divu vai vairāku dažādi krāsotu nogriežņu kopīgs punkts, ja tāds eksistē, nokrāsots vienlaikus visu šo nogriežņu krāsās.)

74.* Kvadrātā, kurš sastāvēja no 9 x 9 rūtiņām, katrā rūtiņā dzīvoja pa rūķītim. Kādu dienu visi rūķīši sadomāja pārcelties uz citām rūtiņām, un katrs no viņiem pārgāja uz tādu rūtiņu, kurai ar viņa iepriekšējo mitekli bija kopīgs stūris (bet ne kopīga mala). Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas šādas pārcelšanās dēļ varēja palikt neapdzīvots?

75. Labirinta ejas ir izliekta n-stūra visas malas un visas diagonāles. Kāds mazākais spuldžu skaits jānovieto labirintā, lai visas ejas būtu apgaismotas?

76. Katra kuba mala sadalīta 4 vienādos kvadrātos. Katrs kvadrāts jānokrāso vienā krāsā tā, lai katri divi kvadrāti, kuriem ir kopēja mala, būtu nokrāsoti dažādās krāsās. Kāds minimālais krāsu skaits nepieciešams?

77. Noskaidrot, vai 13. piemēra apgalvojums paliktu spēkā arī taisnstūrim, kura izmēri ir 4x6 rūtiņas.
78. Vai 45. uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja doti tikai naturāli skaitļi, kas mazāki par 71?
79. Vai 25. piemēra apgalvojums paliktu pareizs, ja skaitli "5" tajā aizstātu ar skaitli "6"?
80. Vai 15. piemērā minētās uzstāšanās var noorganizēt 4 dienu laikā?

VIDĒJAS VĒRTĪBAS METODES PAMATLIETOJUMI

2. nodaļa. Lietojumi skaitļu teorijas uzdevumos

Plašu uzdevumu klasi, kur iespējams lietot Dirihlē principu, veido uzdevumi par skaitļu dalāmību.

2. l. Vienkāršākie uzdevumi, kas saistīti ar atlikuma jēdzienu

Atgādināsim galvenos faktus, kas jāatceras, lai saprastu šajā punktā analizētos piemērus.

Ja doti divi veseli skaitļi m un n, turklāt $m > 0$ (t.i., m - naturāls skaitlis), tad n var izdalīt ar m "ar atlikumu". Tas nozīmē, ka tiek atrasti tādi veseli skaitļi q un r, kur $n = q \cdot m + r$, turklāt $0 \leq r < m$.

Skaitli q sauc par dalījumu, bet r - par atlikumu. Ja $r = 0$, tad saka, ka n dalās ar m bez atlikuma (jeb vienkārši, ka n dalās ar m).

Ja doti skaitļi n un m, tad dalījums q un atlikums r ir noteikti viennozīmīgi. Svarīgi atcerēties, ka, dalot ar naturālu skaitli m, atlikumam var būt tikai vērtības 0; 1; 2;... ; m - 1, t.i., m dažādas vērtības.

Piemērs. *Dalot 12 ar 7, dalījums ir 1, atlikums 5, jo $12 = 1 \cdot 7 + 5$. Dalot 12 ar 6, dalījums ir 2, atlikums 0, jo $12 = 2 \cdot 6 + 0$. Dalot 4 ar 2, dalījums ir 2, atlikums 0, jo $4 = 2 \cdot 2 + 0$. Dalot -13 ar 7, dalījums ir -2, atlikums 1, jo $-13 = -2 \cdot 7 + 1$.*

Tiks izmantotas šādas divas teorēmas.

Teorēma par starpības dalīšanos (TSD teorēma).
Pieņemsim, ka a, b un n - veseli skaitļi, turklāt $n > 0$. Starpība $a - b$ dalās ar n tad un tikai tad, ja a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar n.

Pierādīsim šo teorēmu. Pierādījumā jāaplūko divi gadījumi.

1. Pieņemam, ka a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar n. Apzīmēsim šo atlikumu kopējo vērtību ar r. Tad $a = q_1 \cdot n + r$, $b = q_2 \cdot n + r$. Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam $a - b = = (q_1 - q_2) \cdot n$ (atlikums r saīsinājās). Iegūtā vienādība arī parāda, ka $a - b$ dalās ar n (dalījums ir $q_1 - q_2$).

2. Pieņemsim, ka $a - b$ dalās ar n un skaitlis b dod atlikumu r, dalot ar n. Tas nozīmē, ka $b = q_1 \cdot n + r$ un $a - b = q_2 \cdot n$ (q_1 un q_2 kaut kādi veseli skaitļi). Tad $a = q_2 \cdot n + b = q_2 \cdot n + q_1 \cdot n + r = =(q_1 + q_2)n + r$. No vienādības $a = (q_1 + q_2)n + r$ redzam, ka, dalot a ar n, iegūstam dalījumu $q_1 + q_2$ un atlikumu r; tātad tiešām a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar n. TSD teorēma pierādīta.

TSD teorēmu bieži lieto kopā ar Dirihlē principa variantu, ko mēs sauksim par **D_3**

D_3 Ja n priekšmeti sadalīti n grupās tā, ka nevienā grupā nav vairāk par vienu priekšmetu, tad katrā grupā ir tieši viens priekšmets.

Ja **D_1, D_2** vai **D_3** lieto kopā ar TSD teorēmu, tad parasti (bet ne vienmēr!) "būri" ir iespējamās atlikumu vērtības, bet "truši" - paši atlikumi, ko iegūst, dalot kaut kādus skaitļus ar atbilstošo n.

<u>44. piemērs.</u> Pierādīt, ka no jebkuriem 8 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus skaitļus tā, lai to starpība dalītos ar 7.

<u>Atrisinājums.</u> Ņemam patvaļīgus naturālus skaitļus $a_1, a_2, ..., a_8$ Dalot tos ar 7, iegūsim atlikumus, kurus apzīmēsim ar $b_1, b_2, ..., b_8$. Atlikumi, dalot ar 7, var būt tikai 0, 1, ..., 6 - pavisam septiņas dažādas vērtības. No Dirihlē principa **D1** izriet, ka starp atlikumiem $b_1, b_2, ..., b_8$ ir vismaz divi vienādi atlikumi. Pēc TSD teorēmas tie divi skaitļi, kuru atlikumi, dalot ar 7, ir vienādi, apmierina uzdevuma nosacījumus.

<u>45. piemērs.</u> Dots, ka a, b, c, d - patvaļīgi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) dalās ar 12.

<u>Atrisinājums.</u> Mums jāpierāda, ka apskatāmais reizinājums (apzīmēsim to ar R!) dalās ar 3 un ar 4. Izdalīsim katru no skaitļiem a, b, c, d ar 3 ar atlikumu. Iegūsim četrus atlikumus. Tiem var būt tikai trīs dažādas vērtības: 0, 1 un 2. Saskaņā ar **D1** divu atlikumu vērtības būs vienādas. Atbilstošo skaitļu starpība dalīsies ar 3 saskaņā ar TSD teorēmu. Tāpēc arī viss reizinājums R dalīsies ar 3.

Pamēģināsim līdzīgi izspriest par dalīšanos ar 4. Dalīsim katru no skaitļiem a, b, c, d ar 4. Iegūsim 4 atlikumus. Diemžēl, tā kā ir iespējamas 4 dažādas atlikumu vērtības (0, 1, 2 un 3), mēs nevaram apgalvot, ka starp tām būs divas vienādas vērtības. Tāpēc rīkosimies citādi: aplūkosim divus iespējamus gadījumus.

1. Divi no iegūtajiem atlikumiem ir vienādi. Tad atbilstošo skaitļu starpība dalās ar 4, tāpēc arī reizinājums R dalās ar 4.

2. Nekādi divi no iegūtajiem atlikumiem nav vienādi. Tad saskaņā ar **D3** tieši viens no tiem ir 0, tieši viens ir 1, tieši viens ir 2 un tieši viens ir 3. Bet to skaitļu starpība, kas dod atlikumus 0 un 2, dalās ar 2 (tiešām, $(4q_1 + 2) - (4q_2 + 0) = 2(24q_1 + 1 - 24q_2)$, tātad dalās ar 2). Līdzīgi arī to skaitļu starpība, kas dod atlikumus 1 un 3, dalās ar 2 (pierādījums līdzīgs, izdariet to patstāvīgi). Tātad divas iekavas, ko satur R**,** dalās ar 2; tāpēc R dalās ar 4. Uzdevums atrisināts.

*<u>46. * piemērs.</u> Rindā uzrakstīti 100 veseli skaitļi. Pierādīt, ka var izvēlēties dažus pēc kārtas uzrakstītus skaitļus (varbūt vienu skaitli), kuru summa dalās ar 100.*

<u>Atrisinājums.</u> Mums ir jau radušās zināmas iemaņas, un intuīcija saka, ka šoreiz "būru" lomā būs atlikumu vērtības, kas var rasties, skaitļus dalot ar 100: 0, 1, 2,..., 98, 99; to skaits ir 100.

Bet ko lai izvēlas "trušu" lomā? Mēģināsim dotos skaitļus A_1 , A_2 ,..., A_{100} sagrupēt atkarībā no tā, kādu atlikumu tie dod, dalot ar 100. Ja starp šiem skaitļiem ir divi, kuri dod vienādus atlikumus, dalot ar 100, tad ... nekas nav līdzēts, jo tas nebūt nenozīmē, ka šo skaitļu summa dalīsies ar 100. Turklāt nav nekādas garantijas, ka šie skaitļi dotajā rindā ir uzrakstīti pēc kārtas.

Tātad šāda "trušu" izvēle ir neveiksmīga, un mums jārīkojas citādi.

Apskatīsim 100 summas (A_1, nosauksim par summu ērtības dēļ):

$$S_1 = A_1$$
$$S_2 = A_1 + A_2$$
$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3$$
$$.......$$
$$S_{100} = A_1 + A_2 + ... + A_{100}$$

un apskatīsim atlikumus, ko katra no tām dod, dalot ar 100. Iespējamas 100 dažādas atlikumu vērtības. Ja kāda no summām dod atlikumu 0, tad skaitļi, kas veido šo summu, ir uzdevumā meklētie.

Ja turpretī neviena no summām nedalās ar 100, tad pēc D_1 starp 100 apskatāmajām summām ir vismaz divas (apzīmēsim tās ar S_i un S_j; S_i satur mazāk saskaitāmo nekā S_j), kuras dod vienādus atlikumus, dalot ar 100. To starpība S_j - S_i pēc TSD teorēmas dalās ar 100. Acīmredzami, ka šī starpība sastāv no j - i dotajā virknē pēc kārtas ņemtiem skaitļiem A_{i+1}, A_{i+2}, ..., A_{j-1} .A_j. Šie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumu.

47. piemērs. Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis, kura pēdējie četri cipari ir 1990 un kurš dalās ar 1991.

Atrisinājums. Apskatīsim 1991 skaitli:

A_1 =1990,

A_2 = 1990 1990,

A_3 = 1990 1990 1990,

....

A_{1991} = 1990 ... 1990 (grupa "1990" 1991 reizes).

Dalīsim katru no tiem ar skaitli 1991 ar atlikumu. Varam iegūt 1991 dažādas atlikumu vērtības: 0; 1; 2;... ; 1990. Tālāk paredzam divas iespējas.

1. Visi iegūtie atlikumi ir dažādi. Tad pēc $\mathbf{D_3}$ starp tiem ir arī atlikums 0, t.i., eksistē skaitlis A., kas dalās ar 1991. To varam ņemt par vajadzīgo.
2. Divi skaitļi (piem., A_i un A_j, i >j) dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 1991. Tad šo skaitļu starpība dalās ar 1991 saskaņā ar TSD teorēmu. Bet šī starpība ir A_i - A_j = 1990 1990 1990 ... 1990 0000 0000 ... 0000 (i - j reizes 1990; j reizes 0000).

Pierakstīt nulli skaitļa galā nozīmē pareizināt to ar 10, t.i., ar 2 un ar 5. Skaidrs, ka nulles skaitļa galā neatstāj nekādu iespaidu uz dalīšanos ar 1991, jo 1991 nesatur ne 2, ne 5 kā savus dalītājus. Tas nozīmē, ka skaitlis 1990 1990 ... 1990 (i -j reizes 1990) dalās ar 1991. Varam šo skaitli ņemt par meklēto.

48. piemērs. Vai var atrast tādu skaitļa 3 pakāpi (kāpinātājs - naturāls skaitlis), kura beidzas ar cipariem 0001?

Atrisinājums. Jā, var. Pamatosim to.

Aplūkosim skaitļu 3^1, 3^2, 3^3,..., 3^{10001} pēdējo četru ciparu grupas. Četri cipari var veidot 10000 dažādas grupas: 0000, 0001, 0002, ..., 9998, 9999. Tā kā mēs apskatām vairāk skaitļu, nekā ir dažādo grupu, tad diviem skaitļiem šīs grupas būs vienādas.

Atņemot tās "saīsināsies", un atbilstošo skaitļu starpība beigsies ar 0000 jeb dalīsies ar 10000. Iegūstam $3^n - 3^m = 10\,000 \cdot q$ (q - dalījums), n > m. Pierakstīsim šo vienādību kā $3^m(3^{n-m}-1) = 10000q$. Redzam, ka $3^m(3^{n-m}-1)$ dalās ar 10 000.

Tā kā 3^m pat nesaīsināsies ar 10 000 (3^m sastāv no trijniekiem, bet 10 000 = $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$), tad patiesībā $3^{n-m}-1$ dalās ar 10 000 jeb $3^{n-m}-1$ = ... 0000. No šejienes seko, ka 3^{n-m}= ... 0001, ko arī vajadzēja pierādīt. Uzdevums atrisināts.

Komentāri.

1. Ievērojiet, ka skaitļa pēdējo 4 ciparu grupa veido atlikumu, ko iegūst, doto skaitli dalot ar 10000! Tātad apskatītajā risinājumā "trušu" lomā atkal bija atlikumi un tika izmantota TSD teorēma, tikai nesaucot to vārdā.

2. Risinājumā būtu pieticis aplūkot arī tikai pakāpes 3^1, 3^2, 3^3,..., 3^{10000} un ievērot: ja starp tām ir pakāpe, kuras 4 pēdējie cipari ir 0001, tad vajadzīgais jau iegūts; ja šādas pakāpes nav, tad uz 10000 pakāpēm ir ne vairāk par 9999 pēdējo četru ciparu virknēm, un divām pakāpēm šīs virknes ir vienādas. Tālāk spriežam kā iepriekšējā risinājumā.

3. Patiesībā būtu pieticis aplūkot vēl mazāku daudzumu pakāpju, jo neviena trijnieka pakāpe nevar beigties, piemēram, ar pāra ciparu vai ciparu 5; tātad iespējamo pēdējo 4 ciparu virkņu ("būru") ir daudz mazāk nekā 10000.

<u>49. piemērs.</u> Pierādīt, ka no katras bezgalīgas ciparu virknes var izraudzīties dažus pēc kārtas uzrakstītus ciparos tā. lai skaitlis, kas sastāv no šiem cipariem to uzrakstīšanas secībā virknē, dalītos ar 1991.*

<u>Atrisinājums.</u> Ja dotajā ciparu virknē kaut viens elements ir 0, tad uzdevuma atrisinājums ir triviāls, jo, izraugoties šo ciparu, iegūstam skaitli 0, kas dalās ar 1991. Tāpēc pieņemsim, ka neviens dotās bezgalīgās ciparu virknes loceklis nav vienāds ar nulli.

Izraudzīsimies kādu dotās virknes elementu un "izgriezīsim" no virknes "nogriezni", kurš sākas ar šo izraudzīto elementu un kura garums ir 1992 cipari. Sanumurēsim iegūtā nogriežņa elementus, nemainot to secību, ar skaitļiem 1, 2, ..., 1992 un apzīmēsim šos elementus ar $a_1, a_2, ..., a_{1992}$. Šo operāciju shematiski var attēlot šādi:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \bigcirc, & \bigcirc, & ..., & \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc, & ..., & \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc, & ..., \\ & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & a_{1991} & a_{1992} & & \end{array}$$

kur ar aplīšiem parādīti dotās virknes elementi. Aplūkosim ciparu virknes:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{1991}, a_{1992};$$
$$a_2, a_3, ..., a_{1991}, a_{1992};$$
$$a_3, ..., a_{1991}, a_{1992};$$
$$.........$$
$$a_{1991}, a_{1992};$$
$$a_{1992}.$$

(Katra nākamā virkne tiek iegūta, atmetot iepriekšējā virknē pirmo ciparu no kreisās puses.) Katrai šādai ciparu virknei atbilst vesels skaitlis, kuru iegūst, nodzēšot virknē visus komatus (piemēram, ja kāda no virknēm ir 5, 7, 3, 3, 1, tad tai atbilst skaitlis 57331). Esam ieguvuši 1992 skaitļus. Tie visi ir dažādi. Aplūkosim atlikumus, kas rodas, katru no šiem skaitļiem dalot ar 1991. Iespējamas tikai 1991 dažādas atlikumu vērtības. Bet, tā kā skaitļu ir 1992, tad vismaz divi atlikumi ir vienādi. Pieņemsim, ka ciparu skaits šajos skaitļos ir n un k ($n > k$), un apzīmēsim šos skaitļus ar S_n un S_k .

Tā kā skaitļus ar mazāku ciparu skaitu ieguvām no skaitļiem ar lielāku ciparu skaitu, atmetot vienu vai vairākus pirmos ciparos, tad skaitļu S_n un S_k pēdējie k cipari sakrīt.

Atņemot no lielākā skaitļa mazāko, iegūstam rezultātu, kura sākumā atrodas pēc kārtas ņemti dotās virknes cipari (tie cipari, kas vēl neietilpst skaitlī S_k), bet pēc tiem seko k nulles. Ja minēto pēc kārtas ņemto dotās virknes ciparu veidoto skaitli apzīmē ar a, tad rezultāts ir a000 ... 000 (k nulles) jeb $a \cdot 10^k$. Š*ī* starpība saskaņā ar TSD teorēmu dalās ar 1991. Bet 10^k pat nesaīsinās ar 1991, tāpēc a dalās ar 1991. Vajadzīgā sākumā dotās virknes ciparu grupa atrasta.

<u>50. piemērs.</u> Pierādīt, ka starp katriem 3 naturāliem skaitļiem var atrast tieši divus skaitļus, kuru summa dalās ar 2.

<u>Atrisinājums.</u> Sadalīsim visus skaitļus ("trušus") divos "būros" atkarībā no tā, vai tie ir pāra vai nepāra skaitļi. Kādā "būrī" nonāks divi (vai pat visi 3) skaitļi. Izvēlamies divus skaitļus no viena "būra". Tā kā gan divu pāra, gan divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis (tātad dalās ar 2), uzdevums atrisināts.

<u>51. piemērs.</u> Pierādīt, ka starp katriem 5 naturāliem skaitļiem var atrast tieši 3 skaitļus, kuru summa dalās ar 3.

<u>Atrisinājums</u>. Ja nepastāvētu prasība pēc tieši trīs saskaitāmajiem, uzdevumu varētu atrisināt tāpat kā 46. piemēru; turklāt nebūtu vajadzīgi 5 skaitļi, bet pietiktu ar trijiem. Tomēr 46.piemēra metode neko negarantē attiecībā uz saskaitāmo skaitu. Tāpēc jārīkojas citādi.

Sadalīsim visus skaitļus ("trušus") trijos "būros" atkarībā no tā, kādu atlikumu katrs no tiem dod, dalot ar 3 (kā zināms, iespējami tikai atlikumi 0, 1 un 2). Aplūkosim divas iespējas.

1. Katrā "būrī" ir vismaz pa vienam skaitlim. Paņemsim pa vienam skaitlim no katra "būra"; apzīmēsim tos ar 3a, 3b + 1 un 3c + 2. Tad šo triju skaitļu summa S = 3a + (3b + l) + +(3c+ 2) = 3(a + b + c + 1) dalās ar 3.

2. Ir arī tāds "būris", kurā neviena skaitļa nav. Tas nozīmē, ka visi pieci skaitļi sadalīti ne vairāk kā divos "būros"; saskaņā ar **D_2** kādā "būrī" ir vismaz 3 skaitļi (ja katrā būrī būtu ne vairāk par diviem skaitļiem, tad pavisam nebūtu vairāk par četriem skaitļiem). Paņemam trīs skaitļus no viena "būra". Mēs apgalvojam, ka tie der par meklētajiem. Tiešām, ja tie dod atlikumu r (vienu un to pašu!), dalot ar 3, tad tos var apzīmēt kā 3a + r, 3b + r un 3c + r un to summa ir 3(a + b + c + r), t.i., dalās ar 3. Vajadzīgais pierādīts.

52. piemērs. *Pierādīt, ka starp jebkuriem 52 naturāliem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa vai starpība dalās ar 100.*

Atrisinājums. Izveidosim 51 "būri":

1. "būri" ievietosim skaitļus, kuru atlikumi, dalot ar 100, ir 1 vai 99;
2. "būrī" ievietosim skaitļus, kuru atlikumi, dalot ar 100, ir 2 vai 98;
3. "būri" ievietosim skaitļus, kuru atlikumi, dalot ar 100, ir 3 vai 97;

....

49. "būrī" ievietosim skaitļus, kuru atlikumi, dalot ar 100, ir 49 vai 51;
50. "būri" ievietosim skaitļus, kuru atlikumi, dalot ar 100, ir 50;
51. "būrī" ievietosim skaitļus, kuru atlikumi, dalot ar 100, ir 0.

Tā kā skaitļu ir vairāk nekā "būru", tad divi skaitļi nonāks vienā "būrī". Ja divi skaitļi nonāk 50. vai 51. "būrī", tad gan to summa, gan starpība dalās ar 100. Ja divi skaitļi nonāk vienā no pirmajiem 49 "būriem", tad:

ja to atlikumi, dalot ar 100, ir vienādi, to starpība dalās ar 100;

ja to atlikumi, dalot ar 100, ir dažādi, to summa dalās ar 100 (tieši šīs īpašības dēļ "būri" tika veidoti izvēlētajā ceļā). Uzdevums atrisināts.

Piezīme. Lasītājs var viegli pārbaudīt, ka skaitli 52 nevar aizstāt ar 51: ja, piemēram, būtu izvēlēti skaitļi 50; 51; 52; ... ; 98; 99; 100, tad nekādu divu skaitļu summa, ne arī to starpība nedalītos ar 100.

53. piemērs. *Doti piecu naturālu skaitļu kvadrāti. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties tādus divus kvadrātus, kuru starpība dalās ar 7.*

Komentārs. Ievērosim: ja dotie skaitļi būtu nevis kvadrāti, bet patvaļīgi naturāli skaitļi, uzdevuma apgalvojums nebūtu pareizs; pietiek aplūkot kaut vai skaitļus 1; 2; 3; 4; 5. Būtiskā atšķirība slēpjas šādā faktā: kaut arī naturāli skaitļi, dalot ar 7, var dot 7 dažādus atlikumus, to kvadrātiem iespējamo atlikumu ir mazāk. Šī īpašība izpaužas ne tikai, aplūkojot dalīšanu ar 7, bet arī dalīšanu ar citiem skaitļiem.

Tagad apskatīsim divus dažādus risinājumus.

1. atrisinājums. Pārbaudīsim, kādus atlikumus var dot skaitļa kvadrāts, dalot to ar 7. Aplūkosim gadījumus atkarībā no tā, kādu atlikumu, dalot ar 7, dod pats skaitlis.

Ja $n = 7q + 0$, tad $n^2 = 49q^2$; atlikums ir 0.
Ja $n = 7q + 1$, tad $n^2 = 49q^2 + 14q + 1$; atlikums ir 1.
Ja $n = 7q + 2$, tad $n^2 = 49q^2 + 28q + 4$; atlikums ir 4.
Ja $n = 7q + 3$, tad $n^2 = 49q^2 + 42q + 9$; atlikums ir 2 (jo $9 = 7 + 2$).
Ja $n = 7q + 4$, tad $n^2 = 49q^2 + 56q + 16$; atlikums ir 2 (jo $16 = 14 + 2$).
Ja $n = 7q + 5$, tad $n^2 = 49\, q^2 + 70q + 25$; atlikums ir 4 (jo $25 = 21 + 4$).
Ja $n = 7q + 6$, tad $n^2 = 49q^2 + 84q + 36$; atlikums ir 1 (jo $36 = 35 + 1$).

Redzam, ka kvadrāta atlikumam iespējamas tikai 4 dažādas vērtības. Saskaņā ar **D1** divi no apskatāmajiem kvadrātiem dod vienādus atlikumus, dalot ar 7; saskaņā ar TSD to starpība dalās ar 7. Uzdevums atrisināts.

2. atrisinājums. Ievērosim, ka $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Tātad mums pietiktu pierādīt, ka starp katriem 5 naturāliem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa vai starpība dalās ar 7. To var izdarīt līdzīgi kā 23. piemēra risinājumā, aplūkojot 4 šādus "būrus":

I - skaitļi ar atlikumu 0, dalot ar 7;
II - skaitļi ar atlikumu 1 vai 6, dalot ar 7;
III - skaitļi ar atlikumu 2 vai 5, dalot ar 7;
IV - skaitli ar atlikumu 3 vai 4, dalot ar 7.

Detaļas aizpildiet paši.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

81.° Pierādīt, ka no jebkuriem 11 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus skaitļus tā, lai to starpība dalītos ar 10.

82.° Dots, ka a, b, c, d, e - naturāli skaitļi. Pierādīt, ka 10 iekavu reizinājums
$(a - b)(a - c)(a - d)(a - e)(b - c)(b - d)(b - e)(c - d)(c - e)(d - e)$ dalās ar 288.

83.° Pierādīt, ka eksistē skaitlis, kura decimālais pieraksts sastāv tikai no vieniniekiem un kas dalās ar 1997.

84.° Pierādīt, ka eksistē skaitlis, kura decimālais pieraksts sastāv tikai no vieniniekiem un nullēm un kas dalās ar 1995.

85.° Vai eksistē tāda skaitļa 7 pakāpe ar naturālu kāpinātāju, kas beidzas ar cipariem 001 ?

86.° Rindā uzrakstīti 17 veseli skaitļi. Pierādīt, ka var izvēlēties dažus pēc kārtas uzrakstītus skaitļus (varbūt vienu pašu), kuru summa dalās ar 17.

87.° Pierādīt, ka starp katriem 17 naturāliem skaitļiem var atrast tieši 5 skaitļus, kuru summa dalās ar 5.

88.° Pierādīt, ka starp katriem 37 naturāliem skaitļiem var atrast tieši 7 skaitļus, kuru summa dalās ar 7.

89. Vispārināt 37. un 38. uzdevuma rezultātus.

90.° Pierādīt, ka starp jebkuriem 502 naturāliem skaitļiem var atrast 2 skaitļus, kuru summa vai starpība dalās ar 1000.

91.° Pierādīt, ka starp jebkuriem 3 naturāliem skaitļiem var atrast 2 skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 4.

92. Pierādīt, ka starp jebkuriem 4 naturāliem skaitļiem var atrast 2 skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 8.

93. Pierādīt, ka starp jebkuriem 4 naturāliem skaitļiem var atrast 2 skaitļus, kuru kubu starpība dalās ar 9.

94. Pierādīt: pārveidojot racionālu skaitli *m/n* bezgalīgā periodiskā decimāldaļā, perioda garums nav lielāks par n -1.

95. Pierādīt: ja skaitļu a un b lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad var atrast tādu naturālu skaitli n, ka $a \cdot n + 7$ dalās ar b.

96.* Par Fibonači skaitļu virkni sauc virkni, kuras pirmie divi locekļi ir 1 un 2 (tieši šādā kārtībā), bet katru nākošo iegūst, saskaitot abus iepriekšējos: 1; 2; 3; 5; 8; 13, 21; 34;... Pierādīt, ka šajā virknē ir skaitlis, kas dalās ar 101.

97. Skaitļi no 1 līdz 101 uzrakstīti rindā kaut kādā kārtībā. Pēc tam katram skaitlim tiek pieskaitīts viņa vietas numurs šajā rindā (pirmajam skaitlim tiek pieskaitīts 1, otrajam 2 utt.). Pierādīt, ka visu iegūto summu reizinājums ir pārskaitlis.

98.^{k} Augoša aritmētiska progresija sastāv no 12 naturāliem skaitļiem, tās diference nepārsniedz 1995. Pierādīt, ka ne visi šīs progresijas locekļi ir pirmskaitļi.

2.2. Dažādas klasiskās skaitļu teorijas teorēmas

Šajā punktā mēs pierādīsim teorēmas, kam elementārajā skaitļu teorijā ir ievērojama loma. Visos pierādījumos Dirihlē princips būs viens no "instrumentiem", pielietojot to atlikumiem, kas rodas, dalot ar kādu īpaši izvēlētu skaitli.

2. 2. 1. Fermā mazā teorēma (FMT)

Teorēma. Ja p ir pirmskaitlis, tad katram naturālam a skaitlis a^p - a dalās ar p.

Pierādījums: Ievērosim, ka $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Ja a dalās ar p, viss skaidrs. Aplūkosim gadījumu, kad a nedalās ar p; tad a un p lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Apskatām reizinājumus $a\cdot 1$, $a\cdot 2$, $a\cdot 3$, ... , $a\cdot(p - 1)$ un katru no tiem dalām ar p ar atlikumu. Apskatīsim vienādības

$$a\cdot 1 = p\cdot q_1 + r_1$$
$$a\cdot 2 = p\cdot q_2 + r_2$$
$$a\cdot 3 = p\cdot q_3 + r_3$$
$$\ldots$$
$$(*)\qquad a\cdot(p-1) = p\cdot q_{p-1} + r_{p-1}.$$

Mūsu mērķis ir pierādīt, ka $r_1; r_2; ...; r_{p-1}$ visi ir dažādi un neviens no tiem nav 0. Pieņemsim, ka tas jau pierādīts. Tad, tā kā p - 1 atlikumi $r_1; r_2; ...; r_{p-1}$ var pieņemt tikai p - 1 dažādas vērtības 1; 2;... ; p - 1, iegūstam, ka tieši viens no tiem ir 1, tieši viens ir 2,..., tieši viens ir p - 1 (šajā vietā lietojam Dirihlē principu!). Sareizinām visas vienādības (*). Kreisajā pusē iegūstam $a^{p-1}\cdot(p - 1)!$. Labajā pusē, atverot iekavas, iegūstam daudzu reizinājumu summu. Katrs reizinājums satur pa vienam reizinātājam no katras iekavas. Ja kaut no vienas iekavas ņemts reizinātājs $p\cdot q_i$ viss reizinājums dalās ar p. Visus šādus reizinājumus grupējam, iznesot aiz iekavām p; iegūstam vienu lielu saskaitāmo $p\cdot Q$. Ārpus šī saskaitāmā paliek tikai reizinājums $r_1\cdot r_2\cdot ...\cdot r_{p-1};$ saskaņā ar augstāk minēto tā vērtība ir (p - 1)! .

Iegūstam vienādību $a^{p-1}\cdot(p- 1)! = pQ+(p- 1)!$, no kurienes seko $(a^{p-1}- 1)\cdot(p- 1)! = pQ$, tātad $(a^{p-1}-1)\cdot(p- 1)!$ dalās ar p. Reizinātājs (p - 1)! ar p nedalās, jo p ir pirmskaitlis, tāpēc ar p nesaīsinās neviens no reizinātājiem 1; 2; 3; .....; p - 1. Tāpēc $(a^{p-1}- 1)$ dalās ar p, ko arī vajadzēja pierādīt.

Atliek pierādīt pasvītroto apgalvojumu.

Ja kāds no r_i, i = 1; 2; 3;.....;p- 1 būtu 0, tas nozīmētu, ka $a\cdot i$ dalās ar p. Bet a nedalās ar p, jo tikai šādus a apskatām, savukārt i nedalās ar p, jo i ir "pārāk mazs"; tiešām, $1 \leq i \leq p - 1$.

Ja kādi divi atlikumi būtu vienādi (piemēram, $r_i = r_j$), tad mēs iegūtu vienādības $a\cdot i - pq_i. = r_i = r_j = a\cdot j - pq_j.$, no kurienes seko $a(i -j)= p(q_i - q_j)$. Tātad a(i -j) dalās ar p; tātad vai nu a, vai (i -j) dalās ar p. To, ka tas nav iespējams, jāpierāda tāpat, kā iepriekš. FMT līdz ar to pierādīta.

2. 2. 2. Vilsona teorēma

Teorēma. Ja p > 1, tad p ir pirmskaitlis un tikai tad, ja (p - 1)! + 1dalās ar p.

Pierādījums. A. Pietiekamību pierāda šādi. Pieņemsim no pretējā, ka (p - 1)! + 1 dalās ar p, bet p nav pirmskaitlis. Tā kā $p \neq 1$, tad p sadalās reizinātājos $p = u\cdot v$, kur $1<u<p$, $1<v<p$.

Ievērojam, ka (p - 1)! + 1 = 1 ·2·... ·u·... ·(p - 1) + 1 dalās ar p, tātad arī ar u. Bet tas nav iespējams: pirmais saskaitāmais satur u kā reizinātāju (jo u < p, tātad u $\leq$ p - 1), bet 1 ar u nedalās (u > 1). Iegūtā pretruna parāda, ka mūsu pieņēmums ir nepareizs.

Nepieciešamība. Pieņemsim, ka p > 1 ir pirmskaitlis. Ja p = 2 vai p = 3, viegli pārbaudīt, ka (p - 1)! + 1 dalās ar p. Tālāk aplūkojam gadījumu, kad p $\geq$ *5;* tad p - 1 (un arī p - 3) ir pārskaitlis. Apskatām skaitļus 2; 3; ...; p - 2; to skaits ir p - 3. Pieņemsim, ka izdevies sadalīt pāros (a_1, b_1), (a_2, b_2),..., ($a_{(p-3)/2}$, $b_{(p-3)/2}$) tā, ka katra pāra reizinājums dod atlikumu 1, dalot ar p, t.i., $a_1 \cdot b_1 = pq_1 + 1$, $a_2 \cdot b_2 = pq_2 + 1$, ..., $a_{(p-3)/2} \cdot b_{(p-3)/2} = pq_{(p-3)/2} + 1$. Tad, sareizinot šīs vērtības, kreisajā pusē iegūstam (p - 2)!, bet labajā pusē - daudzus saskaitāmos, kas visi dalās ar p, un saskaitāmo 1. Varam šo faktu pierakstīt ar vienādību (p - 2)! = pQ +1.

Pareizinot šo vienādību ar (p - 1), iegūstam (p-1)!= pQ(p - 1) + p - 1 = p(Qp - Q + 1) -1 jeb (p - 1)! + 1 = p(Qp - Q + 1). No tā seko Vilsona teorēmas apgalvojums.

Atliek pierādīt, ka eksistē minētais sadalījums pāros.

Apzīmējam ar a patvaļīgu skaitli no skaitļiem 2; 3; ...; p - 2. Apskatām reizinājumus a·1; a·2;.....; a·(p - 2); a·(p - 1) un katru no tiem dalām ar p ar atlikumu:

$$a \cdot 1 = p \cdot q_1 + r_1$$
$$a \cdot 2 = p \cdot q_2 + r_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$a \cdot (p-1) = p \cdot q_{p-1} + r_{p-1}$$

Tāpat ka FMT pierādījumā pierādām, ka neviens no atlikumiem r_1 ; r_2 ;...; r_{p-1} nav 0 un tie visi ir dažādi, tātad tie pieņem visas vērtības 1; 2;...; p - 1; tātad viens no tiem ir 1.

(Šajā vietā pierādījumā izmantojām Dirihlē principu.)

Pierādīsim, ka atlikums 1 nerodas pirmajā rindiņā. Tiešām, ja būtu $a \cdot 1 = p \cdot q_1 + 1$, tad a, dalot ar p, dotu atlikumu 1; bet tā nevar būt, jo $2 \leq a \leq p-2$.

Pierādīsim, ka atlikums 1 nerodas pēdējā rindiņā. Tiešām, ja būtu $a \cdot (p-1) = p \cdot q_{p-1} + 1$, tad pārveidojot iegūtu a = a·p - p·q - 1 =(a - 1)p - p·q + (p - 1), tātad a, dalot ar p, dotu atlikumu p - 1; arī tas nav iespējams.

Pierādīsim, ka rindiņā, kurā rodas atlikums 1, a netiek reizināts pats ar sevi. Tiešām, ja būtu $a^2 = p \cdot q + 1$, tad $a^2 - 1 = p \cdot q$, (a - 1)(a + 1) = p·q un vai nu a - 1, vai a + 1 dalītos ar p. Saskaņā ar a izvēli tas nav iespējams.

No minētajiem faktiem seko, ka patvaļīgam skaitlim a no kopas {2; 3; ...; p-2} esam atraduši citu skaitli b no šīs pašas kopas ar īpašību: a·b, dalot ar p, dod atlikumu 1. Ņemam kādu c no šīs kopas, kas nav ne a, ne b. Tam līdzīgi varam atrast tādu d no šīs kopas, kas atšķiras no c un kam ir spēkā īpašība: cd, dalot ar p, dod atlikumu 1. Turklāt d atšķiras no a un b. Tiešām, ja, piemēram, d = b, tad vienlaikus pastāvēs vienādības $a \cdot b = pq_i + 1$ un $c \cdot b = pq_j + 1$, t.i., skaitlim b būs atradušies divi reizinātāji, kas kopā ar b izveido atlikumu 1, bet mēs redzējām, ka katram skaitlim tāds reizinātājs ir tikai viens.

Tātad a varam apvienot pārī ar b, c ar d utt. Vajadzīgais apvienojums pāros izdarīts, Vilsona teorēma pierādīta.

2. 2. 3. Ķīniešu teorēma

Teorēma. Ja skaitļi $a_1, a_2, ..., a_n$ ir lielāki par 1, ja katriem diviem no tiem lielākais kopējais dalītājs ir 1 un pie tam 0 $\leq$ $b_1 < a_1$, 0 $\leq$ $b_2 < a_2$,..., 0 $\leq$ $b_n < a_n$, tad eksistē tāds naturāls skaitlis x, ka vienlaicīgi x dod atlikumu b_i, dalot ar a_i, kur i = 1; 2; 3;...; n.

Pierādījums. Lietosim matemātisko indukciju. Ja n = 1, varam ņemt x = b_1 . Pieņemsim, ka teorēma jau pierādīta k skaitļiem, un apskatām k + 1 pa pāriem savstarpējus pirmskaitļus $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi eksistē tāds x, ka vienlaicīgi

$x = a_1 \cdot q_1 + b_1$
$x = a_2 \cdot q_2 + b_2$
......
$x = a_k \cdot q_k + b_k$

Skaidrs, ka tad vajadzīgās īpašības apmierina arī jebkurš no skaitļiem $x+m \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$, m=0; 1; 2;.... Ja mēs pierādīsim, ka šajā aritmētiskajā progresijā atrodas tāds skaitlis, kas dod atlikumu b_{k+1}, dalot ar a_{k+1}, tad teorēma būs pierādīta.

Apzīmēsim $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k = A$, bet a_{k+1} un b_{k+1} vietā īsuma labad rakstīsim attiecīgi a un b. Apskatīsim skaitļus $x + m \cdot A$, m = 1; 2; ...; a un dalīsim katru ar a ar atlikumu. Iegūstam vienādības $x + 1 \cdot A = q_1 \cdot a + r_1$
$x + 2 \cdot A = q_2 \cdot a + r_2$
....
$x + a \cdot A = q_a \cdot a + r_a$

Ievērojot, ka A un a lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tāpat kā FMT pierādījumā pamatojam, ka visi atlikumi r_1; r_2;...; r_a ir dažādi. Tā kā to skaits ir a un var pieņemt tieši a dažādas vērtības 0; 1; 2; ...; a - 1, tad viena no tām ir b. Atbilstošā vērtība $x + m_i \cdot A$ arī ir mūsu meklējamais skaitlis. Induktīvā pāreja izdarīta, teorēma pierādīta.

2. 2. 4. Lagranža lemma

Teorēma. Ja p ir pirmskaitlis, tad eksistē tādi veseli x un y, ka $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar p.

Pierādījums. Ja p = 2, varam ņemt x = 1, y = 2. Ja p > 2, tad p ir nepāra skaitlis; apzīmējam p = 2k + 1. Apskatām skaitļus 0^2; 1^2 ...; k^2 to skaits ir k + 1. Pierādīsim, ka tie visi dod dažādus atlikumus, dalot ar p. Tiešām, ja atrastos tādi i un j, ka i^2 un j^2 dotu vienādus atlikumus, dalot ar p, tad $i^2 - j^2$ dalītos ar p; bet $i^2 - j^2 = (i - j)(i + j)$, tātad vai nu (i -j) vai (i + j) jādalās ar p. Tomēr gan i -j, gan i+j pēc moduļa nepārsniedz 2k - 1, tātad ir mazāki par p un ar p dalīties nevar.

Līdzīgi pierāda, ka visi skaitļi -0^2-1; -1^2-1 ...; $-k^2-1$ (arī to skaits ir k + 1) dod dažādus atlikumus, dalot tos ar p.

Apskatām visus mūsu minētos skaitļus kopā; to skaits ir 2k + 2, tātad vairāk nekā p. Saskaņā ar Dirihlē principu divi no tiem dod vienādus atlikumus, dalot ar p. Atceroties iepriekš pierādīto, šie divi skaitļi ir no dažādām grupām; tātad eksistē tādi i un j, ka i^2 un $(-j^2- 1)$, dalot ar p, dod vienādus atlikumus. Tad to starpība $i^2 - (-j^2 - 1) = i^2 + j^2 + 1$ dalās ar p bez atlikuma. Teorēma pierādīta.

2. 2. 5. Tues lemma

Teorēma. Pieņemsim, ka n - naturāls skaitlis, n > 1 un a - naturāls skaitlis, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar n. Tad eksistē tādi veseli skaitli x un y, ka ax - y dalās ar n, $1 \le |x| \le \sqrt{n}$ un $1 \le |y| \le \sqrt{n}$.

Pierādījums. Apzīmēsim $[\sqrt{n}] = k$. Apskatām visas izteiksmes $a \cdot i - j$, kur i un j neatkarīgi viens no otra pieņem vērtības 0; 1;.....;k; tādu izteiksmju $a \cdot i-j$ pavisam ir $(k+1)^2$. Tā kā $k+1>\sqrt{n}$, tad šo izteiksmju ir vairāk kā n. Līdzīgi kā iepriekšējos pierādījumos ar Dirihlē principa palīdzību konstatējam: eksistē divas apskatāmās izteiksmes, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar n. Apzīmēsim tās ar $a \cdot i_1 - j_1$ un $a \cdot i_2 - j_2$. To starpība dalās ar n; šī starpība ir $a \cdot (i_1 - i_2) - (j_1 - j_2)$. Skaidrs, ka $|i_1 - i_2| \le k \le \sqrt{n}$ un $|j_1 - j_2| \le k \le \sqrt{n}$ Atliek tikai pierādīt, ka $i_1 \ne i_2$ un $j_1 \ne j_2$.

Ja būtu $j_1=j_2$, tad $a\cdot(i_1-i_2)$ dalītos ar n. Bet a un n ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc (i_1-i_2) dalās ar n. Tā nevar būt, jo $|i_1-i_2| \le k \le \sqrt{n}$, un, lai (i_1-i_2) dalītos ar n, jābūt $i_1=i_2$. Tomēr tad izteiksmes $a\cdot i_1-j_1$ un $a\cdot i_2-j_2$ būtu viena un tā pati izteiksme, jo $i_1=i_2$ un $j_1=j_2$, bet mēs pieņēmām, ka šīs izteiksmes ir dažādas. Tā ir pretruna. Līdz ar to pierādīts, ka $j_1-j_2\neq0$. Līdzīgi pierāda, ka $i_1-i_2\neq0$. Tues lemma pierādīta.

2. 3. Uzdevumi, kas saistīti ar skaitļa sadalīšanu pirmskaitļu reizinājumā

Atgādināsim galvenos faktus, kas izmantojami, risinot šī punkta uzdevumus.

1. Ja a un b ir veseli skaitļi, no kuriem vismaz viens nav 0, tad par a un b lielāko kopīgo dalītāju sauc lielāko naturālo skaitli, ar kuru dalās gan a, gan b. To apzīmē ar LKD(a, b).

Piemēram: LKD(8, 6) = 2; LKD(8, 11)=1; LKD(-4, -2) = 2; LKD(6, 0) = 6.

2. Katru naturālu skaitli n > 1 var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Turklāt katram skaitlim dažādi sadalījumi var atšķirties tikai ar reizinātāju kārtību, bet ne ar pašiem reizinātājiem vai to atkārtošanos skaitu. Šo faktu sauc par aritmētikas pamatteorēmu.

Piemēram: $8 = 2\cdot2\cdot2 = 2^3$; $42 = 2\cdot3\cdot7$; $100 = 2^2\cdot5^2$ utt.

(Atcerieties: vieninieks pēc definīcijas nav pirmskaitlis!)

Pirmskaitļus, kas ietilpst n sadalījumā reizinātājos, sauc par n pirmreizinātājiem.

Piemēram: skaitlim 100 ir pirmreizinātājs 2 divos eksemplāros un pirmreizinātājs 5 - arī divos eksemplāros.

3. Divus skaitļus sauc par savstarpējiem pirmskaitļiem, ja to lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Sadalot savstarpējus pirmskaitļus reizinātājos, neviens pirmskaitlis neparādās abos sadalījumos. Arī otrādi: ja divu skaitļu sadalījumi pirmreizinātājos nesatur nevienu kopīgu pirmskaitli, tad to lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Piemēram: tā kā $88 = 2^3\cdot11$ un $121 = 11^2$ (abi satur pirmreizinātāju 11, tātad dalās ar 11), tad LKD(88, 121) $\neq 1$; tātad 88 un 121 nav savstarpēji pirmskaitļi.

Tā kā $216 = 2^3\cdot3^3$ un $77 = 7\cdot11$ nesatur kopīgus pirmreizinātājus, tad LKD(216, 77) = 1.

Tagad parādīsim, kā naturāla skaitļa pilnīgu vai daļēju sadalījumu pirmskaitļu reizinājumā var izmantot, lietojot Dirihlē principu.

54. piemērs. *No skaitļiem 1; 2; 3; ... 200 brīvi izraudzīts 101 skaitlis. Pierādīt, ka starp izraudzītajiem skaitļiem var atrast divus tādus skaitļus, no kuriem viens skaitlis dalās ar otru.*

Atrisinājums. Katru no izraudzītajiem skaitļiem x uzrakstīsim kā $x = n\cdot2^k$, kur n - nepāra skaitlis (piemēram, $30= 15\cdot2^1$, $31 =31\cdot2^0$, $32= 1\cdot2^5$, $199= 199\cdot2^0$). Acīmredzot visi nepāra reizinātāji n ir mazāki nekā 200. Starp skaitļiem no 1 līdz 200 ir tikai 100 dažādi nepāra skaitļi. Tāpēc starp 101 izraudzītiem skaitļiem saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ varēs atrast divus tādus skaitļus, kuriem nepāra reizinātāji ir vienādi. Pieņemsim, ka tie ir skaitļi $A = 2^n\cdot y$ un $B = 2^m\cdot y$. Tā kā $A\neq B$, tad $n\neq m$. Pieņemsim, ka $n > m$, tad $A/B= 2^{n-m}$. Tā kā $n > m$, tad $n - m$ ir naturāls skaitlis un 2^{n-m} arī ir naturāls skaitlis. Tātad A dalās ar B. Uzdevums atrisināts.

Komentārs. Ievērosim, ka risinājumā mums nemaz nevajadzēja aplūkot skaitļu pilnos sadalījumus pirmreizinātājos - pietika ar viena paša pirmreizinātāja, proti, divnieka, pakāpju "izdalīšanu" starp pārējiem pirmreizinātājiem.

55.* piemērs. *No skaitļiem 1; 2; 3;... ; 199; 200 brīvi izraudzīts 101 skaitlis. Pierādīt, ka vismaz divi no izraudzītajiem skaitļiem ir savstarpēji pirmskaitļi.*

Atrisinājums. Izveidojam 100 "būrus":

1. "būris" - skaitļi 1 un 2;
2. "būris" - skaitļi 3 un 4;

....

100. "būris" - skaitļi 199 un 200.

Tā kā 100 "būros" izvietots 101 skaitlis, tad divi no tiem nonākuši vienā "būrī". Šie skaitļi - apzīmēsim tos ar a un b - atšķiras viens no otra par 1. Mēs apgalvojam, ka LKD(a, b) = 1. Tiešām, ja LKD(a, b) = x, tad gan a, gan b dalās ar x. Tad ar x dalās arī a un b starpība; bet šī starpība ir 1. Vienīgais naturālais skaitlis, ar ko dalās 1, ir 1. Tāpēc x = 1. Vajadzīgais pierādīts.

56.[k] piemērs. *Doti 5 naturāli skaitļi, kas lielāki par 1 un nepārsniedz 120. Zināms, ka neviens no tiem nav pirmskaitlis. Pierādīt, ka starp šiem skaitļiem var atrast tādus divus skaitļus, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks par 1.*

Atrisinājums. Ja $1 < n \leq 120$ un n nav pirmskaitlis, tad var izsacīt $n = a \cdot b$, kur $a>1$, $b>1$, a un b - naturāli skaitļi. Mēs apgalvojam, ka vai nu $a < 11$, vai arī $b < 11$. (Tiešām, ja no pretējā pieņemtu, ka $a \geq 11$ un $b \geq 11$, tad iegūtu $a \cdot b \geq 121$, kas ir pretrunā ar doto $a \cdot b = n \leq 120$.) Varam pieņemt, ka $a < 11$. Tā kā $a > 1$, tad a var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā (varbūt tādā, kas sastāv no viena vienīga reizinātāja, ja a pats ir pirmskaitlis). Šie a pirmreizinātāji arī ir mazāki par 11. Iegūstam, ka a (un līdz ar to arī n) dalās ar kādu pirmskaitli, kas mazāks par 11. Ievērosim, ka pirmskaitļi, kas mazāki par 11, ir 2; 3; 5; 7.

Izveidosim 4 "būrus", uz kuriem uzrakstīsim attiecīgi "2", "3", "5" un "7". Katru no uzdevumā minētajiem 5 skaitļiem ievietosim tajā "būrī", uz kura uzrakstīts šī skaitļa mazākais pirmreizinātājs. (Piemēram, 60 ievietojam "būrī" ar uzrakstu "2", jo $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; savukārt 49 ievietojam "būrī" ar uzrakstu "7", jo $49 = 7 \cdot 7$.) Tā kā skaitļu ir vairāk nekā "būru", tad atradīsies divi skaitļi, kas nonāks vienā "būrī". Šo skaitļu LKD ir lielāks nekā 1 (tie abi dalās ar pirmskaitli, kas uzrakstīts uz viņu kopīgā "būra").

57.[k] piemērs. *Doti 4 naturāli skaitļi. Neviens no tiem nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks par 4. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem var atrast dažus skaitļus (varbūt vienu pašu), kuru reizinājums ir kāda vesela skaitļa kvadrāts. (Ja izvēlamies tikai vienu skaitli, tad par reizinājumu, kas sastāv no viena reizinātāja, uzskatām pašu skaitli.)*

Atrisinājums. Ja kāds no dotajiem skaitļiem ir 1, tad tas pats ir kvadrāts; varam izvēlēties to. Ja visi četri dotie skaitļi ir lielāki par 1, tad katru no tiem var pierakstīt kā $2^a \cdot 3^b$, kur a, b - veseli skaitļi, $a \geq 0$ un $b \geq 0$; tiešām, skaitļa sadalījumā pirmskaitļu reizinājumā var parādīties tikai pirmskaitļi, kas nepārsniedz 4, t.i., nekas cits kā 2 un 3 (varbūt arī tikai viens no šiem pirmskaitļiem). Katrs skaitlis pieder vienai no 4 grupām:

A	a - pārskaitlis	b - pārskaitlis;
B	a - pārskaitlis	b - nepārskaitlis;
C	a - nepārskaitlis	b - pārskaitlis;
D	a - nepārskaitlis	b - nepārskaitlis.

Tālāk risinājumā nošķiram divus gadījumus.

1. Nav divu skaitļu, kas pieder vienai no minētajām grupām.

Tad saskaņā ar **D3** katrai no šīm grupām (tātad arī pirmajai) pieder tieši pa vienam skaitlim. Aplūkojam skaitli, kas pieder pirmajai grupai; tas ir pierakstāms kā $2^{2c} \cdot 2^{2d}$, kur a = 2c, b = 2d, c un d - naturāli skaitļi vai 0. Skaidrs, ka šo skaitli var pierakstīt arī ka $(2^c \cdot 3^d)^2$ t.i., tas ir naturāla skaitļa $2^c \cdot 3^d$ kvadrāts.

2. Divi skaitļi (apzīmēsim tos ar $2^m \cdot 2^n$, un $2^k \cdot 2^t$) pieder vienai un tai pašai grupai. Saskaņā ar grupu veidošanu skaitļiem m un k ir vienādas paritātes (tie vai nu abi ir pārskaitļi, vai abi - nepāra skaitļi). Tāpat arī n un t paritātes ir vienādas. Tāpēc m + k un n + t abi ir pārskaitļi; varam apzīmēt m + k = 2u, n + t = 2v, kur u un v - naturāli skaitļi vai 0.

Tad atliek ievērot, ka reizinājums $(2^m \cdot 3^n) \cdot (2^k \cdot 3^t) = 2^{m+k} \cdot 3^{n+t} = 2^{2u} \cdot 3^{2v} = (2^u \cdot 3^v)^2$ ir naturāla skaitļa $2^u \cdot 3^v$ kvadrāts. Uzdevums atrisināts.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

99.° No skaitļiem 1, 2; 3; ... ; 2n -1; 2n brīvi izraugāmies n + 1 skaitli. Pierādīt, ka viens no izraudzītajiem skaitļiem dalās ar kādu citu izraudzīto skaitli.

100. No nepāra skaitļiem 1; 3; 5; ...; 99; 101 izvēlamies 35 skaitļus. Pierādīt, ka viens no izvēlētajiem skaitļiem dalās ar kādu citu skaitli.

101.° No skaitļiem 1; 2; 3;...; 2n -1; 2n izraugāmies n +1 skaitli. Pierādīt, ka starp izraudzītajiem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

102.° Doti n naturāli skaitļi, kas visi ir lielāki par 1 un mazāki par $(2n-1)^2$. Ir zināms, ka katriem diviem no tiem LKD ir vieninieks. Pierādīt, ka vismaz viens no šiem skaitļiem ir pirmskaitlis.

103. Atrisināt 57. piemērā minēto uzdevumu, ja doti nevis 4, bet tikai 3 skaitļi ar minētajām īpašībām.

104. Doti virknē uzrakstīti 16 naturāli skaitļi, kas visi ir lielāki par 1. Tiem visiem kopā ir tikai 4 dažādi pirmreizinātāji. Pierādīt, ka var izraudzīties dažus no tiem (varbūt vienu pašu), kuru reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts un kas dotajā virknē uzrakstīti pēc kārtas.

105.ᵏ Doti 1995 naturāli skaitļi, kas visi ir lielāki par 1. Neviens no tiem nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks par 28. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem var izvēlēties dažus skaitļus, kuru reizinājums ir kāda naturāla skaitļa ceturtā pakāpe.

106.* Apskatām $2^n + 1$ naturālus skaitļus, kam visiem kopā ir tikai n dažādi pirmreizinātāji. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem var izvēlēties tādus divus skaitļus, kuru reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts.

107.* Apskatām n + 1 naturālu skaitli, kam visā kopā ir tikai n dažādi pirmreizinātāji. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus (varbūt vienu pašu) skaitļus tā, lai izvēlēto skaitļu reizinājums būtu pilns kvadrāts.

108.ᵏ Apskatām $2\cdot3^n + 1$ naturālus skaitļus, kam visiem kopā ir tikai n dažādi pirmreizinātāji. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties četrus skaitļus, kuru reizinājums ir kāda naturāla skaitļa ceturtā pakāpe.

109.* Pieņemsim, ka M ir naturālu skaitļu bezgalīga kopa. Apskatīsim divas bezgalīgas naturālu skaitļu virknes x_1 , x_2, ... un y_1, y_2, ..., kuru elementi visi ir no M. Pieņemsim, ka k ir fiksēts naturāls skaitlis. Pierādīt, ka eksistē tādi i un j, i < j, ka abi reizinājumi $x_i\cdot x_{i+1}\cdot x_{i+2},\cdot\ldots\cdot x_j$ un $y_i\cdot y_{i+1}\cdot\ldots\cdot y_j$ ir naturālu skaitļu k-tās pakāpes.

110.ᵏ Vispārināt iepriekšējā uzdevuma rezultātu lielākam virkņu skaitam.

111.ᵏ Vispārināt 108. uzdevuma rezultātu, aizstājot ceturtās pakāpes ar citām pakāpēm un četru skaitļu kopu - ar citu elementu skaita kopu.

2. 4. Uzdevumi, kas saistīti ar skaitļu racionāliem tuvinājumiem

Šajā punktā aplūkosim divu veidu uzdevumus.

2.4.1. Uzdevumi, kas saistīti ar Dirihlē teorēmu

Katra skaitļa decimālais pieraksts ir ciparu virkne. Parādīsim, kā ar Dirihlē principa palīdzību var iegūt dažādu informāciju par šīm virknēm.

58. piemērs. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka 2^n *decimālais pieraksts sākas ar 1995.....*

Atrisinājums. Mums jāpierāda, ka eksistē tāds n, ka

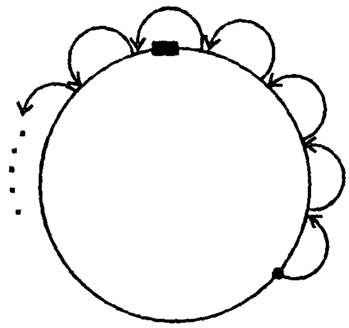
$$1995\underbrace{00\ldots0}_{k-4} \le 2^n \le 1995\underbrace{99\ldots9}_{k-4}$$

jeb, pierakstot to ekvivalentā formā, $1995 \cdot 10^{k-4} \leq 2^n \leq 1996 \cdot 10^{k-4}$; tad 2^n ciparu skaits ir k un pirmie četri cipari ir 1995. Logaritmējot šo nevienādību, iegūstam

$$k - 4 + \lg 1995 \leq n \cdot \lg 2 \leq k - 4 + \lg 1996.$$

Aplūkosim skaitļu asi, uz kuras atzīmēti intervāli (lg1995; lg1996), (lg1995 + 1; lg1996+l), (lg1995 + 2; lg1996 + 2),... . Iedomāsimies, ka pa šo asi pozitīvā virzienā lec sienāzis un lēciena garums ir lg2. Mums jāpierāda, ka sienāzis noteikti ielēks kādā no intervāliem.

"Uztīsim" skaitļu asi uz riņķa līnijas, kuras garums ir 1. Skaidrs, ka visi minētie intervāli šādas uztīšanas rezultātā novietosies vienā vietā (sk. 38. zīm.). Mums jāpierāda, ka sienāzis, kura lēciena garums ir lg2, lecot pa šādu riņķa līniju, noteikti ielēks atzīmētajā intervālā; tad uzdevums būs atrisināts.



38. zīm.

Mūsu tālākais risinājuma plāns ir šāds:

1) pierādīt, ka visas sienāža atstātās pēdas ir dažādas,

2) pierādīt, ka atradīsies divas pēdas, kas ir viena otrai tuvāk nekā atzīmētā intervāla garums,

3) pierādīt, ka kāda pēda ievietosies atzīmētajā intervālā.

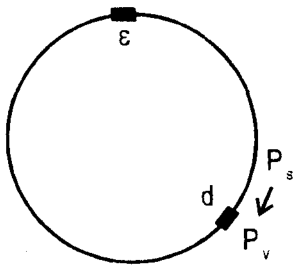
Realizēsim šo plānu.

1. Ja divas sienāža pēdas sakrīt vienā punktā (pieņemsim, n-tā un m-tā pēda, n < m), tad starp šo pēdu atstāšanas momentiem sienāzis izdarījis m - n lēcienus un kopā veicis attālumu k (ar k apzīmēts reižu skaits, cik sienāzis šai laika posmā apriņķojis riņķa līniju). Tad $(m-n) \cdot \lg 2 = k$ un $\lg 2 = \frac{k}{m-n}$ - racionāls skaitlis. Tomēr tā ir pretruna, jo lg2 ir iracionāls skaitlis. Patiešām, pieņemot, ka $\lg 2 = \frac{a}{b}$, kur a, b - naturāli skaitļi, iegūstam $10^{a/b} = 2$ jeb $10^a = 2^b$, kas nav iespējams - 10^a beidzas ar ciparu 0, bet 2^b - nē. Tātad lg2 ir iracionāls skaitlis un mūsu pieņēmums ir nepareizs. Tātad nekādas divas sienāža atstātās pēdas uz riņķa līnijas nesakrīt.

2. Pieņemsim, ka atzīmētā intervāla garums šajā gadījumā $\varepsilon = \lg 1996 - \lg 1995$. Eksistē tāds n, ka $n \cdot \varepsilon > 1$. Aplūkosim brīdi, kad sienāzis atstājis uz riņķa līnijas n pēdas; atceramies, ka tās visas ir dažādas. Apzīmēsim tās uz riņķa līnijas atrašanās secībā ar $p_1, p_2, ..., p_n$. Loku $p_1p_2, p_2p_3, ..., p_{n-1}p_n, p_np_1$ garumu summa ir 1; ja tie visi būtu ne mazāki par ε, tad garumu summa būtu vismaz n, t. i., lielāka nekā 1. Tā ir pretruna.

Tātad eksistē divas pēdas (pieņemsim, ka sienāzis tās atstājis ar lēcieniem s un v, s < v), starp kurām loka garums ir mazāks par ε.

3. Starp s un v lēcienā atstātajām pēdām sienāzis izdarījis v - s lēcienus, pavirzoties par attālumu d < ε (sk. 39. zīm.).



39. zīm.

Skaidrs, ka pēc nākošajiem v - s lēcieniem sienāzis atkal būs pavirzījies pa riņķa līniju tai pašā virzienā par attālumu d < ε, salīdzinot ar pozīciju P_v, utt. Aplūkojam šīs sienāža pozīcijas. Tās pārbīdās vienā virzienā pa riņķa līniju par attālumu, kas mazāks par ε, tātad kāda no tām būs atzīmētā intervāla iekšpusē, kas arī bija jāpierāda.

Ievērosim, ka uzdevuma risinājuma gaitā mēs patiesībā pierādījām Dirihlē teorēmu.

Dirihlē teorēma. Ja riņķa līnijas garums ir a un uz tās vienā virzienā atliek punktu virkni P_0 , P_1 , P_2 ,... tā, ka loku P_0P_1, P_1P_2,..., P_n P_{n+1},... garumi visi ir vienādi ar b, pie tam a/b - iracionāls skaitlis, tad jebkurā mazā riņķa līnijas lokā nonāk bezgalīgi daudz atlikto punktu.

Ieteicams formāli pārveidot uzdevuma risinājumu tā, lai iegūtu šīs teorēmas pierādījumu. Dirihlē teorēmu var izmantot arī turpmāk minēto uzdevumu risinājumos.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

112. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka 3^n sākas ar cipariem 1111... .

113.[k] Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka vienlaicīgi 2^n sākas ar cipariem 1995... , bet 3^n sākas ar cipariem 5991... .

114. Pierādīt, ka funkcija $y = \sin x + \sin\sqrt{3}\,x$ nav periodiska.

115. Atrast visus tādus reālos skaitļus x no intervāla [0; 2π], ka visas nevienādības cosx > 0, cos2x > 0, cos3x > 0, ... , cosnx > 0, ... ir pareizas vienlaicīgi.

116*. Dots, ka a, b, c, - reāli skaitļi un vienādība [an] + [bn] = [cn] ir spēkā katram naturālam n. Pierādīt, ka vai nu a, vai b ir vesels skaitlis.

2.4.2. Iracionālu skaitļu ekonomiski racionāli tuvinājumi

Iracionālu skaitļu decimālais pieraksts ir bezgalīgas neperiodiskas ciparu virknes. "Apgriežot" šīs virknes kaut kādā vietā, iegūstam iracionālo skaitļu racionālus tuvinājumus ar kaut kādu kļūdu.

Piemēram, $\sqrt{2}$ = 1,4142.... Tuvinājumi skaitlim $\sqrt{2}$ ir, piemēram:

1 ar kļūdu 0,41...;
1,4 ar kļūdu 0,01...;
1,41 ar kļūdu 0,004...;
utt.

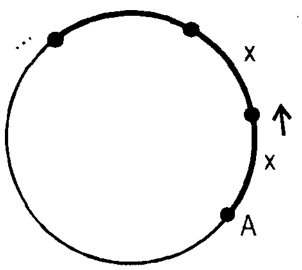
Skaidrs, ka iespējams iegūt jebkuru skaitu precīzu tuvinājumu. Tomēr par šo precizitāti ir "jāmaksā", apskatot skaitļus ar aizvien garākām ciparu virknēm aiz komata. Varbūt kā racionālos tuvinājumus izdevīgi izmantot nevis galīgas decimāldaļas, bet gan skaitļus p/q, kur q nav desmitu pakāpes? Cik "vēlamus" tuvinājumus šādā ceļā var sasniegt? Grūtības darbā ar racionāliem skaitļiem parasti rada lieli saucēji. Mēs centīsimies salīdzināt "zaudējumus", ko rada tādu tuvinājumu izmantošana, kam ir lieli saucēji, ar "ieguvumiem", kas izpaužas kā augsta tuvinājumu precizitāte.

<u>Teorēma par kvadrātisko aproksimāciju</u>. Katram pozitīvam reālam skaitlim x var atrast bezgalīgi daudz racionālus tuvinājumus p/q ar dažādiem saucējiem, no kuriem katram ir spēkā nevienādība (*) $|x - p/q| \le 1/q^2$.

Tātad tuvinājumu precizitāte var augt proporcionāli tuvinājuma saucēja kvadrātam. Pierādīsim šo teorēmu pakāpeniski.

<u>Lemma.</u> Pieņemsim, ka x - pozitīvs reāls skaitlis, bet n - naturāls skaitlis. Tad eksistē tādi veseli skaitli p un q, ka $1 \le q \le n$ **un** $|x - p/q| \le 1/nq$.

<u>Pierādījums.</u> Atliksim uz riņķa līnijas, kuras garums ir l, no punkta A vienu aiz otra n lokus, kuru garums ir x (skat. 40. zīm.)



40. zīm.

Skaidrs, ka atradīsies divi tādi atliktie punkti, starp kuriem loka garums nepārsniedz 1/n.

Pieņemsim, ka šie punkti atbilst u un v atliktajiem lokiem, u > v. Tad loku garumi no A līdz šiem punktiem atlikšanas virzienā ir ux-[ux] un vx-[vx] un augstākminēto faktu var pierakstīt kā $|(ux-[ux])-(vx-[vx])| \le 1/n$.

Apzīmējam u - v = q un [ux] - [vx] = p. Skaidrs, ka $1 \le q \le n$. Tad $|qx - p| \le 1/n$. Izdalot šīs nevienādības abas puses ar q, iegūstam $|x - p/q| \le 1/qn$, kas arī bija jāpierāda.

Tagad varam pierādīt pašu teorēmu. Ja x = a/b - racionāls skaitlis, varam ņemt p = k·a, q = k·b (k = 1; 2; ...). Apskatām gadījumu, kad x - iracionāls skaitlis. Pieņemsim no pretējā, ka tikai galīgam skaitam q vērtību (q_1; q_2;...;q_m) var atrast tādus p, kas apmierina nevienādību (*). Apskatām atbilstošas nevienādības, kur (*) kreisajā pusē esošās izteiksmes ir vismazākās iespējamās atbilstošajam q_i. Tad katram veselam p pastāv sakarības

$$|x - p_1/q_1| \le |x - p/q_1|$$

$$|x - p_2/q_2| \le |x - p/q_2|$$

$$\dots$$

$$|x - p_m/q_m| \le |x - p/q_m|$$

Atrodam tādu n, ka skaitlis 1/n ir mazāks par visām kreisajā pusē esošajām izteiksmēm. Tad sakarā ar lemmu var atrast tādus p un q, $1 \le q \le n$, ka

$$|x - p/q| \le 1/qn \le 1/q^2$$

Saskaņā ar mūsu pieņēmumu q ir viens no minētajiem skaitļiem q_1, q_2,..., q_m. Bet tad saskaņā ar n izvēli $1/n < |x - p/q| \le 1/qn$, no kurienes $1/n < 1/qn$ un $q < 1$.

Tā kā q ir naturāls skaitlis, iegūta pretruna. Teorēma par kvadrātisko aproksimāciju pierādīta. Šī teorēma pierāda, ka iracionālus skaitļus var tuvināti izsacīt ar racionāliem skaitļiem pietiekoši labi: šādu tuvinājumu precizitāte aug kā lietoto daļu saucēju kvadrāti, t.i., ievērojami ātrāk nekā saucēji paši.

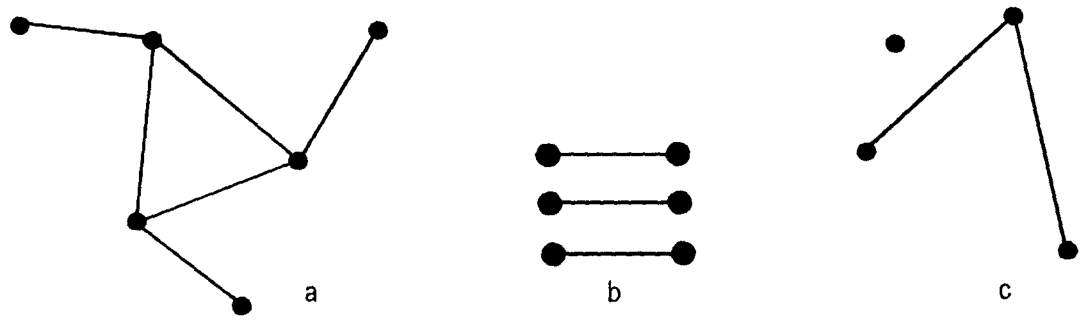
Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

117. Pierādīt, ka lemmas formulējuma saucējā lielumu n var aizstāt ar (n + 1).
118. Pieņemsim, ka $x_1, \dots, x_n$ ir kaut kādi reāli skaitļi, m - naturāls skaitlis. Pierādīt, ka var atrast tādus veselus $y_1, y_2, \dots, y_n$, un s, kas visi vienlaicīgi nav 0, ka $|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n - s| \le 1/(m+1)^n$.
119. Pierādīt, ka teorēma par kvadrātisko aproksimāciju paliek spēkā, ja nevienādības (*) labajā pusē lielumu $1/q^2$ aizstāj ar $1/\sqrt{5}q^2$.
120. Vai teorēma par kvadrātisko aproksimāciju paliek spēkā, ja nevienādības (*) labajā pusē lielumu $1/q^2$ aizstāj ar $1/cq^2$, kur $c > \sqrt{5}$?
121.[k] Vai teorēma par kvadrātisko aproksimāciju paliek spēkā, ja nevienādības (*) lielumu $1/q^2$ aizstāj ar $1/q^{2+\varepsilon}$, kur ε - kaut kāda patvaļīga pozitīva konstante?

3. nodaļa. Dirihlē princips uzdevumos, kas saistīti ar grafa jēdzienu

3. 1. Pamatjēdzieni

Par grafu sauc attēlu, ko iegūst, atzīmējot dažus (varbūt vienu pašu) punktus un dažus no tiem savienojot savā starpā ar līnijām (var arī gadīties, ka nav novilkta neviena līnija). Daži grafu piemēri parādīti 41. zīmējumā.



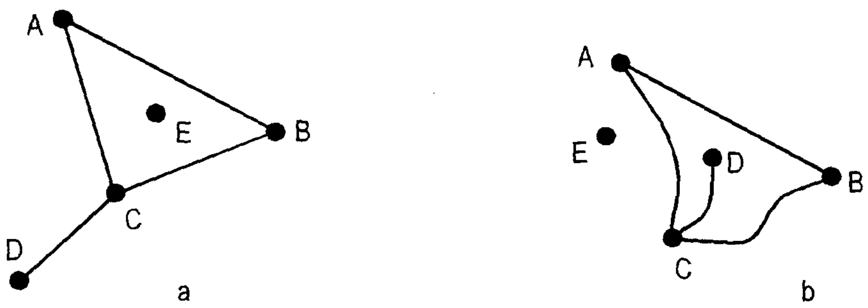
41. zīm.

Punktus sauc par virsotnēm, bet līnijas, kas tos savieno, - par šķautnēm.

Ja starp divām virsotnēm ir novilkta šķautne, tad tāda ir tikai viena.

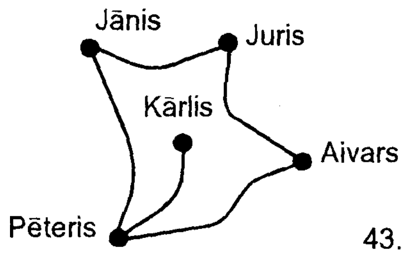
Ja speciāli netiks norādīts pretējais, nevilksim šķautnes, kuru abi gali atrodas vienā un tai pašā virsotnē.

Apskatot grafu, nav svarīgi, kā novietotas virsotnes un kā novilktas šķautnes starp tām - vai tās ir līkas vai taisnas. Svarīgi tikai, kuras virsotnes savienotas ar šķautni un kuras - nē. Piemēram, abus 42. zīmējumā redzamos grafus var uzskatīt par vienu un to pašu grafu.



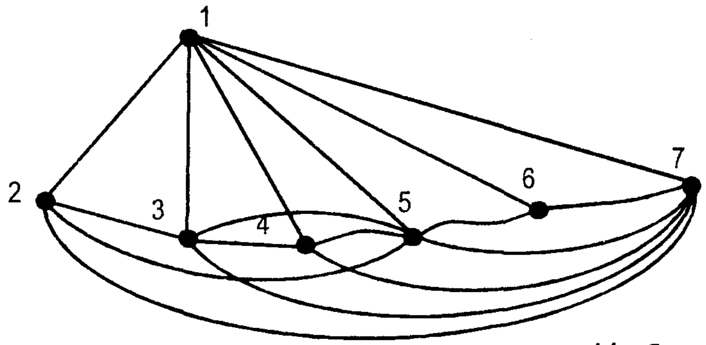
42. zīm.

Grafus lieto, lai attēlotu attiecības, kas var pastāvēt vai nepastāvēt starp kaut kādu objektu pāriem. Piemēram, ja ar punktiem attēlo cilvēkus, tad varam vienoties: šķautni starp diviem punktiem novelkam, ja attiecīgie cilvēki savā starpā draudzējas, un nenovelkam, ja nedraudzējas. Ja ir spēkā tāda noruna, tad, piemēram, 43. zīmējumā grafs parāda, ka Pēteris draudzējas ar Jāni, Kārli un Aivaru, bet nedraudzējas ar Juri.



43. zīm.

Gandrīz katrs ir redzējis ceļu shēmas autoostās, kurās grafa virsotnes attēlo pilsētas un ciematus, bet šķautnes - ceļus, kas tos savieno. 44. zīmējumā redzamais grafs attēlo, kuriem skaitļiem no 1 līdz 7 lielākais kopīgais dalītājs ir 1 (tie savienoti ar šķautni) un kuriem - nē.



44. zīm.

Šādus piemērus katrs no jums varētu minēt vēl ilgi.

44. zīmējumā redzam, ka nav svarīgi tas, ka divas šķautnes zīmējumā krustojas (piemēram, šķautnes 2–5 un 3–7). Atšķirībā no virsotnēm šādus šķautņu kopīgos punktus zīmējumā neatzīmēsim ar melnu aplīti.

Dažkārt uzskatīsim, ka šķautnes ir nokrāsotas divās vai vairāk krāsās (piemēram, zaļā krāsā starp virsotnēm, kas attēlo draugus, un sarkanā krāsā starp virsotnēm, kas attēlo "nedraugus"). Tā kā melnbaltā tekstā krāsas parādīt nevar, tad šādos gadījumos šķautnes attēlosim ar dažāda tipa līnijām (taisnas, viļņotas u.tml.).

Par virsotnes pakāpi sauc šķautņu skaitu, kas tajā ietilpst. Piemēram, 42. zīmējumā virsotņu A un B pakāpes ir 2, virsotnes C pakāpe ir 3, virsotnes D pakāpe ir 1, virsotnes E pakāpe ir 0.

Virsotnes V pakāpi apzīmēsim ar p(V).

Pieņemsim, ka dots grafs G ar virsotņu kopu W un šķautņu kopu S. Mēs varam izvēlēties no kopas W kādu apakškopu W_1 un no tām kopas S šķautnēm, kuras savieno W_1 virsotnes, kādu apakškopu S_1. Tādējādi iegūto grafu G_1, kura virsotņu kopa ir W_1 un šķautņu kopa S_1, sauc par dotā grafa apakšgrafu. Skaidrs, ka grafam, vispārīgi runājot, var būt daudz apakšgrafu.

<u>3. 2. Uzdevumi, kuros var izmantot grafa virsotnes pakāpes jēdzienu</u>

Risinot šādus uzdevumus, tiek izmantota sekojoša teorēma.

<u>Teorēma par vienādām pakāpēm (TVP teorēma).</u>

Katrā grafā, kurā ir vismaz divas virsotnes, var atrast divas virsotnes ar vienādām pakāpēm.

<u>Pierādījums.</u> Pieņemsim, ka grafā ir n virsotnes, $n \geq 2$. Katra virsotne nevar būt savienota ar vairāk kā n - 1 pārējām virsotnēm, tāpēc nevienas virsotnes pakāpe nepārsniedz n-1. Tātad visu virsotņu pakāpes var pieņemt tikai vērtības 0; 1; 2;...; n - 2; n - 1, tātad n dažādas vērtības.

Pieņemsim no pretējā, ka visu virsotņu pakāpes ir dažādas. Saskaņā ar Dirihlē principu **D_3** ir viena virsotne ar pakāpi 0, viena virsotne ar pakāpi 1,..., viena virsotne ar pakāpi n - 1. Bet tas nav iespējams: ja kādas virsotnes (apzīmēsim to ar A) pakāpe ir 0, tad nevienas citas virsotnes X pakāpe nevar būt vienāda ar n - 1; tiešām, X nav savienota vismaz ar A, tāpēc $p(X) \leq n - 2$ (X var būt savienota ar visām virsotnēm, izņemot pati sevi un A). Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un visu virsotņu pakāpes nevar būt dažādas. Teorēma pierādīta.

Aplūkosim, kā šo teorēmu lieto, risinot uzdevumus.

<u>59. piemērs</u>. *Klasē ir 25 skolēni. Pierādīt, ka diviem skolēniem šai klasē ir vienāds draugu skaits (uzskatām, ka, ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs).*

<u>1. atrisinājums</u>. Attēlosim skolēnus ar punktiem. Starp virsotnēm, kas attēlo draugus, novelkam šķautnes. Katram skolēnam viņa draugu skaits ir vienāds ar atbilstošās virsotnes pakāpi. Saskaņā ar TVP teorēmu ir divas virsotnes ar vienādām pakāpēm; atbilstošajiem skolēniem draugu skaits ir vienāds. Uzdevums atrisināts.

Pamācoši atrisināt šo uzdevumu arī tieši, neatsaucoties uz TVP teorēmu. Aplūkosim šādu atrisinājumu.

<u>2. atrisinājums.</u> Nevienam skolēnam nevar būt mazāk par 0 draugiem vai vairāk par 24 draugiem; tātad draugu skaitam var būt 25 dažādas vērtības 0; 1; 2;...; 23; 24. Vienīgā iespēja, kā izvairīties no tā, ka diviem skolēniem ir vienāds skaits draugu, ir panākt, lai vienam skolēnam būtu 0 draugu, vienam - 1 draugs, vienam - 2 draugi, ..., vienam - 23 draugi, vienam - 24 draugi (atsaucamies uz Dirihlē principu **D_3**). Bet tas nav iespējams: ja kādam skolēnam ir 24 draugi, tad viņš draudzējās ar visiem pārējiem, un tad nav tāda skolēna, kuram nav neviena drauga - katram ir vismaz viens draugs (tas, kurš draudzējās ar visiem). Uzdevums atrisināts.

Kā redzat, uzdevuma risinājums ar TVP teorēmas palīdzību ir īsāks, bet "nekonkrētāks". Iesakām katru uzdevumu, ko turpmāk risināsiet ar TVP teorēmas palīdzību, mēģināt atrisināt arī tieši.

<u>60.* piemērs</u>. *Kongresā sapulcējās 1000 zinātnieku. Aptaujas rezultātā tika konstatēts: ja kādiem diviem zinātniekiem šajā kongresā ir kopīgs paziņa, tad viņiem nav vienāds skaits paziņu. Bez tam ir vismaz divi zinātnieki, kas pazīst viens otru. Pierādīt, ka var atrast zinātnieku, kam šajā kongresā ir tieši viens paziņa.*

<u>Atrisinājums</u>. Izveidosim grafu; virsotnes attēlos zinātniekus, šķautnes - pazīšanos. Apskatīsim virsotni A, kuras pakāpe ir <u>vislielākā</u>. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $p(A)>0$. Ja $p(A) = 1$, meklējamais zinātnieks var būt A. Ja $p(A) = n$, kur $n > 1$, apskatīsim virsotnes B_1 , B_2 ,..., B_n , kas tieši savienotas ar A. Skaidrs, ka $p(B_1) \geq 1$, $p(B_2) \geq 1$,..., $p(B_n) \geq 1$ (visas B_i

savienotas ar A); tāpat $p(B_1) \leq n$, $p(B_2) \leq n$,..., $p(B_n) \leq n$, jo n ir vislielākā virsotnes pakāpe. Tātad $p(B_1)$, $p(B_2)$,...., $p(B_n)$ var pieņemt tikai vērtības 1; 2;...; n. Visi skaitļi $p(B_1)$, $p(B_2)$,..., $p(B_n)$ ir dažādi, jo B_1, B_2,.... B_n visi pazīstami ar A. Tāpēc saskaņā ar Dirihlē principu **D_3** starp $p(B_1)$ sastopamas visas iespējamās vērtības, tai skaitā arī 1. Atbilstošais zinātnieks B ir meklētais. Uzdevums atrisināts.

Iesakām lasītājam patstāvīgi "pārtulkot" risinājumu no "grafu valodas" parastā valodā.

61. piemērs. Konferencē piedalās 25 zinātnieki; daži no tiem ir pazīstami savā starpā (uzskatām, ka, ja A pazīst B, tad arī B pazīst A). Neviens zinātnieks nepazīst visus pārējos; ja divi zinātnieki viens otru nepazīst, tad tiem ir viens kopīgs paziņa.*

Pierādīt: ja katram zinātniekam aprēķina viņa paziņu skaitu un iegūtos skaitļus saskaita, tad summa nav mazāka par 72.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka nav zinātnieka, kam ir tikai viens paziņa. Tiešām, ja zinātnieka A vienīgais paziņa būtu B, tad B jāpazīst arī jebkurš cits cilvēks C (jo A nepazīst C**,** tātad A un C jābūt kopīgam paziņam, bet tāds var būt vienīgi B). Tādā gadījumā B pazīst visus, bet tā ir pretruna. Līdzīgi pierāda, ka nav arī zinātnieka, kam nav neviena paziņas. Tātad katram zinātniekam ir vismaz divi paziņas.

Pieņemsim no pretējā, ka pazīšanos summa S ir mazāka par 72. Tā kā S ir pārskaitlis (katra pazīšanās ieskaitīta tajā divas reizes), tad $S \leq 70$. Saskaņā ar Dirihlē principu kādam zinātniekam, ko sauksim par profesoru, ir tieši divi paziņas (sauksim tos par docentiem). Pārējos 22 zinātniekus sauksim par maģistriem. Neviens maģistrs nepazīst profesoru, tāpēc katrs maģistrs pazīst kādu no abiem docentiem. Tāpēc docentu pazīšanos kopskaits ar maģistriem ir vismaz 22, bet docentu visu pazīšanos kopskaits ir vismaz 22 + 2. Tāpēc visu pazīšanos kopskaits ir vismaz 2 (profesoram) + 2 (docentiem ar profesoru) + 22 (docentiem ar maģistriem) + $22\cdot2$ (maģistriem) = 70. Redzam, ka citu pazīšanos bez minētajām nevar būt, tātad:

1) docenti savā starpā nepazīstas,
2) katrs maģistrs pazīstams ar vienu docentu,
3) katrs maģistrs pazīstams ar tieši vienu citu maģistru.

Ar vienu no abiem docentiem **D_1** pazīstami vismaz 11 maģistri. Lai docentam **D_2** būtu kopīgi paziņas ar katru no tiem, katram no **D_2** "apakšmaģistriem" jāpazīst kāds **D_1** "apakšmaģistrs", pie tam katram cits (jo katram **D_1** apakšmaģistram ir tieši 2 paziņas). Tāpēc gan **D_1**, gan **D_2** katrs pazīst tieši 11 maģistrus, kas savā starpā pazīstas pa pāriem (viens no **D_1** grupas, otrs no **D_2** grupas). Bet tad, ja divi maģistri (viens no **D_1** grupas, otrs no **D_2** grupas) viens otru nepazīst, tiem nav kopīga paziņas. Pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un $S \geq 72$.

62. piemērs. Katrs klases skolēns apmeklē tieši 2 pulciņus. Katriem diviem skolēniem var atrast vismaz vienu pulciņu, kuru apmeklē viņi abi. Pierādīt, ka ir pulciņš, kuru apmeklē vismaz 2/3 visu klases skolēnu.

Atrisinājums. Ja ir tāds pulciņš, kuru apmeklē visi skolēni, viss kārtībā. Pieņemsim, ka tāda pulciņa nav. Izvēlamies vienu skolēnu α; pieņemsim, ka tas apmeklē pulciņus A un B. Jābūt kādam skolēnam β, kura pulciņu pāris nav (A; B); tā kā α un β jābūt kopīgam pulciņam, varam pieņemt, ka β apmeklē pulciņus A un C. Ir jābūt skolēnam γ, kas neapmeklē pulciņu A (citādi visi apmeklētu pulciņu A, bet tā būtu pretruna ar pieņēmumu); tā kā γ jābūt kopīgām pulciņam gan ar α, gan ar β, tad γ apmeklē (B, C).

Mēs apgalvojam, ka citu pulciņu nav. Tiešām, ja kāds apmeklētu pulciņu D un vēl kādu pulciņu X**,** tad pārim (D, X) nevar būt kopīgs pulciņš ar pāriem (A, B), (A.C), (B, C) vienlaicīgi.

Tāpēc katrs skolēns apmeklē divus no trijiem pulciņiem A, B, C. Pieņemsim, ka skolēnu ir n un katrs uzraksta uz atsevišķām zīmītēm savu pulciņu nosaukumus; kopā ir $n\cdot2 = 2n$ zīmītes, kas sadalās pa 3 pulciņiem. Tāpēc vismaz viena pulciņa nosaukums uzrakstīts uz ne mazāk kā $1/3 \cdot 2n = 2/3\cdot n$ zīmītēm.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

122.° Konferencē vairāki delegāti paspieda cits citam roku (katrs pāris sasveicinājās ne vairāk kā vienu reizi). Pierādīt, ka var atrast divus delegātus, kas sarokojušies vienādu skaitu reižu.

123. Futbola turnīrā piedalās 20 komandas; katrai ar katru jāspēlē vienu reizi. Pierādīt: lai kā arī organizētu turnīru, jebkurā brīdī varēs atrast divas komandas, kas šajā brīdī būs izspēlējušas vienādu skaitu (varbūt 0) spēļu.

124. Plaknē uzzīmētas 10 riņķa līnijas. Pierādīt, ka starp tām var atrast divas riņķa līnijas, kas pieskaras vienādam daudzumam uzzīmēto riņķa līniju.

125.* Teātra izrādē ieradušies $(m - 1)\cdot n + 1$ cilvēki. Pierādīt: starp tiem var atrast vai nu m cilvēkus, kas visi pa pāriem nepazīst viens otru, vai arī tādu cilvēku, kas pazīst vismaz n pārējos.

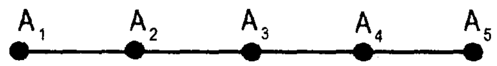
126. Turnīrā piedalās 25 komandas; katrai ar katru jāspēlē 1 reizi. Pierādīt: jebkurā momentā var atrast vai nu komandu, kas izspēlējusi vismaz 5 spēles, vai arī 5 komandas, kas savā starpā nav izspēlējušas nevienu spēli.

127.* Konferencē piedalījās 20 valstu delegācijas; katru valsti pārstāvēja prezidents un premjerministrs. Pirms konferences sākuma daži delegāti sarokojās (katrs pāris ne vairāk kā vienu reizi; neviens prezidents nesarokojās ar savu premjerministru). Kad Īrijas prezidents pajautāja visiem citiem delegātiem, cik rokasspiedienu viņi ir izdarījuši, visas saņemtās atbildes bija dažādas. Cik reižu sarokojās Īrijas premjerministrs?

128.[k] Trīs klasēs mācās pa 30 skolēniem. Katram skolēnam abās pārējās klasēs kopā (ne tajā, kurā viņš mācās) ir tieši 31 draugs. Pierādīt: katrā klasē var atrast pa skolēnam tā, lai tie visi trīs savā starpā pa pāriem draudzētos.

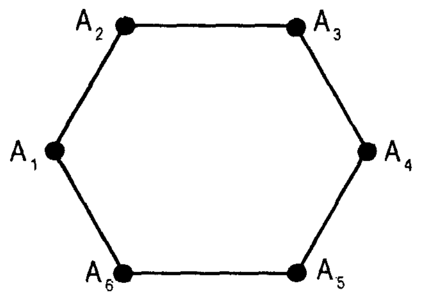
3.3. Uzdevumi, kas saistīti ar sakārtojumiem virknēs un ciklos

Par virkni sauc grafu, kura virsotnes var apzīmēt ar $A_1, A_2, ..., A_n$ tā, ka grafa vienīgās šķautnes ir $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$. Virknes piemērs redzams 45. zīmējumā, kur n = 5.



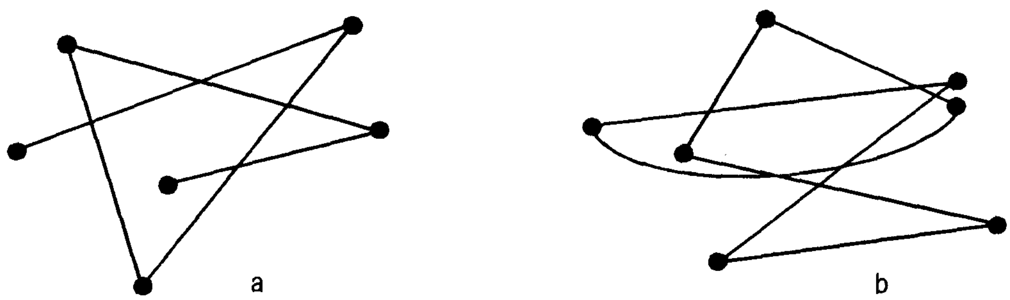
45. zīm.

Par ciklu sauc grafu, kura virsotnes var apzīmēt ar $A_1, A_2, ..., A_n$ tā, ka grafa vienīgās šķautnes ir $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Cikla piemērs redzams 46. zīmējumā, kur n = 6.



46. zīm.

Protams, virknes un cikli var arī nebūt uzzīmēti tik regulāri, kā parādītajos zīmējumos; arī 47. zīmējumā a parādīta virkne un 47. zīmējumā b - cikls.



47. zīm.

Mēs uzskatām, ka virknē var būt arī tikai viena virsotne (tādā gadījumā šķautņu vispār nav), bet ciklā vienmēr ir vismaz divas virsotnes.

Viegli saprast, ka virknē virsotņu ir par vienu vairāk nekā šķautņu, bet ciklā virsotņu un šķautņu daudzumi ir vienādi.

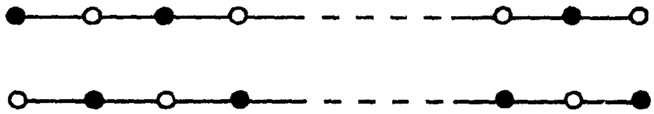
3. 3. 1. Uzdevumi par novietojumiem ar ierobežojumiem

Šajā punktā aplūkosim uzdevumus, kuros virknē vai ciklā jāsakārto priekšmeti, kas ņemti no divām vai vairākām grupām, turklāt pastāv ierobežojumi, kādi divi priekšmeti var atrasties blakus. Attēlojot priekšmetus ar grafa virsotnēm, to atrašanos blakus attēlosim, novelkot šķautni, kas savieno abas virsotnes.

63. piemērs. Virknē novietotas 2n baltas un melnas lodītes. Divas vienas krāsas lodītes nevar atrasties blakus. Pierādīt, ka katras krāsas lodīšu ir tieši n.

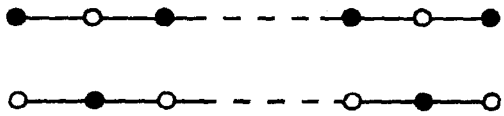
Atrisinājums. Sadalām virkņu pozīcijas n pāros: (1,2); (3,4); (5,6); ...; (2n-1,2n). Ja melno lodīšu būtu vairāk nekā n, tad kādā no n pāriem blakus atrastos divas melnās lodītes, bet tā būtu pretruna. Ja melno lodīšu būtu mazāk nekā n, tad kādā no n pāriem melno lodīšu nebūtu vispār; tad tajā abas lodītes būtu baltas un atrastos blakus, bet arī tā būtu pretruna. Tātad melno lodīšu ir tieši n. Tāpēc arī balto lodīšu ir tieši n.

Vienīgie lodīšu novietojumi, kas apmierina uzdevuma prasības, redzami 48.zīmējumā (aiz katras melnas lodītes jāseko baltai lodītei, aiz katras baltas lodītes - melnai lodītei).



48. zīm.

64. piemērs. Ja virknē sakārtotas 2n + 1 baltas un melnas lodītes, turklāt divas vienas krāsas lodītes neatrodas blakus, tad vienas krāsas lodīšu skaits ir n, bet otras krāsas lodīšu skaits ir n + 1. Vienīgie sakārtojumi, kas apmierina uzdevuma prasības, redzami 49. zīmējumā.



49. zīm.

Atrisinājums. Sadalām 2n + 1 pozīcijas n + 1 "būros": (1,2); (3,4); (5,6); ...; (2n-1, 2n); 2n+1 (n "būri" sastāv no 2 pozīcijām katrs, pēdējais "būris" - no vienas pozīcijas). Tālākais spriedums līdzīgs 63. piemēra risinājumam. Līdzīgā ceļā var pierādīt šādus rezultātus.

65. piemērs. Ja aplī sakārtotas 2n baltas un melnas lodītes, turklāt divas vienas krāsas lodītes neatrodas blakus, tad katras krāsas lodīšu ir tieši n un tās izvietotas pamīšus.

Atrisinājums līdzīgs 64. piemēra risinājumam.

66. piemērs. Ja aplī novietotas baltas un melnas lodītes, turklāt balto lodīšu ir vairāk nekā melno lodīšu, tad kaut kur divas baltas lodītes atrodas blakus.

Atrisinājums. Novietosim melnās lodītes; pieņemsim, ka to ir n. Tad starp tām ir n atstarpes. Šajās atstarpes jāievieto vairāk nekā n baltās lodītes; tāpēc atradīsies atstarpe, kurā nonāks vismaz divas baltas lodītes. Šajā atstarpē arī būs baltās lodītes, kas atrodas blakus. Uzdevums atrisināts.

No šejienes izriet svarīgs secinājums: ja aplī novietots nepāra skaits baltu un melnu lodīšu, tad kaut kur divas vienas krāsas lodītes (tās krāsas lodītes, kuru ir vairāk nekā otras krāsas lodīšu) atradīsies blakus.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt 63. - 65. piemēra rezultātus ar līdzīgu metodi, proti, atstarpes starp vienas krāsas lodītēm pieņemot par "būriem".

Parādīsim vēl vienu pierādījuma metodi, kas ļauj iegūt 63. - 66. piemēra rezultātus. Pierādīsim 66. piemēra rezultātu, izmantojot jēdzienus, kas līdzīgi virsotnes pakāpes jēdzienam.

Aizstāsim baltās lodītes ar baltiem cilvēciņiem, bet melnās lodītes - ar melniem cilvēciņiem. Tā kā balto lodīšu bija vairāk, tad balto cilvēciņu ir vairāk nekā melno; tātad balto cilvēciņu roku ir vairāk nekā melno cilvēciņu roku.

Liksim aplī blakus stāvošajiem cilvēciņiem sadoties rokās. Tā kā balto roku ir vairāk nekā melno, tad nevar būt, ka visas baltās rokas sadotas ar melnajām - tad kādas divas baltās rokas būtu sadotas ar vienu un to pašu melno roku (pretruna!). Tātad kaut kur divas baltās rokas sadotas viena ar otru. Šajā vietā blakus stāv divi baltie cilvēciņi, tātad sākotnēji tur blakus atrodas divas baltās lodītes.

Iesakām lasītājiem līdzīgi pierādīt 63. - 65. piemērā rezultātus, virkņu gadījumā ņemot vērā, ka malējo cilvēciņu viena roka netiek sadota ar citu roku.

Turpmāko uzdevumu risinājumos bieži izmantosim līdzīgas idejas. Dažkārt atsauksimies uz 63. - 66. piemēra rezultātiem, katrā gadījumā precizējot, ko saprotam ar lodītēm un ko - ar to krāsām.

67. piemērs. Aplī kaut kāda kārtība uzrakstīti skaitli no 1 līdz 1995 (katrs vienu reizi). Pierādīt, ka kaut kādu divu blakus uzrakstītu skaitļu summa ir pārskaitlis.

Atrisinājums. Uzrakstīto nepārskaitļu ir vairāk nekā pārskaitļu. Tāpat kā 66. piemēra risinājumā pierādām, ka kaut kur divi nepārskaitļi atrodas blakus (baltās lodītes - nepārskaitļi, melnās lodītes -pārskaitļi). Šo skaitļu summa ir pārskaitlis.

68. piemērs. Pa rūtiņu lapas līnijām uzzīmēta slēgta lauzta līnija. Pierādīt, ka tās posmu skaits ir pārskaitlis.

Atrisinājums. Nekādi divi horizontāli posmi neatrodas šajā līnijā tieši viens aiz otra (tad tie nebūtu divi posmi, bet veidotu vienu posmu). Tāpat arī nekādi divi vertikāli posmi neatrodas tieši viens aiz otra.

Bet, ja posmu pavisam būtu nepāra skaits, tad saskaņā ar 66. piemēra secinājumu vai nu viena, vai otra no šīm īpašībām netiktu izpildīta, tāpēc posmu skaits nav nepāra; tātad tas ir pāra.

69. piemērs. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt visas 9x9 rūtiņu kvadrāta rūtiņas tā, lai katrā rūtiņā nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos rūtiņā, no kuras sāka savu kustību?

Atrisinājums. Izkrāsojam rūtiņas parastajā šaha galdiņa kārtībā. Ja minētais zirdziņa maršruts būs reāls, visas 9x 9 rūtiņās varētu sakārtot ciklā tai kārtībā, kādā zirdziņš tās apstaigā. Tā kā vienas krāsas rūtiņu ir vairāk nekā otras krāsas rūtiņu (to kopējais skaits - nepāra skaitlis), tad kaut kur divas vienas krāsas rūtiņās ciklā atrastos blakus. Bet tā ir pretruna, jo zirdziņš var pāriet tikai no melnas rūtiņas uz baltu vai no baltas uz melnu. Tātad pieņēmums ir nepareizs, un minētais zirdziņa maršruts nav reāls.

70. piemērs. Trīs draugi A, B un C spēlē galda tenisu. Katrā spēlē piedalās divi no viņiem, bet trešais stāv malā un vēro. Katras spēles zaudētājs nākošajā spēlē dod vietu trešajam. Zināms, ka A izspēlēja 5 spēles, B - 11 spēles. Cik spēles izspēlēja C?*

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka notikušas vismaz 11 spēles. No nosacījumiem seko arī, ka A nav izlaidis nevienas divas pēc kārtas spēlētas spēles. Aplūkosim šādus 6 "būrus" (tie veidoti no pirmo 11 spēļu numuriem): (1, 2); (3, 4); (5, 6); (7, 8); (9, 10), 11.

Katrā no pirmajiem 5 "būriem" jābūt vismaz vienai A spēlētai spēlei; saskaņā ar **D_3** katrā no tiem ir tieši viena A spēlēta spēle. Tāpēc 11. spēlē A nav piedalījies. No šejienes seko, ka:

1) divpadsmitās spēles vairs nav bijis (citādi A nebūtu piedalījies pēc kārtas spēlētās 11. un 12. spēlē); tātad pavisam bijušas 11 spēles un B piedalījies tajās visās,
2) no šīm 11 spēlēm B piecās spēlējis ar A, tātad pārējās sešās - ar C. Secinājums - C izspēlējis 6 spēles.

Komentārs. Ievērosim, ka mēs varam pat secināt pirmo 10 spēļu rezultātus - tajās visās uzvarējis B. Vienīgi par pēdējo, 11. spēli, nav skaidrības - tajā var būt uzvarējis vai nu B, vai C.

*71. *piemērs. Pa apli uzrakstīti naturāli skaitļi no 3 līdz 13 (katrs vienu reizi). Vai var gadīties, ka nekādi divi blakus uzrakstīti skaitļi neatšķiras mazāk kā par 3 un vairāk kā par 5?*

Atrisinājums. Vienīgās pieļaujamās blakus uzrakstīto skaitļu starpības ir 3; 4; 5. Apskatīsim skaitļus 3; 4; 5; 11; 12; 13. Nekādi divi no tiem nedrīkst būt uzrakstīti blakus. Tātad 6 atstarpēs starp tiem jābūt vismaz pa vienam citam skaitlim. Bet šo atstarpju aizpildīšanai mums ir tikai 5 skaitļi: 6; 7; 8; 9; 10. Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

72. piemērs. Doti 55 naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka starp tiem var atrast tādus divus skaitļus, kuru starpība ir 9.

Atrisinājums. Katrs no šiem 55 skaitļiem dod kaut kādu atlikumu, dalot ar 9. Atlikumiem pavisam iespējamas deviņas vērtības: 0; 1; 2; ...; 7; 8. Tā kā 55=9·6+ 1, tad saskaņā ar **D**$_2$ vismaz viens atlikums būs sastopams vismaz 7 reizes. Apzīmēsim šo atlikumu ar r.

No 1 līdz 100 ir 11 skaitļi, kas dalās ar 9, 12 skaitļi, kas dod atlikumu 1, dalot ar 9, un pa 11 skaitļiem, kas dod atlikumus 2; 3;...; 7; 8, dalot ar 9. (Pārliecinieties par to patstāvīgi!) Uzrakstīsim rindā 12 skaitļus, kas, dalot ar 9, dod atlikumu r:

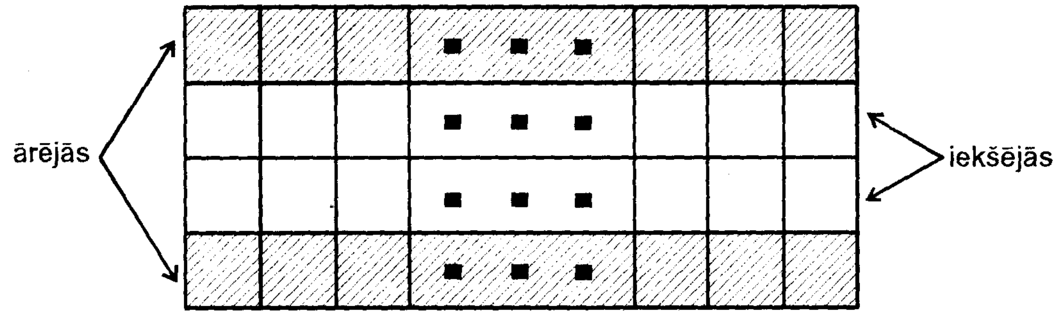
$$0\cdot 9 + r;\ 1\cdot 9 + r;\ 2\cdot 9 + r; ...;\ 11\cdot 9+r.$$

Tie 7 no 55 dotajiem skaitļiem, kas, dalot ar 9, dod atlikumu r, atrodas šajā virknē. Spriežot līdzīgi kā 66. piemēra risinājumā, iegūstam, ka divi no tiem šajā virknē atrodas blakus. To starpība ir 9.

73.^{k} piemērs. Taisnstūris sastāv no 4x1995 rūtiņām. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt visas rūtiņas (katru vienu reizi) un ar pēdējo gājienu atgriezties rūtiņā, no kuras sāka savu ceļu?

Atrisinājums. Ievērosim, ka krāsojums melnā un baltā krāsā šaha galdiņa kārtībā, kas palīdzēja 69. piemērā, šoreiz nepalīdz - taisnstūrī melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Tāpēc rīkosimies citādi.

Vispirms iedalīsim visas rūtiņas divās grupās: iekšējās un ārējās (skat. 50.zīm.). Acīmredzot iekšējo un ārējo rūtiņu skaits ir vienāds.



50. zīm.

Ievērosim, ka zirdziņš no ārējās rūtiņas var pāriet tikai uz iekšējo rūtiņu. Tātad ir vismaz 2x1994 iekšējās rūtiņas, kurās zirdziņam savā maršrutā jānonāk, aizejot no 2x1994 ārējām rūtiņām (no katras ārējās rūtiņās jāpāriet uz citu iekšējo rūtiņu). Tāpēc, kaut arī eksistē zirdziņa gājieni, kas ved no vienas iekšējas rūtiņas uz citu iekšēju rūtiņu, zirdziņš tos izmantot nedrīkst - tad saskaņā ar **D**$_1$ viņš kādā iekšējā rūtiņā nonāktu vairāk nekā vienu reizi, bet tā nedrīkst būt. Tāpēc visi zirdziņa veiktie gājieni no iekšējām rūtiņām ved uz ārējām rūtiņām. Saskaņā ar 65. piemēra risinājumu zirdziņa maršrutā rūtiņas izvietojas šādi:

(1) **iekšējā → ārējā → iekšējā → ārējā → ... → iekšējā → ārējā**

(atgriešanos uz sākuma rūtiņu neatspoguļojam; varam uzskatīt, ka cikliskais maršruts sākas iekšējā rūtiņā).

Tagad izkrāsosim taisnstūra rūtiņas parastajā šaha galdiņa kārtībā. Skaidrs, ka melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Līdzīgi kā 65. piemērā iegūstam, ka zirdziņa maršrutā rūtiņas izvietojas šādi:

melna → balta → melna → balta → ... → melna → balta

(2) **vai**

balta → melna → balta → melna → ... → balta → melna.

Salīdzinot (l) un (2), iegūstam, ka visas zirdziņa apstaigātās ārējās rūtiņas ir vienā krāsā, bet visas apstaigātās iekšējās rūtiņas - otrā krāsā. Bet ārējās rūtiņas ir gan melnas, gan baltas. Tātad zirdziņš neapstaigā visas taisnstūra rūtiņas. Iegūta pretruna

74. piemērs. Doti 33 dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 100. Pierādīt, ka starp tiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru starpība ir 8, 9 vai 17.*

Atrisinājums. Sadalīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 četrās grupās pa 25 skaitļiem katrā: {1; 2;... ; 25}, {26; 27;...; 50}, {51; 52;... ,75}, {76;... ;100}.

Tā kā 33 = 4·8 + 1, tad vismaz vienā no šīm grupām ir ne mazāk kā 9 no dotajiem 33 skaitļiem; pieņemsim, ka to ir n. Samazināsim visus šos skaitļus par vienu un to pašu lielumu tā, lai mazākais no tiem kļūtu 1 (šādas operācijas rezultātā apskatāmo skaitļu starpības nemainās). Iegūsim n skaitļus $1 = X_1 < X_2 < ... < X_n \leq 25,\ n \geq 9$.

Ja kāds no skaitļiem x ir 9, tad atrodama starpība $x_i - x_1 = 9 - 1 = 8$. Ja starp skaitļiem x_i skaitļa 9 nav, aplūkojam trijniekus:

{1; 10; 18}
{2; 11; 19}
{3; 12; 20}
{4; 13; 21}
{5; 14; 22}
{6; 15; 23}
{7; 16; 24}
{8; 17; 25}.

To ir 8, un tie satur visus x_i, $1 \leq i \leq n$. Tā kā skaitļu x ir vismaz 9, tad kāds trijnieks satur divus no tiem. Šo skaitļu starpība ir 8, 9 vai 17, kas arī bija jāpierāda.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

129.° Pa apli kaut kādā kārtībā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 17 (katrs vienu reizi). Pierādīt, ka kaut kādu divu blakus uzrakstītu skaitļu summa ir pārskaitlis.

130. Ap apaļu galdu sēž 1995 rūķīši: pukkas, rotivappas, šillišallas un snurres. Zināms, ka pukkas nesēž blakus rotivappām un šillišallas nesēž blakus snurrēm. Pierādīt, ka kaut kur divi vienas rūķīšu cilts pārstāvji sēž blakus.

131 .* Pa apli stāv 100 bērni: 41 zēns un 59 meitenes. Pierādīt, ka var atrast divus zēnus, starp kuriem atrodas tieši 19 citi bērni (vienalga, zēni vai meitenes).

132.° Tornis izdarīja dažus gājienus un atgriezās lauciņā, kurā atradās kustības sākumā. Nekādi divi pēc kārtas izdarīti gājieni nebija pa vienu taisni. Vai tornis varēja izdarīt tieši 1995 gājienus?

133. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt visas 7x7 kvadrāta rūtiņas tā, lai katrā rūtiņā nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos rūtiņā, no kuras sāka savu kustību?

134.* Trīs draugi A, B, C spēlēja galda tenisu pēc 70. piemērā aprakstītajiem noteikumiem. Zināms, ka viņi izspēlēja attiecīgi 10, 15 un 17 spēles. Kas zaudēja otrajā spēlē?

135.* Vai var saskaņā ar 71. piemēra prasībām izvietot pa apli naturālos skaitļus no 1 līdz 13 (katru tieši vienu reizi)?

136.° Doti 16 naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 30. Pierādīt, ka starp tiem var atrast divus skaitļus, kuru starpība ir 5.

137.^{k} Karalis apstaigāja visas 9x9 kvadrāta rūtiņas, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi. Rūtiņā, no kuras viņš sāka savu kustību, karalis ne reizi neatgriezās. Kāds bija garākais iespējamais karaļa noietās lauztās līnijas garums? (Uzskatām, ka rūtiņas malas garums ir 1; karaļa gājiena garumu mērām ar attālumu starp atbilstošo rūtiņu centriem.)

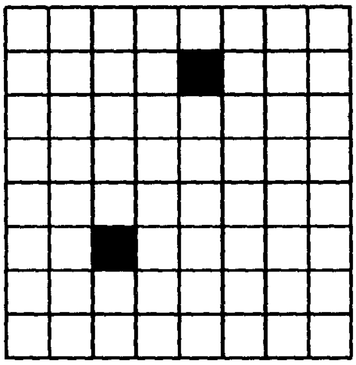
138.* Kvadrāts sastāv no nxn rūtiņām; tās izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā tā, ka vismaz viena stūra rūtiņa ir melna. Figūra ar vienu gājienu var pāriet no vienas rūtiņas uz citu rūtiņu, kurai ar pašreizējo atrašanās vietu ir kopīgs stūris, bet ne kopīga mala. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru figūra, kas sākumā novietota melnā rūtiņā, var apstaigāt visas melnās rūtiņas? Atrisināt šo uzdevumu, ja a) n = 8, b) n =9, c) n = 10.

139.* Kvadrāts sastāv no 13x13 rūtiņām. Vienā no rūtiņām atrodas figūra "lauva". Lauva ar vienu gājienu var pārvietoties vienlaicīgi par m rūtiņām horizontālā un n rūtiņām vertikālā virzienā, kur m un n - patvaļīgi naturāli skaitļi, $2 \leq m \leq 9$, $2 \leq n \leq 9$. (Skaitļi m un n katrā gājienā var mainīties pēc lauvas patikas. Turklāt lauva uz kādu rūtiņu X drīkst pāriet tikai tad, ja saskaņā ar nupat minēto nosacījumu viņš drīkstētu pāriet arī uz rūtiņu, kas ir simetriska X attiecībā pret vienu fiksētu kvadrāta diagonāli.) Vai lauva var apstaigāt visas kvadrāta rūtiņas, katrā nonākot tieši vienu reizi? Ar pēdējo gājienu nav obligāti jāatgriežas sākotnējā rūtiņā.

140.* Kvadrāts sastāv no 23x23 rūtiņām. Figūra "tīģeris" ar vienu gājienu pārvietojas vienlaicīgi par 3 rūtiņām horizontālā virzienā un par 4 rūtiņām vertikālā virzienā vai par 3 rūtiņām vertikālā virzienā un par 4 rūtiņām horizontālā virzienā. Vai tīģeris var apstaigāt visas rūtiņas, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi?

141. Kvadrāts sastāv no a) 8x8, b) 9x9 , c) nxn rūtiņām. Karalim jāapstaigā visas rūtiņas, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi, pie tam pamīšus jāizdara diagonālie gājieni un "taisnie" gājieni ("taisnais" gājiens ir gājiens pa horizontāli vai vertikāli). Vai karalis to var izdarīt?

142. Karalim, izdarot tikai "taisnos" gājienus (skat. 141. uzd.), jāapstaigā visas 51. zīmējumā

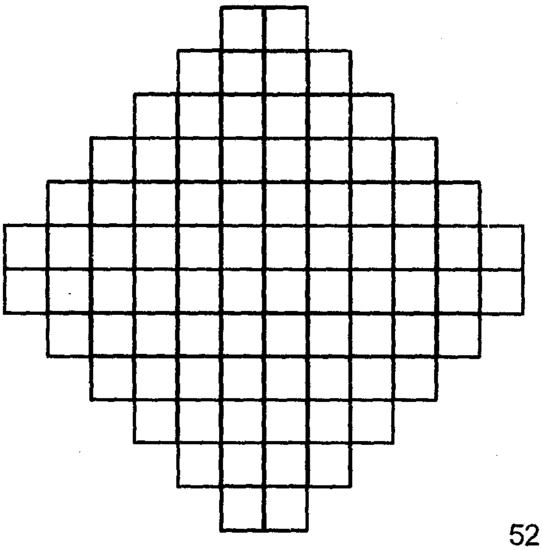


51. zīm.

iezīmētās rūtiņas, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi. Vai karalis to var izdarīt?

143.* Kādu lielāko daudzumu naturālo skaitļu, kas nepārsniedz 100, var izvēlēties tā, lai neviens no izvēlētajiem skaitļiem nebūtu divas reizes lielāks par otru?

144.[k] Figūra, kas parādīta 52. zīmējumā, jāsagriež vairākās daļās tā, lai nevienā daļā nebūtu neviena 2x2 rūtiņu kvadrāta. Griezumi jāizdara pa rūtiņu līnijām. Kāds ir mazākais iespējamais daļu skaits, ar ko to var panākt?



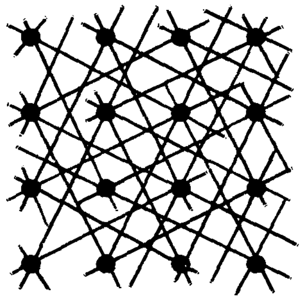
52. zīm.

3. 3. 2. Uzdevumi par Hamiltona ciklu

Aplūkosim patvaļīgu sakarīgu grafu. Pieņemsim, ka iespējams apstaigāt visas grafa virsotnes, ejot tikai pa grafa šķautnēm, katrā virsotnē nonākot tikai vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgriežoties atpakaļ tajā virsotnē, no kuras sākta kustība.

Šādu maršrutu sauc par Hamiltona ciklu. Izslēdzot prasību, ka ar pēdējo gājienu jāatgriežas sākuma virsotnē (tad no sākuma virsotnes tikai sāk kustību, bet tajā nekad nenonāk; turpretī visās citās virsotnēs nonāk), iegūstam jēdzienu par Hamiltona ceļu.

Iepriekšējā punktā jau aprakstīti daudzi uzdevumi, kas būtībā ir uzdevumi par Hamiltona ceļu. Piemēram, atcerēsimies 69. piemēru. Minēto kvadrātu var attēlot kā grafu; grafa virsotnes ir rūtiņas, bet divas virsotnes savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja tām atbilstošās rūtiņas atrodas viena no otras "šaha zirdziņa gājiena attālumā" (atbilstošā grafa fragments parādīts 53. zīmējumā).



53. zīm.

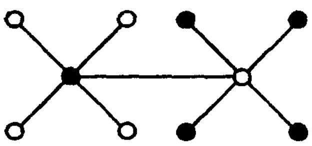
Šādā interpretācijā uzdevumā jautāts par Hamiltona cikla eksistenci apskatāmajā grafā. No 69. piemēra risinājuma viegli varam iegūt rezultātus, kurus var interpretēt kā Hamiltona cikla (ceļa) eksistences nepieciešamus nosacījumus.

Teorēma par Hamiltona cikla neeksistenci.
Ja grafa virsotnes var nokrāsot divās krāsās (katru virsotni - vienā krāsā) tā, ka katra šķautne savieno divas dažādu krāsu virsotnes, un ja pie tam abu krāsu virsotņu skaits nav vienāds, tad grafā neeksistē Hamiltona cikls.

Teorēma par Hamiltona ceļa neeksistenci.
Ja grafa virsotnes var nokrāsot divās krāsās (katru virsotni - vienā) tā, ka katra šķautne savieno divas dažādu krāsu virsotnes, un ja pie tam abu krāsu virsotņu daudzumi atšķiras viens no otra vairāk nekā par 1, tad grafā neeksistē Hamiltona ceļš.

Pierādījumā var izmantot 3.3.1. punktā lietotos paņēmienus.

Uzmanību! Atzīmēsim: ja izdodas nokrāsot virsotnes divās krāsās tā, ka katra šķautne savieno dažādu krāsu virsotnes un to skaits ir vienāds, tad tas vēl negarantē ne Hamiltona ceļa, ne Hamiltona cikla eksistenci (skat., piemēram, 54. zīm.).



54. zīm.

Matemātikā pazīstami daudzi pietiekami nosacījumi, lai grafam eksistētu Hamiltona cikls. Pierādīsim vienu no tiem.

<u>Diraka teorēma.</u> Ja sakarīgā grafā ar n virsotnēm no katras virsotnes iziet ne mazāk kā n/2 šķautnes, tad grafā eksistē Hamiltona cikls ($n \geq 3$).

<u>Piezīme.</u> Šīs teorēmas jēga ir skaidra: ja grafā katrā virsotnē ir <u>pietiekami daudz</u> iespēju aiziet uz citām virsotnēm (tai skaitā, ļoti iespējams, arī uz tādām virsotnēm, kurās neesam bijuši), tad var izplānot ekonomisku grafa virsotņu apstaigāšanu. Diraka teorēma precizē pasvītroto vārdu "pietiekami daudz" jēgu.

Diraka teorēmai pazīstami vairāki pierādījumi. Izklāstīsim ungāru matemātiķa L. Pošas pierādījumu.

Apskatīsim n virsotņu grafu ($n \geq 3$), kurā no katras virsotnes iziet vismaz n/2 šķautnes. Ja grafā eksistē visas iespējamās šķautnes (starp ikkurām divām virsotnēm), tad tajā, protams, ir Hamiltona cikls. Pieņemsim, ka dažu iespējamo šķautņu grafā nav, un pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda - ka grafā nav Hamiltona cikla. Mēģināsim grafam pēc kārtas pa vienai pievienot trūkstošās šķautnes, turklāt katru kārtējo trūkstošo šķautni pievienosim tad un tikai tad, ja tās pievienošana grafā vēl nerada nevienu Hamiltona ciklu. Nav svarīgi, kādā kārtībā mēs mēģinām pievienot trūkstošās šķautnes. Tā kā grafā trūkst tikai galīgs skaits šķautņu, tad pēc galīga soļu skaita būsim ieguvuši jaunu grafu G**,** kam piemīt šādas īpašības:

a) tam ir n virsotnes ($n \geq 3$),

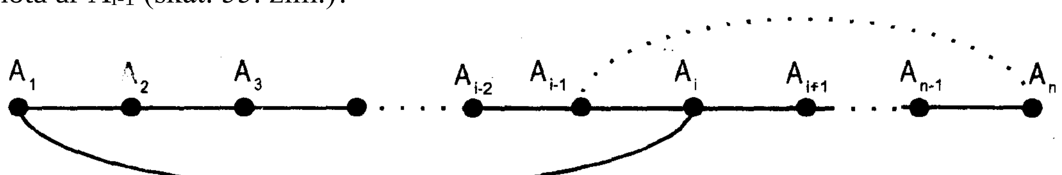
b) no katras virsotnes iziet $\geq$ n/2 šķautnes, jo šķautņu pievienošana šo īpašību nevarēja izjaukt,

c) tajā nav Hamiltona cikla,

d) pievienojot grafam jebkuru šķautni, kuras grafā vēl nav starp divām dažādām tajā esošajām virsotnēm, iegūstam jaunu grafu, kuram eksistē Hamiltona cikls. (Piezīme: šādus grafus sauc par piesātinātiem grafiem.)

Skaidrs, ka grafā G nav novilktas visas šķautnes. Aplūkosim virsotņu pāri (x; y), starp kurām grafā šķautnes nav. Šo šķautni pievienojot, grafā izveidojas Hamiltona cikls; apzīmējam tā virsotnes cikla apiešanās secībā ar A_1; A_2;...; A_n tā, ka x apzīmēta ar A_1 bet y - ar A_n. Tad vēl pirms A_1A_n pievienošanas mūsu apskatāmajā grafā eksistē Hamiltona ceļš A_1 A_2 ... A_{n-1} A_n .

Pieņemsim, ka kādam i, $2 \leq i \leq n - 1$, virsotne A_i savienota ar šķautni ar A_1. Vai A_n var būt savienota ar A_{i-1} (skat. 55. zīm.)?



55. zīm.

Acīmredzot nē, jo tad grafā G veidojas Hamiltona cikls $A_{i-1}A_{i-2} \dots A_2A_1A_iA_{i+1} \dots A_{n-1}A_nA_{i-1}$.

Tā kā A_1 ir savienota ar vismaz n/2 virsotnēm no kopas $A_2; A_3; \dots; A_{n-1}$, tad A_n nav savienota ar vismaz n/2 "pirms" šīm virsotnēm esošajām; tātad A_n nav savienota ar vismaz n/2 + 1 virsotnēm, tātad ir savienota ar ne vairāk kā n-(n/2+1)=n/2 - 1 virsotnēm. Tā ir pretruna ar Diraka teorēmas nosacījumiem.

Teorēma pierādīta.

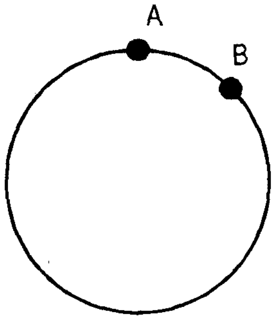
<u>Piezīme.</u> Iesakām pievērst īpašu uzmanību pierādījuma paņēmienam - pārejai uz "piesātinātu" grafu.

<u>75. piemērs.</u> Uz viesībām atnākuši 2n cilvēki. Katrs no tiem draudzējās ar vismaz n citiem atnākušajiem. Pierādīt: viesus var nosēdināt ap apaļu galdu tā, lai katram abās pusēs sēdētu draugi.

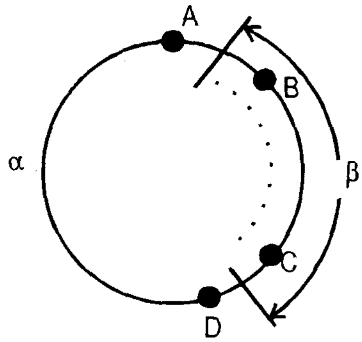
Atrisinājums. Varam atrisināt uzdevumu, tieši atsaucoties uz Diraka teorēmu. Attēlosim viesus ar punktiem - grafa virsotnēm. Ja divi cilvēki draudzējās, atbilstošos punktus savienojam ar šķautni. Grafā izpildīti Diraka teorēmas nosacījumi, tātad tajā eksistē Hamiltona cikls. Cilvēkus ap galdu varam sasēdināt tādā kārtībā, kādā atbilstošās virsotnes parādās Hamiltona ciklā.

Šo uzdevumu var atrisināt arī citādi. Iesakām lasītājam "pārtulkot" to vispārējā Diraka teorēmas pierādījumā. Vai pastāv būtiska atšķirība starp šo un iepriekš doto pierādījumu?

Nosēdināsim viesus ap galdu, kā pagadās. Ja nav tādas vietas, kur blakus sēž "nedraugi", viss kārtībā. Pieņemsim, ka tāda vieta ir un blakus sēdošie A un B nav draugi. (skat. 56. zīm.).

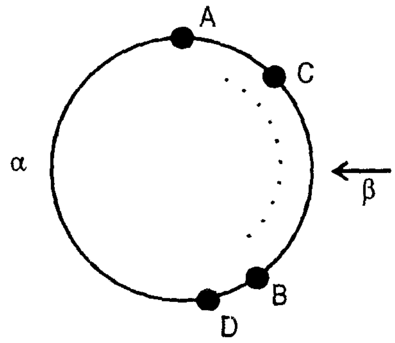


56. zīm.



57. zīm.

Pieņemsim, ka citā vietā pulksteņa rādītāju kustības virzienā izdevies atrast divus blakus sēdošus cilvēkus C un D tā, ka C un A ir draugi un arī B un D ir draugi (skat. 57. zīm.). Tad, atstājot daļu viesu (apzīmēsim tos ar α) bez izmaiņām, bet otru daļu viesu - β nosēdinot otrādā kārtībā, A nonāks blakus C**,** bet B - blakus D. Pārējie blakus sēdošo cilvēku pāri nemainīsies; iegūsim 58. zīmējumā parādīto situāciju.



58. zīm.

Šajā situācijā blakus sēdošo nedraugu pāru ir vismaz par vienu mazāk nekā situācijā, kas bija attēlotā 57. zīmējumā. Nedraugu pāra AB vietā ir draugu pāris AC, bet mums nezināmu attiecību pāra CD vietā - draugu pāris BD. Ja palicis vēl kāds blakus sēdošu nedraugu pāris, atkārtojam šo darbību tikmēr, kamēr blakus sēž tikai draugu pāri. Tā kā sākotnējā izvietojumā blakus sēdošu nedraugu pāru skaits ir galīgs, tad pie galīga operāciju skaita šādu pāru vairs nav, t.i., uzdevuma prasības ir izpildītas.

Atliek pamatot, ka varēs atrast aprakstītos cilvēkus C un D. Pieņemsim pretējo - šādu cilvēku C un D nav. Tas nozīmē, ka aiz katra A drauga C_1, C_2, C_3, ..., C_n sēž kāds cilvēka B nedraugs; tātad cilvēkam B ir vismaz n nedraugu. Bet tā nevar būt, jo saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem B ir ne vairāk kā 2n-1-n=n-1 nedraugi (te parādās DP tipa spriedums!). Iegūtā pretruna arī pierāda mūsu apgalvojumu. Uzdevums atrisināts.

Nākošais uzdevums parāda Hamiltona cikla raksturīgākos pielietojumus.

76. piemērs. Bērnudārza grupā ir 10 bērni. Viņi 4 dienas staigāja pa pāriem; katras dienas ietvaros pāri nemainījās, bet neviens pāris nestaigāja kopā divas vai vairāk dienas. Pierādīt, ka piektajā dienā bērni atkal var sadalīties pa pāriem tā, lai neviens no jauna izveidotais pāris iepriekš kopā nebūtu staigājis.

Atrisinājums. Attēlosim bērnus ar grafa virsotnēm; savienosim ar šķautnēm tās virsotnes, kurās attēlotie bērni minētajās 4 dienās vēl nav staigājuši kopā. No katras no 10 virsotnēm iziet vismaz 5 šķautnes. Tātad grafā eksistē Hamiltona cikls. Šī cikla virsotnes sadalām blakusesošu virsotņu pāros; atbilstošie bērni arī var staigāt kopā piektajā dienā.

Mēs redzējām, ka eksistē daži ērti nepieciešamie Hamiltona cikla eksistences nosacījumi, kā arī daži ērti pietiekamie nosacījumi. Praktiski ērtu Hamiltona cikla eksistences nosacījumu, kas būtu vienlaicīgi gan nepieciešami, gan pietiekami, nav līdz šai dienai, un to atrašana ir matemātikas nākotnes uzdevums. Ir pierādīts: ja izdotos atrast ērtu Hamiltona cikla eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu, tad automātiski varētu izstrādāt ātrus un efektīvus algoritmus daudzu praktiski svarīgu kombinatorikas uzdevumu risināšanai.

Vienu no labākajiem nepieciešamajiem nosacījumiem izstrādājis latviešu matemātiķis E. Grīnbergs. Tomēr viņa pierādījumam maz sakara ar vidējās vērtības metodi un Dirihlē principu, tāpēc šeit tam nepievērsīsimies.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

145. (Ores teorēma) Pieņemsim, ka sakarīgā grafā ar n virsotnēm ($n \geq 3$) ir spēkā šāda īpašība: katrām divām virsotnēm A un B, kuras nesavieno šķautne, atbilst nevienādība $p(A) + p(B) \geq n$. Pierādīt, ka grafam eksistē Hamiltona cikls.

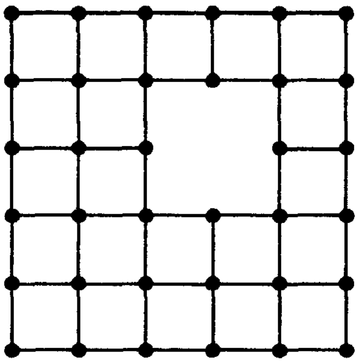
146.[k] Uz viesībām atnāca 2n cilvēki; katrs no tiem pazīst tieši n -1 citu atnācēju ($n \geq 2$). Pierādīt, ka viesus var sadalīt pa pāriem tā, lai katrā pārī būtu pazīstami cilvēki.

147. Vai Diraka teorēma paliek spēkā, ja nosacījumu "vismaz n/2" aizstāj ar nosacījumu "vismaz n/2-1"?

148.* Pierādīt, ka Diraka teorēmu viegli iegūt kā Ores teorēmas secinājumu.

149.* Grafā ir 2n + 1 virsotnes ($n \geq 1$); katras divas no tām savienotas ar šķautni. Pierādīt, ka grafā var atrast n Hamiltona ciklus tā, ka diviem no tiem nav kopīgas šķautnes.

150. Vai 59. zīmējumā attēlotajam grafam eksistē Hamiltona cikls?



59. zīm.

151.[k] (Hvatala teorēma) Pieņemsim, ka grafa G virsotnes apzīmētas ar $A_1, A_2, \ldots A_n$ tādā secībā, ka $p(A_1) \leq p(A_2) \leq \ldots \leq p(A_n)$. Pierādīt: ja katram i, kuram $i < n/2$, ir spēkā vai nu $p(A_i) \geq i + 1$, vai arī $p(A_{n-1}) \geq n - i$, tad grafā eksistē Hamiltona cikls.

3. 3. 3. Grafa sadalījums ciklos un tā lietojumi

Aplūkosim situācijas, kurās uzdevuma risināšanā izmantojamo grafu sadala ciklos un izseko ciklu skaita izmaiņām.

77. piemērs. *Plauktā atrodas kopotie raksti, kas sastāv no 100 sējumiem. Ar vienu gājienu atļauts apmainīt vietām jebkuru sējumu ar nepāra numuru un jebkuru sējumu ar pāra numuru. Bibliotekārs grib salikt sējumus pareizā kārtībā, izdarot pēc iespējas mazāk gājienu.*

Kāds ir minimālais gājienu skaits, kas ir pietiekams viņa mērķa sasniegšanai pie jebkura sējumu sākotnējā izvietojuma?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka n sējumi veido ciklu, ja viens no tiem atrodas tajā vietā, kur jābūt otrajam, otrs tajā vietā, kur jābūt trešajam,..., n-tais tajā vietā, kur jābūt pirmajam sējumam. Katrs sējums, kurš neatrodas savā vietā, ietilpst kaut kādā ciklā.

Ciklu sauc par pāra ciklu, ja tajā ir tikai pārskaitļu sējumi, par nepāra ciklu, ja tajā ir tikai nepārskaitļu sējumi, bet par jauktu ciklu, ja tajā ir gan pārskaitļu, gan nepārskaitļu sējumi.

Kaut kādam sējumu izvietojumam plauktā šī izvietojuma koeficients ir šāds skaitlis: (to sējumu skaits, kas nav savās vietās) - (jaukto ciklu skaits) + (starpības modulis starp pāra un nepāra ciklu skaitu).

Izvietojuma koeficients ir 0 tad un tikai tad, ja visi sējumi atrodas savās vietās.

Lemma. Ja kaut kāda sējumu izvietojuma koeficients ir lielāks par 0, tad

1) ar kaut kāda gājiena palīdzību to var samazināt par 1;

2) ne ar kāda viena gājiena palīdzību to nevar samazināt vairāk kā par 1.

Pierādījums. Ir iespējami 3 gadījumi.

1. Ir vismaz viens jaukts cikls.

Ja tajā ir tikai divi sējumi, samainām tos vietām. Līdz ar to savās vietās neesošu sējumu skaits samazinās par 2, bet jauktu ciklu skaits - par 1. Līdz ar to koeficients kļūst par 1 mazāks.

Ja ciklā ir vairāk kā 2 sējumi un vismaz divi no tiem ir pārskaitļu sējumi, tad var atrast tādu nepārskaitļu sējumu n, kas stāv pārskaitļa sējuma vietā, un apmainīt šos divus sējumus vietām. Tā rezultātā sējumu, kas nav savās vietās, kļūst par vienu mazāk, bet ciklu skaits nemainās.

Ja ciklā ir vairāk kā 2 sējumi un viens no tiem ir pārskaitļa sējums, tad vismaz divi ir nepārskaitļu sējumi. Tādā gadījumā jārīkojas analoģiski.

2. Ir vismaz viens pāra un vismaz viens nepāra cikls, Jāapmaina vietām viens sējums no kāda pāra cikla un viens sējums no kāda nepāra cikla. Līdz ar to 1 pāra un 1 nepāra cikla vietā rodas 1 jaukts cikls. Līdz ar to koeficients samazinās par 1.

3. Ir tikai pāra (nepāra) cikli.

Tas iespējams tikai tad, ja visi nepārskaitļu (pārskaitļu) sējumi atrodas savās vietās. Tad kāds nepāra cikla sējums jāapmaina ar kādu pāra cikla sējumu. Tad savā vietā neesošu sējumu kļūst par 1 vairāk, bet toties pāra ciklu kļūst par 1 mazāk, bet jaukto ciklu - par 1 vairāk. Tādējādi arī šajā gadījumā koeficients samazinās par 1.

Lemmas pirmā daļa ir pierādīta.

Aplūkosim dažādus iespējamos gājienus.

Viens iespējamais gājiens ir apmainīt vietām 2 sējumus no dažādiem cikliem. Tā rezultātā savās vietās neesošu sējumu skaits nemainās, bet 2 ciklu vietā rodas 1 cikls.

Ja abi cikli, pie kuriem piederēja apmainītie sējumi, ir jaukti, tad jaukto ciklu skaits samazinās par 1, bet koeficients palielinās par 1.

Ja viens cikls ir jaukts, tad koeficients var samazināties ne vairāk kā par 1.

Ja viens no cikliem ir pāra cikls, bet otrs - nepāra cikls, tad, kā jau agrāk minēts, koeficients arī samazinās par 1.

Ir iespējami arī citi gājieni, kuriem līdzīgā veidā var pierādīt, ka koeficients nesamazinās vairāk kā par 1.

No lemmas izriet, ka visu sējumu nolikšanai savās vietās ir nepieciešams un pietiekams tāds gājienu skaits, kāds ir sākuma stāvokļa koeficients.

Tagad pierādīsim, ka sākuma stāvokļa koeficients nevar būt lielāks par 124. Katrā ciklā ir vismaz 2 sējumi. Tāpēc pāra (un arī nepāra) ciklu nav vairāk par 50/2 = 25.

Ja šādu ciklu ir 24 vai mazāk, tad starpība starp pāra un nepāra ciklu skaitu nepārsniedz 24, bet savā vietā neesošu sējumu skaits nepārsniedz 100 un tāpēc koeficients ir ≤ 124.

Ja pāru cikli ir 25, tad tajos iesaistīti visi pārskaitļu sējumi un tāpēc jauktu ciklu nav. Ja nav arī nepāra ciklu, tad koeficients ir 50 + 25 = 75. Savukārt, ja ir vismaz 1 nepāra cikls, tad starpība starp pāra un nepāra ciklu skaitu nepārsniedz 24 un koeficients nepārsniedz 124. Koeficients var būt 124, ja sējumi izvietoti šādi:

1. sējums-3. sējuma vietā, 3. sējums-5. sējuma vietā, ..., 99. sējums - 1. sējuma vietā; 2. un 4. sējums apmainīti vietām, 6. un 8. sējums arī apmainīti vietām, ..., tāpat 98. un 100. sējums. Līdz ar to minimālais gājienu skaits ir 124.

Piezīme. Grafu valodā šo risinājumu visērtāk aprakstīt, izmantojot orientētus grafus (skat. 3.5. paragrāfu).

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

152. Atrisināt 77. piemēru, atsakoties no nosacījuma, ka drīkst mainīt vietām tikai sējumus ar dažādas paritātes numuriem.
153. Atrisināt 77. piemēru, ievērojot šādu nosacījumu: drīkst paņemt vienu sējumu un ievietot to starp jebkuriem diviem citiem sējumiem (tai skaitā arī pirms pirmā vai pēc pēdējā sējuma).
154. Uz viesībām atnāca n cilvēki. Vakaram beidzoties, nodzisa gaisma, un viesi tumsā sajauca cepures; kļūda tika pamanīta tikai otrā rītā. Kāds ir mazākais dienu skaits, kurā visi cilvēki garantēti var atgūt savas cepures? Pieļaujamas vienīgi cepuru apmaiņas pa pāriem, pie tam katrs cilvēks katru dienu piedalās ne vairāk kā vienā apmaiņā.

3. 4. Uzdevumi, kas risināmi, izmantojot grafus ar krāsainām šķautnēm

3.4.1. Uzdevumi par pilniem grafiem

Aplūkosim grafus, kuros katras divas dažādas virsotnes savienotas ar šķautni. Tādus grafus sauc par pilniem grafiem; pilnu grafu ar n virsotnēm apzīmē ar P_n. Katra šķautne nokrāsota vienā no divām krāsām - sarkanā vai zaļā (dažreiz izmantosim arī lielāku krāsu skaitu). Sarkanās šķautnes attēlosim ar viļņotām līnijām (), zaļās šķautnes - ar taisnam līnijām ().

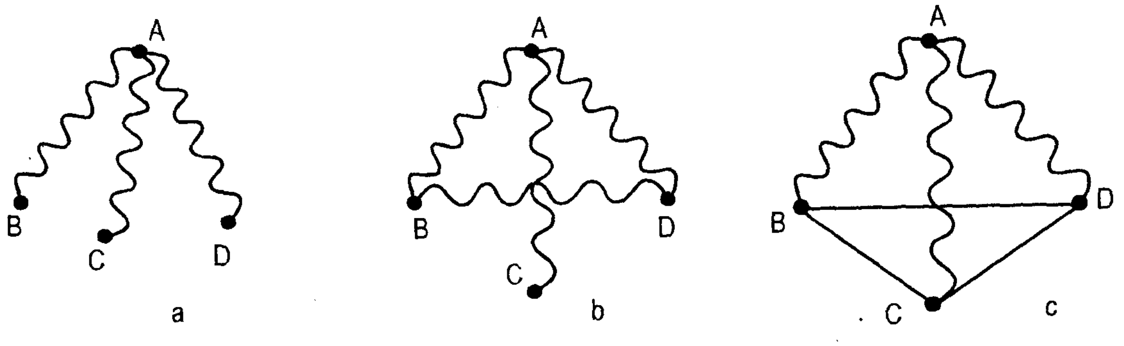
3.4.1.1. Ievaduzdevumi

78. piemērs. Autobusā brauc 6 cilvēki. Pierādīt, ka starp tiem var atrast vai nu trīs tādus pasažierus, kas visi ir savā starpā pazīstami, vai arī trīs tādus braucējus, starp kuriem nekādi divi nav savā starpā pazīstami.

Atrisinājums. Attēlosim cilvēkus ar grafa virsotnēm. Novilksim starp virsotnēm sarkanu šķautni, ja atbilstošie cilvēki nepazīst viens otru, un zaļu šķautni, ja viņi ir pazīstami. Tādējādi katri divi punkti savienoti vai nu ar zaļu, vai ar sarkanu līniju. Jāpierāda, ka var atrast trīs virsotnes, kas visas savā starpā savienotas ar vienas un tās pašas krāsas šķautnēm.

Apskatām patvaļīgu virsotni A. No tās iziet 5 šķautnes. Saskaņā ar Dirihlē principu **D_2** vai nu vienā, vai otrā krāsā ir vismaz trīs no tām. Pieņemsim, ka var atrast trīs sarkanas šķautnes (otrs gadījums, kad var atrast trīs zaļas šķautnes, ir pilnīgi analoģisks).

Apskatīsim šo sarkano šķautņu galapunktus B, C, D (skat. 60. zīm. a).



60. zīm.

Ja kaut divus no šiem galapunktiem arī savieno sarkana šķautne, tad veidojas sarkans trijstūris (sk., piem., 60. zīm. b). Atliek aplūkot gadījumu, kad visi punkti B, C, D savienoti savā starpā ar zaļām šķautnēm. Bet tad veidojas zaļš trijstūris BCD (skat. 60. zīm. c). Uzdevums atrisināts.

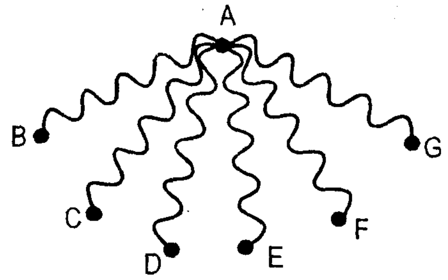
79. piemērs. Autobusā brauc 10 cilvēki. Pierādīt, ka starp tiem var atrast vai nu trīs tādus braucējus, kas visi ir savā starpā pazīstami, vai arī četrus tādus pasažierus, starp kuriem nekādi divi nav savā starpā pazīstami.

Atrisinājums. Attēlosim cilvēkus tāpat kā 78. piemērā. Mums jāpierāda, ka atbilstošajā grafā var atrast vai nu trīs virsotnes, kas visas ir savā starpā savienotas ar zaļām šķautnēm, vai arī četras virsotnes, kas visas savā starpā savienotas ar sarkanām šķautnēm.

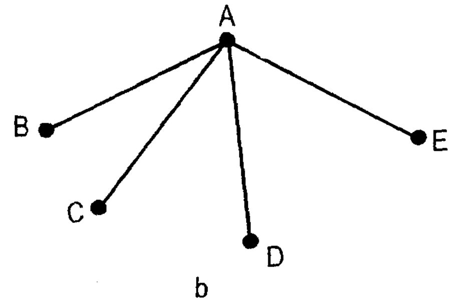
Izvēlamies patvaļīgu virsotni A. No tās iziet 9 šķautnes. Mēs apgalvojam, ka starp tām var atrast vai nu 6 sarkanas, vai arī 4 zaļas šķautnes. Tiešām, ja sarkano šķautņu nebūtu vairāk par piecām, bet zaļo - vairāk par trim, tad kopējais no virsotnes A izejošo šķautņu skaits nepārsniegtu 8. Tomēr mēs zinām, ka tādu ir 9 (Jeb, citiem vārdiem, p(A) = 9).

Aplūkosim atsevišķi abas iespējas.

1. Starp šķautnēm, kas iziet no virsotnes A, var atrast sešas sarkanas šķautnes. Apskatām to galapunktus (61. zīm. a).



61. zīm.



Katri divi no punktiem B, C, D, E, F, G savā starpā savienoti ar sarkanu vai zaļu šķautni. Saskaņā ar 78. piemēru starp tiem var atrast trīs punktus, kas visi savienoti ar vienas un tās pašas krāsas šķautnēm. Ja var atrast trīs šādus punktus, kas savā starpā savienoti ar zaļām šķautnēm, tad tos var pieņemt par meklētajiem; ja turpretī var atrast trīs šādus punktus, kas savā starpā savienoti ar sarkanām šķautnēm, tad, ņemot tos kopā ar virsotni A, iegūstam četrus punktus, kas visi savienoti savā starpā ar sarkanām šķautnēm; tas arī bija vajadzīgs.

2. Starp šķautnēm, kas iziet no virsotnes A, var atrast četras zaļas šķautnes. Apskatām to galapunktus (61. zīm. b).

Ja kaut vai divi no šiem galapunktiem savienoti savā starpā ar zaļu šķautni, tad tie kopā ar virsotni A veido meklējamo zaļo trijstūri. Ja turpretī katri divi no punktiem B, C**,** D, E savienoti savā starpā ar sarkanu šķautni, tad šie četri punkti apmierina uzdevuma prasības. Uzdevums atrisināts.

80. piemērs. Septiņpadsmit zinātnieki sarakstās katrs ar katru. Viņu sarakstē tiek runāts tikai par trim tēmām; katrs zinātnieku pāris sarakstās tikai par vienu tēmu. Pierādīt, ka var atrast 3 zinātniekus, kas visi savā starpā sarakstās par vienu un to pašu tēmu.

Atrisinājums. Attēlosim zinātniekus ar grafa virsotnēm. Katras divas virsotnes savieno šķautne, kura jānokrāso vienā no trim krāsām atkarībā no tā, par kuru tēmu atbilstošais zinātnieku pāris sarakstās. Mums jāpierāda, ka var atrast 3 virsotnes, kas visas savā starpā savienotās ar vienas un tās pašas krāsas šķautnēm.

Izvēlamies patvaļīgu virsotni A. No tās iziet 16 šķautnes; katra no tām nokrāsota vienā no trim krāsām. Saskaņā ar Dirihlē principu $\mathbf{D_2}$ starp šīm šķautnēm var atrast 6 tādas šķautnes, kas nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā (pieņemsim, sarkanā). Aplūkosim šo 6 šķautņu galapunktus divos gadījumos.

1. Kaut vai divi no šiem galapunktiem arī savienoti ar sarkanu šķautni. Tad tie kopā ar A veido meklējamo trijstūri, kura visas malas ir sarkanas.

2. Nekādi divi no šiem 6 galapunktiem nav savienoti ar sarkanu šķautni. Tad katri divi no tiem savienoti ar šķautni, kas ir vienā no abām pārējām krāsām. Saskaņā ar 78. piemēra rezultātu starp šiem 6 galapunktiem var atrast trīs tādus punktus, kas visi savā starpā savienoti ar vienas un tās pašas krāsas šķautnēm. Uzdevums atrisināts.

Komentārs. Jūs jau redzējāt, ka vairāku citu uzdevumu risinājumi balstījās uz 78. piemēra rezultātu. Tā nav nejaušība: šo rezultātu citu uzdevumu risinājumos nākas izmantot ļoti bieži.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

155.° Turnīrā piedalās 6 komandas. Pierādīt, ka jebkurā brīdī var atrast vai nu 3 komandas, kas visas savā starpā jau spēlējušas, vai arī 3 komandas, starp kurām nekādas divas savā starpā vēl nav spēlējušas.

156.° Pierādīt, ka starp jebkurām 6 pilsētām var atrast vai nu 3 tādas pilsētas, kas visas savā starpā pa pāriem savienotas ar aviolīnijām, vai arī 3 tādas pilsētas, starp kurām nav nevienas tiešas aviolīnijas (uzskatām, ka visas aviolīnijas ir abpusējas).

157.° Pierādīt, ka starp jebkuriem 10 nogriežņiem var atrast vai nu 3 tādus nogriežņus, kas visi pa pāriem krustojas, vai arī 4 tādus nogriežņus, no kuriem nekādi divi nekrustojas,

158.[k] Pierādīt, ka starp jebkuriem 9 cilvēkiem var atrast vai nu 3 tādus cilvēkus, kas visi savā starpā ir pazīstami, vai arī 4 tādus cilvēkus, no kuriem nekādi divi nepazīst viens otru.

159.* Izmantojot 158. uzdevuma rezultātu, pierādīt, ka

a) starp jebkuriem 18 cilvēkiem var atrast vai nu 4 tādus cilvēkus, kas visi savā starpā ir pazīstami, vai arī 4 tādus cilvēkus, no kuriem neviens nepazīst otru;

b) starp jebkuriem 14 cilvēkiem var atrast vai nu 3 tādus cilvēkus, kas visi savā starpā ir pazīstami, vai arī 5 tādus cilvēkus, no kuriem neviens nepazīst otru.

3.4.1.2. Ramseja teorēma pilniem grafiem

Pierādīsim ļoti spēcīgu teorēmu, kas vispārina iepriekšējā apakšpunkta aplūkoto piemēru un uzdevumu rezultātus.

<u>Ramseja teorēma.</u> Katriem naturāliem skaitļiem $n \geq 2$ un $m \geq 2$ var atrast tādu skaitli k, lai būtu spēkā īpašība: patvaļīgā ceļā nokrāsojot pilnā grafa P_k šķautnes divās krāsās (katru šķautni savā krāsā), noteikti atradīsies vai nu n tādas virsotnes, kuru visas tās savienojošās šķautnes nokrāsotas pirmajā krāsā, vai arī m tādas virsotnes, kuru visas tās savienojošās šķautnes nokrāsotas otrā krāsā.

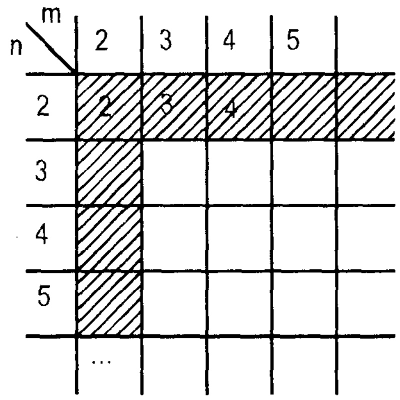
(Iepriekšējā apakšpunktā mēs pierādījām: ja $m = 3$ un $n = 3$, tad par meklējamo k var ņemt 6. Savukārt 79. piemēra risinājums parāda, ka priekš $m = 3$ un $n = 4$ der $k = 10$, bet 158.uzdevumā apgalvots, ka šim gadījumam der pat $k = 9$.)

Ramseja teorēmas apgalvojums atkarīgs no diviem parametriem - m un n; apzīmēsim šo apgalvojumu ar $A(n, m)$. Pierādīsim to ar matemātiskās indukcijas palīdzību.

Turpmāk pierādījuma īsuma labad pirmajā krāsā nokrāsotās šķautnes dēvēsim par α - šķautnēm, bet otrajā krāsā nokrāsotas šķautnes - par β - šķautnēm.

<u>Bāze</u> $n = 2$. Apgalvojam, ka var ņemt $k = m$. Tiešām, ja ir kaut viena α - šķautne, tad tās virsotnes veido prasīto n virsotņu sistēmu; ja visas P_k šķautnes ir β, tad visas šī pilnā grafa virsotnes veido prasīto m virsotņu sistēmu.

Līdzīgi, ja $m = 2$, var ņemt $k = n$. Attēlojot izveidojušos situāciju grafiski (pierādītajiem apgalvojumiem atbilstošas rūtiņās iesvītrotas), esam ieguvuši 62. zīmējumā parādīto situāciju.



62. zīm.

Tagad pieņemsim, ka minētie skaitļi k eksistē parametru vērtību pāriem $(n - 1, m)$ un $(n, m - 1)$; apzīmēsim tos attiecīgi ar k_1 un k_2. Pierādīsim, ka skaitlis $k_1 + k_2$ der par prasīto k vērtību parametru vērtību pārim (n, m).

Aplūkosim pilnu grafu ar $k_1 + k_2$ virsotnēm un patvaļīgi izvēlētu tā virsotni A. No šīs virsotnes izriet $k_1 + k_2 - 1$ šķautne. Acīmredzot, starp tām ir vai nu k_1 α - šķautnes vai arī k_2 β - šķautnes (pretējā gadījumā kopējais skaits nepārsniegtu $k_1 - 1 + k_2 - 1 = k_1 + k_2 - 2$; tā ir pretruna).

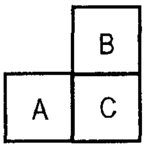
Aplūkojam abas iespējas:

1) no virsotnes A iziet k_1 α - šķautnes. Apskatām šo šķautņu galapunktus; to skaits ir k_1 .

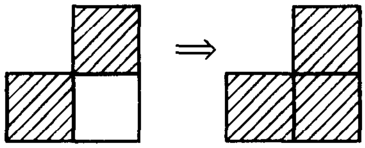
Aplūkojam šo k_1 galapunktu veidoto pilno grafu. Saskaņā ar k_1 izvēli šajā pilnajā grafā P_{k1} var atrast vai nu n - 1 virsotnes, kuras visas savā starpā savieno α - šķautnes (bet tad šīs n - 1 virsotnes kopā ar virsotni A veido prasīto n virsotņu sistēmu), vai arī m virsotnes, kuras visas savā starpā savieno β - šķautnes (tādā gadījumā šī sistēma ir meklētā);

2) gadījumu, kad no virsotnes A iziet k_2 β - šķautnes, analizē līdzīgi; iesakām lasītājam to izdarīt patstāvīgi.

Interpretējot veikto pierādījumu grafiski, iegūstam: ja iekrāsotas rūtiņas A un B, tad var iekrāsot arī rūtiņu C (skat. 63. zīm.). Citādi tas parādīts 64. zīmējumā.



63. zīm.



64. zīm.

Viegli saprast, ka, sākot no situācijas, kas parādīta 64. zīmējumā, un lietojot 63. zīmējumā parādīta aizkrāsošanas likumu, varam pakāpeniski aizkrāsot visas kvadranta rūtiņas 62. zīmējumā, līdz ar to pierādot vispārīgo apgalvojumu A(n, m).

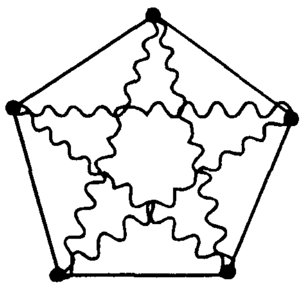
3.4.1.3. Ramseja skaitļi

Mazāko no Ramseja teorēmā minētajiem skaitļiem k (katrām parametru n un m vērtībām) sauc par Ramseja skaitli un apzīmē ar R(n, m). Atceramies, ka $n \geq 2$ un $m \geq 2$.

No Ramseja teorēmas pierādījuma seko fundamentāla nevienādība $R(n,m) \leq R(n-1,m)+R(n,m-1)$, ja n, m ≥ 3. Viegli saprast arī, ka R(n, m) = R(m, n).

Precīza Ramseja skaitļu vērtību aprēķināšana ir viens no interesantākajiem un svarīgākajiem klasiskās kombinatorikas uzdevumiem. Nedaudz aplūkosim to. Atgādinām, ka $n \geq 2$ un $m \geq 2$.

Viegli saprast, ka R(n,2) = n un R(2,m) = m. To, ka $R(n, 2) \leq n$ un $R(2, m) \leq m$, var secināt no iepriekšējā apakšpunkta rezultātiem. To, ka R(n, 2) > n - 1, pierāda nākošais piemērs - grafs P_{n-1}, kurā visas šķautnes nokrāsotas krāsā α. Tad šajā grafā P_{n-1} nav ne divu virsotņu, kuras savienojošā šķautne ir krāsā β, ne arī n virsotņu, kuru visas savienojošās šķautnes ir krāsā α. Tātad ar n - 1 virsotnēm nepietiek.

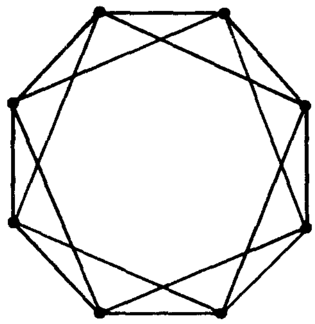


65. zīm.

No 78. piemērā rezultāta seko, ka R(3, 3) < 6. Aplūkojot 65. zīmējumu, redzam, ka R(3, 3) > 5; tiešām, tur redzams piecu virsotņu pilns grafs P_5, kura virsotnes izkrāsotas divās krāsās, un nekādas 3 virsotnes neveido trijstūri, kura visas malas nokrāsotas vienā krāsā.

No nevienādībām R(3, 3) > 5 un R(3, 3) < 6 seko, ka R(3, 3) = 6.

Pierādīsim, ka R(3, 4) = 9.

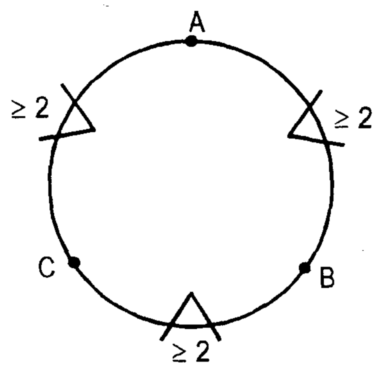


66. zīm.

1. Aplūkojot 66. zīmējumu, varam secināt, ka R(3, 4) = 8. Šajā zīmējumā α - šķautnes nav novilktas, lai nesaraibinātu zīmējumu, bet β - šķautnes novilktas ar nepārtrauktām līnijām.

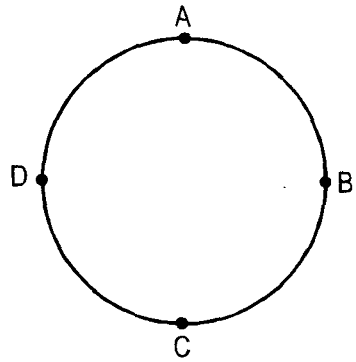
Pārbaudīsim, ka 66. zīmējumā attēlotajam P_8 nevar atrast ne 3 virsotnes, kas visas savienotas ar α - šķautnēm, ne arī 4 virsotnes, kas visas savienotas ar β - šķautnēm.

Iedomāsimies, ka 8 punkti 66. zīmējumā izvietoti uz riņķa līnijas. Tad ar α - šķautnēm savienotas virsotnes, starp kurām uz abiem riņķa līnijas lokiem atrodas vismaz divas citas virsotnes. Apskatām patvaļīgas 3 virsotnes A, B, C; 67. zīmējumā uzreiz redzams, ka, ja tās visas būtu savienotas ar α - šķautnēm, tad pavisam būtu jābūt vismaz 9 virsotnēm, bet tā ir pretruna.



67. zīm.

Savukārt ar β - šķautnēm savienotās virsotnes, starp kurām uz viena riņķa līnijas loka ir 0 vai 1 cita virsotne. Pieņemsim, ka A, B, C, D visas savienotas ar β - šķautnēm (skat. 68. zīm.).



68. zīm.

Ja uz katra no lokiem AB, BC, CD, DA ir tieši viena cita virsotne, tad acīmredzams, ka AC nav β - šķautne: uz abiem lokiem starp A un C atrodas pa trīs citām virsotnēm. Ja kaut uz viena no šiem lokiem - piemēram, uz AB - citu virsotņu nav, tad uz loka ADCB starp A un B ir 6 virsotnes; divas no tām ir C un D, tātad četras pārejās sadalās pa trim lokiem AD, DC, CB. Vismaz vienā no šiem lokiem ir vismaz divas virsotnes, tātad atbilstošie gali nav savienoti ar β - šķautni. Vajadzīgais pierādīts.

2. Tagad pierādīsim, ka R(3, 4) $\leq$ 9. No 79. piemēra seko, ka R(3, 4) $\leq$ 10. Atcerēsimies šī piemēra risinājumu. Tajā tika izmantota patvaļīga virsotne A; 79. piemērā situācijā tika pierādīts, ka no šīs virsotnes iziet vai nu sešas α - šķautnes, vai četras β - šķautnes.

Šajā pierādījuma solī būtiski tika izmantots tas, ka no patvaļīgi izvēlētas virsotnes A iziet 9 šķautnes. Viegli saprast, ka pierādījumā nemaz nebija vajadzīgs, lai par A varētu izvēlēties jebkuru virsotni.

Ja mēs prastu pierādīt, ka 9 virsotņu pilnā grafā P_9, kura šķautnes nokrāsotas 2 krāsās, noteikti var atrast kaut vienu tādu virsotni A, no kuras iziet vai nu sešas α - šķautnes, vai četras β -šķautnes, tad tālāk šo virsotni varētu izmantot virsotnes A vietā un pilnībā atkārtot tālāko 79. piemēra risinājumu.

Pieņemsim pretējo: ne no vienas P_9 virsotnes neiziet ne sešas (vai vairāk) β - šķautnes, ne četras (vai vairāk) α - šķautnes. Tātad no katras virsotnes iziet ne vairāk kā piecas β - šķautnes un ne vairāk kā trīs α - šķautnes. Tā kā no katras virsotnes kopā iziet tieši 8 šķautnes, tad no pieņēmuma seko, ka no katras virsotnes iziet tieši 5 β - šķautnes un tieši 3 α - šķautnes. Bet tas nav iespējams. Tiešām, saskaitīsim visu α - šķautņu galus. Tā kā no katras virsotnes iziet 3 α - šķautnes, tad kopā ir $3 \cdot 9 = 27 \alpha$ - šķautņu galu. Bet katrai α - šķautnei ir 2 gali, tātad to kopējais skaits nevar būt nepāra skaitlis.

Iegūtā pretruna arī pierāda mūsu apgalvojumu $R(3,4) \leq 9$. Kopā ar iepriekš pierādīto $R(3, 4)>8$ iegūstam, ka $R(3, 4) = 9$.

Ievērosim, ka esam atrisinājuši arī 158. uzdevumu.

69. zīmējumā redzamas visas līdz šim precīzi aprēķinātās Ramseja skaitļu vērtības. Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt to pareizību.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
3	3	6	9	14	18	23	28	36		
4	4	9	18							
5•	5	14								
6	6	18								
7	7	23								
8	8	28								
9	9	36								
10	10									
...	...									

69. zīm.

Neviena cita Ramseja skaitļa $R(n, m)$ vērtība līdz šim nav precīzi zināma; pierādītas tikai dažas nevienādības. Lasītājam te paveras plašs pētījumu lauks.

3.4.1.4. Vispārinātie Ramseja skaitļi

Šī apakšpunkta materiālu izstrādājusi I. France, un tas izvērstā izklāstā tiks ietilpināts grāmatā I.France. A. Andžāns. Grafu teorija un tās pielietojumi elementārajā matemātikā.

Izklāsta īsuma labad mēs plaši lietosim apakšgrafa jēdzienu (skat. 3.1. paragrāfu). Ja visas grafa šķautnes nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā, tad grafu sauksim par monohromatisku (no latīņu valodas *mono* - viens, *hromos*- krāsa). Lietojot šos jēdzienus, Ramseja teorēmu var formulēt šādi: katram naturālam skaitlim $n, m \geq 2$ eksistē tāds k, ka, nokrāsojot pilna grafa P_k šķautni vienā no krāsām β un α, grafā P_k atradīsies vai nu monohromatisks apakšgrafs P_n krāsā α, vai arī monohromatisks apakšgrafs P_m krāsā β.

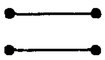
Mēs varētu interesēties arī par minimālo virsotņu skaitu p pilnā grafā P, kas, izkrāsojot pilnā grafa šķautnes divās krāsās (piemēram, sarkanā un zaļā), garantētu cita, ne noteikti pilna monohromatiska apakšgrafa G eksistenci.

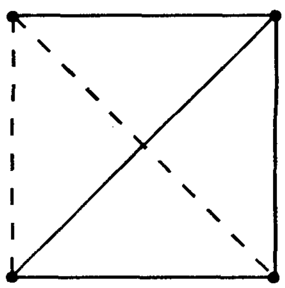
Šīs minimālās p vērtības sauc par vispārinātiem Ramseja skaitļiem atbilstošajam grafam G.

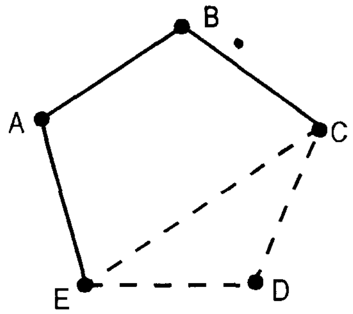
Vispirms aplūkosim vienkāršākas formas apakšgrafus.

81. piemērs. *G =*
Šajā gadījumā p = 2, jo jebkurā pilnā divu krāsu grafā ar 2 virsotnēm ir tikai viena šķautne, un tā ir tikai vienā krāsā.

82. piemērs. *G =*
Skaidrs, ka šajā gadījumā p nevar būt mazāks par 3, jo grafā jābūt vismaz 3 virsotnēm, lai tajā varētu ietilpt minētās formas apakšgrafs. Pamatosim, ka ar 3 virsotnēm jau pietiek. Tā kā tādā gadījumā grafā ir 3 šķautnes, tad vismaz 2 no tām ir vienā krāsā, bet šajā grafā tām abām ir kopīga virsotne. Tātad tās arī veido meklēto apakšgrafu G.

83. piemērs. *G =* 
Vispirms pierādīsim, ka ar p = 4 nepietiek, jo eksistē pretpiemērs (skat. 70. zīm.).

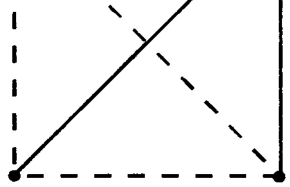

70. zīm.

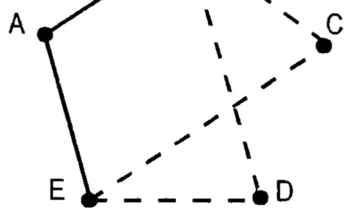


71. zīm.

Pierādīsim, ka der p = 5. Tātad ir jāpierāda, ka katrā 5 virsotņu grafā eksistē monohromatiskais apakšgrafs G. Aplūkosim piecu virsotņu grafu un pieņemsim pretējo - minētās formas monohromatiskais apakšgrafs neeksistē. Pieņemsim, ka šķautne AB ir zaļa (skat. 71. zīm.). Tad šķautnēm EC, ED, DC noteikti ir jābūt sarkanām. Tā kā pieņēmām, ka nevar eksistēt ne zaļš, ne sarkans G, tad šķautnēm BC un AE ir jābūt zaļām. Taču tagad redzam, ka BC un AE veido zaļu G. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un jebkurā 5 virsotņu pilnā grafā eksistē monohromatisks G.

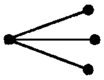
84. piemērs. *G =*
Vispirms pierādīsim, ka ar p = 4 nepietiek, jo eksistē pretpiemērs (skat. 72. zīm.). Parādīsim, ka der p = 5. Ir zināms, ka jau katrā trīs virsotņu grafā eksistē virsotne, no kuras


72. zīm.

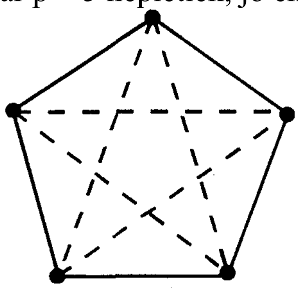


73. zīm.

iziet divas vienas krāsas šķautnes. Pieņemsim, ka tās ir šķautnes AB, AE un ka tās ir zaļas (skat. 73. zīm.). Pieņemsim pretējo - šajā 5 virsotņu grafā neeksistē vajadzīgās formas monohromatisks apakšgrafs. Tādā gadījumā šķautnēm BC, BD, EC, un ED noteikti ir jābūt sarkanām. Taču tagad šķautnes BC, CE un ED veido sarkanu apakšgrafu G. Tā ir pretruna pieņēmumam.

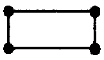
85. piemērs. $G =$ 

Vispirms pierādīsim, ka ar p = 5 nepietiek, jo eksistē pretpiemērs (skat. 74. zīm.).

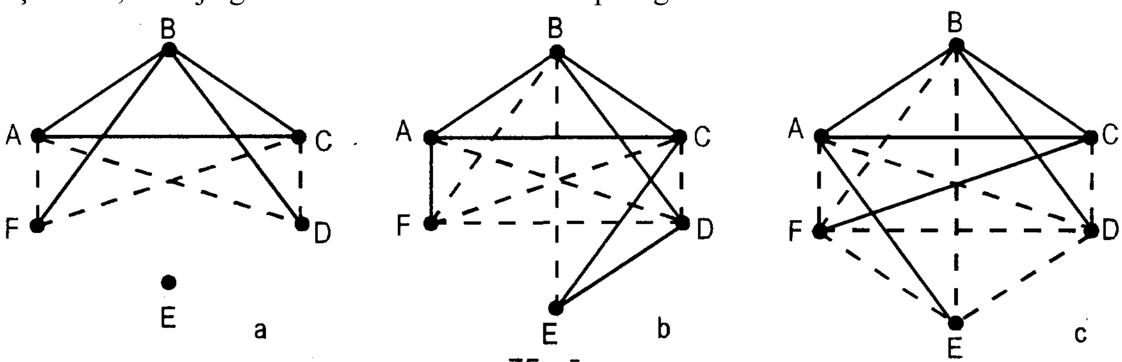


74. zīm.

Pierādīsim, ka katrā 6 virsotņu grafā ir kāds apakšgrafs G. Tā kā grafam jābūt pilnam, tad katra virsotne pieder 5 šķautnēm, tātad vismaz trijām vienas krāsas šķautnēm. Tas arī bija jāpierāda.

86. piemērs. $G =$ 

Vispirms pierādīsim, ka ar p = 5 nepietiek, jo eksistē pretpiemērs (skat. 74. zīm.). Pierādīsim, ka ir derīgs p = 6. Pēc 78. piemēra jebkurā 6 virsotņu grafā ir monohromatisks trijstūris. Pieņemsim, ka aplūkojamā 6 virsotņu grafā ir zaļš trijstūris ABC (skat. 75. zīm. a), kā arī pieņemsim, ka šajā grafā nav monohromatiska apakšgrafa G.



75. zīm.

1. Pieņemsim, ka šķautne BF ir zaļa. Tad, lai grafā nebūtu zaļa AB - BF - FC - CA, šķautnei CF ir jābūt sarkanai. Lai FB - BC - CA - AF nebūtu zaļš, šķautnei AF ir jābūt sarkanai. Pieņemsim, ka šķautne BD ir zaļa, tad analogu spriedumu rezultātā šķautnēm CD, AD jābūt sarkanām. Taču tagad AF -FC - CD - DA veido sarkanu apakšgrafu G. Tātad vismaz viena no šķautnēm BD, BF ir sarkana.

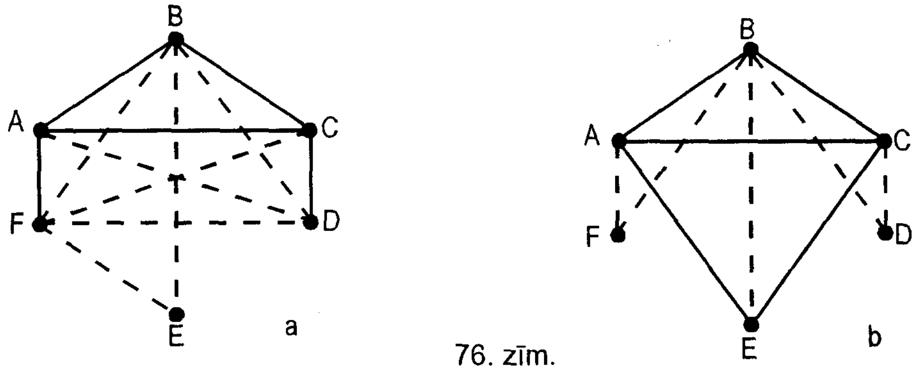
Ja pieņemtu, ka šķautnes BF, BE vienlaicīgi ir zaļas vai šķautnes BE un ED vienlaicīgi ir zaļas, iegūtu analogu rezultātu - katrā pārī būtu vismaz viena sarkana šķautne (visi spriedumi ir līdzīgi). Tātad vismaz divām no šķautnēm BF, BE, BD ir jābūt sarkanām.

2. Pieņemsim, ka sarkanas ir šķautnes BF un BE, bet šķautne BD ir zaļa (skat. 75. zīm. b). Tad arī šķautnes CD un AD ir sarkanas (apskatiet BACDB un ADBCA).

a) Pieņemsim, ka šķautne AF ir zaļa (75. zīm. b). Tad šķautnei FC ir jābūt sarkanai, jo citādi FD - DB - BA - AF veidotu zaļu apakšgrafu G. Lai izvairītos no sarkaniem EB - BF - FD - DE un EB - BF - FC - CE, šķautnēm DE un CE ir jābūt zaļām. Savukārt, tagad šķautnes ED, DB, BC, CE veido zaļu apakšgrafu G. Tā ir pretruna ar pieņēmumu. Tātad šķautnei AF ir jābūt sarkanai.

b) Ja šķautne AF ir sarkana (skat. 75. zīm. c), tad šķautnei AE jābūt zaļai (AE - EB - BF - FA ir sarkans). Arī šķautnei FC ir jābūt zaļai (citādi FA - AD - DC - CF ir sarkans). Lai nebūtu zaļu FC - CA - AE - EF un FC - CB - BD - FD, kā arī AB - BD - DE - AE, šķautnēm ED, EF un FD ir jābūt sarkanām. Taču tagad grafā ir sarkans G = FD - DE - EB - BF.

Tātad visām trijām šķautnēm BF, BE un BD ir jābūt sarkanām (skat. 76. zīm. a).



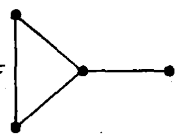
76. zīm.

c) Ja šķautne AF ir zaļa (skat. 76. zīm. a), tad šķautne FC ir sarkana, citādi FA - AB - BC - - CF ir zaļš apakšgrafs G. Šķautnēm CD un CE ir jābūt zaļām, jo pretējā gadījumā FB - BE - EC - CF un CF - FB - BD - DC būtu sarkani apakšgrafi G. Lai AB - BC - CD - DA un EF - FA - AC - CE neveidotu zaļu apakšgrafu G, šķautnēm FE un AD ir jābūt sarkanām. To pašu var teikt par šķautni FD, jo citādi FA - AC - CD - DF būtu zaļš. Taču tagad DF - FE - EB - BD veido sarkanu apakšgrafu G.

Tātad šķautnei AP ir jābūt sarkanai, tāpat arī šķautnei CD, jo tās ir "simetriskas".

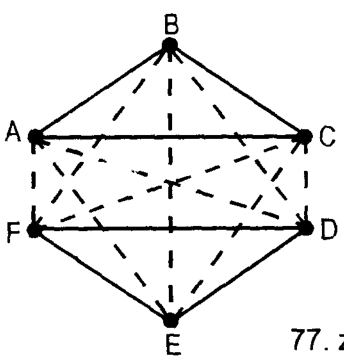
d) Ja šķautnes CD un AF ir sarkanas (skat. 76. zīm. b), tad, lai AF - FB - BE - EA un CD - DB - BE - EC nebūtu sarkani, šķautnēm AE un EC ir jābūt zaļām. Tad AB - BC - CE - EA veido zaļu apakšgrafu G.

Esam pierādījuši, ka jebkurā gadījumā grafā ir monohromatisks apakšgrafs G.

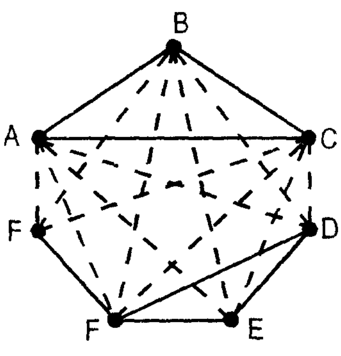
$G=$ 

<u>*87. piemērs.*</u>

Ja p = 6, tad eksistē pretpiemērs (skat. 77. zīm.). Pierādīsim, ka der p = 7. Izmantosim to, ka katram $p \geq 6$ grafā ir monohromatisks trijstūris. Pieņemsim, ka aplūkojamā 7 virsotņu grafā ir zaļš trijstūris ABC (skat. 78. zīm.), bet noteikti nav zaļa apakšgrafa G. Tādā gadījumā visas šķautnes AG, AF, AE, AD, BG, BF, BE, BD, CG, CF, CE un CD ir sarkanas. Šķautne DE nevar būt sarkana, jo tad eksistētu sarkans apakšgrafs G - trijstūris EDC un šķautne DA. Analogi šķautnēm EF, FG jābūt zaļām. Arī šķautnei DF ir jābūt zaļai, jo citādi eksistētu sarkans apakšgrafs G - trijstūris FDC un šķautne BD. Ja šķautne DF ir zaļa, tad eksistē zaļš apakšgrafs G - FDC un šķautne FG. Tā ir pretruna pieņēmumam, un grafā noteikti būs vai nu zaļš, vai sarkans apakšgrafs G.



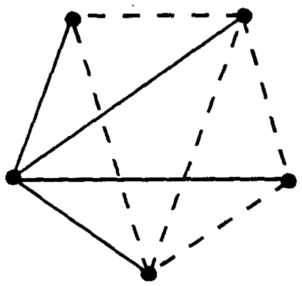
77. zīm.



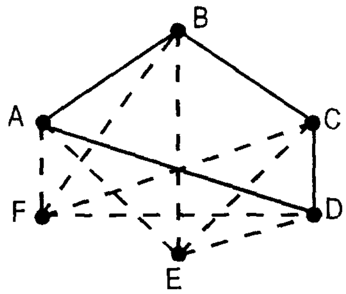
78. zīm.

88. piemērs. $G =$ 

Ja p = 5, tad eksistē pretpiemērs (skat. 79. zīm.). Pierādīsim, ka der p = 6. Ir zināms, ka katram p ≥ 6 grafā ir monohromatisks četrstūris (skat. 55. piemēru). Pieņemsim, ka aplūkojamā 6 virsotņu grafā ir zaļš četrstūris ABCD (skat. 80. zīm.).

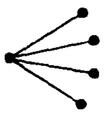


79. zīm.



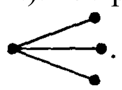
80. zīm.

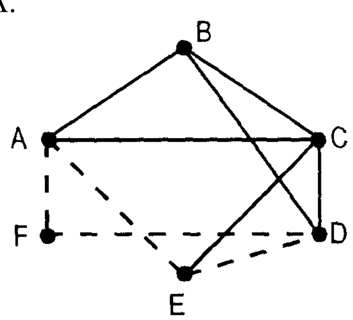
Lai šādā grafā nebūtu monohromatiska zaļa apakšgrafa G, šķautnēm AF, AE, CF, CE, BF, BE, DF, DE ir jābūt sarkanām. Taču tādā gadījumā grafā ir pat vairāki sarkani apakšgrafi G, piemēram, AE, EC, FD.

89. piemērs. $G =$ 

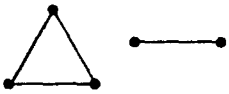
Ja p = 6, eksistē pretpiemērs (skat. 81. zīm.). Pierādīsim, ka der p = 7. Pieņemsim pretējo - nav tādas virsotnes, no kuras izietu vismaz 4 vienas krāsas šķautnes. Tātad no katras virsotnes iziet tieši 3 sarkanas un tieši 3 zaļas šķautnes. Tas nevar būt, jo tad grafā ir tieši $^{7\cdot 3}/_{2}$ zaļas (vai sarkanas) šķautnes, taču tas nav vesels skaitlis. Tātad pieņēmumā ir pretruna.

90. piemērs. $G =$

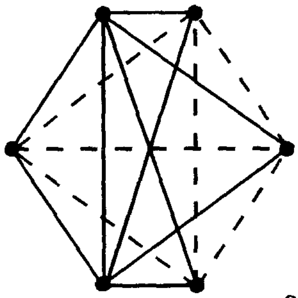
Ja p = 5, eksistē pretpiemērs (skat. 82. zīm.). 89. piemērā mēs pierādījām, ka katram p ≥ 5 grafā ir monohromatisks apakšgrafs $G' =$ . Aplūkosim 6 virsotņu grafu un pieņemsim, ka tajā ir zaļš apakšgrafs G' - AB, BC, BD (skat. 83. zīm.). Pieņemsim pretējo - šāds apakšgrafs G neeksistē. Tad šķautnēm AF, AE un DF, DE ir jābūt sarkanām. Lai šajā grafā nebūtu arī sarkana apakšgrafa G, šķautnēm EC, DB, AC ir jābūt zaļām. Taču tad grafā ir zaļš apakšgrafs G = EC, CD, DB, BA.



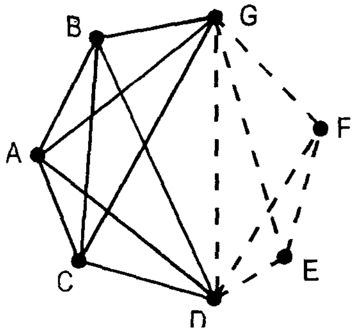
83. zīm.

91. piemērs. $G =$ 

Ja p = 6, eksistē pretpiemērs (skat. 84. zīm.). Pierādīsim, ka der p = 7. Izmantosim faktu, ka katram p ≥ 6 grafā ir monohromatisks trijstūris. Pieņemsim, ka trijstūris ABC ir zaļš (skat. 85.zīm.).

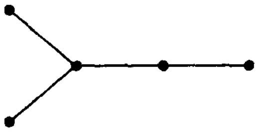


84. zīm.

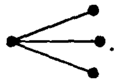


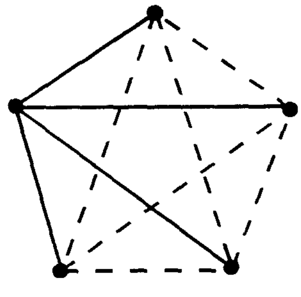
85. zīm.

Pieņemsim pretējo - šajā grafā nav monohromatiska apakšgrafa G. Tādā gadījumā, lai izvairītos no zaļa apakšgrafa G, visas atlikušās virsotnes savā starpā ir jāsavieno ar sarkanām šķautnēm. Tātad DGFE veido pilnu sarkanu četrstūri. Lai nebūtu sarkana apakšgrafa G, šķautnēm BG, AG, CG, BD, CD, AD ir jābūt zaļām. Taču tādā gadījumā trijstūris BCG un šķautne AD veido zaļu apakšgrafu G. Kā redzam, grafā jebkurā gadījumā būs monohromatisks apakšgrafs G.

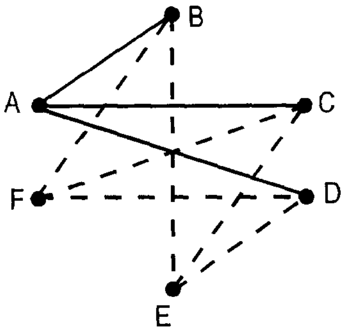
G = 

<u>92. piemērs.</u>

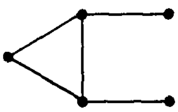
Ja p = 5, eksistē pretpiemērs (skat. 86. zīm.). Pierādīsim, ka der p = 6. Izmantosim faktu, ka katram p $\geq$ 6 grafā ir monohromatisks apakšgrafs **G' =** . (tas seko no 89. piemēra). Pieņemsim, ka mūsu aplūkojamā 6 virsotņu grafā ir zaļš apakšgrafs *G'*= AB, AC, AD, bet nav monohromatiska apakšgrafa G (skat. 87. zīm.). Tādā gadījumā šķautnēm BF, BE, CF, CE, DF, DE ir jābūt sarkanām (pretējā gadījumā, piemēram, šķautnes AB, AC, AE, BF veidotu zaļu apakšgrafu G). Esam ieguvuši, ka šajā grafā ir sarkans apakšgrafs G = ED, EC, EB, BF. Tātad pieņēmums ir aplams, un jebkuram p $\geq$ 6 grafā būs monohromatisks apakšgrafs G.



86. zīm.

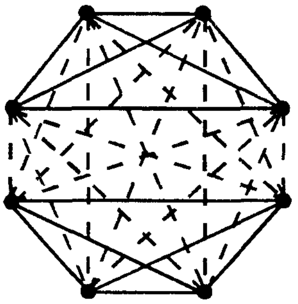


87. zīm.

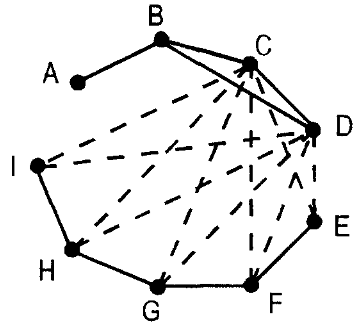
G = 

<u>93. piemērs</u>

Ja p = 8, eksistē pretpiemērs (skat. 88. zīm.). Pierādīsim, ka katrā grafā ar 9 virsotnēm ir monohromatisks apakšgrafs G. Izmantosim 87. piemērā pierādīto, ka jebkuram p $\geq$ 7 grafā ir monohromatisks apakšgrafs G'. Aplūkosim 9 virsotņu grafu un pieņemsim, ka tajā ir zaļš apakšgrafs *G'*= BCD un AB (skat. 89. zīm.). Pieņemsim, ka grafā nav monohromatiska apakšgrafa G, tādā gadījumā šķautnēm CJ, CH, CG, CE, DJ, DH, DG, DE jābūt sarkanām. Lai grafā nebūtu sarkana apakšgrafa G, šķautnēm EF, FG, GH, HJ ir jābūt zaļām, bet tad šķautne HF nevar būt zaļa. Tā ir sarkana. Taču tagad grafā ir sarkans apakšgrafs G, ko veido, piemēram, trijstūris HFC un šķautnes CJ un FD. Tā ir pretruna mūsu pieņēmumam, ka šādā grafā nav monohromatiska apakšgrafa G.



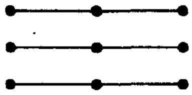
88. zīm.



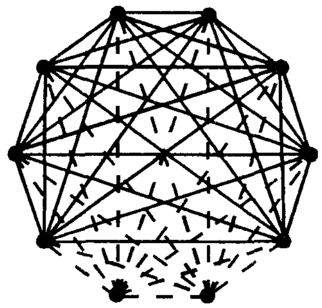
89. zīm.

Aplūkosim vienu nedaudz sarežģītāku šāda tipa uzdevumu.

<u>*94. piemērs.*</u> *Pierādīt, ka katrā pilnā divu krāsu grafā ar 11 virsotnēm ir monohromatisks apakšgrafs G! Pierādīt, ka ne katrā 10 virsotņu grafā būs šāds apakšgrafs G.*

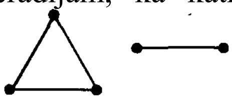
G =  .

<u>Risinājums.</u> Vispirms uzkonstruēsim grafu, kurā ir 10 virsotnes, bet kurā nav ne zaļa, ne sarkana apakšgrafa G (skat. 90. zīm.).

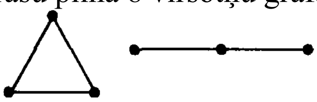


90. zīm.

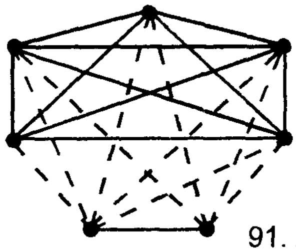
Lai pierādītu, ka katram 11 virsotņu grafam eksistē apakšgrafs G**,** vispirms pierādīsim vairākus starprezultātus.

A. Jau 91. piemērā pierādījām, ka katrā 7 virsotņu pilnā divu krāsu grafā ir monohromatisks **apakšgrafs G^1 =**  .

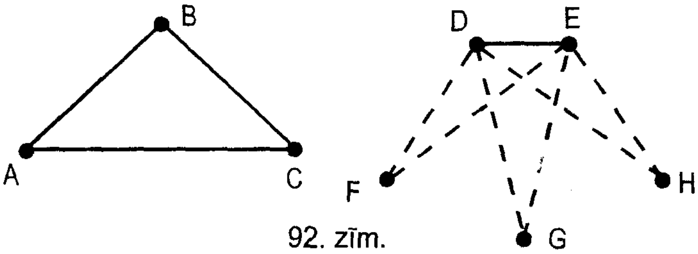
B. Pamatosim, ka katrā divu krāsu pilnā 8 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs

G^2 =  .

Vispirms pierādīsim, ka 7 virsotņu grafam eksistē pretpiemērs (skat. 91. zīm.). Izmantosim faktu, ka katrā divu krāsu 7 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs G^1. Tātad arī jebkurā 8 virsotņu grafā būs šāds apakšgrafs G^1 Aplūkosim tādu 8 virsotņu grafu, kurā ir zaļš apakšgrafs G^1 = ABC un DE (skat. 92. zīm.), bet nav monohromatiska apakšgrafa G^2. Lai neeksistētu zaļš apakšgrafs G^2, šķautnēm DF, DG, DH, EF, EG un EH noteikti ir jābūt sarkanām. Analizēsim divus gadījumus.



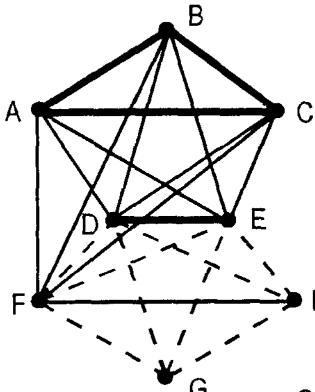
91. zīm.



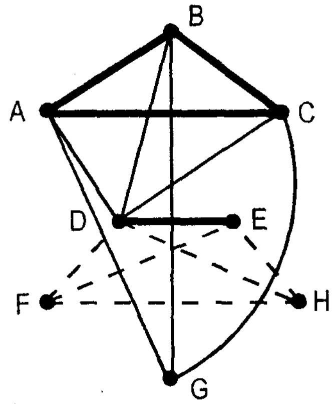
92. zīm.

1. Šķautne FH ir zaļa (skat. .93. zīm.). Tādā gadījumā, lai nebūtu zaļa apakšgrafa G^2, ko veidotu trijstūris ABC un šķautnes FH, HG vai arī šķautnes FH, GF, šķautnēm FG, GH jābūt sarkanām. Ir izveidojušies divi sarkani trijstūri FEG un GHD. Lai nerastos sarkans apakšgrafs G^2, šķautnēm DA, DB, DC un EA, EB, EC jābūt zaļām. Tā kā arī trijstūris GHE ir sarkans, tad šķautnēm FA, FB, FC arī jābūt zaļām (citādi tās kopā ar šķautni FD un minēto trijstūri veido sarkanu apakšgrafu G^2). Taču tagad ir redzams, ka trijstūris CBF un šķautnes DA, AE veido zaļu G^2. Tā ir pretruna pieņēmumam, ka 8 virsotņu grafā nav monohromatiska apakšgrafa G^2.

2. Šķautne FH ir sarkana (skat. 94. zīm.).



93. zīm.

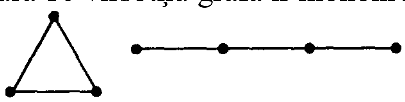


94. zīm.

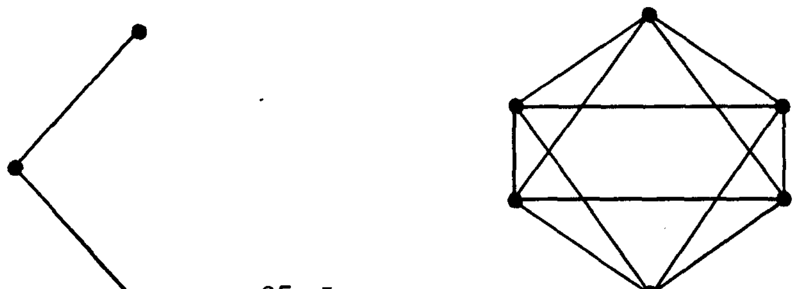
Tā kā trijstūris EFH ir sarkans un arī šķautne GD ir sarkana, tad, lai nebūtu sarkana apakšgrafa G^2, šķautnēm DA, DB, DC ir jābūt zaļām, bez tam zaļām jābūt arī šķautnēm AG, BG, CG. Taču tagad trijstūris ACG un šķautnes ED, DB veido zaļu apakšgrafu G^2.

Tātad 8 virsotņu grafa noteikti ir mon6hromatisks apakšgrafs G^2.

C. Tagad pierādīsim, ka jebkurā 10 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs

$G^3 =$ 

Pierādīsim, ka eksistē tāds 9 virsotņu grafs, kuram dotā īpašība nav spēkā (skat. 95. zīm.).

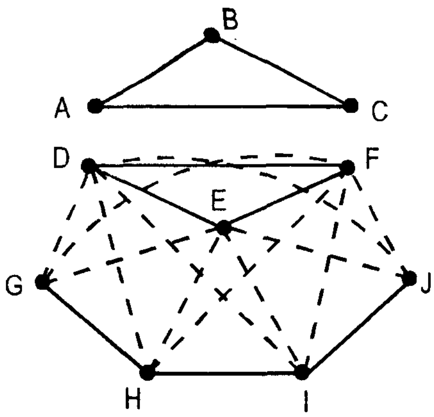


95. zīm.

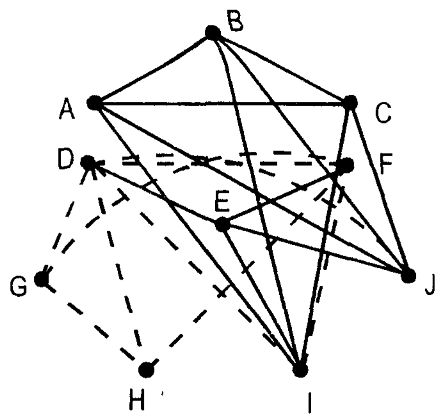
Zīmējumā nenovilktās šķautnes velk otrā krāsā.

Lai pierādītu, ka 10 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs G^3**,** izmantosim B punktā pierādīto, ka grafos, kuru virsotņu skaits nav mazāks par 8, ir monohromatiski apakšgrafi G^2. Pieņemsim, ka mūsu aplūkojamā 10 virsotņu grafā ir zaļš apakšgrafs G^2 - ABC un DE - EF. (skat. 95. zīm.). Pieņemsim pretējo - šādā grafā nav monohromatiska apakšgrafa G^3. Tādā gadījumā šķautnēm DG, DH, DI, DJ un FG, FH, FI, un FJ ir jābūt sarkanām (skat. 96. zīm.). Aplūkosim divas iespējas.

1. Ja šķautne DF ir zaļa (skat. 95. zīm.), tad šķautnēm EG, EH, EJ, EI ir jābūt sarkanām. Tādā gadījumā, lai nebūtu sarkana apakšgrafa G^3, šķautnēm GH, HI, IJ ir jābūt zaļām. Citādi, piemēram, trijstūris EGH un šķautnes DI, IF, FJ veido sarkanu apakšgrafu G^3 (par pārējām šķautnēm spriedums ir analogs). Tādā gadījumā trijstūris ABC un šķautnes GH, HI, IJ veido zaļu apakšgrafu G^3.



96. zīm.



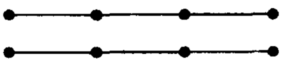
97. zīm.

2. Šķautne DF ir sarkana (skat. 97. zīm.). Ja kāda no šķautnēm, piemēram, GH, ir sarkana, tad trijstūri GHF un GDH ir sarkani, un, lai nebūtu sarkana apakšgrafa G^3, šķautnēm JE un IE jābūt zaļām, citādi šķautnes JF - FI - IE un trijstūris GHF veido sarkanu apakšgrafu G^3. Tāpat arī šķautnēm AI, BI, CI un JA, JB, JC jābūt zaļām. Tagad trijstūris JCB un šķautnes DE, EI, IA veido zaļu apakšgrafu G^3.

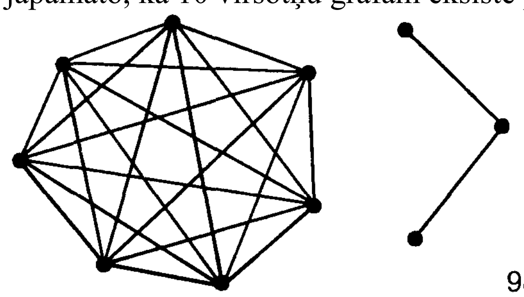
Tātad šķautne GH nevar būt sarkana. Analogi spriežam par šķautnēm HI, IJ. Tātad tās visas ir zaļas un kopā ar trijstūri ABC veido zaļu apakšgrafu G^3.

Esam pierādījuši, ka katrā grafā, kura virsotņu skaits ir vismaz l0, ir monohromatisks apakšgrafs G^3.

D. Pamatosim, ka jebkurā 11 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs

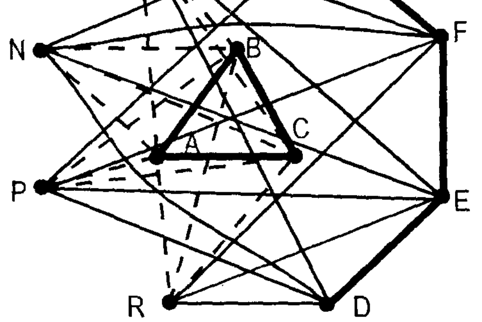
G^4 = 

Vispirms, protams, ir jāpamato, ka 10 virsotņu grafam eksistē pretpiemērs (skat. 98. zīm.).


98. zīm.

Zīmējumā nenovilktās šķautnes velk otrā krāsā.

Lai pierādītu, ka 11 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs G^4, izmantosim C punktā pierādīto. Aplūkosim patvaļīgu 11 virsotņu grafu un pieņemsim, ka tajā ir zaļš apakšgrafs G^3 - ABC un DE - EF - FG (skat. 98. zīm.), bet nav monohromatiska apakšgrafa G^4. Lai izvairītos no zaļa apakšgrafa G^4, šķautnēm AM, AN, AP, AR, BM, BN, BP, BR, CM, CN, CP, CR ir jābūt sarkanām, citādi šo šķautņu un AB, BC, CA trijnieki kopā ar šķautnēm DE, EF, FG veidotu apakšgrafu G^4.



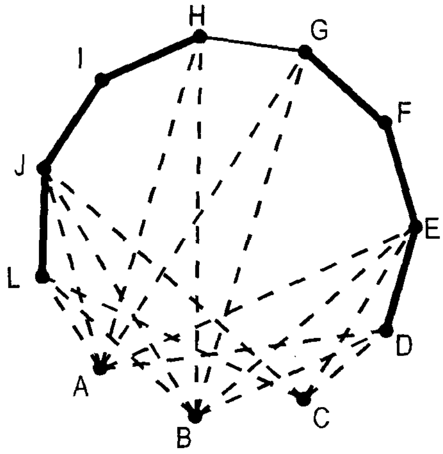
99. zīm.

Tā kā tagad ir izveidojušās vairākas sarkanu šķautņu virknes, kuru garums ir 3 (piemēram, AM - MB - BN u. c.), tad šķautnēm MG, MF, ME, MD, NG, NF, ND, NE un arī RG, RF, RD, RE (citādi RD - DP - PC un NA - AM - MB būs sarkans), kā arī šķautnēm PD, PE, PF, PG jābūt zaļām. Taču tagad šķautnes RD - DM - ME un PG - GF - FN veido zaļu apakšgrafu G^4.

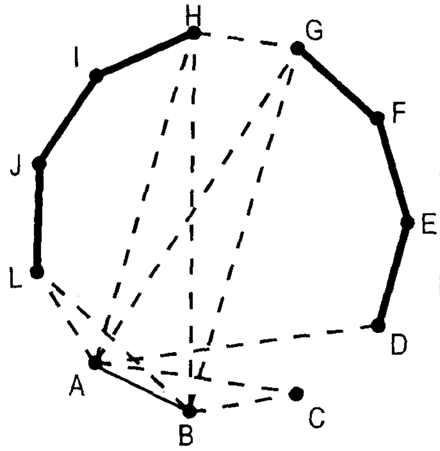
Tātad katrā 11 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs G^4**.**

E. Tagad pierādīsim sākumā prasīto. Izmantosim D punktā pierādīto, ka 11 virsotņu grafā ir monohromatisks apakšgrafs G^4. Aplūkosim 11 virsotņu grafu un pieņemsim, ka tajā ir zaļš apakšgrafs G^4**,** kuru veido virsotnes L - J - I - H un G - F - E - D (skat. 100. zīm.). Izmantojot šo pieņēmumu par izejas pozīciju, analizēsim vairākas iespējas, pierādot, ka katrā no tām grafā ir monohromatisks apakšgrafs G^4. Visos zīmējumos sākuma pozīcija ir iezīmēta stingrāk.

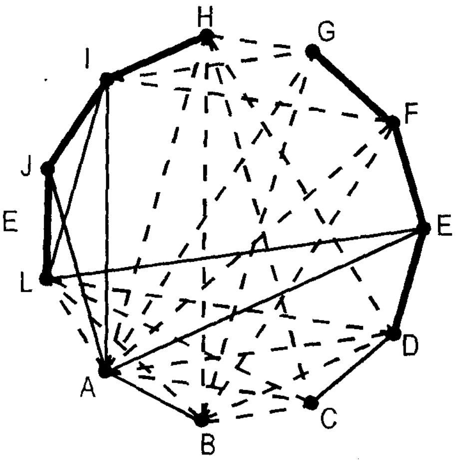
1. Pieņemsim, ka šķautne HG ir zaļa (skat. 100. zīm.). Tā kā tad L - J -I, H - G - F un šķautne ED ir zaļi, tad, lai nebūtu zaļa apakšgrafa G, šķautnēm DC, DB, DA, EA, EB, EC ir jābūt sarkanām. Analogi, tā kā D - E - F , G - H - I un JL ir zaļi, tad šķautnēm LA, LB, LC un JA, JB, JC jābūt sarkanām. Tā kā gan L - J - I, D - E - F, gan šķautne HG ir zaļi, sarkanām jābūt arī šķautnēm HA, HB, HC, GA, GB, GC. Esam ieguvuši, ka D - C - E, G - B - J un H - A - L veido sarkanu apakšgrafu G.



100. zīm.



101. zīm.



102. zīm.

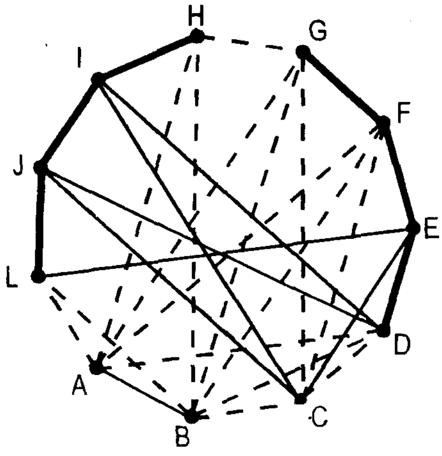
2. Tātad, lai grafā nebūtu monohromatiska apakšgrafa G, šķautne HG var būt tikai sarkana. Šķautnes AB, BC vienlaicīgi nevar būt zaļas, citādi A - B - C, L - I - J, G - F - E veido zaļu apakšgrafu G.

Pieņemsim, ka šķautne AB ir zaļa, bet šķautne BC ir sarkana (skat. 101. zīm., otrādi visi spriedumi ir analogi). Ja šķautne AB ir zaļa, tad, tā kā D - E - F, E - F - G, H - I - J, I - J - L ir zaļi, lai izvairītos no zaļa apakšgrafa G, visām šķautnēm AG, AH, BH, BG un AC, BL, BD, AD jābūt sarkanām. Šķautnes AB un AL abas reizē nevar būt zaļas, jo tad B - A - L , I - J - H un G - F - E veidotu zaļu apakšgrafu G. Tātad šķautne AL noteikti ir sarkana.

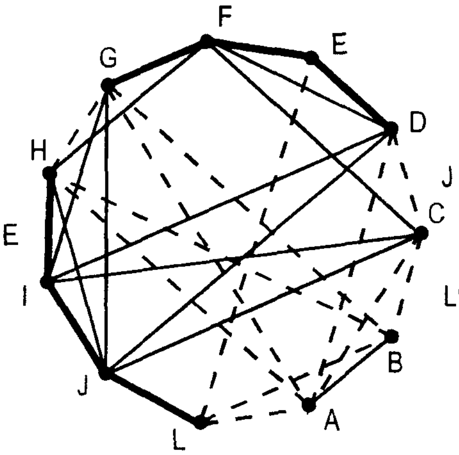
a) Pieņemsim, ka šķautne CD ir zaļa (skat. 102. zīm.). Tādā gadījumā C - D - E, L - J - I un FG ir zaļi. Lai nebūtu zaļa apakšgrafa G, šķautnēm FA, FB jābūt sarkanām. Lai no G - F - E, H - I - J un šķautnes CD nerastos zaļš apakšgrafs G, šķautnēm CL, DL jābūt sarkanām. Ja izvēlas zaļu L - J -I, G - F - E un šķautni CD, tad arī šķautnēm CH, DH jābūt sarkanām. (Ja izvēlas zaļu C - D - E, H - I - J un šķautni GF, tad arī šķautnes GL un PL ir sarkanas - tas turpmākajā spriedumā netiks izmantots.)

Aplūkosim sarkanus F - B - D, C - H - G un šķautni AL. Lai no šī apakšgrafa neiegūtu sarkanu apakšgrafu G, šķautnēm AE, LE, AI, LI, AJ jābūt zaļām. Tagad ievērosim, ka J - A - B, C - D - E un šķautne GF ir zaļi. Lai neveidotos zaļš apakšgrafs G, šķautnēm GI, FI, GL, FL, FH jābūt sarkanām (lai nesarežģītu zīmējumu, novilksim tikai šķautnes GI, FI). Esam ieguvuši sarkanu apakšgrafu G, ko veido, piemēram, G - I - F, H - A - L, C - B - D. Tātad šķautne CD nevar būt zaļa. Atgriezīsimies a punkta sākumā un novilksim šo šķautni sarkanā krāsā (skat. 103. zīm.).

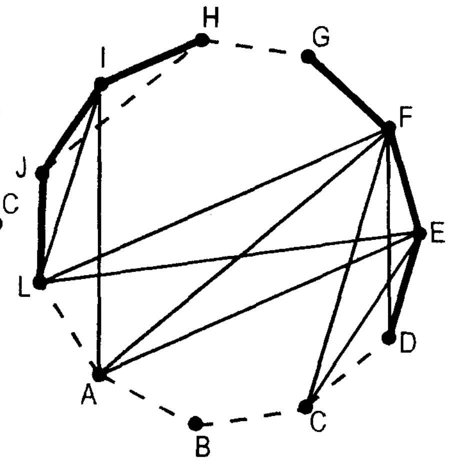
b) Pieņemsim, ka šķautne LE ir zaļa (skat. 103. zīm.). Tā kā L - E - D, J - I - H un šķautne FG ir zaļi, tad, lai nerastos zaļš apakšgrafs G, šķautnēm FA, FB, FC, GC ir jābūt sarkanām.



103. zīm.



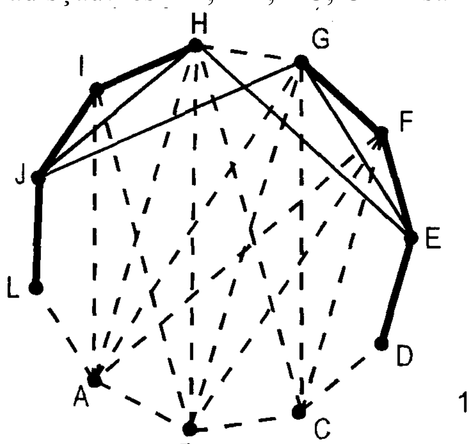
104. zīm.



105. zīm.

Tā kā G - H - B, F - A - L un CD ir sarkani, tad, lai nerastos sarkans G, šķautnēm CE, CJ, CI, DJ, DI ir jābūt zaļām. Tagad zaļo G veido H - I - D, C - J - L un E - F - G.

Tādā gadījumā šķautne LE noteikti ir sarkana (skat. 104. zīm.). Aplūkojot sarkanos E - L - B, D - A - C un šķautni HG, lai neveidotos sarkans apakšgrafs G, šķautnēm GI, GJ, HJ, HF jābūt zaļām. Arī A - H - G, E - L - B un šķautne CD var veidot sarkanu apakšgrafu G, tāpēc šķautnēm DF, CF, DI, CI, DJ, CJ jābūt zaļām. Taču tagad L - J - C, D - I - H un G - F - E veido zaļu apakšgrafu G. Tātad šķautne LE nevar būt ne zaļa, ne sarkana. Tātad pretruna ir iepriekšējā pieņēmumā, ka šķautne AB (līdz ar to tas pats ir spēkā arī par šķautni BC) nevar būt zaļa. Tātad jāizanalizē vēl gadījums, kad šķautnes LA, AB, BC, CD ir sarkanas.



106. zīm.

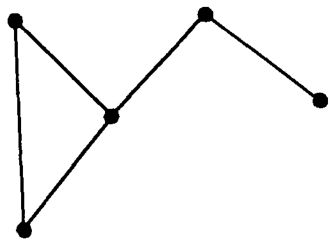
3. Aplūkosim šķautni HJ (līdzvērtīgi spriedumi būs par šķautnēm GE, GJ, HE). Ja tā ir sarkana, tad šķautnēm CE, CF, DF, AE, AF, AI, LI, LF, LE jābūt zaļām (skat. 106. zīm.). Ir redzams, ka A - F - G, C - E - D un L - J - I veido zaļu apakšgrafu G. Tātad visām šķautnēm HJ, GE, GJ, HE jābūt zaļām (skat. 106. zīm.). Tā kā G - J - L, D - E - F un šķautne IH ir zaļi, tad, lai nebūtu zaļa apakšgrafa G, šķautnēm IA, IB, HA, HB, HC jābūt sarkanām. Tā kā L - J -I, H - E - D un šķautne GF ir zaļi, tad arī šķautnēm GA, GB, GC, FA, FB, FC ir jābūt sarkanām. Taču tagad esam ieguvuši sarkanu apakšgrafu G, kas sastāv no D - C - F, G - B - H, I - A - L.

Visos aplūkotajos gadījumos grafā ir vai nu zaļš, vai sarkans apakšgrafs G. Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir aplams, un 11 virsotņu grafā vienmēr būs monohromatisks apakšgrafs G.

Patstāvīgai risināšanai dota virkne uzdevumu, kas balstās uz konkrētas formas monohromatiska apakšgrafa atrašanu kādā grafā, tikai šoreiz uzdevumi nav noformulēti grafu valodā.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

160. Starp jebkurām divām Visbijas pilsētām pastāv vai nu autobusu satiksme, vai dzelzceļa satiksme. Kāds ir mazākais skaits pilsētu, kas jāiekļauj tūrista ceļvedī, lai tūrists noteikti varētu izvēlēties 6 pilsētas un apceļot tās visas, katrā iegriežoties tieši vienu reizi, izmantojot tikai vienu no satiksmes līdzekļiem?
161. Festivālā daži kolekcionāri savstarpēji apmainījās ar markām, bet daži - ar nozīmītēm. Kāds ir mazākais iespējamais festivāla dalībnieku skaits, ja eksperts apgalvoja, ka noteikti var atrast tādus kolekcionārus A un B un tādus kolekcionārus C, D, E un F, starp kuriem A apmainījies ar markām (vai ar nozīmītēm) vismaz ar C un D, bet B apmainījies ar markām (vai ar nozīmītēm) vismaz ar E un F ?
162. Nezinīša Zvaigžņu kartē ir 9 zvaigznes, kuras viņš savā starpā ir savienojis vai nu ar zaļu, vai ar dzeltenu līniju. Pierādīt, ka šajā kartē noteikti varēs atrast vai nu zaļu, vai dzeltenu Nezinīša Pūķi (skat. 107. zīm). Vai to varētu pierādīt, ja Nezinīša kartē būtu 8 zvaigznes? (Pūķa aste var pagriezties arī citā virzienā).



107. zīm.

163. Sporta dienas ietvaros skolā tiek rīkoti atsevišķi badmintona un galda tenisa dubultspēļu turnīri zēniem (dubultspēlē piedalās divi sportisti no katras komandas). Lai pieteiktu klases komandu kādam turnīram, šajā komandā jābūt trim dubultspēļu pāriem. 6.[a] klasē mācās 8 zēni, bet 6.[b] klasē - 7 zēni. Ir zināms, ka katri divi zēni var kopā labi spēlēt vai nu badmintonu, vai tenisu. Vai abas klases noteikti varēs pieteikt savas komandas kādā no turnīriem?
164. Rajonā ir 8 pagasti. Starp katriem diviem pagastiem ir vai nu zemes ceļš, vai asfaltēts ceļš. Pierādīt, ka noteikti var izvēlēties 6 pagastus un apbraukāt tos visus, katrā iegriežoties tieši vienu reizi un beigās atgriežoties izejas punktā. Pie tam jābrauc vai nu tikai pa zemes ceļiem, vai tikai pa asfaltu. Vai to pašu var apgalvot par kaimiņu rajonu, kurā ir 7 pagasti?
165. Pierādīt, ka patvaļīgā 9 cilvēku sabiedrībā noteikti atradīsies tāds cilvēks B, kam ir tieši 4 paziņas, un vēl vismaz 2 citi šīs sabiedrības locekļi A un C, kas savā starpā ir pazīstami, vai arī tāds B, kam ir tieši 4 svešinieki, un tādi citi A un C, kas savā starpā nav pazīstami.
166. Vecpilsētā ir 9 pieminekļi. Starp katriem diviem pieminekļiem ir iestādīta vai nu liepu, vai nu kastaņu aleja. Ir zināms, ka Vecpilsētā nav trīs tādu pieminekļu, kuri savā starpā būtu saistīti ar liepu alejām. Pierādīt, ka noteikti ir trīs tādi pieminekļi, kas savā starpā ir saistīti ar kastaņu alejām, un bez tam starp šiem pieminekļiem var izvēlēties vismaz divus tādus pieminekļus, no kuriem pa kastaņu aleju var nokļūt pie vēl kāda cita pieminekļa.

167. Pierādīt, ka starp brīvi izvēlētiem 18 divciparu skaitļiem noteikti atradīsies vai nu četri tādi skaitļi, kam visiem savstarpēji ciparu summas ir vienādas, vai arī četri tādi skaitļi, kam visas ciparu summas ir dažādas.
168. Pie Pētera atnāca 10 draugi. Katriem diviem draugiem ir kopīga interese vai nu par šahu, vai par makšķerēšanu. Pēterim ir 2 galdiņi trim personām. Pierādīt, ka pie abiem galdiņiem var nosēdināt vienas interešu grupas pārstāvjus. Kā būtu tad, ja pie Pētera būtu atnākuši 9 draugi?

3.4.1.5. Nobeigums

Viegli saprast, ka līdzīgus jautājumus var uzdot arī, aplūkojot minimālo virsotņu skaitu pilnā grafā P_p , kas garantē vai nu monohromatiska sarkana apakšgrafa G_1 eksistenci, vai arī monohromatiska zaļa apakšgrafa G_2**,** eksistenci, kur G_1 un G_2 var arī nebūt vienādi; tādējādi iegūstam jēdzienu par vispārināto Ramseja skaitli $\underset{\sim}{R}(G_1, G_2)$. Uzdevumu vēl tālāk vispārinot, varam aplūkot krāsošanu vairākās krāsās un pēc analoģijas ar minēto ieviest vispārināto Ramseja skaitli $\underset{\sim}{R}$ (G_1, $\mathbf{G_2}$ **...,** G_n). Visi šie un vēl daudzi citi jautājumi veido t.s. vispārināto Ramseja grafu teoriju, kas ir plaša un sazarota matemātikas nozare un intensīvu pētījumu joma.

3.4.2. Ramseja tipa uzdevumi, kas saistāmi ar nepilniem grafiem

Iepriekšējā paragrāfā tika pierādīti apmēram viena tipa rezultāti: ja pilnā grafā P ar pietiekami daudzām virsotnēm katra šķautne nokrāsota vienā no divām krāsām, tad grafā P ir noteiktas formas un izmēru monohromatisks apakšgrafs vienā no izraudzītajam krāsām, ikvienā gadījumā negarantējot, tieši kurā krāsā būs meklējamais monohromatiskais apakšgrafs.

Plaša grafu teorijas nozare nodarbojas ar jautājumu: cik daudz šķautņu jābūt nokrāsotām vienā noteiktā krāsā, lai varētu garantēt, ka monohromatiskais apakšgrafs būs tieši šajā krāsā?

Lai nesaraibinātu zīmējumu, runājot par divām krāsām, problēmu nomaina pēc būtības ekvivalents jautājums: cik šķautņu jānovelk grafā, kurā ir n virsotnes, lai varētu garantēt, ka tajā noteikti atradīsies noteiktas formas apakšgrafs? (Nenovilktās šķautnes tad var interpretēt kā otrā krāsā nokrāsotās šķautnes, kā mēs jau vairākkārt esam darījuši.)

95. piemērs. *(Turana teorēma). Ja grafā ar n virsotnēm ir vairāk nekā $n^2/4$, šķautņu, tad tajā noteikti ir trīs virsotnes, kas pa pāriem savienotas ar šķautnēm.*

Pierādījums. Apskatām grafu, kurā ir n virsotnes; pieņemsim, ka tajā nav trīs virsotņu, kas pa pāriem savienotas ar šķautnēm (turpmāk sacīsim vienkārši "grafā nav trijstūru"). Apskatīsim starp tām virsotni ar maksimālo pakāpi; pieņemsim, ka tā ir virsotne A un p(A)=x. Skaidrs, ka $x \le n - 1$.

Visas grafa virsotnes tagad varam iedalīt 3 daļās:

1) virsotne A ar pakāpi x,

2) tās virsotnes $B_1, B_2, ..., B_x$, kas tieši savienotas ar virsotni A. Lai neveidotos trijstūris, nekādas divas no tām nav savienotas savā starpā; tātad katrai no virsotnēm B_i pakāpe nepārsniedz n - x,

3) tās virsotnes $C_1, C_2 ..., C_{n-x-1}$ **,** kas nav tieši savienotas ar šķautni ar A; saskaņā ar x izvēli katrai no tām pakāpe nepārsniedz x.

Tātad visu virsotņu pakāpju summa ir ne lielāka kā

$$x + x(n -x) + (n-x-1)\cdot x = x + nx - x^2 + nx - x^2 - x = -2x^2+ 2nx = -2(x - {}^{n}/_{2})^2 + n^2/2 \le n^2/2$$

Tā kā katrai šķautnei ir divi gali un visu virsotņu visu pakāpju summa ir vienāda ar visu šķautņu visu galu kopīgo skaitu, tad grafa šķautņu skaits nepārsniedz $\frac{1}{2}\cdot n^2/2= n^2/4$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Sekojošais rezultāts parāda Ramseja tipa spriedumu citā situācijā.

96. piemērs. *Apskatām deviņstūra piramīdu. Katra sānu šķautne un katra pamata diagonāle (to pavisam ir 27) nokrāsota vai nu zaļa, vai sarkana. Pierādīt, ka var atrast trīs tādas piramīdas virsotnes, kuru veidotā trijstūra malas visas nokrāsotās vienā krāsā!*

Atrisinājums. No 9 piramīdas sānu šķautnēm varam atrast 5 šķautnes, kas nokrāsotas vienā krāsā (varam pieņemt, ka tās ir sarkanas). Pieņemsim, ka šīs šķautnes ir VA_1, VA_2, VA_3, VA_4, VA_5, kur V - piramīdas virsotne, kas uz pamata atrodas tieši šādā secībā. Vismaz viens no nogriežņiem A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 ir piramīdas pamata diagonāle; varam pieņemt, ka tas ir A_1A_2. Tātad A_1A_2 ir nokrāsots; ja tas ir sarkans, meklējamais trijstūris ir VA_1A_2. Pieņemam, ka A_1A_2 ir zaļš. Apskatām trijstūri $A_1A_2A_4$; visas tā malas ir pamata diagonāles, tātad ir nokrāsotas. Ja kaut viena no malām A_1A_4 un A_2A_4 ir sarkana, tad tā kopā ar virsotni V veido meklējamo sarkano trijstūri; ja gan A_1A_4, gan A_2A_4 ir zaļas malas, tad $A_1A_2A_4$ ir zaļš trijstūris. Uzdevums atrisināts.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

169. Pieņemsim, ka grafā ir n virsotnes un tajā var atrast tādas divas ar šķautni savienotas virsotnes A un B, ka p(A) + p(B) > n. Pierādīt, ka grafā ir trijstūris.
170. Kādiem grafiem ar n virsotnēm un $n^2/4$ šķautnēm nav neviena trijstūra?
171. Pieņemsim, ka grafā ir n virsotnes (n > 4) un vairāk nekā $[n^2/4]$ šķautnes. Pierādīt, ka tajā ir vismaz 2 trijstūri.
172. Piecstūra prizmai ir pamati $A_1A_2A_3A_4A_5$, un $B_1B_2B_3B_4B_5$. Visas pamatu šķautnes un visi nogriežņi A_iB_j, (i,j= 1; 2; 3; 4; 5) nokrāsoti vai nu zaļi, vai sarkani. Zināms, ka nav neviena trijstūra, kam visas virsotnes atrastos piramīdas virsotnēs un visas malas būtu nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā. Pierādīt, ka visas 10 pamatu šķautnes nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā.
173. Telpā doti 9 punkti; nekādi 4 no tiem neatrodas vienā plaknē. Atrast mazāko n ar šādu īpašību: ja novilkti n patvaļīgi nogriežņi, no kuriem katrs savieno divus no šiem 9 punktiem, un katru novilkto nogriezni nokrāso vai nu zaļu, vai sarkanu, tad noteikti atradīsies trijstūris, kuram visas malas nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā.

3.5. Uzdevumi, kuros izmantots jēdziens par orientētu grafu

Līdz šim mēs apskatījām grafus, kuru šķautņu abi gali ir līdzvērtīgi. Tādi grafi dabiski rodas uzdevumos par "simetriskām" attiecībām, piemēram, par draudzību: ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A. Tomēr pastāv arī "nesimetriskas" attiecības: piemēram, ja Jānītis mīl Anniņu, tad tas vēl nebūt nenozīmē, ka arī Anniņa mīl Jānīti (kaut arī tā varētu būt). Vēl uzskatāmāks piemērs: ja viena apļa turnīrā komanda A uzvarējusi komandu B, tad komanda B noteikti nav uzvarējusi komandu A.

Šādu situāciju aprakstīšanai uz grafa šķautnēm var izvēlēties virzienu, ko attēlo ar bultiņu. Piemēram, ja grafa virsotnes attēlo komandas - turnīra dalībnieces, tad varam norunāt uz šķautnes AB izvēlēties virzienu no A uz B, lai pasacītu, ka komanda A uzvarējusi komandu B (skat. 108. zīm.).

108. zīm.

Šādas norunas padara daudzus spriedumus ērti attēlojamus un viegli saprotamus. Nupat minēto norunu lietosim visā paragrāfā.

Grafu, uz kura šķautnēm izvēlēti virzieni, sauc par orientētu grafu (pretstatā neorientētam grafam, kura šķautnēm virzienu nav). Situācijā, kas parādīta 108. zīmējumā, saka, ka šķautne iziet no virsotnes A un ieiet virsotnē B.

Vispirms aplūkosim piemēru, kura risināšanas gaitā neorientēts grafs kļūs līdzīgs orientētam grafam.

97. piemērs. Matemātikas pulciņā, ir 10 dalībnieki. Svētkos katrs no viņiem nosūtīja 5 apsveikuma kartītes citiem pulciņa dalībniekiem. Pierādīt, ka atradīsies tādi divi dalībnieki, kas nosūtījuši kartītes viens otram.

Atrisinājums. Attēlosim pulciņa dalībniekus ar grafa virsotnēm. Savienosim katras divas virsotnes ar šķautni. No katras virsotnes iziet 9 šķautnes, tātad pavisam $10 \cdot 9 = 90$ šķautņu gali.

Katrai šķautnei ir divi gali, tāpēc šķautņu pavisam ir $90:2 = 45$.

Ja dalībnieks A nosūtījis apsveikumu dalībniekam B, tad uz šķautnes AB atzīmēsim bultiņu virzienā no A uz B. Katrs dalībnieks nosūtījis 5 apsveikumus, tātad pavisam jāatzīmē $10 \cdot 5 = 50$ bultiņas. Bultiņu ir vairāk nekā šķautņu, tāpēc saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ atradīsies šķautne, uz kuras atzīmētas divas bultiņas. Šīs šķautnes galiem atbilstošie dalībnieki nosūtījuši apsveikumus viens otram. Uzdevums atrisināts.

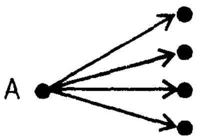
Komentārs. Formāli runājot, mēs nevaram sacīt, ka esam ieguvuši orientētu grafu, jo orientētā grafā uz katras šķautnes atzīmēts tikai viens virziens.

Ļoti plaši orientētus grafus lieto, lai aprakstītu dažādus turnīrus (sporta spēlēs, kurās nav iespējami neizšķirti) un risinātu uzdevumus par tiem.

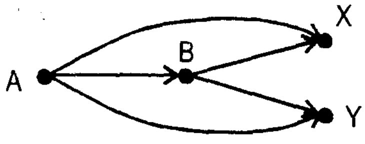
Visos turpmākajos uzdevumos, kuros būs runa par turnīriem, uzskatīsim, ka katra komanda ar katru spēlē tieši vienu reizi, turklāt neizšķirtu rezultātu nav.

98. piemērs. Turnīrā piedalās 8 komandas. Pierādīt, ka pēc tā beigām var atrast tādas četras komandas A, B, C, D, ka vienlaicīgi $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$, $B \rightarrow D$ un $C \rightarrow D$ (t.i., komandu virknē ABCD katra komanda uzvarējusi visas nākošās komandas).

Atrisinājums. Attēlosim turnīru ar orientētu grafu. Tajā pavisam ir 28 šķautnes (rezultātu $^{8\cdot7}/_2=28$ iegūst tāpat kā šķautņu skaitu 97. piemēra risinājumā). Katra no šīm šķautnēm iziet no kādas no 8 virsotnēm. Tā kā $28 = 8\cdot3 + 4$, t.i., $28 > 8\cdot3$, tad saskaņā ar $\mathbf{D_2}$ atradīsies tāda virsotne, no kuras iziet vismaz četras šķautnes. Šo virsotni izvēlamies par A (109. zīm.).



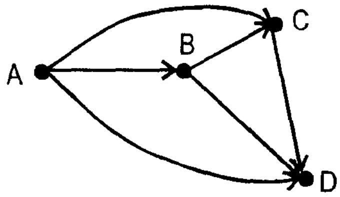
109. zīm.



110. zīm.

Aplūkojam četru no A izejošo šķautņu galapunktus un šķautnes, kas savieno šos galapunktus. Pavisam šādu šķautņu ir $^{4\cdot3}/2 = 6$. Katra no tām iziet no kādas no 4 virsotnēm. Tā kā $6 > 4$, tad saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ atradīsies virsotne, no kuras minēto 4 galapunktu sistēmas iekšienē iziet vismaz divas šķautnes. Šo virsotni izvēlamies par B (110. zīm.) un interesējamies par abu minēto šķautņu galapunktiem (110. zīm. X un Y).

Starp X un Y arī ir šķautne. Ja tā iet no X uz Y, izvēlamies X par C un Y par D; ja tā iet no Y uz X, izvēlamies Y par C un X par D (111. zīm.). Vajadzīgais iegūts, uzdevums atrisināts.



111. zīm.

99. piemērs. Turnīrā piedalās 6 komandas. Pierādīt, ka pēc tā beigām var atrast tādas divas komandas, kurām pārējās 4 komandas zaudējušas - katra komanda vismaz vienai no šīm divām komandām.

Atrisinājums. Pavisam turnīrā izspēlētas $^{6\cdot5}/2 = 15$ spēles, un tātad izcīnītas 15 uzvaras. Saskaņā ar Dirihlē principu $\mathbf{D_2}$ var atrast komandu, kas izcīnījusi vismaz 3 uzvaras. Tālāk šķirojam trīs gadījumus.

a) Var atrast komandu, kas izcīnījusi 5 uzvaras, t.i., uzvarējusi visās spēlēs. Izvēlamies šo komandu kā vienu no prasītajām; otru izvēlamies patvaļīgi.

b) Var atrast komandu, kas uzvarējusi četrās spēlēs, bet zaudējusi vienā spēlē. Izvēlamies šo komandu un to, kam tā zaudējusi.

c) Ir komanda A, kam ir tieši trīs uzvaras (un tātad tieši divi zaudējumi - pieņemam, ka pret komandām B un C). Viena no komandām B un C savstarpējā spēlē uzvarējusi; pieņemam, ka $B \rightarrow C$. Tad izvēlamies komandas A un B. Visi gadījumi aplūkoti, uzdevums atrisināts.

Vairāki citi orientētu grafu izmantošanas paņēmieni tiks aplūkoti 3.6. nodaļā, runājot par Holla teorēmu.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

174.° Katra no 2n tenku vācelēm uzzinājusi satriecošus jaunumus par n citām. Pierādīt, ka var atrast divas tenku vāceles, kas uzzinājušas satriecošus jaunumus viena par otru.

175.° Turnīrā piedalās 16 komandas. Pierādīt, ka turnīra noslēgumā no tām var izvēlēties 5 komandas un apzīmēt ar A, B, C, D, E tā, ka virknē ABCDE katra komanda uzvarējusi visas nākošās komandas.

176. Turnīrā piedalās 14 komandas. Pierādīt, ka pēc tā beigām var izvēlēties 3 komandas tā, ka katra no pārējām 11 komandām zaudējusi vismaz vienai no šīm trijām komandām.

177.* Atrisināt iepriekšējo uzdevumu, ja no 30 komandām jāizvēlas 4 tādas komandas, lai katra no 26 pārējām komandām būtu zaudējusi vismaz vienai no šīm četrām komandām.

178.^{k} Atrisināt 176. uzdevumu, skaitli 14 aizstājot ar 18 un 11 - ar 15.

179.* Turnīrā piedalās 17 komandas. Pierādīt, ka jebkurā brīdī var atrast vai nu 5 komandas, starp kurām nekādas divas komandas vēl nav spēlējušas savā starpā, vai arī 5 komandas, kuras var apzīmēt ar A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tā, ka $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$.

3. 6. Minimaksa teorēmas

Šajā paragrāfā aplūkosim virkni svarīgu matemātisku rezultātu. Visi tie lielākā vai mazākā mērā saistīti ar sekojoša tipa situāciju. Tiek veikts kaut kāds globāls, plaši sazarots process (vai pētīta lielas "struktūras" veidošana). Procesa veikšanai, resp., struktūras veidošanai, iespējami daudzi šķēršļi: katrs šķērslis darbojas lokāli, traucējot mērķa sasniegšanu vienā vietā. Varētu iedomāties, ka vairāki saskaņoti lokāli šķēršļi var radīt daudz lielākus ierobežojumus nekā katrs šķērslis atsevišķi. Teorēmas, par kurām būs runa šajā paragrāfā, apraksta situācijas, kad tā nav: globālā mērogā maksimāli sasniedzamais rezultāts vienāds ar minimālo no tiem rezultātiem, kuru pieļauj katrs atsevišķi ņemtais lokālais šķērslis. No šejienes arī radies nosaukums - minimaksa teorēmas.

3.6.1. Holla teorēma un ar to saistītie rezultāti

Vispirms aplūkosim piemēru, kas parādīs pierādījumos lietojamās idejas.

100. piemērs. Uz viesībām atnāca n cilvēki, katrs atnesa 10 konfektes. Konfektes kaut kā salika uz n šķīvīšiem, uz katra šķīvīša - 10 konfektes. Pierādīt, ka šķīvīšus var sadalīt visiem tā, lai katrs dabūtu šķīvīti, uz kura ir vismaz viena viņa atnestā konfekte.

Atrisinājums. Vispirms iedosim šķīvīšus cilvēkiem patvaļīgā kārtībā. Ja katram jau ir vismaz viena viņa konfekte, viss kārtībā. Pieņemsim, ka ir viesis A, kuram iedots šķīvītis, uz kura viņa atnestās konfektes nav.

Pierādīsim, ka var atrast tādus cilvēkus C_1, C_2, -, C_n, lai vienlaikus būtu spēkā īpašības:

1) C_1 saņēmis šķīvīti ar kādu A atnestu konfekti,

2) C_2 saņēmis šķīvīti ar kādu C_1 atnestu konfekti,

3) C_3 saņēmis šķīvīti ar kādu C_2 atnestu konfekti,

....

n) C_n saņēmis šķīvīti ar kādu C_{n-1} atnestu konfekti,

n + l) A saņēmis šķīvīti ar kādu C_n atnestu konfekti.

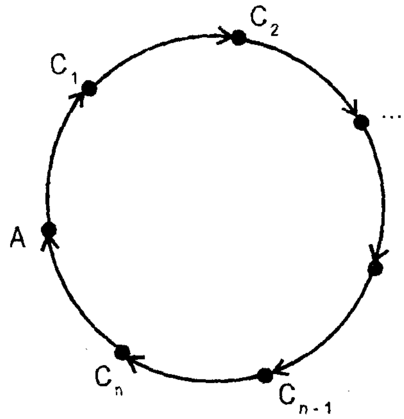
Apmainām šķīvīšus:

A atdod savu šķīvīti C_n, C_n atdod savu šķīvīti C_{n-1},..., C_2 atdod savu šķīvīti C_1, C_1 atdod savu šķīvīti A.

Šīs cikliskās maiņas rezultātā A savu situāciju ir "izlabojis", bet neviens cits nav to "sabojājis". Ja nepieciešams, šādus labojumus var izdarīt pēc kārtas attiecībā uz citiem cilvēkiem, kam vēl nav šķīvīša ar viņa atnestu konfekti.

Tātad mums atliek tikai pamatot minētā cikla A, C_1, C_2,..., C_n eksistenci.

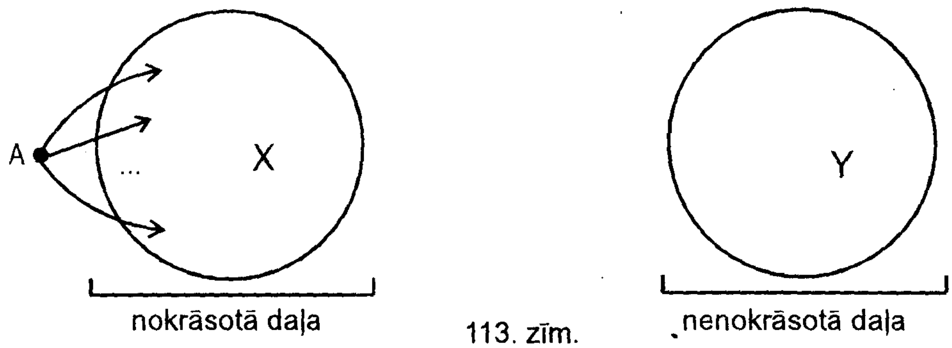
Izveidosim shēmu, kas līdzīga orientētam grafam (atšķirība slēpjas apstāklī, ka no vienas virsotnes uz otru varēs iet arī vairākas bultiņas, un bultiņas varēs iet arī no kādas virsotnes uz viņu pašu). Ērtības labad sauksim to par grafu. Grafa virsotnes būs cilvēki. No virsotnes x novilksim bultiņu uz virsotni y, ja y saņēmis šķīvīti ar kādu x atnestu konfekti, turklāt katrai konfektei vilksim savu bultiņu. Pavisam ir l0n bultiņu. Jāpierāda, ka grafā var izdalīt 112. zīmējumā redzamo ciklu.



112. zīm.

Shēmā sākam krāsot bultiņas un virsotnes. Vispirms nokrāsojam virsotni A un visas no tās izejošās bultiņas; pēc tam krāsojam šo bultiņu galus un bultiņas, kuras sākas no jauna nokrāsotajos punktos, un to galus, kas vēl nav nokrāsoti. Pēc tam atkal atkārtojam šo darbību, pēc tam atkal utt., kamēr kādā solī jaunas virsotnes vairs nenokrāsojas. Ja līdz šim brīdim kaut kad esam nonākuši virsotnē A, prasītais cikls ir atrasts.

Pieņemsim, ka virsotnē A neesam atgriezušies. Tad grafu var nosacīti attēlot šādi:



113. zīm.

No virsotnes A iziet 10 nokrāsotas bultiņas, un tajā neieiet neviena nokrāsota bultiņa; visas pārējās nokrāsotās virsotnes un no tām izejošās bultiņas atrodas daļā X. No daļas X uz daļu Y, kurā atrodas nenokrāsotās virsotnes, neiet neviena bultiņa (citādi tādu bultiņu gali nepiederētu daļai Y).

Tātad cilvēki, kas attēloti ar virsotnēm daļā Y, nav saņēmuši nevienu citu viesu nestu konfekti. Tātad viņi apgādājuši ar konfektēm paši sevi. Bet bez tam viņiem jābūt apgādājušiem ar konfektēm arī cilvēku A, jo saskaņā ar pieņēmumu A nav saņēmis nevienu ne savu, ne arī kādu konfekti no daļas X. Tā ir pretruna: m cilvēki no daļas Y atnesuši 10m konfektes, bet viņiem jābūt atdevušiem 10(m + 1) konfektes, kas nav iespējams, jo 10(m + 1) > 10m. Te arī parādās DP tipa spriedums. Tātad mūsu pieņēmums, ka mēs bultiņu krāsošanas procesā neatgriežamies virsotnē A, ir nepareizs. Uzdevums atrisināts.

Formulēsim Holla teorēmu.

<u>Holla teorēma.</u> Pieņemsim, ka galīga kopa X sadalīta n apakškopās (varbūt ar kopīgiem elementiem): $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai varētu izvēlēties n dažādus elementus $x_1\ x_2, \ldots, x_n$ tā, ka $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$, ir šāds: jebkuram k, $1 \leq k \leq n$, kopu $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ apvienojumā ir vismaz k elementi.

Nosacījuma nepieciešamība izriet no Dirihlē principa: ja ir kādas k kopas, kuru apvienojumā ir ne vairāk kā k - 1 elementi, tad jau šīm k kopām nav iespējams izvēlēties dažādus pārstāvjus, tātad to nevar izdarīt arī visām kopām. Nosacījuma pietiekamību pierāda līdzīgi kā iepriekšējā piemēra risinājumā. Uzskatīsim kopas A_1, $A_2, \ldots, A_n$ par cilvēkiem. Pieņemsim, ka katrs cilvēks atnesis tik daudz konfekšu, cik attiecīgajā kopā elementu. Asociēsim kopas X elementus ar šķīvīšiem; uz katra šķīvīša uzliksim pa vienai konfektei no katras kopas, kurai attiecīgais elements pieder. Atkal jāpierāda, ka var sadalīt šķīvīšus cilvēkiem tā, lai katrs dabūtu šķīvīti ar vismaz vienu paša atnestu konfekti (šoreiz daži šķīvīši paliks pāri). Pabeidziet pierādījumu patstāvīgi!

Holla teorēmu sauc arī par <u>teorēmu par dažādiem pārstāvjiem</u> (nosaukuma jēga ir skaidra: $x_1, x_2 \ldots x_n$ "pārstāv" katrs savu kopu $A_1, A_2, \ldots, A_n$). Elementu sistēmu $\{ x_1, x_2 \ldots x_n \}$ sauc par dažādu pārstāvju sistēmu apakškopām $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Sekojošais rezultāts ir Holla teorēmas vispārinājums.

<u>Teorēma par kopīgiem pārstāvjiem.</u> Pieņemsim, ka galīga kopa X sadalīta n apakškopās divos dažādos veidos: $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ un $X = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ (dažādām kopām $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kā arī dažādām kopām $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nevar būt kopīgi elementi). Nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai varētu izvēlēties n dažādus kopas X elementus tā, ka tie vienlaicīgi veido dažādu pārstāvju sistēmu kopām $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un arī kopām $B_1, B_2, \ldots, B_n$, ir šāds: katram k, $1 \leq k \leq n$, un katrām k apakškopām $Ai_1, Ai_2, \ldots, Ai_k$ apvienojums $Ai_1 \cup Ai_2 \cup \ldots \cup Ai_k$ neietilpst mazāk nekā k apakškopu apvienojumā no sistēmas $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Nepieciešamība triviāli seko no DP tāpat kā Holla teorēmas pierādījumā. Pietiekamību pierāda tāpat kā 100. piemērā: asociējot apakškopas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ar cilvēkiem, bet apakškopas $B_1, B_2, \ldots, B_n$ - ar šķīvīšiem; katru A_i un B_j kopīgo elementu asociē ar konfekti, kuru cilvēks A_i ir uzlicis uz šķīvīša B_j.

Aplūkosim vēl vienu slavenu kombinatorisku rezultātu. To var pierādīt, izejot no Holla teorēmas. Te dosim citu pierādījumu.

<u>Kēniga - Rado teorēma</u>. Pieņemsim, ka dots taisnstūris, kas sastāv no a x b rūtiņām. Dažās rūtiņās atrodas pa zvaigznītei. Sauksim par līnijām gan rūtiņu rindas, gan rūtiņu kolonnas. Tad mazākais līniju skaits, kuras nokrāsojot melnas, būs nokrāsotas visas zvaigznītes, ir vienāds ar lielāko iespējamo zvaigznīšu skaitu, kuras var izvēlēties tā, lai nekādas divas izvēlētās zvaigznītes neatrastos ne vienā rindā, ne vienā kolonnā. Tādu zvaigznīšu sistēmu sauc par neatkarīgu.

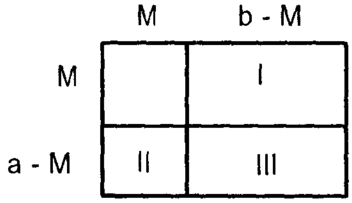
<u>Pierādījums.</u> Apzīmēsim mazāko nokrāsojamo līniju skaitu visu zvaigznīšu nokrāsošanai ar m, bet lielāko neatkarīgo zvaigznīšu skaitu - ar M. Skaidrs, ka $m \geq M$, jo, lai nokrāsotu katru no M neatkarīgajām zvaigznītēm, jākrāso viena līnija, tātad kopā vismaz M līnijas.

Pamatosim, ka $M \geq m$, izmantojot Holla teorēmu. No nevienādībām $M \geq m$ un $m \geq M$ seko, ka $m = M$, kas bija jāpierāda. Jāpierāda, ka visas zvaigznītes iespējams izsvītrot, izsvītrojot M līnijas.

Pierādījumu veiksim ar matemātisko indukciju pēc lieluma a + b. Teorēmas pareizība ir acīm redzama, ja a + b = 2 (taisnstūris sastāv no vienas rūtiņas).

Pieņemsim, ka visiem taisnstūriem, kam šī summa mazāka par A, teorēma pareiza. Apskatīsim taisnstūri a x b, kur a + b = A.

Skaidrs, ka ne lielums m, ne lielums M nemainās, pārkārtojot vietām rindiņas vai arī pārvietojot vietām kolonnas, turklāt šādu pārkārtojumu rezultātā zvaigznītes, kas pirms pārkārtošanas bija, respektīvi, nebija, uz vienas līnijas, arī pēc pārkārtošanas ir, respektīvi, nav, uz vienas līnijas. Izvēlēsimies M neatkarīgas zvaigznītes un pārvietosim rindas un kolonnas taisnstūrī tā, lai tās visas nonāktu taisnstūra kreisajā augšējā stūrī, kura izmēri ir MxM; šajā kvadrātā tās atrodas pa vienai katrā rindiņā un katrā kolonnā. Visas citas zvaigznītes atrodas apgabalos I un II; apgabalā III (skat. 114.zīm.) zvaigznīšu nav. Tiešām, ja tur būtu kāda zvaigznīte, tad, pievienojot to M zvaigznītēm kreisajā augšējā kvadrātā, iegūtu M + 1 neatkarīgo zvaigznīti, kas ir pretrunā ar M izvēli. Mūsu izvēlētās M neatkarīgās zvaigznītes sauksim par īpašām zvaigznītēm.



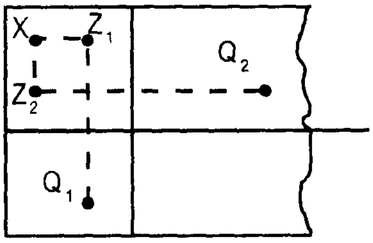
114. zīm.

Ja apgabals I vai II ir tukšs, respektīvi, tur nav nevienas rūtiņas, tad M = b, respektīvi M = a. Skaidrs, ka, nokrāsojot visas kolonnas (visas rindiņas), ir nokrāsotas visas zvaigznītes. Tāpēc tālāk apskatām gadījumu, kad M < a un M < b, respektīvi, apgabalos I un II ir kaut kādas rūtiņas. Pieņemsim, ka apgabalā I zvaigznītes izvietojušās x rindās, bet apgabalā II - y kolonnās.

Mēs apgalvojam, ka neviena īpašā zvaigznīte Z_0 neatrodas vienlaikus vienā rindā ar kādu zvaigznīti Z_1 no apgabala I un vienā kolonnā ar kādu zvaigznīti Z_2 no apgabala II. Tiešām, ja tā būtu, tad mēs varētu iegūt M + 1 neatkarīgas zvaigznītes, izmetot no neatkarīgo zvaigznīšu sistēmas Z_0 un pievienojot tai Z_1 un Z_2. Tā būtu pretruna ar M izvēli.

Nokrāsosim visas tās x horizontāles, kurās atrodas zvaigznītes apgabalā I, un visas tās y vertikāles, kurās atrodas zvaigznītes apgabalā II. Katra šāda krāsošana saskaņā ar nupat minēto skar vienu īpašo zvaigznīti, tāpēc x + y < M. Tagad apgabalos I, II, III nenokrāsotu zvaigznīšu nav. Varbūt kādas nenokrāsotas zvaigznītes vēl palikušas apgabala MxM kreisajā augšējā stūrī. Šķirojam divus gadījumus:

l) x + y = M, t.i., visas īpašās zvaigznītes jau nokrāsotas. Ja kreisajā augšējā stūri vēl palikusi kāda nenokrāsota zvaigznīte, tad tā atrodas vienā rindā ar kādu "vertikāli" nokrāsotu zvaigznīti Z_1 un kolonnā ar kādu "horizontāli" nokrāsotu zvaigznīti Z_2; tās savukārt bijušas vienā vertikālē ar zvaigznīti Q_1 no apgabala III, respektīvi, vienā horizontālo ar zvaigznīti Q_2 no apgabala II (skat. 115.zīm.).



115. zīm.

Tā ir pretruna, jo, izmetot no neatkarīgo zvaigznīšu sistēmas Z_1 un Z_2 un pievienojot tai X, Q_1 un Q_2 , iegūtu M + 1 neatkarīgas zvaigznītes, kas ir pretrunā ar M izvēli;

2) x + y < M. Tad kreisajā augšējā stūri palikušas nenokrāsotas M - (x + y) neatkarīgas īpašās zvaigznītes, turklāt visas nenokrāsotās rūtiņas, pārvietojot rindas un kolonnas, var savākt taisnstūrī, kura izmēri ir (M - x)x(M - y). Šajā taisnstūri nav vairāk par M - (x + y) neatkarīgām zvaigznītēm; ja to būtu vairāk, tad, izmetot no sākotnējās neatkarīgās sistēmas palikušās M - (x + y) īpašās zvaigznītes un to vietā pievienojot lielāku skaitu domāto

neatkarīgo zvaigznīšu, iegūtu vairāk nekā M neatkarīgo zvaigznīšu sākotnējā taisnstūri, bet tā ir pretruna.

Tādēļ pēc induktīvā pieņēmuma visas palikušās nenokrāsotās zvaigznītes var nokrāsot, nokrāsojot M - (x + y) līnijas. Pavisam nokrāsotas x+y+M-(x+y)=M līnijas.

Teorēma pierādīta.

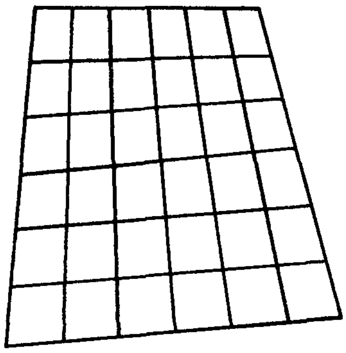
Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

180. Brigādē ir n strādnieki un n instrumenti. Katrs strādnieks prot strādāt ar 2 instrumentiem; ar katru instrumentu prot strādāt 2 strādnieki. Pierādīt, ka instrumentus var sadalīt strādniekiem tā, lai katram būtu instruments, ar kuru viņš prot strādāt.

181.° Deju vakarā piedalās n zēni un n meitenes. Katram zēnam patīk k meitenes; katra meitene patīk k zēniem ($k \le n$). Pierādīt, ka zēni var vienlaikus uzlūgt meitenes uz deju tā, ka katrs zēns būtu uzlūdzis meiteni, kura viņam patīk.

182.[k] Vai iepriekšējā uzdevuma rezultāts paliek spēkā, ja, dots, ka katram zēnam patīk vismaz k meitenes un katra meitene patīk vismaz k zēniem?

183.[k] Izliekta četrstūra malas katra sadalīta n vienādās daļās; caur dalījuma punktiem novilkti nogriežņi, kas sadala četrstūri n^2 šūnās (skat. 116. zīm., kur n = 6).



116. zīm.

Dažās šūnās iezīmēts pa vienai zvaigznītei tā, ka katrā kolonnā un katrā rindā atrodas tieši k ($k < n$) zvaigznītes.

a) Pierādīt, ka ar zvaigznēm apzīmētās šūnas var nokrāsot k krāsās (katru šūnu vienā krāsā) tā, lai katrā kolonnā un katrā rindā būtu sastopamas visas krāsas.

b) Pierādīt, ka katrā šādā krāsojumā jebkurā krāsā nokrāsotais laukums ir n reizes mazāks par visa četrstūra laukumu.

184.* Papīra lapas katra puse sadalīta n apgabalos; visu apgabalu laukumi ir vienādi. Pierādīt, ka lapā var izdurt ar adatu n caurumus tā, lai katrā apgabalā būtu tieši viens caurums.

185. Pierādīt Holla teorēmu.

186. Pierādīt teorēmu par kopējiem pārstāvjiem.

187. Pierādīt Kēniga - Rado teorēmu, balstoties uz Holla teorēmu.

188. Kvadrāts sastāv no 2n x 2n rūtiņām. Dažās rūtiņās iezīmēts pa zvaigznītei; kopējais zvaigznīšu skaits ir 3n. Pierādīt, ka var nokrāsot n rindiņas un n kolonnas tā, lai visas zvaigznītes būtu nokrāsotas. Vai rezultāts paliek spēkā, ja kopējais zvaigznīšu skaits ir 3n+1?

189[k] Kvadrātveida tabula sastāv no n x n rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts pozitīvs skaitlis (tas nav vesels skaitlis). Katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir vesels skaitlis. Pierādīt, ka katru tabulā ierakstīto skaitli var aizstāt ar vienu no tā noapaļojumiem tā, lai summas rindiņās un kolonnās nemainītos. (Paskaidrojums. Šajā uzdevumā par skaitļa a, kas nav vesels skaitlis, noapaļojumiem sauc abus skaitlim a tuvākos veselos skaitļus - vienu ar iztrūkumu, otru ar uzviju. Piemēram, skaitļa $4\frac{1}{3}$ noapaļojumi ir 4 un 5; skaitļa $\sqrt{2}$ noapaļojumi ir 1 un 2 utt.

3. 6. 2. Dilvorsa teorēma un ar to saistītie rezultāti

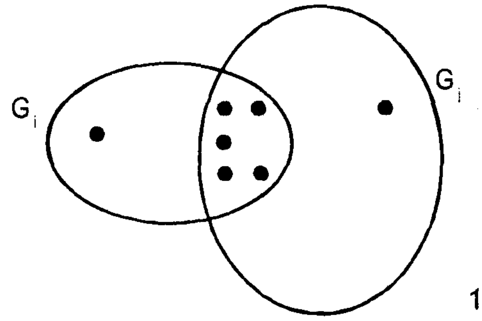
3. 6. 2. l. Špernera teorēma

Vispirms aplūkosim uzdevumu.

101.[k] piemērs. *Konditoru kursos piedalās 11 konditori. Katru dienu daži no viņiem gatavo savus izstrādājumus, bet pārējie tos degustē. Neviens konditors nenodarbojas ar gatavošanu un degustēšana vienā un tajā pašā dienā. Kāds ir minimālais dienu skaits, kas nepieciešams, lai katrs konditors būtu degustējis visu kolēģu izstrādājumus?*

Atrisinājums. Pierādīsim, ka šis minimālais skaits ir 6.

a) Pieņemsim, ka kursu darbam atvēlētas n dienas. Sanumurēsim konditorus ar skaitļiem no 1 līdz 11. Piekārtosim katram konditoram ar numuru i kaut kādu degustēšanas dienu kopu G_i tā, lai visās kopās $G_1, G_2, \ldots, G_{11}$ būtu vienāds dienu skaits un visas kopas būtu dažādas. Ja mums izdevies to izdarīt, tad uzdevuma prasības izpildītas. Tiešām, aplūkosim konditorus i un j. Tā kā $G_i \neq G_j$ un abās kopās ir vienāds dienu skaits, tad jābūt gan tādai dienai d_i, kas pieder kopai G_i, bet nepieder kopai G_j, gan arī tādai dienai d_j , kas pieder kopai G_j, bet nepieder kopai G_i. (pretējā gadījumā kopā G_j, respektīvi, G_i, būtu no pašas atšķirīga apakškopa ar tādu pašu elementu skaitu kā viņai pašai, bet tā ir pretruna; skat. 117. zīm.).



117. zīm.

Dienā d_i konditors ar numuru j nogaršos konditora i ražojumus, bet dienā d_j - otrādi.

Atliek ievērot, ka, ja ir sešas dienas, var izveidot $C_6^3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$ apakšgrupas, katru ar 3 elementiem. Tātad 6 dienu pietiktu pat kursiem ar 20, ne tikai ar 11 dalībniekiem.

b) Mēģinājumi līdzīgā ceļā iztikt ar 5 dienām panākumus nedod, jo $C_5^1 = 5, C_5^2 = 10, C_5^3 = 10, C_5^4 = 5$: ar vienāda dienu skaita kopu palīdzību mēs uzdevumu atrisināt nevaram. Tomēr tas vien vēl nenozīmē, ka ar 5 dienām uzdevums vispār nav atrisināms: mēs taču, vismaz principā, varētu mēģināt piekārtot konditoriem dažāda garuma ēdiena gatavošanas periodus!

Tomēr punktā a minētā prasība, ka neviena kopa G_i nedrīkst būt otras kopas G_j apakškopa, ir arī nepieciešamais nosacījums uzdevuma atrisinājumam: tiešām, ja $G_i \subset G_j$, tad katrā dienā, kurā saldumus gatavo konditors i, tos gatavo arī konditors j, tāpēc konditors j nekad nevarēs nogaršot konditora i produkciju.

Tāpēc uzdevums reducējās uz sekojošo: vai 5 elementu (5 dienu) kopā var izdalīt 11 apakškopas tā, lai neviena no šīm apakškopām neietilptu kādā citā izdalītajā apakškopā?

Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

Ērtības labad dienas apzīmēsim ar cipariem 1; 2; 3; 4; 5, bet dienu kopas - ar ciparu virknītēm, piemēram, 12, 35 utt. Tukšo kopu apzīmēsim ar $\varnothing$.

Visas kopas, kādas var izveidot no 5 dienām, attēlotas 118. zīmējuma shēmā.

Noskaidrosim shēmas uzbūvi. Vienā horizontālē novietotas kopas ar vienādu elementu skaitu.

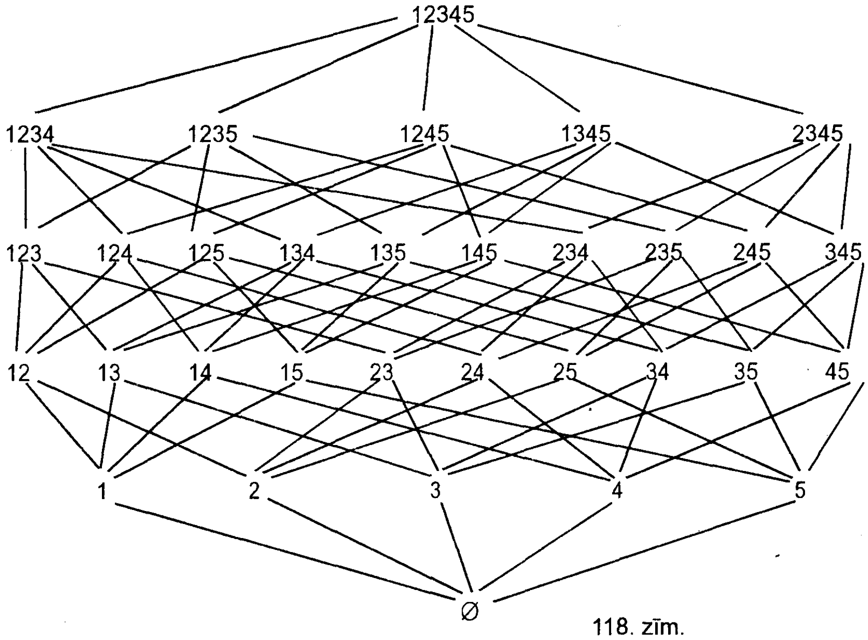
Tā kā elementu skaits var būt no 0 līdz 5, ir pavisam 6 horizontāles.

Dažas blakus esošu horizontāļu kopas savienotas ar līnijām. Līnija starp kopām A un B novilkta tad un tikai tad, ja viena no šīm kopām iegūstama no otras, pievienojot otrai kopai tieši vienu elementu. Tā, piemēram, pievienojot kopai 14 elementu 5, iegūstam kopu 145; tāpēc novilkta augšupejoša līnija no 14 uz 145.

Viegli saprast: kopa A ir kopas B apakškopa tad un tikai tad, ja shēmā no A uz B var aiziet, virzoties pa līnijām tikai uz augšu.

Sauksim par ceļu jebkuru augšupejošu līniju virkni no ∅ uz 12345. Viegli saprast, ka shēmā pavisam ir 5! = 120 ceļi. (Atbilstošā shēmā, kas attēlotu n elementu kopas visas apakškopas, būtu n! ceļi.) Viegli saprast arī, ka divas kopas ir viena otras apakškopa tad un tikai tad, kad tās atrodas uz viena ceļa.

Tagad mūsu jautājumu var formulēt šādi: vai var atzīmēt 11 kopas tā, lai nekādas divas no tām neatrastos uz viena ceļa? Pierādīsim, ka tas nav iespējams.



118. zīm.

Sacīsim, ka kopa <u>bloķē</u> katru ceļu, uz kura tā atrodas. Pieņemsim, ka mums izdevies izvietot 11 kopas tā, ka nekādas divas no tām neatrodas uz viena ceļa. Tad katra no šīm 11 kopām bloķē citus ceļus.

Noskaidrosim, cik ceļus bloķē katra kopa.

1. ∅ un 12345 katra bloķē visus 120 ceļus.

2. Viena elementa kopa bloķē 4! = 24 ceļus. Tiešām, izvēloties kādu viena elementa kopu a, mēs varam veidot ceļu, kas iet caur šo kopu, atsevišķi veidojot ceļa augšējo un apakšējo daļu. Apakšējā daļa ir noteikta viennozīmīgi (sastāv no līnijas a - ∅). Augšējā daļā pirmo posmu varam izvēlēties četros veidos, otro - trijos, trešo - divos veidos; pēdējais posms noteikts viennozīmīgi. Tātad caur a ir $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dažādu ceļu.

3. Divu elementu kopa bloķē 12 ceļus. Tiešām, ceļam caur kopu ab apakšējo daļu var izvēlēties 2 veidos, augšējo $3 \cdot 2 = 6$ veidos. Tā kā šīs izvēles ir neatkarīgas, tad dažādu ceļu caur ab ir $6 \cdot 2 = 12$.

4. Līdzīgi izspriežam (varam arī vienkārši atsaukties uz simetriju), ka triju elementu kopa bloķē 12 ceļus, bet četru elementu kopa - 24 ceļus.

Redzam, ka katra kopa bloķē vismaz 12 ceļus. Tāpēc 11 kopām kopā jābloķē vismaz $12 \cdot 11 = 132$ ceļi (atceramies, ka divas kopas nedrīkst bloķēt vienu un to pašu ceļu!). Bet tas nav iespējams, jo ceļu pavisam ir tikai 120.

Tātad esam pierādījuši, ka 11 konditoru gadījumā ar 5 dienām nepietiek.

Uzdevuma risinājumā izmantoto spriedumu var vispārināt. Pieņemsim, ka mums ir dota elementu kopa. Kādu lielāko daudzumu apakškopu tajā var izvēlēties tā, lai nekāda no izvēlētajām apakškopām nebūtu apakškopa nevienai citai?

Atbildi uz šo jautājumu sniedz sekojošs ievērojams rezultāts.

Špernera teorēma. Lielākais daudzums apakškopu, ko var izvēlēties no n elementu kopas tā, lai neviena izvēlētā apakškopa nebūtu apakškopa citai izvēlētajai, ir

a) C_{2k}^{k} , ja n = 2k,

b) C_{2k+1}^{k} respektīvi, C_{2k+1}^{k+1}, ja n = 2k + 1.

Pierādījums. Aplūkosim gadījumu n = 2k + 1. Skaidrs, ka mēs varam ņemt visas k elementu apakškopas (to skaits ir C_{2k+1}^{k}) vai arī visas k + 1 elementu apakškopas (to skaits ir C_{2k+1}^{k+1}; protams, $C_{2k+1}^{k} = C_{2k+1}^{k+1}$, jo katrai k elementu kopai var viennozīmīgi piekārtot tās papildinājumus, kas ir k + 1 elementu kopa, un otrādi). Jāpierāda, ka nevar ņemt vairāk apakškopu.

Pieņemsim, ka esam izvēlējušies x apakškopas $A_1, \ldots, A_x$, kurās ir attiecīgi $a_1, a_2, \ldots, a_x$ elementi, pie tam neviena no tām nav kādas citas apakškopa. Izveidojam tādu pašu shēmu, kā iepriekšējā piemēra risinājumā. Shēmā pavisam ir n! ceļu; kopa A_i bloķē $a_i!\cdot(n - a_i)!$ ceļus, pie tam dažādām kopām jābloķē dažādi ceļi, citādi viena kopa būs citas kopas apakškopa. Tāpēc $\sum_i a_i!(n-a_i)! \le n!$ Izdalot ar n! un atceroties, ka $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, iegūstam nevienādību

$$(*) \qquad \frac{1}{C_n^{a_1}} + \frac{1}{C_n^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{C_n^{a_x}} \le 1.$$

No binomiālajiem koeficientiem $C_n^0; C_n^1; \ldots; C_n^n$ lielākie ir abi vidējie koeficienti (atceramies, ka n = 2k + 1): C_n^k un C_n^{k+1}. Aizstājot nevienādībā (*) visus binomiālos koeficientus ar C_n^k, nevienādības kreisā puse nepalielināsies; tāpēc iegūstam $\frac{x}{C_n^k} \le 1$ vai $x \le C_n^k$, kas bija jāpierāda.

Skaidrs, ka $C_n^{a_i}$ varēja aizstāt arī ar C_n^{k+1}, iegūstot $x \le C_n^{k+1}$.

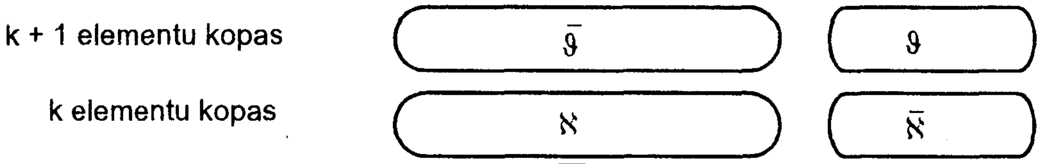
Gadījumā, kad n = 2k, spriedums gandrīz nemainās; atliek ievērot, ka lielākais no binomiālajiem koeficientiem $C_{2k}^0, C_{2k}^1, \ldots, C_{2k}^{2k}$ ir C_{2k}^k.

Špernera teorēma pierādīta.

Sakarā ar Špernera teorēmu rodas papildjautājums: tieši kuras apakškopas var izvēlēties, lai tiktu sasniegts teorēmā minētais maksimums? Gadījumā, kad n = 2k, ir skaidrs, ka maksimumu var sasniegt, vienīgi izvēloties visas k elementu apakškopas. Gadījumā, kad n=2k+1, pagaidām skaidrs tikai, ka var izvēlēties visas k elementu apakškopas un var arī izvēlēties visas k + 1 elementu apakškopas. Tomēr no Špernera teorēmas pierādījuma pagaidām nav skaidrs, vai maksimumu nevar sasniegt arī, izvēloties dažas k elementu kopas un dažas k + 1 elementu kopas.

Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

Pieņemsim, ka mums izdevies sasniegt Špernera teorēmā minēto maksimumu, izvēloties k elementu kopu sistēmu $\aleph$(un neizvēloties atlikušās k elementu kopas, kas veido sistēmu $\overline{\aleph}$) un k + 1 elementu kopu sistēmu ϑ (un neizvēloties atlikušās k + 1 elementu kopas, kas veido sistēmu ϑ), pie tam neviena sistēma $\aleph$, $\overline{\aleph}$, ϑ, $\overline{\vartheta}$ nav tukša. Aplūkosim atbilstošajā shēmā abas "vidējās" horizontāles, kas atbilst k elementu kopām un k + 1 elementu kopām.



119. zīm.

Katrs ceļš iet vai nu caur $\aleph$, vai caur $\overline{\aleph}$, un katrs ceļš iet arī vai nu caur ϑ, vai caur $\overline{\vartheta}$. No Špernera teorēmas pierādījuma seko, ka maksimums sasniedzams tikai tad, ja izvēlētās kopas kopumā nobloķē visus ceļus. Tāpēc ceļi, kas iet caur $\aleph$, ir tieši tie, kas iet caur $\overline{\vartheta}$, un ceļi, kas iet caur $\overline{\aleph}$, ir tieši tie, kas iet caur ϑ.

Pierādīsim, ka, lai kā visas k elementu kopas nebūtu sadalītas divās klasēs $\aleph$ un $\overline{\aleph}$ eksistēs tāda k + 1 elementu kopa, kurā kā apakškopa būs gan kāda $\aleph$ kopa, gan arī kāda $\overline{\aleph}$ kopa. Līdz ar to būs iegūta pretruna un mūsu apgalvojums - pierādīts.

Savukārt šādas k + 1 elementu kopas eksistence seko no iespējas visas k elementu kopas izkārtot virknē tā, lai katras divas blakus esošās kopas atšķirtos tikai ar vienu elementu. Tad virknē kaut kur atradīsies blakus $\aleph$ un $\overline{\aleph}$ klašu kopas, kuru apvienojums ir meklētā k + 1 elementu kopa.

Minētā izkārtojuma eksistenci pierāda ar matemātisko indukciju pēc elementu skaita k.

Līdz ar to esam noskaidrojuši, ka Špernera teorēmā minētais maksimums nepāra n gadījumā sasniedzams vienīgi, izvēloties visas "vidējās" apakškopas ar vienu un to pašu elementu skaitu.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

190. Pamatot minētā k elementu apakškopu sakārtojuma eksistenci.

191. Bankas padomē ir n direktori. Visi svarīgie dokumenti glabājas seifā. Padome grib panākt, lai nekādi k direktori, sanākuši kopā, vēl nevarētu atslēgt seifu, bet lai jebkuri k+1 direktori, sanākuši kopā, seifu varētu atslēgt. Kāds ir minimālais atslēgu skaits, kas jāpievieno seifam, un kā jāsadala slēdzenes starp direktoriem, lai šīs prasības būtu izpildītas?

3. 6. 2. 2. Daļēji sakārtotas kopas

Ja matemātikā kādus lielumus var raksturot ar skaitļu palīdzību, tad, salīdzinot šos skaitliskos raksturojumus, vienmēr var pateikt, kurš lielums ir mazāks un kurš - lielāks. Piemēram, par katriem diviem cilvēkiem var pasacīt, kurš no tiem vecāks, par katrām divām valstīm - kurai no tām lielāka teritorija, utt.

Situācija mainās, ja gribam salīdzināt objektus pēc vairākiem lielumiem vai arī mūsu rīcībā nav pilnīgas informācijas. Piemēram, varētu uzskatīt, ka viena valsts ir lielāka par otru, ja tai ir gan lielāka teritorija, gan vairāk iedzīvotāju. Šādā izpratnē ne ASV ir lielāka par Kanādu (ASV teritorija ir mazāka), ne Kanāda lielāka par ASV (Kanādā ir mazāk iedzīvotāju). Minētajā izpratnē ASV un Kanāda ir nesalīdzināmas valstis.

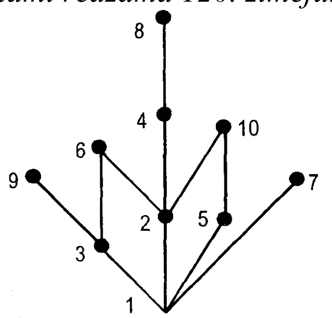
Līdzīga situācija sastopama sporta sacensībās. Apskatīsim boksa olimpisko turnīru pēc vienmīnusu sistēmas. Par abiem pusfinālu zaudētājiem mēs nevaram pasacīt, kurš no tiem ir spēcīgāks; balstoties tikai uz turnīra rezultātiem, viņi ir nesalīdzināmi. (Tāpēc arī abiem tiek piešķirtas bronzas medaļas.)

Rezumējot varam secināt: ir situācijas, kurās 2 elementu salīdzināšanai iespējami trīs dažādi rezultāti - lielāks pirmais elements, lielāks otrais elements, abi elementi ir

nesalīdzināmi. Kopas, kurās šāda situācija parādās, sauc par daļēji sakārtotām kopām (atšķirībā no pilnīgi sakārtotām kopām, kurās trešās iespējas nav).
Atzīmēsim dažus svarīgākos šādu kopu piemērus.

<u>102. piemērs.</u> Kādas galīgas kopas visu apakškopu kopa, pieņemot, ka apakškopa A ir "mazāka" par citu apakškopu B, ja $A \subset B$. Šādas kopas attēlotas 118. zīmējumā 101. piemēra risinājumā. Attiecība "mazāks" vērojama uzskatāmi: no "mazākas" kopas uz "lielāku" vienmēr var aiziet, virzoties pa līnijām augšup.

<u>103. piemērs.</u> Kāda ir galīga naturālo skaitļu kopa, pieņemot, ka naturāls skaitlis a ir mazāks par citu naturālu skaitli b, ja b dalās ar a. No šāda viedokļa daļēji sakārtota pirmo 10 naturālo skaitļu kopa uzskatāmi redzama 120. zīmējumā.



120. zīm.

Arī šeit no "mazākas" kopas uz "lielāku" kopu var aiziet, virzoties pa līnijām augšup. Savukārt, piemēram, skaitļi 6 un 10 ir nesalīdzināmi, tāpat 9 un 7 utt. Skaitlis 1 mūsu izpratnē ir mazāks par visiem citiem naturālajiem skaitļiem.

<u>104. piemērs.</u> Klases skolēnu kopa, ja uzskatām, ka A ir "lielāks" nekā B, ja A atzīmes nevienā priekšmetā nav sliktākas nekā B atzīmes, bet vismaz vienā priekšmetā tās ir labākas. Droši vien arī jūsu klasē var atrast divus skolēnus, no kuriem vienam labāk padodas matemātika, bet otram - latviešu valoda un literatūra.

Jēdzienu par daļēji sakārtotu kopu var attiecināt arī uz bezgalīgām kopām. Aplūkosim tikai galīgas kopas, katru reizi paskaidrojot, ko nozīmē, ka viens elements ir "mazāks" nekā otrs. Jēdzienus "A mazāks nekā B" un "B lielāks nekā A" lietosim kā ekvivalentus. Vienmēr izvēlēsimies "mazāks" un "lielāks" ar tādu izpratni, lai no faktiem "A mazāks par B" un "B mazāks par C" noteikti sekotu "A mazāks par C". (Matemātiķi saka, ka attieksme "mazāks" ir transitīva.)

Attēlojot daļēji sakārtotas kopas grafiski, to elementus attēlosim ar punktiem. Ja divus punktus dažādā augstumā savieno viena līnija (uz kuras punktu nav), tad augstāk esošais punkts attēlo "lielāko" elementu. Pēc transitivitātes īpašības no šejienes seko: ja no punkta A var aiziet uz punktu B, ejot pa līnijām un virzoties tikai uz augšu, tad B attēlojošais elements ir lielāks par A attēlojošo elementu. Ja ne no viena no punktiem A un B nevar aiziet uz otru, virzoties tikai pa līnijām uz augšu, tad A un B attēlo nesalīdzināmus elementus.

Tādu elementu virkni, kurā katrs nākošais elements ir "lielāks" par iepriekšējo (jeb, attēlojot grafiski, uz katru nākošo elementu var aiziet no iepriekšējā, virzoties pa līnijām uz augšu), sauc par ķēdi. 101.piemēra risinājumā aplūkotie ceļi ir ķēdes. 120. zīmējumā ķēde ir, piemēram, 2-4-8 (arī 1-2-4-8, protams, ir ķēde). Ķēde var sastāvot arī no viena elementa. Par ķēdes garumu sauc tās elementu skaitu.

Tādu elementu kopu, kurā neviens elements nav lielāks par otru (jeb citādi runājot, kurā katri divi elementi ir savā starpā nesalīdzināmi), sauc par <u>antiķēdi.</u> Piemēram, 101. piemēra risinājumā 118. zīmējumā visas divu elementu kopas veido antiķēdi. 120. zīmējumā antiķēdi veido, piemēram, skaitļi 9, 6, 4, 10. Visu to skolēnu kopa, no kuriem katrs klasē ir labākais kaut vienā priekšmetā, veido antiķēdi 104. piemērā.

Par antiķēdes garumu sauc tās elementu skaitu.

3. 6. 2. 3. Dilvorsa lemma un Dilvorsa teorēma

Pierādīsim divus rezultātus par daļēji sakārtotām kopām.

Dilvorsa lemma. Ja daļēji sakārtota kopa satur $m \cdot n + 1$ elementus, tad tajā var atrast vai nu ķēdi, kuras garums ir $m + 1$, vai antiķēdi, kuras garums ir $n + 1$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka kopā nav nevienas ķēdes, kuras garums būtu $m + 1$; tad maksimālais kopā sastopamo ķēžu garums ir m. Katram elementam apskatām tās maksimālās ķēdes garumu, kurā tas ietilpst kā mazākais elements; dažādu garumu skaits var būt m. Tā kā elementu pavisam ir $m \cdot n + 1$, tad sakarā ar DP atradīsies vismaz $n + 1$ elementi, kam šis maksimālais ķēdes garums ir viens un tas pats, teiksim, a. Apzīmēsim šos elementus ar $x_1; x_2; ...; x_{n+1}$.

Mēs apgalvojam, ka nekādi divi no šiem elementiem nav savā starpā salīdzināmi. Tiešām, pieņemsim, ka x_i mazāks par x_j. Atceramies, ka x_j ir mazākais elements ķēdē, kuras garums ir a. Pievienojot šai ķēdei vēl x_i, iegūstam, ka x_j ir mazākais elements ķēde, kuras garums ir $a+1$; tā ir pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu no pieņēmuma, ka x_j mazāks par x_i. Tātad x_i un x_j ir nesalīdzināmi. Tas ir patvaļīgiem i un j. Tātad $x_1; x_2; ...; x_{n+1}$ ir antiķēde, kuras garums ir $n+1$. Dilvorsa lemma pierādīta.

Parādīsim, kā Dilvorsa lemmu var lietot uzdevumu risināšanā.

105. piemērs. (Erdeša un Sekereša teorēma). Pieņemsim, ka rindā uzrakstīti $m \cdot n + 1$ skaitļi, kas visi ir dažādi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties vai nu $m + 1$ tādus skaitļus, kas uzrakstīti augošā kārtībā, vai arī $n + 1$ tādus skaitļus, kas uzrakstīti dilstošā kārtībā. (Izvēlētie skaitļi virknē var arī neatrasties pēc kārtas.)

Atrisinājums. Apzīmējam šos skaitļus augošā kārtībā ar $x_1 < x_2 < ... < x_{mn} < x_{mn+1}$. Definējam, ko nozīmē, ka viens no šiem skaitļiem ir mazāks par otru. Šī uzdevuma ietvaros x_i ir mazāks par x_j, ja x_i vērtība ir mazāka par x_j vērtību un vienlaikus x_i atrodas pa kreisi virknē no x_j.

Skaidrs, ka kopa kļūst daļēji sakārtota un ir spēkā visas vajadzīgās īpašības (transitivitāte utt.). Saskaņā ar Dilvorsa lemmu eksistē vai nu ķēde, kuras garums ir $m + 1$ (t.i., $m + 1$ augošā kārtībā uzrakstīti skaitļi), vai antiķēde, kuras garums ir $n + 1$ (t.i., $n + 1$ dilstošā kārtībā uzrakstīti skaitļi).

Tālāk pierādīsim šī rezultāta ievērojamu vispārinājumu - Dilvorsa teorēmu.

Dilvorsa teorēma. Galīgā daļēji sakārtotā kopā minimālais ķēžu skaits, kas satur visus kopas elementus, ir vienāds ar vislielāko no antiķēžu garumiem.

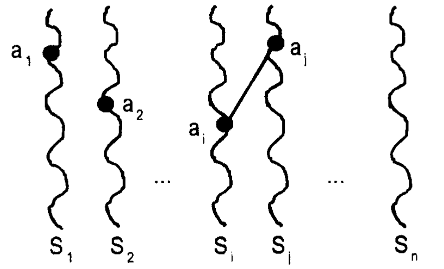
Pierādījums. Apzīmēsim lielāko no antiķēžu garumiem ar M. Skaidrs, ka nevienā ķēdē nav divi elementi no antiķēdes ar šo garumu; tāpēc vajadzīgas vismaz M ķēdes, lai pārklātu kaut vienīgi visus šīs antiķēdes elementus.

Atliek pierādīt, ka ar M ķēdēm to var izdarīt. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju pēc kopēja elementu skaita x. Ja $x = 1$, ir tikai viena antiķēde, kuras garums ir 1, un pārklāšanai nepieciešama un pietiekama viena ķēde. Tātad teorēma šai gadījumā ir pareiza. Pieņemsim, ka tā ir pareiza kopām, kurām nav vairāk kā x elementu. Apskatām daļēji sakārtotu kopu K ar $x + 1$ elementiem. Pieņemsim, ka a ir elements, par kuru lielāka nav (tas nenozīmē, ka šis elements ir lielāks par visiem citiem - ar dažiem tas var būt nesalīdzināms!)

Izņemsim no kopas K elementu a, iegūstot kopu K_1 ar x elementiem. Pieņemsim, ka kopā K_1 maksimālās antiķēdes garums ir n; tad K_1 var pārklāt ar n ķēdēm saskaņā ar induktīvo pieņēmumu. Apzīmēsim šīs ķēdes ar $S_1, S_2,..., S_n$. Skaidrs, ka katrā kopas K_1 elementu antiķēdē, kuras garums ir n, ir pa vienam elementāro no $S_1, S_2,..., S_n$; ja no kādas S_i tur elementu nebūtu, tad no kādas ķēdes būtu 2 elementi, bet tie, būdami salīdzināmi, nevar ietilpt vienā antiķēdē. Apskatām katrā ķēde $S_1, S_2,..., S_n$ maksimālo elementu, kas pieder kādai n elementu antiķēdei (pēc iepriekš pierādītā tāds eksistē); apzīmēsim tos attiecīgi ar a_1, $a_2,..., a_n$. Mēs apgalvojam, ka šie elementi paši kopā veido antiķēdi A (pagaidām to nepierādām). Salīdzināsim A un sākumā atmesto elementu a. Ja, pievienojot antiķēdei A elementu a, atkal iegūst antiķēdi, tad viss kārtībā. Tiešām, kopu K tad pārklāj ķēdes $S_1, S_2, ...,$ S_n un (n + 1) ķēde, kas sastāv no viena elementa a, tātad pavisam n + 1 ķēdes. Tātad pārklājošo ķēžu skaits nepārsniedz antiķēdes $a, a_1, a_2,..., a_n$ garumu, tātad nepārsniedz arī maksimālās antiķēdes garumu. Ja turpretī $a, a_1, a_2, ..., a_n$ nav antiķēde, tad a salīdzināms ar kādu a_i. Tā kā a nav mazāks ne par vienu K elementu, tad a ir lielāks par kādu fiksētu a_i.

Izveidojam ķēdi, kas sastāv no tiem ķēdes S_i elementiem, kas nepārsniedz a_i, un pievienojam tai elementu a. Apzīmējam šo ķēdi ar T. Aplūkojam kopu, ko iegūst, ja no K izņem ķēdes T elementus; iegūtajā kopā nav vairāk par x elementiem. Iegūtajā kopā nav neviena S_i elementa, kas piederētu kādai n elementu antiķēdei (tie visi nepārsniedz a_i saskaņā ar a_i izvēli); tātad iegūtās kopas antiķēdes var būt elementi vienīgi no $S_1, S_2, ..., S_{i-1}, S_{i+1}, ...,$ S_n, t.i., ne vairāk kā n - 1. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu iegūto kopu var pārklāt ar ne vairāk kā n - 1 ķēdēm. Pievienojot ķēdi T, iegūstam kopas K pārklājumu ar ne vairāk kā n ķēdēm, kas arī bija vajadzīgs.

Atliek pamatot pasvītroto apgalvojumu. Pieņemsim no pretējā, ka $a_1, a_2,..., a_n$ nav antiķēde; tad var atrast tādus a_i un a_j, ka a_i ir mazāks par a_j. Zīmējumā varam attēlot atbilstošās ķēdes S_i un S_j blakus (skat. 121. zīm.).



121. zīm.

Ievērosim, ka saskaņā ar a_j izvēli a_j pieder kādai n elementu antiķēdei, kurā ir arī kāds elements x no S_i. Tā kā a_i ir mazāks par a_j, tad $x \neq a_i$. Tā kā a_i ir lielākais ķēdes S_i elements, kas pieder kādai elementu antiķēdei, tad x nav lielāks par a_i. Tātad x ķēdē S_i atrodas zem a_i. Bet tad no tā, ka x mazāks par a_i un a_i mazāks par a_j, seko, ka x mazāks par a_j, t.i., elementi x un a_j nepieder vienai antiķēdei. Iegūta pretruna, un mūsu apgalvojums pierādīts.
Tātad Dilvorsa teorēma pierādīta.

Piezīme. Te izklāstītais pierādījums balstīts uz amerikāņu matemātiķa F.Gelvina idejām. Dilvorsa teorēmai pazīstami arī daudzi citi pierādījumi.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

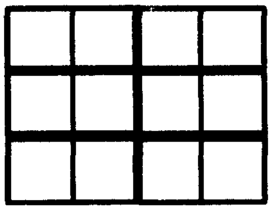
192. Izsecināt Dilvorsa lemmu no Dilvorsa teorēmas.
193. Izsecināt Kēniga - Rado teorēmu no Dilvorsa teorēmas.
194. Sauksim par daļēji sakārtotas kopas platumu tās maksimālās antiķēdes garumu, bet par tās augstumu - maksimālās ķēdes garumu. Pierādīt, ka no Dilvorsa lemmas seko rezultāts: daļēji sakārtotas kopas elementu skaits nepārsniedz tās platuma un augstuma reizinājumu.
195. Atrisināt 194. uzdevumu, izmantojot Dilvorsa teorēmu.

4. nodaļa. Dirihlē princips ģeometrijā

Šajā nodaļā aplūkosim uzdevumus, kuros Dirihlē principu vai summu novērtēšanas metodi izmanto ģeometrijas uzdevumu risināšanā. Visos piemēros Dirihlē principa vai summu novērtējumu lietojumi tiek izmantoti kopā ar kādu ģeometrisku ideju vai faktu; centīsimies to katrā gadījumā skaidri norādīt.

4. 1. Maksimālais attālums starp daudzstūra punktiem

106. piemērs. *Taisnstūrī, kura izmēri ir 3 x 4, ievietoti 7 punkti (iekšpusē vai uz kontūra). Pierādīt, ka vismaz divi no šiem punktiem atrodas viens no otra ne tālāk kā* $\sqrt{5}$.

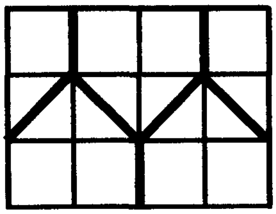


122. zīm.

Atrisinājums. Aplūkosim 122. zīmējumu. Vismaz vienā no 6 taisnstūriem atrodas 2 vai vairāk no apskatāmajiem punktiem (Dirihlē princips!). Tā kā starp taisnstūra punktiem vistālāk viens no otra atrodas diagonāles gali (ģeometriskā ideja) un diagonāles garums ir $\sqrt{5}$ (Pitagora teorēma), tad abi šie punkti ir meklējamie.

107. piemērs. *Taisnstūrī, kura izmēri ir 3 x 4, ievietoti 6 punkti (iekšpusē vai uz kontūra). Pierādīt, ka vismaz divi no šiem punktiem atrodas viens no otra ne tālāk kā* $\sqrt{5}$.

Komentārs. Izmantot 122. zīmējumā parādīto taisnstūra sadalījumu 6 "būros" nav iespējams - varbūt katrā "būrī" nonāk tikai viens punkts.



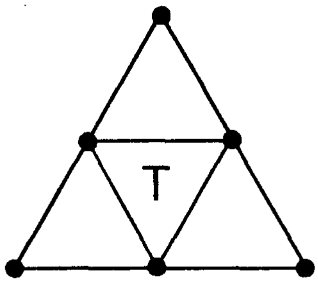
123. zīm.

Atrisinājums. Apskatīsim 123. zīmējumu, kur taisnstūris sadalīts 5 daļās. Vismaz vienā daļā var atrast 2 punktus. Tā kā katras daļas iekšienē attālums starp punktiem nepārsniedz $\sqrt{5}$ (pārbaudiet paši, ka neviena mala un diagonāle nav garāka par $\sqrt{5}$*)*, tad šos abus punktus var ņemt par meklētajiem.

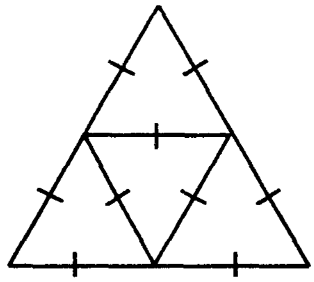
Komentārs. Abu iepriekšējo piemēru risinājumos bez pierādījuma tika izmantots šāds intuitīvs acīmredzams fakts: **vislielākais attālums starp daudzstūra punktiem ir starp kādām divām tā virsotnēm.** Iesakām lasītājam mēģināt pierādīt to patstāvīgi.

108.[k] piemērs. *Regulārs trijstūris T, kura malas garums ir 1, pilnībā pārklāts ar 5 vienādiem šabloniem; katrs šablons ir regulārs trijstūris (tā malas garums nav zināms). Šabloni varbūt daļēji pārsedz viens otru. Pierādīt, ka regulāro trijstūri T var pārklāt ar 4 šāda paša izmēra šabloniem.*

Atrisinājums. Aplūkosim trijstūra T virsotnes un malu viduspunktus (124. zīm. a). Katri divi no šiem sešiem punktiem atrodas attālumā $\geq \frac{1}{2}$ viens no otra. Tā kā tie pārklāti ar 5 šabloniem, tad vismaz divi punkti pārklāti ar vienu šablonu. Maksimālais attālums starp regulāra trijstūra (šablona) punktiem ir tā malas garums; secinām, ka šablona malas garums ir vismaz $\frac{1}{2}$, jo tas pārklāj divus punktus no minētajiem sešiem. Bet ar šablonu, kura malas garums ir $\geq \frac{1}{2}$, var pārklāt katru no četriem regulārajiem trijstūriem, kādos T sadalīts (124. zīm. b). Tātad T pārklāšanai tiešām pietiek ar četriem šādiem šabloniem.



124. zīm.



4. 2. Lauztas līnijas virsotņu un posmu īpašības

Izmantosim šādas īpašības (tās tieši seko no lauztas līnijas definīcijas); nekādas trīs pēc kārtas ņemtas lauztas līnijas virsotnes neatrodas uz vienas taisnes; nekādi divi pēc kārtas ņemti lauztas līnijas posmi neatrodas uz vienas taisnes.

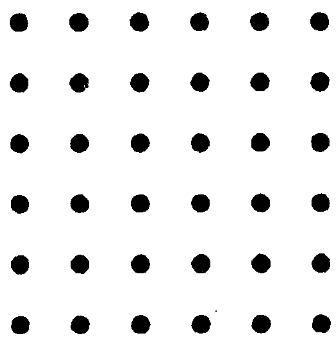
<u>109. piemērs.</u> *Kāds lielākais 12-stūra virsotņu skaits var atrasties uz vienas taisnes?*

Mēs jau redzējām (sk.33.piemēru), ka 8 virsotnes uz vienas taisnes var atrasties. Parādīsim, ka 9 virsotnes uz vienas taisnes atrasties nevar. Sadalīsim 12-stūra virsotnes, kas sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no l līdz 12, četrās grupās:

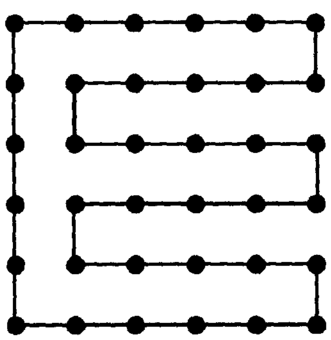
<u>1 2 3;</u> <u>4 5 6;</u> <u>7 8 9;</u> <u>10 11 12</u>

Pieņemsim, ka 9 virsotnes atrodas uz vienas taisnes. Tā kā $9 > 4 \cdot 2$, tad kaut kādas 3 no šīm 9 virsotnēm pieder vienai grupai. Bet tad trīs pēc kārtas esošās virsotnes atrastos uz vienas taisnes. Tā ir pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

<u>110. piemērs.</u> *Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 36 punkti (skat. 125. zīm.). Kāds ir mazākais posmu skaits slēgtai lauztai līnijai, kas iet caur visiem punktiem? Visiem posmiem jābūt horizontāliem vai vertikāliem.*



125. zīm.



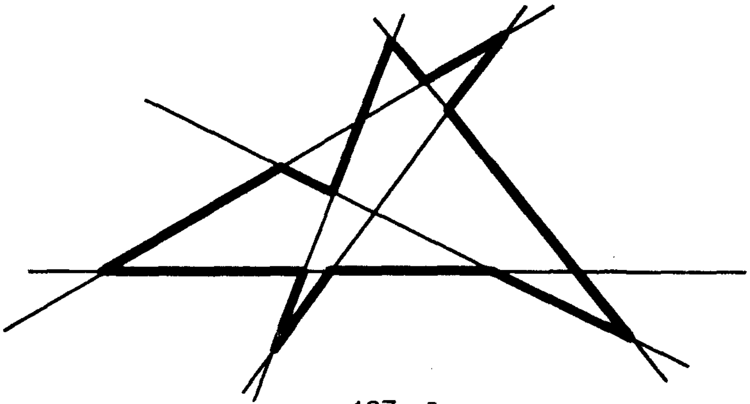
126. zīm.

<u>Atrisinājums.</u> Līnijai, kas attēlotā 126. zīmējumā, ir 12 posmi. Parādīsim, ka ar mazāk posmiem nepietiek. Tā kā slēgtā lauztā līnijā pamīšus mainās vertikāli un horizontāli posmi, tad posmu skaits noteikti ir pārskaitlis (skat. 3. nodaļu). Pieņemsim, ka šādā līnijā ir mazāk nekā 12

posmi. Tad tajā ir ne vairāk kā 5 horizontāli un ne vairāk kā 5 vertikāli posmi. Tā kā režģī ir 6 horizontāles, tad ir tāda horizontāle H, kurā nav neviena horizontālā posma; tā kā režģī ir 6 vertikāles, tad ir tāda vertikāle V, kurā nav neviena vertikālā posma. Caur punktu, kurā krustojas H un V, mūsu lauzta līnija neiet. Tātad tai nepieciešami vismaz 12 posmi.

111. piemērs. Sešas taisnes savstarpēji krustojas. Kāds ir lielākais iespējamais malu skaits daudzstūrim, kuram visas malas atrodas uz šīm taisnēm ?

Atrisinājums. Katra taisne var krustoties ar ne vairāk kā 5 citām taisnēm, tātad uz tās rodas ne vairāk kā 5 krustpunkti. Tie sadala taisni ne vairāk kā 6 daļās. Divas no tām ir stari, tātad uz katras taisnes rodas ne vairāk kā 4 nogriežņi bez kopīgiem iekšējiem punktiem. Viegli saprast, ka no šiem nogriežņiem var veidoties ne vairāk kā divas daudzstūra malas, jo divām uz vienas taisnes esošām malām nevar būt kopēji punkti. Tātad uz katras taisnes ir ne vairāk kā 2 daudzstūra malas, tāpēc malu kopskaits nepārsniedz $6 \cdot 2 = 12$. To, ka 12 malas šādam daudzstūrim iespējamas, parāda 127. zīmējums. Tātad uzdevuma atbilde ir 12.



127. zīm.

4. 3. Summu novērtēšanas metodes

Šī punkta uzdevumu risinājumos būtiski izmantoti šādi Dirihlē principa analogi (sauksim tos par teorēmām **D4** un **D5**).

D4 Ja n saskaitāmo summa ir lielāka par S, tad vismaz viens no saskaitāmajiem ir lielāks par S/n ; ja n saskaitāmo summa nav mazāka par S, tad vismaz viens no saskaitāmajiem nav mazāks par S/n .

D5 Ja n saskaitāmo summa ir mazāka par S, tad vismaz viens no saskaitāmajiem ir mazāks par S/n; ja n saskaitāmo summa nav lielāka par S, tad vismaz viens no saskaitāmajiem nav lielāks par S/n.

Pierādīsim, piemēram, **D4** pirmo daļu. Pieņemsim pretējo - neviens no n saskaitāmajiem nav lielāks par S/n . Tādā gadījumā šo n saskaitāmo summa nav lielāka par $S/n + S/n + ... + S/n$ (n reizes) jeb nav lielāka par S. Tā ir pretruna ar teorēmas nosacījumos doto. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un jābūt tādam saskaitāmajam, kas lielāks par S/n . Lasītājs pats var pierādīt arī pārējās teorēmas no pretējā ar nevienādību saskaitīšanas palīdzību (tas ir ļoti viegli).

Konkrētos uzdevumos S un atbilstošie saskaitāmie var būt visdažādākie: laukumi, garumi, attālumi, leņķu lielumi, loku leņķiskie lielumi utt. Ar teorēmu **D4** un **D5** palīdzību mēs, izejot no informācijas par vairāku laukumu, garumu, leņķu utt. summu, centīsimies kaut ko secināt par atsevišķas figūras laukumu, garumu, leņķisko lielumu u.tml.

4. 3. 1. Tieši summu novērtējumi

Vispirms aplūkosim uzdevumus, kas saistīti ar laukuma jēdzienu. Te svarīga nozīme būs šādai īpašībai: **ja figūru sadala vairākās daļās, tad figūras laukums vienāds ar atsevišķo daļu laukumu summu.**

112. piemērs. *Kvadrāts, kura izmēri ir 6 x 6 rūtiņas, sagriezts deviņos taisnstūros; griezumi iet tikai pa rūtiņu līnijām. Pierādīt, ka starp griežot iegūtajiem taisnstūriem ir divi vienādi taisnstūri.*

Atrisinājums. Pieņemsim, ka visi iegūtie taisnstūri ir dažādi. Tabulā parādīti taisnstūri ar vismazākajiem iespējamajiem laukumiem (laukumu mērvienība - viena rūtiņa).

Laukums	1	2	3	4	5	6	7
Izmēri	1 x 1	1 x 2	1 x 3	1 x 4, 2 x 2	1 x 5	1 x 6, 2 x 3	1 x 7

Redzams: pat ja izvēlamies 9 dažādus taisnstūrus ar vismazākajiem iespējamajiem laukumiem, to laukumu summa ir 1+2+3+4+4+5+6+6+7=38>36. Tātad 9 dažādus taisnstūrus no dotā kvadrāta vienlaicīgi iegūt nevar. Tāpēc divi griežot iegūtie taisnstūri būs vienādi.

113. piemērs. *Kvadrāta malas garums ir 1. Tā iekšpusē atzīmēti 19 punkti. Tie un arī kvadrāta virsotnes nokrāsotas sarkanas. Nekādi trīs sarkanie punkti neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var atrast trijstūri ar 3 sarkanām virsotnēm, kura laukums nav lielāks par $^1/_{40}$.*

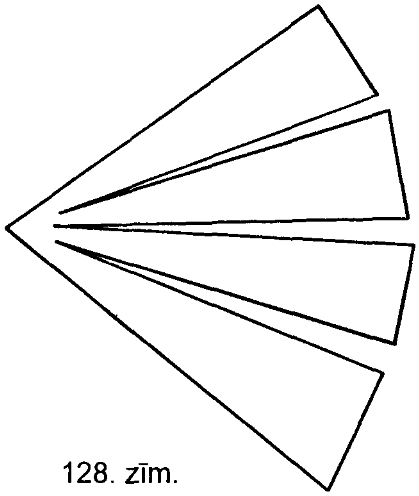
Atrisinājums. Pierādīsim, ka kvadrātu var sadalīt 40 trijstūros ar sarkanām virsotnēm bez kopīgiem iekšējiem punktiem. Tā kā to laukumu summa ir 1, tad vismaz viens laukums nav lielāks par $^1/_{40}$.

Sāksim vilkt nogriežņus, kas savieno 2 sarkanus punktus. Katru nākošo nogriezni velkam tā, lai tas nekrustotu nevienu jau iepriekš novilktu nogriezni. Turpinām tik ilgi, līdz vairs nevar novilkt nevienu nogriezni. Šai brīdī viss kvadrāts sadalīts trijstūros (ja būtu kāda daļa ar lielāku malu skaitu - četrstūris, piecstūris utt., tad, novelkot kādu tās diagonāli, nogriežņu vilkšanu varētu turpināt), turklāt pilnais leņķis ap katru no iekšējiem sarkanajiem punktiem sadalījies trijstūru leņķos; ja tā nebūtu, tad no šī punkta varētu vēl novilkt nogriežņus. Visu trijstūru visu leņķu summa sastāv no 19 pilnajiem leņķiem ap iekšējiem punktiem un četriem taisnajiem kvadrāta leņķiem. Tāpēc to summa ir $19\cdot360° + 360° = 20\cdot360°$. Tā kā viena trijstūra leņķu summa ir 180°, tad trijstūru ir $20\cdot360°/ 180° = 40$, kas arī bija jāpierāda.

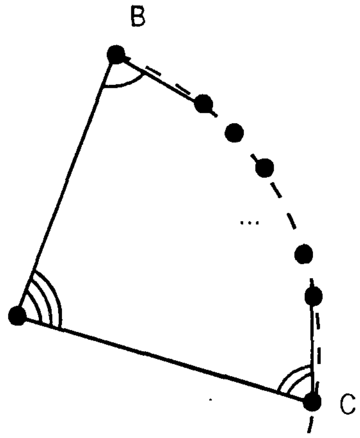
Tagad aplūkosim uzdevumus, kas saistīti ar leņķa lieluma jēdzienu. Te svarīgi zināt trīs faktus:
a) n - stūra iekšējo leņķu summa ir $180°\cdot(n - 2)$,
b) izliekta n - stūra ārējo leņķu summa (ņemot pa vienam ārējam leņķim pie katras virsotnes) ir 360°,
c) ja leņķi sadala vairākos leņķos ar stariem, kas iziet no virsotnes, tad atsevišķo daļu lielumu summa vienāda ar visa sākotnējā leņķa lielumu.

114. piemērs. *Kāds lielākais šauro leņķu skaits var būt 12-stūrī?*

Atrisinājums. Kā redzams 128. zīmējumā, iespējami 9 šauri leņķi. Pamatosim, kāpēc vairāk to nevar būt. Pieņemsim, ka 10 no kāda 12-stūra leņķiem ir šauri. Tad šo 10 leņķu lielumu summa mazāka par $10\cdot90° = 900°$. Katrs no abiem pārējiem leņķiem mazāks par 360°; tāpēc visu leņķu lielumu summa mazāka par 900°+2·360° = 1620°. Bet 12-stūra leņķu summa ir 180°·(12 - 2) = 1800°. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir nepareizs un 10 šauri leņķi nevar būt.



128. zīm.



129. zīm.

115. piemērs. Kāds lielākais šauro leņķu skaits var būt izliektā 12-stūrī ?

Atrisinājums. Kā redzams 129. zīmējumā, tas var būt 3 (šaurie leņķi atzīmēti ar lociņiem, bet plato leņķu virsotnes atrodas uz riņķa līnijas loka starp B un C). Ja izliektam 12-stūrim būtu 4 šauri leņķi, tad to ārējie leņķi visi būtu plati (t.i., lielāki par 90°) un ārējo leņķu lielumu summa būtu lielāka par 360°, bet tā ir pretruna. Tāpēc pieņēmums ir nepareizs, un 4 šauri leņķi nevar būt.

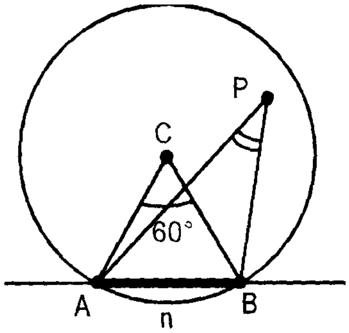
116. piemērs. Kādā 11-stūrī nekādas divas diagonāles nav paralēlas. Pierādīt: starp taisnēm, kuras satur šī 11-stūra diagonāles, var atrast divas tādas taisnes, kas veido leņķi, kurš ir mazāks par 5°.

Atrisinājums. No katras 11-stūra virsotnes var novilkt 8 diagonāles. Pavisam tātad ir 11·8=88 diagonāļu gali; pašu diagonāļu ir *88/2* = 44. Novelkam caur kādu punktu O 44 taisnes, no kurām katra ir paralēla citai diagonālei. Pilnais leņķis ap punktu O sadalās 88 leņķos, kas pa pāriem ir krustleņķi. Ja neviens no tiem nebūtu mazāks par 5°, tad to summa nebūtu mazāka par 88·5° = 440°. Tomēr šī summa ir 360°. Tātad kāds no leņķiem, kas izveidojušies punktā O**,** ir mazāks par 5°; tāds pats leņķis ir starp taisnēm, kas satur atbilstošās diagonāles.

117. piemērs. Uz taisnes t atrodas 6 nogriežņi bez kopīgiem punktiem. Uz katra no tiem kā pamata konstruēts vienādmalu trijstūris (visi vienā pusē no taisnes t). Konstruējam 6 riņķus, kuru centri ir šo trijstūru tās virsotnes, kuras nepieder taisnei t, bet rādiusi vienādi ar atbilstošo trijstūru malu garumiem. Pierādīt, ka nav punkta, kas pieder visiem šiem riņķiem vienlaicīgi.

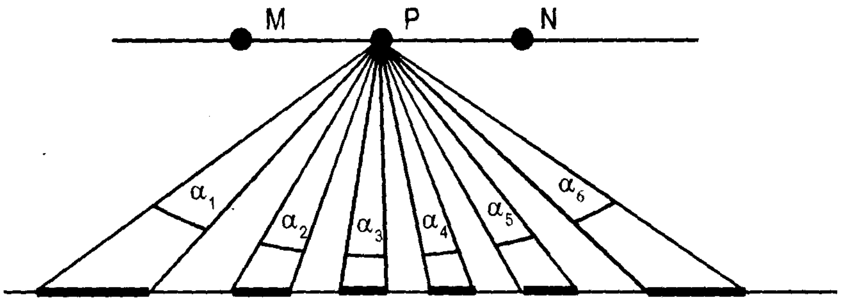
Atrisinājums. Iedomāsimies, ka P būtu šāds punkts un ABC - viens no apskatāmajiem 6 trijstūriem (130. zīm.). Tā kā loks $\overset{\smile}{AnB}$ atbilst centra leņķim ACB, kura lielums ir 60°, tad $\overset{\smile}{AnB}$ = 60°. Tā kā $\angle APB$ ir ievilkts leņķis (ja P pieder riņķa līnijai) vai iekšējs leņķis (ja P atrodas riņķa līnijas iekšpusē), kas balstās uz loka AnB, tad $\angle APB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AnB}$, respektīvi,

$\angle APB > \frac{1}{2}\overset{\smile}{AnB}$



130. zīm.

Jebkurā gadījumā $\angle APB \geq 30°$. Ja punkts P piederētu visiem sešiem riņķiem, tad pastāvētu sakarības $\alpha_1 \geq 30°$, $\alpha_2 \geq 30°$, ..., $\alpha_6 \geq 30°$ (skat. 131. zīm.). Bet tā nevar būt, jo acīmredzami $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_6 < \angle MNP = 180°$. Iegūta pretruna, tātad P nevar piederēt visiem 6 apskatāmajiem riņķiem.



131. zīm.

<u>Komentārs.</u> Lai jūs neiedomātos, ka apskatāmajā veidā konstruētie riņķi vispār var šķelties tikai pa 2 vai, lielākais, pa 3, iesakām patstāvīgi uzzīmēt zīmējumu, kur analoģiski konstruētiem **pieciem** riņķiem **ir** kopīgs punkts (to var izdarīt).

Summēšanas objekts var būt arī loku leņķiskie lielumi.

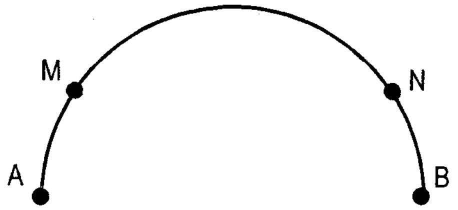
<u>118. piemērs.</u> Vienā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts un regulārs trijstūris. To virsotnes sadala riņķa līniju 7 lokos. Pierādīt, ka vismaz viena loka lielums nepārsniedz 15°.
<u>Pirmais novērojums.</u> Ja rodas 7 loki, tad neviena kvadrāta virsotne nesakrīt ne ar vienu trijstūra virsotni.
<u>Komentārs.</u> Ja mēs vienkārši ievērotu, ka septiņu loku leņķisko lielumu summa ir 360° un uzreiz censtos novērtēt mazāko saskaitāmo, tikai pamatojoties uz šo informāciju, mēs secinātu, ka var atrast loku, kas nepārsniedz $\frac{360°}{7} = 51{,}42°$ ... Bet mums nepieciešami daudz spēcīgāki argumenti.

<u>118. piemērs.</u> Vienā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts un regulārs trijstūris. To virsotnes sadala riņķa līniju 7 lokos. Pierādīt, ka vismaz viena loka lielums nepārsniedz 15°.

<u>Pirmais novērojums.</u> Ja rodas 7 loki, tad neviena kvadrāta virsotne nesakrīt ne ar vienu trijstūra virsotni.
<u>Komentārs.</u> Ja mēs vienkārši ievērotu, ka septiņu loku leņķisko lielumu summa ir 360° un uzreiz censtos novērtēt mazāko saskaitāmo, tikai pamatojoties uz šo informāciju, mēs secinātu, ka var atrast loku, kas nepārsniedz 360°/ 7= 51,42° ... Bet mums nepieciešami daudz spēcīgāki argumenti.
<u>Atrisinājums.</u> Vispirms aplūkosim trīs lokus, kuros trijstūra virsotnes sadala riņķa līniju. Pa tiem izvietotas 4 kvadrāta virsotnes. Tātad divas no tām pieder vienam 120° lielajam lokam (Dirihlē princips **D**$_1$!). Pieņemsim, ka tās ir M un N (skat. 132. zīm.), kas atrodas trijstūra virsotņu A un B norobežotajā lokā. Ievērosim, ka $\overset{\smile}{AB}$ =120° un $\overset{\smile}{MN}$ =90°, tāpēc

$$\overset{\smile}{AM} + \overset{\smile}{NB} = 120° - 90° = 30°.$$

No vienādības $\overset{\smile}{AM} + \overset{\smile}{NB} = 30°$ seko, ka vai nu $\overset{\smile}{AM} \leq 15°$, vai $\overset{\smile}{NB} \leq 15°$, kas arī bija jāpierāda.



132. zīm.

4. 3. 2. Summu novērtējumi un pārklāšanās

Viegli saprast, ka ir pareizi šādi apgalvojumi.

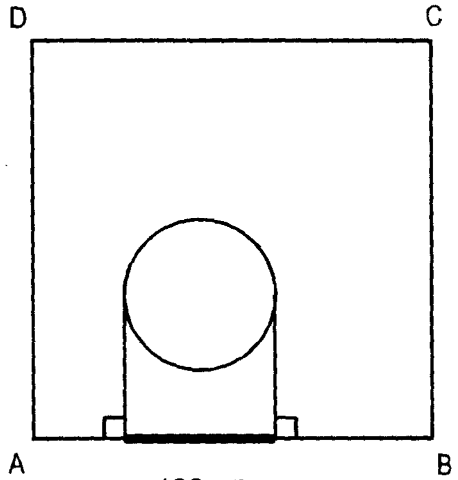
Teorēma par pārklāšanos uz taisnes. Pieņemsim, ka dots nogrieznis, kura garums ir t. Ja tajā ievieto vairākus nogriežņus, kuru garumu summa lielāka par t, tad ievietotie nogriežņi kaut kur pārklājas. Pieņemsim, ka dots nogrieznis, kura garums ir t. Ja tajā ievieto vairākus nogriežņus, kuru garumu summa lielāka par k·t (k - naturāls skaitlis), tad eksistē tāds punkts, kuru pārklāj vismaz k + 1 no ievietotajiem nogriežņiem.

Teorēma par pārklāšanos plaknē. Pieņemsim, ka dota istaba, kuras laukums ir S. Ja tajā ievieto vairākus nesalocītus paklājus, kuru laukumu summa lielāka par S, tad ievietotie paklāji kaut kur pārklājas. Pieņemsim, ka dota istaba, kuras laukums ir S. Ja tajā ievieto vairākus nesalocītus paklājus, kuru laukumu summa lielāka par k·S (k - naturāls skaitlis), tad eksistē tāds punkts, kuru pārklāj vismaz k + l paklāji.

Minētās teorēmas ir 4.3. sākumā minēto teorēmu $\mathbf{D_4}$ un $\mathbf{D_5}$ ģeometriski varianti. Ieteicam tās pierādīt patstāvīgi, kā arī formulēt un pierādīt līdzīgus apgalvojumus par to, kas notiek, ja ievietoto nogriežņu garumu summa ir mazāka par t, respektīvi, mazāka par k·t, vai ja ievietoto paklāju laukumu summa ir mazāka par S, respektīvi, mazāka par k·S.

4.3.2.1.Tieši lietojumi

119. piemērs. *Kvadrātā ABCD, kura malas garums ir 1, atrodas vairākas riņķa līnijas, kuru garumu summa ir 20. Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas perpendikulāra AB un krusto vismaz 7 no šīm riņķa līnijām.*



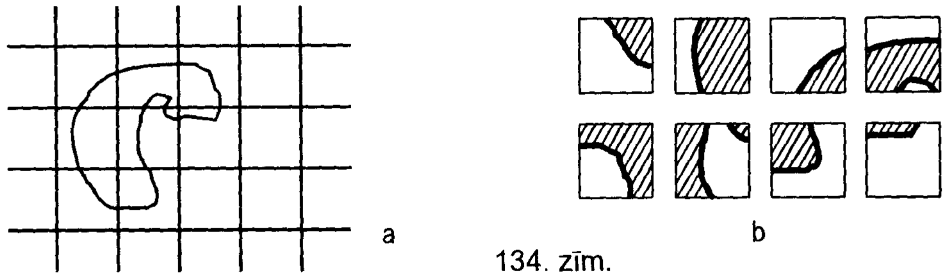
133. zīm.

Atrisinājums. Projicēsim visas riņķa līnijas uz malas AB (skat. 133. zīm.). Katra riņķa līnija projicējas par nogriezni, kura garums vienāds ar tās diametru. Ja riņķa līniju diametri ir d_1, d_2, ..., d_n, tad to garumu summa ir $\pi d_1+\pi d_2+ \dots +\pi d_n =20$.

Tātad $d_1+d_2+ \dots +d_n =20/\pi > 6$. Tāpēc nogrieznī AB, kura garums ir 1, izvietojušies n nogriežņi, kuru garumu summa lielāka par 6. Tāpēc vismaz kādu AB punktu pārklāj ne mazāk kā 7 nogriežņi (ja katru AB punktu pārklātu ne vairāk kā 6 nogriežņi, tad to kopējais garums nevarētu pārsniegt seškāršotu AB garumu, bet tā ir pretruna). Velkot caur šo punktu Q taisni perpendikulāri AB, tā krusto visas tās (vismaz septiņas!) riņķa līnijas, kuru projekcijas pārklāj punktu Q. Uzdevums atrisināts.

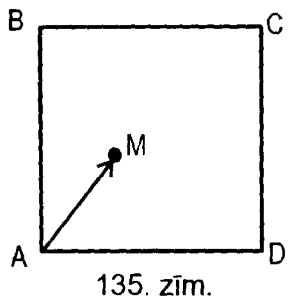
120. piemērs (Blikfelda teorēma). Iedomāsimies, ka plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; kvadrātiņa malas garums ir 1. Plaknē uzzīmēta figūra, kuras laukums mazāks par 1. Pierādīt, ka figūru var tā pārbīdīt paralēli, ka ne tās iekšpusē, ne uz robežas nebūs neviens rūtiņu režģa punkts (t.i., nevienas rūtiņas neviena virsotne).

Atrisinājums. Aplūkosim visas figūras daļas, kas atrodas vienā rūtiņā; katra šāda daļa var sastāvēt arī no vairākiem gabaliem. Piemēram, 134. zīmējumā a attēlotajai figūrai nāksies aplūkot daļas, no kurām viena daļa sastāv no diviem apgabaliem, bet pārējās - no viena apgabala. Daļas parādītas 134. zīmējumā b.



134. zīm.

Iezīmēsim visas šīs daļas vienā rūtiņā. Tā kā daļu laukumu summa mazāka par 1, rūtiņā paliks ar pārzīmētajām daļām nenoklāts punkts, piemēram, punkts M (135. zīm.).



135. zīm.

Iedomāsimies, ka figūru atstājam uz vietas, bet rūtiņu režģi pabīdām par vektoru $\overrightarrow{AM}$ (skat. 135. zīm.). Tad nevienā no figūras daļām nenonāk neviens režģa punkts. Tāpēc, atstājot uz vietas režģi, bet bīdot figūru par pretēju vektoru, tā ieņems pozīciju, kurā tai nepiederēs neviens režģa punkts. Skaidrs, ka varēja izmantot arī kādu no vektoriem $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$.

Kā redzams, pārbīde vienmēr iespējama par vektoru, kura garums nepārsniedz $\sqrt{2}/2$.

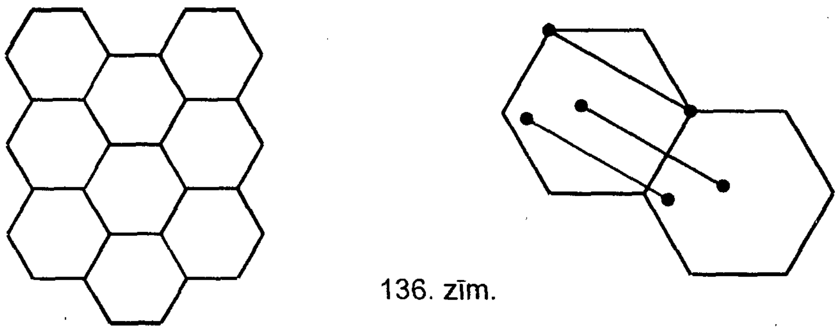
<u>121. piemērs.</u> *Plaknē doti vairāki riņķi (varbūt daļēji krustojošies); to pārklātais kopējais laukums ir S. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus riņķus bez kopējiem punktiem (pieskaršanās aizliegta), lai to laukumu summa būtu ne mazāka par S/9.*

<u>Atrisinājums.</u> Izvēlēsimies vispirms lielāko no visiem riņķiem (vienu no tiem, ja tādi ir vairāki). Visi riņķi, kam ir kopīgi iekšējie punkti ar izvēlēto, atrodas tāda riņķa iekšpusē, kas koncentrisks ar izvēlēto un ir ar 3 reizes lielāku rādiusu nekā tas. Šos riņķus izslēdzam no tālākas apskates. Starp līdz šim aplūkotajiem riņķiem izvēlētā riņķa laukums ir vismaz 1/9 no to kopā pārklātā laukuma, jo riņķu laukumu attiecība ir vienāda ar rādiusu kvadrātu attiecību. Ar atlikušo riņķu sistēmu izdarām to pašu, ar atlikušo - atkal to pašu, utt. Brīdī, kad visi riņķi izslēgti, būsim izvēlējušies riņķu kopu ar vajadzīgo īpašību. Uzdevums atrisināts.

Nākošais uzdevums ievērojami pastiprina iepriekšējo rezultātu.

<u>122. piemērs.</u> *Plaknē doti vairāki riņķi ar vienādiem rādiusiem (varbūt daļēji krustojošies). Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus riņķus bez kopīgiem punktiem tā, lai to laukumu summa būtu ne mazāka par $2L/9$, ja L ir to kopējais pārklātais laukums.*

<u>Atrisinājums.</u> Varam pieņemt, ka riņķa rādiuss ir 1. Sadalīsim plakni regulāros sešstūros, kā redzams 136. zīmējumā. Attālums starp pretējām malām ir $4 + \varepsilon$ (ε - mazs pozitīvs skaitlis; konkrēto vērtību izvēlēsimies risinājuma beigās). Skaidrs, ka arī attālums starp divu blakus esošo sešstūru centriem un vispār starp divos blakus esošos sešstūros "vienādi novietotiem" punktiem ir $4 + \varepsilon$ (skat. 136. zīm.).



136. zīm.

Tāpēc, ja <u>jebkuros</u> divos sešstūros izvēlēsimies vienādi novietotus punktus (t.i., tādus punktus, kuri sakritīs, ja vienu sešstūri ar paralēlās pārneses palīdzību savietos ar otru), tad attālums starp tiem nebūs mazāks par $4 + \varepsilon$. Tāpēc, ja divi tādi punkti A un B pieder mūsu uzdevumā minētajiem riņķiem C_1 un C_2, tad šiem riņķiem nevar būt kopēju punktu. Tiešām, pieņemsim, ka tiem ir kopējs punkts M. Tad $AM \leq 2$ (jo A un M pieder C_1) un $BM \leq 2$ (jo B un M pieder C_2), tāpēc no trijstūra nevienādības $4 + \varepsilon \leq AB \leq AB + BM \leq 4$. Tā ir pretruna.

Nokrāsosim ar riņķiem pārklāto daļu sarkanu. Izvēlēsimies vienu sešstūri M. No visiem sešstūriem, kuros ir kādi sarkani apgabali, pārnesīsim šos apgabalus ar paralēlo pārnesi atbilstošajos stāvokļos sešstūrī M. Tādējādi daži M punkti varbūt tiks pārklāti ar sarkanajiem apgabaliem vairākas reizes. Pieņemsim, ka m ir lielākais skaits reižu, kādā tiek pārklāts kāds no M punktiem; šo punktu apzīmēsim ar P.

Apzīmēsim viena riņķa laukumu ar R, bet sešstūra laukumu ar S. Saskaņā ar m izvēli $m \cdot S \geq L$. Punktu P pārklāj m sarkani apgabali. Pirms pārneses tie atradušies m dažādos sešstūros. Atradīsim tos m punktus, kas pārneses gaitā tika pārcelti uz punktu P, un katram no tiem atradīsim vienu riņķi, kas to pārklāj; saskaņā ar iepriekš pierādīto šiem m riņķiem nav kopēju punktu. Atradīsim šo riņķu kopējo laukumu. Ja pierādīsim, ka $m \cdot R \geq \frac{2}{9} \cdot L$, uzdevums būs atrisināts.

Ievērosim, ka $m \cdot R = (m \cdot S) \cdot R / S \geq (R/S) \cdot L$ saskaņā ar nevienādību $m \cdot S \geq L$. Atliek aprēķināt attiecību R/S. Skaidrs, ka $R = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Sadalot regulāro sešstūri sešos regulāros trijstūros ar augstuma garumu $2 + \varepsilon/2$, viegli atrast, ka $S = \frac{(4+\varepsilon)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$. Tātad

$$\frac{R}{S} = \frac{2\pi}{\sqrt{3} \cdot (4+\varepsilon)^2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \pi}{3(4+\varepsilon)^2}.$$

Ja $\varepsilon \to 0$, tad $\frac{R}{S} \to \frac{2\sqrt{3} \cdot \pi}{48} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{24} > \frac{2}{9}$. Tātad ε var paņemt tik mazu, lai $R/S > 2/9$. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

Saskaņā ar šo uzdevumu izvirzās divas neatrisinātas problēmas.

1. Skaidrs, ka uzdevumā konstanti $2/9$ var aizstāt ar lielāku konstanti $\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{24}$. Vai šo konstanti vēl var palielināt?
2. Kā izmainās uzdevuma rezultāts, ja riņķi var būt arī dažādi? Vai tas paliek spēkā?

Nākošais uzdevums parāda negaidītu metodi - pāreju no plaknes uz telpu.

<u>123. piemērs.</u> *Par joslu sauc plaknes apgabalu starp divām paralēlām taisnēm; par joslas platumu sauc attālumu starp šīm taisnēm. Dots riņķis ar rādiusu R, kas pārklāts ar galīgu skaitu joslu. Pierādīt, ka joslu platumu summa nav mazāka par 2R.*

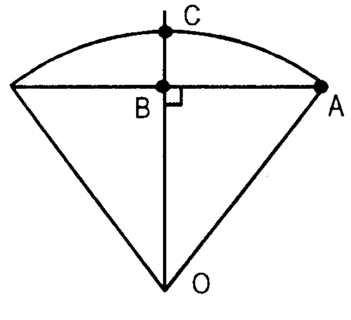
<u>Atrisinājums.</u> Gribētos saistīt joslas platumu ar pārklātās riņķa daļas laukumu vai pārklāto riņķa līnijas loku garumu (leņķisko lielumu), taču nav grūti pārliecināties, ka tiešas sakarības te nav. Rīkosimies citādi. Konstruēsim sfēru, kam apskatāmais riņķis ir lielais riņķis; katrai joslai konstruēsim atbilstošu telpas apgabalu starp divām paralēlām plaknēm, kuras iet caur joslas malām perpendikulāri sākumā dotā riņķa plaknei. Šie telpas apgabali uz sfēras virsmas izšķeļ segmentus vai gredzenus; turklāt, ja joslas platums ir h, tad izšķeltā gredzena laukums ir $2\pi Rh$, bet segmenta laukums nepārsniedz $2\pi Rh$ (segmenta augstums varbūt ir mazāks par apgabala platumu, jo joslas viena mala var iet ārpus riņķa). Ja joslas pārklāj visu riņķi, tad atbilstošajiem telpas apgabaliem jāpārklāj visa sfēra, t.i., apgabals ar laukumu $4\pi R^2$.

Tātad jābūt $2\pi Rh_1 + 2\pi Rh_2 + \ldots + 2\pi Rh_n \geq 2\pi R^2$, no kurienes seko vajadzīgais. Uzdevums atrisināts.

Sfēras un tās daļu virsma izrādās ērts instruments arī, lai novērtētu leņķus starp stariem (vektoriem) telpā, kā to parāda nākošais uzdevums.

<u>124. piemērs.</u> *No viena telpas punkta iziet 30 nenulles vektori. Pierādīt, ka starp tiem var atrast tādus divus vektorus, starp kuriem leņķis ir mazāks par 45°.*

Atrisinājums. Apzīmēsim punktu, no kura iziet vektori, ar O. Konstruēsim sfēru ar rādiusu 1 un centru O. Katram vektoram konstruēsim staru ar sākumu punktā O, uz kura šis vektors atrodas; ap katru staru kā asi konstruēsim konisku virsmu, kuras aksiālšķēluma leņķis ir 45°. Mums jāpierāda, ka vismaz divi šie konusi šķeļas. Aplūkosim segmentus, ko tie izšķeļ uz sfēras; pietiek pierādīt, ka divi segmenti šķeļas. Tas būs pierādīts, ja pierādīsim, ka visu 30 segmentu laukumu summa ir lielāka par sfēras laukumu 4π.



137. zīm.

Viegli aprēķināt, ka katra segmenta augstums

$$OC - OB = 1 - \cos\pi/8. \text{ Savukārt } \cos\pi/8 = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

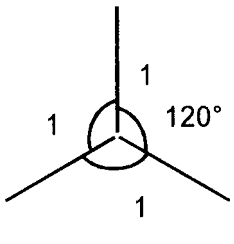
Tāpēc segmenta laukums ir $2\pi\cdot 1\cdot(1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})$,

un mums jāpierāda nevienādība $30\cdot 2\pi\cdot 1\cdot(1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}) > 4\pi$ jeb $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} < \frac{14}{15}$.

Tas jāpārbauda lasītājam pašam. Uzdevums atrisināts.

Arī pēdējā šī apakšpunkta piemērā būs interesanta ideja.

125. piemērs. *Umbrijas karaļvalsts atrodas uz salas, kas novietota plaknē. To apdzīvo umbrieši. Katrs umbrietis ir būtne, kura sastāv no trim vienības nogriežņiem, kas ar galiem savienoti vienā punktā un vienmēr veido cits ar citu 120° leņķi (skat. 138. zīm.). Umbrieši nekad nesaskaras ar saviem nogriežņiem viens ar otru. Pierādīt, ka umbriešu ir tikai galīgs skaits.*

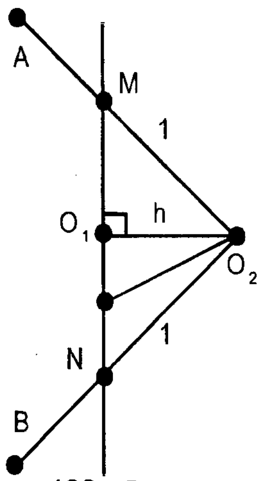


138. zīm.

Atrisinājums. Pirmā doma, kas ienāk prātā - izmantot laukuma apsvērumus, ņemot vērā, ka salas laukums noteikti ir galīgs. Tomēr tiešā veidā šī ideja nerealizējas - katrs umbrietis, kas sastāv no trim nogriežņiem, aizņem, nosacīti runājot, laukumu O, un tāpēc umbriešu it kā varētu būt bezgalīgi daudz.

Realizēsim šo ideju ar tehniska palīgpaņēmiena palīdzību: "papildināsim" katru umbrieti ar riņķi, kura rādiuss ir 1/10 un centrs ir punktā, kurā sastopas visi trīs umbrieša nogriežņi.

Lemma. Ja diviem umbriešiem konstruētie riņķi saskaras vai šķeļas, tad viņu "rokas" saskaras vai krustojas.



139. zīm.

Ja lemma būtu pierādīta, uzdevums būtu atrisināts. Tiešām, nekrustojošos riņķu ar rādiusu 1/10 uz salas var novietot tikai galīgu skaitu (laukuma apsvērumu dēļ), tātad arī umbriešu var būt tikai galīgs skaits. Tāpēc atliek pierādīt lemmu.

Pieņemsim, ka divu umbriešu riņķiem ir kopīgi punkti. Tad attālums starp to centriem nepārsniedz 2/10. Ja pirmā umbrieša centrs O_1 atrodas uz kādas otrā umbrieša "rokas", saskaršanās jau pierādīta. Tāpēc atliek aplūkot gadījumu, kad O_1 atrodas starp kādām divām otrā umbrieša "rokām" (sk. 139. zīm.).

Novelkam caur O_1 taisni, kas perpendikulāra $\angle AO_2B$ bisektrisei. Tā krusto OA un OB punktos M un N, pie tam $O_2M = O_2N \leq {}^{h}/\cos 60° = 2h \leq 2 \cdot O_1O_2 = {}^{2}/_{5} < 1$. Tā kā $\angle AO_2B = 120°$, tad $MN = O_2M \cdot \sqrt{3} \leq {}^{2}/_{5} \cdot \sqrt{3} < 1$.

Tātad visas trijstūra O_2MN malas ir mazākas par l.

Vismaz viena no umbrieša (viņa centrs ir O_1) "rokām" ir virzīta no punkta O_1 trijstūra O_2MN iekšpusē. Tā kā tās garums ir 1, tad tai kaut kur jāiziet ārā no šī trijstūra. Tā nevar krustot malu MN, tātad krusto O_2M vai O_2N. Tātad abi umbrieši saskaras.

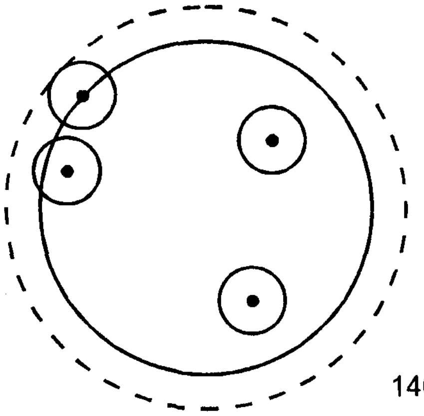
Uzdevums atrisināts.

Interesanti būtu noskaidrot lielāko umbriešu skaitu, kas novietojami, piemēram, kvadrātā, kura izmēri ir 100 x 100, vai citos konkretizētos plaknes apgabalos.

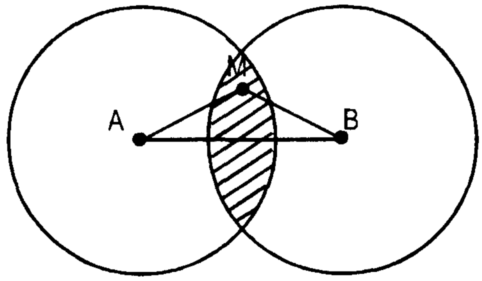
4. 3. 2. 2. Apkārtnes jēdziens un tā lietojumi

126. piemērs. Riņķī, kura rādiuss ir 10, atrodas 122 punkti (iekšpusē vai uz robežas). Pierādīt, ka starp tiem var atrast divus punktus, kuru savstarpējais attālums mazāks par 2.

Atrisinājums. Apvilksim ap katru no punktiem riņķīti ar rādiusu 1. Visi šādi riņķīši atrodas pārtrauktas riņķa līnijas (ar rādiusu 11) iekšpusē vai arī iekšēji pieskaras tai (skat. 140. zīm.).



140. zīm.



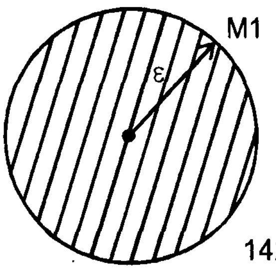
141. zīm.

Pārtrauktā riņķa līnija ierobežo riņķi ar laukumu $\pi \cdot 11^2 = 121\pi$; katra mazā riņķīša laukums ir $\pi \cdot 1^2 = \pi$.. Tā kā mazo riņķīšu laukumu summa ir lielāka par "pārtrauktā" riņķa laukumu, tad kaut kādi divi mazie riņķīši pārklājas. Bet tad attālums starp to centriem ir mazāks par 2 (skat. 141. zīm.):
$AB < AM + MB \leq 1 + 1 = 2$, tātad $AB < 2$, ko arī vajadzēja pierādīt.

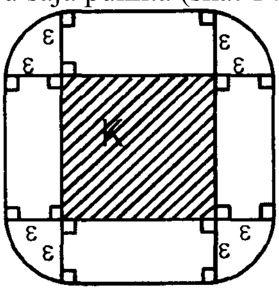
Šī uzdevuma risinājumā tika lietots apkārtnes jēdziens. Iepazīsimies ar to sīkāk.
Definīcija. Par ģeometriskas figūras apkārtni sauc visu to punktu kopu, kuras katra punkta attālums līdz kādam figūras punktam nepārsniedz ε (ε > 0).

Lūk, daži piemēri.

1. Punkta ε - apkārtne ir riņķis ar centru šajā punktā (skat 142. zīm.) un rādiusu ε.

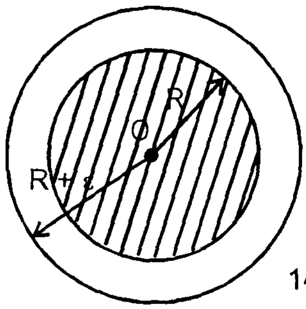


142. zīm.



143. zīm.

2. Kvadrātā, kura malas garums ir α, ε - apkārtne attēlota 143. zīmējumā. Tā ir kvadrāts, kura malas garums ir α + 2ε un kura stūri ir "noapaļoti" ar rādiusu ε.
3. Riņķim R, kura rādiuss ir R, ε - apkārtne ir koncentrisks riņķis, kura rādiuss ir R + ε (144. zīm.).



144. zīm.

145. zīm.

4. Nogriežņa ε - apkārtne attēlotā 145. zīmējumā. Tā sastāv no taisnstūra un diviem pusriņķiem, kuru rādiuss ir ε.

Apkārtnes jēdziena izmantošanā svarīga ir nākošā teorēma.

<u>Teorēma.</u> Ja figūru F_1 un F_2 ε – apkārtnēm ir kopējs punkts, tad var atrast tādu figūras F_1 punktu A_1 un tādu figūras F_2 punktu A_2, ka $|A_1 A_2| \le 2\varepsilon$.
Un otrādi, ja var atrast tādu figūras F_1 punktu A_1 un tādu figūras F_2 punktu A_2 , ka $|A_1A_2| \le 2\varepsilon$, tad F_1 un F_2 ε - apkārtnēm ir kopējs punkts.

<u>Pierādījums.</u> Pierādīsim teorēmas pirmo daļu. Pieņemsim, ka F_1 un F_2 ε - apkārtnēm ir kopējs punkts M. Tā kā M pieder pie F_1 ε - apkārtnes, tad var atrast tādu figūras F_1 punktu A_1, ka $|A_1M| < \varepsilon$.

Tā kā M pieder arī pie F_2 ε - apkārtnes, tad var atrast tādu figūras F_2 punktu A_2 , ka $|A_2M| \le \varepsilon$.

Bet tad pēc trijstūra nevienādības $|A_1A_2| \le |A_1M| + |MA_2| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, kas arī bija jāpierāda.

Pierādīsim teorēmas otro daļu. Pieņemsim, ka A_1 ir figūras F_1 punkts, A_2 - figūras F_2 punkts un $|A_1A_2| \le 2\varepsilon$. Ar M apzīmēsim nogriežņa A_1A_2 viduspunktu. Acīmredzami, ka M pieder gan pie F_1 ε - apkārtnes, gan pie F_2 ε - apkārtnes, jo

$$|MA_1| = \frac{|A_1A_2|}{2} \le \varepsilon \text{ un } |MA_2| = \frac{|A_1A_2|}{2} \le \varepsilon.$$

Teorēma pierādīta.

Teorēmas jēga ir šāda: attālums starp divām figūrām ir lielāks nekā d tad un tikai tad, ja šo figūru d/2 - apkārtnēm nav kopēju punktu. (Par <u>attālumu starp figūrām</u> sauksim mazāko attālumu no vienas figūras punktiem līdz otras figūras punktiem).

Apkārtnes jēdzienu uzdevuma risināšanā lieto kopā ar teorēmām par pārklāšanos, kā tas jau tika parādīts 126. piemērā.

Aplūkosim vēl vienu piemēru, kur apkārtnes jēdziens tiks lietots pretējā virzienā - lai pierādītu, ka kaut ko <u>var</u> izdarīt.

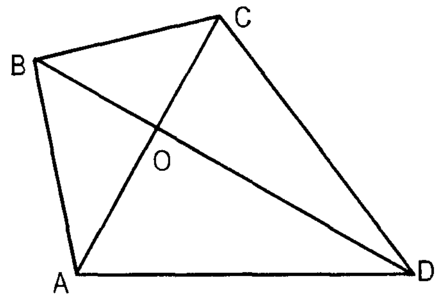
<u>127. piemērs.</u> Kvadrāta malas garums ir 15, un tā iekšpusē atrodas 20 kvadrātiņi, kuru malas garums ir 1. Pierādīt, ka lielā kvadrāta iekšpusē var novietot riņķi, kura rādiuss ir 1 un kuram nav kopēju punktu ne ar vienu no mazajiem kvadrātiņiem.

<u>Atrisinājums.</u> Mums acīmredzot jāpierāda, ka lielā kvadrāta iekšpusē var atrast tādu punktu O, kura attālums līdz jebkurai no lielā kvadrāta malām un jebkuram mazajam kvadrātiņam ir lielāks nekā 1. Tātad šis punkts nedrīkst atrasties nevienā no mazo kvadrātiņu 1 - apkārtnēm. Katras šādas apkārtnes laukums ir $5 + \pi$ (šo faktu jūs viegli varēsiet pierādīt patstāvīgi) un visu 20 apkārtņu laukumu summa ir $20\cdot(5 + \pi) < 20\cdot8{,}15 = 163 < 13^2$. Tātad visu apkārtņu laukumu summa ir mazāka nekā tāda kvadrāta laukums, kura izmēri ir 13 x 13 un kurā drīkst izraudzīties riņķa centru, lai riņķis atrastos dotā kvadrāta iekšpusē. Šī 13 x 13 kvadrāta iekšpusē eksistē tāds punkts, kas nepieder nevienai no 20 mazo kvadrātiņu 1 - apkārtnēm. Šo punktu var izraudzīties par meklējamā riņķa centru O.

4. 3. 3. Summu novērtējumi un trijstūra nevienādība

Līdz ar trijstūra nevienādību (katrā trijstūrī ABC pastāv nevienādības AB + BC > AC, AC + + CB > AB, BA + AC > BC) šīs grupas uzdevumu risināšanā lietderīgi izmantot divus faktus (tie abi seko no trijstūra nevienādības).

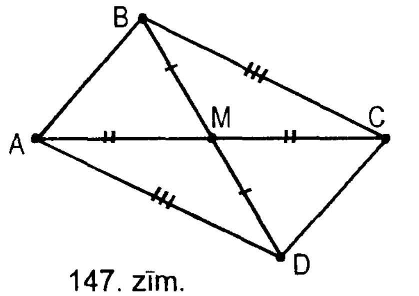
<u>Četrstūra nevienādība.</u> Izliektā četrstūrī ABCD pastāv nevienādības AC + BD > AB + CD un AC + BD > AD + BC (diagonāļu garumu summa ir lielāka par divu pretējo malu garumu summu).



146. zīm.

Pierādījums. Ja diagonāles krustojas punktā O, tad (skat. 146. zīm.) AO + OB > AB un OC+DO > CD. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam (AO + OC) + (DO + OB) > AB + CD jeb AC + BD > AB + CD. Otro nevienādību pierāda līdzīgi.

Teorēma par mediānas garumu. Trijstūra mediāna ir īsāka par to malu summas pusi, starp kurām tā atrodas.



147. zīm.

Pierādījums. Papildinām ABC līdz paralelogramam ABCD. Apzīmējam tā diagonāļu krustpunktu ar M (147. zīm.). Tad M ir AC un BD viduspunkts. Tātad BM ir ABC mediāna. No trijstūra nevienādības, pielietojot to ABD, iegūstam AB + AD > BD. Bet AD = BC un BD=2·BM, tāpēc no šīs nevienādības seko AB + BC > 2·BM jeb BM < $\frac{1}{2}$ (AB + BC), ko arī vajadzēja pierādīt.

128. piemērs. Pierādīt, ka izliektā četrstūrī vismaz viena diagonāle ir garāka par ceturtdaļperimetru.

Atrisinājums. Saskaņā ar četrstūra nevienādību izliektā četrstūrī ABCD pastāv sakarības AC + BD > AB + CD, AC + BD > AD + BC (146. zīm.). Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

2(AC + BD) > Per(ABCD) jeb AC + BD > $\frac{1}{2}$Per(ABCD). (*)

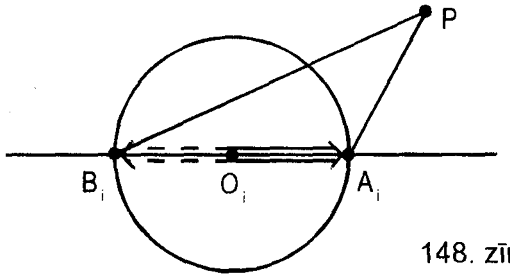
No šejienes seko, ka vai nu AC, vai BD lielāka par $\frac{1}{4}$Per(ABCD); ja būtu gan AC ≤ $\frac{1}{4}$Per(ABCD), gan BD ≤ $\frac{1}{4}$ Per(ABCD), tad, abas pēdējās nevienādības saskaitot, iegūtu AC + BD ≤ $\frac{1}{2}$ Per(ABCD), kas ir pretrunā ar (*).

129. piemērs. Kvadrāta ABCD diagonāles garums ir d. Tā iekšpusē ņemts punkts M. Pierādīt, ka M attālums vismaz līdz divām virsotnēm nav mazāks par d/2.

Atrisinājums. Katram punktam M saskaņā ar trijstūra nevienādību pastāv sakarība AM+CM ≥ d (vienādība iespējama tikai, ja M atrodas uz AC). Ja divu saskaitāmo summa nav mazāka par d, tad vismaz viens no tiem nav mazāks par d/2. Līdzīgi pierāda, ka M attālums vai nu līdz B, vai līdz D nav mazāks par d/2.

<u>130. piemērs.</u> Uz galda atrodas 100 pareizi ejoši pulksteņi. Pierādīt: lai kāds arī nebūtu galda punkts P, atradīsies tāds laika moments, kad attālumu summa no P līdz minūšu rādītāju galapunktiem būs lielāka nekā attālumu summa no P līdz ciparnīcu centriem.

<u>Atrisinājums.</u> Izvēlēsimies tādu laika momentu, kad neviena no taisnēm, uz kurām atrodas minūšu rādītāji, neiet caur P. Apzīmēsim minūšu rādītāju galapunkta stāvokļus šajā momentā ar $A_1, A_2,..., A_{100}$, bet to stāvokļus pēc pusstundas - ar $B_1, B_2,..., B_{100}$. Laika momenta izvēle garantē, ka punkts P veido <u>trijstūri</u> ar katru no punktu pāriem (A_1, B_1), (A_2, B_2) utt. (skat. 148. zīm.). Atbilstošos ciparnīcu centrus apzīmēsim ar $O_1, O_2,..., O_{100}$.



148. zīm.

Tad PO_1 ir mediāna trijstūrī PA_1B_1, PO_2 ir mediāna trijstūrī PA_2B_2 utt. Saskaņā ar teorēmu par mediānas garumu iegūstam

$$PA_1 + PB_1 > 2 \cdot PO_1$$
$$PA_2 + PB_2 > 2 \cdot PO_2$$
$$\dots$$
$$PA_{100} + PB_{100} > 2 \cdot PO_{100}$$

Saskaitot šīs nevienādības un grupējot locekļus, iegūstam

$$(PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100}) + (PB_1 + PB_2 + \dots + PB_{100} > 2 \cdot (PO_1 + PO_2 + \dots + PO_{100}).$$

No šejienes seko, ka vai nu $(PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} > PO_1 + PO_2 + \dots + PO_{100}$, vai arī $PB_1 + PB_2 + \dots + PB_{100} > PO_1 + PO_2 + \dots + PO_{100}$.

Tātad der vai nu sākumā izvēlētais, vai tam pēc pusstundas sekojošais laika moments.

4.4. Jēdziens par Ramseja teoriju

Trešajā nodaļā, iepazīstoties ar Ramseja skaitļiem un ar tiem saistītajiem jēdzieniem, mēs pierādījām virkni viena tipa rezultātu: sadalot kaut kādu pietiekami lielu struktūru (piemēram, grafa šķautņu kopu) nelielā skaitā daļu (piemēram, nokrāsojot katru šķautni vienā no divām krāsām), vismaz vienā daļā ir pietiekami bagāta apakšstruktūra (piemēram, pilns monohromatisks četru virsotņu grafs).

Tas, ko nozīmē vārdi "pietiekami liels", "neliels", "pietiekami bagāts", "apakšstruktūra", ir atkarīgs no konkrēta uzdevuma. Šo jēdzienu precizēšana katrā konkrētā situācijā arī veido uzdevuma vai teorēmas saturu.

Visus šāda tipa rezultātus pieņemts saukt par Ramseja tipa rezultātiem vai kopumā par Ramseja teoriju. Var aplūkot Ramseja teorijas izpausmes skaitļu teorijā, planimetrijā, algebrā, kombinatorikā utt.

Šajā paragrāfā aplūkosim Ramseja tipa rezultātus planimetrijā. Vispārīgais jautājums, par kuru mēs interesēsimies, būs šāds: ja katrs plaknes punkts nokrāsots vienā no galīga skaita krāsām, tad kāda tipa monohromatiskas figūras garantēti var atrast? Kā svarīgu speciālgadījumu aplūkosim arī situācijas, kad tiek pētīti nevis visi plaknes punkti, bet tikai punkti ar veselām koordinātēm (t.i., rūtiņu režģa punkti).

Ramseja tipa rezultātu planimetrijā ir ārkārtīgi daudz, un mēs šeit varēsim pievērsties tikai niecīgai to daļai, arī tos neatspoguļojot pašā vispārīgākajā veidā.

4.4.1. Attālumu realizācija plaknē

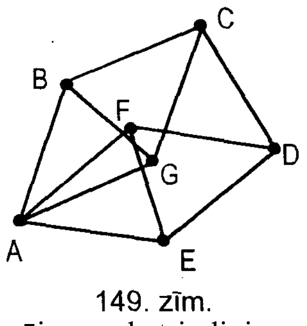
Šajā punktā aplūkosim šādu jautājumu: ja katrs plaknes punkts nokrāsots vienā no fiksēta galīga skaita krāsām, tad ko var sacīt par tādu nogriežņu garumiem, kuru abi gali nokrāsoti vienā krāsā? Sāksim ar ļoti vienkāršu rezultātu.

131. piemērs. *Katrs plaknes punkts nokrāsots vai nu balts, vai melns (krāsojums ir pilnīgi patvaļīgs). Pierādīt, ka var atrast 2 punktus, kas abi nokrāsoti vienādi un atrodas 1 m attālumā viens no otra.*

Atrisinājums. Aplūkojam vienādmalu trijstūri, kura malas garums ir 1m. Tam ir 3 virsotnes; starp tām ir divas virsotnes, kas nokrāsotas vienādi (Dirihlē princips $\mathbf{D_1}$). Šīs virsotnes arī der par meklējamiem punktiem.

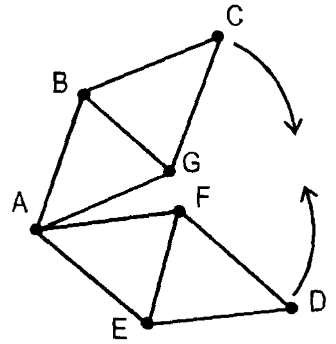
Noskaidrosim, kas notiek, ja krāsu skaitu palielina.

132. piemērs. *Katrs plaknes punkts nokrāsots balts, melns vai sarkans (krāsojums ir pilnīgi patvaļīgs). Pierādīt, ka var atrast divus punktus, kas abi nokrāsoti vienādi un atrodas 1 m attālumā viens no otra.*



149. zīm.

Atrisinājums. Apskatām 149. zīmējumu; katri divi punkti, kas savienoti ar nogriezni, atrodas l m attālumā viens no otra. Šādu sistēmu var izveidot sekojoši (skat. 150.zīm.): vispirms izveidojam divus rombus ABCG un AFDE, kas katrs sastāv no diviem vienādmalu trijstūriem, kuru malas garums ir 1 m, bet pēc tam griežam tos vienu otram pretī ap punktu A tik ilgi, kamēr arī CD kļūst 1 m garš. Tagad analizējam 149. zīmējumā parādīto 7 punktu sistēmu.



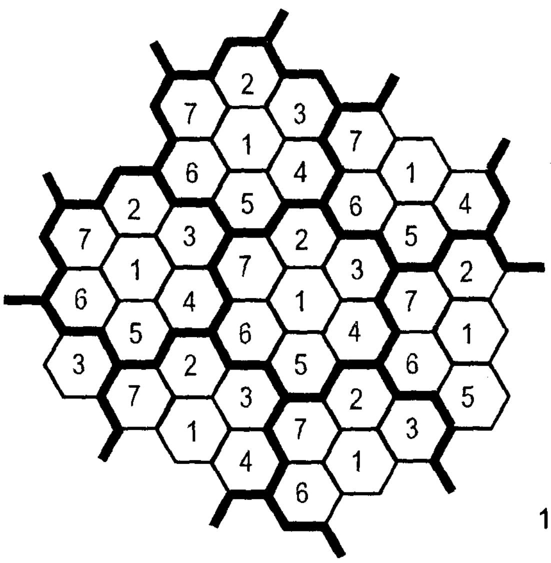
150. zīm.

Pieņemam, ka šie 7 punkti izkrāsoti tā, ka starp tiem nav divu punktu 1 m attālumā viens no otra. Tā kā lietotas 3 krāsas un $7 > 3 \cdot 2$, tad starp šiem 7 punktiem atradīsies 3 punkti, kas nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā. Ja kaut viens no tiem ir B, F, G vai E, tad abiem pārējiem punktiem jābūt virsotnēm vienā vienādmalu trijstūri, kura mala ir 1 m gara (piemēram, ja viens punkts ir B, tad abiem pārējiem punktiem jābūt EFD virsotnēm); tad starp tiem ir divi punkti attālumā 1 m saskaņā ar 120. piemēru. Ja neviens no tiem nav B, F, G vai E, tad tie ir A, C, D; bet CD = 1 m. Visos gadījumos iegūstam pretrunu. Uzdevums atrisināts.

Varētu iedomāties, ka bez sevišķām grūtībām, tikai izgudrojot aizvien sarežģītākas punktu sistēmas, līdzīgus rezultātus varētu pierādīt arī 4, 5, 6,... krāsu gadījumos. Tomēr tā nav. Izrādās, ka 4, 5, 6,... krāsu gadījumā jautājums ir ļoti sarežģīts un nav atrisināts līdz šai dienai. Turpretī 7 krāsu gadījumā (un tad arī jebkura lielāka krāsu skaita gadījumā) līdzīgs apgalvojums vispār nav pareizs, kā to parāda nākošais uzdevums.

133. piemērs. Parādīt, ka plaknes punktus var izkrāsot 7 krāsās tā, lai nekādi 2 punkti, kas nokrāsoti vienā un tajā pašā krāsā, nebūtu 1 m attālumā viens no otra.

Atrisinājums. Sadalīsim visu plakni regulāros sešstūros, kuru malas garums ir a, kā parādīts 151. zīmējumā, un izkrāsosim sešstūrus 7 krāsās tā, lai ar biezu līniju apvilktais "zieds" regulāri atkārtotos.



151. zīm.

Viegli aprēķināt (pēc Pitagora teorēmas), ka mazākais attālums starp vienādi nokrāsotu dažādu sešstūru punktiem ir $a\sqrt{7}$, bet lielākais attālums starp viena un tā paša sešstūra punktiem (ieskaitot kontūra punktus) ir 2a. Izvēlamies a=0,4. Tad 2a=0,8<1 un $a\sqrt{7}=0{,}4\sqrt{7}=\sqrt{0{,}16\cdot 7}=\sqrt{1{,}12}>1$.

Tātad katri divi punkti, kas pieder vienam sešstūrim, ir viens no otra mazākā attālumā nekā 1, bet katri divi punkti, kas pieder vienādi nokrāsotiem dažādiem sešstūriem, ir viens no otra lielākā attālumā nekā 1. Tātad divu vienādi nokrāsotu punktu attālumā 1 nav.

Precizēsim 133. piemēra rezultātu. Skaidrs, ka attāluma 1 m vietā var ņemt jebkuru citu attālumu. Tādējādi iegūstam teorēmu:

ja katrs plaknes punkts nokrāsots vienā no trim krāsām, tad jebkuram attālumam d var atrast divus punktus, kas abi nokrāsoti vienādi un atrodas attālumā d viens no otra.

Šī teorēma apgalvo, ka katram attālumam atradīsies, vispārīgi runājot, cita krāsa, kas "realizēs" šo attālumu. Izrādās, ka triju krāsu gadījumā visi attālumi realizējas ar vienu un to pašu krāsu.

Teorēma (R.Egltons, D.Raiskis, L.Kliesmete). Ja katrs plaknes punkts nokrāsots vienā no trim krāsām, tad vismaz viena no šīm krāsām ir universāla, t.i., katram d > 0 var atrast divus punktus, kas abi nokrāsoti šajā krāsā un atrodas attālumā d viens no otra.

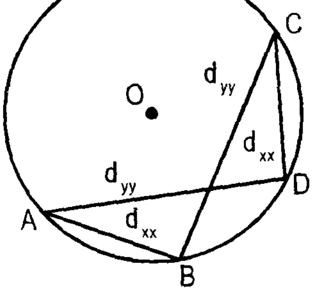
Pierādījums. Pieņemsim, ka izmantotās krāsas ir balta, melna un zila. Pieņemsim pretējo: katrai krāsai eksistē tāds attālums d > 0, ka katram nogrieznim, kura garums ir d, vismaz viens no galiem nav attiecīgajā krāsā. Apzīmēsim šos attālumus ar d_{bb}, d_{zz}, d_{mm}. Pieņemsim, ka $d_{zz}\geq d_{mm}\geq d_{bb}$ (tas nemaina būtību).

Ja plakne būtu vienkrāsaina, tad mēs iegūtu pretrunu pieņēmumam. Pieņemsim, ka plaknē ir tikai divu krāsu punkti, piemēram, melni un balti. Aplūkosim riņķa līniju ar centru melnā punktā M un rādiusu d_{mm}. Pēc pieņēmuma visi tās punkti ir balti. Bet tad uz tās var izvēlēties hordu, kuras garums ir d_{bb} un abi galapunkti ir balti (jo $d_{mm}\geq d_{bb}$). Iegūta pretruna. Tātad plaknē jābūt visu triju krāsu punktiem. Pierādīsim lemmu.

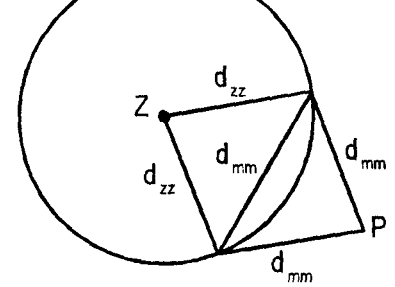
Lemma. Ja visi riņķa līnijas punkti ir krāsā x vai krāsā y un ja riņķa līnijā eksistē hordas, kuru garumi ir d_{xx} un d_{yy}, tad katras šādas hordas viens gals ir krāsā x, bet otrs - krāsā y.

Pierādījums. Aplūkosim patvaļīgi izvēlētu hordu AD, kuras garums ir d_{yy}. Veiksim konstrukciju, kas attēlota 152. zīmējumā ($AB = CD = d_{xx}$, $AD = BC = d_{yy}$). Pēc pieņēmuma vismaz viens no punktiem A, D nav krāsā y. Ja tie abi būtu krāsā x, tad no nogriežņa AB iegūtu, ka B ir krāsā y, no CD, ka C ir krāsā y. Iegūta pretruna: nogriežņa BC, kura garums ir d_{yy}, abi galapunkti ir krāsā y. Tātad viens AD gals ir krāsā x, otrs - krāsā y. Analogi var veikt pierādījumu arī hordām, kuru garums ir d . Lemma pierādīta.

Aplūkosim riņķa līniju ar centru zilā punktā Z un rādiusu d_{zz} (153. zīm.). Pēc pieņēmuma visi tās punkti ir baltā vai melnā krāsā. Aplūkosim hordas ar garumiem d_{mm}. Pēc lemmas viens to galapunkts ir balts, otrs - melns. Tādējādi, uzkonstruējot uz tām vienādmalu trijstūri, kā parādīts 153. zīmējumā, tā trešā virsotne P nav melnā krāsā.



152. zīm.



153. zīm.

Visiem hordu d_{mm} stāvokļiem atbilst punkta P aprakstītā riņķa līnija ar centru Z un rādiusu $ZP=\frac{\sqrt{3}}{2}d_{mm}+\sqrt{d_{zz}^2-\frac{1}{4}d_{mm}^2}>d_{zz}$ (nevienādību viegli pārbaudīt). Apzīmēsim $ZP = d_{zm}$. Tā kā tas ir spēkā jebkuram zilam punktam, tad plaknē nav tāda zila un melna punkta, kas atrastos attālumā d_{zm}. Lietojot analogu spriedumu riņķa līnijai ar centru Z un rādiusu d_{zb} (tās punkti ir zili - balti) un hordām, kuru garums ir d_{bb}, iegūstam, ka plaknē nav zila un balta punkta, kas atrastos attālumā $d_{zb}=\frac{\sqrt{3}}{2}d_{bb}+\sqrt{d_{zm}^2-\frac{1}{4}d_{bb}^2}>d_{zm}$. Beidzot, izvēloties riņķa līniju ar melnu centru M un rādiusu d_{zm} (tās punkti ir melni - balti) un hordas, kuru garums ir d_{bb}, iegūstam, ka nav melna un balta punkta, kas atrastos attālumā $d_{mb}=\frac{\sqrt{3}}{2}d_{bb}+\sqrt{d_{zm}^2-\frac{1}{4}d_{bb}^2}=$ d_{zb}. Izvēlamies riņķa līniju ar baltu centru B un rādiusu $d_{mb}=d_{zb}$. Pēc pierādītā visi tās punkti ir balti. Tā kā $d_{zb}>d_{zm}>d_{zz}\geq d_{bb}$, tad tajā var novilkt hordu, kuras garums ir d_{bb}, ar baltiem galiem. Iegūta pretruna. Apgalvojums pierādīts.

Šie piemēri arī ilustrē galvenās metodes, ko lieto attālumu realizācijas pētīšanai Eiklīda plaknē.

4.4.2. Attālumu realizācija veselo skaitļu kopā

Aplūkosim diskrētās ģeometrijas objektu - skaitļu ass punktu kopu ar veselām koordinātēm (sk. 154.zīm).

154. zīm.

Pieņemsim, ka katrs "veselais" punkts uz ass nokrāsots vai nu baltā, vai melnā krāsā. Kādiem naturāliem skaitļiem d var garantēt, ka neatkarīgi no krāsojuma atradīsies divi vienādi nokrāsoti punkti attālumā d viens no otra?

Šādus attālumus d sauksim par neizbēgamiem.

Viegli saprast, ka neizbēgamu attālumu nav. Tiešām, ņemsim patvaļīgu naturālu skaitli d. "Krāsosim" veselos punktus "pa blokiem": d pēc kārtas novietotus punktus baltā krāsā, tad d pēc kārtas ņemtus nākošos punktus - melnā krāsā, tad d pēc kārtas ņemtus - atkal baltā krāsā, utt. (155. zīm.).

155. zīm.

Viegli saprast, ka attālums starp vienādi nokrāsotiem punktiem vienā blokā nepārsniedz d -1, bet dažādos blokos nav mazāks par d + 1. Tātad attālums starp vienādi nokrāsotiem punktiem nevienā vietā nav d.

Jēdziens par neizbēgamu attālumu izrādījies neveiksmīgs. Mēģināsim to vispārināt.

Definīcija. Attālumu pāri (d_1, d_2) sauksim par neizbēgamu, ja, patvaļīgā ceļā nokrāsojot skaitļu ass veselos punktus baltā un melnā krāsā, noteikti atradīsies vai nu divi vienādi nokrāsoti punkti attālumā d_1 viens no otra, vai arī divi vienādi nokrāsoti punkti attālumā d_2 viens no otra.

Teorēma. Attālumu pāris (d_1, d_2) ir neizbēgams tad un tikai tad, ja maksimālās divnieka pakāpes, ar kurām dalās d_1 un d_2, ir dažādas.

Pierādījums.

A. Pieņemsim, ka $d_1 = 2^a \cdot n_1$, $d_2 = 2^a \cdot n_2$, kur n_1, n_2 - nepāra skaitļi. Parādīsim, kā vienlaikus izvairīties no attāluma d_1 un d_2 .

Vispirms parādīsim, kā vienlaikus izvairīties no attālumiem n_1 un n_2. Krāsojam veselos punktus pamīšus: balts, melns, balts, melns, ... Tad starp vienas krāsas punktiem attālums noteikti ir pārskaitlis, tātad nav ne n_1 ne n_2.

Tālāk katru punktu P aizstājam ar bloku, kas sastāv no 2^a pēc kārtas ņemtiem punktiem tai pašā krāsā kā P. Šajā krāsojumā nav divu vienādi novietotu punktu ne attālumā $d_1 = 2^a \cdot n_1$, ne attālumā $d_2 = 2^a \cdot n_2$; atstājam to pārbaudīt lasītājam patstāvīgi.

B. Pieņemsim, ka $d_1 = 2^{a_1} \cdot n_1$, $d_2 = 2^{a_2} \cdot n_2$, kur a_1 un a_2 - dažādi nenegatīvi veseli skaitļi, n_1 un n_2 - nepāra skaitļi. Varam pieņemt, ka $a_1 > a_2$: $a_1 = a_2 + x$, $x > 0$.

Pierādīsim, ka jebkurā taisnes veselo punktu krāsojumā atradīsies 2 punkti, kas nokrāsoti vienādi un atrodas viens no otra vai nu attālumā d_1, vai d_2. Pieņemsim pretējo: izdevies atrast krāsojumu, kurā šādu punktu nav.

Ņemsim uz taisnes veselu punktu A_0; varam pieņemt, ka tas ir balts. Atliksim pa labi punktus A_1, A_2,..., katru nākošo - attālumā d_2 no iepriekšējā. Šādus jaunus punktus atliksim $2^x \cdot n_1$ reizes, t.i., pāra skaitu reižu. Punktam A_1 jābūt melnam, punktam A_2 - baltam, punktam A_3 melnam utt.; pēdējam atliktajam punktam jābūt baltam.

Pēdējais atliktais punkts atrodas attālumā $d_2 \cdot 2^x \cdot n_1 = 2^{a_2} \cdot n_2 \cdot 2^x \cdot n_1 = (2^{a_2+x} \cdot n_1) \cdot n_2 = (2^{a_1} \cdot n_1) \cdot n_2 =$
$= d_1 \cdot n_2$ no punkta A_0. Tātad iegūstam n_2 (nepāra skaitu) reižu no A_0 attālumu d_1. Tātad pēdējam atliktajam punktam jābūt melnam. Iegūtā pretruna arī pierāda mūsu apgalvojumu.

Iesakām lasītājam patstāvīgi izpētīt līdzīgus jautājumus par neizbēgamiem attālumu trijniekiem, četriniekiem utt., kā arī risināt līdzīgas problēmas triju un vairāku skaitļu gadījumā.

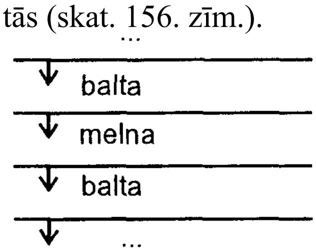
4.4.3. Sarežģītāku konfigurāciju piemēri

Punktu pāris (nogriežņa galapunkti) ir otrā vienkāršākā (aiz punkta) ģeometriskā figūra. Līdzīgus jautājumus, kā iepriekš apskatītie, var analizēt arī, ja meklē sarežģītākas vienā krāsā nokrāsotas figūras.

Demonstrēsim dažādus piemērus.

134. piemērs. *Katrs plaknes punkts nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Vai var garantēt, ka regulāra trijstūra, kura malas garums ir 1, virsotnēs noteikti atradīsies 3 punkti, kas visi nokrāsoti vienā un tajā pašā krāsā?*

Atrisinājums. Nē. Iedomāsimies, ka plakne sadalīta joslās, kuru platums ir $\sqrt{3}/2$, un tās nokrāsotas pamīšus baltā un melnā krāsā, turklāt katra dalījuma līnija nokrāsota tādā krāsā, kā josla uz leju no tās (skat. 156. zīm.).

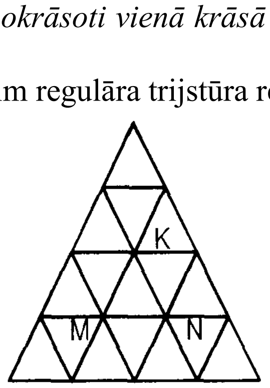


156. zīm.

Lasītājs pats viegli pārbaudīs, ka meklējamā monohromatiskā trijstūra nav (atceramies, ka joslas platums $\sqrt{3}/2$ ir augstums vienādmalu trijstūrī, kura malas garums ir 1).

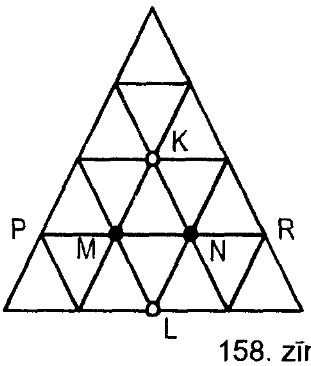
135. piemērs. *Katrs plaknes punkts nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Vai var garantēt, ka noteikti ir trīs punkti, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas kaut kāda regulāra trijstūra virsotnēs?*

Atrisinājums. Jā. Aplūkosim regulāra trijstūra režģi 157. zīmējumā.

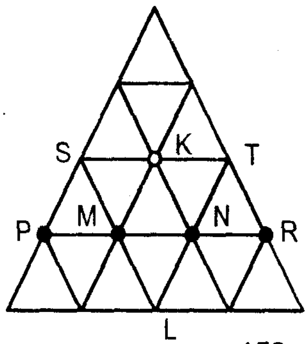


157. zīm.

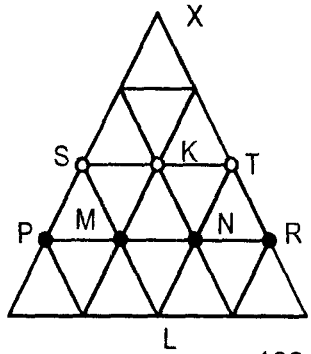
Vismaz 2 no punktiem M, N, K nokrāsoti vienādi; varam pieņemt, ka M un N nokrāsoti melni. Ja arī K vai L nokrāsots melns, vajadzīgais trijstūris atrasts; tāpēc apskatām gadījumu, kad K ir balts (158. zīm.).



158. zīm.



159. zīm.



160. zīm.

Ja vai nu P, vai R nokrāsots balts, tad meklējamais trijstūris ir KLP, resp., KLR; tāpēc apskatām gadījumu, kad P un R ir melni (159. zīm.).

Ja vai nu S, vai T ir melns, meklējamais trijstūris ir PMS, resp., NRT. Tāpēc apskatām gadījumu, kad S un T ir balti (160. zīm.).

Apskatām virsotni X. Ja tā ir balta, meklējamais trijstūris ir STX; ja tā ir melna, meklējamais trijstūris ir PRX.

Vajadzīgais pierādīts.

Atzīmēsim ar abiem piemēriem saistītos vispārīgos rezultātus. Pastāv hipotēze (kuru neviens nav ne pierādījis, ne apgāzis), ka divu krāsu gadījumā katram trijstūrim T ar fiksētiem malu garumiem a, b, c var atrast tam kongruentu trijstūri, kam visas virsotnes ir vienā krāsā, ja vien T nav regulārs. Savukārt, ja mēs neinteresējamies par regulāra trijstūra izmēriem, bet tikai par formu, tad var pierādīt šādu rezultātu: ja plaknes punkti izkrāsoti galīgā skaitā krāsu un plaknē dota taisne t, tad var uzrādīt regulāru trijstūri, kura visas virsotnes ir vienā krāsā un viena mala paralēla taisnei t.

Pierādījuma ideja ir līdzīga iepriekšējam piemēram, tomēr tā jāpapildina. Būtisku palīdzību pierādījumā sniedz Van der Vardena teorēma (skat. 237.uzd.).

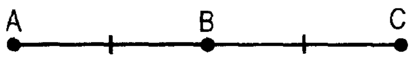
136. piemērs. Katrs plaknes punkts nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Vai noteikti var atrast kādu nogriezni, kura visi punkti nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā?

Atrisinājums. Nē. Izvēlēsimies plaknē patvaļīgu punktu O. Nokrāsosim baltu punktu O un visu to riņķa līniju punktus, kuru centri ir punktā O un rādiusi - racionāli skaitļi; visus citus punktus nokrāsosim melnus.

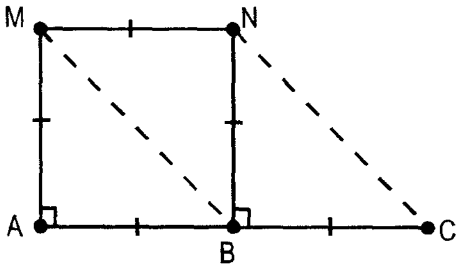
Skaidrs, ka melni punkti veido riņķa līnijas ar centru O un iracionāliem rādiusiem. Katru nogriezni plaknē krusto gan viena, gan otra veida riņķa līnijas, tātad tas nav nokrāsots vienā krāsā.

137. piemērs. Katrs plaknes punkts ar veselām koordinātēm nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka eksistē vienādsānu taisnleņķa trijstūris, kura katetes paralēlas koordinātu asīm un visas virsotnes nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā.

Atrisinājums. Apskatām taisni, kas paralēla Ox asij un uz kuras atrodas krāsoti punkti. Aplūkojam uz tās 9 pēc kārtas ņemtus krāsotos punktus. Lasītājs pats var pārbaudīt (kaut vai analizējot visus iespējamos gadījumus), ka starp šiem 9 punktiem atradīsies trīs tādi punkti A, B, C, ka AB = BC un visi A, B, C nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā; (varam pieņemt, ka šī krāsa ir melna) (skat. 161. zīm.).



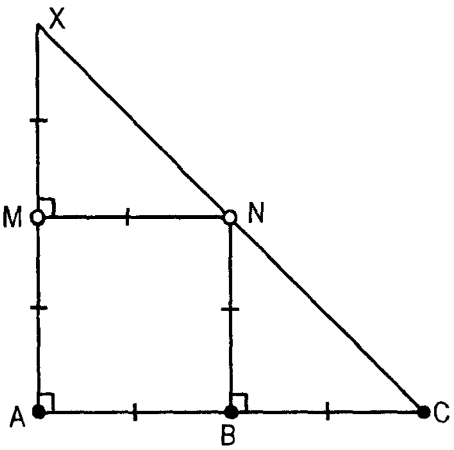
161. zīm.



162. zīm.

Novelkam uz vienu pusi no AB AM⊥AB, BN⊥AB, pie tam AM = BN = AB. Tad AMNB ir kvadrāts. Ja kaut viens no punktiem M un N ir melns, tad izveidojas meklētais trijstūris MAB vai NBC (skat. 162. zīm.). Tāpēc apskatām gadījumu, kad punkti M un N abi ir balti.

Tagad atliekam XM ⊥ MN, XM = MN (skat. 163. zīm.).



163. zīm.

Punkts X arī nokrāsots vai nu balts, vai melns. Ja X ir balts, meklējamais trijstūris ir XMN; ja X ir melns, meklējamais trijstūris ir XAC. Uzdevums atrisināts.

Komentārs. Šeit pierādītais rezultāts ir ļoti speciāls vispārīgās teorēmas gadījums, ko 1983. gadā pierādīja Rīgas 1.vidusskolas 10. klases skolniece Daiga Grundmane. Iedomāsimies, ka katrs Dekarta koordinātu plaknes punkts ar veselām koordinātēm nokrāsots vienā no galīga skaita (pieņemsim, k) krāsām. Iedomāsimies, ka dots arī kāds naturāls skaitlis n. Tad eksistē tāds naturāls skaitlis M(n, k), kas atkarīgs vienīgi no n un k, kam piemīt šāda īpašība: aplūkojot patvaļīgu M(n, k) x M(n, k) nokrāsoto punktu fragmentus, tajā varēs atrast n x n kvadrātiska režģa veidā izvietotus punktus, kas visi nokrāsoti vienā un tajā pašā krāsā.

Acīmredzot, šādā n x n punktu režģī varēs izdalīt arī mūsu piemērā minēto trijstūri, kā arī citus interesantus attēlus.

D. Grundmanes teorēmas pierādījums balstās uz Van der Vardena teorēmu (sk. 5 nodaļu) un izmanto matemātisko indukciju. Induktīvajā pārejā tiek lietoti paņēmieni, kas līdzīgi nupat apskatītā piemēra risinājumam.

4.4.4. Par R.Greiama teorēmu

Viens no iemīļotākajiem kombinatoriskās ģeometrijas pētījumu objektiem ir tā sauktā bezgalīgā rūtiņu lapa - plakne, kas sadalīta vienādos kvadrātos līdzīgi kā rūtiņu lapa (t.i., ikvienā punktā ir vai nu četru rūtiņu virsotnes, vai arī virsotņu vispār nav). Parasti pieņem, ka vienas rūtiņas malas garums ir 1. Rūtiņu virsotņu kopa kalpo kā ļoti tuvināts "diskrētās plaknes" (tādas plaknes, kas sastāv no atsevišķiem izolētiem punktiem) modelis. Vienu no skaistākajām un sarežģītākajām teorēmām par "bezgalīgo rūtiņu lapu" ir pierādījis ievērojamais amerikāņu kombinatorists Ronalds Greiams.

Teorēma. Pieņemsim, ka k ir naturāls skaitlis. Tad eksistē naturāls skaitlis L(k), kas atkarīgs tikai no k un kuram piemīt šāda īpašība: lai kā arī neizkrāsotu rūtiņu virsotnes k krāsās (katru virsotni - vienā krāsā), noteikti atradīsies trijstūris ar laukumu L(k), kura visas virsotnes būs nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā.

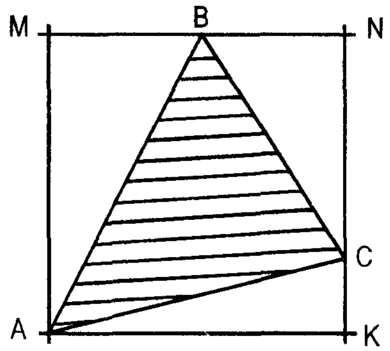
Greiama teorēmā runāts tikai par L(k) eksistenci, bet nekas nav teikts par L(k) konkrētajām vērtībām. Noskaidrosim visas iespējamās L(2) vērtības.

Vispirms noskaidrosim, kādas vērtības vispār var būt tāda trijstūra laukumam, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs.

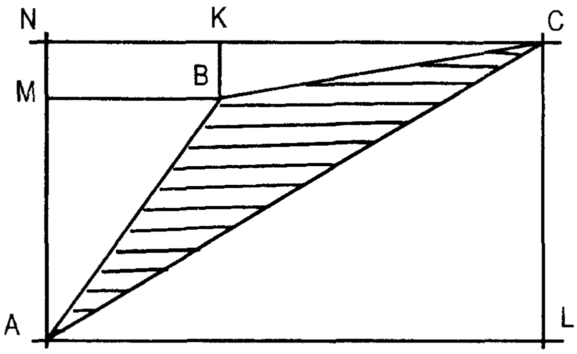
Lemma. Ja trijstūra visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, tad tā laukums ir n/2, kur n ir naturāls skaitlis.

Apvilksim ap trijstūri ABC taisnstūri tā, kā parādīts 164. zīmējumā. Visas taisnstūra malas iet pa rūtiņu līnijām. Tā kā A, B, C, M, N, K ir rūtiņu virsotnes, tad visu nogriežņu AM, AK, MB, BN, NC, CK garumi ir veseli skaitļi. Tāpēc AMNK laukums ir vesels skaitlis, bet trijstūru AMB, BNC, CKA laukumi ir veselu skaitļu puses (taisnleņķa trijstūra laukums ir puse no katešu reizinājuma). No vesela skaitļa atņemot vairāku veselu skaitļu puses, iegūst vesela skaitļa pusi (protams, tā var būt vesels skaitlis). Tāpēc 164. zīmējumā attēlotajam gadījumam lemma ir pierādīta.

Citus principiāli atšķirīgus gadījumus (svarīgākais no tiem parādīts 165.zīmējumā) atstājam lasītājam patstāvīgai aplūkošanai.



164. zīm.



165. zīm.

Tātad L(k) vērtības vispār var būt tikai veselu skaitļu puses.

Acīmredzot, iespējamās L(k) vērtības sadalās divās daļās: N = {1; 2; 3; 4;...} un $N' = \{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; ...\}$.

Šīs teorēmas pierādījusi K.Āboliņa (skat.[3])

Teorēma. Rūtiņu virsotnes var izkrāsot divās krāsās tā, ka nevienam trijstūrim, kura virsotnes ir vienā krāsā, laukums nebūs no kopas N'.

Šāda krāsojuma piemērs parādīts 166. zīmējumā. Pierādījums jāveic lasītājam patstāvīgi (tas ir pilnīgi analogs lemmas pierādījumam).

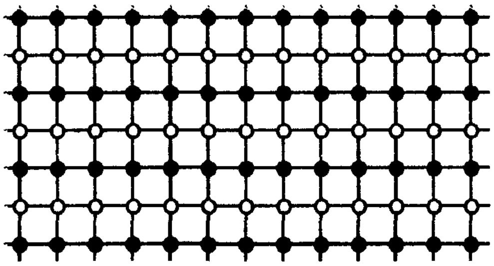
Tātad neviens no N' elementiem nevar būt L(k) vērtība, ja $k \geq 2$.

Teorēma. Ja rūtiņu virsotnes izkrāsotas divās krāsās, tad vismaz vienai no šīm krāsām (apzīmēsim to ar a) piemīt šāda īpašība: katram naturālam skaitlim n var atrast trijstūri ar laukumu n, kura visas virsotnes ir krāsā a.

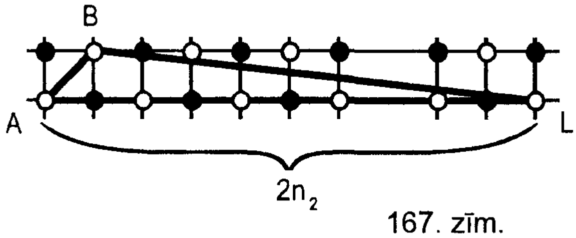
Pierādīsim šo teorēmu, izejot no pretējā. Pieņemsim, ka eksistē tāds krāsojums melnā un baltā krāsā, ka nav trijstūra ar laukumu n_1, kura visas virsotnes būtu melnas, un nav trijstūra ar laukumu n_2, kura visas virsotnes būtu baltas. Aplūkosim divus gadījumus:

a) nav divu blakus virsotņu, kas nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā. Tad krāsas izvietojās šaha galdiņa kārtībā. Viegli iegūt pretrunu ar pieņēmumu (skat. 167. zīm.):

ABC laukums ir $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2n_2 = n_2$, un visas virsotnes A, B, C ir baltas;



166. zīm.



167. zīm.

b) kaut kur divas blakusvirsotnes A un B ir nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā (pieņemsim, ka baltā). Apzīmēsim taisni, uz kuras tās atrodas, ar t_0. Ar t_1 apzīmēsim taisni, kas paralēla t_0 un atrodas attālumā $2n_2$ no tās. Lai nenonāktu pretrunā pieņēmumam, visiem t_1 punktiem jābūt melniem (ja kāds no tiem būtu balts, tas kopā ar A un B veidotu "baltu" trijstūri, kura laukums būtu n). No tā savukārt seko, ka taisnēs, kas atrodas starp t_1 un t_0, sākot ar t_1, jābūt pārmaiņus tikai melniem, tikai baltiem, ... punktiem. Tā kā attālums starp t_1 un t_0 ir pārskaitlis, iznāk, ka t_0 jābūt tikai melniem punktiem. Bet A un B ir balti. Iegūtā pretruna pierāda teorēmu.

Tātad L(2) iespējamo vērtību kopa ir tieši naturālo skaitļu kopa.

Ievērosim, ka savā ziņā esam pastiprinājuši Greiama teorēmu. No tās izriet, ka katra iespējamā L(2) vērtība realizējas vai nu vienā, vai otrā krāsā. Mēs turpretī esam pierādījuši, ka visas vispār iespējamās L(2) vērtības realizējas vienā un tajā pašā krāsā.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pētīt L(3) vērtību kopu, kā arī atrisināt līdzīgu problēmu uz taisnes.

4. 4. 5. Par smaguma centru koordinātām

138. piemērs. *Pieņemsim, ka plakne sadalīta vienādos kvadrātos kā rūtiņu lapa. Izvēlēsimies patvaļīgas piecas kvadrātu virsotnes un apskatīsim visus 10 nogriežņos, kuru abi galapunkti ir izvēlētās virsotnes. Vai taisnība, ka vismaz uz viena no šiem nogriežņiem atradīsies vēl trešais punkts, kas ir kāda dalījuma kvadrāta virsotne?*

Atrisinājums. Jā, tā ir taisnība. Izvēlēsimies Dekarta koordinātu asis pa divām dalījuma līnijām un pieņemsim kvadrāta malas garumu par vienu vienību. Tad katra dalījuma kvadrāta katras virsotnes koordinātas ir veseli skaitļi. Šķirosim tās atkarībā no tā, vai to abscisas un ordinātas ir pārskaitļi vai nepārskaitļi. Skaidrs, ka katra virsotne pieder vienam no četriem tipiem: (p, p), (p, n), (n, p), (n, n). Tā kā izvēlētas pavisam piecas virsotnes, tad vismaz divas no tām būs viena tipa. Pierādīsim, ka tā nogriežņa viduspunkts, kura gali ir abas šīs virsotnes, arī ir ar veselām koordinātām. Tad skaidrs, ka tas ir kāda dalījuma kvadrāta virsotne, un vajadzīgais būs pierādīts.

Atceramies: ja nogriežņa galapunktu Dekarta koordinātas ir (x_1, y_1) un (x_2, y_2), tad tā viduspunkta koordinātas ir $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$. Tā kā abas apskatāmās virsotnes ir viena tipa, tad to abscisām un ordinātām ir vienādas paritātes. Tāpēc $x_1 + x_2$ un $y_1 + y_2$ ir pārskaitļi. Bet tas nozīmē, ka viduspunkta koordinātas ir veseli skaitļi, ko arī vajadzēja pierādīt. Uzdevums atrisināts.

Lasītājs pats līdzīgā ceļā var pierādīt: ja telpa standartveidā sadalīta vienādos kubos un izvēlētas patvaļīgas deviņas kubu virsotnes, tad uz vismaz viena no nogriežņiem, kas savieno divus izvēlētos punktus, atradīsies vēl viena kuba virsotne.

Ievērosim, ka nogriežņa viduspunkts ir tā galapunktu smaguma centrs (pieņemot, ka abos galapunktos ievietoti vienādi smagumi). Apskatāmo problēmu var vispārināt, divu punktu smaguma centra vietā apskatot triju punktu smaguma centru. Atrisināsim šo problēmu:

noskaidrosim, kādu lielāko punktu skaitu ar veselām koordinātām var izvēlēties plaknē (telpā) tā, lai nekādu triju punktu smaguma centram visas koordinātas vienlaicīgi nebūtu veseli skaitļi.

Vispirms aplūkosim gadījumu, kad nekādi 3 punkti neatrodas uz vienas taisnes. Atcerēsimies, ka trijstūra virsotņu smaguma centrs ir tā mediānu krustpunkts.

Parādīsim, ka plaknēs gadījumā atbilde uz mūsu jautājumu ir 8.

Labi zināms šāds fakts: ja trijstūra virsotņu koordinātas ir $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, tad tā mediānu krustpunktā koordinātas ir $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Iedalīsim visus punktus ar veselām koordinātām grupās atkarībā no tā, kādus atlikumus dod to koordinātas, dalot ar 3. Iespējamas 9 grupas:
(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2).

Pieņemsim, ka starp izvēlētajiem 8 punktiem divi ir no grupas (0; 0), divi no grupas (0;1), divi no grupas (1; 0) un divi no grupas (1; 1). (Skaidrs, ka šādus 8 punktus var izvēlēties tā, lai nekādi 3 no tiem neatrastos uz vienas taisnes.) Lai kādu triju punktu veidotā trijstūra mediānu krustpunkts būtu ar veselām koordinātām, gan šo punktu abscisu, gan ordinātu summai jādalās ar 3; tātad atbilstošo atlikumu summai jābūt 0 vai 3. Abscisu atlikumu summa var būt 0 tikai tad, ja visi 3 punkti ir no grupām (0; 0) un (0; 1). Bet tad ordinātu atlikumu summa nevar būt ne 0, ne 3; tiešām, tā kā mūsu rīcībā no katras grupas ir tikai 2 punkti, tad starp ordinātu atlikumiem ir vismaz viena 0 un vismaz viens 1, tāpēc to summa ir 1 vai 2.

Līdzīgi tiek analizēts gadījums, ja abscisu atlikumu summa ir 3, un parādīts, ka arī tas nav iespējams.

Tātad, ja doti šādi punkti (tie varētu būt, piemēram, punkti ar koordinātām (0,0), (3;3), (0;1), (3; 4), (4; 0), (4;1), (7; 3), (7; 4), tad neviena trijstūra ar prasīto īpašību nav.

Tagad pierādīsim, ka 9 punktu gadījumā starp tiem noteikti atradīsies 3 tādi punkti, kuru veidotā trijstūra mediānu krustpunktā abas koordinātas ir veseli skaitļi. Pieņemsim pretējo - izdevies atrast tādus 9 punktus, ka šāda trijstūra nav.

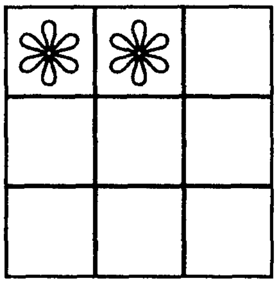
	0	1	2
0			
1			
2			

168. zīm.

Katru no 9 punktiem var ievietot vienā no 168. zīmējuma tabulas rūtiņām. Šajā tabulā pa kreisi no katras rindas atzīmēts punkta abscisas atlikums, dalot šo abscisu ar 3, bet virs katras kolonnas - punkta ordinātas atlikums, dalot šo ordinātu ar 3.

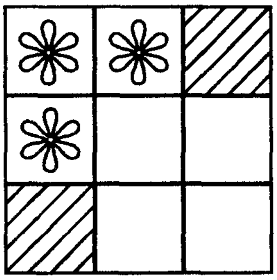
Triju punktu veidotā trijstūra mediānu krustpunktā abas koordinātas būs veseli skaitļi, ja gan šo punktu abscisu summa, gan to ordinātu summa dalīsies ar 3. No šejienes viegli secināt, ka nekādi 3 no apskatāmajiem 9 punktiem nedrīkst atrasties
a) vienā rūtiņā,
b) trijās vienas rindiņas rūtiņās,
c) trijās vienas kolonnas rūtiņās,
d) pa vienam katrā rindiņā un katrā kolonnā.

Izmantojot īpašības b, c un d, pamatosim, ka punkti kopā drīkst atrasties ne vairāk kā četrās tabulas rūtiņās. Tad, izmantojot īpašību a, varēsim secināt, ka to skaits nepārsniedz $4 \cdot 2 = 8$. Tā būs pretruna, un mūsu apgalvojums būs pierādīts.



169. zīm.

Vispirms ievērosim: mainot vietām rindiņas (savā starpā) vai kolonnas (savā starpā), mēs neiespaidojam nosacījumu a - d esamību vai neesamību. Tālāk, ja katrā rindiņā punkti ir ne vairāk kā vienā rūtiņā, tad pavisam tie ir ne vairāk kā trijās rūtiņās, un vajadzīgais pierādīts. Tāpēc varam uzskatīt, ka vismaz vienā rindiņā punkti ir divās rūtiņās. Mainot rindas un kolonnas, varam panākt, ka tie ir pirmās rindiņas pirmajās divās rūtiņās (169. zīm.). Tālāk varam uzskatīt, ka vismaz vienā no pārējām rindiņām punkti ir vismaz divās rūtiņās (pretējā gadījumā to kopējais skaits nepārsniegtu 4, un vajadzīgais būtu pierādīts.) Mainot rindiņas, varam panākt, lai šī rindiņa būtu otrā. Tagad otrajā rindiņā vismaz vienā no divām pirmajām rūtiņām ir punkti; mainot (ja vajadzīgs) pirmo un otro kolonnu vietām, varam panākt, lai punkti būtu otrās rindiņas pirmajā rūtiņā (170. zīm.). Tad abās iesvītrotajās rūtiņās punktu nedrīkst būt.



170. zīm.

Tagad viegli pārbaudīt: ja vienalga kurās divās no pagaidām baltajām rūtiņām arī atrastos punkti, tiktu pārkāpts viens no nosacījumiem b, c, d. Tātad punkti tiešām var atrasties ne vairāk kā četrās rūtiņās. Pierādījums pabeigts.

Pierādīsim, ka telpas gadījumā atbilde uz mūsu jautājumu ir 18. Pieņemsim, ka doti 19 punkti ar veselām koordinātām.

Ja n, dalot ar 3, dod atlikuma 0, 1 vai 2, tad teiksim, ka n ir 0 (resp., 1 vai 2) pēc moduļa 3; pierakstīsim to kā $n \equiv_3 0$ (resp., $n \equiv_3 1$ vai $n \equiv_3 2$).

Ievērosim: ja trijstūra ABC virsotņu koordinātas ir $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, tad tā mediānu krustpunktā M koordinātas ir $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

Aizstāsim doto 19 punktu koordinātas ar to atlikumiem pēc moduļa 3; iegūsim 19 skaitļu trijniekus $T_i(x_i; y_i; z_i)$, $i = 1; 2; ...; 19$, kuru visas komponentes ir 0; 1 vai 2; starp šiem trijniekiem varbūt ir arī vienādi. Mums jāpierāda, ka no šiem trijniekiem var izvēlēties 3 tādus (pieņemsim, T_n, T_k, T_m), ka

$$(1)\ x_n + x_k + x_m \equiv_3 0,\ y_n + y_k + y_m \equiv_3 0 \text{ un } z_n + z_k + z_m \equiv_3 0.$$

Ja ir trīs vienādi trijnieki, varam izvēlēties tos, ja trīs vienādu trijnieku nav, tad ir ne vairāk kā 9 vienādu trijnieku pāri. No 19 mūsu rīcībā esošajiem trijniekiem var konstruēt $18 \cdot 19/2 = 171$ pārus (T_n, T_k), tātad vismaz $171 - 9 = 162$ pārus, kuros ietilpst dažādi trijnieki.

Ievērosim, ka katriem diviem trijniekiem T_n un T_k var uzkonstruēt tieši vienu tādu trijnieku T_m, lai būtu spēkā (1), turklāt, ja $T_n \neq T_k$, tad T_m atšķiras gan no T_n, gan no T_k (pārbaudiet to patstāvīgi!). Ja kādam no minētajiem 162 pāriem šādi konstruētais T_m ir starp mūsu rīcībā esošajiem 19 trijniekiem, tad vajadzīgos trīs trijniekus esam atraduši. Ja tie visi ir starp citiem trijniekiem (pavisam no 0; 1; 2 var izveidot 27 trijniekus), tad vismaz 21 pārim (T_n, T_k) atbilst viens un tas pats trijnieks T_m, jo $20 \cdot 8 = 160 < 162$. Aplūkosim šo 21 trijnieku pāri. Tie kopā satur $21 \cdot 2 = 42$ trijniekus, tātad vismaz viens trijnieks no mūsu rīcībā esošajiem 19 ietilpst vismaz trijos pāros (jo $19 \cdot 2 = 38 < 42$).

Pieņemsim, ka šie pāri ir $(T_n, T_{k_1}), (T_n, T_{k_2}), (T_n, T_{k_3})$ un tiem visiem saskaņā ar (1) piekārtots trijnieks T_m.

Pierādiet patstāvīgi, ka $T_{k_1}, T_{k_2}, T_{k_3}$ var ņemt par vajadzīgajiem trijniekiem!

Ar 18 punktiem nepietiek, lai apgalvojums paliktu spēkā. Pārbaudiet paši, ka nevar atrast tādus 3 trijniekus T_n, T_k, T_m, ka $T_n + T_k + T_m \equiv_3 0$, ja

$T_1 = T_2 = (0; 0; 1)$	$T_3 = T_4 = (0; 2; 1)$	$T_5 = T_6 = (1; 1; 1)$
$T_7 = T_8 = (2; 1; 1)$	$T_9 = T_{10} = (0; 0; 0)$	$T_{11} = T_{12} = (1; 0; 0)$
$T_{13} = T_{14} = (0; 1; 0)$	$T_{15} = T_{16} = (1; 1; 0)$	$T_{17} = T_{18} = (1; 0; 2)$

Vajadzīgais pierādīts.

Gadījumā, ja trīs no dotajiem punktiem atrodas uz vienas taisnes, spriedumā nekas nemainās, jo smaguma centra koordinātas aprēķina pēc tām pašām formulām kā trijstūra virsotņu gadījumā.

Iesakām lasītājam patstāvīgi formulēt un atrisināt līdzīgu uzdevumu lielāka punktu skaita gadījumā (apskatām smaguma centrus četru, piecu utt. punktu kopām) un lielāka dimensiju skaita gadījumā (katru punktu raksturo četras, piecas utt. koordinātas).

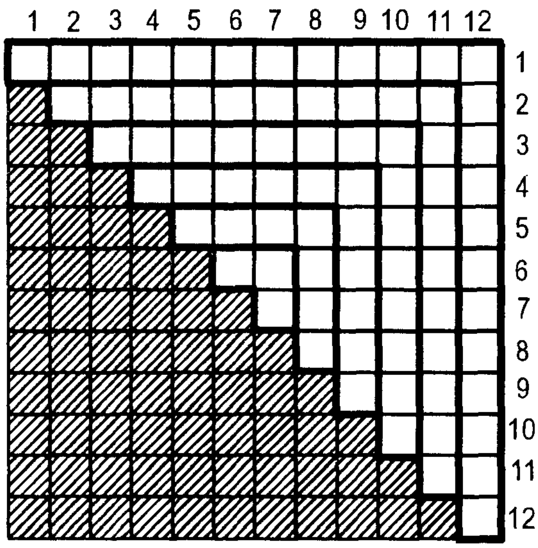
4. 5. Daži īpatnēji "būru" konstruēšanas paņēmieni

Protams, šeit nav iespējams aptvert visus līdz šim atklātos paņēmienus; bez tam jāsaprot, ka daudz vairāk īpatnēju "izgudrojumu" vēl gaida savu atklāšanu. Mēs aprobežosimies ar dažiem spilgtiem piemēriem.

139. piemērs. Regulāra 12-stūra 6 virsotnes nokrāsotas baltas, bet 6 - melnas. Pierādīt, ka var atrast divus vienādus četrstūrus, no kuriem vienam visas virsotnes ir baltas, bet otram - visas virsotnes ir melnas.

Atrisinājums. Apskatīsim divus šādus 12-stūrus, kas novietoti tieši viens virs otra. Apakšējo 12-sturi atstāsim nemainīgu, bet augšējam aplūkosim visus 12 dažādos stāvokļus, kādos tas var nonākt, ja to pēc kārtas 12 reizes pagriež par 30° (katrā no šiem 12 stāvokļiem abu 12-stūru virsotnes pa pāriem sakrīt). Visos 12 stāvokļos kopā katra augšējā 12-stūra virsotne pa reizei sakrīt ar katru apakšējā 12-stūra virsotni. Tā kā augšējā 12-sturī ir 6 baltas virsotnes, bet apakšējā - 6 melnas virsotnes, tad pavisam notiek $6 \cdot 6 = 36$ augšējās baltās virsotnes sakrišanas ar apakšējo melno virsotni. Vienā stāvoklī - pēc divpadsmitā pagrieziena - nav nevienas šādas sakrišanas, jo augšējais 12-stūris atgriezies izejas pozīcijā un baltās virsotnes sakrīt ar baltajām, melnās - ar melnajām. Tātad minētās 36 sakrišanas sadalās pa 11 augšējā daudzstūra stāvokļiem. Tā kā $36 > 11 \cdot 3$, tad kādā no stāvokļiem vismaz 4 augšējās baltās virsotnes sakrīt ar apakšējām melnajām virsotnēm. Šīs sakrišanas arī nosaka abus vajadzīgos četrstūrus.

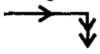
140. piemērs. Doti 13 dažādi taisnstūri. To malu garumus izsaka veseli skaitļi. Neviena mala nav īsāka par 1 un nav garāka par 12. Pierādīt, ka var izvēlēties tādus trīs taisnstūrus, lai pirmo no tiem varētu pilnībā pārklāt ar otro, bet otro - ar trešo. (Pārklājot taisnstūri jānovieto tā, lai to malas būtu paralēlas.)



171. zīm.

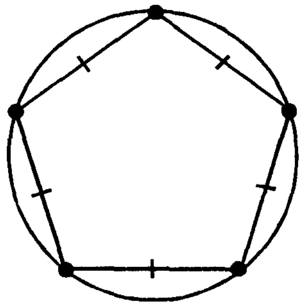
Atrisinājums. Apskatīsim 171. zīmējumā attēloto tabulu.

Katru taisnstūri atkarībā no tā izmēriem var ievietot tieši vienā no neiesvītrotajām rūtiņām. Zīmējumā redzams, kā šīs rūtiņas sadalītas 6 "būros". Tā kā $13 > 6 \cdot 2$, tad atradīsies tāds "būris", kurā ievietoti vismaz trīs taisnstūri.

Nav grūti saprast: ja trīs taisnstūri vienā "būrī" seko cits citam (vispirms A, tad B un tad C) virzienā , tad taisnstūri A var pārklāt ar B, bet B var pārklāt ar C. Uzdevums atrisināts.

Nākošā piemēra risināšanā izmantosim regulāra 5-stūra virsotņu īpašību: katras trīs no regulāra piecstūra virsotnēm veido vienādsānu trijstūri.

Šī īpašība saglabājas pat tad, ja piecām virsotnēm pievieno vēl arī piecstūra centru (skat. 172. zīm.). Pamatojiet to patstāvīgi (to izdarīt ir viegli)!



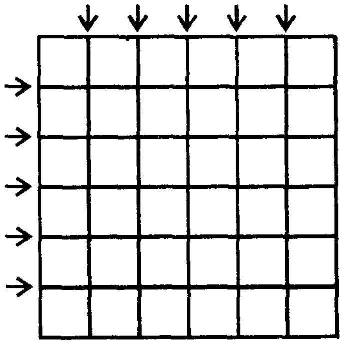
172. zīm.

<u>141. piemērs.</u> Regulāra 20-stūra 9 virsotnes nokrāsotas melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast vienādsānu trijstūri, kura visas virsotnes ir melnas.

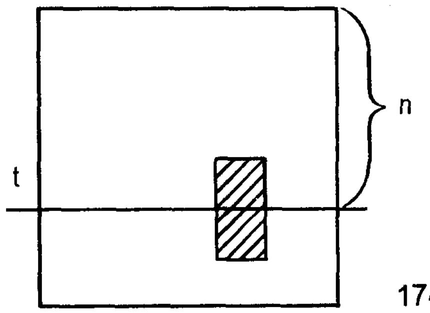
<u>Atrisinājums.</u> Sanumurēsim virsotnes pēc kārtas ar 1; 2; 3;...; 19; 20 un sadalīsim tās 4 grupās: {1, 5, 9, 13, 17}, {2, 6, 10, 14, 18}, {3, 7, 11, 15, 19}, {4, 8, 12, 16, 20}. Nav grūti pārbaudīt, ka katras grupas virsotnes veido regulāru piecstūri. Tā kā $9 > 4\cdot 2$, tad atradīsies 3 melnie punkti, kas pieder vienai grupai. Saskaņā ar minēto regulāra piecstūra īpašību tos var ņemt par meklētajiem.

<u>142. piemērs.</u> Kvadrāts, kas sastāv no 6 x6 rūtiņām, salikts no 18 taisnstūriem - 1 x 2 rūtiņas katrs (saliksim šos 1 x 2 rūtiņu taisnstūrus par domino). Pierādīt, ka šo kvadrātu var sadalīt divos taisnstūros, nesagriežot nevienu domino.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka to nevar izdarīt. Tad katra no 173. zīmējumā attēlotajām 10 taisnēm krusto vismaz vienu domino (pretējā gadījumā varētu kvadrātu sadalīt pa šo taisni).



173. zīm.



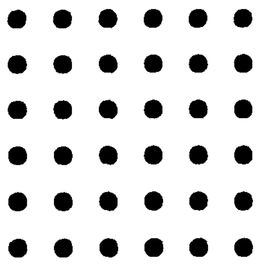
174. zīm.

Izmantosim Dirihlē principu negaidītā veidā. Pierādīsim: nav iespējams, ka <u>visas taisnes vienlaikus krusto vairāk nekā vienu domino.</u> Tiešām, ja katra no 10 taisnēm krustotu vismaz divus domino, tad pavisam būtu vismaz $10\cdot 2 = 20$ domino (skaidrs, ka katru domino var krustot tikai viena taisne); tomēr domino ir tikai $36/2 = 18$.

Secinām, ka starp mūsu aprakstītajam taisnēm ir tāda, kura krusto <u>tieši vienu</u> domino. Pieņemsim, ka tā ir taisne t (174. zīm.).

Tas nav iespējams. Tiešām, kvadrāta daļā virs taisnes t ir $6\cdot n$, t.i. pāra skaits rūtiņu. Šīs 6n rūtiņas sastāv no vesela skaita nesagrieztu domino un <u>vienas</u> melnās rūtiņas augšējā daļā no vienīgā sagrieztā domino. Tātad rūtiņu skaits augšējā daļā ir "pāra daudzums plus viena", t.i., nepāra skaitlis. Iegūta pretruna. Uzdevums atrisināts.

<u>143. piemērs.</u> Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 36 punkti (skat. 175. zīm.). Kāds mazākais skaits taišņu jānovelk, lai tās sadalītu plakni tādos apgabalos, no kuriem katrā būtu ne vairāk par vienu punktu (jeb, citādi runājot, ar kādu mazāko skaitu taišņu pietiek, lai visus punktus atdalītu citu no cita)?



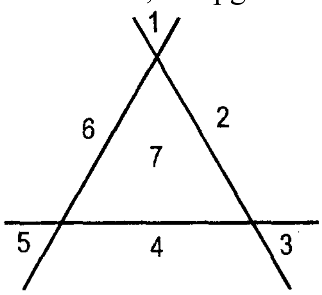
175. zīm.

Acīmredzamais novērojums: pietiek novilkt 5 vertikālās taisnes (pa vienai starp katrām blakus esošām punktu kolonnām) un 5 horizontālās taisnes; kopā - 10 taisnes.

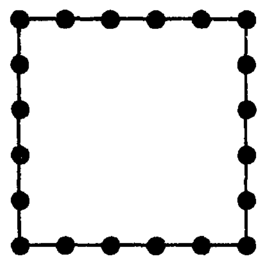
Ilgstoši mēģinājumi labāku rezultātu (mazāku skaitu taišņu) nedod.

Otrās daļas pierādījuma mēģinājums. Dabīga ir doma pacensties pierādīt, ka, novelkot 9 taisnes, noteikti rodas mazāk par 36 apgabaliem. Ja tā būtu patiesība, tad saskaņā ar Dirihlē principu 9 taišņu gadījumā kādā apgabalā noteikti atrastos vairāk par vienu punktu.

Diemžēl izrādās, ka apgabalu skaits var sasniegt un pat pārsniegt 36.



176. zīm.



177. zīm.

Kā redzams 176. zīmējumā, trīs taisnes var sadalīt plakni 7 apgabalos. Novelkot ceturto taisni tā, lai tā krustotu visas trīs iepriekšējās taisnes dažādos punktos, uz ceturtās taisnes rodas trīs krustpunkti, tāpēc tā sadalās 4 daļās (2 staros un 2 nogriežņos). Katra no šīm 4 daļām dala vienu no iepriekšējiem apgabaliem divos, tātad apgabalu skaits palielinās par 4. Līdzīgi pierādām, ka piektās taisnes novilkšana var palielināt apgabalu skaitu par 5, sestās - par 6 utt. Tātad 9 taisnes var sadalīt plakni 7+4+5+6+7+8+9= 46 apgabalos. Tas it kā būtu vairāk nekā pietiekoši 36 punktu izvietošanai pa vienam.

Tātad jāmeklē cits risināšanas ceļš.

Otrās daļas pierādījums. Apskatīsim tikai ārējos no dotajiem 36 punktiem (skat. 177. zīm.);
arī tie visi jāatdala viens no otra. Divus blakus esošus punktus var atdalīt, tikai krustojot tos savienojošo nogriezni. Nogriežņu pavisam ir 20, un katra taisne var krustot ne vairāk kā 2 no tiem.
Tātad taišņu skaitam jābūt vismaz 20/2 =10. Uzdevums atrisināts.

Komentāri.

1. Sastopamies ar tādu pašu situāciju, kā 13. piemēra risinājumā - liekas, ka tikai ārējos punktus vien atdalīt ir vieglāk nekā visus, tomēr tieši šī "vieglākā" gadījuma analīze ļauj vienlaikus atrisināt arī vispārīgo problēmu, kas agrāk neizdevās.

2. Tāpat kā 107. piemēra risinājumā mēs redzam: ja pierādījums neizdodas, izmantojot viena veida "būrus" un "trušus" (plaknes daļas un punktus), tas var izdoties, izvēloties citus "būrus" un "trušus" (šai gadījumā "būri" ir novelkamās taisnes, "truši" - krustojamie nogriežņi; ja novilktu tikai 9 taisnes, tad kādai no tām būtu jākrusto 3 nogriežņi, bet tas nav iespējams).

3. Ideja aplūkot "ārējos" punktus nav tik nejauša, kā varētu likties. Daudzi atzīst, ka, piemēram, cilvēka raksturs vislabāk izpaužas ekstremālos apstākļos. Tāpat arī matemātikā panākumus bieži var gūt, apskatot kaut kādā nozīmē "galējos", "visizcilākos" elementus - pašu lielāko starp aplūkojamiem skaitļiem, pašus tālākos no aplūkojamiem punktiem, trijstūri ar vismazāko laukumu starp apskatāmajiem utt. Tādam spriešanas paņēmienam ir pat savs

nosaukums - "ekstremālā elementa metode". Varētu sacīt, ka ekstremālā elementa metodi mēs jau lietojām, risinot 27. piemēru: katram skaitlim tika aplūkots tā mazākais pirmreizinātājs.

Varētu pat sacīt, ka Dirihlē principa lietojumi gandrīz vienmēr apslēptā veidā saistīti ar ekstremālā elementa meklēšanu: tiešām, par meklējamo "būri" parasti var izvēlēties to, kurā ir visvairāk (vai vismazāk - atkarībā no lietotās Dirihlē principa formas) "trušu".

4. 6. Smaguma centrs ka vidējās vērtības jēdziena variants

Visos iepriekšējos piemēros mēs izmantojām vidējo vērtību, galvenokārt novērtēdami un analizēdami tās lielumu. Šajā paragrāfā pielietojumu galvenā būtība būs pašas vidējās vērtības eksistencē un faktā, ka to var aprēķināt vairākos veidos, iegūstot vienu un to pašu rezultātu.

Mēs jau atzīmējām (skat 1.5.), ka skaitliskiem lielumiem var ieviest daudzus vidējās vērtības jēdzienus: vidējais aritmētiskais, vidējais ģeometriskais (pozitīviem skaitļiem) utt. Kā varētu ieviest jēdzienu par vidējo punktu galīgai punktu kopai plaknē vai telpā?

Izrādās, ka to var izdarīt, izmantojot fizikālu interpretāciju.

Iedomāsimies, ka mums ir doti punkti $P_1, P_2, ..., P_n$. Novietosim katrā no tiem atbilstoši masu m_1, m_2, ..., m_n. Iedomāsimies, ka šīs masas ir saistītas ar tieviem stienīšiem (paši stienīši nesver neko), kuri notur visas masas vienos un tajos pašos relatīvajos attālumos citu no citas. (Visa sistēma, protams, var kustēties plaknē vai telpā kā viens vesels ķermenis, bet tās daļas savstarpējo novietojumu nemaina.) Tad eksistē tāds punkts, kurā, atbalstot minēto sistēmu, tā atradīsies līdzsvarā neatkarīgi no tā, kā būs pagriezta attiecībā pret šo punktu.

(Mēs pieņemam, ka arī šis punkts ar neredzamajiem un neko nesverošajiem stienīšiem fiksēts nekustīgā pozīcijā attiecībā pret smagumiem, kas izvietoti punktos $P_1, P_2, ..., P_n$)

Šādu punktu sauc par apskatāmās sistēmas smaguma centru. No fizikas pazīstamas vairākas smaguma centra īpašības. Atgādināsim tās.

1. Katrai aprakstītā tipa punktu sistēmai eksistē smaguma centrs, un tas ir viens vienīgs.

2. Ja dota sistēma S_A, kas sastāv no punktiem $A_1, A_2, ..., A_n$ ar atbilstošām masām $a_1, a_1, ...a_n$, un sistēma S_B , kas sastāv no punktiem $B_1, B_2, ..., B_m$ ar atbilstošām masām $b_1, b_2, ..., b_m$, tad visu m+n punktu $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m$ sistēmas smaguma centru var atrast šādi: atrod pirmās sistēmas smaguma centru A un ievieto tajā masu $a_1 + a_2 + ... + a_n$, atrod otrās sistēmas smaguma centru B un ievieto tajā masu $b_1 + b_2 + ... + b_m$, bet pēc tam atrod abu jauniegūto punktu A un B smaguma centru; tas ir meklējamais abu sistēmu S_1 un S_2 apvienojuma smaguma centrs.

(Šo faktu varētu izsacīt īsāk: sistēmu apvienojuma smaguma centrs ir smaguma centru sistēmas smaguma centrs, katras sākotnējās sistēmas smaguma centrā koncentrējot visu tās masu.)

3. (Arhimēda sviras likums) Ja punktā A_1 atrodas masa m_1 un punktā A_2 atrodas masa m_2, tad A_1 un A_2 smaguma centrs atrodas tādā nogriežņa A_1A_2 punktā M, ka $\frac{A_1M}{MA_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

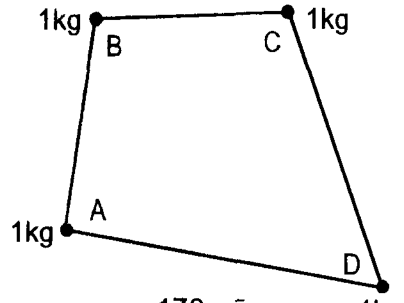
(To var izsacīt arī citādi: nogriežņu galapunktu sistēmas smaguma centrs dala nogriezni apgriezti proporcionāli galos novietotajiem smagumiem.)

Augšminētais atļauj secināt, ka smaguma centrs kaut kādā ziņā pārstāv visu punktu sistēmu, tātad var tikt uzskatīts par tās "vidējo punktu". Šo secinājumu pastiprinās tālāk minētās smaguma centra koordinātu aprēķināšanas formulas.

Smaguma centra jēdzienam un tā lietojumam uzdevumu risināšanā veltīta plaša literatūra, skat., piemēram [5]; [9]. Šeit aplūkosim pašus vienkāršākos piemērus.

144. piemērs. Pierādīt, ka katrā izliektā četrstūrī nogriežņi, kas savieno pretējo malu viduspunktus un diagonāļu viduspunktus, iet caur vienu punktu un dalās tajā uz pusēm.

Atrisinājums. Ievietosim katrā virsotnē masu 1 kg (skat. 178. zīm.).



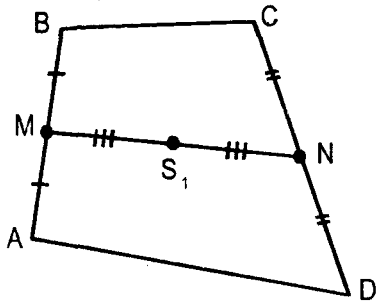
178. zīm.

Atradīsim visu 4 punktu smaguma centru 3 dažādos veidos.

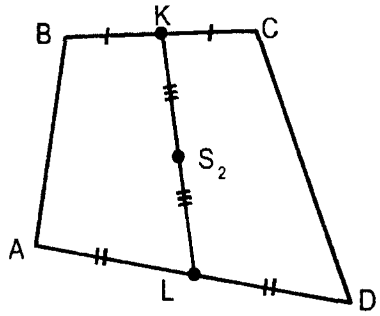
1. Apvienosim sistēmā S_1 punktus A un B, sistēmā S_2 punktus C un D. Saskaņā ar trešo īpašību S_1 un S_2 smaguma centri atbilstoši ir AB un CD viduspunkti. Saskaņā ar 2. īpašību visas kopējās sistēmas smaguma centrs ir MN viduspunkts (sk. 179. zīm.), jo punktos M un N koncentrējas pa 2 kg.

2. Līdzīgā veidā varam meklēt visas sistēmas smaguma centru, apvienojot vienā sistēmā B un C, bet otrā A un D. Iegūstam, ka smaguma centrs ir KL viduspunkts (sk. 180. zīm.).

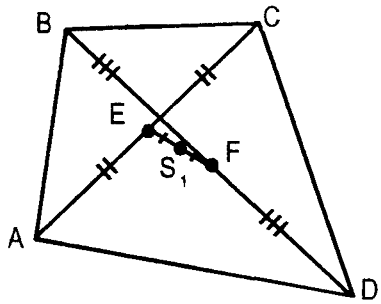
3. Līdzīgi iegūstam, ka visu 4 punktu sistēmas smaguma centrs ir EF viduspunkts (skat. 181. zīm.).



179. zīm.



180. zīm.



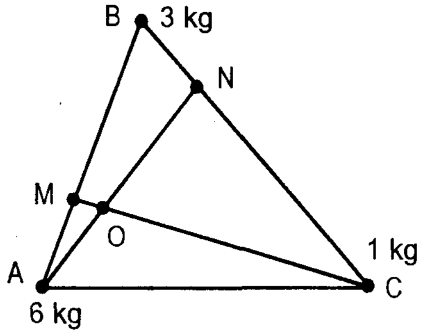
181. zīm.

Saskaņā ar 1. īpašību punktu sistēmai A, B, C, D ir tikai viens smaguma centrs, tātad visi punkti S_1, S_2, S_3 sakrīt, kas arī bija jāpierāda.

145. *piemērs. Pierādīt, ka trijstūra mediānas krustojas vienā punktā un dalās tajā attiecībā 2: 1, skaitot no virsotnes.*

Atrisinājums. Uzdevumu risina līdzīgi iepriekšējiem, ievietojot katrā virsotnē pa 1 kg smagumam un atrodot visu triju smagumu sistēmas smagumu centru trīs dažādos veidos. Katrā veidā trīs punktu sistēma tiek sadalīta divās sistēmās: vienā, kas sastāv no vienas virsotnes, un otrā, kas sastāv no tai pretējās malas galapunktiem. Iznāk, ka smaguma centrs visai trīs punktu sistēmai atrodas uz katras mediānas, dalot to attiecībā 2:l no virsotnes. Tā kā visu 3 punktu sistēmai eksistē tikai viens smaguma centrs, tad visu trīs mediānu minētie dalījuma punkti sakrīt, kas arī bija jāpierāda.

146. piemērs. Uz trijstūra ABC malas AB ņemts tāds punkts M, ka AM:MB= 1:2. Uz malas BC ņemts tāds punkts N, ka BN: NO= 1: 3. Nogriežņi AN un CM krustojas punktā O. Aprēķināt MO:OC.



182. zīm.

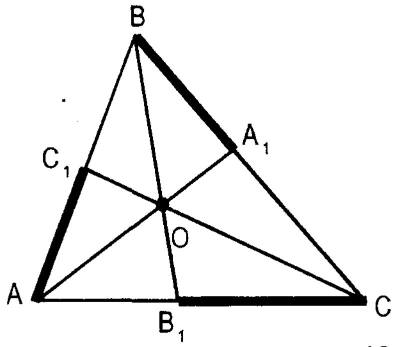
Atrisinājums. Skat. 182. zīm. Ievietosim punktā C 1 kg masu, bet punktā B - 3 kg masu. Šādi skaitļi izvēlēti, lai malas CB smaguma centrs (saskaņā ar 3. īpašību) atrastos punktā N.

Tālāk ievietosim punktā A 6 kg masu. Tas tiek darīts, lai malas AB smaguma centrs atrastos punktā M.

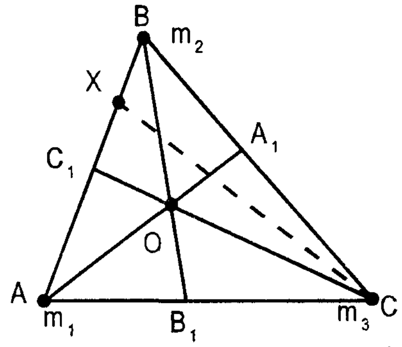
Kur atrodas visas triju smagumu sistēmas smaguma centrs? Saskaņā ar 2. īpašību tas atrodas uz nogriežņa AN, kā arī uz nogriežņa CM, tātad to krustpunktā O. Atkal saskaņā ar 2. īpašību punkts O ir smaguma centrs smagumu sistēmai C (1 kg) un M (9 kg); bet tad pēc 3. īpašības $\frac{OM}{OM}=\frac{1}{9}$, ko arī vajadzēja aprēķināt.

147. piemērs. *(Čevas teorēma). Pieņemsim, ka uz trijstūra ABC malām AB, BC, CA atbilstoši ņemti iekšējie punkti C_1, A_1, B_1. Taisnes AA_1,BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā tad un tikai tad, kad pastāv vienādība* $(1)\ \frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ *(skat. 183. zīm., kur skaitītājos esošie nogriežņi atzīmēti ar resnāku līniju).*

Pierādījums. 1. Pieņemsim, ka taisnes krustojas vienā punktā O. Ievietosim virsotnēs A, B, C atbilstoši smagumus m_1, m_2, m_3 tā, lai visas sistēmas smaguma centrs būtu punktā O. (To noteikti var izdarīt: vispirms saskaņā ar Arhimēda likumu ievietojam smagumus punktos B un C tā, lai malas BC smaguma centrs būtu punktā A_1, bet pēc tam atkal saskaņā ar Arhimēda likumu ievietojam smagumu punktā A tā, lai divu punktu A un A_1, kur punktā A_1 koncentrēta B un C kopīgā masa, smaguma centrs būtu O.)



183. zīm.



184. zīm.

Ja virsotnēs ievietoto smagumu sistēmas smaguma centrs ir O, tad malas AB smaguma centrs ir C_1. Tiešām, ja AB smaguma centrs būtu citā punktā X, tad visas sistēmas smaguma centrs saskaņā ar 2. īpašību atrastos uz nogriežņa CX un nevarētu būt punktā O, bet tā ir pretruna (skat. 184. zīm.).

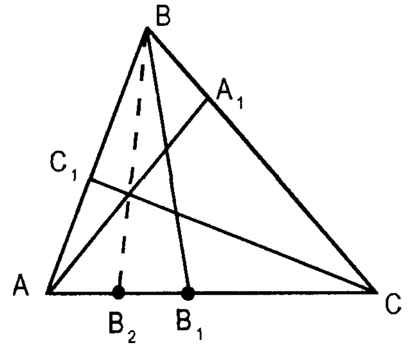
Līdzīgi pierāda, ka BC smaguma centrs ir punktā A_1, bet AC smaguma centrs ir punktā B_1.

Tad saskaņā ar Arhimēda likumu pastāv vienādības $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{m_3}{m_2}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{m_1}{m_3}$.

Sareizinot šīs vienādības, iegūstam (1), kas arī bija nepieciešams.

2. Pieņemsim, ka trijstūrī ABC pastāv sakarība (1), bet taisnes AA_1, BB_1, CC_1 nekrustojas vienā punktā (skat. 185. zīm.).

Novelkam BB_2 caur B un taišņu AA_1 un CC_1 krustpunktu.



185. zīm.

Saskaņā ar augstāk pierādīta pastāv vienādība (2)

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1.$$

Pielīdzinot (1) un (2) kreisās puses (to var darīt, jo labās puses ir vienādas), iegūstam $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CB_2}{B_2A}$.

Bet tas nav iespējams, jo $CB_1 < CB_2$, bet $B_1A > B_2A$, tāpēc $\frac{CB_1}{B_1A}<\frac{CB_2}{B_2A}$, tā ir pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja B_2 atrodas pa labi no B_1.

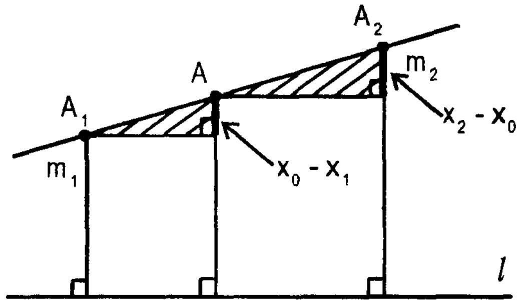
Teorēma pierādīta.

Beidzot pierādīsim svarīgas formulas par punktu sistēmas smaguma centra attālumu no ass.

Teorēma. Pieņemsim, ka plaknē dota taisne l un vienā pusē no tās punkti A_1, A_2, ..., A_n. Pieņemsim, ka punkts A_i atrodas attālumā x_i no taisnes un tajā novietota masa m_i (i=1;2; ...; n). Tad smagumu sistēmas smaguma centra A attālumu līdz taisnei l var aprēķināt pēc formulas

$$x_0=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}.$$

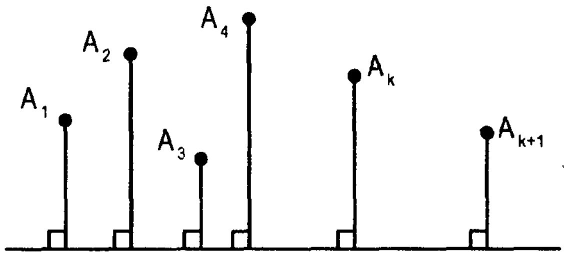
Pierādījums. Izmantosim matemātisko indukciju. Ja n = 1, smaguma centrs vienīgajam smagumam sakrīt ar tā atrašanās vietu un formula $x_0=\frac{m_1x_1}{m_1}=x_1$ ir pareiza. Pierādīsim formulas pareizību, ja n = 2.



186. zīm.

No iesvītroto taisnleņķa trijstūru līdzības seko, ka $\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{A_1A}{AA_2}$. Bet pēc Arhimēda likuma seko,ka $\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{m_2}{m_1}$. Iegūstam proporciju $\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m_2}{m_1}$, no kuras seko $m_1x_0 - m_1x_1 = m_2x_2 - m_2x_0$ un tālāk $(m_1 + m_2)x_0 = m_1x_1 + m_2x_2$, no kurienes izriet vajadzīgais.

Pieņemsim, ka formula jau pierādīta k smagumiem, un pierādīsim to k + 1 smagumam.



187. zīm.

Saskaņā ar induktīvo hipotēzi pirmo k smagumu smaguma centra S attālumu līdz asij l aprēķinām pēc formulas $\tilde{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{m_1 + \ldots + m_k}$.

Saskaņā ar smaguma centra 2. īpašību varam meklēt visu k + 1 punktu smaguma centru kā divu punktu sistēmas smaguma centru: pirmais - A_{k+1} ar smagumu m_{k+1}, otrais - S ar smagumu $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$. Saskaņā ar augstāk pierādīto mūs interesējošais attālums ir

$$x_0 = \frac{\tilde{x} \cdot (m_1 + m_2 + \ldots + m_k) + x_{k+1} \cdot m_{k+1}}{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k) + m_{k+1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k + x_{k+1} \cdot m_{k+1}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k + m_{k+1}},$$

ko arī vajadzēja pierādīt. Induktīvā pāreja izdarīta.

Komentāri. 1. Indukcijas bāzes pieradījumā nevarēja aprobežoties, kā parasti, tikai ar gadījumu n = 1; nācās aplūkot arī gadījumu n = 2, jo uz to mēs atsaucāmies induktīvajā pārejā, tātad to nevarēja iegūt ar induktīvās pārejas palīdzību.

2. Formula paliek spēkā arī tad, ja daži smagumi novietoti uz ass l (tad atbilstošie x_i ir nulles) vai ass 1 pretējā pusē (tad atbilstošais x_i ir attālums ar "-" zīmi.). Pēdējā gadījumā, ja x_0 ir negatīvs, tad smaguma centrs atrodas tajā pusē asij, kurā ir smagumi ar "negatīvajiem" attālumiem no ass; smaguma centra attāluma modulis līdz asij l joprojām ir $\left|\frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right|$.

Secinājumi. Iegūto formulu var pārrakstīt šādi $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)x_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$. Pareizinot abas puses ar brīvās krišanas paātrinājumu g, iegūstam $(m_1g + m_2g + m_ng)x_0 = m_1gx_1 + m_2gx_2 + \ldots + m_ngx_n$.

Atcerēsimies, ka mg ir ķermeņa, kura masa ir m, svars jeb spēks, ar kādu tas iedarbojas uz atbalstu.

Atceroties griezes momenta jēdzienu (spēks reiz plecs), redzam, ka mūsu formula izsaka būtisku smaguma centra īpašību: smaguma centra griezes moments attiecībā pret jebkuru asi ir vienāds ar atsevišķo smagumu griezes momentu summu, pieņemot, ka smaguma centrā koncentrēta visa sistēmas masa.

Var pierādīt, ka šo jēdzienu var lietot arī par smaguma centra definīciju un tā ir ekvivalenta parastajai definīcijai.

2. Ja visos punktos ievietotas vienādas masas (t.i., visi punkti ir "līdztiesīgi"), iegūstam formulu $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, t.i., smaguma centra attālums līdz asij ir atsevišķo punktu attālumu vidējā vērtība. Tas vēlreiz norāda uz faktu, ka smaguma centrs ir piemērots punktu sistēmas vidējā punkta jēdzienam.

Ar smaguma centra jēdziena pielietojumu nevienādību pierādīšanā iepazīsieties 6. nodaļā.

4. 7. Uzdevumi patstāvīgai risināšanai par 4. nodaļas vielu

196. Vienādmalu trijstūra malas garums ir 2. Tajā atzīmēti 5 punkti. Pierādīt, ka kaut kādi divi no šiem punktiem atrodas viens no otra attālumā, kas nepārsniedz 1.
197. Vienādmalu trijstūra malas garums ir 10. Tajā atzīmēts 201 punkts. Pierādīt, ka var atrast tādus 3 punktus, kas visi cits no cita ir ne lielākā attālumā kā 1.
198. Kvadrāta izmēri ir 8 x 8. Tajā atzīmēti 4 punkti. Pierādīt, ka var atrast tādus 2 atzīmētus punktus, kas viens no otra ir ne lielākā attālumā kā $\sqrt{65}$.
199. Katrs regulāra trijstūra kontūra punkts nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast taisnleņķa trijstūri, kura visas virsotnes nokrāsotas vienā krāsā.
200.° No regulāra 40-stūra virsotnēm 17 nokrāsotas sarkanā krāsā. Pierādīt, ka var atrast vienādsānu trijstūri, kura visas virsotnes ir sarkanas.
201.° Kvadrātveida režģa formā izvietoti 10x10 punkti. Kāds ir mazākais posmu skaits lauztai līnijai (ne noteikti slēgtai), kas iet caur visiem punktiem? Visi posmi ir horizontāli vai vertikāli.
202.^{k} Atrisināt 110. piemēru, atsakoties no prasības, lai visi posmi būtu horizontāli vai vertikāli.
203.° Piecas taisnes savstarpēji krustojas. Kāds ir lielākais iespējamais malu skaits daudzstūrim, kuram visas malas atrodas uz šīm taisnēm?
204.^{k} Atrisināt līdzīgu uzdevumu, ja krustojas 7; 8; 9; 10 taisnes.
205. Vai l000-stūrim var būt 501 paralēla mala?
206.° Kvadrāts sastāv no 8 x 8 rūtiņām. Tas sagriezts 13 taisnstūros. Griezumi iet tikai pa rūtiņu līnijām. Pierādīt, ka starp griežot iegūtajiem taisnstūriem ir divi vienādi trijstūri.
207.° Trijstūra iekšpusē atrodas 10 sarkani un 20 zili punkti; arī virsotnes ir sarkanas. Nekādi trīs krāsaini punkti neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var atrast trijstūri, kura visas virsotnes ir sarkanas un kurā nav neviena zila punkta.
208.° Kāds lielākais skaits šauro leņķu var būt
    a) 8-stūrī,
    b) 11-stūrī?
209.° Kāds lielākais skaits šauro leņķu var būt izliektā 10-stūrī?
210. Uz izliektā 4-stūra malām kā diametriem konstruēti riņķi. Pierādīt, ka tie pārklāj visu četrstūri.
211.* Pierādīt, ka katrā daudzstūrī, kurā ir vismaz 4 virsotnes, var novilkt diagonāli, kas neiziet ārpus šī daudzstūra (113. piemērā risinājumā mēs to pieņēmām).
212.° Pierādīt, ka starp katra l0-stūra diagonālēm var atrast vai nu divas paralēlas diagonāles, vai arī divas tādas diagonāles, kuru taišņu veidotais leņķis ir mazāks par 6°.
213.° Vienā riņķa līnijā ievilkts regulārs 9-stūris un regulārs 10-stūris; to virsotnes sadala riņķa līniju 19 lokos. Pierādīt, ka vismaz viena loka lielums nepārsniedz 2°.
214. Kāds mazākais trijstūru daudzums nepieciešams, lai ar tiem pārklātu izliektu 12-stūri? Trijstūri var savstarpēji pārsegties, bet nedrīkst iziet ārpus 12-stūra.
215.* Izliektā četrstūra abu diagonāļu garums ir 20. Pierādīt, ka vismaz viena mala ir garāka par 14.
216.* Kvadrātā, kura malas garums ir 1, atrodas vairākas riņķa līnijas, kuru garumu summa ir 30. Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas krusto vismaz 10 no tām.
217. Riņķī, kura rādiuss ir 1, atrodas vairāki nogriežņi, kuru garumu summa ir 32. Pierādīt, ka var novilkt taisni, kura krusto
    a) vismaz 8 nogriežņus,
    b) vismaz 9 nogriežņus.

218.* Dots riņķis, kura rādiuss ir 2. Kāds mazākais skaits riņķu ar rādiusu 1 jāuzzīmē, lai pilnībā nosegtu riņķi, kura rādiuss ir 2?

219.° Pierādīt, ka riņķī, kura rādiuss ir 14, nevar atzīmēt 226 punktus tā, lai attālums starp katriem diviem punktiem būtu lielāks par 2.

220. Uz apaļa galda, kura rādiuss ir R, novietotas n apaļas monētas, kuru rādiuss ir r. Monētas cita ar citu nesaskaras, bet uz galda nav iespējams nolikt vēl citu monētu (ar rādiusu r), lai tā nesaskartos ar kādu no jau noliktajām monētām. Pierādīt, ka $^R/_r$ -1 < $2\sqrt{n}$. (Monētas pārbīdīt nedrīkst, neviena monēta nedrīkst šķērsot galda malu.)

221. Malienas platība ir 64600 km^2. Tajā ir izvietoti 13 televīzijas torņi un retranslācijas stacijas. Ir zināms, ka raidījumu uztveres kvalitāte ir laba attālumā, kas nepārsniedz 80 km no tuvākās retranslācijas stacijas. Pierādīt, ka Malienā ir tāda vieta, kur televīzijas raidījumu retranslācijas kvalitāte nav pietiekoši laba.

222.* Kvadrātā, kura malas garums ir 1, atrodas 170 punkti. Pierādīt, ka var atrast divus tādus punktus, kuru attālums vienam no otra nav lielāks par 0,09.

223. Kvadrāta malas garums ir 15. Tā iekšpusē atrodas 20 mazi kvadrātiņi, kuru malas garums ir 1. Pierādīt, ka lielā kvadrāta iekšpusē var novietot riņķi ar rādiusu 1, kam nav kopēju punktu ne ar vienu no mazajiem kvadrātiņiem.

224.° Plaknē doti 10 punkti un riņķa līnija, kuras rādiuss ir 1. Pierādīt, ka uz riņķa līnijas var atrast tādu punktu, kura attālumu summa līdz minētajiem 10 punktiem ir lielāka par 10.

225.* Izliekta 10-stūra iekšpusē atzīmēts punkts, kas neatrodas ne uz vienas diagonāles. Tajā sēž zaķis, bet katrā virsotnē stāv pa medniekam. Visi mednieki vienlaicīgi šauj uz zaķi, bet tas šajā brīdī pieliecas, un lodes aizlido garām (pieņemsim, ka cita citu neskar). Pierādīt, ka vismaz viena 10-stūra mala paliks nesašauta.

226. Novilktas 13 taisnes; katra no tām dala kvadrātu ABCD divās trapecēs, kuru laukumu attiecība ir 1: 2. Pierādīt, ka vismaz 4 no šīm taisnēm iet caur vienu punktu.

227.^{k} Slēgta lauzta līnija savieno visas regulāra 20-stūra virsotnes. Pierādīt, ka šai līnijai ir vismaz divi paralēli posmi. Vispārināt šo rezultātu regulārām 2n-stūrim.

228.* Kvadrāts sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Tajā atzīmēti vairāki kvadrāti tā, ka vienlaicīgi

a) katra atzīmētā kvadrāta malas iet pa rūtiņu līnijām,

b) neviens atzīmētais kvadrāts pilnībā neapklāj nevienu citu kvadrātu.

Kāds lielākais daudzums kvadrātu var būt atzīmēti?

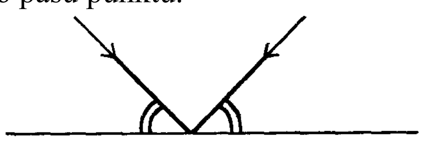
229. Labirinta gaiteņi ir izliekta n-stūra malas un diagonāles. Kāds mazākais skaits spuldžu jānovieto labirintā, lai tas viss būtu apgaismots? Nekādas trīs diagonāles nekrustojas vienā punktā.

230.* Istabas forma ir 30-stūris. Pierādīt, ka to noteikti var apgaismot ar 10 lampām.

231. Izdomāt 30-stūra formas istabu, kuras apgaismošanai nepieciešamas vismaz 10 lampas.

232. Kvadrāts sastāv no 10 x 10 rūtiņām. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu centru var nokrāsot, lai nekādi 3 nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?

233.^{k} Regulāra trijstūra malu iekšpuses ir spoguļi. Trijstūra iekšpusē ielaiž gaismas staru. Stars kustas saskaņā ar likumu, ka krišanas leņķis vienāds ar atstarošanas leņķi (skat. 188. zīm.). Ir zināms, ka caur kādu punktu stars gājis 7 reizes. Pierādīt, ka tas vēl kādreiz ies caur šo pašu punktu.



188. zīm.

234. Izmantojot Čevas teorēmu, pierādīt, ka trijstūrī bisektrises, augstumi un taisnes, kas savieno virsotnes ar ievilktā riņķa pieskaršanās punktiem pretējām malām, krustojas vienā punktā (šie punkti var būt dažādi gadījumā a, b, c).

235. Pierādīt, ka taišņu nogriežņi, kas novilkti izliektajā četrstūrī 183. uzdevumā, krustojoties cits ar citu, katrs sadalās daļās, kas savā starpā ir vienādas.

CITI METODES LIETOJUMI

<u>5. nodaļa. Daži metodes lietojumi bezgalīgām kopām</u>

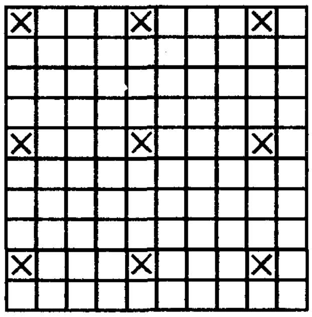
Līdz šim aplūkotajos piemēros gan "būru", gan "trušu" skaits, lietojot Dirihlē principu, bijis galīgs. Arī apskatot summu novērtēšanas metodi, saskaitāmo skaits bijis galīgs.

Tagad apskatīsim piemērus, kuros līdzīgus spriedumus izmanto bezgalīgām kopām.

<u>5.1. Bezgalīgas kopas aizstāšana ar lielu galīgu kopu</u>

Apskatīsim raksturīgu piemēru.

<u>*148. piemērs.*</u> *Visa plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Katrs ceturtais kvadrātiņš izgriezts tā, ka izgrieztie kvadrātiņi veido režģi (skat. 189. zīm.). Vai atlikušos kvadrātiņus var apstaigāt ar šaha zirdziņu tā, lai katrā no tiem nonāktu tieši vienu reizi?*



189. zīm.

<u>Komentārs.</u> Skaidrs, ka atlikušo rūtiņu ir bezgalīgi daudz. Tāpēc vārdus, ka šaha zirdziņš apstaigā plakni, sapratīsim šādi: zirdziņš sāk kustību kādā neizgrieztā rūtiņā un turpina bezgalīgi ilgi, pārvietojoties tikai pa neizgrieztām rūtiņām; turklāt katrai neizgrieztai rūtiņai pienāk tāds (viens vienīgs) brīdis, kad zirdziņš nonāk šajā rūtiņā.

<u>Atrisinājums.</u> Pirmajā brīdī gribas rīkoties tāpat, kā risinot 69. piemēru.

"Izkrāsojam rūtiņas šaha galdiņa kārtībā un ievērojam, ka visas apgrieztās rūtiņas ir vienā krāsā. Tā kā zirdziņš katrā gājienā maina rūtiņas krāsu, tad apstaigāšana nav iespējama, jo vienas krāsas rūtiņu ir palicis vairāk."

Tomēr šajā gadījumā tā spriest nedrīkst: pāri palicis <u>bezgalīgs</u> daudzums gan vienas, gan otras krāsas rūtiņu, un, ko šādā gadījumā saprast ar vārdu "vairāk", nav saprotams.

Tomēr skaidrs, ka katrā pietiekami lielā galīgā apgabalā vienas krāsas rūtiņu tiešām ir palicis vairāk nekā otras krāsas rūtiņu, vārdu "vairāk" lietojot parastajā izpratnē. Pamēģināsim izmantot šo faktu.

Aplūkosim rūtiņu lapā kvadrātu K, kura izmēri ir $4n \cdot 4n$; pieņemsim ka visas plaknes rūtiņas iekrāsotas melnā un baltā krāsā šaha galdiņa kārtībā tā, ka izgrieztās rūtiņas ir melnas. Kvadrāts K sastāv no n^2 blokiem, kuru izmēri ir $4 \cdot 4$; katrā blokā ir palikušas 8 baltas un 7 melnas rūtiņas, tātad kvadrātā K neatkarīgi no tā novietojuma ir $8n^2$ baltas un $7n^2$ melnas rūtiņas.

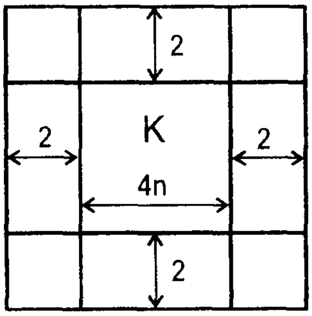
Pieņemsim pretējo, ka zirdziņš var veikt prasīto uzdevumu. Tad savas "pastaigas" laikā viņam jāapstaigā arī kvadrāta K neizgrieztās rūtiņas; pie tam zirdziņš kvadrātā K var nonākt un no tā arī aiziet vairākas reizes.

Zirdziņam pa reizei jānonāk arī visās kvadrāta K baltajās rūtiņās.

Katrā no tām jānonāk <u>no citas</u> melnās rūtiņas. Tātad, pat ja zirdziņš sācis savu ceļu no baltās rūtiņas K iekšpusē (tad šajā rūtiņā nav jānonāk), nepieciešamas vismaz $8n^2 - 1$ melnās rūtiņas, no kurām zirdziņš nonāk uz atbilstošajām baltajām rūtiņām.

Kur šīs melnās rūtiņas var atrasties?

Pirmkārt, par tādām var kalpot visas $7n^2$ neizgrieztās melnās rūtiņas kvadrāta K iekšpusē. Otrkārt, par tādām varētu kalpot melnās rūtiņas kvadrāta K apmalē, kuras platums ir 2 (skat. 190. zīm.).



190. zīm.

Viegli saprast, ka šādu rūtiņu ir $4\cdot 2 + 4\cdot \frac{1}{2}(2\cdot 4n) = 16n + 8$.

Tātad jābūt spēkā nevienādībai $7n^2 + 16n + 8 \geq 8n^2 - 1$ jeb $n^2 - 16n - 9 \leq 0$. Tomēr viegli saprast, ka šī nevienādība lieliem n nav pareiza.

Tātad pieņēmums, ka zirdziņš varētu apstaigāt visu plakni, ir nepareizs; mēs to konstatējam, apskatot pietiekami lielu plaknes daļu un šai daļai lietojot Dirihlē principu (tā kā nepieciešamo melno rūtiņu ir mazāk nekā balto, tad no vienas melnās rūtiņas zirdziņam jānonāk divās baltajās rūtiņās, tātad šajā melnajā rūtiņā jāatrodas divas reizes, bet tā ir pretruna).

Komentārs. Šī uzdevuma risinājums ir ļoti pamācošs. Profesionālam matemātiķim to varētu pasniegt šādi, neizskaidrojot detaļās: katra galīga kvadrāta iekšpusē melno un balto rūtiņu skaitam jābūt apmēram vienādam, ņemot vērā arī rūtiņas, kas ir ārpus kvadrāta tā tiešā tuvumā.

"Melno rūtiņu deficīts" kvadrāta iekšpusē ir proporcionāls kvadrāta laukumam, bet iespējas to kompensēt - proporcionālas kvadrāta perimetram; perimetrs aug kā lineāra funkcija, bet laukums - kā kvadrātiska funkcija atkarībā no malas garuma, tātad pietiekami lielai malai deficīts pārsniegs iespēju to kompensēt un kvadrāta apstaigāšana kļūs neiespējama.

Mūsu veiktie precīzie aprēķini ir tikai šī sprieduma formālāks pieraksts. Matemātiķi vienmēr spriež šādā "cilvēciskā valodā", bieži rīkojoties ar dažādiem ietilpīgiem jēdzieniem (funkcijas augšanas ātrums, "apmēram" vienāds utt.); protams, šādu spriedumu efektivitāte un pareizība allaž atkarīga no tā, cik dziļi un vispusīgi mēs attiecīgos jēdzienus esam apguvuši.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

236. Bezgalīgas rūtiņu lapas katrā rūtiņā tika novietots pa figūriņai. No rūtiņām, kas atradās kvadrātveida režģī, ik pēc simtās figūriņas vienu figūriņu noņēma (režģis veidots tāpat kā iepriekšējā piemērā). Ar vienu gājienu var vienlaicīgi visas figūriņas (vai daļu no tām) pārvietot uz kādu no rūtiņām, kurām ar pašreizējo figūriņas aizņemto rūtiņu ir kopīga mala; pie tam divas vai vairākas figūriņas nedrīkst nonākt vienā rūtiņā. Vai ar galīgu gājienu skaitu var panākt, lai atkal katrā rūtiņā atrastos pa figūriņai?

Norāde: uzdevuma formulējums ir nepierasts. Bieži tiek dota atbilde: "Nē, jo tukšas ir bezgalīgi daudzas rūtiņas." Šāds arguments nav pareizs. Iedomājieties, ka figūriņas būtu noņemtas no vienas bezgalīgas, horizontālās rūtiņu rindas; ar vienu gājienu (plaknes apakšējā daļā atstājot figūriņas nekustīgas, bet visas augšējās daļas figūriņas pārvietojot par vienu rūtiņu uz leju) var panākt, ka visas bezgalīgās plaknes rūtiņas būs aizpildītas.

237. (Van der Vardena teorēma bezgalīgajā variantā) Visi naturālie skaitļi sadalīti divās grupās. Pierādīt, ka katram n var atrast tādu aritmētisku progresiju, kuras locekļu skaits ir n un visi locekļi pieder vienai grupai.

Norāde. Mēs atkal aizvietosim bezgalīgo naturālo skaitļu kopu ar tās galīgu nogriezni. Pierādīt no diviem parametriem n un k atkarīgu apgalvojumu (Van der Vardena teorēma galīgajā variantā) A(n,k): katram naturālam skaitlim n un k var atrast tādu naturālu skaitli W(n,k), kam piemīt šāda īpašība: izvēloties patvaļīgus W(n,k) pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus un patvaļīgi sadalot tos k grupās, vismaz vienā grupā būs n locekļu aritmētiska progresija.

Šo teorēmu pierāda ar matemātisko indukciju pēc šādas shēmas:

a) atsevišķi pierāda triviālos gadījumus n = 1 un n = 2 vai k = 1;

b) pierāda A (3,2) (piemēram, var pierādīt, ka der W (3,2) = 9);

c) pierāda: ja ir spēkā A (n,k), tad ir spēkā arī A (n,k + 1) ($k \geq 2$);

d) pierāda: ja kādam n visiem k ir spēkā A (n,k), tad ir spēkā arī A (n + 1, 2).

Komentāri. Van der Vardena teorēma apgalvo, ka, sadalot naturālo skaitļu kopu divās daļās, vismaz vienā no tām ir neierobežoti garas galīgas aritmētiskas progresijas. Vai tā paliek spēkā arī, ja vārdus "neierobežoti garas galīgas progresijas" aizstāj ar vārdiem "bezgalīga progresija"? Izrādās, ka nē. Aplūkosim šādu naturālo skaitļu kopas sadalījumu divās grupās:

1 - pirmajā grupā,
2; 3 - otrajā grupā,
4; 5; 6 - pirmajā grupā,
7; 8; 9; l0 - otrajā grupā,
11; 12; 13; 14; 15 - pirmajā grupā,

Katrai bezgalīgai aritmētiskajai progresijai ir galīga diference d. Gan pirmajā, gan otrajā grupā ir pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu intervāli, kuru garums pārsniedz d; katrā šādā intervālā, kura sākums uz skaitļu ass atrodas pa labi no apskatāmās progresijas pirmā locekļa, ir vismaz viens minētās aritmētiskas progresijas loceklis.

Tātad ne pirmajā, ne otrajā grupā šī aritmētiskā progresija nav pilnībā.

Redzam, ka šajā gadījumā vārdus "neierobežoti galīga" nevar aizstāt ar "bezgalīga". Kādos gadījumos to var darīt, ir viens no dziļākajiem matemātikas pamatošanas jautājumiem, uz kuru izsmeļoša atbilde nav atrasta vēl šodien.

5. 2. Bezgalīgu kopu sadalīšana galīgā skaitā daļu

Šī paragrāfa uzdevumu risinājumos tiek lietots šāds acīmredzams Dirihlē principa vispārinājums:

ja bezgalīgu kopu sadala galīgā skaitā daļu, tad vismaz viena no daļām ir bezgalīga.

Sauksim šo Dirihlē principa variantu par **D∞.**

5. 2. 1. Lietojumi grafu analīzē

149. piemērs. (Ramseja teorēma bezgalīgiem grafiem) Pieņemsim, ka dots grafs ar bezgalīgi daudzām virsotnēm; katras divas virsotnes savienotas ar šķautni. Katra šķautne nokrāsota vai nu balta, vai melna. Pierādīt, ka var atrast bezgalīgi daudz virsotņu tā, ka visas šķautnes, kas šīs virsotnes pa pāriem savieno, ir vienā krāsā.

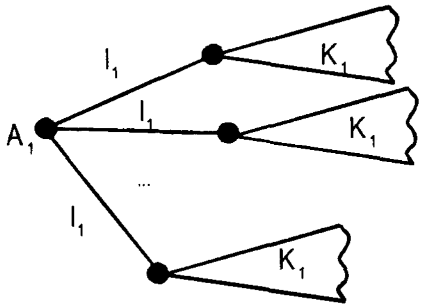
Pierādījums. Aplūkosim vienu virsotni A_1. No tās iziet bezgalīgi daudz šķautņu. Tās visas ir baltas vai melnas; vismaz vienā krāsā, saskaņā ar D∞, ir bezgalīgi daudz šķautņu. Izvēlamies šo krāsu un tālāk apskatām tikai atbilstošo šķautņu otro galapunktu kopu K_1. Izvēlamies vienu virsotni no tās - A_2; apskatām šķautnes no A_2 uz citām K_1 virsotnēm. Starp tām vai nu balto, vai melno šķautņu ir bezgalīgi daudz. Izvēlamies to krāsu, kurā šķautņu ir bezgalīgi daudz, un ar K_2 apzīmējam to otro galapunktu kopu. Izvēlamies virsotni A_3 no K_2 līdzīgi atrodam kopu K_3 utt.

Esam ieguvuši virsotņu virkni $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, kurā katra virsotne ar visām nākošajām savieno to ar vienas un tās pašas krāsas šķautnēm. Apskatām šķautnes A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,...; starp tām ir vai nu bezgala daudz baltu, vai bezgala daudz melnu šķautņu. Apskatām tās šķautnes, kuru ir bezgalīgi daudz; to sākuma virsotnes veido meklējamo bezgalīgo kopu.

Komentārs. Kā redzat, šoreiz galīgajā Ramseja teorēmā par R(n,m) eksistenci (skat. 78. lpp.), pārejot uz bezgalīgām parametru vērtībām, apgalvojums paliek spēkā (salīdziniet ar Van der Vardena teorēmu 5.1. nodaļas nobeigumā).

150. piemērs. (Kēniga lemma par bezgalīgo koku) Pieņemsim, ka dots bezgalīgs koks, kuram no katras virsotnes iziet galīgs skaits šķautņu. Pieņemsim, ka šajā kokā eksistē neierobežoti gari galīgi zari. Pierādīt, ka tajā eksistē arī bezgalīgs zars.

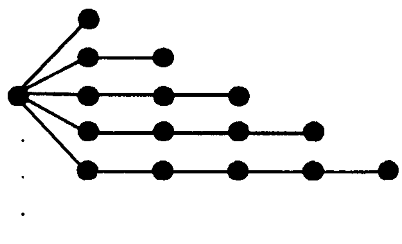
Pierādījums. Izvēlamies vienu virsotni A_1. No tās iziet galīgs skaits šķautņu $l_1, l_2, ..., l_n$, viss bezgalīgais koks sadalās galīgā skaitā apakškoku $K_1, K_2, ... K_n$, kas sākas šo šķautņu galos (skat. 191. zīm.).



191. zīm.

Vismaz vienam no apakškokiem $K_1, K_2, ... K_n$ jābūt bezgalīgam. Izvēlamies to. Atkārtojot līdzīgu spriedumu, kurā A_1 vietā ņem šī apakškoka sākuma virsotni A_2, iegūstam šķautni, kas iziet no A_2 un ved uz nākošā bezgalīgā apakškoka sākuma virsotni A_3, utt. Turpinot šo konstrukciju, iegūstam bezgalīgu zaru $A_1A_2A_3$ .... Kēniga lemma pierādīta.

Komentārs. Ja nebūtu nosacījuma, ka no katras virsotnes iziet galīgs skaits šķautņu, Kēniga lemmas apgalvojums nepaliktu spēkā. Tiešām, aplūkosim koku, kurā no vienas virsotnes A iziet bezgalīgi daudz zaru: viena zara garums ir 1, viena zara garums ir 2, viena zara garums ir 3 utt. Šādā kokā ir neierobežoti gari zari, bet nav neviena bezgalīga zara (skat. 192. zīm.).


192. zīm.

Spriedumus, kas līdzīgi Kēniga lemmas pierādījumam, bieži lieto arī citās matemātikas nozarēs.

151. piemērs. Ar S (k) apzīmēsim skaitļa k ciparu summu decimālajā pieraksta. Pierādīt, ka $S(5^n) \to \infty$, ja $n \to \infty$.

Atrisinājums. To naturālo skaitļu n kopu, kuriem 5^n ciparu summa ir mazāka par kaut kādu konstanti C, apzīmēsim ar S. Ar $S_{k_m k_{m-1} k_{m-2} \dots k_2 k_1}$ apzīmēsim to naturālo n kopu no S, kuriem pēdējie m cipari ir $k_m, k_{m-1}, \dots, k_2 k_1$.

Pieņemsim no pretējā, ka S ir bezgalīga kopa. Tad eksistē tāds cipars k_1^0, ka kopa $S_{k_1^0}$ bezgalīga. Tad eksistē tāds k_2^0, ka $S_{k_2^0 k_1^0}$ ir bezgalīgs utt. Ja mēs pierādīsim, ka virknē

$k_1^0, k_2^0, k_3^0, \ldots, k_m^0, \cdots$ bezgalīgi daudz ciparu atšķirsies no nulles, tad būsim ieguvuši pretrunu ar S definīciju.

Pieņemsim no pretējā, ka virknē $k_1^0, k_2^0, k_3^0, \ldots, k_m^0, \cdots$ sākot no kādas konkrētas vietas, ir tikai 0. Tas nozīmē, ka eksistē tāds galīgs šīs virknes sākuma fragments $k_1^0, k_2^0, k_3^0, \ldots, k_m^0$ ka eksistē piecinieka pakāpes, kas beidzas ar cipariem:

$$k_{m_1}^0, k_{m_2-1}^0 \ldots k_2^0 k_1^1,\ 0k_{m_1}^0, k_{m_2-1}^0 \ldots k_2^0 k_1^1,\ 00k_{m_1}^0,\ k_{m_2-1}^0 \ldots k_2^0 k_1^1, \text{ utt.}$$

Tātad skaitlim $k_{m_1}^0 k_{m_2-1}^0 \ldots k_2^0 k_1^1$ ko var iegūt kā starpību starp piecinieka pakāpi un skaitli ar neierobežoti daudzām nullēm galā, jādalās ar neierobežoti augstām piecinieka pakāpēm; tas var būt tikai tad, ja šis skaitlis ir 0. Tomēr tas nav 0, jo k_1^0= 5. Iegūtā pretruna norāda, ka sākotnējais pieņēmums par S bezgalīgumu ir nepareizs.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

238. Smaragda karaļvalstī dzīvo bezgalīgi daudz rūķīšu. Katri divi no viņiem savā starpā vai nu draudzējas, vai nu naidojas, vai ir vienaldzīgi. Pierādīt, ka var atrast bezgala daudzus rūķīšus, kas vai nu visi savā starpā draudzējas, vai visi naidojas, vai visi ir vienaldzīgi viens pret otru.
239. Pierādīt, ka skaitļa 2^n ciparu summa tiecas uz bezgalību, ja $n \to \infty$
240. Rūķītis Saprātiņš personīgi pazīst katru funkciju, kuras argumenti ir naturāli skaitļi un vērtības tikai 0 vai 1. Aprunājoties ar katru no tām, viņš prot noteikt šīs funkcijas inteliģences līmeni. Aprunāšanās notiek šādi: Saprātiņš pajautā funkcijai par kādu viņas vērtību (piemēram: "Cik ir f(101)?"), atkarībā no atbildes (kas ir 0 vai 1) uzdod jautājumu par citu vērtību, utt.; katrai funkcijai tiek uzdots galīgs skaits jautājumu (šis galīgais skaits jautājumu katrai funkcijai var būt cits). Secinājumus par funkcijas inteliģences līmeni Saprātiņš izdara vienīgi, pamatojoties uz saņemtajām atbildēm.
    Pierādīt, ka eksistē tāda konstante C, kas kopēja visām funkcijām, ka funkcijas inteliģences līmenis atkarīgs vienīgi no vērtībām f(1), f(2), ..., f(c) (t.i., tālākām vērtībām inteliģences līmeņa noteikšanā nav nozīmes).

5. 2. 2. Uzdevumi, kuros jāpierāda, ka kāds process ir galīgs

Šajā punktā aplūkosim uzdevumus, kuros dota kaut kāda punktu, nogriežņu, skaitļu utt. kopa. Ar šo kopu atļauts izdarīt noteiktus pārveidojumus (tieši kādus, tas atkarīgs no konkrētā uzdevuma), iegūstot jaunu kopu, ar iegūto kopu atkal drīkst izdarīt tādus pašus pārveidojumus, utt. Uzdevumā prasīts pierādīt, ka šādus pārveidojumus iespējams izdarīt tikai galīgu skaitu reižu.

Parasti šī tipa uzdevumu risināšanas shēma ir šāda: katrai apskatāmajai kopai piekārto naturālu skaitli, kas kaut kādā nozīmē raksturo šo kopu. Piekārtojumu izraugās tā, lai, izdarot atļauto pārveidojumu, šis skaitlis katrā ziņā samazinātos, t.i., lai iegūtajai kopai tas būtu mazāks nekā sākotnējai kopai. Tā kā neviens lielums, kura vērtības ir naturāli skaitļi, nevar samazināties bezgalīgi daudzas reizes, tad šī samazināšanās kādreiz beigsies. Bet tas nozīmē, ka atļauto pārveidojumu vairs nevarēs izdarīt, jo pretējā gadījumā aplūkojamās kopas raksturojumu varētu vēl samazināt.

Skaidrs, ka šīs metodes pamatā ir Dirihlē princips. Ja process turpinātos bezgalīgi ilgi, tad bezgalīgi daudzas reizes tiktu iegūta jauna kopa, tātad bezgalīgi daudzas reizes tiktu iegūts arī tās skaitliskais raksturojums. Tā kā raksturojumam iespējams tikai galīgs skaits dažādu vērtību (bieži vien mēs pat precīzi nezinām, kāds tas ir), tad kāda vērtība tiks iegūta bezgalīgi daudz reižu. Bet tas nav iespējams, jo, tā kā raksturojums dilst, neviena tā vērtība nevar parādīties vairāk kā vienu reizi. Iegūtā pretruna arī parāda, ka šis process ir galīgs.

Šādu paņēmienu sauc par bezgalīgā kritiena metodi. Skaidrs, ka tikpat labi var lietot tādu šīs metodes variantu, kurā mūsu izvēlētais situācijas raksturojums monotoni palielinās; ja tam iespējams tikai galīgs skaits vērtību, palielināšanās tāpat nevar turpināties bezgalīgi.

152. piemērs. Dota tabula, kuras izmēri ir nxn rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis. Ar vienu gājienu atļauts mainīt skaitļu zīmes vai nu visās kādas kolonnas, vai visās kādas rindas rūtiņās. Pierādīt, ka ar vairākiem gājieniem var panākt, lai nevienā rindā un nevienā kolonnā ierakstīto skaitļu summa nebūtu negatīva.

Atrisinājums. Viegli panākt, lai skaitļu summa nevienā rindā nebūtu negatīva; šajā nolūkā katrā rindā, kurā skaitļu summa ir negatīva, visu skaitļu zīmes jāmaina uz pretējām. Pēc šādām operācijām dažās kolonnās skaitļu summa var būt negatīva. Katrā tādā kolonnā, kurā skaitļu summa ir negatīva, mainīsim skaitļu zīmes uz pretējām. Kad tas būs izdarīts, nevienā kolonnā skaitļu summa nebūs negatīva, taču iespējams, ka dažās rindās summas būs kļuvušas negatīvas. Ja "izlabosim" šīs rindas, var gadīties, ka summas kļūs negatīvas dažās kolonnās. Kā garantēt, ka šādas maiņas nevajadzēs izdarīt bezgalīgi daudzas reizes, t.i., ka kādā solī iegūsim tabulu, kurā nebūs ne "negatīvu" rindu, ne "negatīvu" kolonnu?
Aplūkosim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Ar katru gājienu (mainot zīmes "negatīvā" rindā vai kolonnā) šī summa palielinās. Taču tabulā ierakstīto skaitļu summai var būt tikai galīgs skaits vērtību (jo katrs no n^2 ierakstītajiem skaitļiem tabulā var būt vai nu ar "+", vai ar "-" zīmi, tātad dažādo iespējamo kombināciju skaits ir galīgs). Bet lielums, kuram ir tikai galīgs skaits dažādu vērtību, nevar bezgalīgi daudzas reizes palielināties. Tātad pēc galīgā soļu skaita skaitļu summu vairs nevarēs palielināt. Šajā brīdī tabulā nebūs ne "negatīvu" rindu, ne "negatīvu" kolonnu - ja tādas atrastos, tad, mainot kādā no tām skaitļu zīmes, tabulā ierakstīto skaitļu summu varētu vēl palielināt.

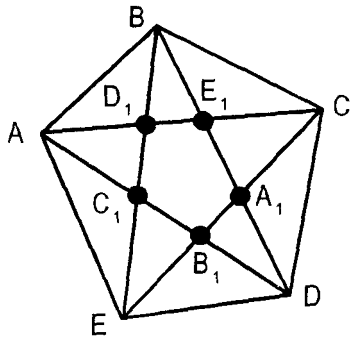
153. piemērs. Plaknē atzīmēti vairāki punkti. Daži no tiem ir zili, citi - sarkani. Daži punkti savā starpā savienoti ar taisnes nogriežņiem (punkts A ir savienots ar punktu B, ja ir novilkts nogrieznis AB). Punktu A sauc par sevišķu, ja vairāk nekā puse punktu, ar kuriem tas savienots, ir pretējā krāsā nekā pats punkts A. Ja plaknē ir kāds sevišķs punkts, tad vienu no tiem atļauts pārkrāsot pretējā krāsā. Ja pēc tam vēl ir kāds sevišķs punkts, tad šādu operāciju atļauts atkārtot, utt. Pierādīt, ka šāds process nevar turpināties bezgalīgi daudzas reizes, t.i., ka noteikti pēc galīga soļu skaita sevišķu punktu vairs nebūs.

Atrisinājums. Pārkrāsojot kādu sevišķu punktu, tas, protams, vairs nav sevišķs, taču daži no punktiem, ar kuriem tas savienots, šādas pārkrāsošanas dēļ var kļūt par sevišķiem punktiem. Tāpēc nevar apgalvot, ka sevišķo punktu skaits visu laiku samazinās.

Definēsim jaunu jēdzienu "sevišķs nogrieznis". Par sevišķu nogriezni sauksim tādu nogriezni, kura galapunkti ir dažādās krāsās. Kas notiek ar sevišķo nogriežņu skaitu, ja kādu sevišķu punktu pārkrāso? Viegli saprast, ka sevišķo nogriežņu skaits samazināsies; tie nogriežņi, kas iziet no punkta A un bija sevišķi, pēc pārkrāsošanas vairs tādi nav, bet tie nogriežņi, kas iziet no punkta A un nebija sevišķi, pēc pārkrāsošanas tādi kļūst. Otrā tipa nogriežņu ir mazāk, jo pirms pārkrāsošanas A bija sevišķs punkts; tātad kopējais sevišķo nogriežņu skaits samazinās. Tā kā šis skaits ir naturāls skaitlis vai 0, tad tas nevar samazināties bezgalīgi daudz reižu; tāpēc noteikti iestāsies tāds moments, kad to samazināt vairs nevarēs. Šajā brīdī vairs nebūs neviena sevišķa punkta - ja tāds būtu, tad, to pārkrāsojot, sevišķo nogriežņu skaitu varētu vēl samazināt.

154. piemērs. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Pierādīt, ka neeksistē regulārs piecstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka šādu piecstūri ABCDE izdevies uzzīmēt. Novilksim tā diagonāles un to krustpunktus apzīmēsim, kā redzams 193. zīmējumā.



193. zīm.

Regulārā piecstūrī katra mala ir paralēla diagonālei, kurai ar to nav kopēju punktu ($AB \| CE$ utt.). Tāpēc, piemēram, AE_1DE ir paralelograms (pat rombs). Tāpēc $\overrightarrow{AE_1} = \overrightarrow{ED}$. Tā kā vektors $\overrightarrow{ED}$ ir ar veselām koordinātām (pieņemot rūtiņas malas garumu par vienu vienību), tad, atliekot vektoru $\overrightarrow{AE_1}$ no rūtiņas virsotnes A, atkal iegūstam rūtiņas virsotni. Tātad E_1 (līdzīgi arī A_1, B_1, C_1, D_1) ir rūtiņu virsotnes.

Pagriežot regulāro piecstūri ABCDE ap tā centru par 72°, A pāriet par B, B par C,..., E par A. Tāpēc AC un BD pāriet attiecīgi par BD un CE; tātad arī AC un BD krustpunkts E_1 pāriet par BD un CE krustpunktu A_1. Līdzīgi A_1 pāriet parB_1 .....D_1 par E_1. Tātad, pagriežot piecstūri $A_1B_1C_1D_1E_1$ par 72° ap tā sākotnējā piecstūra centru, tas kļūst pats par sevi; tātad $A_1B_1C_1D_1E_1$ ir regulārs piecstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs.

Līdzīgi no šī piecstūra var iegūt tā iekšpusē esošu regulāru piecstūri, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, utt.

Šis process ir bezgalīgs. No otras puses, tas nevar būt bezgalīgs, jo katrā nākošajā regulārajā piecstūrī ir mazāk rūtiņu virsotņu nekā iepriekšējā, bet sākotnējā piecstūrī to ir galīgs skaits. Iegūtā pretruna parāda, ka sākotnējais piecstūris ABCDE nav bijis iespējams.

155. piemērs. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 + y^2 = 3^z$ nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka šāds atrisinājums eksistē. Viegli pārbaudīt, ka tad $z \geq 3$; tiešām, nav tādu naturālu skaitļu x un y, ka $x^2 + y^2 = 3$ vai $x^2 + y^2 = 9$.

Pārbaudīsim, kādus atlikumus var dot naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 3. Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kādu atlikumu dod a, dalot ar 3:

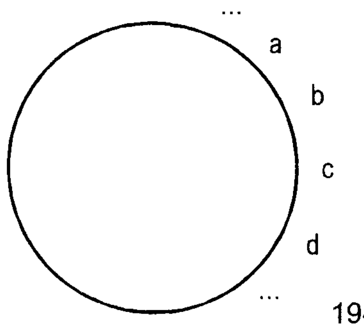
$$\text{ja } a = 3t, \text{ tad } a^2 = 9t^2 \equiv_3 0;$$
$$\text{ja } a = 3t + 1, \text{ tad } a^2 = 9t^2 + 6t + 1 \equiv_3 1;$$
$$\text{ja } a = 3t + 2, \text{ tad } a^2 = 9t^2 + 12t + 4 \equiv_3 1.$$

Tātad $x^2 + y^2$, dalot ar 3, var dot atlikumu 0; 1 vai 2, pie tam atlikums 0 iespējams tikai tad, ja gan x, gan y paši dalās ar 3. Bet 3^z dalās ar 3 ar atlikumu 0. Tāpēc $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ un, ievietojot šīs vērtības dotajā vienādojumā, iegūstam $x_1^2 + y_1^2 = 3^{z-2}$.

Skaidrs, ka saskaņā ar iepriekš pierādīto jābūt $z - 2 \geq 3$, līdzīgi spriežot, iegūstam $x_1=3x_2$, $y_1=3y_2$ un $x_2^2 + y_2^2 = 3^{z-4}$, utt. Šāds process turpinās bezgalīgi. Bet tā nevar būt, jo procesa gaitā mēs ik pa brīdim dalām kārtējo x_i vērtību ar 3, atkal iegūstot naturālu skaitli, taču šāda dalīšana var notikt ne vairāk kā tik reizes, cik reizes sākotnējā x vērtībā kā pirmreizinātājs ir pirmskaitlis 3. Iegūtā pretruna arī parāda vajadzīgo.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

241. Gar riņķa līniju uzrakstīti vairāki (galīgs skaits) dažādi skaitļi. Ja kādā vietā pēc kārtas uzrakstīti skaitļi a, b, c, d (194. zīm.) un $(a - d)(b - c) < 0$, tad skaitļus b un c drīkst mainīt vietām. Pierādīt, ka šādu operāciju izdosies izpildīt tikai galīgu skaitu reižu.



194. zīm.

242. Parlamentā katram deputātam ir ne vairāk kā 3 ienaidnieki. Pierādīt, ka deputātus var sadalīt divās palātās tā, lai katram deputātam viņa palātā būtu ne vairāk kā viens ienaidnieks.

243. Plaknē doti 2n punkti; nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Punkti kaut kā savienoti pa pāriem ar taisnes nogriežņiem; izveidojušies n savienotu punktu pāri. Ja nogriežņi AB un CD krustojas, atļauts tos nodzēst, bet vietā novilkt vai nu nogriežņus AC un BD, vai arī nogriežņus AD un BC. Pierādīt, ka šādu maiņu izdosies izpildīt tikai galīgu skaitu reižu.

244. Pa apli uzrakstīti n skaitļi, kuru summa ir pozitīva. Ja kādā vietā pēc kārtas uzrakstīti skaitļi x; y; z, pie tam $y < 0$, atļauts aizstāt x ar $x + y$, y ar $(-y)$ un z ar $y + z$. Pierādīt, ka, sākot no kāda brīža, negatīvu skaitļu uz apļa vairs nebūs. Aplūkot divus gadījumus:

a) uzrakstītie skaitļi ir veseli,

b) uzrakstītie skaitļi ir reāli.

245. Dots atsvaru komplekts, kurā ir 1995 atsvari. Katrs atsvars sver veselu skaitu gramu. Zināms, ka, izņemot no komplekta jebkuru atsvaru, atlikušos 1994 atsvarus var sadalīt divās kaudzes pa 997 atsvariem, kuru kopējās masas ir vienādas. Pierādīt, ka visu atsvaru masas ir vienādas.

246. Pa apli uzrakstīti 2^n veseli skaitļi. Ar vienu jaunu soli atļauts starp katriem diviem iepriekšējiem blakus esošajiem skaitļiem ierakstīt to aritmētisko vidējo, bet pēc tam visus iepriekšējos skaitļus nodzēst. Šādus gājienus atkārtojot līdz bezgalībai, visu laiku iegūst virknē tikai veselus skaitļus. Pierādīt, ka visi sākumā uzrakstītie skaitļi bija savā starpā vienādi.

247. Pa apli uzrakstīti 2^n veseli skaitļi. Ar jebkuru vienu soli atļauts starp katriem diviem iepriekšējiem blakus esošajiem skaitļiem ierakstīt to starpības moduli, bet pēc tam visus iepriekšējos skaitļus nodzēst. Šādus gājienus atkārto bezgalīgi ilgi. Pierādīt, ka kādreiz uz apļa paliks uzrakstītas tikai nulles.

248. Pierādīt, ka vienādojumiem un vienādojumu sistēmām nav atrisinājuma naturālos skaitļos:

a) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

c) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = z^2 \\ 2x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$

249. Plakne sadalīta kvadrātos kā rūtiņu lapa. Pierādīt, ka neeksistē regulārs n-stūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, ja $n \geq 7$.

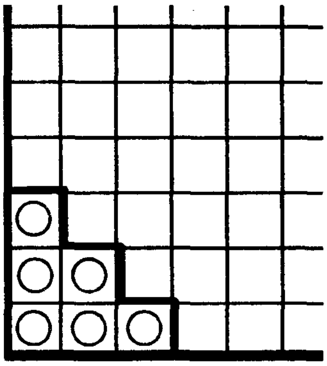
5. 3. Summas sadalīšana bezgalīgi daudzos saskaitāmajos

Aplūkosim piemēru.

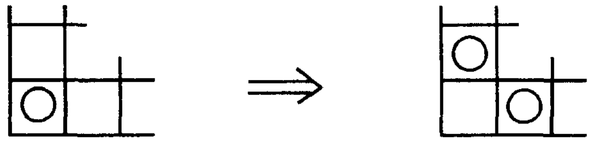
156. piemērs. *Dekarta koordinātu plaknes 1. kvadrants sadalīts vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Sešos stūra kvadrātiņos atrodas pa figūriņai (skat. 195. zīm.). Atļauts izdarīt šādus gājienus: ja kādā kvadrātiņā X atrodas figūriņa, bet tieši uz augšu un tieši pa labi no X*

esošie kvadrātiņi ir tukši, tad atļauts noņemt figūriņu no kvadrātiņa X un ievietot pa vienai figūriņai minētajos kvadrātiņos (skat. 196. zīm.).

Vai ar galīgu skaitu šādu gājienu var panākt, lai visi sākotnēji aizņemtie kvadrātiņi būtu tukši?



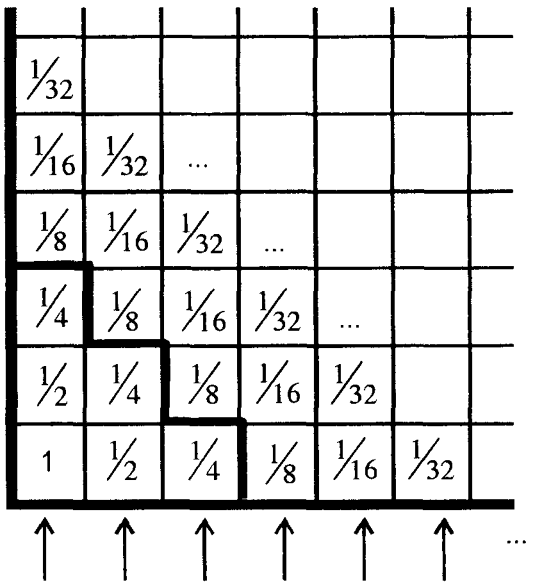
195. zīm.



196. zīm.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka tas nav izdarāms.

Piešķirsim rūtiņām vērtības, kā parādīts 197. zīmējumā; visām vienas lejupejošas diagonāles rūtiņām tās ir vienādas, bet katrā nākošajā diagonālē katras rūtiņas vērtība ir divas reizes mazāka nekā katras rūtiņas vērtība iepriekšējā diagonālē. Stūrī esošās rūtiņas vērtība ir 1.



197. zīm.

Ievērosim, ka sākumā aizpildīto rūtiņu vērtību summa ir $2\cdot\frac{3}{4}$. Atzīmēsim arī, ka katra gājiena rezultātā aizpildīto rūtiņu vērtību summa nemainās: atbrīvojot vienu rūtiņu ar vērtību $\frac{1}{2^n}$, tās vietā tiek aizpildītas divas rūtiņas, katra ar vērtību $\frac{1}{2^{n+1}}$, $\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$.

Aprēķināsim visu bezgalīgi daudzo sākumā neaizpildīto rūtiņu vērtību summu. Kreisajā kolonnā sākotnēji neaizpildīto rūtiņu vērtības veido bezgalīgi dilstošu ģeometrisku progresiju ar pirmo locekli $1/8$ un koeficientu $1/2$; to summa ir $\frac{1/8}{1-1/2}=1/4$. Tāda pati summa ir otrajā, trešajā un ceturtajā kolonnā, skaitot no kreisās puses. Viegli aprēķināt, ka piektajā kolonnā, skaitot no kreisās puses, sākotnēji neaizņemto rūtiņu vērtību summa ir $1/8$, sestajā tā ir $\frac{1}{16}$. utt. Tātad visa mūs interesējošā summa ir

$$4\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)=1+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{4}.$$

Atliek ievērot, ka $1\frac{1}{4}<2\frac{3}{4}$. Ja mums izdotos atbrīvot visas sākotnēji aizņemtās rūtiņas, tad šajā brīdī visas figūriņas izvietotos rūtiņās, kuras sākotnēji bija brīvas; tāpēc šajā brīdī visu aizņemto rūtiņu vērtību summa nevarētu pārsniegt $1\frac{1}{4}$. Bet saskaņā ar iepriekš pierādīto tai jābūt $2\frac{3}{4}$ (sākotnējā aizņemto rūtiņu vērtību summa gājienu rezultātā nemainās). Tā kā $1\frac{1}{4}<2\frac{3}{4}$, tad atbrīvot visas sākotnēji aizņemtās rūtiņas nav iespējams.

Kā redzams, mēs šeit izmantojām summu novērtēšanas metodi bezgalīgi daudzu saskaitāmo gadījumam. Pretruna tika iegūta šādi: novērtējot aizņemto rūtiņu vērtību summu vienā veidā (skaitot pa kolonnām), redzam, ka beigās tā nevar pārsniegt $1\frac{1}{4}$; novērtējot to citā veidā (skaitot pa figūriņām), redzam, ka tā ir $2\frac{3}{4}$.

Var rasties jautājums: vai arī bezgalīgi daudzu saskaitāmo gadījumā rezultātiem, kurus iegūst, saskaitot saskaitāmos dažādās secībās, noteikti jābūt vienādiem tāpat, kā tas ir galīga skaita saskaitāmo gadījumā. Precīzas atbildes uz šiem jautājumiem var iegūt matemātiskās analīzes kursā, kaut arī vispārīgākajā veidā jautājums vēl nav atrisināts. Mūsu mērķiem der šāds rezultāts: ja visu bezgalīgi daudzo saskaitāmo absolūto vērtību summa, aprēķināta kaut vienā veidā, ir galīgs skaitlis (tā tas bija mūsu gadījumā), tad pašu saskaitāmo summa arī būs galīgs skaitlis, pie tam viens un tas pats neatkarīgi no skaitīšanas kārtības.
Pārkāpjot šos nosacījumus, var nonākt pie kļūdainiem rezultātiem.

157. piemērs. "Pierādīsim", ka 0 = 1.

Atrisinājums. Plakni var pārklāt ar septiņstūriem tā, lai katrā vietā, kur ir kaut viena septiņstūra virsotne, tādas būtu tieši trīs (izdomājiet paši, kā).

Aprēķināsim visu sadalījuma leņķu lielumu vidējo vērtību divos dažādos veidos:

a) katra septiņstūra leņķu lielumu summa ir $\pi(7-2)=5\pi$. Tātad katra septiņstūra leņķu lielumu vidējā vērtība ir $\frac{5}{7}\pi$. Tā kā tas attiecas uz katru septiņstūri, tad pēc analoģijas ar teorēmām 1.4 nodaļā, arī visu leņķu lielumu vidējā vērtība ir $\frac{5}{7}\pi$;

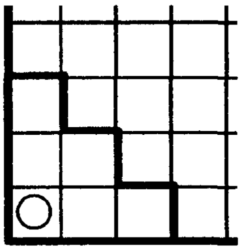
b) katrā punktā, kurā atrodas kaut viena septiņstūra virsotne, ir tieši trīs šādas virsotnes. Šo triju virsotņu leņķi kopā veido pilnu leņķi. Tātad katrā punktā leņķu lielumu vidējā vērtība ir $\frac{2}{3}\pi$. Tā kā tas attiecas uz katru punktu, tad pēc analoģijas ar teorēmām 1.4 nodaļā arī visu leņķu lielumu vidējā vērtība ir $\frac{2}{3}\pi$.

Esam aprēķinājuši vienu un to pašu lielumu divos dažādos veidos. Tāpēc $\frac{5}{7}\pi=\frac{2}{3}\pi$; pareizinot abas vienādības puses ar 21 un izdalot ar π, iegūstam 15 = 14; atņemot no abām pusēm 14, iegūstam 0 =1.

Kļūda slēpjas 1.4 nodaļas teorēmu lietošanā "pēc analoģijas". Lai šīs teorēmas pierādītu, vispirms jāvar aprēķināt visu atsevišķo lielumu summu; ja agrāk bija runa par galīgām vērtībām, tad šajā gadījumā summu vērtības ir bezgalīgi lielas, un parastā izpratnē runāt par vidējo vērtību (dalot bezgalīgi lielo summas vērtību ar bezgalīgo saskaitāmo skaitu) nevar.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

250. Pieņemsim, ka 156. piemērā visi pārējie nosacījumi saglabājas, bet sākotnēji aizpildīta tikai stūra rūtiņā (skat. 198. zīm).
Vai var panākt, lai ar kontūru apvilktajā apgabalā nebūtu nevienas figūriņas?

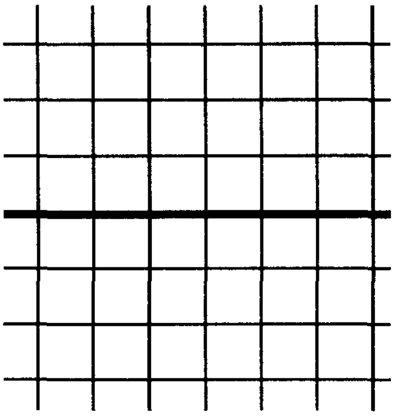


198. zīm.

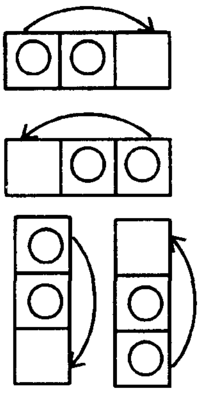
251. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Viena no horizontālajam taisnēm ir robeža (skat. 199. zīm.). Spēles sākumā rūtiņas virs robežas ir tukšas; katrā rūtiņā zem robežas var novietot vai nu vienu, vai nevienu figūriņu. Pēc tam, kad figūriņas novietotas, atļauts izdarīt šādus gājienus: ja divas figūriņas atrodas blakus (pa horizontāli vai vertikāli) rūtiņās A un B, bet rūtiņa C, kas atrodas blakus B tā, ka B ir tieši starp A un C, ir tukša, tad atļauts pārcelt figūriņu no A uz C, vienlaicīgi noņemot figūriņu no rūtiņas B (skat. 200. zīm.). 201. zīmējumā parādītas sākotnējās figūriņu konfigurācijas. Izmantojot tās, var nogādāt figūriņu pirmajā un otrajā horizontālē virs robežas.

A. Kāds ir mazākais figūriņu skaits sākotnējā konfigurācijā, kuru izmantojot, var nogādāt figūriņu trešajā un ceturtajā horizontālē virs robežas?

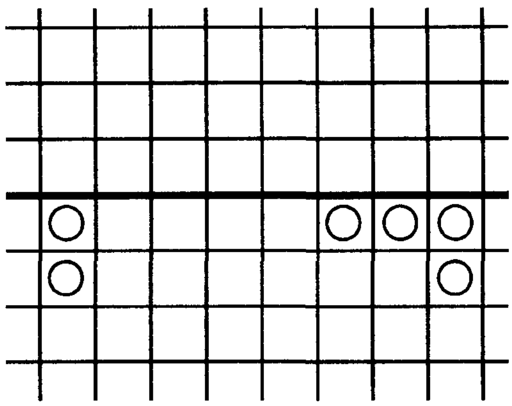
B. Pierādīt, ka nekāda sākotnējā figūriņu konfigurācija neļauj nogādāt figūriņu piektajā horizontālē virs robežas.



199. zīm.



200. zīm.



201. zīm.

5. 4. Nogriežņa projekcijas integrālā vidējā vērtība

Aplūkosim vidējās vērtības metodes lietojumu dažu kombinatoriskās ģeometrijas uzdevumu risināšanā.

Principiāli jauns, salīdzinājumā ar iepriekšējiem piemēriem, šeit būs pats vidējās vērtības ieviešanas paņēmiens. Sāksim ar vienkāršāku piemēru.

158. piemērs. *Kvadrāta malas garums ir viena vienība. Kvadrāta iekšpusē atrodas vairākas riņķa līnijas, kuru garumu summa ir 10. Pierādīt, ka var novilkt kādai kvadrāta malai paralēlu taisni, kurai ir kopīgi punkti ar vismaz četrām riņķa līnijām.*

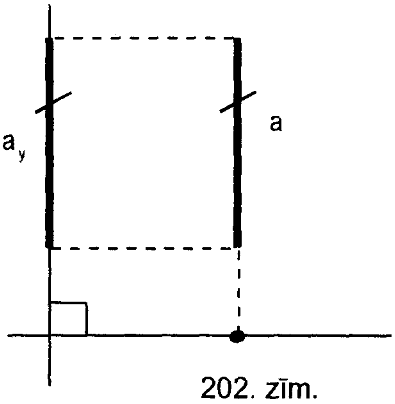
Atrisinājums. Rīkojamies līdzīgi kā 120. lpp. apskatītajā piemērā. Projicējam visas riņķa līnijas uz vienas kvadrāta malas. Projekciju garumu summa vienāda ar diametru summu; tātad tā ir $10/\pi=3,1\ \ldots > 3$. Tātad vismaz vienā punktā projicējas vairāk nekā 3 (tātad vismaz 4) riņķa līnijas. Caur šo punktu velkam taisni perpendikulāri kvadrāta malai, uz kuras tika projicētas riņķa līnijas; šī taisne var būt meklējamā. Ievērosim, ka mēs iztikām ar projekciju uz vienas kvadrāta malas (jeb varētu arī sacīt - uz vienas ass).

<u>159. piemērs</u>. *Kvadrāta malas garums ir viena vienība. Kvadrāta iekšpusē atrodas vairāki nogriežņi, kuru garumu summa ir 5. Pierādīt, ka var atrast taisni, kas paralēla kādai (vienalga kurai) kvadrāta malai un krusto vismaz 3 nogriežņus.*

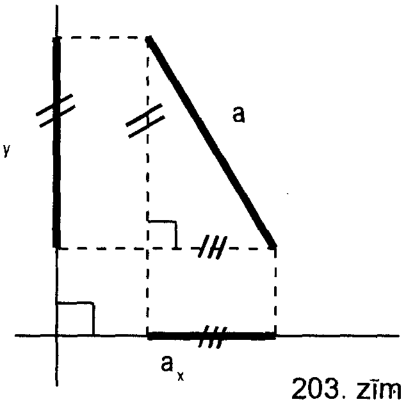
<u>Atrisinājums.</u> Ja mēs rīkosimies kā iepriekš, piedzīvosim neveiksmi. Tiešām, iedomāsimies, ka mēs projicējam visus nogriežņus uz kvadrāta ABCD malas AB.

Tā kā var gadīties, ka visi nogriežņi ir perpendikulāri AB, tad projekcijas ne tikai trīs, bet pat vienu reizi nepārklās AB, un vajadzīgo taisni atrast nevarēsim. Nepalīdz arī projicēšana uz malas BC, jo tikpat labi var gadīties, ka visi nogriežņi ir perpendikulāri BC. Tātad ar projicēšanu uz vienas ass mēs uzdevumu atrisināt neprotam. Kā būtu, ja mēs mēģinātu apskatīt projekcijas uz abām asīm vienlaicīgi?

Ja nogriežņa garums ir a, tad tā projekcijas garumu summa uz divām savstarpēji perpendikulārām asīm ir a (ja nogrieznis paralēls vienai no šīm asīm, 202. zīm.) vai lielāks par a (ja nogrieznis nav paralēls vienai no šīm asīm, 203. zīm.).



202. zīm.



203. zīm.

Tāpēc, projicējot visus nogriežņus uz divām savstarpēji perpendikulārām kvadrāta malām, projekciju garumu summa nav mazāka par 5. Tāpēc vismaz uz vienas no šīm malām (mēs nezinām, uz kuras) projekciju garumu summa nav mazāka par 2,5. Tāpēc kādu no šīs malas punktiem Q pārklāj vismaz trīs projekcijas. Taisne, kas iet caur Q perpendikulāri atbilstošajai malai, ir meklējamā. Ievērosim, ka mēs iztikām ar projekcijām uz divām savstarpēji perpendikulārām asīm.

<u>160. piemērs.</u> *Riņķī, kura rādiusa garums ir 1, atrodas galīgs skaits nogriežņu, kuru garumu summa ir 32. Pierādīt, ka eksistē taisne, kurai ir kopīgi punkti ar*

a) vismaz 8 nogriežņiem,

b) vismaz 9 nogriežņiem,

c) vismaz 11 nogriežņiem.

<u>Atrisinājums.</u> a) atrisinājumu iegūstam gluži tāpat kā iepriekšējā piemērā, projicējot visus nogriežņus uz diviem savstarpēji perpendikulāriem diametriem (to garumu summa ir 4, un *32/4*=8). Izdariet to patstāvīgi! Ievērojiet, ka mēs izmantojam projekcijas uz divām asīm!

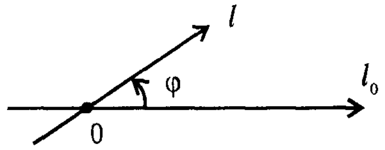
b) atrisinājumam ar šo piemēru nepietiek; var gadīties, ka katrs nogrieznis ir paralēls vienai no mūsu izvēlētajām asīm, un tad projekciju garumu summa ir tieši 32; formāli ņemot, projekcijas ar garumu summu 32 var pārklāt divus nogriežņus ar kopējo garumu 4, katru punktu pārklājot tieši 8 reizes. Tomēr šajā gadījumā apskatīsim vēl divas citas savstarpēji perpendikulāras asis; šīm asīm nogriežņi <u>nav</u> paralēli, tāpēc projekciju garumu summa uz tām ir <u>lielāka par 32.</u> Tā kā arī šīs projekcijas izvietojās divos nogriežņos ar garumu summu 4, tad atradīsies punkts, kuru pārklāj vismaz 9 projekcijas; caur to arī var novilkt meklējamo taisni.

Ievērosim, ka b) punkta risinājumā izmantojām projekcijas uz četrām asīm, t.i., vairāk nekā a) punkta risinājumā; iegūtais rezultāts toties bija pārliecinošāks.

c) punkta risinājumam nepietiek arī ar četrām asīm.

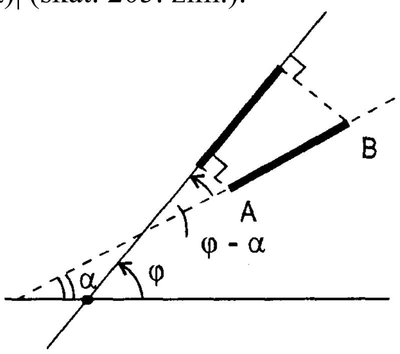
Izdarīsim vērienīgu darbību - apskatīsim projekcijas uzreiz uz bezgalīgi daudzām asīm un pamēģināsim ieviest to vidējās vērtības jēdzienu.

Apskatīsim vienu punktu O un fiksēsim asi l_0, kas iet caur šo punktu. Katru citu asi l caur punktu O var raksturot ar leņķi φ starp l_0 un l (skat. 204. zīm.); acīmredzot, $0 \le \varphi \le 2\pi$.



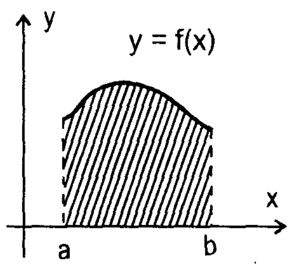
204. zīm.

Ja nogrieznis AB veido ar asi l_0 leņķi α, tad tā projekcijas garums uz ass l (apzīmēsim to ar $proj_l(AB)$) ir $|AB\cos(\varphi - \alpha)|$ (skat. 205. zīm.).



205. zīm.

Atcerēsimies, kā matemātiskajā analīzē ievieš nepārtrauktas funkcijas f(x) vidējo vērtību intervālā (a; b); par to pieņem lielumu $V(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Ja apskatāmajā intervālā $f(x) \ge 0$, tad $\int_a^b f(x)dx$ izsaka laukumu, kuru ierobežo Ox ass, f(x) grafiks un taisnes x = a un x = b (skat. 206. zīm.); tad vidējās vērtības nosaukums šādam lielumam ir uzskatāmi attaisnots - tas ir tādas konstantas funkcijas vērtība, kura intervālā (a, b) norobežo tikpat lielu laukumu kā f(x).



206. zīm.

No integrāļa īpašībām izriet divi secinājumi:
1) $V(k \cdot f) = k \cdot V(f)$, ja k - konstante,
2) $V(f+g) = V(f) + V(g)$.

Pēc analoģijas ar šo vispārīgo likumu pasludināsim par nogriežņa AB projekcijas vidējo vērtību lielumu $V(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} proj_l(AB)d\varphi$.

Teorēma. $\mathbf{V(AB) = \frac{2 \cdot AB}{\pi}}$.

Pierādījums. Tā kā $[0; 2\pi]$ ir funkcijas $|AB\cos(\alpha - \varphi)|$ perioda intervāls, tad $V(AB) = \frac{1}{2\pi}$.

$$\int_0^{2\pi}|AB\cos\varphi|d\varphi = \frac{AB}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}|\cos\varphi|d\varphi = \frac{4AB}{2\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = \frac{2AB}{\pi}.$$

Tātad nogriežņa projekcijas vidējā vērtība atkarīga tikai no nogriežņa garuma un ir proporcionāla tam. Tāpēc varam runāt par "garuma projekcijas vidējo vērtību", un tai piemīt minētā aditīvā īpašība: $V(AB + CD) = V(AB) + V(CD) = 2\cdot\frac{AB+CD}{\pi}$.

Nepārtrauktas funkcijas f(x) vidējai vērtībai intervālā [a, b] piemīt šāda īpašība:

3) intervālā AB eksistē tāds punkts C, ka f(C) =V(f).

Šīs īpašības pareizība izriet no augšminētās ģeometriskās interpretācijas; acīmredzot V(f) atrodas starp f lielāko un mazāko vērtību intervālā [a, b], bet nepārtraukta funkcija pieņem visas vērtības, kas atrodas starp tās mazāko un lielāko vērtību, tātad arī vērtību V(f).

Tagad mēs varam atrisināt c) gadījumu. Apskatīsim visu nogriežņu projekciju garumu summu uz katras ass, kas iet caur vienu fiksētu punktu, un aprēķināsim tās vidējo vērtību. Šī vidējā vērtība ir

$$V(a_1 + a_2 + ... + a_n) = v(a_1) + v(a_2) + ... + v(a_n) = \frac{2}{\pi}\cdot a_1 + \frac{2}{\pi}\cdot a_2 + ... + \frac{2}{\pi}\cdot a_n = \frac{2}{\pi}(a_1 + a_2 + ... + a_n) =$$
$$= \frac{64}{\pi} = 20{,}3... .$$

Eksistē ass, uz kuras projekciju garumu summa ir tieši 64/π= 20,3.... Šīs projekcijas izvietojas diametrā, kura garums ir 2. Tā kā 20,3... > 2·10, tad eksistē diametra punkts, kuru pārklāj vismaz 11 projekcijas. Caur šo punktu velkam taisni perpendikulāri apskatītajam diametram; tā der par meklēto. Uzdevums atrisināts.

Komentārs. Iegūtais rezultāts ir labākais iespējamais. Parādīsim, kā izvietot tādu nogriežņu sistēmu ar garumu summu 32, ka nevienai taisnei nav kopīgi punkti ar vairāk nekā 11 šīs sistēmas nogriežņiem. Ievērosim, ka riņķa līnijas garums ir π·2 = 6,28.... Izvēloties pietiekami īsus nogriežņu garumus, mēs varam riņķa līnijā ievilkt piecus daudzstūrus, kuru perimetri ir 6,28; to perimetru summa ir 5·6,28 = 31,4. Riņķa iekšpusē iezīmēsim vēl vienu nogriezni, kura garums ir 0,6. Esam konstruējuši nogriežņu sistēmu, kuras garumu summa ir 32. Katrai taisnei ir kopīgi punkti ar ne vairāk kā diviem nogriežņiem katra daudzstūra kontūrā un varbūt vēl ar "papildnogriezni", tātad kopā ar ne vairāk kā 11 nogriežņiem.

Vai var ieviest jēdzienu par nogriežņa projekcijas vidējo vērtību uz visām iespējamām asīm, kas iet caur fiksētu punktu telpā? Acīmredzot, jā; nepieciešams tikai, lai mūsu rīcībā būtu noteiktā integrāļa jēdziens tādā apgabalā, kas ļauj attēlot katru iespējamo asi gluži tāpat, kā katru iespējamu asi plaknē (kuru raksturo leņķis φ) attēlo ar punktu intervālā. Uzdevumu risinājumiem būtu ļoti lietderīgi, ja šim integrāļa jēdzienam būtu spēkā 1. - 3. īpašība, kas minētas iepriekšējā piemēra risinājumā, kā arī teorēma par to, ka ieviestā vidējā vērtība ir proporcionāla nogriežņa garumam.

Lasītājam, kas pazīstams ar virsmas integrāļiem, ir skaidrs, ka šādu vidējo vērtību var ieviest kā $V(AB) = \frac{1}{4\pi}\iint_S proj_l(AB)d\varphi$, kur apskatām sfērisko integrāli pa vienības sfēru ar centru punktā O, bet $proj_l AB$ ir nogriežņa AB projekcijas garums uz ass l, kas iet caur punktu O un krusto vienības sfēru atbilstošajā punktā. Lasītājam, kam zināšanu vēl nav, piedāvājam bez pierādījuma pieņemt vairākus faktus.

Katram telpas nogrieznim AB var ieviest tā projekcijas vidējo vērtību uz visām asīm, kas iet caur fiksētu punktu O. Šī vidējā vērtība atkarīga tikai no AB garuma un ir proporcionāla tam ar kādu pozitīvu proporcionalitātes koeficientu k: V(AB) = k·AB. Tāpēc nogriežņu projekciju summas vidējā vērtība ir vienāda ar atsevišķo nogriežņu

projekciju vidējo vērtību summu. Eksistē ass, uz kuras projekciju summa ir vienāda ar tās vidējo vērtību.

Parādīsim, kā šos faktus var izmantot uzdevumu risināšanā.

161. piemērs. *Pierādīt, ka telpas vektoriem pastāv nevienādība* $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$, *neatsaucoties uz trijstūra nevienādību.*

Atrisinājums. Apskatīsim vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ projekcijas uz patvaļīgas ass l caur fiksētu punktu O; šīs projekcijas ir skaitļi a un b. Vektora $\vec{a}+\vec{b}$ projekcija uz šīs pašas ass ir skaitlis a + b. Nevienādība $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ skaitļiem pazīstama no skolas kursa. Ja $\vec{a}+\vec{b}$ projekcija uz katras ass nepārsniedz $\vec{a}$ un $\vec{b}$ projekciju summu, tad arī projekcijas vidējā vērtība $k\cdot|\vec{a}+\vec{b}|$ nepārsniedz $\vec{a}$ un $\vec{b}$ projekciju vidējo vērtību summu, tātad $k\cdot|\vec{a}+\vec{b}|\le k\cdot|\vec{a}|+k\cdot|\vec{b}|$. Saīsinot ar pozitīvo koeficientu k, iegūstam vajadzīgo.

Pārdomājot šī piemēra risinājumu, secinām, ka ir spēkā šāds vispārīgs princips (cik mums zināms, atklātā formā pirmais to formulējis A. Bērziņš):

lai pierādītu identisku lineāru nevienādību starp telpisku vektoru garumiem, pietiek pierādīt atbilstošu nevienādību reālu skaitļu moduļiem.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

252. Izliekts daudzstūris atrodas otra daudzstūra iekšpusē. Pierādīt, ka pirmā daudzstūra perimetrs nepārsniedz otrā daudzstūra perimetru.
253. Vairāku plaknes vektoru garumu summa ir π. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažādus vektorus, kuru summas garums nav mazāks par 1.
254. Izliektā daudzstūrī neviena mala un neviena diagonāle nav garāka par 1. Pierādīt, ka tā perimetrs ir mazāks par π.
255. Projicējot izliektu slēgtu līniju uz jebkuras taisnes, iegūst nogriezni, kura garums ir 1. Pierādīt, ka līnijas garums ir π.
256. Viena trijstūra piramīda atrodas otras piramīdas iekšpusē. Pierādīt, ka iekšējās piramīdas šķautņu garumu summa nav garāka par 4/3 no ārējās piramīdas šķautņu garumu summas.
(Piezīme: uzdevuma apgalvojums nav triviāls: iekšējās piramīdas šķautņu garumu summas attiecība pret ārējās piramīdas šķautņu garumu summu var būt neierobežoti tuva skaitlim 4/3. Pacentieties konstruēt atbilstošos piemērus!)
257. Pieņemsim, ka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir paralēlskaldnis ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, ABCD ir skaldne). Pierādīt, ka $AA_1 + AB + AD + AC_1 > AB_1 + AD_1 + AC$.

5. 5. Dažādas bezgalības izpratnes un to salīdzināšana

Visi līdzšinējie Dirihlē principa un vidējās vērtības metodes lietojumi attiecās uz vienā vai otrā izpratnē galīgām kopām. Pats Dirihlē princips variantos **D_1** un **D_2** izrietēja no galīgu kopu elementu salīdzināšanas; pat tajos gadījumos, kad pētījām bezgalīgas kopas, tām eksistēja kaut kādi galīgi raksturojumi (galīgs krāsu skaits, kurās nokrāsotas grafa šķautnes; galīga summa, kuru iegūst, saskaitot skaitļus I kvadranta rūtiņās; funkcijas galīga vidējā vērtība).

Tagad aplūkosim spriedumus par "lielām" un "mazām" kopām (atcerieties: šo jēdzienu analīze būtībā arī ir vidējās vērtības metodes pamatā) gadījumā, kad tās ir principiāli bezgalīgas: neizmantosim nekādus šo kopu galīgus raksturlielumus.

5. 5. 1. Kā var salīdzināt neskaitot

Ja mums jānoskaidro, vai dejas zālē atrodas vairāk zēnu vai meiteņu, tad viens no paņēmieniem var būt tāds: izskaitām, cik ir zēnu, cik ir meiteņu, un salīdzinām abus iegūtos skaitļus. Šajā gadījumā aprakstītais paņēmiens vienmēr novedīs pie mērķa; parasti mēs iedomājamies, ka tas noved pie mērķa jebkurā gadījumā, kad jāsalīdzina 2 galīgas kopas - kurā no tām vairāk elementu. (To iedomājoties, mēs aizmirstam, ka praktiski cilvēkam nav iespējams saskaitīt, cik, piemēram, ūdens molekulu ir Zemes atmosfērā.) Tātad, pieņemot, ka jebkurā galīgā kopā mēs praktiski varam atrast tās elementu skaitu, mums ir paņēmiens, kā par jebkurām 2 galīgām kopām pasacīt, vai tajās elementu daudzums ir vienāds, un, ja nē, tad kurā kopā elementu ir vairāk.

Lai lietotu šādu paņēmienu, pilnībā ir jāpārvalda naturāla skaitļa jēdziens. Bez tam jāprot salīdzināt pēc lieluma jebkuri 2 naturāli skaitļi. Tiešām, ja mūsu rīcībā nav jēdziena par naturālu skaitli vai ja mēs neapzināmies, ka naturāli skaitļi var būt neierobežoti lieli, tad mums var rasties šaubas, vai jebkurā galīgā kopā var atrast naturālu skaitli, kas izsaka tās elementu skaitu. Tātad apskatītā metode galīgu kopu elementu daudzumu salīdzināšanai (mēs sacīsim arī - galīgu kopu salīdzināšanai pēc to apjoma) prasa jau samērā attīstītus matemātiskus jēdzienus.

Tomēr mūsu rīcībā ir paņēmiens, kas ļauj atrisināt šo uzdevumu bez naturālo skaitļu izmantošanas. Demonstrēsim to piemērā ar dejas zāli - lūgsim orķestri sākt spēlēt valsi. Tad katrs zēns uzaicinās meiteni (arī tā, diemžēl, ir abstrakcija, tomēr pieņemsim, ka neviens nepaliks, drūzmējoties pie zāles durvīm), un tad pats par sevi noskaidrosies, vai zēnu un meiteņu skaits ir vienāds, vai arī zēnu ir vairāk, vai arī meiteņu ir vairāk.

Kāda ir šī paņēmiena būtība? Mēs apvienojam pa pāriem elementus no vienas kopas ar elementiem no otras kopas. Šādu apvienošanu izdarām tik ilgi, kamēr pietrūkst vai nu vienas, vai otras kopas elementu. Ja abu kopu elementu pietrūkst vienlaicīgi, tad tajās ir vienāds skaits elementu; ja vienā kopā elementu pietrūkst ātrāk, tad tās elementu skaits ir mazāks nekā otras kopas elementu skaits.

Ņemsim vērā, ka noteikti vajadzīgs, lai mēs apvienotu pāros pa vienam elementam no katras kopas. Ja orķestris sāks spēlēt "Sudmaliņas" un dažās četru cilvēku grupās būs trīs zēni un viena meitene, bet citās - otrādi, tad, kaut arī malā nepaliks neviens zēns un neviena meitene, mēs nevarēsim apgalvot, ka zēnu un meiteņu zālē ir vienāds skaits.

Šāds paņēmiens tika lietots jau ilgi pirms naturāla skaitļa jēdziena rašanās. Pieņemsim, ka kāda pirmatnējā cilts vāc uzturam putnu olas, un ir noskaidrots, ka katram cilvēkam vajadzīga 1 ola. Kā vakarā noskaidrot, vai olu ir pietiekami? (Mazie bērni un sirmgalvji vākšanā nav piedalījušies.) Skaidrs, ka visvienkāršākais paņēmiens ir nolikt katram priekšā pa olai. Ja kāds paliek bez olas, tad vākšana jāturpina; turpretī, ja katram iznāk pa olai vai arī tās paliek pāri, tad darbu var pārtraukt.

Līdzīgi pirmatnējie cilvēki rīkojās tad, kad vajadzēja noskaidrot, vai svešā ciltī ir vairāk vīriešu nekā viņu ciltī - no tā bija atkarīgas attiecības ar svešiniekiem, un daudzos citos gadījumos. Pamazām izveidojās dabiskie etaloni - kopas, ar kurām salīdzināja citas, vēl nepazīstamas kopas. Šādi etaloni bija Mēness (kopām, kas sastāv no 1 elementa), acis (kopām, kas sastāv no 2 elementiem), roka (kopām, kas sastāv no 5 elementiem) utt. Piemēram, izteiciens "viņu bija roka un vēlreiz roka" apzīmēja, ka svešinieku bijis tik daudz, ka uz katru no 2 roku pirkstiem iznācis pa vienam.

Un tikai pēc gadu tūkstošiem, kad aizvien vairāk un vairāk nācās skaitīt dažādus priekšmetus un paziņot to skaitu citiem, izveidojās jēdziens par naturālu skaitli un radās speciāli apzīmējumi dažādiem skaitļiem: "viens", "divi" utt.

Jāatzīmē, ka visu naturālo skaitļu apzīmējumi neradās uzreiz. Daudzām mūsu dienās dzīvojošām ciltīm, kas atrodas uz zema attīstības līmeņa, vēl šodien skaitīšana ir apmēram šāda: viens, divi, daudz. Tas norāda, ka šo cilšu locekļi neatšķir vienu no otras galīgas kopas, kurās ir vairāk kā 2 elementi, bet apzīmē to elementu skaitu ar vienu vārdu "daudz". Arī eiropieši nebūt ne tik sen nonāca pie mūsdienu uzskatiem par naturālu skaitļu neierobežotu virkni; vēl 3.gs.p.m.ē. Arhimēds sarakstīja speciālu traktātu "par smilšu graudiņu skaitīšanu", kurā pierādīja, ka eksistē arī tādi naturāli skaitļi, kas ir lielāki par smilšu graudiņu skaitu, kāds novietojas sfērā, kuras rādiuss ir vienāds ar attālumu no Zemes līdz Saulei. Tātad tāda iespēja toreiz vēl netika uzskatīta par acīmredzamu.

Tikai pamazām matemātiķi nonāca pie neierobežotas naturālo skaitļu virknes 1, 2, 3,..., kurā aiz katra naturāla skaitļa seko nākamais skaitlis un katrs atsevišķais naturālais skaitlis ir galīgs, bet pašu naturālo skaitļu ir bezgalīgi daudz. Katrs naturālais skaitlis ir elementu daudzuma apzīmējums grupai galīgu kopu; piemēram, ar 7 var apzīmēt gan nedēļas dienu skaitu, gan Lielā Lāča zvaigznāja zvaigžņu skaitu, gan daudz ko citu. Ko nozīmē teiciens "naturālo skaitļu ir bezgalīgi daudz"? To, ka naturālo skaitļu kopas elementu daudzumu nevar izteikt ne ar kādu naturālu skaitli, ka visus naturālos skaitļus nevar apvienot pāros ne ar kādas galīgas kopas elementiem. Tāda pati jēga ir izteicieniem "punktu plaknē ir bezgalīgi daudz", "riņķa līniju telpā ir bezgalīgi daudz" utt. Salīdzināsim divas situācijas. Dažas visatpalikušākās ciltis skaita "viens, divi, daudz", uzskatīdamas, ka tās kopas, kurās ir vairāk nekā 2 dažādi elementi, nav atšķiramas viena no otras pēc elementu daudzuma tajās. Mēs zinām, ka šādas kopas ir šķirojamas - piemēram, nevar apvienot pāros Lielā Lāča zvaigznes ar cilvēka kreisās rokas pirkstiem tā, lai katrā pāri būtu 1 zvaigzne un viens pirksts un neviena zvaigzne un neviens pirksts nebūtu divos pāros. Tātad starp Lielā Lāča zvaigžņu kopu un rokas pirkstu kopu elementu daudzuma ziņā pastāv būtiskas atšķirības.

Vairums mūsdienu cilvēku atzīst naturālos skaitļus. Tomēr par tādām kopām, kurās elementu daudzums netiek izteikts ar galīgu skaitli - piemēram, jau minētā plaknes punktu kopa, naturālu skaitļu kopa utt. - gandrīz visi saka "tajās ir bezgalīgi daudz elementu", sīkākā analīzē neiedziļinoties. Vai jums neliekas, ka šāda pieeja zināmā nozīmē sasaucas ar iepriekš aplūkoto? Un, ja nu izrādās, ka "bezgalīgi daudz" arī sevī ietver dažādas iespējas, tāpat kā dažādas iespējas ietver pirmatnējo cilšu "daudz"?

Lai atbildētu uz šo jautājumu, mums jāizvēlas nostāja, saskaņā ar kuru mēs nospriedīsim, vai 2 bezgalīgas kopas elementu daudzuma ziņā atšķiras vai nē. Ja atbalstīsim sākumā minēto nostādni - kopas salīdzināt pēc to elementu skaita, tad nekur netiksim, jo bezgalīgām kopām nav naturālo skaitļu, kas izteiktu to elementu daudzumu - tieši tāpēc tās ir bezgalīgas. Toties jo plašas iespējas paveras, izmantojot tālāk apskatīto paņēmienu - kopu elementu apvienošanu pa pāriem. Kā jau redzējām, šāda pieeja neizmanto naturāla skaitļa jēdzienu, tātad ir piemērojama arī bezgalīgām kopām. Bezgalīgo kopu pētīšanā to pirmais piemēroja izcilais vācu matemātiķis Georgs Kantors (1845-1918).

5. 5. 2. Bezgalīgu kopu ekvivalence

Galīgu kopu gadījumā varējām runāt par to, ko nozīmē, ka divām kopām ir vienāds elementu skaits; katras kopas elementu daudzumu varēja izsacīt ar naturālu skaitli. Bezgalīgu kopu gadījumā vārdiem "elementu skaits" nav jēgas, jo nav naturāla skaitļa, kas izsacītu to elementu daudzumu; ar naturāliem skaitļiem var izsacīt tikai galīgu daudzumu. Tāpēc bezgalīgām kopām vajadzīgs cits jēdziens.

Definīcija. Divas kopas sauc par ekvivalentām kopām, ja to elementus var apvienot pa pāriem tā, ka katrā pārī ieiet pa vienam elementam no katras kopas un neviens elements nepaliek ārpus pāriem, bet ieiet tieši vienā pāri (ne vairāk un ne mazāk!). Sacīsim, ka starp šo kopu elementiem nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība.
Ievērosim, ka šī definīcija dota gan galīgām, gan bezgalīgām kopām.

162. piemērs. Kreisās rokas pirkstu kopa ir ekvivalenta ar labās rokas pirkstu kopu. Tiešām, mēs varam "apvienot" pirkstus pa pāriem šādi:

kreisās rokas īkšķis - labās rokas īkšķis,
kreisās rokas rādītājpirksts - labās rokas rādītājpirksts,
kreisās rokas vidējais pirksts - labās rokas vidējais pirksts,
kreisās rokas ceturtais pirksts - labās rokas ceturtais pirksts,
kreisās rokas mazais pirkstiņš - labās rokas mazais pirkstiņš.
Viegli pārliecināties, ka definīcijas prasības izpildītas.

163. piemērs. Naturālo skaitļu kopa no 1 līdz 10 ekvivalenta ar naturālo skaitļu kopu no 11 līdz 20. Apvienojums pāros parādīts shēmā.

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20
\end{array}$$

Skaitļus varēja apvienot pāros arī citādi:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11
\end{array}$$

Abos gadījumos izpildītas visas definīcijas prasības.

164. piemērs. Darbojošos universitāšu kopa ir ekvivalenta ar darbojošos universitāšu rektoru kopu.

Veidojam pārus šādā ceļā: vienā pārī apvienojam universitāti un tās rektoru. Skaidrs, ka pāri nepaliks neviens universitātes rektors un neviena universitāte, un katrs no viņiem būs iekļauts vienā pārī.

Viegli redzēt, ka galīgu kopu gadījumā divas kopas ir ekvivalentas tad un tikai tad, ja tajās ir vienāds elementu skaits. Tātad mūsu kopu ekvivalences jēdziens vispārina jēdzienu par divu kopu elementu skaita vienādību.

165. piemērs. Visu naturālo skaitļu kopa ir ekvivalenta ar visu negatīvo veselo skaitļu kopu. Apvienojums pāros parādīts shēmā.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
-1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 & -11 & \dots
\end{array}$$

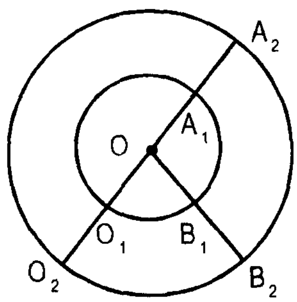
Apvienojot naturālu skaitli k pārī ar veselu negatīvu skaitli -k, mēs izpildām visas definīcijas prasības: gan katrs naturāls, gan katrs vesels negatīvs skaitlis ir iekļauts vienā un tikai vienā pārī, un katrā pārī ir viens naturāls un viens vesels negatīvs skaitlis.

Šajā vietā ir ieteicams apstāties un salīdzināt šo gadījumu ar galīgo kopu gadījumu. Ievērosim, ka mēs būtu varējuši apvienot skaitļus pāros arī šādi:

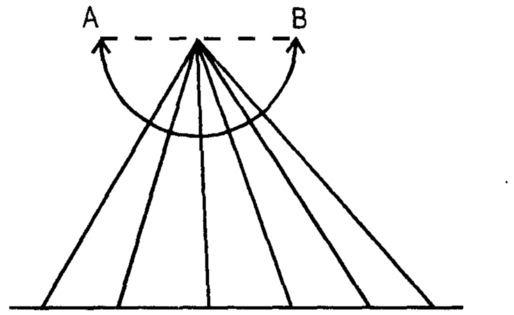
$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
-1 & & -2 & & -3 & & -4 & & -5 & & -6 & \dots
\end{array}$$

Šādi apvienojot, katrā pārī būtu viens naturāls un viens vesels negatīvs skaitlis, katrs negatīvais skaitlis būtu tieši vienā pāri, katrs naturālais skaitlis būtu ne vairāk kā vienā pārī, bet ne katrs naturāls skaitlis būtu kādā pārī: bezgalīgi daudzi naturāli skaitļi nav apvienoti pārī ne ar kādiem veseliem negatīviem skaitļiem. Mēs tātad esam nodibinājuši savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp nepāra naturāliem skaitļiem un veseliem negatīviem skaitļiem. Galīgu kopu gadījumā nekas tāds nav iespējams: ja starp kopu A un B elementiem nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība, tad nevar nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp kopas A elementiem un daļu no kopas B elementiem, ja vien šī daļa nesakrīt ar pašu kopu B: pretējā gadījumā kopas A elementu skaits būtu vienāds gan ar kopas B elementu skaitu, gan ar kopas B kādas daļas elementu skaitu, bet tas nav iespējams.

166. piemērs. To punktu kopa, kas atrodas uz riņķa līnijas, kuras rādiuss ir 1 cm, ir ekvivalenta ar to punktu kopu, kas atrodas uz riņķa līnijas, kuras rādiuss ir 2 cm.
Novietojam abas riņķa līnijas tā, lai to centri sakristu.
Apvienojumu pāros ilustrē 207. zīmējums. Pārī apvienojam divus punktus, kas atrodas uz viena lielākās riņķa līnijas rādiusa.



207. zīm.



208. zīm.

167. piemērs. To punktu kopa, kas atrodas starp nogriežņa galapunktiem, ir ekvivalenta ar visas taisnes punktu kopu. "Salocīsim" šo nogriezni tā, lai tas izveidotu pusriņķa līniju. Mums jānodibina savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp šī salocītā nogriežņa iekšējiem punktiem (t.i., visiem tā punktiem, izņemot galapunktus) un kādas taisnes punktiem. Novietojam "salocīto" nogriezni tā, lai tā veidotās pusriņķa līnijas diametrs AB būtu paralēls dotajai taisnei.

Kā nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību, kļūst skaidrs, aplūkojot 208. zīmējumu. Jāatceras tikai, ka punktiem A un B nav vajadzīgi atbilstošie punkti uz taisnes - tie ir nogriežņa galapunkti, bet mēs interesējamies tikai par iekšējiem punktiem.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

258. $A_1A_2...A_{100}$ ir regulārs 100 - stūris. Aplūkosim visus izliektos daudzstūrus, kuru virsotnes atrodas dažos no punktiem $A_1, A_2, ..., A_{100}$ Pierādīt, ka to daudzstūru, kuriem viena no virsotnēm ir A_1, ir vairāk nekā to daudzstūru, kuriem A_1 nav virsotne.

Norādījums. Nodibiniet savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp to daudzstūru kopu, kuriem A_1 nav virsotne, un daļu no tiem daudzstūriem, kuriem A_1 ir virsotne!

259. Doti divi nogriežņi (kopā ar galapunktiem): viens 1 cm, otrs 2 cm garš. Pierādīt, ka šo nogriežņu punktu kopas ir ekvivalentas.

260. Pierādīt, ka visu naturālo nepāra skaitļu kopa ir ekvivalenta ar visu naturālo skaitļu kopu.

5. 5. 3. Sanumurējamas kopas un to īpašības

Bezgalīgo kopu salīdzināšanā mēs esam nonākuši apmēram tik tālu, cik tālu bija nonākuši pirmatnējie cilvēki tajā laikā, kad viņi iemācījās noskaidrot, vai divās galīgās kopās ir vienāds elementu daudzums, nodibinot starp to elementiem savstarpēji viennozīmīgu atbilstību. Taisnību sakot, mēs vēl neesam tikuši gluži pat tik tālu, jo mēs vēl nezinām nevienu gadījumu, kad starp 2 bezgalīgu kopu elementiem nevarētu nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību. Šādus piemērus redzēsim nākamajā punktā. Tagad sīkāk pētīsim vienu īpašu bezgalīgu kopu klasi - tās kopas, kuras ir ekvivalentas ar naturālo skaitļu kopu.

Definīcija. Kopas, kas ir ekvivalentas ar naturālo skaitļu kopu, sauc par sanumurējamām kopām. Jau iepriekš redzējām, ka negatīvo veselo skaitļu kopa ir sanumurējama (165. piemērs). Nākošā shēma parāda, ka visu naturālo pārskaitļu kopa arī ir sanumurējama.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	...

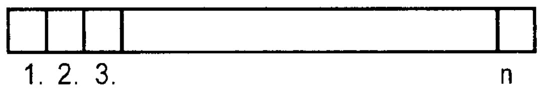
Šim piemēram vajadzētu vismaz nedaudz pārsteigt. Ir nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp naturālo skaitļu kopas daļas elementiem, no vienas puses, un visiem naturālajiem skaitļiem, no otras puses. Atcerieties, ka galīgu kopu gadījumā nekas tāds nebija iespējams! Tā kā mēs ceram, ka kopu ekvivalences jēdziens zināmā nozīmē vispārina jēdzienu "vienāds elementu daudzums", tad redzam, ka apgalvojums "veselais nevar būt vienāds ar savu daļu" šajā interpretācijā bezgalīgu kopu gadījumā nav spēkā.

Ļoti daudzas dabiski lietojamas kopas ir sanumurējamas. Pierādīsim, ka, piemēram, visu veselo skaitļu kopa arī ir sanumurējama. Vajadzīgo savstarpēji viennozīmīgo atbilstību parāda shēma.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	5	–5	6	...

Vēl viens piemērs: parādīsim, ka ir sanumurējama no nullēm un vieniniekiem sastādītu visu galīgo virkņu kopa.

Ievērosim, ka galīgu virkņu, kas sastāv no 0 un 1 un kuru garums ir n simboli, ir 2^n.



Tiešām, pirmo simbolu tajā var izvēlēties 2 veidos: 0 vai 1. Katrai no šīm izvēlēm 2 veidos var piekārtot 2. simbolu: arī 0 vai 1. Tātad galīgu virkņu garumā 2 ir $2 \cdot 2 = 4$. Līdzīgi turpinot, var parādīt, ka virkņu garumā 3 ir $2^3 = 8$ utt. Pilnīgu pierādījumu iegūst ar matemātisko indukciju.

Tātad iegūstam šādu tabulu:

Virknes simbolu skaits (virknes garums)	**Virkņu skaits ar attiecīgo garumu**
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...
n	2^n
...	...

Tagad ideja jau apmēram skaidra. Mēs varam izrakstīt vienu aiz otras visas galīgas virknītes, izrakstot vispirms visas virknītes, kuru garums ir 1, pēc tam visas virknītes, kuru garums ir 2, pēc tam visas virknītes, kuru garums ir 3, utt., atdalot tās vienu no otras ar atstarpēm un zem šīm virknītēm parakstot pēc kārtas visus naturālos skaitļus:

0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	101 ...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...

Skaidrs, ka šādā veidā ir nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp visiem naturāliem skaitļiem, no vienas puses, un starp visām galīgām nuļļu un vieninieku virknītēm, no otras puses. Tātad mūsu apgalvojums pierādīts.

Pierādiet patstāvīgi līdzīgā ceļā, ka ir sanumurējama no latviešu alfabēta burtiem izveidoto visu galīgo virkņu kopa!

Teorēmu par to, ka visu veselo skaitļu kopa ir sanumurējama, uzskatāmi var iztēloties tā: iedomāsimies bezgalīgu lenti, kas sadalīta kvadrātiņos:

...  ...

Skaidrs, ka, izvēloties kādu kvadrātiņu par centrālo un pierakstot tam vērtību 0, mēs varam uzskatīt, ka šī lente attēlo visus veselos skaitļus.

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...

Fakts, ka veselo skaitļu kopa ir sanumurējama, nozīmē to, ka rūtiņās var ierakstīt naturālos skaitļus tā, lai katrā rūtiņā būtu 1 naturālais skaitlis, dažādās rūtiņās būtu dažādi skaitļi un neviens naturāls skaitlis nepaliktu neierakstīts:

...	12	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	13	...
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	

(Šī atbilstība starp naturālajiem skaitļiem un veselajiem skaitļiem atšķiras no tās, kas bija attēlota iepriekš).

Atrisināsim līdzīgu uzdevumu: pieņemsim, ka plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Pierādīsim, ka kvadrātiņu kopa arī ir sanumurējama.

Risinājumu viegli saskatīt šajā tabulā:

	26	27	28	29	30	31
	25	10	11	12	13	32
	24	9	2	3	14	33
	23	8	1	4	15	34
	22	7	6	5	16	35
44	21	20	19	18	17	36
43	42	41	40	39	38	37

209. zīm.

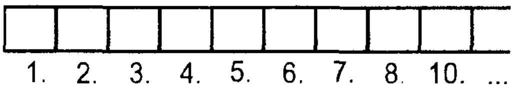
Ar līdzīgu paņēmienu risināms nākamais uzdevums.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

261. Telpa sadalīta vienādos kubiņos, velkot 3 savstarpēji perpendikulāras paralēlu plakņu saimes. Pierādīt, ka šo kubiņu kopa ir sanumurējama.

Atzīmēsim vēl dažus uzdevumus patstāvīgai risināšanai. Tie ņemti no grāmatas [6], ko ļoti ieteicams izlasīt.

Visos šajos uzdevumos minētās "viesnīcas" ir bezgalīgas un veidotas pēc šāda parauga (vienkāršotas shēmas):



1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10. ...

Katrs kvadrātiņš apzīmē vienu viesnīcas numuru. Katram viesnīcas numuram ir savs kārtas numurs, kas zīmējumā uzrakstīts zem attiecīgā kvadrātiņa. Atkārtojam, ka katrā aplūkojamā viesnīcā ir bezgalīgi daudz numuru.

262. Pieņemsim, ka katrā viesnīcas numurā dzīvo pa iemītniekam. Tomēr viesnīcā ierodas vēl viens ceļotājs. Vai administrators var dot ceļotājam atsevišķu numuru, tai pašā laikā neizliekot no viesnīcas nevienu tās iemītnieku un nekādus 2 iemītniekus nenovietojot vienā numurā? Administrators drīkst pārlikt iemītniekus no viena numura citā.

263. Pieņemsim, ka ir 2 apskatītā tipa viesnīcas, pie tam abās viesnīcās katrā numurā dzīvo pa vienam iemītniekam. Pēkšņi vienu viesnīcu slēdz, un visus tās iemītniekus pārsūta uz otru viesnīcu (kurā visi numuri jau aizņemti). Vai otrās viesnīcas administrators var izvietot jaunpienākušos (bezgalīgi daudzos) iemītniekus tā, lai joprojām katrā numurā būtu 1 iemītnieks un neviens iemītnieks nepaliktu bez numura?

264. Pieņemsim, ka ir viena aprakstītā tipa viesnīca. Katrā numurā dzīvo viens iemītnieks. Pēkšņi no viesnīcas aizbrauc 2., 4., 6. numura iemītnieki - resp., visi tie iemītnieki, kas dzīvoja pārskaitļu numuros. Kā administratoram rīkoties, lai tomēr neviens numurs nepaliktu tukšs?

Atzīmēsim vēl vienu īpašību, kas parāda sanumurējamo kopu sevišķo stāvokli starp bezgalīgām kopām. Savā ziņā tā parāda, ka sanumurējamās kopas no visām bezgalīgajām kopām ir pašas vienkāršākās.

Lemma. Katrā bezgalīgā kopā ir sanumurējama daļa.

Ņemsim kaut kādu bezgalīgu kopu A. Tajā noteikti ir vismaz viens elements, apzīmēsim to ar x_1. Izņemsim elementu x_1 no kopas A un pāri palikušo kopas A daļu apzīmēsim ar A_1. Skaidrs, ka A_1 ir bezgalīga kopa, jo tā atšķiras no kopas A tikai ar vienu elementu. Tāpēc no kopas A_1 var izņemt citu elementu x_2 un pārpalikumu apzīmēt ar A_2. Arī kopa A_2 ir bezgalīga kopa, un mēs varam aprakstīto procesu atkārtot vēl un vēl. To turpinot, iegūsim elementus x_1, x_2, x_3,..., kas visi ir kopas A elementi un acīmredzot veido sanumurējamu kopas A daļu: katra elementa numuru norāda tā indekss.

Ir skaidrs, ka katra kopa, kurā ir sanumurējama daļa, ir bezgalīga, tāpēc iegūstam šādu teorēmu.

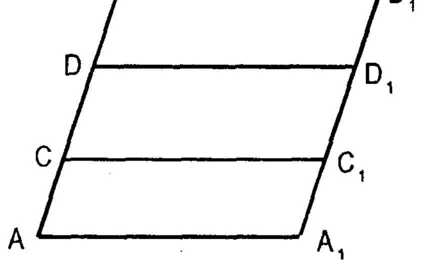
Teorēma. Kopa ir bezgalīga tādā un tikai tādā gadījumā, kad tā satur sanumurējamu daļu.

Līdz ar to redzams, ka bezgalīgas kopas jēdzienu, ko parasti definē kā kopu, kuras elementu daudzumu nevar izteikt ne ar kādu naturālu skaitli, var definēt arī kā "kopu, kurā ir sanumurējama daļa". Šī definīcija ir daudzējādā ziņā parocīgāka par pirmo - pirmajā definīcijā tiek runāts par kaut ko, kas nepastāv, par kaut ko, ko nevar izdarīt. Turpretī otrajā definīcijā kopas bezgalīgums saistās ar kaut ko pozitīvu, ar kaut ko, kas eksistē. Parasti šādām definīcijām tiek dota priekšroka.

5. 5. 4. Ekvivalences teorēma, tās secinājumi

Aplūkosim divas punktu kopas: katra no tām ir nogrieznis ar galapunktiem. Abu nogriežņu garumi ir vienādi. Jāpierāda, ka pirmā nogriežņa punktu kopa ir ekvivalenta ar otrā nogriežņa punktu kopu.

Šo kopu ekvivalenci pierāda 210. zīmējums.



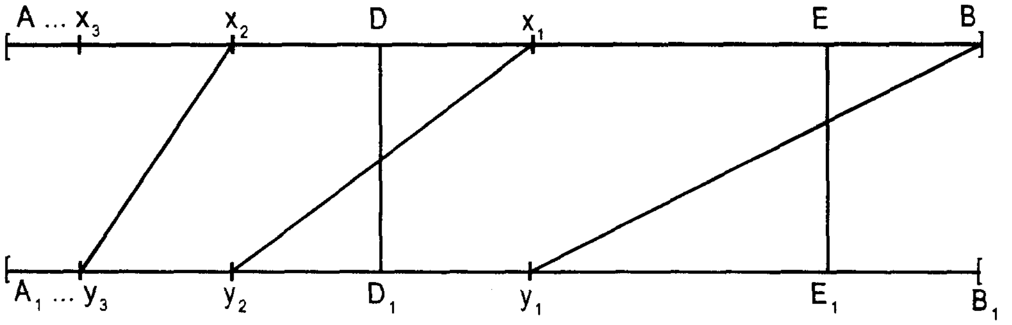
210. zīm.

Nogriežņi AB un A_1B_1 novietoti tā, ka ABB_1A_1 ir paralelograms. Velkam caur patvaļīgu nogriežņa AB punktu C taisni, kas paralēla BB_1. Šī taisne krusto nogriezni A_1B_1 kādā punktā

C_1. Punktus C un C_1 apvienosim pārī, nodibinot savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp nogriežņa AB punktiem un nogriežņa A_1B_1 punktiem. Tādējādi pāros apvienosies, piemēram, punkts A ar A_1, B ar B_1. Skaidrs, ka katrs punkts ietilps tikai vienā pārī un nebūs neviena punkta, kurš neietilptu kādā pārī. Tātad abu kopu ekvivalenci esam pierādījuši.

Tagad mazliet mainīsim uzdevumu: nogriežņa AB galapunktus atstāsim, bet nogriežņa A_1B_1, vietā ņemsim gandrīz tādu pašu nogriezni, kāds ir A_1B_1, tikai bez galapunkta B_1. Atkal prasīts pierādīt abu punktu kopu ekvivalenci.

Viegli pārliecināties, ka iepriekšējais pierādījums nepalīdz: pie tādas apvienošanas pāros šoreiz punkts B paliks bez pāra. Pirms lasiet tālāk, pacentieties paši atrast tādu apvienojumu pāros, kas pierādītu abu šo punktu kopu ekvivalenci! Brīdinām no dažām izplatītākajām kļūdām: uz taisnes nogriežņa nevienam punktam nav "blakus esošā" punkta: ja, piemēram, pieņemtu, ka punkts F ir punktam E "blakus esošais punkts" jeb "nākamais punkts" pēc punkta E, tad nonāktu pie pretrunas, jo starp punktiem E un F ir vēl citi punkti. Tāpēc izmantot spriedumus, kas saistīti ar "blakus esošajiem punktiem" un "nākamajiem punktiem", kā to varēja darīt 261. - 264. uzdevuma risinājumos, šoreiz nevar. Šajā gadījumā mūs uz pareiza ceļa var uzvest iepriekšējā paragrāfa beigās pieminētā lemma: katrā bezgalīgā kopā ir sanumurējuma apakškopa. Abas mūsu aplūkojamas punktu kopas, protams, ir bezgalīgas: tajās ir bezgalīgi daudz punktu.



211. zīm.

Novietojam nogriezni AB paralēli A_1B_1 tā, ka $AA_1 \perp AB$. Izdalīsim uz nogriežņa AB punktus x_1, x_2, x_3,... tādā veidā: x_1 ir AB viduspunkts, x_2 ir AX_1 viduspunkts, x_3 ir AX_2 viduspunkts, x_4 ir AX_3 viduspunkts utt. Līdzīgā ceļā uz nogriežņa A_1B_1 izdalām punktus y_1, y_2, y_3,...

Vajadzīgo apvienojumu pāros izdarīsim divos posmos. Pirmais posms būs visbūtiskākais. Šajā posmā mēs veidojam šādus pārus:

B apvienojam pārī ar y_1,
x_1 apvienojam pārī ar y_2,
x_2 apvienojam pārī ar y_3,
.....
x_n apvienojam pārī ar y_{n+1},
.....

Tas parādīts 211. zīmējumā ar slīpām līnijām. Šī posma rezultātā pāros apvienoti punkti B, X_1, X_2 , X_3,... no nogriežņa AB un punkti Y_1, Y_2, Y_3, ... no nogriežņa A_1B_1. Pārejam pie otrā posma. Redzēsim, ka pirmais posms ir likvidējis nogriežņu AB un A_1B_1 atšķirību. Gan uz nogriežņa AB, gan uz nogriežņa A_1B_1 (kuram nav galapunkta B_1) ir vēl palikuši punkti, kas nav apvienoti pāros. Tomēr nav grūti redzēt, ka uz abiem nogriežņiem palikuši neapvienoti vieni un tie paši punkti. Šos punktus mēs apvienojam pāros, novelkot vertikālās līnijas perpendikulāri AB (skat. 211. zīm. DD_1, EE_1 utt.) Galarezultātā esam ieguvuši, ka pāros apvienoti visi abu nogriežņu punkti, katrs punkts no viena nogriežņa apvienots pārī tieši ar vienu punktu no otra nogriežņa un neviens nav palicis bez pāra.

Nevar noliegt, ka izmantotā ideja ir ļoti skaista un risinājums interesants. Tomēr var viegli atrast daudz grūtākus uzdevumus, kuros tieši pierādīt divu kopu ekvivalenci neizdodas. Minēsim piemēru.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

265. Pierādīt, ka trijstūra punktu kopa ekvivalenta ar riņķa punktu kopu (abas figūras apskatām kopā ar to kontūrām).

266. Pierādīt, ka riņķa punktu kopa, ieskaitot tā kontūras punktus, ir ekvivalenta ar jebkura cita riņķa punktu kopu, kurā kontūras punkti nav iekļauti.

Ja katram šādam uzdevumam nāktos izgudrot tādas mākslīgas metodes, kā nupat izmantotā, tad kopu ekvivalences noskaidrošana būtu stipri apgrūtināta. Tāpēc rodas dabiska vajadzība pēc cita kritērija, kas daudzos gadījumos ļautu pierādīt kopu ekvivalenci.

Iekams aplūkot šādu kritēriju, atcerēsimies, kā dažreiz pierāda, ka divi skaitļi a un b ir vienādi. Viens no paņēmieniem varētu būt šāds: vispirms pierāda, ka $a \leq b$, bet pēc tam pierāda, ka $a \geq b$. Tad no abām šīm pierādītajām nevienādībām seko, ka $a = b$.

Teorēmai, kuru mēs aplūkosim, pamatā ir tā pati ideja, kas nupat minētajam spriedumam.

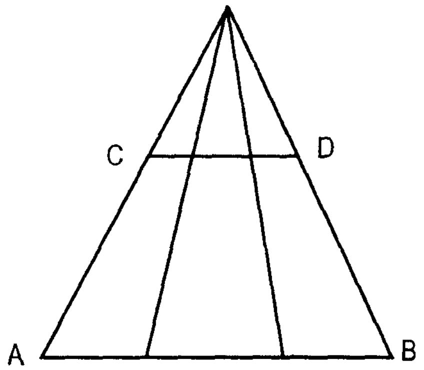
<u>Ekvivalences teorēma.</u> Pieņemsim, ka dotas divas kopas A un B. Ja eksistē tāda kopas A dala A_1 un kopas B dala B_1, ka A ir ekvivalenta ar B_1, un B ir ekvivalenta ar A_1, tad A ir ekvivalenta ar B.

Šo teorēmu mēs nepierādīsim, tikai nedaudz apspriedīsim to. Ja kopa A ir ekvivalenta ar kopas B daļu B_1, tad gribētos teikt, ka A "nav vairāk elementu kā B", jo "A ir tikpat elementu, cik kopas B daļā B_1". No otras puses, ja B ir ekvivalenta ar kopas A daļu A_1, tad B "nav vairāk elementu kā A". Šie izteicieni likti pēdiņās tāpēc, ka tiem nav stingras matemātiskās jēgas: mēs bezgalīgu kopu gadījumā neesam definējuši, ko nozīmē, ka vienā kopā ir vairāk elementu nekā otrā kopā. Teorēma tātad šādā intuitīvā izpratnē nozīmē, lūk, ko: "ja kopā A nav vairāk elementu kā kopā B un kopā B nav vairāk elementu kā kopā A, tad tajās ir vienāds daudzums elementu" (ja ar vārdiem "ir vienāds daudzums elementu" vienojamies saprast to, ka šīs kopas ir ekvivalentas). Tomēr stingri jāuzsver, ka šādi spriedumi nekādā gadījumā nevar būt minētās teorēmas pierādījums un tikai aptuveni paskaidro tās jēgu.

Parādīsim ekvivalences teorēmas izmantošanas iespējas: ar tās palīdzību pierādīsim paragrāfa sākumā minēto nogriežņa AB punktu kopas un nogriežņa A_1B_1 punktu kopas ekvivalenci.

1. Pierādīsim, ka nogrieznī A_1B_1 ir daļa, kas ir ekvivalenta ar nogriezni AB. Tiešām, nogriežņa A_1B_1 iekšpusē ir iespējams izvēlēties nogriezni CD ar abiem galapunktiem. Skaidrs, ka nogrieznis CD ir ekvivalents ar nogriezni AB. Šo ekvivalenci paskaidro 212. zīmējums.

2. Pierādīsim, ka nogrieznī AB ir daļa, kas ir ekvivalenta ar nogriezni A_1B_1 (bez galapunkta B_1). Nogriežņa AB iekšpusē varam izvēlēties nogriezni EF ar galapunktu E, bet bez galapunkta F. EF ekvivalenci ar A_1B_1 pierāda tāpat kā 1. punktā.



212. zīm.

Pamatojoties uz ekvivalences teorēmu, varam apgalvot, ka AB un A_1B_1 punktu kopas ir ekvivalentas.

Ar aprakstīto metodi viegli var pierādīt 265. un 266. uzdevumā minētos apgalvojumus.

Parādīsim vēl vienu ekvivalences teorēmas pielietojumu: pierādīsim, ka racionālo skaitļu kopa ir ekvivalenta ar naturālo skaitļu kopu.

Vispirms pierādīsim, ka racionālo skaitļu kopā var atrast daļu, kas ir ekvivalenta ar naturālo skaitļu kopu. Tas ir acīmredzams. Tiešām, racionāli ir skaitļi

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Skaidrs, ka šādu skaitļu kopa ir sanumurējama: skaitli $1/n$ no minētās kopas apvienojot pārī ar naturālu skaitli n, iegūsim savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp visiem naturālajiem skaitļiem, no vienas puses, un naturālo skaitļu apgrieztajiem skaitļiem, kas veido racionālo skaitļu kopas daļu, no otras puses.

Tagad jāpierāda, ka var nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp visiem racionālajiem skaitļiem, no vienas puses, un daļu naturālo skaitļu, no otras puses. Tas ir nedaudz grūtāk.

Atcerēsimies, ka katru racionālu skaitli var izsacīt formā m/n, kur m ir vesels skaitlis, bet n ir naturāls skaitlis. Pacentīsimies vispirms sanumurēt visas šāda tipa daļas.

Numerāciju izdarīsim šādā veidā:

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{0}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \end{array}$$

Paskaidrosim, kas tiek darīts. Vispirms uzrakstīta vienīgā daļa, kurai saucēja un skaitītāja absolūtās vērtības summa ir 1, tā ir daļa $0/1$. Pēc tam uzrakstītas 3 vienīgās daļas, kuru saucēja un skaitītāja absolūtās vērtības summa ir 2; tās ir $0/2$, $1/1$ un $-1/1$. Pēc tam uzrakstītas 5 vienīgās daļas, kuru saucēja un skaitītāja absolūtās vērtības summa ir 3, utt. Skaidrs, ka jebkura daļa m/n, kur n ir naturāls skaitlis, bet m - vesels skaitlis, šajā sarakstā parādīsies vienu un tikai vienu reizi. Tātad varam izveidot savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp visiem naturālajiem skaitļiem, no vienas puses, un šādām daļām, no otras puses.

Šajā vietā var rasties maldīgs priekšstats, ka jau ir nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp visiem naturālajiem skaitļiem, no vienas puses, un visiem racionālajiem skaitļiem, no otras puses, un līdz ar to mūsu pierādījuma pirmā daļa nemaz nebija vajadzīga. Tomēr tā nav. Katru racionālo skaitli m/n, var izsacīt bezgalīgi daudzos veidos: piemēram, $1/2$, $2/4$, $3/6$,... izsaka vienu un to pašu racionālo skaitli. Līdz ar to pašreiz aprakstītajā atbilstībā katram racionālajam skaitlim atbilst <u>bezgalīgi daudz</u> naturālo skaitļu, un mūsu iedomātā savstarpēji viennozīmīgā atbilstība nav nodibināta.

Izdarīsim šādu darbību: katram racionālajam skaitlim atstāsim tikai to viņu izsakošo daļu, kas shēmā parādās pirmā; pārējās daļas līdz ar tiem atbilstošiem naturālajiem skaitļiem izmetīsim no shēmas. Tad shēmas sākums izskatīsies šāds:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \end{array}$$

Tādējādi augšējā rindā katrs racionālais skaitlis parādīsies tieši vienu reizi, bet apakšējā rindā parādīsies tikai <u>daļa</u> naturālo skaitļu. Ir nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp visiem racionālajiem skaitļiem, no vienas puses, un daļu naturālo skaitļu, no otras puses. Tā ir otrā atbilstība, ko mums vajadzēja iegūt.

Pamatojoties uz ekvivalences teorēmu, secinām, ka ir iespējams nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp visiem naturālajiem skaitļiem, no vienas puses, un visiem racionālajiem skaitļiem, no otras puses, respektīvi, ka racionālo skaitļu kopa ir sanumurējama.

5. 5. 5. Nesanumurējamas kopas

Patlaban mēs esam ieguvuši dažas iemaņas, lai varētu noteikt, vai divas kopas ir ekvivalentas, vai nē. Mēs esam arī ieguvuši vairākus pašu vienkāršāko bezgalīgo kopu - sanumurējamo kopu piemērus. Tomēr vienā ziņā, veidodami bezgalīgo kopu salīdzināšanas metodes, mēs vēl esam atpalikusi no pirmatnējām ciltīm, kad tās līdzīgi veidoja galīgo kopu salīdzināšanas paņēmienus. Šīm ciltīm jau pirms naturālo skaitļu jēdziena ieviešanas bija zināms, ka eksistē galīgas kopas, starp kuru elementiem nevar nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību: piemēram, cilvēka acu kopa un labās rokas pirkstu kopa. Mums, turpretī, vēl nav neviena tāda piemēra, kurā būtu 2 bezgalīgas kopas, kas nav ekvivalentas. Skaidrs, ka šādu kopu eksistence vai neeksistence mūsu izstrādājamai teorijai ir ļoti būtiska: ja izrādītos, ka visas bezgalīgās kopas ir savā starpā ekvivalentas (tad tās visas būtu sanumurējamas), tad mūsu teorija būtu triviāla un no tās nebūtu nekāda labuma.

Par laimi tā nav. Šajā punktā aplūkosim vairākus tādu bezgalīgu kopu piemērus, kas nav sanumurējamas. Atceroties, ka jebkurā bezgalīgā kopā ir sanumurējama daļa, šis rezultāts parādīs, ka eksistē kopas, kurās ir "vairāk" elementu nekā jebkura sanumurējama kopa. Līdz ar to mēs būsim pierādījuši, ka jēdziens "bezgalība" nebūt nav tik vienveidīgs, kā tas parasti liekas, bet ka eksistē vismaz divas kopu ekvivalences nozīmē dažādas bezgalības.

5.5.3. punktā mēs pierādījām, ka tādu galīgu virkņu kopa, kas sastāv no nullēm un vieniniekiem, ir sanumurējama.

Tagad aplūkosim kopu, kurā ir visas bezgalīgās virknes, kas sastādītas no nullēm un vieniniekiem. Mēs parādīsim, ka šāda kopa nav sanumurējama.

Pieņemsim no pretējā, ka šāda kopa ir sanumurējama. Tad visas bezgalīgās virknes, kas sastādītas no nullēm un vieniniekiem, var iztēloties uzrakstītas kolonnā vienu zem otras: pirmā virkne, otrā virkne, trešā virkne utt. tādā kārtībā, kādā tās ir sanumurētas.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots \\
2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots \\
3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdots \\
4 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \cdots \\
 & & & \cdots & & \\
n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} & \cdots \\
 & & & \cdots & &
\end{array}$$

Te ar simboliem α_{ij} apzīmēts i-tās virknes j-tais elements. Visiem i un j α_{ij} ir vai nu 0, vai 1.

Atbilstoši mūsu pieņēmumam šajā sarakstā pa reizei sastopama katra bezgalīga virkne, kas sastāv no nullēm un vieniniekiem. Pierādīsim, ka šāds pieņēmums ir nepareizs, t.i., apskatīsim bezgalīgu virkni, kas sastāv no nullēm un vieniniekiem, bet kuras noteikti nav mūsu sarakstā.

Apzīmēsim šo virkni ar $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$.

Definēsim to šādi: jebkuram naturālam n $\beta_n = \begin{cases} 0, \text{ja } \alpha_{nn} = 1 \\ 1, \text{ja } \alpha_{nn} = 0 \end{cases}$; tas nozīmē, ka $\beta_1 = \begin{cases} 0, \text{ja } \alpha_{11} = 1 \\ 1, \text{ja } \alpha_{11} = 0 \end{cases}$ $\beta_2 = \begin{cases} 0, \text{ja } \alpha_{22} = 1 \\ 1, \text{ja } \alpha_{22} = 0 \end{cases}$ $\beta_3 = \begin{cases} 0, \text{ja } \alpha_{33} = 1 \\ 1, \text{ja } \alpha_{33} = 0 \end{cases}$ utt.

Citiem vārdiem sakot, mēs ņemam izveidotās tabulas diagonāli - ar aplīšiem apvilktos elementus - un mainām tos ar pretējiem elementiem: 0 par 1, 1 par 0. Ja shēmas sākums būtu bijis šāds:

$$\begin{array}{l} 1 \longleftrightarrow 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots \\ 2 \longleftrightarrow 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ \ldots \\ 3 \longleftrightarrow 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \ldots \\ 4 \longleftrightarrow 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

tad mūsu konstruējamās virknes sākums būtu šāds: 1 1 0 1 ... .

Pierādīsim, ka konstruētā virkne $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$ nevar atrasties šajā shēmā. Līdz ar to būs iegūta pretruna pieņēmumam, ka shēmā sanumurētas visas bezgalīgās virknes, kas sastāv no nullēm un vieniniekiem.

Pieņemsim, ka virkne $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$ atrodas šajā shēmā. Tad tā aizņem šajā shēmā kādu rindu; apzīmēsim šīs rindas numuru (tai atbilstošo naturālo skaitli) ar m. Tas nozīmē, ka $\alpha_{m1}=\beta_1$, $\alpha_{m2}=\beta_2$, $\alpha_{m3}=\beta_3$, ..., $\alpha_{mn}=\beta_n$, ...

Aplūkosim skaitli α_{mm}. No nupat iegūtajām vienādībām izriet, ka $\alpha_{mm}=\beta_m$.

Bet atcerēsimies definīciju: $\beta_m: \begin{cases} 0, \text{ja } \alpha_{mm}=1 \\ 1, \text{ja } \alpha_{mm}=0 \end{cases}$ tātad noteikti $\beta_m \neq \alpha_{mm}$. Iegūtā pretruna arī pierāda vajadzīgo rezultātu.

Sprieduma beigu daļa bija mazliet formāla. To labāk saprast palīdzēs šāds apstāklis: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$ tika konstruēta ar tādu nolūku, lai tā "mazliet" atšķirtos no jebkuras tabulā esošās rindiņas: no n-tās rindiņas tā atšķiras vismaz n-tajā vietā. Šo faktu izmanto minētais formālais pierādījums.

Iepriekš apskatīto metodi sauc par Kantora diagonālmetodi. Tā vēl šodien ir viens no spēcīgākajiem argumentiem kopu teorijas, matemātiskās loģikas, algoritmu teorijas un teorētiskās kibernētikas pētījumos. Parasti to lieto, lai konstruētu objektu, kas noteikti atšķiras no sanumurējama daudzuma jau iepriekš dotu objektu (mūsu gadījumā, lai konstruētu virkni, kas noteikti atšķiras no sanumurējama daudzuma jau iepriekš dotu virkņu).

Izmantosim Kantora diagonālmetodi, lai pierādītu, ka <u>visu reālo skaitļu kopa, kas atrodas starp 0 un 1, nav sanumurējama.</u> (Aplūkosim tikai skaitļus, kas atrodas stingri starp 0 un 1, t.i., pašus skaitļus 0 un 1 aplūkojamā kopā neiekļausim.) Vispirms jāatceras, ka katru reālu skaitli starp 0 un 1 var izsacīt kā bezgalīgu decimāldaļu:

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots,$$

kurā vismaz viens no cipariem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ ir atšķirīgs no nulles. Vēl vairāk: gandrīz jebkuru šādu reālu skaitli ar bezgalīgu decimāldaļu var izsacīt <u>vienā vienīgā</u> veidā. Izņēmums ir vienīgi decimāldaļas, kurām, sākot no kādas vietas, atkārtojas tikai devītnieki: katrai tādai bezgalīgai decimāldaļai var atrast citu bezgalīgu decimāldaļu, kurai, sākot no kādas vietas, atkārtojas tikai 0 un kura izsaka to pašu reālo skaitli, ko sākotnējā decimāldaļa. Teikto vislabāk var ilustrēt ar piemēriem:

1,9999999999... un 2,0000000000... , kā arī

0,37869999... un 0,378700000...

izsaka vienu un to pašu reālo skaitli.

Pieņemsim no pretējā, ka reālos skaitļus starp 0 un 1 ir iespējams sanumurēt. Tādā gadījumā iedomāsimies shēmu, kurā šīs numerācijas kārtībā ierakstītas bezgalīgas decimāldaļas, kas izsaka atbilstošos reālos skaitļus:

$$
\begin{array}{llllll}
1 \longleftrightarrow 0, & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{14} & \ldots \\
2 \longleftrightarrow 0, & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \ldots \\
3 \longleftrightarrow 0, & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \ldots \\
4 \longleftrightarrow 0, & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \ldots \\
 & & \ldots & & &
\end{array}
$$

Pie tam šajā shēmā nerakstām tās decimāldaļas, kurās, sākot no kādas vietas, ir tikai devītnieki: tās aizstājam ar decimāldaļām, kurās, sākot no kādas vietas, ir tikai nulles. Mūsu shēmā tātad ir visu to reālo skaitļu, kuri atrodas starp 0 un 1, attēlojumi.

Uzbūvēsim jaunu decimāldaļu, kuras noteikti nav šajā sarakstā: 0, β_1, β_2, β_3, β_4,..., kur

katram naturālam n $\beta_n = \begin{cases} 1, \text{ja } \alpha_{nn} \neq 1 \\ 2, \text{ja } \alpha_{nn} = 1 \end{cases}$

Tāpat kā iepriekš pierāda, ka daļa β_n nevar atrasties šajā shēmā. Bet šī daļa izsaka kādu reālu skaitli, kas atrodas stingri starp 0 un 1 un kuram ir tikai viens attēlojums ar bezgalīgas daļas palīdzību. Tātad, pretēji mūsu pieņēmumam, šā reālā skaitļa attēlojuma nav mūsu shēmā. Iegūtā pretruna pierāda mūsu apgalvojumu.

Līdzīgā veidā pierāda, ka visu reālo skaitļu kopa nav sanumurējama.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

267. Pierādīt, ka no latviešu alfabēta burtiem sastādīta bezgalīgu virkņu kopa nav sanumurējama.
268. Izmantojot reālo skaitļu attēlojumu ar bezgalīgām decimāldaļām, pierādīt, ka nogriežņa punktu kopa ir ekvivalenta ar tāda kvadrāta punktu kopu, kura mala vienāda ar šo nogriezni.

5. 5. 6. Daži ieviesto jēdzienu lietojumi

Iepriekšējā punktā redzējām, ka no kopu ekvivalences viedokļa bezgalīgo kopu ir vismaz 2 dažādi tipi: sanumurējamas kopas un kopas, kas ekvivalentas to reālo skaitļu kopai, kuri atrodas starp 0 un 1 (var pierādīt, ka bezgalīgo nuļļu un vieninieku virkņu kopa ir ekvivalenta ar to reālo skaitļu kopu, kas atrodas starp 0 un 1, kā arī ar visu reālo skaitļu kopu). Kopas, kas ir ekvivalentas ar visu reālo skaitļu kopu, sauc par kontinuālām jeb kontinuuma apjoma kopām, jeb saka, ka šādu kopu apjoms ir kontinuums, jeb, piemēram, ka reālo skaitļu ir kontinuums. Tātad visām mums līdz šim pazīstamām bezgalīgām kopām, kas nav sanumurējamas, ir kontinuuma apjoms.

Var rasties jautājums, vai ir vēl arī citi bezgalīgo kopu tipi, kas no ekvivalences viedokļa atšķiras gan no sanumurējamām, gan no kontinuuma apjoma kopām. Tā ir, no kopu ekvivalences viedokļa pa pāriem atšķirīgu bezgalīgu kopu ir bezgalīgi daudz. Tomēr to nepierādīsim: lasītājs var iepazīties ar pierādījumu grāmatā [6]. Šajā punktā parādīsim, kā var izmantot nesanumurējamu kopu eksistenci jaunu rezultātu iegūšanai.

Teorēma. Eksistē iracionāli skaitļi.

Jūs, protams, atceraties pierādījumu, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis. Dosim pavisam atšķirīgu teorēmā minētā fakta pierādījumu.

5. 5. 5. punktā pierādījām, ka reālo skaitļu kopa, kas atrodas starp 0 un 1, nav sanumurējama. 5. 5. 4. punktā pierādījām, ka visu racionālo skaitļu kopa ir sanumurējama. Tāpēc arī to racionālo skaitļu kopa, kas atrodas starp 0 un 1, ir ne vairāk kā sanumurējama, jo tā ir daļa no visu racionālo skaitļu kopas (īstenībā šī kopa ir sanumurējama: pierādiet to patstāvīgi, izmantojot ekvivalences teorēmu). Tāpēc starp 0 un 1 bez racionālajiem skaitļiem, kuru ir

sanumurējams daudzums, jābūt vēl kādiem citiem reāliem skaitļiem, resp., skaitļiem, kas nav racionāli - iracionāliem skaitļiem.

Protams, teorēmu, ka eksistē iracionāli skaitļi, var pierādīt arī citādi, uzrādot tiešus piemērus ($\sqrt{2}$ u.tml.) vai arī aplūkojot jebkuru neperiodisku decimāldaļu (un izmantojot teorēmu, ka katru racionālu skaitli var izsacīt tikai ar periodisku decimāldaļu). Bez tam šim pierādījumam ir viens liels trūkums: tas nedod nevienu konkrētu iracionālu skaitli, tikai parāda, ka tādi eksistē.

Tomēr pierādījumam ir arī savas priekšrocības. Pirmā - tas apstāklis, ka iracionālo skaitļu eksistence te iegūta no ļoti vispārīgiem apsvērumiem. Sanumurējamu un nesanumurējamu kopu salīdzināšana atbilst lielu un mazu kopu salīdzināšanai galīgu kopu gadījumā.

Otrā priekšrocība ir tā, ka mūsu pierādījums parāda, ka iracionālo skaitļu ir "daudz vairāk" nekā racionālo. Tiešām, ir pavisam viegli izspriest, ka iracionālo skaitļu ir nesanumurējams daudzums, bet racionālo skaitļu - tikai sanumurējams daudzums. Pieņemsim, ka iracionālo skaitļu starp 0 un 1 būtu sanumurējams daudzums, un apzīmēsim tos numerācijas kārtībā ar a_1, a_2, a_3,... Ar b_1, b_2, b_3,... apzīmēsim sanumurētos racionālos skaitļus starp 0 un 1. Tad ar shēmu

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & b_3, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

būtu nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp visiem naturāliem skaitļiem, no vienas puses, un visiem reāliem skaitļiem, kas atrodas starp 0 un 1, no otras puses (jo katrs reāls skaitlis, kas atrodas starp 0 un 1, ir vai nu racionāls, vai iracionāls, tātad ir atzīmēts augšējā rindā). Bet tā ir pretruna, jo mēs zinām, ka reālos skaitļus, kas atrodas starp 0 un 1, nevar sanumurēt.

Tomēr izmantotās pierādījuma metodes galvenā vērtība ir tā, ka to var lietot arī daudzu citu līdzīgu problēmu risināšanā. Visi šie pierādījumi balstās uz faktu, kura pamatojums ir acīmredzams.

Teorēma. Ja kopa A ir sanumurējama, bet kopai B ir kontinuuma apjoms, tad kopā B eksistē elements, kas nepieder kopai A.

Šī teorēma arī ir Dirihlē principa analogs bezgalīgu kopu salīdzināšanā: kopā B (trušu kopā) ir "vairāk" elementu nekā kopā A (būru kopā), tāpēc katram trusim nevar būt savs būris.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

269. Skaitli a sauc par algebrisku, ja tas ir sakne kādam algebriskam vienādojumam ar veseliem koeficientiem.
Pierādīt, ka ir tikai sanumurējams daudzums algebrisku skaitļu, un no tā secināt, ka eksistē skaitļi, kas nav algebriski (tādus skaitļus sauc par transcendentiem).
270. Pierādīt, ka eksistē skaitļi, kurus nevar aprakstīt ne ar kādu galīgu tekstu latviešu valodā.
271. Pierādīt, ka katrā neierobežoti mazā Dekarta koordinātu plaknes riņķī eksistē punkts, kas ir dažādos attālumos no visiem punktiem ar veselām koordinātām. No šejienes secināt, ka katram n eksistē tāda riņķa līnija, kuras iekšpusē atrodas tieši n punkti ar veselām koordinātām, bet uz riņķa līnijas pašas šādu punktu nav.
272. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu, ja riņķu vietā aplūko kvadrātus.
273. Pierādīt, ka eksistē funkcijas, kuru argumenti ir naturāli skaitļi un kas pieņem vērtības 0 un 1, bet kuru aprēķināšanai principā nav iespējams uzrakstīt nekādu programmu nevienā eksistējošā programmēšanas valodā.

6. Dažādas nevienādību pierādīšanas metodes

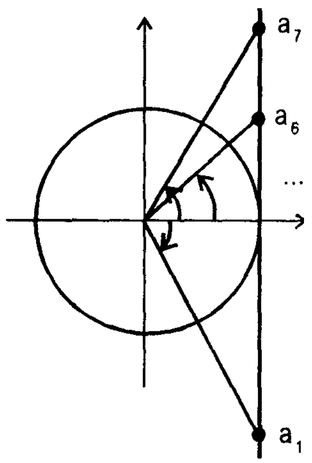
Šajā nodaļā apkopoti piemēri, kā var lietot nevienādību pierādīšanā un dažreiz arī atrisināšanā spriedumus, kas saistīti ar vidējās vērtības metodi. Vairākus no te aplūkotajiem uzdevumiem varētu ievietot arī citās nodaļās (piemēram, 5. nodaļā iederētos uzdevumi, kas saistīti ar integrāļu izmantošanu).

6. 1. Nevienādību atrisinājumu eksistences pierādījumi

Vispirms aplūkosim uzdevumus, kas saistīti ar Dirihlē principa un vidējās vērtības pierādīšanas metodes klasiskajiem variantiem.

168. piemērs. Doti 7 skaitļi (pozitīvi, negatīvi vai 0). Pierādīsim, ka starp tiem var izvēlēties divus skaitļus, kas apzīmēti ar x un y, tā, lai būtu spēkā nevienādība $0<\frac{x-y}{1+xy}<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Atrisinājums. Apzīmēsim dotos skaitļus nedilstošā kārtībā ar a_1; a_2; ...;a_7. Acīmredzot eksistē tādi skaitļi no intervāla ($-\pi/2$, $\pi/2$), ka $a_i = \operatorname{tg}\alpha_i$ (i = 1; 2; 3; ...; 7) (skat. 213. zīm.).



213. zīm.

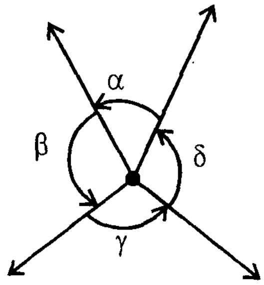
Aplūkosim summu $S = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + ... + (\alpha_7 - \alpha_6)$. Tā kā $S = \alpha_7 - \alpha_1$, tad $S < \pi$. Lielums S ir izsacīts kā sešu starpību summa; tad vismaz viena no šīm starpībām ir mazāka par $\pi/6$. Pieņemsim, ka $0 < \alpha_{k+1} - \alpha_k < \pi/6$. Tad $0 < \operatorname{tg}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) < 1/\sqrt{3}$.

Bet $\operatorname{tg}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{k+1} - \operatorname{tg}\alpha_k}{1+\operatorname{tg}\alpha_k \cdot \operatorname{tg}\alpha_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{1+a_k \cdot a_{k+1}}$. Tātad varam apzīmēt $a_{k+1} = x$ un $a_k = y$.

Kā redzams, šajā risinājumā galvenā nozīme bija interpretācijai - uzdevuma pārtulkošanai no algebras valodas piemērotā trigonometriskā formā.

169. piemērs. Doti 8 nenulles skaitļi a; b; c; d; e; f; g; h. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem ac + bd; ae + bf; ag + bh; ce + df; cg + dh; eg+fh nav negatīvs.

Atrisinājums. Šoreiz izmantosim ģeometrisku interpretāciju. Aplūkosim 4 vektorus ar koordinātām (a; b), (c; d), (e; f), (g; h). Apskatāmie seši skaitļi ir to skalārie reizinājumi pa 2. Mums jāpierāda, ka vismaz viens skalārais reizinājums nav negatīvs.



214. zīm.

Atliksim šos vektorus no viena punkta O (skat. 214. zīm.) pulksteņa rādītāju kustības virzienā; interesēsimies par leņķiem starp viens otram sekojošiem vektoriem. Skaidrs, ka $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$. Saskaņā ar vidējās vērtības teorēmām vismaz viens no visiem leņķiem nepārsniedz 90°. Atbilstošo vektoru $\vec{x}$ un $\vec{y}$ skalārais reizinājums, kura vērtība ir $|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\vec{x},\vec{y})$, acīmredzot nav negatīvs, jo neviens no šiem reizinātājiem nav negatīvs.

170. piemērs. Dots, ka A, B, C ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka var atrast tādus skaitļus a, b, c, kas visi reizē nav nulles un apmierina sistēmu

$$\begin{cases} aA + bB + cC = 0 \\ |a| \le 18 \\ |b| \le 18 \\ |c| \le 18 \end{cases}.$$

Atrisinājums. Apskatīsim visas dažādās izteiksmes $S = a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C$, kur a, b, c ir veseli skaitļi, pie tam $|a| \le 9$, $|b| \le 9$, $|c| \le 9$. Tā kā katram no skaitļiem a, b, c var būt 19 dažādas vērtības neatkarīgi no abiem pārējiem skaitļiem, tad pavisam šādu izteiksmju ir $19\cdot19\cdot19 = 6859$. Pierādīsim, ka starp tām atradīsies divas izteiksmes, kuru vērtības ir vienādas. Tiešām, S lielākā iespējamā vērtība ir $9\cdot100 + 9\cdot100 + 9\cdot100 = 2700$; S mazākā iespējamā vērtība ir (-2700). Tātad S pavisam var būt ne vairāk kā 2 - 2700 + 1 = 5401 dažādu vērtību - visi veselie skaitļi no (-2700) līdz 2700. Tā kā 6859 > 5410, tad jāatrodas divām summām, kuru vērtības ir vienādas. Apzīmēsim tās ar $S_1 = a_1A + b_1B + c_1C$ un $S_2 = a_2 A + b_2 B + c_2 C$.

No vienādības $a_1A + b_1B + c_1C = a_2 A + b_2 B + c_2 C$ iegūstam $(a_1-a_2)A+(b_1-b_2)B+(c_1-c_2)C=0$.

Tā kā $|a_1| \le 9$ un $|a_2| \le 9$, tad $|a_1-a_2| \le |a_1|+|a_2| = 18$. Līdzīgi $|b_1-b_2| \le 18$ un $|c_1-c_2| \le 18$. Tātad mēs varam izvēlēties $a = a_1-a_2$, $b = b_1-b_2$, $c = c_1-c_2$. Ievērosim, ka, tā kā S_1 un S_2 ir dažādas summas, tad tajās ir dažādi koeficienti pie vismaz viena no skaitļiem A; B; C, tāpēc vismaz viena no starpībām a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2 nav 0.

Lasītājs pats var mēģināt atrast nupat pierādītajam faktam ģeometrisku interpretāciju, aplūkojot vektorus (A; B; C) un (a; b; c) trīsdimensiju telpā.

Nākošie piemēri būs saistīti ar integrāļa jēdziena izmantošanu.

171. piemērs. Dots, ka $a_1, a_2, ..., a_n$ - kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka var atrast tādu skaitli x, ka pastāv nevienādība $a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + ... + a_n\cos nx \ge 0$.

Atrisinājums. Apzīmēsim nevienādības kreiso pusi ar f(x). Pieņemsim, ka visiem x pastāv nevienādība f(x) < 0. Tad, tā kā f(x) ir nepārtraukta funkcija, jābūt spēkā nevienādībai

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx < 0.$$

Bet

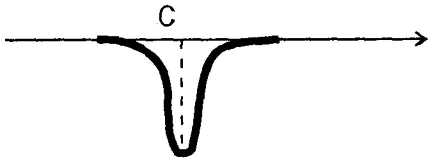
$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} \cos xdx + \int_0^{2\pi} \cos 2xdx + ... + \int_0^{2\pi} \cos nxdx = \sin x\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{2\pi} + ... + \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} =$$

$= 0 + 0 + ... + 0 = 0.$ Iegūta pretruna.

Ja mēs papildus vēl prastu pierādīt, ka f(x) nav konstanta funkcija, tad no iegūtā rezultāta

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$$

varētu secināt, ka eksistē tāds x, kuram f(x) > 0.



215. zīm.

Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka visiem x pastāv nevienādība $f(x) \leq 0$; tā kā f(x) nav konstanta funkcija, tad pastāv tāds skaitlis c, ka f(c) < 0. Tā kā f(x) ir nepārtraukta funkcija, tad f (c) < O arī kādā punkta c apkārtnē (skat. 215. zīm.). Atceroties noteiktā integrāļa ģeometrisko interpretāciju, redzams, ka jau šajā apkārtnē integrāļa vērtība ir negatīva; pārējā intervāla [0; 2π] daļā integrāļa vērtība nav pozitīva. Tāpēc mēs iegūtu $\int_0^{2\pi} f(x)dx < 0,$ bet tā ir pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un jāpastāv tādam x, ka f(x) > 0. Līdzīgi varētu pierādīt, ka pastāv arī tāds x, ka f(x) < 0.

Vai mūsu ieviestā funkcija f(x) ir vai nav konstanta? Protams, ja $a_1=a_2= ...= a_n = 0$, tad f(x)=0 visiem x. Pieņemsim, ka ne visi koeficienti $a_1, a_2, ..., a_n$ ir 0, un pieņemsim, ka a_k ir pats "tālākais" no nenulles koeficientiem. Ar matemātiskās indukcijas metodēm pēc parametra n var paralēli pierādīt divus apgalvojumus:

a) katram n cosnx = P_n(cosx), kur $P_n(t)$ ir argumenta t n-tās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem un pozitīvu koeficientu pie vecākā locekļa,

b) katram n sinnx = sinx. Q_{n-1}(cosx), kur $Q_{n-1}(t)$ ir (n - 1)-ās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem un pozitīvu koeficientu pie vecākā locekļa. (Pierādīt to patstāvīgi.)

Izmantojot šo rezultātu, iegūstam, ka f(x) = T_k(cosx), kur $T_k(t)$ ir k-tās pakāpes polinoms ar argumentu t. Ja f(x) = c visiem x (c - konstante), tad $T_k(t)$ = c visiem t no intervāla [-1; 1]. Bet k-tās pakāpes polinomam nav vairāk par k reālām saknēm; tāpēc intervālā [-1; 1] jābūt tādiem skaitļiem t_0, ka $T_k(t_0) \neq c$. Tātad f(x) nav konstante.

172. piemērs. Dots, ka $a_1, a_2, ..., a_n$ - kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka visu iespējamo izteiksmju $a_i a_j / (i+j-1)$ summa, kur i un j neatkarīgi vienam no otra ir vērtības no 1 līdz n, nav negatīva.

Atrisinājums. Aplūkosim funkciju $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1}$. Skaidrs, ka $(f(x))^2 \geq 0$. Tāpēc arī $\int_0^1 f^2dx \geq 0.$ Bet

$$f^2 = a_1 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_2x + a_1 \cdot a_3x^2 + ... + a_1 \cdot a_nx^{n-1} +$$

$$+ a_2x \cdot a_1 + a_2x \cdot a_2x + a_2x \cdot a_3x^2 + ... + a_2x \cdot a_nx^{n-1} +$$

$$+ a_3x^2 \cdot a_1 + a_3x^2 \cdot a_2x + a_3x^2 \cdot a_3x^2 + ... + a_3x^2 \cdot a_nx^{n-1} +$$

$$...$$

$$+ a_nx^{n-1} \cdot a_1 + a_nx^{n-1} \cdot a_2x + a_nx^{n-1} \cdot a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1} \cdot a_nx^{n-1}.$$

Tātad

$$\int_0^1 f^2dx = \frac{a_1\cdot a_1}{1}\cdot x\Big|_0^1 + \frac{a_1\cdot a_2}{2}\cdot x^2\Big|_0^1 + \frac{a_1\cdot a_3}{3}\cdot x^3\Big|_0^1 + \ldots + \frac{a_1\cdot a_n}{n}\cdot x^n\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{a_2\cdot a_1}{2}\cdot x^2\Big|_0^1 + \frac{a_2\cdot a_2}{3}\cdot x^3\Big|_0^1 + \frac{a_2\cdot a_3}{4}\cdot x^4\Big|_0^1 + \ldots + \frac{a_2\cdot a_n}{n+1}\cdot x^{n+1}\Big|_0^1 +$$

$$\ldots$$

$$+\frac{a_n\cdot a_1}{n}\cdot x^n\Big|_0^1 + \frac{a_n\cdot a_2}{n+1}\cdot x^{n+1}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{a_n\cdot a_n}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\Big|_0^1$$

kas, kā viegli pārliecināties, arī ir uzdevuma nosacījumos minētā summa.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

274.° Doti 5 reāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties un apzīmēt ar burtiem x un y tādus divus skaitļus, ka $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$.

275.° Doti 6 nenulles skaitļi a; b; c; d; e; f. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$, $\frac{ae+bf}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{e^2+f^2}}$, $\frac{ce+df}{\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{e^2+f^2}}$ nav mazāks par $(-\frac{1}{2})$.

276. Pierādīt: lai kādi arī būtu skaitļi a; b; c; d, nevienādībai $|a+b\cos x+c\cos 2x+d\cos 3x| \geq |b+d|$ eksistē atrisinājums.

277.[k] Apskatīsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2q}x_q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases},$$

kurā mainīgo skaits q ir divas reizes lielāks par vienādojumu skaitu p, bet visi koeficienti a_{ij} ir no kopas {-1; 0; 1}. Pierādīt, ka šai sistēmai eksistē atrisinājums, kurā visu mainīgo vērtības ir veseli skaitļi, vismaz viena no tām nav 0 un neviena mainīgā vērtība pēc moduļa nepārsniedz q.

278.[k] Doti n reāli skaitļi x_1; x_2;...; x_n, kas apmierina sakarību $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Skaitlis k ir naturāls, $k \geq 2$. Pierādīt, ka var atrast tādus veselus skaitļus a_1; a_2; ...; a_n, kas visi reizē nav nulle, neviens pēc moduļa nepārsniedz k -1 un apmierina nevienādību

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

279.* Funkcija f(x) ir visur definēta, un tai eksistē atvasinājums visos skaitļu taisnes punktos. Pierādīt, ka eksistē tāda x vērtība, ka $|x| \leq 2$ un $f'(x) < 1 + (f(x))^2$.

280. Dots, ka $a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \ldots + a_n/(n+1) = 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ ir sakne c, kas apmierina nosacījumus $0 < c < 1$.

281.* Atrisināt 172. piemēru, ja saskaitāmos $\frac{a_ia_j}{i+j-1}$ aizstāj ar saskaitāmajiem $\frac{a_ia_j}{i+j}$.

282. Dots, ka α_1, α_2..., α_n - kaut kādi leņķi. Pierādīt, ka eksistē tāds x, ka

$$|\cos(x+\alpha_1)| + |\cos(x+\alpha_2)| + \ldots + |\cos(x+\alpha_n)| > 2n/\pi.$$

283. Intervālā starp 1 un 1000000 atrodas 101 reāls skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties un apzīmēt ar x un y divus skaitļus tā, ka ir spēkā nevienādība $0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}$.

6. 2. Varbūtību teorijas metodes nevienādību pierādīšanā

Mēs uzskatām, ka lasītājs pazīstams ar varbūtību teorijas elementārākajiem jēdzieniem un faktoriem. Mūsu spriedumos galvenā nozīme būs šādiem rezultātiem.

Teorēma. Ja A_1, A_2, ... ,A_n - pa pāriem nesavietojami notikumi un to iestāšanās varbūtības ir atbilstoši $p(A_1)$, $p(A_2)$,..., $p(A_n)$, tad $p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n) \leq 1$.

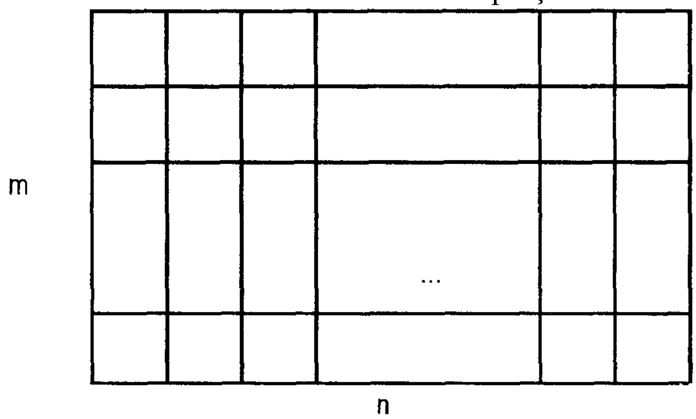
Teorēma. Ja kādam no notikumiem A_1, A_2, ... ,A_n neizbēgami jāiestājas un to iestāšanās varbūtības ir atbilstoši $p(A_1)$, $p(A_2)$, ..., $p(A_n)$, tad $p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n) \geq 1$.

Šo teorēmu sakars ar vidējās vērtības metodi vislabāk redzams, atceroties varbūtību ģeometrisko interpretāciju. Ja kvadrāts, kura izmēri ir 1 x 1, attēlo visu pilno notikumu (neizbēgamo notikumu, kura varbūtība ir 1), tad notikumus A_1, A_2, ..., A_n attēlo šī kvadrāta daļas; to varbūtības var interpretēt kā atbilstošo daļu laukumus. Ja notikumi ir nesavietojami, tad daļām nav kopīgu punktu; tātad to laukumu summa nepārsniedz lielā kvadrāta laukumu, t.i., 1. Ja kādam no notikumiem A_1, A_2, ... ,A_n noteikti jāiestājas, tad atbilstošās daļas pārklāj visu kvadrātu, tātad to laukumu summa nav mazāka par kvadrāta laukumu, t.i., par 1. Parādīsim, kā šīs teorēmas tiek lietotas uzdevumu risināšanā.

173. piemērs. Pieņemsim, ka p un q ir pozitīvi skaitļi un $p+q=1$, bet m un n ir naturāli skaitļi, $m \geq 2$ un $n \geq 2$. Pierādīt nevienādību $(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1$.

Atrisinājums. Aplūkosim taisnstūrveida tabulu, kas sastāv no m x n rūtiņām. Pieņemsim, ka katrā rūtiņā ar varbūtību p tiek ierakstīta nulle un ar varbūtību q tiek ierakstīts vieninieks. Katrā rūtiņā ierakstīšana notiek neatkarīgi no pārējām rūtiņām (216. zīm.).

Aplūkosim vairākus saliktus notikumus un aprēķināsim to varbūtības.



216. zīm.

N1: visās kādas (patvaļīgi izvēlētas) kolonnas rūtiņās ierakstīta nulle. Tā kā šādu rūtiņu pavisam ir m, tad notikuma N1 varbūtība ir p^m.

N2: kaut vienā kādas (patvaļīgi izvēlētas) kolonnas rūtiņā ierakstīts vieninieks. Tā kā N2 ir pretējs notikumam N1, tad N2 varbūtība ir $1 - p^m$.

N3: katrā kolonnā kaut vienā rūtiņā ierakstīts vieninieks. Šis notikums sastāv no n neatkarīgajiem notikumiem, no kuriem katrs ir N2 tipa. Tāpēc N3 varbūtība ir $(1 - p^m)^n$.

N4: notikumam N3 pretējais notikums, kura varbūtība tātad ir $1 - (1 - p^m)^n$ ir šāds: "ir kaut viena kolonna, kurā nevienā rūtiņā nav vieninieka", vai, citiem vārdiem, "ir kaut viena kolonna, kas sastāv tikai no nullēm."

Analoģiski spriežot, iegūstam, ka notikuma N5 "ir kaut viena rinda, kas sastāv tikai no vieniniekiem" varbūtība ir $1 - (1 - q^n)^m$.

Notikumi N4 un N5 ir nesavietojami. Tiešām, ja tie iestātos vienlaicīgi, tad tabulā vienlaicīgi būtu no nullēm sastāvoša kolonna un no vieniniekiem sastāvoša rinda, un tad nav skaidrs, kas atrastos šīs rindas un kolonnas "krustpunktā". Bet nesavietojamu notikumu varbūtību summa nepārsniedz 1, tāpēc

$$1 - (1 - p^m)^n + 1 - (1 - q^n)^m \le 1, (*)$$

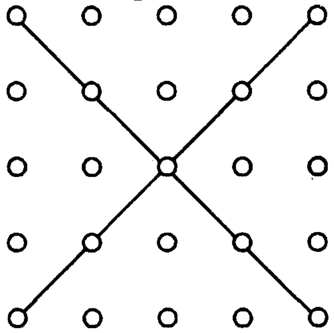
no kurienes viegli iegūstam vajadzīgo.

Viegli saprast: ja $m \ge 2$ un $n \ge 2$, tad bez notikumiem N4 un N5 iespējamas arī citas situācijas, t.i., N4 un N5 neveido "izsmeļošu" notikumu sistēmu. Tāpēc nevienādība (*) kļūst stingra, un līdz ar to stingra kļūst arī pierādāmā nevienādība.

Aplūkosim piemēru, kad varbūtību aprēķins ir sarežģītāks.

174. piemērs. *Dots, ka $p_1+p_2+p_3 = 1$ un $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$. Pierādīt, ka* $(1-p_1^5)^5 + (1-p_2^5)^5 \ge 1 + 2p_3^5 - p_3^9$.

Atrisinājums. Aplūkosim 217. zīmējumā parādīto shēmu, kas sastāv no 5x5 kvadrātiska režģa formā izvietotiem aplīšiem; tabulā atzīmētas abas diagonāles.



217. zīm.

Pieņemsim, ka katru aplīti nokrāso zaļu, dzeltenu vai sarkanu, pie tam katra aplīša krāsošana ir neatkarīga no pārējo aplīšu krāsas un katrā aplītī krāsu izvēles varbūtība ir attiecīgi p_1, p_2, un p_3. Tāpat kā iepriekšējā piemērā, ir viegli aprēķināt, ka $1 - (1 - p_1^5)^5$ ir varbūtība notikumam A_1: "eksistē rinda, kurā visi aplīši ir zaļi", bet $1 - (1 - p_2^5)^5$ ir varbūtība notikumam A_2: "eksistē kolonna, kurā visi aplīši ir dzelteni".

Aplūkosim vēl notikumu A_3: "vismaz vienā no abām 217. zīmējumā attēlotajām diagonālēm visi aplīši ir sarkani", un aprēķināsim $p(A_3)$.

Ja C_1 un C_2 ir notikumi, kad augšupejošā, resp., lejupejošā diagonāle visa ir sarkana, tad acīmredzot $p(A_3) = p(C_1) + p(C_2) - p(C_1\&C_2)$; viegli saprast, ka $p(C_1) = p(C_2) = p_3^5$, bet $p(C_1\&C_2) = p_3^9$. Tāpēc $p(A_3) = p_3^5 + p_3^5 - p_3^9 = 2p_3^5 - p_3^9$.

Skaidrs, ka notikumi A_1; A_2; A_3 ir pa pāriem nesavietojami. Tāpēc

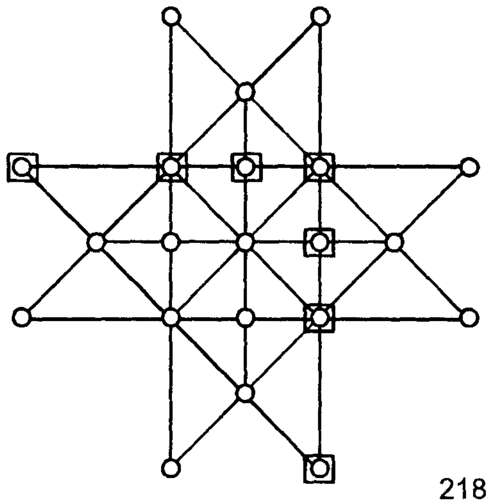
$1 - (1 - p_2^5)^5 + 1 - (1 - p_2^5)^5 + 2p_3^5 - p_3^9 \le 1$, no kurienes iegūstam vajadzīgo.

(Tā kā iespējams arī, ka neiestājas ne notikums A_1, ne A_2, ne A_3, tad patiesībā $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3) < 1$ un ir pierādīts, ka nevienādības zīmi "$\le$" var aizstāt ar "$<$".)

Dažreiz nevienādību pierādījumos minēto metodi lieto, izmantojot arī daudz sarežģītākus zīmējumus.

175. piemērs. *Dots, ka $p_1 > 0$; $p_2 > 0$; ...; $p_5 > 0$, $p_1 + p_2 + ... + p_5 = 1$. Pierādīt, ka* $(1-p_1^5)^3 + (1-p_2^5)^3 + (1-p_3^3)(1-p_5^3)^2 + (1-p_3^4)(1-p_4^5) \ge 3 + p_5^7$.

Atrisinājums. Apskatīsim 218. zīmējumu.



218. zīm.

Pieņemsim, ka katru aplīti krāso kādā no krāsām 1; 2; 3; 4 vai 5 (krāsā i - ar varbūtību p_i) neatkarīgi no pārējiem aplīšiem. Tāpat kā iepriekšējos piemēros, viegli aprēķināt, ka

$1 - (1 - p_1^5)^3$ ir varbūtība notikumam A1: "kāda no trim vertikālēm pilnībā nokrāsota krāsā 1";

$1 - (1 - p_2^5)^3$ ir varbūtība notikumam A2: "kāda no trim horizontālēm pilnībā nokrāsota krāsā 2";

$1 - (1 - p_3^3)(1 - p_3^5)$ ir varbūtība notikumam A3: "kāda no diagonālēm, kas iet virzienā /, pilnībā nokrāsota krāsā 3";

$1 - (1 - p_4^3)(1 - p_4^5)$ ir varbūtība notikumam A4: "kāda no diagonālēm, kas iet virzienā \, pilnībā nokrāsota krāsā 4";

p_5^7 ir varbūtība notikumam A5: visi ar kvadrātiņiem apvilktie aplīši nokrāsoti krāsā 5.

Tā kā A_1; A_2; A_3; A_4; A_5 ir pa pāriem nesavietojami notikumi, tad $p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_5) \leq 1$, no kurienes seko vajadzīgā nevienādība.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

284. Pierādīt nevienādību $(1 - p)^2 \leq (1 - p^4)(1 - p^2)$, ja $0 \leq p \leq 1$.
285. Pierādīt nevienādību $1 + p^3 \leq (1 - q^3)^3 + (1 - n^3)^3$, ja $p, q, n > 0$ un $p+q+n=1$.
286. Vispārināt iepriekšējā uzdevuma nevienādību.
287. Pierādīt nevienādību $(1 - p_2^5)^5 + (1 - p_3^5)^2 + (1 - p_4^4)^3 \geq 2 + p_1^6$, ja $p_1 > 0, ..., p_4 > 0$ un $p_1+p_2+p_3+p_4=1$.
288. Pierādīt nevienādību $p_1^7 + p_2^7 \leq (1 - p_3^7)^3$, ja $p_1+p_2+p_3= 1$ un $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$.
289. Pierādīt nevienādību $(1 - x_1x_2... x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m)... (1 - y_n^m) \geq 1$, ja $x_i > 0$, $y_i > 0$ un $x_i+y_i=1$ $(i= 1; 2; ...; n)$.
290. Pamēģiniet paši sastādīt un pierādīt līdzīgas nevienādības!

6. 3. Nevienādību pierādīšana, izmantojot jēdzienu par smaguma centru

4. nodaļā redzējām, kā jēdzienu par vidējo vērtību var vispārināt "materiāliem punktiem", un parādījām iegūtā smaguma centra jēdziena lietojumu ģeometrijas uzdevumu risināšanā.

Šeit parādīsim, kā šo jēdzienu var izmantot nevienādību pierādīšanā. Vispirms minēsim mums nepieciešamos faktus.

Smaguma centra koordinātu formulas

Ja Dekarta koordinātu plaknē 0xy doti punkti $A_i(x_i, y_i)$ (i = l; 2;...; n), pie tam i -jā punktā ievietots smagums m_i (i = l; 2;...; n), tad smaguma centra koordinātas ir

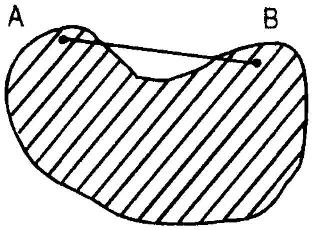
$$x_0 = \frac{m_1x+_1...+m_nx_n}{m_1+...+m_n} \text{ un } y_0 = \frac{m_1y+_1...+m_ny_n}{m_1+...+m_n}.$$

Šīs formulas acīmredzami seko no formulām, kuras iegūtas 142. lpp. un izsaka smaguma centra attālumu līdz asij. Tiešām, Dekarta koordinātu plaknē 0xy punkta A abscisa ir tā attālums līdz 0y asij, bet ordināta - tā attālums līdz 0x asij.

Jēdziens par izliektu figūru

Figūru F sauc par izliektu, ja tai piemīt šāda īpašība: izvēloties jebkurus divus F punktus A un B un novelkot taisnes nogriezni AB, visi šī nogriežņa punkti arī pieder figūrai F.

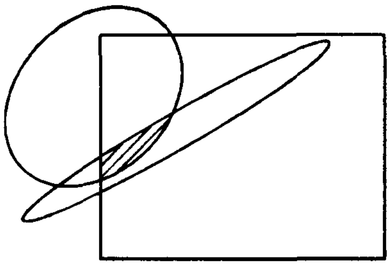
Izliektas figūras piemēri ir riņķis, kvadrāts, visa plakne, parabolas $y = x^2$ apgabals starp tās zariem (pierādīt patstāvīgi!). Figūra, kas parādīta 219. zīmējumā, nav izliekta, jo uz nogriežņa AB atrodas punkti, kas nav šīs figūras punkti.



219. zīm.

Ļoti svarīga ir nākošā izliektu figūru šķēlumu īpašība.

Jebkura daudzuma izliektu figūru šķēlums (t.i., kopējā daļa) arī ir izliekta figūra (skat. 220. zīm.).



220. zīm.

Tiešām, pieņemsim, ka punkti A un B pieder izliektu figūru F_1, F_2, F_3,... šķēlumam, t.i., katrai no šīm figūrām. Tā kā F_i (i = l; 2;...) ir izliektas, tad viss nogrieznis AB pieder šo figūru šķēlumam. Tātad šis šķēlums ir izliekta figūra, kas arī bija jāpierāda.

Smaguma centri izliektās figūras

Mums būs svarīga šāda teorēma par smaguma centra novietojumu.

Teorēma. Ja izliektai figūrai F pieder n punkti A_1, A_2, ..., A_n, kuros ievietoti attiecīgi smagumi m_1, m_2,..., m_n, tad smaguma centrs arī pieder figūrai F.

Apzīmēsim pirmo i punktu A_1, A_2,..., A_i smaguma centru ar S_i un pierādīsim šo apgalvojumu ar matemātisko indukciju.

Bāze. Ja n= 1, $S_1=A_1\in$ F.

Ja n = 2, apgalvojuma pareizība izriet no tā, ka divu materiālu punktu A_1 un A_2 smaguma centrs S_2 atrodas uz nogriežņa A_1A_2, tātad saskaņā ar izliektas figūras definīciju pieder F.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka apgalvojums jau pierādīts pirmajiem i punktiem A_1, A_2,...,A_i un to smaguma centrs S_i pieder figūrai F. Tad i + 1 punktu A_1, A_2,..., A_i, A_{i+1}

smaguma centru var atrast kā S_i un A_{i+1} smaguma centru, saskaņā ar pierādīto bāzi pie n = 2 arī šis smaguma centrs S_{i+1} pieder figūrai F. Induktīvā pāreja izdarīta, apgalvojums pierādīts.

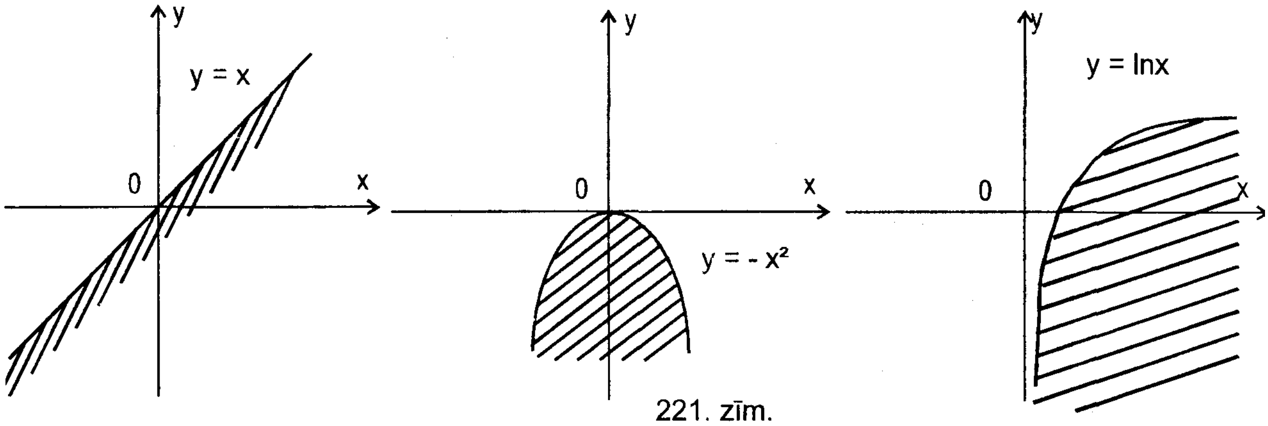
Lasītājs var viegli pierādīt arī šādu rezultātu: iepriekšējās teorēmas situācijā minēto n punktu smaguma centrs atrodas izliektās figūras iekšpusē, izņemot gadījumu, kad visi punkti $A_1, A_2, ..., A_n$ pieder taisnes nogrieznim, kas viss atrodas uz figūras kontūra (speciālgadījumā visi šie punkti sakrīt).

Jēdziens par izliektu funkciju

Sākumā aplūkosim tikai visur definētas nepārtrauktas funkcijas y = f(x).

Funkciju sauc par izliektu uz augšu (dažreiz vienkārši par izliektu), ja Dekarta koordinātu plaknes apgabals uz leju no tās grafika (ieskaitot arī pašu grafiku) ir izliekta figūra.

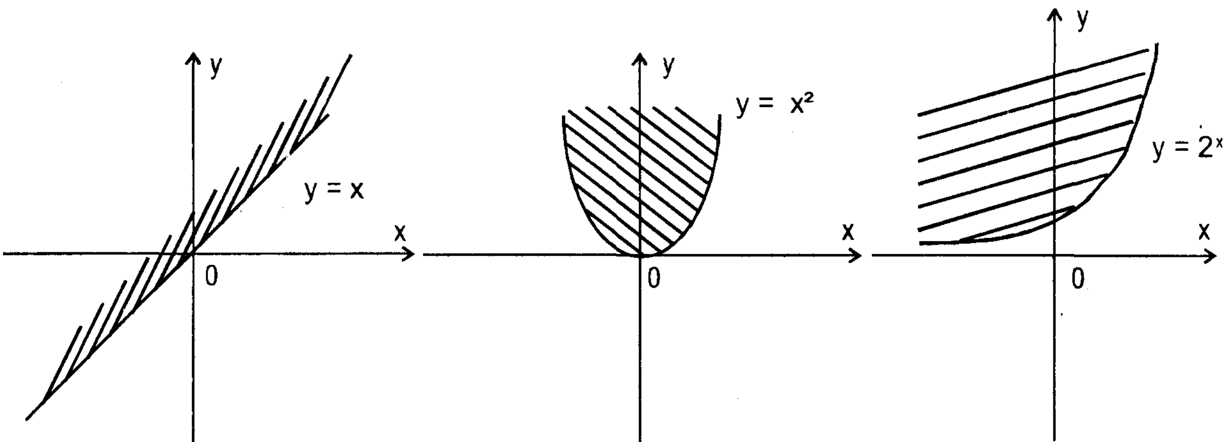
Uz augšu izliektas funkcijas piemērus skat. 221. zīmējumā.



221. zīm.

Funkciju sauc par izliektu uz leju (dažreiz vienkārši par ieliektu), ja Dekarta koordinātu plaknes apgabals uz augšu no tās grafika (ieskaitot arī pašu grafiku) ir izliekta figūra.

Uz leju izliektu funkciju piemērus skat. 222. zīmējumā.



222. zīm.

Viegli saprast: y = f(x) ir izliekta uz leju tad un tikai tad, kad y = - f(x) ir izliekta uz augšu, un otrādi.

Ļoti daudzas nevienādības ir nākošās teorēmas speciālgadījumi.

Jensena nevienādība. Ja f(x) ir uz augšu izliekta funkcija un $m_1, m_2, ..., m_n$ - kaut kādi pozitīvi skaitļi, tad patvaļīgiem $x_1, x_2, ..., x_n$ pastāv nevienādība

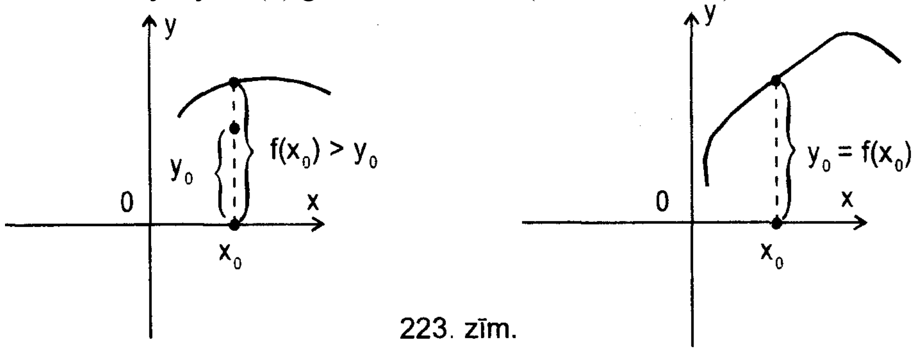
$$f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}\right) \geq \frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+...+m_nf(x_n)}{m_1+m_2+...+m_n}.$$

Ja f(x) ir uz leju izliekta funkcija, tad nevienādības zīme mainās uz pretējo.

Pierādījums. Apskatīsim uz augšu izliektas funkcijas gadījumu. Aplūkosim uz tās grafika punktus ar koordinātēm (x_1; $f(x_1)$), (x_2; $f(x_2)$), ..., (x_n; $f(x_n)$); ievietosim tajos attiecīgi smagumus m_1; m_2; ...; m_n. Saskaņā ar formulām 188. lpp. smaguma centra koordinātes ir

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \text{ un } y_0 = \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \ldots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Saskaņā ar teorēmu par smaguma centra novietojumu punkts ar koordinātām (x_0;y_0) atrodas vai nu zem funkcijas y = f(x) grafika, vai uz tā (skat. 223. zīm.).



223. zīm.

Pirmajā gadījumā $f(x_0) > y_0$, otrajā gadījumā $f(x_0) = y_0$. Līdz ar to Jensena nevienādība ir pierādīta.

Lasītājs pats var pierādīt nevienādību uz leju izliektas funkcijas gadījumam. Skaidrs, ka vienādība y_0= f(x) pastāv tikai tad, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ vai arī visi punkti x_1; x_2;...; x_n pieder tādam apgabalam, kurā funkcija f(x) ir lineāra (atbilstošie grafika punkti atrodas uz taisnes nogriežņa, kas pieder izliektā plaknes apgabala robežai).

Kā pielietot Jensena nevienādību

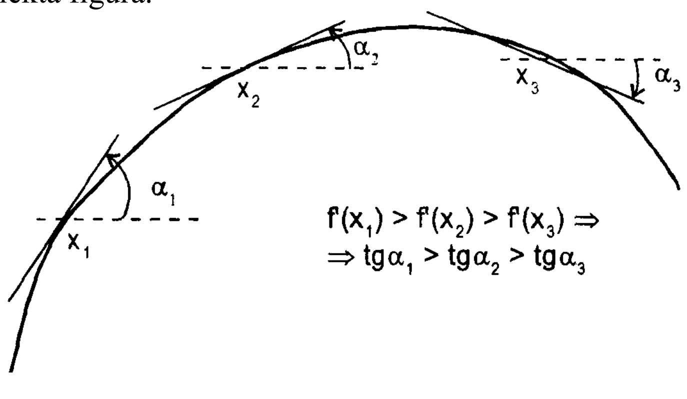
Acīmredzot, lai varētu pielietot Jensena nevienādību, jāprot pazīt uz augšu (uz leju) izliektas funkcijas.

Iepazīsimies ar diviem kritērijiem tam, lai nepārtraukta funkcija f(x) būtu izliekta uz augšu. Tos stingri pierāda matemātiskās analīzes kursā.

1. kritērijs. Funkcija ir izliekta uz augšu, ja tai eksistē otrais atvasinājums un tas nav pozitīvs nevienā skaitļu ass punktā.

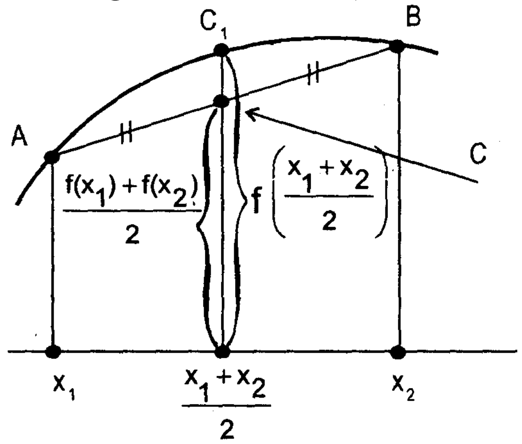
2. kritērijs. Funkcija ir izliekta uz augšu, ja katriem diviem argumentiem x_1 un x_2 pastāv nevienādība $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Pirmā kritērija jēga ir šāda. Ja f "(x) < O, tas nozīmē, ka pirmais atvasinājums f '(x) ir neaugoša funkcija. Tātad funkcijas grafika pieskares virziena koeficients kļūst arvien mazāks, respektīvi, pieskare kļūst aizvien "lēzenāka", pieskaršanas punktam virzoties pa grafiku uz labo pusi. Tātad pieskare "apliec" grafiku no augšas (sk. 224. zīm.), tāpēc arī plaknes daļa zem grafika ir izliekta figūra.



224. zīm.

Otrā kritērija nosacījums izsaka šādu faktu: funkcijas y = f(x) grafika katras hordas AB viduspunkts C atrodas uz grafika vai zem tā (skat. 225. zīm.).

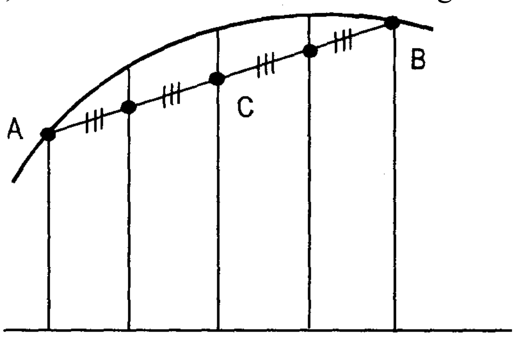


225. zīm.

Mēs apgalvojam, ka nepārtrauktas funkcijas gadījumā no tā seko, ka visi hordas AB punkti atrodas uz f(x) grafika vai zem tā; tādā gadījumā, protams, apgabals zem f(x) grafika ir izliekta figūra. Tātad mums jāpamato pasvītrotais apgalvojums.

Izklāsta īsuma labad vārdu "zem" lietosim nozīmē "vai nu zem grafika, vai uz tā", "vai nu zem otra punkta, vai sakrīt ar to" utt.

Hordas AB viduspunkts C atrodas zem grafika, t.i., zem atbilstošā grafika punkta C_1. Tāpēc AC viduspunkts un CB viduspunkts atrodas zem AC_1 un C_1B viduspunktiem, bet AC_1 un C_1B atrodas zem grafika, tātad arī AC un CB atrodas zem grafika (skat. 226. zīm.).



226. zīm.

Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka arī punkti, kas dala hordu AB astoņās, sešpadsmit,..., 2^n, ... vienādās daļās, atrodas zem grafika. Sauksim šos punktus par vienkāršiem punktiem.

Tomēr uz hordas AB atrodas arī punkti, kas nav vienkārši, piemēram, punkti, kas sadala AB trīs vienādās daļās. Šiem punktiem mūsu apgalvojums pagaidām nav pierādīts. Izdarīsim to. Ievērosim, ka katram punktam Q var atrast tādu vienkāršu punktu virkni $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, kas tiecas uz Q. Visi vienkāršie punkti atrodas zem grafika. Funkcijas nepārtrauktības dēļ arī Q jāatrodas zem grafika. Līdz ar to kritērija pareizība ir pamatota.

Ievērosim, ka 2. kritērijs lietojams daudz plašākam funkciju lokam nekā 1. kritērijs, tomēr 1. kritēriju lietot ir daudz vieglāk.

Līdzīgi minētajiem kritērijiem pamato to variantus, kas lietojami, lai noskaidrotu, vai nepārtraukta funkcija ir izliekta uz leju.

1'. kritērijs. Funkcija ir izliekta uz leju, ja tai eksistē otrais atvasinājums un tas nevienā skaitļu ass punktā nav negatīvs.

2'. kritērijs. Funkcija ir izliekta uz leju, ja katriem diviem punktiem x_1 un x_2 pastāv nevienādība

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Iesakām lasītājam pamatot tos patstāvīgi.

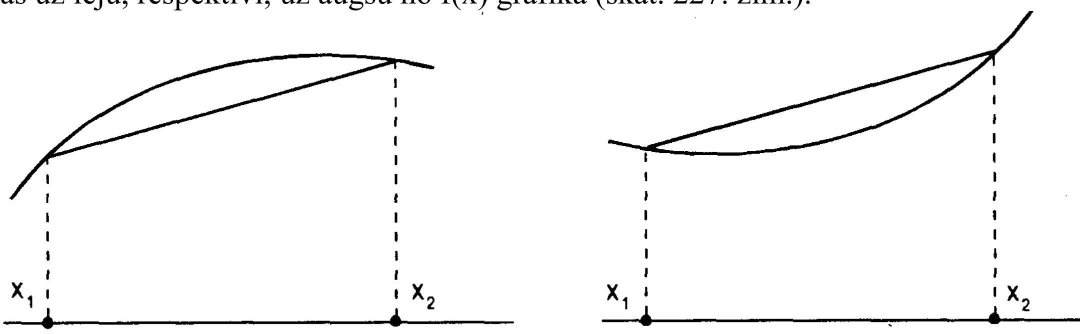
176. piemērs. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4}{n} \geq \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^4.$$ *Noskaidrot, kādos gadījumos pastāv vienādība.*

Atrisinājums. Acīmredzot, pierādāmā nevienādība ir Jensena tipa nevienādība ar funkciju $y= x^4$, kur atbilstošos grafika punktos ievietotās 1 vienību lielas masas ($m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$). Saskaņā ar 1'.kritēriju pārbaudām, vai $y'' > 0$. Tiešām, tā ir: $y' = 4x^3$ un $y'' = 12x^2 \geq 0$. Nevienādība pierādīta.

Tā kā $y' = 0$ tikai vienā punktā ($x = 0$), tad funkcijas grafikā nav taisnes nogriežņa. Tāpēc vienādība iespējama tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 =\ldots = x_n$ (tad visi smagumi atrodas vienā punktā uz grafika un arī smaguma centrs, protams, atrodas turpat); citos gadījumos smaguma centrs atrodas virs grafika un nevienādība ir stingra.

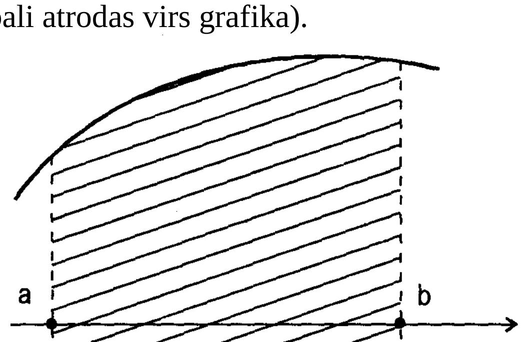
Līdzīga tipa spriedumi piemērojami arī funkcijām, kas nav izliektas uz visas skaitļu ass. Sacīsim, ka funkcija $f(x)$ ir izliekta uz augšu, respektīvi, uz leju, kopā $A(x \in A)$, ja ir spēkā šāds nosacījums: ja $x_1 \in A$ un $x_2 \in A$, tad horda, kas savieno punktus $(x_1; f(x_1))$ un $(x_2\ f(x_2))$, atrodas uz leju, respektīvi, uz augšu no $f(x)$ grafika (skat. 227. zīm.).



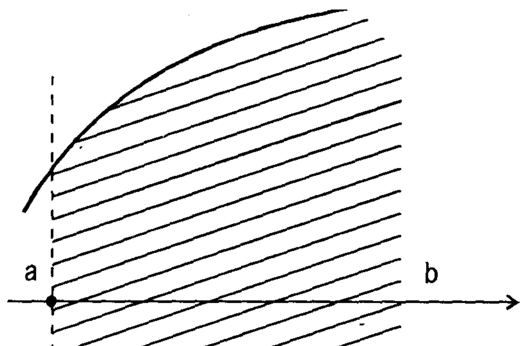
227. zīm.

Gadījumā, ja kopa A ir visa skaitļu ass, iegūstam iepriekšējo definīciju. No citiem gadījumiem mūs interesēs tie gadījumi, kad A ir skaitļu ass galīgs segments vai stars. Šajos gadījumos pareizi ir kritēriji, kas līdzīgi 1. un 2. (resp. 1'. un 2'.) kritērijiem ar acīmredzamām izmaiņām: 1., resp., 1'., kritērija nevienādībai $f'' \leq 0$, resp., $f'' \geq 0$, jābūt spēkā visos kopas A punktos; 2., resp., 2'., kritērijā x_1 un x_2 jāņem no kopas A.

Mūsu paplašinātais izliektās funkcijas jēdziens saskaņots ar izliektās figūras jēdzienu. Tiešām, ja funkcija $y = f(x)$ ir izliekta uz augšu segmentā $(a; b)$, tad plaknes apgabals, kas atrodas uz leju no $y = f(x)$ grafika un starp taisnēm $x = a$ un $x = b$, ir izliekta figūra (skat. 228. zīm.); ja funkcija $y = f(x)$ ir izliekta uz augšu bezgalīgajā starā $(a; +\infty)$, tad plaknes apgabals, kas atrodas uz leju no $y = f(x)$ grafika un pa labi no taisnes $x = a$, ir izliekta figūra. Līdzīgas analoģijas viegli saskatīt segmentā (starā) uz leju izliektām funkcijām (tad izliektie plaknes apgabali atrodas virs grafika).



228. zīm.



229. zīm.

177. piemērs. Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem x_1, x_2, ... x_n ir spēkā nevienādība

$$\sqrt[4]{\frac{x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4}{n}} \geq \sqrt[3]{\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{n}}.$$

Kad pastāv vienādība?

Atrisinājums. Apzīmējam $x_i^3 = a_i$, i = l; 2;...; n. Tad nevienādība pārveidojas par

$$\frac{x_1^{\frac{4}{3}}+x_2^{\frac{4}{3}}+\ldots+x_n^{\frac{4}{3}}}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{\frac{4}{3}}$$

pozitīviem a_1, , a_2,..., a_n. Ievērosim, ka funkcija $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ ir izliekta uz leju apgabalā x>0; tiešām $f' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ un $f'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} > 0$.

Tāpēc nevienādības pareizība izriet no Jensena nevienādības. Tāpat kā iepriekšējā piemērā, izspriežam, ka vienādība pastāv tad un tikai tad, kad $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

178. piemērs. Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem x_1, x_2, ... x_n ir spēkā nevienādība

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Kad pastāv vienādība?

Atrisinājums. Pirmajā brīdī liekas, ka Jensena nevienādību šeit nevar izmantot: labajā pusē nevienādības zīmei atrodas nevis summa, bet reizinājums. Tāpēc vispirms pārveidosim reizinājumu summā; kā zināms, to var izdarīt, lietojot logaritmisko funkciju.
Logaritmējot abas nevienādības puses (lietojam naturālos logaritmus), iegūstam ekvivalentu nevienādību dotajai: $\ln\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n}$. Šīs nevienādības pareizība acīmredzami seko no Jensena nevienādības, ievērojot, ka funkcija y = lnx ir izliekta uz augšu apgabalā x > 0; tiešām, $y' = 1/x$ un $y'' = 1/x^2 < 0$. Kā parasti konstatējam, ka vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Noslēgumā parādīsim vēl vienu paņēmienu, kā konstatēt, ka funkcija ir izliekta uz augšu (uz leju).

Teorēma. Ja $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ ir uz augšu izliektas funkcijas, tad funkcija, kuru definē vienādība $f(x) = \min(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x))$, arī ir izliekta uz augšu.

Pierādījums. No dotā seko, ka Dekarta koordinātu plaknes apgabali, kas atrodas attiecīgi zem f_1, f_2,..., f_n grafikiem, ir izliektas figūras. Tāpēc to kopējā daļa arī ir izliekta figūra. Bet to kopējā daļa ir tieši tie punkti, kas atrodas zem f(x) grafika (pārbaudīt patstāvīgi!). Tātad f(x) ir izliekta uz augšu, kas arī bija jāpārbauda.

Lasītājs pats patstāvīgi var pamatot šādu rezultātu: ja $f_1(x)$,..., $f_n(x)$ ir uz leju izliektas funkcijas, tad funkcija, kuru definē vienādība $f(x) = \max(f_1(x),..., f_n(x))$, arī ir uz leju izliekta funkcija.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

291. Pierādīt nevienādību pozitīviem skaitļiem $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\right)^2$.

292. Pierādīt nevienādību $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ un $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

293. Pierādīt nevienādību $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ un $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

294. Pierādīt nevienādību $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$, ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ un $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

295. Pierādīt, ka pozitīviem a un b pastāv nevienādība

$$\frac{a^2 + a^3 + b^2 + b^3 - |a^2 - a^3| - |b^2 - b^3|}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left|\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right|$$

7. nodaļa. Metodes izmantošana datorzinātnē

Šajā nodaļā aplūkoti daži Dirihlē principa un vidējās vērtības jēdziena lietojumi teorētiskajā datorzinātne - vienā no modernākajām zinātnes nozarēm, kas radusies tikai 20.gs. 30. gadu beigās. Protams, mēs nevaram šeit aptvert visus daudzveidīgos vidējās vērtības metodes lietojumus šajā jomā, turklāt jārēķinās ar to, ka lasītājam nav vajadzīgo priekšzināšanu.

Katra punkta ietvaros tiks sniegti pamatjēdzieni, kas nepieciešami tā izpratnei. Mēs uzskatām, ka lasītājs ir pazīstams ar vispārīgo algoritma jēdzienu.

7. 1. Stratēģiju optimizēšana

Šajā punktā aplūkosim paņēmienus, kā dažādu uzdevumu risināšanai tiek izstrādāti optimāli algoritmi un pierādīta to optimalitāte. Dirihlē princips un vidējās vērtības metode ir galvenie līdzekļi algoritma optimalitātes pierādījumos.

7. 1. 1. Turnīru organizēšana

Apskatīsim turnīrus, kuros piedalās n dalībnieki ($n \geq 2$) un katram ar katru paredzēts sacensties tieši vienu reizi, pie tam neizšķirtu rezultātu nav. Dalībniekus bieži attēlosim ar punktiem un apzīmēsim ar burtiem (varbūt lietojot arī indeksus). To, ka dalībnieks A uzvarējis dalībnieku B, attēlosim ar pierakstu $A \rightarrow B$.

Aplūkosim tikai monotonus turnīrus. Par monotoniem sauc tādus turnīrus, kuros uzvarētājs pieveic visus savus sāncenšus, otrās vietas ieguvējs - visus, izņemot čempionu, bronzas medaļas ieguvējs - visus, izņemot čempionu un vicečempionu, utt.; pēdējās vietas ieguvējs zaudē visiem citiem turnīra dalībniekiem. Var iztēloties, ka spēlētāju prasmi raksturo skaitļi (visiem spēlētājiem tie ir dažādi), un savstarpējā spēlē no diviem vienmēr uzvar tas, kam šis skaitlis ir lielāks.

Pieņemsim, ka par turnīru jau ir zināms, ka tas būs monotons. Kā to organizēt, lai būtu jāspēlē iespējami maz spēļu?

Atbilde uz jautājumu atkarīga no tā, ko mēs vēlamies noskaidrot ar turnīra palīdzību.

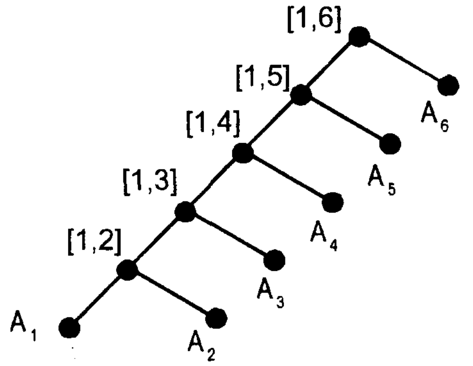
7.1.1.1. Uzvarētāja noskaidrošana

Ja mēs vēlamies tikai noskaidrot pašu spēcīgāko turnīra dalībnieku, var rīkoties šādi.

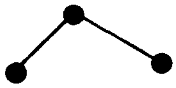
Vispirms sacenšas divi dalībnieki. Uzvarētājs sacenšas ar kādu no pārējiem dalībniekiem, šīs spēles uzvarētājs atkal sacenšas ar kādu no pārējiem utt., kamēr visi dalībnieki izspēlējuši vismaz vienu spēli. Pēdējās, (n-1)-ās spēles uzvarētājs tiek pasludināts par visa turnīra uzvarētāju.

Tas, ka šādā ceļā noskaidro turnīra uzvarētāju, ir gandrīz acīmredzams. Tiešām, katrs cits, izņemot pēdējās spēles uzvarētāju, kādam ir zaudējis, tātad nevar pretendēt uz visstiprākā spēlētāja godu.

Vai mērķi nevarēja sasniegt ar mazāku spēļu skaitu nekā $n - 1$? Pierādīsim, ka nē - mūsu uzrādītais algoritms spēļu skaita ziņā ir visekonomiskākais. Tiešām, neatkarīgi no tā, kā tiek organizēts turnīrs, katrā spēlē zaudējumu cieš viens spēlētājs. Ja tiktu izspēlētas ne vairāk kā $n - 2$ spēles, tad ne vairāk kā $n - 2$ spēlētāji būtu kādreiz zaudējuši (zaudējušo spēlētāju varētu būt pat mazāk, ja kāds no tiem būtu zaudējis vairāk nekā vienā spēlē). Tātad būtu vismaz $n-(n-2)=2$ spēlētāji, kas nav zaudējuši ne reizes. Katrs no tiem var būt visspēcīgākais, un līdzšinējo spēļu rezultāti neļauj starp tiem izvēlēties čempionu. Tātad ar $n - 2$ spēlēm čempiona noskaidrošanai nevar pietikt nevienā gadījumā. Atzīmēsim, ka shēmu, pēc kuras atradām čempionu, var uzskatāmi attēlot, kā parādīts 230. zīmējumā (tur $n = 6$):



230. zīm.

Ja divi spēlētāji atrodas "jumtiņa"  apakšējos punktos, tad virsotnē ierakstām to, kas uzvarējis viņu savstarpējā spēlē. Ar [a,b] apzīmēts spēlētājs, kas ir spēcīgākais starp spēlētājiem ar numuriem a; a + 1; a + 2;...; b.

Līdzšinējo spriedumu rezultātus var formulēt teorēmas veidā.

<u>Teorēma.</u> Monotonā turnīrā čempiona noskaidrošanai nepieciešamas un pietiekamas (n -1) spēles, ja n ir turnīra dalībnieku skaits.

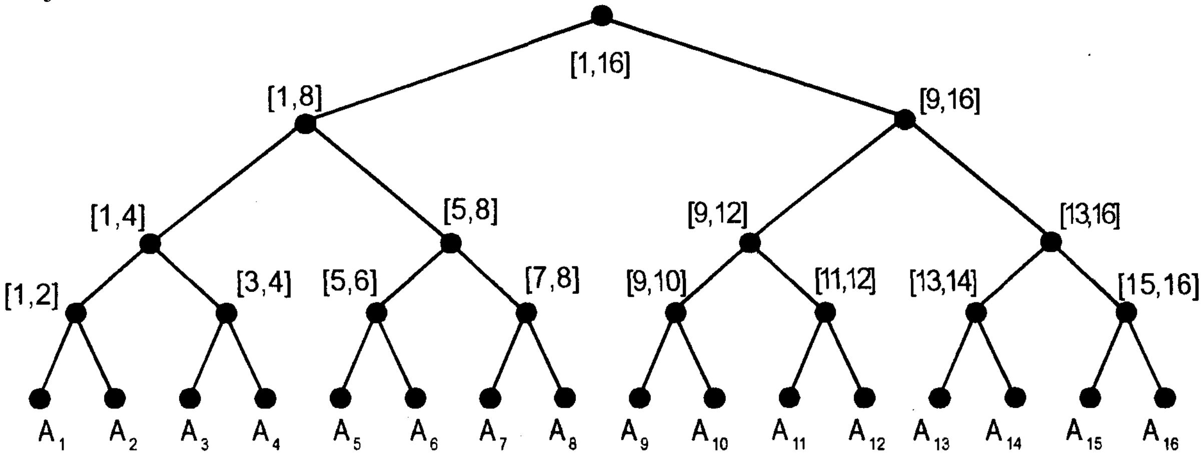
7.1.1.2. Čempiona un vicečempiona noskaidrošana

Tagad apskatīsim sarežģītāku situāciju - kad jānoskaidro gan spēcīgākais, gan otrais spēcīgākais spēlētājs (piemēram, jānoskaidro valsts pārstāvis olimpiādē un rezervists). Uzskatāmības labad līdz ar vispārīgo gadījumu apskatīsim gadījumu, kad n = 16.

Pirmā doma, kas nāk prātā - vispirms atrast čempionu ar iepriekšējā apakšpunkta metodi, bet pēc tam no atlikušajiem n-1 spēlētājiem ar to pašu metodi atrast spēcīgāko - tas būs vicečempions. Tādējādi būs jāspēlē (n - 1) + (n - 2) = 2n - 3 spēles (mūsu speciālajā gadījumā 29 spēles).

Taču ir šaubas par šāda paņēmiena lietderību. Patiešām, šādi rīkojoties, vicečempiona atrašanas procesā gandrīz nemaz netiek izmantota tā informācija, ko esam ieguvuši, meklējot čempionu (izmantojam tikai to faktu, ka par čempionu nebūs vicečempions, un tāpēc vicečempionu meklējam nevis kā spēcīgāko starp 16 spēlētājiem, bet kā spēcīgāko starp 15 spēlētājiem). Varbūt čempionu var atrast citādi nekā iepriekšējā apakšpunktā?

Apskatīsim 231. zīmējumā attēloto shēmu; lietotie apzīmējumi ir tādi paši kā 230. zīmējumā.



231. zīm.

Te parādīts, kā tiek noskaidrots čempions pēc klasiskās olimpiskās shēmas: astotdaļfināls, ceturtdaļfināls, pusfināls un fināls. Ievērojiet, ka arī te čempions tiek noskaidrots ar 15 spēlēm! Tomēr, kaut arī šī shēma tiek plaši lietota, fināla zaudētājs (ko parasti pasludina par vicečempionu) nebūt garantēti nav otrais spēcīgākais spēlētājs. Tiešām, var taču gadīties, ka A_1 ir stiprāks par A_2, A_2 par A_3 ..., A_{15} par A_{16}. Tad par vicečempionu pēc klasiskās olimpiskās shēmas tiks pasludināts A_9, kura meistarība patiesībā ir vājākā nekā pusei turnīra dalībnieku!

Kāds papildu darbs vēl jāpaveic, lai, lietojot klasisko olimpisko shēmu čempiona atrašanai, par vicečempionu ar garantiju kļūtu otrs spēcīgākais spēlētājs?

Vispirms ievērosim, ka uz vicečempiona godu var pretendēt tikai tie spēlētāji, kas zaudējuši čempionam. Tiešām, katrs spēlētājs A, kas zaudējis nevis čempionam, bet kādam citam spēlētājam B, ir vājāks gan par B, gan par čempionu, tātad nevar būt otrs spēcīgākais.

Lai arī kurš spēlētājs būtu kļuvis par čempionu, ceļā uz to viņš izcīnījis 4 uzvaras. Tātad vicečempions jāatrod starp tiem 4 spēlētājiem, kas zaudējuši čempionam. Mēs jau zinām, ka spēcīgāko no tiem var noteikt ar 3 spēļu palīdzību (vai nu pēc 230. zīm., vai 231. zīm. attēloto shēmu parauga, vai varbūt vēl kā citādi). Tātad čempionu un vicečempionu var noteikt, kopā izspēlējot 15 + 3 = 18 spēles. Vispārīgā gadījumā pēc šīs metodes spēļu skaits būs ne lielāks par $n - 2 + [\log_2 n]$. (Paskaidrojums: ar $[x]$ apzīmē mazāko veselo skaitli, kas nav mazāks par x. Piemēram $[5] = 5$; $[3{,}8] = 4$.) Vai nevar izstrādāt metodi, kas ļautu spēļu skaitu vēl samazināt? Parādīsim, ka tas nav iespējams.

Pieņemsim, ka n spēlētāju turnīrs beidzies un atrasti gan čempions C, gan vicečempions V. Tas nozīmē, ka neviens no pārējiem n - 2 spēlētājiem vairs nepretendē uz vicečempiona godu. Bet tad katrs no viņiem zaudējis kādam spēlētājam, kas nav čempions. Tiešām, ja kāds spēlētājs X nav zaudējis nevienam, izņemot C, tad nav pamata uzskatīt, ka V ir stiprāks par X. Tātad ir notikušas vismaz n - 2 spēles <u>bez</u> čempiona C līdzdalības.

Parādīsim, ka mēs nevaram garantēt, ka čempions izspēlēs mazāk par $[\log_2 n]$ spēlēm.

Pasludināsim katrā turnīra brīdī par spēlētāja A nozīmību skaitli 2^a, kur a - šajā brīdī A izcīnīto uzvaru skaits. Par turnīra <u>intrigu</u> I katrā brīdī sauksim visu to spēlētāju nozīmību summu, kuri šajā brīdī vēl pretendē kļūt par čempioniem (t.i., nav zaudējuši).

Skaidrs, piemēram, ka pirms turnīra sākuma katra spēlētāja nozīmība ir $2^0 = 1$, bet turnīra intriga ir $1 + ... + 1 = n$ (visi pretendē būt par čempioniem).

Pieņemsim, ka pirms A un B savstarpējās spēles turnīra intriga ir I. Apzīmēsim turnīra intrigu A uzvaras gadījumā ar I_A, bet B uzvaras gadījumā - ar I_B.

<u>Lemma.</u> $I_A + I_B = 2 \cdot I$.

Lai lemmu pierādītu, pietiek atzīmēt, ka uzvaras gadījumā A, resp., B, nozīmība divkāršojas, zaudējuma gadījumā tā kļūst 0, bet pārējo spēlētāju nozīmība A un B spēles rezultātā nemainās. Lemma pierādīta.

No šejienes varam secināt, ka vai nu $I_A \geq I$, vai $I_B \geq I$.

Pieņemsim, ka turnīrā visas spēles beidzas tā, ka turnīra intriga vai nu nemainās, vai palielinās (mums jābūt gataviem arī uz tādu pavērsienu).

Tas nozīmē, ka turnīra beigās vienīgā čempiona nosaukuma pretendenta (paša čempiona!) nozīmība ir vismaz n.

Bet sākumā tā bija 1 un katras viņa izspēlētās spēles rezultātā palielinājās 2 reizes. Ja čempions izspēlējis x spēles, tad jābūt $2^x \geq n$, no kurienes $x \geq \log_2 n$. Tā kā x - vesels skaitlis, tad $x > [\log_2 n]$.

Tātad ar čempiona piedalīšanos izspēlētas vismaz $[\log_2 n]$ spēles, bet bez viņa piedalīšanās -vismaz (n - 2) spēles. Tātad kopā spēļu skaits nav mazāks par $n - 2 + [\log_2 n]$.

Iegūtos rezultātus var formulēt teorēmas veidā.

<u>Teorēma.</u> Monotonā turnīrā čempiona un vicečempiona noskaidrošanai nepieciešamas un pietiekamas $n - 2 + [\log_2 n]$ spēles, ja n ir turnīra dalībnieku skaits.

Atzīmēsim šīs teorēmas būtisko atšķirību no teorēmas par čempiona atrašanu. Tur tika pierādīts, ka nekādos apstākļos čempionu nevar atrast ar mazāk nekā n - 1 spēlēm. Šajā teorēmā "nepieciešams" jāsaprot citādi: lai kādu turnīra organizēšanas stratēģiju mēs izvēlētos, var gadīties, ka nāksies izspēlēt vismaz $n - 2 + [\log_2 n]$ spēles (bet var arī gadīties, ka mēs tiekam galā ar mazāku spēļu skaitu; piemēram, ja gadās tā, ka $A_1 \to A_2 \to ... \to A_{n-1} \to A_n$, tad ar n - 1 spēlēm esam noskaidrojuši gan to, ka A_1 ir čempions, gan to, ka A_2 ir vicečempions).

7. 1. 1. 3. Čempiona, vicečempiona un bronzas medaļas īpašnieka noskaidrošana

Šeit mēs dosim tikai dažus norādījumus un formulēsim rezultātus. Pierādījumus, izmantojot iepriekšējā apakšpunktā veiktos spriedumus kā paraugus, izdariet patstāvīgi!

Teorēma. Čempionu, vicečempionu un bronzas medaļas īpašnieku var atrast, izspēlējot ne vairāk kā $n - 3 + 2 [\log_2 n]$ spēles (ja n = 16, šis skaits ir 21).

Pierādījumā ievērojiet, ka uz bronzas medaļu pretendē tikai tie spēlētāji, kas zaudējuši vicečempionam vai nu čempiona noteikšanas, vai vicečempiona noteikšanas procesā! Padomājiet (tas ir ļoti būtisks pierādījuma etaps), kā organizēt vicečempiona atrašanu pēc tam, kad čempions jau atrasts, lai garantētu iespējami maz kandidātu uz bronzas medaļu (iepriekšējā apakšpunktā vicečempionu var meklēt jebkurā veidā)!

Teorēma. Čempiona, vicečempiona un bronzas medaļas īpašnieka atrašanai jāizspēlē vismaz $n - 3 + [\log_2(n (n - 1))]$ spēles (ja n = 16, šis skaits ir 21).

Pierādījumā atsevišķi uzskaitiet spēles, kurās nepiedalās ne čempions, ne vicečempions (tām jābūt vismaz n - 3), un spēles ar viņu piedalīšanos! Otrā tipa spēļu uzskaitīšanai izdevīgi ieviest jēdzienu par spēlētāju pāra nozīmību, kā tas līdzīgi tika darīts 7.1.1.2. apakšpunktā ar jēdzienu par spēlētāja nozīmību.

Abu minēto teorēmu rezultāti parāda: ja $F_3(n)$ ir mazākais spēļu skaits, kas garantē pirmā, otrā un trešā laureāta noteikšanu, tad $n - 3 + [\log_2(n(n - 1))] \leq F_3(n) \leq n - 3 + 2[\log_2 n]$.

Nav grūti saprast, ka šādi iegūtās "augšējās" un "apakšējās" robežas atšķiras ne vairāk kā par 1, bet var arī sakrist (piemēram, pie n = 16). Tātad $F_3(n)$ vērtības ir noskaidrotas "ar precizitāti līdz 1". Tomēr ir bezgalīgi daudz tādu n, kuriem minētās robežas tiešām par 1 atšķiras viena no otras, piemēram, n = 11. Gandrīz nevienam šādam n precīza $F_3(n)$ vērtība nav zināma. Iesakām pacensties patstāvīgi izdarīt atklājumu.

7. 1. 1. 4. Monotonu turnīru pilnīga sakārtošana

Iepriekš centāmies noskaidrot minimālo spēļu skaitu, kas monotonā turnīrā ļauj atrast čempionu, vicečempionu un trešās vietas ieguvēju. Tagad centīsimies noskaidrot, kāds ir minimālais spēļu skaits, kas ļauj pēc spēļu prasmes pilnīgi sakārtot jebkura monotona turnīra dalībniekus. Šo spēļu skaitu n dalībnieku turnīram apzīmēsim ar M(n).

Skaidrs, ka M(2) = 1.

Apskatīsim gadījumu, kad n = 3 un turnīrā piedalās spēlētāji A, B, C. Varam uzskatīt, ka pirmajā spēlē $A \to B$. Ja otrajā spēlē $B \to C$, tad citas spēles vairs nav vajadzīgas. Ja turpretī otrajā spēlē $C \to B$, tad divu spēļu rezultātā esam tikai noskaidrojuši, ka B ir visvājākais turnīra dalībnieks, bet čempiona noskaidrošanai vēl jāizspēlē spēle starp A un C.

Savukārt, ja otrajā spēlē satiekas A un C, tad iznākuma $A \to C$ gadījumā (un uz tādu mums jābūt gataviem) mēs vēl nezinām, kurš no spēlētājiem B un C ir turnīrā pats vājākais. Tā noskaidrošanai jāizspēlē spēle starp B un C.

Minētie spriedumi parāda, ka M(3) =3.

Apskatīsim gadījumu, kad n = 4. Pati vienkāršākā doma ir izspēlēt visas spēles; to pavisam ir 6 (AB, AC, AD, BC, BD, CD). Tad čempions ir tas, kas uzvarējis visās 3 spēlēs, vicečempions - tas, kas uzvarējis visās spēlēs, izņemot spēli pret čempionu, trešās vietas ieguvējs - tas, kas zaudējis tikai čempionam un vicečempionam, bet pēdējais - tas, kas zaudējis visiem pārējiem. Pagaidām mēs zinām, ka $M(4) \leq 6$.

Pierādīsim, ka vienu spēli var ieekonomēt. Sadalīsim vispirms turnīra dalībniekus 2 pāros un liksim katram pārim spēlēt savā starpā. Pēc tam liksim spēlēt abu pāru uzvarētājiem. Šīs spēles uzvarētājs ir čempions. Liksim spēlēt abu pāru zaudētājiem; šīs spēles zaudētājs ir visvājākais turnīrā. Abi pārējie spēlētāji savstarpējā spēlē noskaidro, kurš no tiem ir otrais, bet kurš - trešais.

Šis spriedums ļauj secināt, ka $M(4) \le 5$. Tomēr paliek jautājums - vai ar vēl "viltīgāku" paņēmienu nevarētu 4 dalībnieku monotonu turnīru sakārtot vēl ātrāk? Pagaidām atliksim šī jautājuma risināšanu uz vēlāku laiku.

Apskatīsim gadījumu, kad $n = 5$.

Pašai vienkāršākajai metodei, kad katrs spēlētājs spēlē ar katru, nepieciešamas 10 spēles (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CE, CD, DE). Tad čempions ir tas, kas uzvarējis visās spēlēs, vicečempions - tas, kas uzvarējis visās spēlēs, izņemot spēli ar čempionu, utt. Pagaidām zinām, ka $M(5) \le 10$.

Varētu rīkoties nedaudz "viltīgāk". No iepriekšējā zināms, ka ar 5 spēlēm varam sakārtot 4 dalībniekus; pieņemsim, ka iegūtā kārtība ir $A \to B \to C \to D$. Liekot piektajam dalībniekam E spēlēt pēc kārtas ar A, B, C, D, atrodam vietu, uz kuru viņu pārvietot jau izveidotajā ķēdītē.

Acīmredzot, šī metode parāda, ka $M(5) \le 9$.

Rīkojoties ar lielāku apdomu, varētu iztikt arī ar 8 spēlēm. Pēc tam, kad iegūta ķēdīte $A \to B \to C \to D$, liekam E spēlēt ar B. Ja $E \to B$, tad ar vēl vienu spēli starp A un E iegūstam pilnīgu turnīra sakārtojumu; ja $B \to E$, tad vēl liekam E spēlēt ar C un D. Lielākais iespējamo spēļu skaits ir $5 + 1 + 2 = 8$.

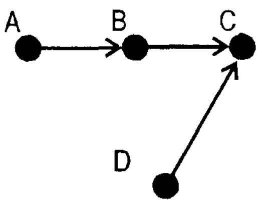
Parādīsim vēl vienu veidu, kā varētu iztikt ar 8 spēlēm. Vispirms ar trim spēlēm sakārtosim trīs dalībniekus, pēc tam liksim savā starpā spēlēt abiem pārējiem dalībniekiem. Ar četru spēļu palīdzību esam ieguvuši divas pagaidām nesaistītās "ķēdītes" (α) $A \to B \to C$ un (β) $D \to E$.

Tagad apvienosim šīs ķēdītes. Vispirms liksim savā starpā spēlēt C un E. Šīs spēles zaudētājs ir pats vājākais dalībnieks: ievietojam to veidojamās turnīra tabulas pēdējā ailē un izņemam no atbilstošās ķēdītes α vai β. Pēc tam liekam savā starpā spēlēt vājākajiem spēlētājiem, kas vēl palikuši ķēdītēs α un β; šīs spēles zaudētājs ir otrais vājākais turnīrā, utt.

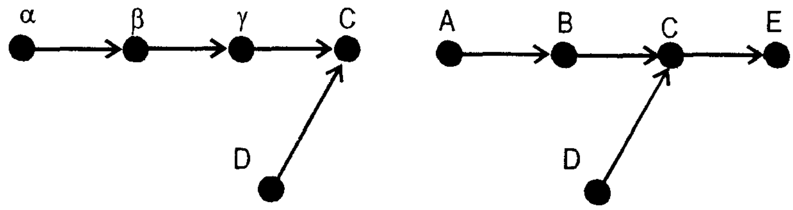
Acīmredzot, šādi jāturpina tik ilgi, kamēr viena no ķēdītēm (α) vai (β) pilnībā "pāriet" uz veidojamo turnīra tabulu. Tad atlikušo vēl neiztukšotās ķēdītes daļu vienkārši pieraksta turnīra tabulas sākumā. Šādai ķēdīšu pakāpeniskai pārnešanai uz tabulu var būt nepieciešamas 4 spēles (pēc 3 spēlēm gan (α), gan (β) vēl var būt palicis pa vienam spēlētājam). Kopā mums jārēķinās ar $3+1+4=8$ spēlēm.

Tātad tagad mēs zinām, ka $M(5) \le 8$. Tomēr izrādās, ka arī tā nav galējā robeža. Parādīsim, ka 5 spēlētāju monotonu turnīru var pilnībā sakārtot ar 7 spēlēm.

Vispirms liksim savā starpā spēlēt diviem spēlētāju pāriem un pēc tam to zaudētājiem. Varam uzskatīt, ka iegūta 232. zīmējumā parādītā aina:



232. zīm.



a 233. zīm. b

Tad liekam spēlēt B un E. Ja $E \to B$, liekam spēlēt A un E; ja $B \to E$, liekam spēlēt C un E. Jebkurā gadījumā iegūstam vienu no 233. zīmējumā parādītajām ainām, pie tam 233. zīmējuma b situācija rodas tikai tad, ja aprakstītajās spēlēs $B \to E$ un $C \to E$; citos gadījumos rodas 233. zīmējuma a situācija, kur $\alpha\beta\gamma$ var būt attiecīgi ABE, AEB vai EAB.

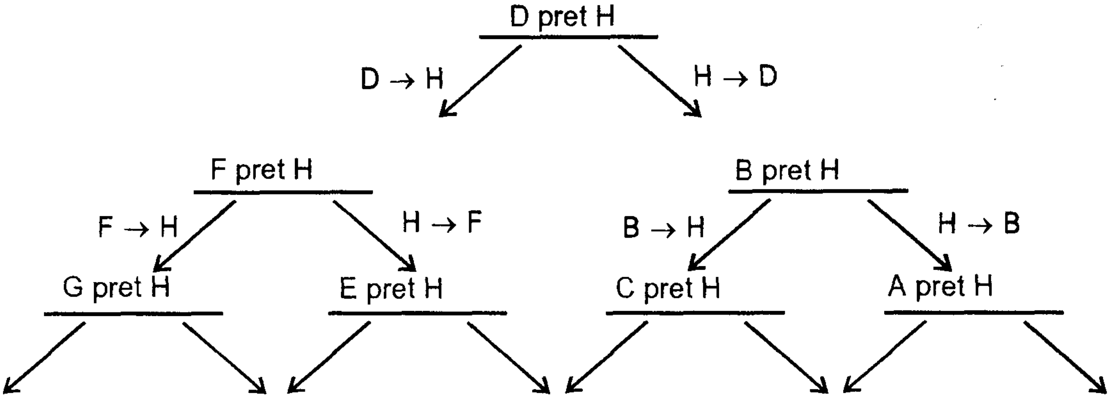
Pagaidām notikušas 5 spēles. Tālāk 233. zīmējuma b gadījumā liekam D spēlēt ar A un B, iegūstot pilnīgu sakārtojumu, bet 233. zīmējuma a gadījumā liekam D spēlēt vispirms ar β, bet tālāk ar α, ja $D \to \beta$, un ar γ, ja $\beta \to D$. Tā rezultātā iegūstam pilnīgu turnīra sakārtojumu, pavisam izmantojot ne vairāk kā 7 spēles.

Tātad tagad jau zinām, ka $M(5) \leq 7$. Vai tā ir galīgā robeža? Pierādiet patstāvīgi, ka $M(6) \leq 10$, izmantojot nupat iegūto rezultātu! Pamēģināsim atrast $M(n)$ novērtējumu no augšas vispārīgā gadījumā.

Rīkojoties pēc visvienkāršākā algoritma (katrs spēlē ar katru), patērēto spēļu skaits ir $V(n)=C_n^2 = \frac{1}{2} n (n - 1)$, t.i., aptuveni proporcionāls lielumam n^2. Tādos gadījumos saka, ka algoritms V ir "ar sarežģītību n^2".

Apskatīsim algoritmu B, ar kura palīdzību mēs pirmo reizi parādījām, ka $M(5) \leq 8$. Vispārīgā gadījumā šī algoritma būtību var aprakstīt šādi: ja ir jau sakārtoti n spēlētāji, tad (n+1)-am spēlētājam liekam spēlēt ar vidējo (vai vienu no vidējiem) šajā n spēlētāju sakārtojumā. Atkarībā no šīs spēles rezultāta (n + 1)-ais spēlētājs jau jāievieto n spēlētāju saraksta kreisajā vai labajā pusē; to darām, atkal salīdzinot viņu ar atbilstošās puses vidējo spēlētāju utt.

Piemēram, ja jau iegūts 7 spēlētāju sakārtojums $A \to B \to C \to D \to E \to F \to G$, tad astotā spēlētāja H "ievietošanu" tajā parāda 234. zīmējumā attēlotā shēma.



234. zīm.

Kā redzams, shēma ļauj atrast, kurā no 8 iepriekšējām vietām (pirms A; starp A un B; ...; pēc G) jāievieto H, izspēlējot pavisam 3 spēles.

Šādu algoritmu B sauc par <u>binārās ievietošanas algoritmu.</u> Pierādiet patstāvīgi, ka n-tā spēlētāja "ievietošanai" n - 1 spēlētāju virknē vajag ne vairāk kā $[\log_2 n]$ spēles! Tātad visu n spēlētāju sakārtošanai ar binārās ievietošanas algoritmu iegūstam $B(n) \leq n[\log_2 n]$. Matemātiķi saka, ka binārās ievietošanas algoritms ir "ar sarežģītību n log n."

Binārās ievietošanas algoritms ir būtiski labāks par iepriekš apskatīto "parasto" algoritmu V. Iegūto novērtējumu attiecība ir $\approx \frac{n}{2 \log_2 n}$. Ja n tuvojas bezgalībai, arī šīs attiecības vērtība tiecas uz bezgalību. Pie n = 1 000 000 tā ir ~ 25 000. Tātad jau pie $n=10^6$ algoritms B ir apmēram 25 000 reizes labāks par algoritmu V.

Apskatīsim vispārīgā veidā algoritmu S, ar kuru mēs otro reizi pierādījām, ka $M(5) \leq 8$. Algoritma S būtība ir sadalīt turnīra spēlētājus divās iespējami vienādās daļās Aun B, sakārtot katru no tām atsevišķi un pēc tam apvienot daļas vienā sarakstā, pakāpeniski salīdzinot abu daļu vājākos spēlētājus. Daļas A un B arī pašas tiek kārtotas līdzīgi.

Piemēram, 8 spēlētāju turnīru vispirms sadala grupās A un B pa 4 spēlētājiem katrā. Katru grupu A un B sadala grupās A_1 un A_2, B_1 un B_2 pa 2 spēlētājiem katrā. Katru no šīm grupām sadala 2 grupās pa 1 spēlētājam katrā. Pēc tam, apvienojot 1 spēlētāju grupas pa 2, ar 4 spēlēm iegūstam A_1, A_2, B_1, B_2 sakārtojumus. Apvienojot A_1 ar A_2, un B_1 ar B_2 (katru reizi patērējot 3 spēles), iegūstam A un B sakārtojumus. Pēc tam ar 7 spēlēm apvienojot A un B, iegūstam visa turnīra sakārtojumu; kopā $S(8) \leq 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 7 = 17$.

Algoritmu S sauc par <u>saliešanas algoritmu</u>. Tas ir tipisks "skaldi un valdi" tipa algoritmu pārstāvis, kuru galvenā būtība ir sadalīt problēmu atsevišķās daļās, risināt to katrai daļai atsevišķi un pēc tam iegūtos rezultātus apvienot.

Apzīmējot maksimālo algoritma S patērēto spēļu skaitu n spēlētāju turnīra gadījumā ar S(n), iegūstam sakarības

$$(*) \qquad \begin{cases} S(1) = 0 \\ S(2n) \le 2S(n) + (2n-1) \\ S(2n+1) \le S(n) + S(n+1)2n. \end{cases}$$

Parādīsim, ka arī algoritms S ir ar sarežģītību n log n: pierādīsim, ka visiem naturāliem n pastāv nevienādība S (n) < $n\log_2 n$. Pierādījumā izmantosim matemātisko indukciju.

Bāzi pie n = 1 pārbauda tieši.

Pieņemsim, ka nevienādība S (k) ≤ $k\log_2 k$ pareiza visiem k, kur k < n. Apskatīsim S(n). Šķirosim divus gadījumus.

1. n - pārskaitlis, n = 2k. Tad saskaņā ar (*), tā kā k < n, iegūstam

$S(n) \le 2S(k)+(2k-1) \le 2k\log_2 k + (2k - 1)$. Lai pierādītu vajadzīgo, pietiek pierādīt, ka $2k\log_2 k + (2k - 1) \le 2k\log_2(2k)$, kas potencējot ekvivalents ar

$k^{2k} \cdot 2^{2k-1} \le (2k)^{2k}$ jeb $k^{2k} \cdot 2^{2k-1} \le 2^{2k} k^{2k}$.

Šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama.

2. n - nepāra skaitlis, n = 2k + 1. Tad saskaņā ar (*), tā kā k < n, iegūstam

$S(n) \le S(k) + S(k + 1) + 2k \le k\log_2 k + (k+ 1)\log_2(k + 1) + 2k$.

Lai pierādītu vajadzīgo, pietiek pierādīt, ka

$k\log_2 k + (k + 1)\log_2(k + 1) + 2k \le (2k + 1)\log_2(2k + 1)$, kas potencējot ekvivalents ar $k^k(k+ 1)^{k+1} \cdot 2^{2k} \le (2k)^{k+1}$ jeb $(4k^2 + 4k)^k \cdot (k + 1) \le (4k^2 + 4k + 1)^k(2k + 1)$.

Arī šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama.

Tātad gan binārās ievietošanas algoritms B, gan saliešanas algoritms S ir ar sarežģītību n log n, t.i., lieliem n tie izturas "apmēram vienādi".

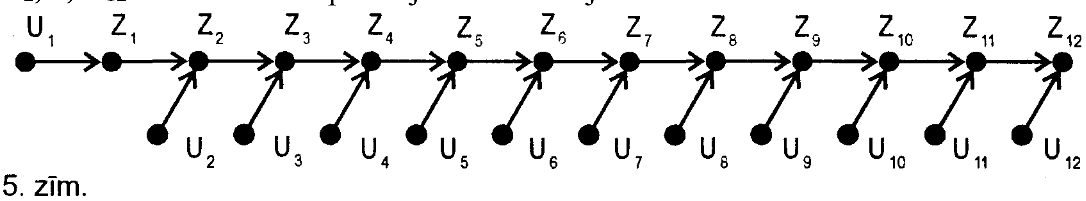
Variet patstāvīgi pārbaudīt, ka S(24) ≤ 89 un B(24) ≤ 89, t.i., 24 spēlētāju gadījumā abi algoritmi dod vienādus rezultātus. Vai tos iespējams uzlabot? Izrādās, ka jā: apvienojot abu minēto algoritmu rezultātus vienā, spēļu skaitu var ievērojami samazināt.

Aplūkosim spēcīgāku algoritmu - Forda - Džonsona algoritmu, kas tā nosaukts savu izgudrotāju - divu amerikāņu matemātiķu vārdā. Šī algoritma patērēto spēļu skaitu n spēlētāju turnīra gadījumā apzīmēsim ar FD(n).

Algoritma darbību ilustrēsim 24 spēlētāju turnīra gadījumā.

1. Vispirms sadalām 24 spēlētājus pa pāriem un liekam katrā pārī apvienotajiem spēlētājiem spēlēt savā starpā.

2. Apskatām atsevišķi zaudētājus. Sakārtojam tos pēc spēles prasmes (kā to izdarīt, apskatīsim vēlāk). Iegūtā situācija parādīta 235. zīmējumā, kur ar $Z_1, Z_2, ..., Z_{12}$ attēloti zaudētāji, bet ar $U_1, U_2, ..., U_{12}$ - ar tiem vienā pārī bijušie uzvarētāji.

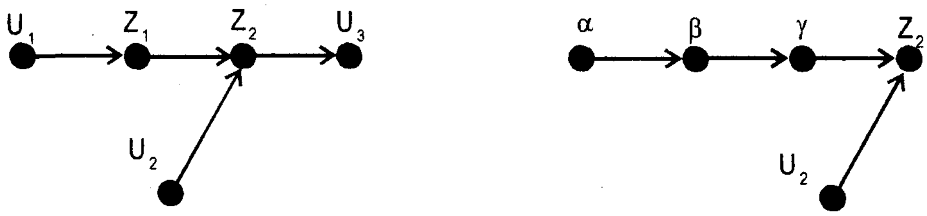


235. zīm.

Ievērosim, ka patlaban virknē jau sakārtoti 13 spēlētāji ($u_1, z_1, z_2, ..., z_{12}$) un pārējie 11 ($u_1, u_2, ... u_{12}$) jāpievieno šai virknei.

Saskaņā ar FD algoritmu vispirms galvenajā virknē jāievieto u_3. Skaidrs, ka u_3 tajā atradīsies pa kreisi no z_3. Liksim u_3 spēlēt ar z_1. Ja $u_3 \rightarrow z_1$ tad tālāk u_3 spēlē ar u_1 ;ja $z_1 \rightarrow u_3$, tad tālāk u_3 spēlē ar z_2. Pēc šīm divām spēlēm u_3 vieta galvenajā virknē ir noskaidrota.

Atkarībā no spēļu iznākumiem shēmas kreisais gals tagad var izskatīties divējādi (sk. 236. zīm.).



a 236. zīm. b

a gadījums iespējams tikai, ja u_3 zaudējis gan z_1, gan z_2; b gadījums rodas, ja u_3 uzvarējis vai nu z_1 , vai otrajā spēlē z_2. Šajā gadījumā α, β un γ var būt u_3, u_1, z_1; u_1, u_3, z_1; u_1, z_1, u_3.

a gadījumā u_2 vietu galvenajā virknē noskaidrojam ar ne vairāk kā divām spēlēm (liekot u_2 spēlēt ar z_1 un uzvaras gadījumā- vēl ar u_1). b gadījumā u_2 vispirms spēlē ar β un pēc tam ar α vai γ.

Tādējādi u_3 un u_2 abi divi ir ievietoti galvenajā virknē, kopā izmantojot ne vairāk kā 4 spēles.

Ievērosim, ka ļoti būtiski bija izvietot u_3 un u_2 tieši šādā kārtībā. Padomāsim, cik spēles tiktu izmantotas, ja vispirms galvenajā virknē ievietotu u_2 un pēc tam u_3.

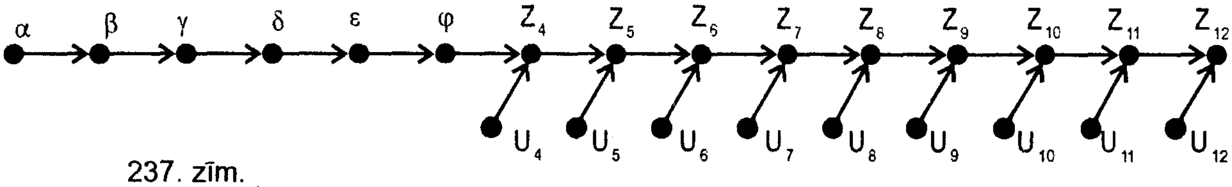
Skaidrs, ka u_2, ievietošanai virknē jārēķinās ar 2 spēlēm. Pēc tam, kad u_2 jau ievietots galvenajā virknē, u_3 jāievieto starp 4 spēlētājiem u_2, u_1, z_1, z_2; mēs to protam izdarīt tikai ar 3 spēlēm, un var pierādīt (kā, tiks skaidrots turpmāk), ka ātrāk tas nav izdarāms. Tātad kopā mēs patērētu 2+3=5 spēles - par vienu vairāk nekā FD algoritmā.

Viegli saprast, kāds mehānisms rada šo atšķirību. Sākumā u_2 "pieļaujamā intervālā" ir 2 spēlētāji: u_1 un z_1. Pēc u_2 ievietošanas virknē u_3 pieļaujamais intervāls, salīdzinot ar u_2 pieļaujamo intervālu, papildus saņem uzreiz divus spēlētājus: u_1 un z_1, un tajā ir 4 spēlētāji. Maksimālais pieļaujamais intervāls, kurā var ievietot spēlētāju, izspēlējot 2 spēles, ir 3; tātad šajā gadījumā u_2 mēs ievietojam īsākā intervālā, nekā varētu, un tāpēc u_3 nācās ievietot jau pārāk garā intervālā.

Ja turpretī virknē vispirms ievieto u_3, tad tā pieļaujamā intervālā ir 3 spēlētāji: u_1, z_1 un z_2.

Pēc u_3 ievietošanas u_2 pieļaujamais intervāls, salīdzinot ar u_3 pieļaujamo intervālu, noteikti zaudē 1 spēlētāju z_2 un varbūt iegūst vienu jaunu spēlētāju u_3, tātad atkal sastāv no ne vairāk kā 3 spēlētājiem. Šajā gadījumā abu spēlētāju pieļaujamie intervāli tiek sadalīti līdzīgāk, un tas arī ļauj ietaupīt vienu spēli.

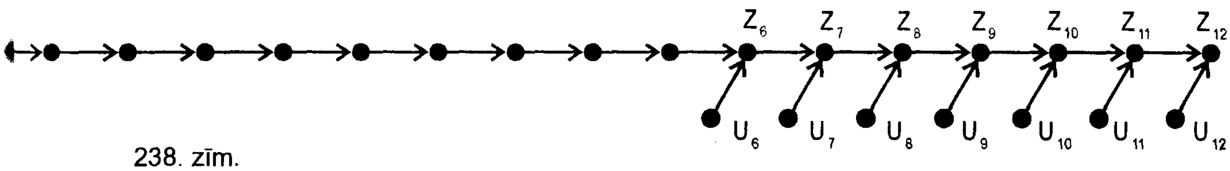
Pēc u_3 un u_2 ievietošanas iegūstam 237. zīmējumā parādīto ainu.



237. zīm.

Te α, β, γ, δ, ε, φ ir kaut kādā secībā izvietojušies spēlētāji u_1, u_2, u_3, z_1, z_2, z_3.

Tā kā 7 ir lielākais jau pilnīgi sakārtotu spēlētāju skaits, starp kuriem var ievietot nākošo spēlētāju, izmantojot 3 spēles, tad FD algoritms kā nākošo ievieto virknē u_5, bet pēc tam - u_4, kopā patērējot 6 spēles (tas notiek ar binārās ievietošanas algoritma palīdzību). Rezultātā izveidojas 238. zīmējumā parādītā aina.



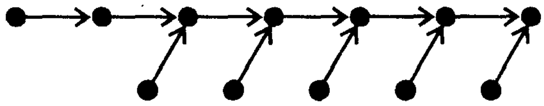
238. zīm.

Lielākais jau pilnīgi sakārtotu spēlētāju skaits, starp kuriem var ievietot nākošo spēlētāju, izmantojot 4 spēles, ir 15. Saskaņā ar FD algoritmu ievietojam galvenajā virknē u_{11}, u_{10}, u_9, u_8, u_7, u_6, kopā patērējot $6 \cdot 4 = 24$ spēles. Pēc tam ievietojam tajā u_{12}, patērējot 5 spēles. (Tiek izmantota binārās ievietošanas metode.) Līdz ar to visi 24 spēlētāji sakārtoti.

Esam patērējuši 12 spēles sākotnējos pāros, $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 39$ spēles ievietošanai virknē un vēl pagaidām nenoskaidrotu spēļu daudzumu 12 zaudētāju sakārtošanai, kas tika minēta algoritma apraksta otrā punkta sākumā. Šī sakārtošana arī notiek ar šo pašu Forda - Džonsona algoritmu (mēs aprakstīsim, kā). Tāpēc iegūstam vienādību

$$FD(24) = 12 + 39 + FD(12) \quad (1)$$

3. Kārtosim 12 zaudētājus ar FD algoritmu. Vispirms sadalām tos pāros un liekam katra pāra spēlētājiem spēlēt savā starpā; patērējam 6 spēles. Pēc tam zaudētājus sakārtojam pēc spēles prasmes (kā, aprakstīsim vēlāk). Iegūsim ainu, kas parādīta 239. zīmējumā.



239. zīm.

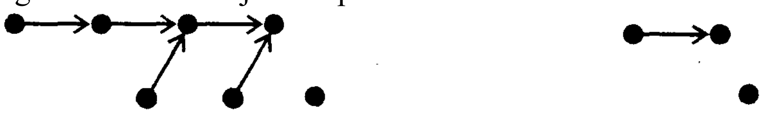
Rīkojoties tālāk pēc jau aprakstītā paņēmiena, visas "astītes" varam ievietot galvenajā virknē, izmantojot $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 14$ spēles. Tātad esam patērējuši 6 spēles pāros, 14 spēles ievietošanai virknē un vēl pagaidām nenoskaidrotu spēļu daudzumu 6 zaudētāju sakārtošanai. Šo sakārtošanu atkal veiksim ar FD algoritmu. Tāpēc iegūstam vienādību

$$FD(12) = 6 + 14 + FD(6) \quad (2)$$

4. Lasītājs pats var pārbaudīt, ka, rīkojoties līdzīgi, iegūstam

$$FD(6) = 3+44 \; FD(3) \quad (3)$$

5. Mums jānoskaidro FD(3) vērtība. Šim gadījumam piemīt īpatnība, kura parādās pirmoreiz: kārtojamo spēlētāju skaits ir nepāra skaitlis. Tādos gadījumos FD algoritms paredz lieko, bez pāra palikušo spēlētāju uzskatīt par uzvarētāju un novietot pa labi no visiem īstiem uzvarētājiem (piemēram, 7 spēlētāju gadījumā skat. 240. zīmējumā a). Mūsu gadījumā iegūstam 240. zīmējumā b parādīto ainu:



a 240. zīm. b

Skaidrs, ka iegūstam vienādību

$$FD(3) = 1 + 2 + FD(1) \quad (4)$$

Tiešām, "astītes" ievietošanai vajadzīgas 2 spēles; turpinot aizsākto algoritma konstrukciju, mums jāparāda, kā ar FD algoritmu kārto zaudētāju kopu, kura sastāv no zaudētāja β. Protams, tam nekādas spēles nav vajadzīgas, tāpēc $FD(1) = 0$.

Saskaitot (1), (2), (3), (4) un saīsinot līdzīgos locekļus, iegūstam $FD(24) = 81$.

Kā redzams, iegūts ievērojams uzlabojums, salīdzinot ar binārās ievietošanas un saliešanas algoritmiem, kas deva $B(24) = S(24) = 89$. Ja n palielinās, šī starpība kļūst vēl lielāka un tiecas uz bezgalību, ja $n \to \infty$.

Vai Forda - Džonsona algoritms ir pats labākais? Acīmredzot tas apvieno sevī būtiskas divu iepriekš aplūkotu algoritmu - binārās ievietošanas un saliešanas - iezīmes. Binārās ievietošanas metode tiek lietota, papildinot galveno virkni ar "astītēm"; saliešanas ideja tiek izmantota, apvienojot vienā sarakstā vairākus neatkarīgi sakārtotus pārus. Tomēr ir arī citas idejas, kuras, kombinējot ar apskatītajām, spēļu skaitu var būtiski samazināt. Ir pierādīts, ka pastāv tāds turnīra kārtošanas algoritms (apzīmēsim to ar A), ka $FD(n) - A(n) \to \infty$, ja $n \to \infty$. Tomēr tas ir tehniski ļoti sarežģīts, un šeit to neapskatīsim.

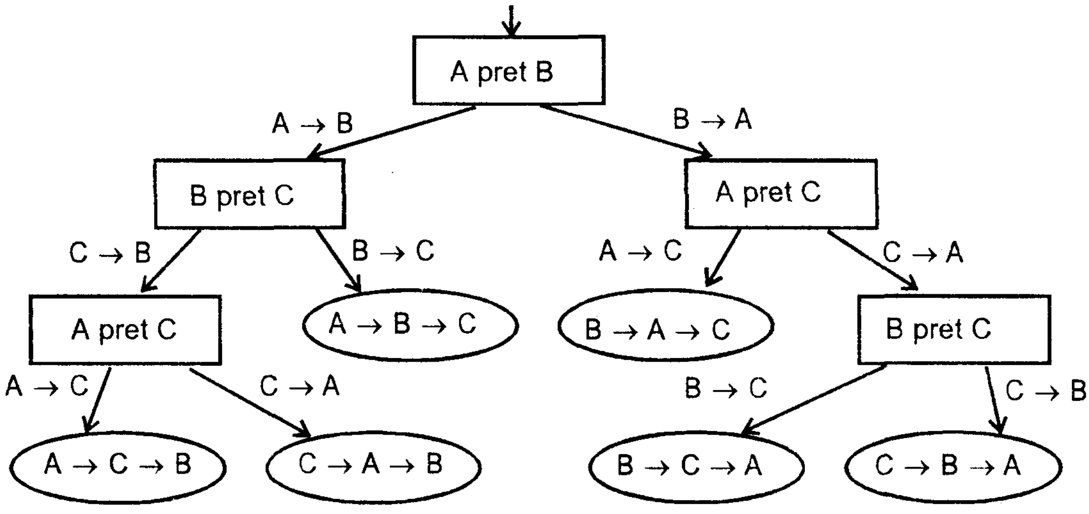
Jāatzīmē, ka pats jautājums par to, vai viens vai otrs algoritms ir pats labākais, nav vienkāršs, un uz to parasti var atbildēt dažādi. Apskatītie kārtošanas algoritmi, protams, netiek lietoti tikai "sportiskiem" mērķiem (un patiesībā vispār sportistiem mērķiem netiek lietoti). To galvenais pielietojuma lauks ir datu kārtošana elektronisko skaitļotāju atmiņā: spēlei starp diviem turnīra dalībniekiem atbilst divu ierakstu salīdzināšana; minimālais spēļu skaits atbilst mazākajam salīdzināšanas operāciju skaitam, kas jāizdara, kārtojot patvaļīgu no n ierakstiem sastāvošu masīvu. Šis uzdevums ir praktiski ļoti svarīgs: apmēram 30% no komerciālā mašīnlaika pasaulē tiek patērēts dažādu kārtošanas uzdevumu risināšanai. Tomēr maldīgi domāt, ka algoritms ar mazāko salīdzināšanu skaitu sliktākajā gadījumā ir arī labākais vispār. Pirmkārt, paši sliktākie gadījumi parādās samērā reti, praktiski svarīgāk būtu minimizēt vidējo salīdzināšanu skaitu. Otrkārt, ja algoritmu ir ļoti sarežģīti noprogrammēt, tad ieguldītais darbs un kļūdu labošana var izrādīties dārgāka par iegūto efektu. Treškārt, cenšanās par katru cenu samazināt salīdzināšanu skaitu var palielināt citu operāciju skaitu, un algoritms kopumā atkal var kļūt neefektīvs. Ceturtkārt, ne visi algoritmi strādā vienlīdz labi uz visiem datoriem: ja programma ir ļoti sarežģīta vai kārtojamie masīvi - ļoti lieli, var nākties lietot ārējos atmiņas nesējus, kas atkal var būtiski sadārdzināt algoritma izmantošanu. Līdzīgu uzskaitījumu varētu vēl turpināt. Tāpēc jau pats uzdevums - katrā konkrētā gadījumā saprast, kāds algoritms šim gadījumam ir pats labākais - ir ļoti sarežģīts, un apmierinoša atrisinājuma tam nav līdz pat šim brīdim. Tomēr salīdzināšanu skaits sliktākajā gadījumā ir viens no pašiem galvenajiem kārtošanas algoritma kvalitātes rādītājiem.

7.1.1.5. Kārtošanas algoritmu apakšējie novērtējumi

Iepriekšējos apakšpunktos redzējām, ka monotonu turnīru kārtošanai pastāv daudzi algoritmi. Piemēram, 5 spēlētāju turnīra sakārtošanai mēs vienu pēc otra izstrādājām 4 aizvien sarežģītākus algoritmus, kas šim mērķim patērēja attiecīgi 10; 9; 8; 7 spēles, bet varbūt arī tā vēl nav galīgā robeža un, labi papūloties, mums izdotos atrast algoritmus, kas garantē šāda turnīra sakārtošanu ar 6 spēlēm.

Ja lasītājs mēģinājis šādu "superoptimālu" algoritmu atrast, viņš droši vien ir cietis neveiksmi. Bet vai tikai ilgstošas neveiksmes vienas pašas var būt par pamatu apgalvojumam, ka tāda algoritma nav? Kā var pierādīt, ka kaut kādu minimālo spēļu skaitu samazināt vairs nevar - ne tagad, ne pēc miljons gadiem?

Apskatīsim piemēru - shēmu, kas attēlo triju spēlētāju A, B, C turnīra pilnīgu sakārtošanu (241. zīm.).



241. zīm.

Taisnstūros ierakstītas izspēlējamās spēles. No katra taisnstūra izejošās bultiņas atbilst abiem iespējamiem spēles iznākumiem. Ja bultiņa beidzas ar ovālu, tad tālākās spēles vairs nav nepieciešamas, un ovālā ir ierakstīts turnīra dalībnieku sakārtojums pēc spēles prasmes, kas atbilst notikušajām spēlēm. Iepazīstoties ar 241. zīmējumā attēloto kārtošanas shēmu (pārbaudiet tās pareizību patstāvīgi), redzam, ka tai ir 6 izejas. Vai tā ir nejaušība, vai arī to varēja paredzēt jau iepriekš?

Ievērosim, ka 3 spēlētājus A, B, C pēc spēles prasmes var sagrupēt 6 dažādos veidos: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Turnīra organizatoriem jābūt gataviem uz jebkuru šādu sakārtojumu.

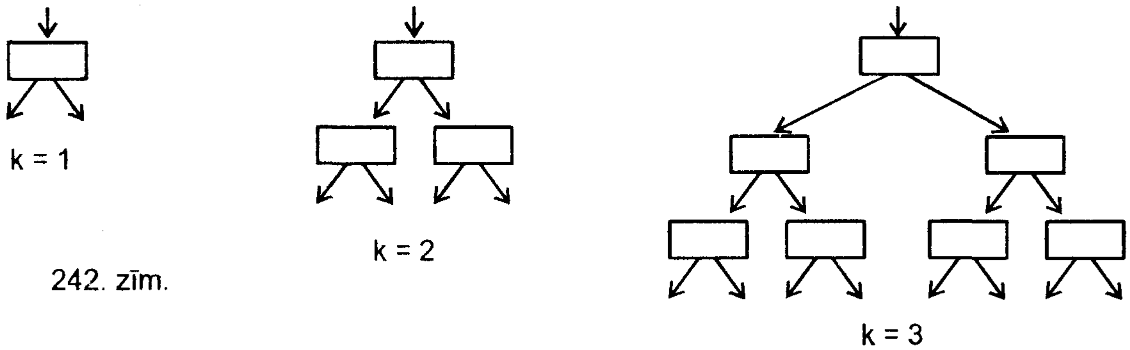
Ļoti svarīgs ir apgalvojums: katram iespējamam sakārtojumam shēmā jābūt paredzētai citai izejai (241. zīmējumā attēlotajā shēmā tā arī ir). Pārliecināsimies par šī apgalvojumā pareizību.

Tiešām, pieņemsim, ka diviem dažādiem sakārtojumiem α un β turnīra organizatoru paredzētajā shēmā atbilst viena un tā pati izeja. Tas nozīmē, ka gan sakārtojumā α, gan sakārtojumā β tiks izspēlētas vienas un tās pašas spēles, kas beigsies ar vieniem un tiem pašiem rezultātiem. Tātad gadījumā, ja patiesais spēlētāju sakārtojums būs α, turnīra rīkotāju rīcībā tā noslēgumā būs tāda pati informācija kā gadījumā, ja patiesais spēlētāju sakārtojums būs β. Bet tas nozīmē, ka turnīra rīkotāji, pamatojoties uz savu izstrādāto shēmu, nevar atšķirt sakārtojumu α no sakārtojuma β, respektīvi, vismaz viena sakārtojuma gadījumā būs spiesti kļūdīties (vai vismaz minēt uz labu laimi), kas nav pieļaujams.

Tātad triju spēlētāju turnīrā tā rīkotāju izstrādātajai shēmai tiešām jābūt ar vismaz 6 izejām (vārds "vismaz" lietots tāpēc, ka kādam sakārtojumam varētu atbilst arī vairākas izejas).

Nav grūti saprast, ka arī katru algoritmu, kas paredzēts n dalībnieku turnīra kārtošanai, var attēlot ar 241. zīmējumā redzamajai shēmai līdzīgu shēmu. Tā kā n dalībniekus var sagrupēt $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$ dažādos veidos, tad šādai shēmai jābūt vismaz n! izejām.

Ja pieņemam, ka kāds kārtošanas algoritms <u>nevienā</u> gadījumā nepatērē vairāk par k spēlēm, tad tam atbilstošajai shēmai nevar būt vairāk par 2^n izejām. To viegli saprast, aplūkojot 242. zīmējumu, ievērojot, ka vienas papildu spēles pieļaušana iespējamo izeju skaitu var ne vairāk kā dubultot (katras izejas vietā parādās spēle, kuras abu izejošo bultiņu galos ir pa vienai izejai).



242. zīm.

Apzīmējot shēmas kārtošanas algoritma izeju skaitu ar I, bet šī algoritma vissliktākajā gadījumā patērēto spēļu skaitu ar k, no augšminētā iegūstam: $2^k \geq I \geq n!$

No šejienes seko nevienādība: $2^k \geq n!$ jeb $k \geq \log_2(n!)$.

No matemātiskās analīzes pazīstama Stirlinga formula, kas ļauj novērtēt lielumu n! Saskaņā ar šo formulu $n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\alpha_n$, kur α_n - vieniniekam tuvs, bet par to lielāks skaitlis ($n \geq 2$). Tātad $n! \geq \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$, un no nevienādības $k \geq \log_2(n!)$ seko, ka $k \geq n\cdot\log_2 n - n\cdot\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2 n + \frac{1}{2}\log_2(2\pi)$.

Galvenais (visstraujāk augošais) saskaitāmais labajā pusē ir $n\cdot\log_2 n$. Tāpēc no šī rezultāta un saliešanas un binārās ievietošanas algoritmu analīzes seko, ka n spēlētāju turnīra sakārtošanai minimālais pietiekamais spēļu skaits S(n) apmierina sakarību,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n\cdot\log_2 n} = 1,$$

t.i., šī lieluma galvenā daļa ir $n\cdot\log_2 n$ jeb šis lielums "bezgalībā uzvedas" apmēram tāpat kā $n\cdot\log_2 n$.

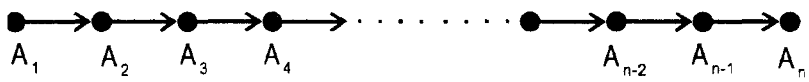
Lasītājs pats var pārbaudīt, ka pie n = 5 nevienādība $2^k \geq 5!$ jeb $2^k \geq 120$ dod $k \geq 7$ (jāatceras, ka k ir naturāls skaitlis), bet pie n = 24 nevienādība $2^k \geq 24!$ dod $k \geq 80$. Tātad 7.1.1.4. nodaļā aprakstītais algoritms 5 spēlētāju turnīra gadījumā ir optimāls, bet Forda - Džonsona algoritms gadījumā n = 24 ir vai nu optimāls, vai arī dod rezultātu, kas no optimālā atšķiras par ne vairāk kā vienu spēli (atceramies, ka FD (24) =81). Vai patiesībā 24 spēlētāju turnīru var vai nevar sakārtot ar 80 spēļu palīdzību, šodien nav zināms; tā ir neatrisināta matemātiskā problēma.

Lasītājam, kas ir pazīstams ar informācijas teorijas pamatiem, varam dot šādu iegūtā apakšējā novērtējuma pamatojumu. Katra spēle mums sniedz vienu bitu informācijas (1 bits ir informācijas daudzums, kas atrodas atbildē uz jautājumu, kurš pieļauj tikai divas dažādas atbildes; mūsu gadījumā - kurš no abiem spēles dalībniekiem ir spēcīgāks). Ja tiek izspēlētas k spēles, iegūstam k bitus informācijas. Bet ar k bitiem var kodēt 2^k atšķirīgas situācijas (uzskatāmi iespējamas 2^k dažādas k vārdu virknītes, kurās katrs vārds ir "jā" vai "nē", vai arī 2^k nuļļu un vieninieku virknītes). Tā kā ar šīs informācijas palīdzību mums jāšķiro n! dažādi gadījumi, tad jābūt $2^k \geq n!$, no kurienes seko vajadzīgais.

Augšminētā sprieduma dēļ aprakstīto metodi bieži sauc par informācijas teorijas apakšējo novērtējumu (information theory lower bound). Tā vēl šodien ir galvenā metode, ar kuras palīdzību iegūst dažādu kombinatorisku algoritmu apakšējos novērtējumus, t.i., robežas, tālāk par kurām algoritma darbības novērtējums nav uzlabojams.

Parādīsim vēl vienu šīs metodes pielietojumu. Analizējot Forda - Džonsona algoritmu un binārās ievietošanas algoritmu, mums bieži nākas ievietot vienu spēlētāju jau sakārtotā n spēlētāju virknītē. No aprakstītajiem piemēriem bija skaidrs, ka to var izdarīt ar k spēļu palīdzību, ja $n \leq 2^k - 1$. Pierādīsim, ka tas ir labākais novērtējums, proti, ja $n \geq 2^k$, tad n spēlētāju sakārtotā virknītē ievietot (n + 1)-o spēlētāju ar ne vairāk kā k spēļu palīdzību nav iespējams.

Tiešām, apskatām n spēlētāju sakārtotu virknīti (243. zīm.).



243. zīm.

"Ievietojamais" spēlētājs B var ieņemt tajā jebkuru no šādām pozīcijām: pirms A_1; starp A_1 un A_2; starp A_2 un A_3; ...; starp A_{n-1} un A_n; aiz A_n.

Tātad B iespējamas n + 1 pozīcijas. Pieņemsim, ka B ievietošanai izstrādāts algoritms, kas garantē mērķa sasniegšanu, neizspēlējot vairāk par k spēlēm. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūstam nevienādības $2^k \geq I \geq n + 1$ (šeit I - algoritma izeju skaits), no kurienes seko $2^k \geq n+1$ jeb $n \leq 2^k - 1$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Lasītājs patstāvīgi var pārliecināties, ka arī 7.1.1.2. un 7.1.1.3. apakšpunktos čempiona un vicečempiona, un bronzas medaļas ieguvēja atrašanai izmantoto algoritmu apakšējos novērtējumos tika izmantota šī pati pieeja.

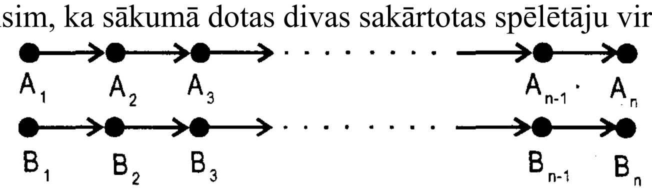
Tomēr informācijas teorijas metodes nav vienīgās, kas ļauj iegūt apakšējos novērtējumus. Par to varējām pārliecināties jau 7.1.1.1. apakšpunktā: čempiona atrašanas algoritma apakšējais novērtējums, ja tas tiktu iegūts ar nupat aprakstīto metodi, būtu tikai $[\log_2 n]$, bet patiesībā, kā mēs to redzējām, šis novērtējums ir n - 1.

Parādīsim vēl vienu piemēru, kur apakšējos novērtējumos tiek lietotas citas metodes, kas tomēr arī balstās uz vidējās vērtības metodi.

Mēs apskatījām saliešanas algoritmu, kura būtiska sastāvdaļa ir divu jau sakārtotu spēlētāju virkņu apvienošana vienā virknē. Mēs redzējām, ka divas n spēlētāju virknes, no kurām katra ir pilnīgi sakārtota, var apvienot vienā virknē, izmantojot ne vairāk kā 2n - 1 spēles.

Pierādīsim, ka šis rezultāts nav uzlabojams, t.i., pierādīsim, ka katrs algoritms divu šādu virknīšu apvienošanai vienā vai vismaz dažos gadījumos patērēs ne mazāk par 2n - 1 spēlēm.

Pieņemsim, ka sākumā dotas divas sakārtotas spēlētāju virknes (244. zīm.):



244. zīm.

Pieņemsim, ka, tās apvienojot, notikušas ne vairāk kā 2n - 2 spēles. Mūsu algoritmam jābūt gatavam arī uz šādiem rezultātiem:

a) $A_i \to A_j$ un $B_i \to B_j$, ja starp šīm spēlēm ir spēle starp A_i un A_j (B_i un B_j) un $i < j$,

b) $A_i \to B_j$, ja starp šim spēlēm ir spēle starp A_i un B_j un $i \leq j$,

c) $B_j \to A_i$, ja starp šim spēlēm ir spēle starp A_i un B_j un $i > j$.

Pieņemsim, ka visas apvienošanas procesā notikušās spēles beigušās tieši ar šādiem rezultātiem. Apskatīsim šādus spēlētāju pārus (to skaits ir 2n - 1):

$$(A_1, B_1), (A_2, B_2),....(A_{n-1}, B_{1n-1}), (A_n, B_n)$$

un

$$(A_2, B_1). (A_3, B_2), ...(A_n, B_{n-1}).$$

Tā kā ir izspēlētas ne vairāk kā 2n - 2 spēles, tad vismaz vienā pārī minētie spēlētāji savā starpā nav spēlējuši. Pārbaudiet patstāvīgi, ka neviens no abiem iespējamiem viņu savstarpējiem spēles rezultātiem nav pretrunā ar līdz šim notikušo spēļu gaitā iegūto informāciju! Tātad notikušās spēles vēl neļauj iegūt pilnīgu priekšstatu par visu spēlētāju pilnīgo sakārtojumu un ar 2n - 2 spēlēm abu virkņu apvienošanai nepietiek.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

296. Jānis iedomājies naturālu skaitli, kas nepārsniedz 1000. Pēteris var viņam uzdot jautājumus, uz kuriem atbilde ir "jā" vai "nē". Pierādīt, ka 10 ir mazākais jautājumu skaits, ar kuriem Pēteris var garantēti uzzināt Jāņa iedomāto skaitli.
297. Pierādīt, ka 20 un 21 spēlētāju gadījumā turnīra pilnīgai sakārtošanas nepieciešamas un pietiekamas 62, resp., 66 spēles.
298. Pierādīt, ka, lai apvienotu divas jau sakārtotas spēlētāju virknes, kurās ir n un n + 1 spēlētāji, nepieciešamas vismaz 2n spēles.
299. Dotas n pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām n -1 monētām ir vienāda masa, bet viena monēta ir smagāka. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Uz svaru kausiem var novietot patvaļīgu monētu daudzumu. Pierādīt, ka $[\log_3 n]$ ir vismazākais svēršanu skaits, ar kuru garantēti var atrast smagāko monētu. (Norāde. Padomājiet, cik dažādi iznākumi šoreiz iespējami katrai svēršanai!)
300. Katrā šaha galdiņa rūtiņā ierakstīts cits naturāls skaitlis no 1 līdz 64. Mēs varam ar vienu jautājumu norādīt uz jebkuru rūtiņu kopu, un kā atbildi mums pasacīs to skaitļu kopu, kuri ierakstīti šajās rūtiņās (bet nepasacīs, kurš skaitlis kurā rūtiņā ierakstīts). Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru mēs varam noskaidrot katrā rūtiņā ierakstīto skaitli?
301. Kvadrāts sastāv no $n \cdot n$ rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Bez tam zināms, ka katrā kolonnā skaitļi pieaug no augšas uz leju un katrā rindiņā - no kreisās uz labo pusi. Ar vienu jautājumu mēs varam par jebkuru rūtiņu uzzināt, kāds skaitlis tajā ierakstīts. Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru var garantēti uzzināt, vai tabulā ierakstīts skaitlis M?

7. 1. 2. Kā šķērsot tuksnesi

Šī punkta rezultātus ieguvusi S.Sedola (skat. [4]).

Populārā M. Gārdnera grāmatā [8] formulēts šāds uzdevums:

"Tuksneša malā atrodas benzīna krātuve, kurā ir n normas benzīna (n - naturāls skaitlis). Par normu sauc tādu benzīna daudzumu, ar kuru mašīna var nobraukt vienu kilometru. Automašīnā var ieliet tikai vienu normu benzīna. Braucot benzīns tiek patērēts vienmērīgi, proporcionāli nobrauktajam ceļa gabalam. Cik dziļi tuksnesī var iebraukt automašīna, ja

1) tai ir jāatgriežas atpakaļ;

2) tai nav jāatgriežas?

Tuksnesī jebkurā vietā drīkst ierīkot benzīna krātuves, turklāt benzīna zudumu nav."

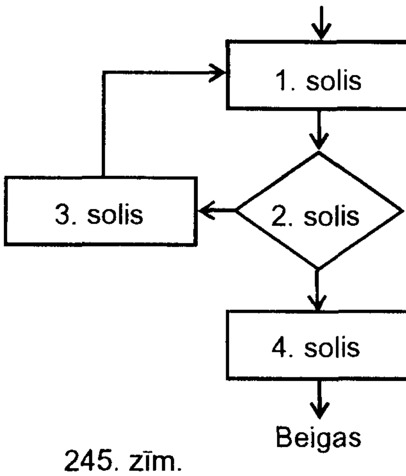
Turpmāk tiks dots šā uzdevuma atrisinājums (M. Gārdners dod uzdevuma atbildi, taču nepierāda, ka dziļāk tuksnesī iebraukt nevar), kā arī mēģinājums to pēc iespējas vispārināt. Grāmatā uzdevuma 1.variantam dota šāda atbilde: mašīna var iebraukt tuksnesī $a_n^{(1)}$ kilometrus, kur $a_n^{(1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}$.

Pierādīsim, ka to patiešām var izdarīt. No pierādījuma izrietēs arī braukšanas algoritms. Ja ir viena norma benzīna, mašīna nobrauc $1/2$ km un atgriežas atpakaļ tuksneša malā. Ja ir divas normas benzīna, mašīna paņem vienu normu, nobrauc $1/4$ km, atstāj tur $1/2$ normas benzīna un atgriežas malā. Tur tā paņem atlikušo normu, nobrauc līdz benzīna krātuvei, paņem no tās $1/4$ normas un iebrauc vēl $1/2$ km dziļāk tuksnesī, tad atgriežas pie krātuves, paņem no tās pēdējo $1/4$ normas benzīna un atgriežas tuksneša malā.

Tālāk pierādījumā izmantosim matemātisko indukciju. Indukcijas bāzi, ja n = 1 un n=2, dod jau minētie spriedumi.

Induktīvā hipotēze ir šāda: ja ar k normām benzīna var iebraukt tuksnesī $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i}$ km dziļi, jāpierāda, ka ar k + 1 normu var iebraukt $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{2i}$ kilometrus.

Parādīsim, ka mašīna, kuras rīcībā ir k + 1 normas benzīna, var nogādāt attālumā $\frac{1}{2(k+1)}$ no tuksneša malas $k+\frac{1}{2(k+1)}$ normas benzīna. Liksim tai izpildīt šādu kustības algoritmu (245. zīm.):



245. zīm.

1. solis: mašīna paņem 1 normu benzīna un iebrauc $\frac{1}{2(k+1)}$ km tuksnesī; pāriet uz 2. soli;

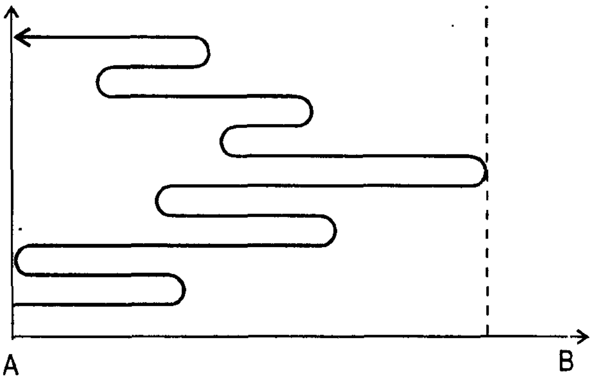
2. solis: ja malā vēl ir benzīns, pāriet uz 3. soli, pretējā gadījumā pāriet uz 4. soli;

3. solis: novieto krātuvē 1 - $\frac{1}{(k+1)}$ normas benzīna, atgriežas malā un pāriet uz 1. soli;

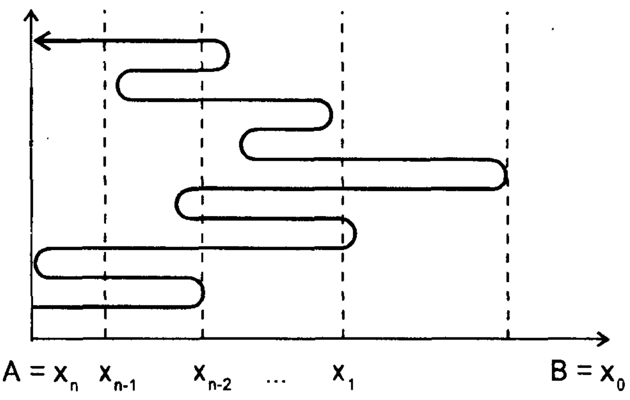
4. solis: novieto krātuvē 1 - $\frac{1}{2(k+1)}$ normas benzīna un beidz algoritma izpildi.

Viegli pamanīt, ka 3. solis tiek veikts k reizes, bet 4. solis - 1 reizi. Pēc šā algoritma izpildes krātuvē ir $k(1-\frac{1}{(k+1)})+1-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{2k^2+2k+2-1}{2(k+1)}=k+\frac{1}{2(k+1)}$ normas benzīna. No tām $\frac{1}{2(k+1)}$ normas būs nepieciešamas, lai no šīs krātuves tiktu atpakaļ tuksneša malā, tātad var teikt, ka, pārvietojot krātuvi tuksnesī par $\frac{1}{2(k+1)}$ km, paliek k normas benzīna. No induktīvās hipotēzes izriet, ka ar šīm k normām no krātuves jaunās atrašanās vietas var iebraukt vēl $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i}$ km dziļi tuksnesī, atgriežoties pie krātuves; pēc tam var paņemt tur esošās $\frac{1}{2(k+1)}$ normas benzīna un atgriezties izejas punktā. Tātad aplūkotais algoritms rāda, kā ar k + 1 normām benzīna iespējams iebraukt $\frac{1}{2(k+1)}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i}=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{2i}$ km dziļi tuksnesī un atgriezties atpakaļ. Induktīvā pāreja izdarīta. Tātad ir pierādīts, ka ar n normām var iebraukt $a_n^{(1)}$ km dziļi un atgriezties atpakaļ.

Atliek pierādīt, ka nav tāda algoritma, kura izpilde dotu iespēju iebraukt vēl dziļāk tuksnesī.



246. zīm.

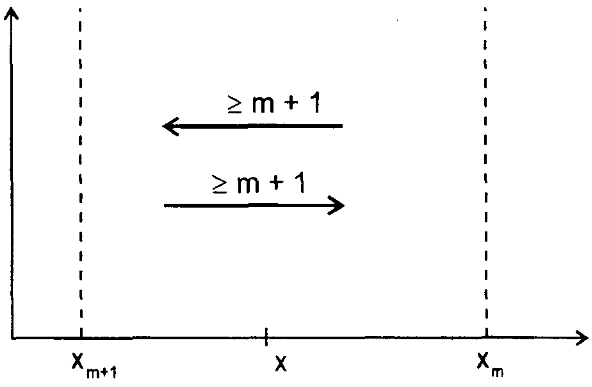


247. zīm.

Uzzīmēsim patvaļīgi izvēlētu automašīnas kustības trajektoriju (246.zīm.). Īstenībā visi trajektorijas posmi atrodas uz vienas taisnes, taču uzskatāmības labad zīmēsim tos, izvērstus plaknē.

Jāpierāda, ka attālums |AB| nepārsniedz $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}$ kilometrus.

Sadalīsim [AB] n intervālos tā, lai visu trajektorijas nogriežņu garumu summa katrā intervālā būtu tieši 1 km (247. zīm.). Apzīmēsim dalījuma punktus ar x_0, x_1, x_2, ..., x_n, sākot ar vistālāko trajektorijas punktu un beidzot ar sākumpunktu. Tādā gadījumā pa labi no jebkura punkta x_m trajektorijas nogriežņu garumu summa ir tieši m kilometru.



248. zīm.

Aplūkosim vienā šādā intervālā $]x_{m+1}; x_m[$ kādu punktu x (248.zīm.). Pieņemsim, ka šajā punktā mašīna ne reizi nemaina braukšanas virzienu. Cik reizes šo punktu šķērso trajektorija?

Pozitīvā virzienā punkts x mašīnai jāšķērso ne mazāk kā m + 1 reizes, jo pa labi no punkta x_m atrodas m km trajektorijas, un, lai šos m kilometrus nobrauktu, uz punktu x jāatved vismaz m normas benzīna. Lai nobrauktu arī posmu [x; x_m], nepieciešams vēl kāds daudzums benzīna, kura atvešanai jāveic vēl vismaz viens reiss.

Arī negatīvā virzienā mašīna šķērsos punktu x ne mazāk kā m + 1 reizes, jo gan kustības sākumā, gan beigās mašīna atrodas pa kreisi no punkta x, tātad punkts x negatīvā virzienā šķērsots tikpat reizes, cik pozitīvā virzienā. Līdz ar to pierādīts, ka punkts x šķērsots vismaz 2m+2 reizes. Izņēmums ir tikai galīgs skaits punktu, kuros mašīna kādu reizi maina braukšanas virzienu. Sauksim šos punktus par īpašiem punktiem.

Atgriezīsimies pie 247. zīmējuma.

Pirmajā intervālā [x_n; x_{n-1}] katrs iekšējais punkts, kas nav īpašs punkts, ir šķērsots ne mazāk kā 2n reizes. Visu trajektorijas nogriežņu garumu summa šajā intervālā ir 1 km, bet īpašo punktu tajā ir tikai galīgs skaits. Tātad šā intervāla garums x_{n-1} - x_n apmierina nevienādību $x_{n-1} - x_n \le \frac{1}{2n}$.

Analoģiski iegūstam

$$x_{n-2} - x_{n-1} \le \frac{1}{2(n-1)},$$

$$\ldots,$$

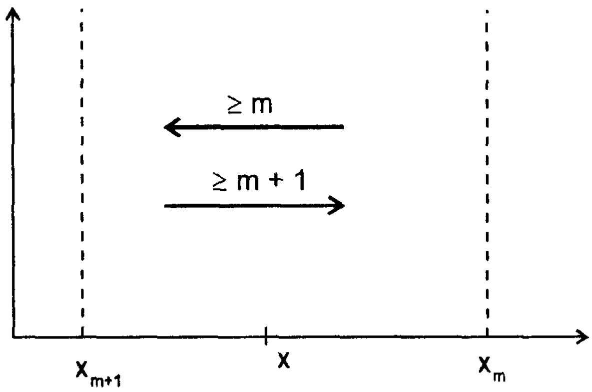
$$x_2 - x_3 \le \frac{1}{6},$$

$$x_1 - x_2 \le \frac{1}{4},$$

$$x_0 - x_1 \le \frac{1}{2}.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam, ka $|AB| = x_0 - x_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}(km)$, kas arī bija jāpierāda. Tātad nav tāda algoritma, kuru izpildot būtu iespējams iebraukt dziļāk tuksnesī.

Otrajā variantā, kad mašīnai nav jāatgriežas tuksneša malā, maksimālo iebraukšanas dziļumu izsaka izteiksme $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ km.



249. zīm.

Algoritmu, pēc kura mašīnai jābrauc, katrs var atrast pats pēc iepriekšējā parauga. Mēs pievērsīsimies tikai abu variantu būtiskajām atšķirībām.

Sadalām visu trajektoriju nogriežņos un aplūkojam vienu patvaļīgu nogriezni, tāpat kā iepriekšējā gadījumā (249.zīm.). Pozitīvā virzienā katrs punkts x, kas nav īpašs punkts, ir šķērsots vismaz m + 1 reizes (spriedums tāds pats, kā iepriekš).

Toties negatīvā virzienā mašīna braukusi vismaz m reizes. Šī vērtība ir mazāka, jo kustības beigās mašīna atrodas pa labi no punkta x, un tas pozitīvā virzienā tiek šķērsots par vienu reizi vairāk nekā negatīvā virzienā. Tātad kopā punkts x tiek šķērsots vismaz 2m + 1 reizi.

Intervālu garumi apmierina nevienādības

$$x_{n-1} - x_n \le \frac{1}{2n-1},$$

$$x_{n-2} - x_{n-1} \le \frac{1}{2(n-1)-1},$$

$$\ldots,$$

$$x_1 - x_2 \le \frac{1}{3},$$

$$x_0 - x_1 \le 1.$$

Saskaitot iegūstam $x_0 - x_n \le 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ (km), kas arī bija jāpierāda.

Nedaudz mainīsim uzdevuma nosacījumus. Pieņemsim, ka mums ir nevis viena, bet vairākas mašīnas. Par galveno sauksim to mašīnu, kura iebrauc visdziļāk tuksnesī. Pārejās mašīnas sauksim par palīgmašīnām; tās var tuksnesī veidot krātuves, kas dod iespēju iedarbināt arī galveno mašīnu vai citas palīgmašīnas.

Vispirms pierādīsim šādu apgalvojumu: no palīgmašīnām, kurām jāatgriežas tuksneša malā, nav nekāda labuma, tās nedod iespēju palielināt galvenās mašīnas iebraukšanas dziļumu.

Patiesi, ja palīgmašīnām jāatgriežas, tad optimalitātes pierādījumā nekas nemainās, jo ir vienalga, kura mašīna šķērso patvaļīgo punktu x, - svarīgi, cik reizes tas šķērsots. Tātad maksimālais iebraukšanas dziļums ar šādām palīgmašīnām ir tāds pats, kā bez tām. Bet maksimālo dziļumu var sasniegt arī bez šīm palīgmašīnām. Tātad tās ir liekas.

Tāpēc aplūkosim tikai tādu gadījumu, kad palīgmašīnas var palikt tuksnesī. Vēl vairāk - pieņemsim, ka mums ir neierobežots skaits šādu mašīnu. Pierādīsim, ka tad maksimālais iebraukšanas dziļums ir $a_n^{(2)}$ km, kur $a_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ (arī galvenajai mašīnai nav jāatgriežas).

Algoritms šāds: n mašīnas paņem n normas benzīna un nobrauc $1/n$ km, viena mašīna te paliek, bet tajā atlikušās $n - 1/n$ normas benzīna tiek sadalītas starp pārējām n - 1 mašīnām. Šīs n-1 mašīnas nobrauc katra $1/n-1$ kilometrus. Viena mašīna paliek uz vietas, bet tās atlikušais benzīns tiek sadalīts starp pārējām mašīnām, utt. Stingru pierādījumu ar matemātisko indukciju lasītājs var veikt pats. Pierādīt, ka iebraukt dziļāk tuksnesī nevar, ir vēl vienkāršāk. Katrs intervāla $[x_{m+1}; x_m]$ iekšējais punkts, kas nav īpašs punkts, tiek šķērsots vismaz m + 1 reizes. Tāpēc intervālu garumi

$$x_{n-1} - x_n \le \frac{1}{n},$$

$$x_{n-2} - x_{n-1} \le \frac{1}{n-1},$$

$$\ldots,$$

$$x_1 - x_2 \le \frac{1}{2},$$

$$x_0 - x_1 \le 1.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $x_0 - x_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, kas arī bija jāpierāda.

Lai lasītājam neliktos, ka ir pārāk liela izšķērdība, ietaupot benzīnu, pamest tuksnesī mašīnas, piebildīsim, ka šis gadījums atgādina kosmiskos lidojumus, kuros kosmosa kuģis, izlietojis degvielu, pamet izmantotās kuģa pakāpes.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

302. Pieņemsim, ka tuksneša malā ir n normas benzīna un k mašīnas. Cik dziļi var iebraukt tuksnesī galvenā mašīna,

1) ja tai jāatgriežas tuksneša malā,
2) ja galvenā mašīna var palikt tuksnesī?

Nevienai no palīgmašīnām nav jāatgriežas. Tā kā metode ir zināma, piedāvājam lasītājam pašam pierādīt šādus rezultātus:

pirmajā gadījumā maksimālais iebraukšanas dziļums tuksnesī ir $a_{n,k}^{(3)}$ km, kur

$$a_{n,k}^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} + \sum_{i=k+2}^{n}\frac{1}{2i+1-k}\ (\mathrm{km});$$

otrajā gadījumā attiecīgais attālums ir

$$a_{n,k}^{(4)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{2i-k}\ (\mathrm{km}).$$

303. (Tēma skolēnu zinātniskajai biedrībai.) Pieņemsim, ka vienā punktā uz riņķa līnijas atrodas sala, bet pārējo riņķa līniju aizņem okeāns. Uz salas bāzējas galvenā lidmašīna un palīglidmašīnas. Uz salas ir arī n vienības degvielas. Katra lidmašīna var uzņemt vienu vienību degvielas un ar šo daudzumu degvielas var nolidot 1 vienību attāluma; degvielu lidmašīnas gaisā var momentāni nodot viena otrai. Lidmašīnas bez degvielas krīt okeānā. Kāds ir lielākais riņķa līnijas garums, ko galvenā lidmašīna var nolidot un atgriezties uz salas? Ievērojiet, ka palīglidmašīnas var sagaidīt galveno lidmašīnu arī no otras puses! Šķirojiet 4 gadījumus, ievērojot, ka

a) palīglidmašīnu var būt neierobežots daudzums vai arī galīgs skaits k,

b) var būt prasība, ka visām palīglidmašīnām arī jāatgriežas uz salas, vai arī var atļaut tām krist okeānā.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

302. Pieņemsim, ka tuksneša malā ir n normas benzīna un k mašīnas. Cik dziļi var iebraukt tuksnesī galvenā mašīna,

1) ja tai jāatgriežas tuksneša malā,

2) ja galvenā mašīna var palikt tuksnesī?

Nevienai no palīgmašīnām nav jāatgriežas. Tā kā metode ir zināma, piedāvājam lasītājam pašam pierādīt šādus rezultātus:

pirmajā gadījumā maksimālais iebraukšanas dziļums tuksnesī ir $a_{n,k}^{(3)}$ km, kur

$$a_{n,k}^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} + \sum_{i=k+2}^{n}\frac{1}{2i+1-k} \text{ (km)};$$

otrajā gadījumā attiecīgais attālums ir

$$a_{n,k}^{(4)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{2i-k} \text{ (km)}.$$

303. (Tēma skolēnu zinātniskajai biedrībai.) Pieņemsim, ka vienā punktā uz riņķa līnijas atrodas sala, bet pārējo riņķa līniju aizņem okeāns. Uz salas bāzējas galvenā lidmašīna un palīglidmašīnas. Uz salas ir arī n vienības degvielas. Katra lidmašīna var uzņemt vienu vienību degvielas un ar šo daudzumu degvielas var nolidot 1 vienību attāluma; degvielu lidmašīnas gaisā var momentāni nodot viena otrai. Lidmašīnas bez degvielas krīt okeānā. Kāds ir lielākais riņķa līnijas garums, ko galvenā lidmašīna var nolidot un atgriezties uz salas? Ievērojiet, ka palīglidmašīnas var sagaidīt galveno lidmašīnu arī no otras puses! Šķirojiet 4 gadījumus, ievērojot, ka

a) palīglidmašīnu var būt neierobežots daudzums vai arī galīgs skaits k,

b) var būt prasība, ka visām palīglidmašīnām arī jāatgriežas uz salas, vai arī var atļaut tām krist okeānā.

7. 1. 3. Par pļāpīgiem kaimiņiem

Šajā punktā aplūkosim uzdevumus, kas saistīti ar ātriem informācijas izplatīšanas algoritmiem. Tāpat kā iepriekšējos punktos, katrai šādai problēmai ir divas daļas - izstrādāt optimālo algoritmu un pierādīt, ka tas patiešām ir optimāls. Kā parasti, Dirihlē princips vai vidējās vērtības novērtējums tiek izmantots optimalitātes pierādījumā.

Apskatīsim ciematu, kurā dzīvo n kaimiņi. Pieņemsim, ka viņi vienlaicīgi uzzina katrs vienu jaunu ziņu (katrs citu). Kaimiņi ir ieinteresēti, lai visi uzzinātu visus jaunumus. Kā to vislabāk panākt?

Atbilde acīmredzot ir atkarīga gan no tā, kādus līdzekļus drīkst lietot informācijas izplatīšanai, gan arī no tā, ko sauksim par labu un ko - par sliktu informācijas izplatīšanas algoritmu. Dažos gadījumos var būt svarīgi, lai "pilnīgā informētība" iestātos iespējami ātri, citos - lai tiktu izmantoti iespējami mazi tehniskie resursi (vēstules, telegrammas, telefona līniju noslodzes laiks utt.).

Aplūkosim dažādus uzdevumus, kādi rodas, cenšoties šo problēmu atrisināt. Visos gadījumos pieņemsim, ka ciematā ir vismaz 2 iedzīvotāji.

7.1.3. 1. Vēstules

Pieņemsim, ka informācijas izplatīšanai tiek lietotas vēstules, pie tam katrā vēstulē var uzrakstīt visus rakstīšanas brīdī zināmos jaunumus. Kāds mazākais vēstuļu skaits jāuzraksta, lai visi n ciemata iedzīvotāji uzzinātu visus jaunumus?

Nav grūti saprast, ka šādu mērķi var sasniegt, uzrakstot pavisam 2n - 2 vēstules. Iespējami vairāki varianti, kā to izdarīt.

Lūk, divi no tiem.

1. Visi ciemata iedzīvotāji, izņemot vienu iedzīvotāju A, uzraksta vēstules šim vienam iedzīvotājam. Tā rezultātā A zina visus jaunumus, un ir uzrakstītas pavisam (n - 1) vēstules. Tālāk A uzraksta pa vēstulei visiem pārējiem n - 1 iedzīvotājiem, un pilnīga informētība ir sasniegta. Kopējais vēstuļu skaits ir

(n - 1) + (n - 1) = 2n - 2.

2. Sanumurēsim iedzīvotājus pēc kārtas: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. To, ka iedzīvotājs X raksta vēstuli iedzīvotājam Y, attēlosim ar pierakstu $X \to Y$. Lasītājs pats var pārbaudīt, ka šāda 2n - 2 vēstuļu secība: $A_1 \to A_2$; $A_2 \to A_3$;

$A_3 \rightarrow A_4$;...; $A_{n-2} \rightarrow A_{n-1}$; $A_{n-1} \rightarrow A_n$; $A_n \rightarrow A_{n-1}$; $A_{n-1} \rightarrow A_{n-2}$; $A_{n-2} \rightarrow A_{n-3}$;...; $A_3 \rightarrow A_2$; $A_2 \rightarrow A_1$ arī nodrošina pilnīgu informētību.

Iesakām patstāvīgi atrast vēl citus algoritmus, kas katrs izmanto 2n - 2 vēstules.

Tomēr uzdevums vēl nav līdz galam atrisināts, jo mēs neesam noskaidrojuši, vai 2n - 2 ir vismazākais vēstuļu skaits, ar kuru var panākt pilnīgu informētību. Pamatosim to.

Aplūkosim to brīdi vēstuļu rakstīšanas procesā, kad pirmais no visiem ciema iedzīvotājiem ir uzzinājis visas jaunās ziņas. Apzīmēsim šo brīdi ar T. Tātad brīdī T precīzi viens no iedzīvotājiem - apzīmēsim to ar A - jau zina visus jaunumus.

Tā kā A ir uzzinājis visu pārējo n - 1 iedzīvotāju jaunumus, tad katrs no šiem pārējiem ir uzrakstījis vismaz vienu vēstuli (vai nu A, vai kādam citam); pretējā gadījumā atbilstošais jaunums būtu palicis pie tā sākotnējā "īpašnieka" un nebūtu nonācis līdz A. Tātad pirms laika momenta T uzrakstītas vismaz (n - 1) vēstules.

Tā kā momentā T pārējie (n - 1) iedzīvotāji, izņemot A, vēl nezina visus jaunumus, tad pēc momenta T katram no viņiem jāsaņem vismaz vēl viena vēstule; tātad pēc momenta T tiks saņemtas vēl vismaz (n - 1) vēstules. Tāpēc kopējais vēstuļu skaits tiešām ir vismaz

$$(n-1)+(n-1)=2n - 2.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka 2n - 2 tiešām ir mazākais vēstuļu skaits, ar kuru var sasniegt pilnīgu informētību.

Uzmanīgs lasītājs būs pamanījis mūsu spriedumā zināmu defektu: formāli ņemot, šis spriedums nav spēkā, ja vairāki cilvēki vienlaikus kļūst pilnīgi informēti laika momentā T. Iesakām lasītājam novērst šo defektu patstāvīgi (tas nav grūti).

7. 1. 3. 2. Telefona sarunas

Daudz grūtāks (un arī interesantāks) ir gadījums, kad informācijas izplatīšanai tiek lietoti telefona sakari. Vispirms apskatīsim situāciju, kurā kopējais telefona sarunu skaits ir mazsvarīgs, bet būtiski panākt, lai visi jaunumi izplatītos iespējami ātri.

Pieņemsim, ka katram no n iedzīvotājiem mājās ir telefons, ka katra telefona saruna ilgst vienu stundu un ka katras sarunas laikā abi tās dalībnieki pāvesta viens otram visus jaunumus, kurus viņi šajā brīdī zina. Pēc kāda mazākā stundu skaita visi var zināt visus jaunumus?

Izrādās, ka atbilde ir atkarīga no skaitļa n paritātes.

Teorēma. Mazākais stundu skaits, pēc kura visi iedzīvotāji var zināt visus jaunumus, ir a) $[\log_2 n]$, ja n - pārskaitlis,
b) $[\log_2 n] + 1$, ja n - nepārskaitlis.

Piezīme. Ar [x] apzīmējam mazāko veselo skaitli, kas nav mazāks par x. Piemēram, [4]=4, [4, 8] = 5 utt.

Pierādījums. Vispirms pamatosim, kāpēc ātrāk par norādīto laiku uzdevuma prasības nav sasniedzamas. Apskatīsim gadījumu, kad n ir pārskaitlis.

Izvēlēsimies jebkuru jaunumu. Pēc pirmās stundas to zina tikai divi iedzīvotāji - jaunuma sākotnējais "īpašnieks" un tas, ar kuru viņš šīs stundas laikā sarunājās. Otrās stundas laikā no viņiem šo jaunumu var uzzināt vēl ne vairāk kā divi citi cilvēki, tādēļ pēc otrās stundas to zina ne vairāk kā 4 cilvēki utt., līdzīgi turpinot, iegūstam, ka pēc k stundām apskatāmo jaunumu zina ne vairāk kā 2^k cilvēki. Lai būtu sasniegta pilnīga informētība, jābūt $2^k \geq n$, tātad $k \geq \log_2 n$. Ievērojot, ka k ir naturāls skaitlis, iegūstam $k \geq [\log_2 n]$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Ja n ir nepārskaitlis, tad ievērosim, ka pirmās stundas laikā vismaz viens iedzīvotājs sarunās nepiedalās, tātad viņa jaunumu pēc pirmās stundas zina tikai viens iedzīvotājs. Tālākie spriedumi ir līdzīgi jau minētajiem pārskaitļa n gadījumā.

Tagad pierādīsim, ka ar minēto stundu skaitu pietiek, lai sasniegtu pilnīgu informētību.

Vispirms aplūkosim gadījumu, kad n ir divnieka pakāpe, $n = 2^k$. Mums jāpierāda, ka pilnīgu informētību var sasniegt $[\log_2 2k] = k$ stundās.

Izmantosim matemātisko indukciju pēc parametra k.

Bāze, ja k = 1, ir acīmredzama.

Pieņemsim, ka mūsu apgalvojums ir pareizs, ja k = m, t. i., pieņemsim, ka 2^m iedzīvotāju gadījumā pilnīgu informētību var panākt m stundās. Apskatīsim 2^{m+1} iedzīvotājus. Mums jāpierāda, ka viņu pilnīgu informētību var panākt m + 1 stundās.

Sadalīsim 2^{m+1} iedzīvotājus divās grupās pa 2^m cilvēkiem katrā. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi katras grupas ietvaros var panākt pilnīgu informētību m stundās. Pēdējo stundu izmantosim, liekot savā starpā runāt 2^m cilvēku pāriem (katrā pārī ir pa vienam cilvēkam no katras grupas). Tādējādi pilnīga informētība būs panākta. Pierādījums pabeigts.

Aplūkosim gadījumu, kad n ir nepārskaitlis. Tādā gadījumā n atrodas starp divām divnieka pakāpēm, kas seko viena otrai; varam pieņemt, ka $2^k < n < 2^{k+1}$. Tad $[\log_2 n] = k + 1$, un mums jāpierāda, kā panākt pilnīgu informētību k + 2 stundās.

Varam rīkoties, piemēram, šādi. Sadalām visus n iedzīvotājus divās grupās: grupā A, kurā ir 2^k iedzīvotāji, un grupā B, kurā ir $(n - 2^k)$ iedzīvotāju. Saskaņā ar k izvēli grupā B ir mazāk iedzīvotāju nekā grupā A.

Pirmajā stundā katrs B iedzīvotājs sarunājas ar kādu no A iedzīvotājiem (daļa A iedzīvotāju šajās sarunās nepiedalās). Pēc tam k stundās A iedzīvotāji savā starpā panāk pilnīgu informētību (kā to izdarīt, parādīts iepriekš). Pēc tam pēdējā stundā katrs B iedzīvotājs, sarunājoties ar kādu A iedzīvotāju, arī uzzina visas viņam vēl trūkstošās ziņas.

Atliek apskatīt gadījumu, kad n ir pārskaitlis, bet nav divnieka pakāpe. Atkal varam pieņemt, ka $2^k < n < 2^{k+1}$. Mums jāpierāda, kā sasniegt pilnīgu informētību k + 1 stundās.

Apzīmēsim n = 2m, m ir naturāls skaitlis, un izveidosim divas vienādas regulāra m-stūra formas platformas, kas atrodas tieši viena virs otras un nostiprinātas uz kopīgas vertikālas ass.

Katras platformas katrā stūrī novietosim pa ciemata iedzīvotājam: uz augšējās platformas - $A_1, A_2, ..., A_m$, uz apakšējās - $B_1, B_2, ..., B_m$, pie tam A_i un B_i atrodas tieši viens virs otra (i =1; 2; ...; m).

Pirmajā stundā savā starpā sarunājas tie iedzīvotāji, kas atrodas tieši viens virs otra. Pirmās stundas beigās augšējo platformu pagriežam par vienu vienību pulksteņa rādītāju kustības virzienā ("vienība" šajā gadījumā ir leņķis $^{2\pi}/_m$ t.i., leņķis, par kādu jāpagriež regulārais m - stūris ap tā centru, lai katra virsotne nostātos nākošās virsotnes iepriekšējā vietā). Tagad atkal liekām sarunāties iedzīvotājiem, kas atrodas viens virs otra. Otrās stundas beigās pagriežam augšējo daudzstūri par divām vienībām, trešās stundas beigās - par četrām,... , k - tās stundas beigās - par 2^k vienībām. (Ievērosim, ka $2^k > m$.) Lasītājs pats var izsekot, ka katrs jaunums ir izplatījies starp visiem ciemata iedzīvotājiem.

Līdz ar to teorēma pierādīta.

Tagad aplūkosim citu nostādni: mūs neinteresē, lai ziņas izplatītos ātri, bet gan tas, lai jaunumu izplatīšanās notiktu ekonomiski. Kāds mazākais <u>telefona sarunu skaits</u> garantē pilnīgu informētību ciemata iedzīvotāju vidū?

Lasītājs var viegli pārbaudīt, ka, ja n = 2, tad nepieciešama un pietiekama viena saruna, bet, ja n = 3, tad ir nepieciešamas un pietiekamas 3 sarunas. Turpmāk apskatīsim gadījumu, kad $n \geq 4$.

Tā kā, vēstules rakstot, informācija izplatās tikai vienā virzienā, bet telefona sarunā - abos virzienos, varētu likties, ka minimālajam pietiekamajam telefona sarunu skaitam jābūt apmēram divas reizes mazākam nekā vēstuļu skaitam, t.i., ~ n. Tomēr pārsteidzoši, ka šī informācijas "abpusējā" izplatīšanās nedod gandrīz nekādu efektu.

Teorēma. Ja $n \geq 4$, tad nepieciešamais un pietiekamais telefona sarunu skaits, kas ļauj sasniegt pilnīgu informētību, ir 2n - 4.

<u>Pietiekamība.</u> Sadalīsim iedzīvotājus 2 grupās $A_1, A_2, ..., A_m$ un $B_1, B_2, ..., B_k$ tā, lai katrā no tām būtu vismaz 2 iedzīvotāji; tātad $m \geq 2$, $k \geq 2$ un m+k=n. Noorganizēsim vispirms sarunas A_1-A_2, A_2 - A_3, ... A_{m-1} - A_m un B_1-B_2, B_2 - B_3, ... B_{k-1} - B_k (tieši šādā kārtībā). Pēc šīm m + k - 2 sarunām A_{m-1} un A_m zina visus grupas A jaunumus, bet B_{k-1} un B_k - visus grupas B jaunumus. Tālāk noorganizējām sarunas A_{m-1} - B_{k-1} un A_m - B_k; pēc tām A_{m-1}, B_{k-1}, A_m, B_k zina visus jaunumus. Beidzot kāds no viņiem piezvana atlikušajiem n - 4 cilvēkiem un pastāsta tiem visus jaunumus. Kopā patērētas (m+k-2)+2+n-4=(m+k)+n-4=2n-4 sarunas.

<u>Nepieciešamība.</u> Tagad pierādīsim, ka ar mazāk nekā 2n - 4 sarunām prasīto panākt nav iespējams.

Šī fakta pierādījums ir sarežģīts; savā laikā nopietnos zinātniskos žurnālos tika publicēti 3 nepareizi pierādījumi! Tālāk dotais pierādījums izveidots, kombinējot amerikāņu matemātiķu B.Beikera, A.Hajnala, E.Milnera, R.Šostaka un ungāru matemātiķa E.Semeredi atrisinājumus.

Risinājumā cilvēkus attēlosim kā grafa virsotnes, bet sarunas starp viņiem - kā grafa šķautnes. Teiksim, ka grafa virsotne kļūst universāla, ja tajā esošais cilvēks zina visas ziņas.

Uzskatīsim, ka sarunas notiek pēc kārtas: s(l), s(2),..., s(z).

Tālāk seko 2 lemmas par informācijas izplatīšanos.

1. lemma. Pēc n - 2 zvaniem nav nevienas universālas virsotnes. (Grafs ar n virsotnēm nevar būt sakarīgs, ja tajā ir $\leq$ n - 2 šķautnes, tādēļ arī nevar būt nevienas universālas virsotnes.)

Risinājumā patstāvīgi ar matemātisko indukciju pierādiet apgalvojumu: "Ja dots sakarīgs grafs ar n šķautnēm, tad tajā ir ne vairāk kā n + 1 virsotne"!

2. lemma (lemma par mainīšanu).

Ja sarunas s(α), s(α +1), s(α + k) notikušas tikai starp cilvēkiem A_1, A_2,..., A_m, bet nākošās sarunas s(α + k + 1), s(α + k + 2),.... s(α + k + v) - tikai starp cilvēkiem B_1, B_2,..., B_t, pie tam visiem i, j $A_i \neq B_j$, tad no cilvēku informētības viedokļa galarezultātā nekas nemainīsies, ja sarunu grupas s(α),..., s(α + k) un s(α + k + 1),..., s(α + k + v) laika ziņā samainīs vietām.

Tiešām, tas, vai sarunas starp cilvēkiem A ir notikušas vai nē, nekādi nevar iespaidot pārējo cilvēku, tajā skaitā arī cilvēku B, informētību, un otrādi.

Tālāk seko pamatapgalvojums (kurš sastāv no divām daļām), kura pierādījumā lietosim matemātisko indukciju pēc k:

1) pēc n + k - 4 zvaniem nav vairāk par k universālām virsotnēm;

2) ja ir tieši k universālas virsotnes, tad sarunas var pārkārtot tā (galarezultātā nemainot vispārējo informētību), lai pēdējās k sarunas

s'(n - 3), s'(n - 2),..., s'(n + k - 4) būtu starp šīm k universālajām (beigās) virsotnēm.

Indukcijas bāze.

Ja k = 0 , k = 1, k = 2, tad no 1.lemmas skaidrs, ka pēc n - 4, n - 3 vai n - 2 zvaniem nav nevienas universālas virsotnes.

Induktīvā pāreja.

Pieņemsim, ka, ja k < t (t $\in$ N - patvaļīgs naturāls skaitlis), tad esam pierādījuši, ka

1) pēc n + k - 4 zvaniem nav vairāk par k universālām virsotnēm,

2) ja ir tieši k universālas virsotnes, tad sarunas var pārvietot tā, lai pēdējās k sarunas būtu starp šīm k beigās universālajām virsotnēm.

Pierādīsim, ka arī tad, ja k = t, ir spēkā abas šīs pieminētās īpašības.

1. Pierādām, ka pēc n + t - 4 zvaniem nav vairāk kā t universālas virsotnes. Pieņemsim pretējo, t. i., ka pēc n +1 - 4 sarunām ir t + 1 universālas virsotnes.

Tā kā vienas sarunas laikā var nākt klāt ne vairāk kā 2 universālas virsotnes, tad pēc n + t - 5 sarunām bija vismaz t - 1 universālas virsotnes x_1, x_2, x_3,..., x_{t-1}; x_t un x_{t+1} radās ar (n + t - 4) - o sarunu. Pēc n + (t - 1) - 4 sarunām tātad ir t - 1 universāli punkti. Tātad pēc induktīvā pieņēmuma sarunas šajā posmā var pārkārtot tā, ka sarunas s(n + 1 - 4), s(n + 2 - 4),..., s(n + (t - 1) - 4) ir starp x_1, x_2, x_3,..., x_{t-1}. Pēc 2. lemmas var mainīt šo t - 1 sarunu bloku ar pēdējo sarunu. Iegūstam, ka pēc n - 3 sarunām būs 2 universāli punkti - x_t un x_{t+1} (jo x_t un x_{t+1} kļūst universāli pēc n + t - 4 sarunām, bet pēdējās t - 1 sarunās neviens no tiem nepiedalās). Iegūta pretruna 1. lemmai.

2. Tagad pierādīsim otro daļu.

Pieņemam, ka pēc n + t - 4 zvaniem ir t universāli punkti (sarunas s(l), s(2),..., s(n + t - 4), kā iepriekš).

Apskatām pirmos n - 2 zvanus s(l), s(2),..., s(n - 2) un radušos grafu. Tajā ir vairākas komponentes (t.i., grafs nav sakarīgs). Pierādīsim, ka šajā grafā nevar būt izolēta virsotne x. Pieņemsim pretējo, t.i., ka tāda atrodama. Dotajā brīdī nav nevienas universālas virsotnes, tātad ar atlikušajām t - 2 sarunām virsotnei x jāsavienojas ar vēl vismaz t - 1 universālajiem punktiem. Tātad t - 2 šķautnēm jāsavieno t punkti, kas nevar būt.

Tātad grafā, kas izveidojies pēc n - 2 sarunām, nav izolētu virsotņu, un katrā grafa komponentē ir notikusi vismaz viena saruna.

Līdz ar to pēc 2. lemmas varam, nemainot informētību pēc n - 2 sarunām, samainīt sarunas tā, lai s(n - 3) un s(n - 2) būtu dažādās komponentēs. Veicam šo samainīšanu.

Tagad pārejam tieši pie apgalvojuma pierādījuma.

Pieņemam, ka ne visi pēdējie t zvani ir starp beigās universāliem punktiem. Tad ir tāds p, $p \leq t$, ka p - 1 pēdējie zvani

s(n + t - p - 2), ..., s(n + t - 5), s(n + t - 4)

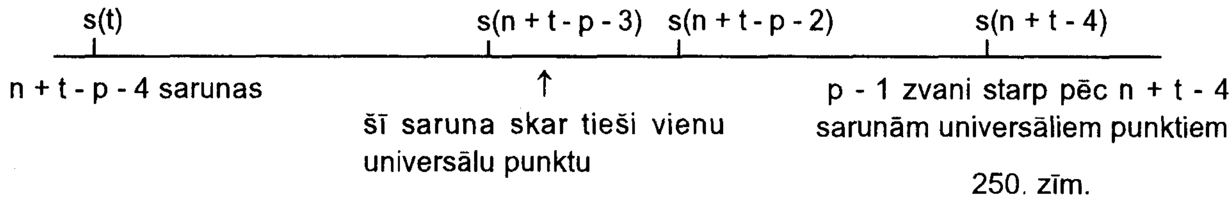
ir starp universāliem punktiem, bet p - tais zvans no beigām - s(n + t - p - 3) - nav.

1. Aplūkojam gadījumu, kad p = t.

Tad saruna s(n - 2) ir starp beigās universāliem punktiem, bet saruna s(n - 3) - nav. Tā kā s(n - 2) un s(n - 3) ir dažādās komponentēs, tad tās var mainīt vietām. Samainot tās, jau saruna s(n - 2) nebūs starp universāliem punktiem. Tātad šis gadījums nereducējas uz nākošo.

2. p < t.

Apskatām zvanu s(n+t-p-3). Tas skar vai nu vienu, vai arī nevienu pēc n+t-4 sarunām universālu punktu. Ja s(n+t-p-3) neskartu nevienu universālu punktu, tad pēc 2. lemmas to varētu mainīt ar visiem nākošajiem punktiem, un tad būtu iegūti t universāli punkti jau pēc n+t-5 zvaniem, kas ir pretrunā ar induktīvā pieņēmuma 1. daļu. Tātad s(n + t - p - 3) skar tieši vienu universālu punktu.



250. zīm.

Atceramies, ka p < t.

Apskatām pēdējo p sarunu veidoto grafu. Tajā izdalām komponenti C, kurā ir saruna s(n + t - p - 3). Pieņemsim, ka C satur r šķautnes ($r \leq p$), apzīmējam tās ar s(l) = $\tilde{s}$ (n + t - p - 3), $\tilde{s}$ (2), $\tilde{s}$ (3), ..., $\tilde{s}$ (r) - pie tam tādā kārtībā, kā tās parādās sākotnējā grafā (t.i., ja i < j, tad $\tilde{s}$ (i) notiek pirms $\tilde{s}$ (j)).

Analogi visas pārējās šķautnes (kas beigās nenonāk komponentē C) apzīmējam ar $\tilde{\tilde{s}}$ (!), $\tilde{\tilde{s}}$ (2),..., $\tilde{\tilde{s}}$ (p-r).

Bet tad pēc lemmas par mainīšanu, nemainot informētību pēc n +t - 4 zvaniem, sarunas var pārkārtot šādā secībā

$$s(1), ..., s(n+t-p-4), \underbrace{\tilde{\tilde{s}}(1), ..., \tilde{\tilde{s}}(p-r)}_{\text{sarunas ārpus komponentes C}}, \underbrace{\tilde{s}(1), ..., \tilde{s}(r)}_{\text{sarunas komponentē C}}$$

Komponentē C ir r šķautnes, tātad $\leq r + 1$ virsotnes. Vismaz viena no tām nav universāls punkts, jo s(n + t - p - 3) savienoja vienu universālu un vienu neuniversālu punktu. Tātad komponentē C atrodas $\leq$ r universāli punkti.

Tāpēc, notiekot sarunām s(l), ... s(n + t - p - 4), $\tilde{\tilde{s}}$ (1), ..., $\tilde{\tilde{s}}$ (p - r), ir radies <u>vismaz</u> t - r universālu punktu.

Šķautņu skaits te ir (n + t - p - 4) + (p - r) = n + (t - r) - 4. Tā kā r > 0, tad pēc induktīvās hipotēzes 1. daļas pēc šīm sarunām ir radies <u>ne vairāk</u> kā t - r universālu punktu. Tātad pēc šādi sakārtotām n + (t - r) - 4 sarunām ir tieši t - r universāli punkti.

Pēc induktīvās hipotēzes 2. daļas varam pārkārtot pirmos n + t - r - 4 zvanus tā, lai pēdējie t - r no tiem būtu starp universāliem punktiem (kas nav komponentē C):

$$s'(1), s'(2),..., s'(n-4), ..., s'(n+t-r-4), \tilde{s}(1), \tilde{s}(2), ..., \tilde{s}(r)$$

$$r \leq p < t$$

Bet tad sarunas s' (n - 3),..., s' (n +1 - r - 4) var mainīt vietām ar sarunām $\tilde{s}$ (1), $\tilde{s}$ (2),.... $\tilde{s}$ (r) (zvani s'(n-3) , ..., s'(n+t-r-4) ir ārpus komponentes C, bet zvani $\tilde{s}$ (l),..., $\tilde{s}$ (r) - komponentē C):

$$s'(1), s'(2),..., s'(n-4), \tilde{s}(1), \tilde{s}(2), ..., \tilde{s}(r), s'(n-3), ..., s'(n+t-r-4).$$

Tā kā sarunas s' (n - 3), s' (n - 2),..., s' (n +t - r - 4) rada tieši t - r universālus punktus, tad pēc sarunām s'(l), s'(2),..., s'(n - 4), $\tilde{s}$ (l), $\tilde{s}$ (2),..., $\tilde{s}$ (r) būs radušies tieši r universāli punkti. Bet tad pēc induktīvā pieņēmuma šīs sarunas var pārkārtot tā, lai pēdējās r sarunas būtu starp beigās (t.i., pēc n + r - 4 sarunām) universāliem punktiem:

$$s''(1), s''(2),..., s''(n-4), s''(n-3), ..., s''(n+t-r-4).$$

starp universāliem punktiem.

Tātad visā pārkārtotajā sarunu virknē s"(l), s"(2),..., s"(n + r - 4), s'(n - 3),..., s'(n +t - r - 4) pēdējās r + t - r = t sarunas būs starp beigās universālajām virsotnēm.

Tādējādi pierādīts arī otrs induktīvās pārejas apgalvojums, bet tādēļ pierādīts arī, starp citu, ka katram k pēc n + k - 4 sarunām ir ne vairāk kā k universālas virsotnes.

Bet tad arī pēc 2n - 5 zvaniem ir ne vairāk kā n - 1 universālas virsotnes, tātad - lai visas virsotnes kļūtu universālas, ir nepieciešamas 2n - 4 sarunas. Teorēma pierādīta.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

304. Pierādīt, ka tad, ja ir nepāra skaits kaimiņu, nav iespējams telefona sarunas noorganizēt tā, lai katrs kaimiņš katru jaunumu dzirdētu tikai vienu reizi.
305. Pierādīt, ka iepriekšējā uzdevumā minēto mērķi var sasniegt, ja $n = 2^k$, $k \in N$, un ja n=12.
306. Pierādīt, ka 304. uzdevumā minēto mērķi var sasniegt, ja n ir pārskaitlis, kas lielāks par 18.
307. Kādā konferencē piedalās n delegāti: ķīmiķi un alķīmiķi. Ķīmiķi vienmēr runā patiesību; alķīmiķi dažreiz runā patiesību, bet dažreiz melo. Profesors Cipariņš grib par katru delegātu uzzināt, kas viņš ir: ķīmiķis vai alķīmiķis. Šai nolūkā viņam atļauts jebkuram delegātam A jautāt par jebkuru citu delegātu B: "Kas ir B?" Ķīmiķu kongresā ir vairākums. Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Cipariņš var sasniegt savu mērķi?

7. 2. Kodēšana

Ar informācijas kodēšanu mēs sastopamies daudzās situācijās. Piemēram, nosūtot telegrammu, katru burtu vai atstarpi starp vārdiem aizstāj ar noteiktu punktu vai svītru (īsu un garu signālu) kombināciju saskaņā ar speciālu kodēšanas likumu - Morzes ābeci vai Bodo kodu. Televīzijas pārraides laikā attēls tiek pārvērsts speciāla tipa radiosignālos, noraidīts ēterā un pēc tam televīzijas aparātā atjaunots (jeb dekodēts) parastajā vizuāli uztveramajā formā. DNK molekulas struktūrā ar gēnu palīdzību kodētas cilvēka būtiskas īpašības. Datoru atmiņā ar elektronisko elementu stāvokļu palīdzību tiek kodēti vārdi, cipari, attēli. Grāmatā ar burtu palīdzību tiek kodētas idejas un jūtas. Pilsoņa kods raksturo varas iestādēm svarīgākos faktus par viņu. Mūsu izrunātie vārdi kodē mūsu domas. Var sacīt, ka jebkura informācijas apstrāde ir saistīta ar tās nepārtrauktu un daudzpusīgu kodēšanu un dekodēšanu.

No daudzajām problēmām, kas saistītas ar informācijas kodēšanu un dekodēšanu, mēs šeit pieskarsimies tikai divām, pie tam ļoti elementārā līmenī, cenšoties ilustrēt tās ar olimpiāžu tipa uzdevumu palīdzību.

7.2. 1. Kā cīnīties ar sakaru traucējumiem

Skolēniem dažreiz šķiet, ka gramatika ir absolūti nevajadzīgs priekšmets, jo katra teikuma jēga ir skaidra tāpat, kā teiktu šodien, "kontekstā" - atkarībā no sarunas vai lasāmā teksta vispārējās ievirzes. Par pretējo varētu pārliecināt šāda pasaka. Veicot daudzus varoņdarbus, varonis X nonāk gūstā pie ļauna karaļa, kas viņu notiesā uz nāvi. Varonis jau nodots bendes rokās, kad no karaļa (kuru pierunājusi viņa meita, kas ir iemīlējusies varonī X) pienāk vēstule ar trim vārdiem:

PAKĀRT NEDRĪKST APŽĒLOT

Acīmredzot, vēstulē izdzisis viens komats. Lasītājam pašam skaidrs, ka atkarībā no tā, starp kuriem vārdiem šis komats atrodas, vēstules jēga kardināli mainās.

Otru piemēru mīlēja stāstīt akadēmiķis R. Dobrušins. Viņš apgalvoja, ka tas esot patiess gadījums.

Kāda Maskavas universitātes studentu grupa ziemas brīvdienās aizbraukusi uz Karakuma tuksnesi. Noteiktajā laikā studenti mājās nav atgriezušies. Vecāki, protams, ļoti uztraukušies. Uztraukums kļuvis vēl lielāks un apvienojies ar neizpratni, kad pēc dažām dienām viena no ģimenēm saņēmusi telegrammu:

"Задержаны баранами. Сообщите где канат." (Mūs aizturējuši auni. Paziņojiet, kur ir tauva.)

Pārpratums noskaidrojies, kad studenti atgriezušies. Izrādās, telegrammā nepareizi uzrakstīti tikai daži burti. Patiesajam tekstam bija jābūt šādam:

"Задержаны буранамы. Сообщите в деканат." (Mūs aizturējušas smilšu vētras. Paziņojiet uz dekanātu.)

Trešo līdzīga tipa piemēru reiz varēja vērot Latvijas Universitātē, kad cienījams profesors (un līdz ar viņu visa auditorija) ilgi centās saprast, kāpēc uz tāfeles parādījies mainīgais X_0 - indeksam nebija jābūt - kamēr kāds pamanīja, ka nullīte nav vis indekss, bet krīta putekļi, kas sakrājušies ap tāfelē iedzītās naglas galviņu.

Šie piemēri parāda, ka, pat minimāli mainot tekstu, tā jēga var izmainīties līdz nepazīšanai. Tai pat laikā skaidrs, ka dažādu neparedzētu un neparedzamu apstākļu dēļ (vadu vai citas aparatūras bojājums, pārrakstīšanās, defekts papīrā, uz kura nodrukāts ziņojums, utt.) mums jābūt gataviem uz šādiem pavērsieniem.

Ko var darīt, lai novērstu šādu notikumu nevēlamās sekas?

Skaidrs, ka nav un nevar būt līdzekļu, kas novērstu jebkuras kļūdas: ja var notikt patvaļīgas pārrakstīšanās, tad, protams, viena sakarīga teksta "aizej uz kino" vietā var parādīties cits sakarīgs teksts "šodien saņēmu "desmit" algebrā", un nevienam nevar rasties aizdomas par kļūdu iespējamību. Tomēr parasti kļūdas gadās reti. Ja mēs izvēlamies tādu kodēšanas sistēmu, lai vienas (vai nedaudzu) kļūdas gadījumā no viena sakarīga teksta koda nevarētu rasties cita sakarīga teksta kods, tad vienas (vai nedaudzu) kļūdas gadījumā mēs nesaņemsim sakarīgu tekstu, un mums vismaz būs skaidrs, ka kaut kur notikusi apzināta vai neapzināta ziņojuma izkropļošana.

Aplūkosim piemēru.

179. piemērs. Ilīrijas armijā katra karavīra kods ir 6 ciparu virkne (pieļaujamas arī virknes, kas sākas ar vienu vai vairākām nullēm, kurās cipari atkārtojas, utt.). Katrām divām virknēm jāatšķiras vismaz divās pozīcijās. Kāds lielākais karavīru skaits var būt Ilīrijas armijā?

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka vairāk par 100000 karavīriem būt nevar. Ievērosim, ka pavisam sešu ciparu virkņu ir tieši miljons - no 000000 līdz 999999 ieskaitot. Katrai šai virknītei aplūkosim tās "asti" - pēdējo 5 ciparu veidoto virkni. Tā, piemēram, virknēs 306977 "aste" ir 06977. Skaidrs, ka ir iespējamas tieši 100000 "astes" - no 00000 līdz 99999. Ja karavīru būtu vairāk nekā 100000, tad saskaņā ar $\mathbf{D_1}$ vismaz divu karavīru virknēm "astes" būtu vienādas. Tad šīs virknītes varētu atšķirties ne vairāk kā ar vienu ciparu - pirmo, bet tas nav pieļaujams.

Parādīsim, kā uzbūvēt 100000 virknītes, kas apmierina nosacījumu par atšķiršanos vismaz divās vietās. Aplūkosim visas iespējamās "astes" (to ir 100000) un katrai "astei" priekšā pierakstīsim "astes" ciparu summas pēdējo ciparu. (Piemēram, ja "aste" ir 32726, tad tai priekšā pieraksta summas 3+2+7+2+6= 20 pēdējo ciparu 0, iegūstot virknīti 032726.)

Viegli saprast: ja divām šādi veidotām 6 ciparu virknēm sakristu 5 pozīcijas, tad sakristu arī sestā pozīcija. Bet katras divas šādi iegūtās virknītes atšķiras vismaz vienā pozīcijā, jo tās iegūtas ar dažādām "astēm". Tātad tās sakrīt ne vairāk kā 4 pozīcijās, t. i., atšķiras vismaz divās pozīcijās, ko arī vajadzēja pamatot.

Skaidrs, ka, lietojot šādu kodēšanas sistēmu, mēs esam absolūti nodrošinājušies pret kļūdām, kuru rezultātā karavīra kodā "izkropļots" viens cipars: prasība par pēdējo ciparu kā pārējo summas pēdējo ciparu vairs netiks izpildīta, un mēs sapratīsim, ka kaut kas nav kārtībā. Vairumā gadījumu mēs "noķersim" arī tādas kļūdas, kuru rezultātā būs "izkropļoti" divi cipari: ja kļūdīšanās nav apzināta, tad maz ticams, ka abas kļūdas viena otru "dzēsīs". Tomēr par šo ieguvumu ir jāmaksā: ar 6 ciparu virknītēm, ar kurām, vispārīgi runājot, varētu apzīmēt miljonu karavīru, mēs varam apzīmēt tikai 100000. Citādi spriežot, piecu simbolu virknītes vietā, ar kuru pietiktu absolūtas precizitātes gadījumā, par kodu jālieto sešu simbolu virknīte. Papildu simbolu tādos gadījumos sauc par kontrolsimbolu vai kontrolbitu.

180. piemērs. Kādu lielāko virknīšu skaitu, kas sastāv no 7 cipariem un kam katrs cipars ir vai nu 0, vai 1, var izvēlēties tā, lai katras divas izvēlētās virknītes atšķirtos vismaz 3 vietās?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka α ir patvaļīga 7 ciparu virknīte, kas sastāv no 0 un 1. Par šīs virknītes apkārtni sauksim to virknīšu kopu, kas atšķiras no α ne vairāk kā vienā vietā. Skaidrs, ka α apkārtnē atrodas pati virknīte α; bez tam α apkārtnē ir vēl 7 citas virknītes, no kurām katra atšķiras no α tieši vienā vietā. Tātad α apkārtnē atrodas 8 virknītes.

Pieņemsim, ka α_1 un α_2 ir divas no tām virknītēm, kuras esam izvēlējušies saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Mēs apgalvojam, ka nav tādas virknītes, kas vienlaicīgi piederētu gan α_1, gan α_2 apkārtnei. Tiešām, pieņemsim, ka tāda virknīte β eksistē. Tā kā β atšķiras gan no α_1, gan no α_2 ne vairāk kā vienā vietā, tad β sakrīt gan ar α_1, gan α_2 vismaz 6 vietās; tāpēc α_1 un α_2 sakrīt viena ar otru vismaz 5 vietās, tātad atšķiras ne vairāk kā 2 vietās. Tā ir pretruna ar uzdevuma prasībām. Tātad α_1 un α_2 apkārtnēm nav kopēju virknīšu.

Tā kā katram no septiņiem virknītes elementiem neatkarīgi no pārējiem ir vērtība 0 vai 1, tad apskatāmo virknīšu ir pavisam $2^7 = 128$. Apzīmēsim ar n uzdevumā prasīto skaitu; tad saskaņā ar pierādīto par apkārtnēm to apkārtnēs kopā ir 8n virknītes. Skaidrs, ka jābūt spēkā nevienādībai $8n \leq 128$; no šejienes $n \leq 16$. Vēl jāparāda, ka 16 virknītes patiešām var izvēlēties. Viens no iespējamiem piemēriem ir šāds:

1) 0000000;

2) 1111111;

3) 1101000 un visas virknītes, kas iegūstamas no šīs virknītes, cikliski pārkārtojot tajā ciparus (t.i., pakāpeniski pārnesot pirmo, otro,... ciparu no virknītes sākuma uz tās beigām);

4) 0010111 un visas virknītes, kas iegūstamas no šīs virknītes, cikliski pārkārtojot tajā ciparus.

Pārliecināties par piemēra pareizību var lasītājs pats.

Ja lietosim kodu, aizstājot burtus, ciparus vai tml. ar šādām 7 ciparu virknītēm, tad ne tikai konstatēsim kļūdas eksistenci (kā iepriekšējā piemērā), bet arī paši spēsim to izlabot, ja vien būsim pārliecināti, ka kodēšanas rezultātā nepareizs nav vairāk kā viens cipars. To garantē "pietiekami lielas atšķirības" starp kodēšanā lietotajām virknēm. Šādus kodus sauc par paškorektējošiem kodiem. Mūsu minētais piemērs ir t.s. Hemminga koda speciālgadījums. Hemminga kodam bez paškorektējamības piemīt vēl virkne izcilu īpašību.

181. piemērs. Pieņemsim, ka izmantojam kodēšanā n ciparu garas virknītes, turklāt vēlamies, lai tās sastāvētu tikai no 0 un 1 un lai katras divas izmantotās virknītes atšķirtos viena no otras vismaz divās vietās. Kādu lielāko daudzumu virknīšu var izmantot kodēšanā?

Atrisinājums. Pavisam ir 2^n nuļļu un vieninieku virknīšu garumā n. Apvienosim tās pa pāriem. Katrā pāri iekļautajām divām virknītēm pirmie n - 1 cipari sakrīt, bet pēdējais cipars vienā no tām ir 0, otrā 1.

Izveidojas pavisam 2^{n-1} pāri. Ja kodēšanā izmantosim vairāk nekā 2^{n-1} virknītes, tad kaut kādas divas no tām būs no viena pāra, t.i., atšķirsies tikai vienā vietā. Tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem, tātad vairāk par 2^{n-1} virknītēm nevar tikt lietotas. Vēl jāparāda, ka iespējams izvēlēties 2^{n-1} virknītes saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Skaidrs, ka to var cerēt izdarīt tikai, ja $n \geq 2$.

Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīsim šādu apgalvojumu: visas n ciparu virknītes ($n \geq 2$), kas sastādītas no nullēm un vieniniekiem, var sadalīt divās kopās X_n un Y_n, tā ka

1) katras divas virknītes, kas abas atrodas vai nu kopā X_n, vai kopā Y_n viena no otras atšķiras vismaz divās vietās,

2) katrā no kopām X_n un Y_n ir 2^{n-1} virknītes.

Bāze. Varam izveidot $x_2 = \{00; 11\}$ un $y = \{01; 10\}$.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka k ciparu virknītes jau sadalītas kopās X_k un Y_k ar prasītajām īpašībām. Izveidojam šādas k + 1 ciparu virknīšu kopas:

a) kopā X_{k+1} iekļaujam visas virknītes no X_k, kam sākumā pierakstīta 0, un visas virknītes no Y_k, kam sākumā pierakstīts 1,

b) kopā Y_{k+1} iekļaujam visas virknītes no X_k, kam sākumā pierakstīts 1, un visas virknītes no Y_k, kam sākumā pierakstīta 0.

Skaidrs, ka gan X_{k+1}, gan Y_{k+1} atrodas $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{(k-1)+1}$ virknītes. Katras divas X_{k+1} virknes, kas "radušās" no X_k virknītēm, atšķiras vismaz 2 vietās saskaņā ar induktīvo pieņēmumu; katras divas X_{k+1}, virknītes, no kurām viena radusies no X_k virknītes, bet otra no Y_k virknītes, atšķiras pirmajā vietā un bez tam vēl vismaz vienā vietā, jo kopu X_k un Y_k apvienojumā visas virknītes ir dažādas. Induktīvā pāreja izdarīta. Tātad meklējamais daudzums ir

2^{n-1}.

Piezīme. Konstrukciju varēja izdarīt ne vien induktīvi, bet arī pasludinot, ka par meklējamām var ņemt tās virknītes, kurās vieninieku skaits ir pārskaitlis. Pierādiet patstāvīgi, ka šis risinājums arī ir pareizs!

7. 2. 2. Par prasmi saprotami beigt

Atmodas laika sākumā Rīgā bija populāra anekdote.

"PSKP CK Politbiroja loceklim Ļigačovam jautā:

- Jegor Kuzmič, kāda ir jūsu attieksme pret sarkanbaltsarkano karogu?

- Labs karogs, ļoti labs karogs! (Pēc pauzes.) Tikai vajadzētu pievienot stūrī piecstaraino zvaigzni. Un vēl - balto svītru nokrāsot sarkanu!"

Līdzīgu gadījumu stāstīja par profesoru Šteinu - ārkārtīgi gudru, interesantu un atjautīgu cilvēku un lielu zinātnieku. Kādas lekcijas laikā, rakstot kustības daudzuma formulu mv, viņš (acīmredzot, pārrakstīšanās pēc) attiecīgajā vietā uzrakstīja mv^2.

- Profesor, - kāds godbijīgi ierunājās, - vai formulai nav jābūt citādai?

Prof. Šteins uzmeta acis tāfelei un ar smaidu pagriezās pret auditoriju.

- Es vēl neuzrakstīju līdz galam, - viņš gardi nosmējās un pievienoja formulai kvadrātsakni, iegūstot $m\sqrt{v^2}$.

Ar līdzīgām problēmām mēs sastopamies arī kodēšanas procesā. Pieņemsim, ka ziņojumi tiek kodēti ar nuļļu un vieninieku virknēm un ka esam vienojušies "jā" kodēt ar virkni "000", bet "nē" kodēt ar "00". Pa telegrāfu noraidot atbildi "jā", pēdējais cipars drukas iekārtas defekta dēļ netiek nodrukāts. Līdz ar to atbildes "jā" vietā mēs iegūstam atbildi "nē", un, protams, rīkojamies neatbilstoši patiesajai situācijai.

Acīmredzami šādas kļūdas iespējamību radīja apstāklis, ka viena kodēšanā lietotā virkne ir otras virknes sākuma daļa. Līdzīgi pārpratumi var rasties arī telefona sarunās, ja aparāta defekta dēļ mēs nesadzirdam kāda vārda beigas; tā, piemēram, vārda "Maskava" vietā varam sadzirdēt "maska".

Minētā valodas īpatnība kodēšanas procesā rada grūtības ne tikai iespējamo sakaru līniju defektu dēļ. Ja mēs lietojam tādu kodu, kurā viena ar noteiktu jēgu apveltīta simbolu (burtu, ciparu utt.) virkne ir otras tādas pašas virknes sākuma fragments - un mēs redzam, ka latviešu valoda ir tieši tāds kods - tad līdz ar šādu virkni jānorāda arī tās beigas, kas prasa papildu simbola lietošanu (latviešu valodā šāda simbola loma parasti ir atstarpei starp vārdiem). Pretējā gadījumā, piemēram, lasot burtu virkni "DAINUVĪTE", mēs nesaprastu, vai tiek runāts par meiteni ar poētisku vārdu, vai par tautasdziesmu virkni.

Varētu iedomāties, ka šādas grūtības nerodas, ja visas kodēšanā izmantotās simbolu virknes ir vienāda garuma. Taisnība! Bet tas rada lielākus izdevumus. Ja, piemēram, ar viena un tā paša garuma nuļļu un vieninieku virknēm tiek kodēts gan bieži sastopams burts A, gan reti sastopams burts H (latviešu valodā uz 1000 burtiem A sastopams vidēji 111 reizes, bet H - 1 reizi), tad kodētā ziņojuma garums būs daudz lielāks nekā tad, ja bieži sastopami burti tiks kodēti ar īsām virknēm, bet reti sastopami burti - ar garām virknēm; atbilstoši pieaugs arī kodēšanas, ziņojuma noraidīšanas un dekodēšanas izmaksas un laiks.

Galvenais rezultāts, kas "regulē" minētās problēmas risinājumu (kā izvairīties no tā, ka viena kodēšanā lietotā virkne ir otras virknes sākums) ir nākošā teorēma, kuras pierādījums ir klasisks vidējās vērtības metodes pielietojums.

<u>Teorēma (Krafta nevienādība)</u>. Pieņemsim, ka no n dažādiem simboliem izveidotas a_1 virknes, kuru garums ir 1, a_2 virknes, kuru garums ir 2,..., a_k virknes, kuru garums ir k, pie tam neviena izveidotā virkne nav citas virknes sākuma fragments. Tad $\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_k}{n^k} \le 1$.

<u>Pierādījums.</u> Katrai virknei, kuras garums ir i (i = 1; 2; ...; k - 1), galā var pierakstīt k - i simbolus tā, lai iegūtu virkni, kuras garums ir k; tādējādi katrai virknei, kuras garums ir i, ir n^{k-1} "pagarinājumi" - virknes, kuru garums ir k. Visām teorēmā minētajām virknēm kopā ir

$a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot n + a_k$ pagarinājumi.

Mēs apgalvojam, ka nekādi divi no šiem pagarinājumiem nesakrīt. Tiešām, attiecībā uz vienas virknes diviem pagarinājumiem vai divu vienādi garu virkņu pagarinājumiem tas ir acīmredzams. Ja virkne α būtu īsāka par virkni β, bet kāds virknes α pagarinājums sakristu ar kādu β virknes pagarinājumu, tad acīmredzami virkne α būtu virknes β sākuma fragments; tā ir pretruna ar teorēmas nosacījumiem. Tā kā pavisam iespējamo virknīšu, kuru garums ir k, ir n^k, tad iegūstam $a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot n + a_k \le n^k$, no kuriem, izdalot ar n^k, seko vajadzīgais.

<u>182. piemērs.</u> Kolokolo cilts valodā ir tikai divas skaņas: a un b. Neviens šīs valodas vārds nav otra vārda pagarinājums. Vai kolokolo valodā varbūt 3 vārdi, kas sastāv no 3 skaņām, 4 vārdi, kas sastāv no 4 skaņām, 6 vārdi, kas sastāv no 5 skaņām, 8 vārdi, kas sastāv no 6 skaņām un 9 vārdi, kas sastāv no 7 skaņām katrs?

Atrisinājums. Lietosim Krafta nevienādību. Šoreiz n = 2 un k = 7. Pārbaudot hipotētisko sakarību $\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{6}{32}+\frac{8}{64}+\frac{9}{128}\le 1$, konstatējam, ka tā nav pareiza: kreisās puses vērtība ir $\frac{129}{128}>1$. Tātad šāda situācija nav iespējama.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

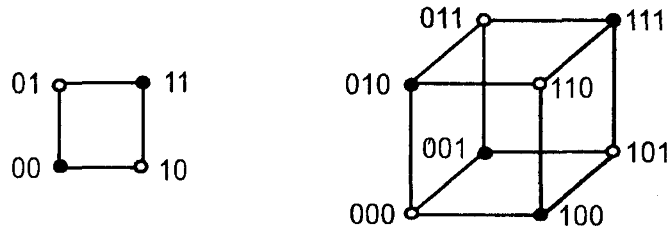
308.° Pierādīt: ja no nullēm un vieniniekiem tiek izveidotas vairākas virknes garumā n tā, lai katras divas izveidotās virknes atšķirtos vismaz trīs vietās, tad izveidoto virkņu skaits nepārsniedz $\frac{2^n}{n+1}$.

309. Kāds ir lielākais trīsciparu skaitļu skaits, kurus var izveidot, izmantojot tikai ciparus 1; 2; 3;...; k, tā, lai katri divi skaitļi atšķirtos vismaz divās vietās?

310. Pierādīt: ja atļauts izmantot tikai k dažādus burtus, tad var izveidot ne vairāk kā $\frac{k^6}{6k-5}$ 6 burtu virknes tā, lai katras divas izveidotās virknes atšķirtos viena no otras vismaz 3 vietās.

311.* Pierādīt, ka Krafta nevienādība dod arī pietiekamo nosacījumu tādas galīgu virkņu sistēmas (ar dotiem virkņu garumiem) eksistencei, kurā neviena virkne nav otras virknes sākuma fragments.

312* Aplūkojiet vēlreiz 181. piemēra atrisinājumu! Kā redzams 251. zīmējuma, pie n = 2 un n=3 izvēlētās 2^{n-1} virknes var attēlot kā kvadrāta un kuba virsotnes (ar melnām virsotnēm attēlotā kopa X_n, ar baltām virsotnēm - kopa Y_n):



251. zīm.

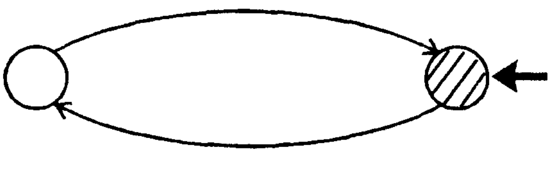
Pēc kāda principa virsotnēm pierakstītas virknes?
Pēc kāda principa tās sadalītas grupās X_n un Y_n? Vai šo risinājuma ideju var pielietot arī lielākām n vērtībām?

7. 3. Ko nevar galīgs automāts

Lai saprastu šo tēmu, ieteicams iepazīties ar galīga automāta (un vislabāk ar Tjuringa mašīnas) jēdzieniem.

7. 3. 1. Galīgo automātu piemēri un vispārīgais jēdziens

Aplūkosim shēmu, kas ilustrē galda lampas iedegšanos vai neiedegšanos atkarībā no tās slēdža stāvokļa. Baltais aplītis 252. zīmējumā apzīmē stāvokli, kad lampa deg, tumšais - kad tā nedeg. Liektās bultiņas parāda, ka slēdža nospiešana ietekmē lampas stāvokli: ja slēdzi nospiež tādā stāvoklī, kad lampa deg, tad tā nedziest (to attēlo augšējā bultiņa), bet, ja slēdzi nospiež tādā stāvoklī, kad lampa nedeg, tad tā iedegas (to attēlo apakšējā bultiņa).



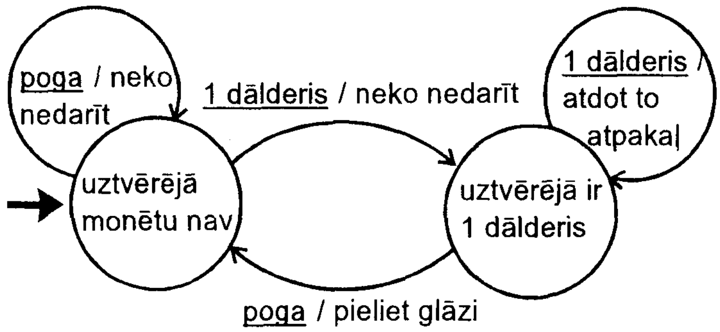
252. zīm.

Ir dabiski uzskatīt, ka sākumā lampa nav ieslēgta, t.i., tumšo aplīti var uzskatīt par lampas sākuma stāvokli; to shēmā parāda plata, melna bulta.

Aprakstītā shēma lampas darbību raksturo ļoti vienpusīgi: tā nesniedz informāciju par to, vai kupols ir pacelts vai nolaists, neko nepasaka par lampas novietojumu attiecībā pret priekšmetiem istabā utt. Šajā shēmā lampa tiek aplūkota kā lieta, kas var atrasties tikai divos atšķirīgos stāvokļos (degt vai nedegt) un kas maina savu stāvokli vienas vienīgās ārējas iedarbības - slēdža nospiešanas rezultātā; citas ārējas iedarbības uz lampu netiek apskatītas.

Aplūkosim citu, sarežģītāku piemēru. Smaragda pilsētā daudzās vietās ir uzstādīti gāzēta ūdens automāti. Šie automāti ir konstruēti tā, ka tajos var iemest tikai 1 dāldera monētas. Ja automāta monētu uztvērējā atrodas 1 dālderis un tiek nospiesta poga, automāts ielej glāzē ūdeni, iemet monētu savā krājkasē un sāk gaidīt jaunas monētas.

Neinteresējoties par automāta krāsu, formu, par to, vai tas atrodas uz ielas, vai telpās u.tml., skaidrs, ka tādam automātam jāprot atšķirt divas dažādas iedarbības: pogas nospiešanu un monētas iemešanu uztvērējā. Turklāt automāta reakcijai uz šīm iedarbībām jābūt atšķirīgai atkarībā no tā, vai automāta monētu uztvērējā jau atrodas 1 dāldera monēta (tādā gadījumā citas monētas jādod atpakaļ, bet uz pogas nospiešanu jāreaģē ar glāzes piepildīšanu un jāiemet monēta krājkasē), vai arī tur monētas nav (tādā gadījumā pogas nospiešana jāignorē, bet, saņemot viena dāldera monētu, jāsagatavojas tālāk rīkoties tā, kā aprakstīts iepriekš). Šāda automāta darbība ir attēlotā 253. zīmējumā parādītajā shēmā.



253. zīm.

Katra bulta attēlo automāta reakciju uz vienu ārējo iedarbību: pie bultas virs slīpās svītras pierakstīta iedarbība uz automātu, zem svītras - automāta reakcija uz to. Automāta rīcība ir atkarīga no tā, kurā no diviem stāvokļiem tas atrodas. Kā redzams, ārējās iedarbības rezultātā automāts ne tikai attiecīgi reaģē, bet var pāriet no viena sava stāvokļa otrā vai arī nemainīt stāvokli.

183. piemērs. *Uzzīmējiet tāda gāzētā ūdens automāta shēmu, kurā arī var iemest tikai viena dāldera monētas, bet kas uz pogas nospiešanu reaģē šādi: ja poga tiek nospiesta brīdī, kad monētu uztvērējā ir 1 dālderis, automāts ielej glāzē ūdeni bez sīrupa, bet, ja pogu nospiež brīdī, kad monētu uztvērējā ir 3 monētas, automāts ielej glāzē ūdeni ar sīrupu.*

Norāde. Šādam automātam nepieciešami vismaz 4 stāvokļi.

Iepriekš aplūkotā Smaragda pilsētas gāzētā ūdens automāta darbību var aprakstīt arī citādi. Apzīmēsim automāta stāvokli ar q_1, kad tā uztvērējā monētu nav, bet ar q_2 - stāvokli, kad tā uztvērējā ir 1 dāldera monēta. Lietojot šādus apzīmējumus, automāta darbība ir izsakāma ar šādām teksta rindām:

q_0 poga $\rightarrow$ nekas netiek darīts, q_0;

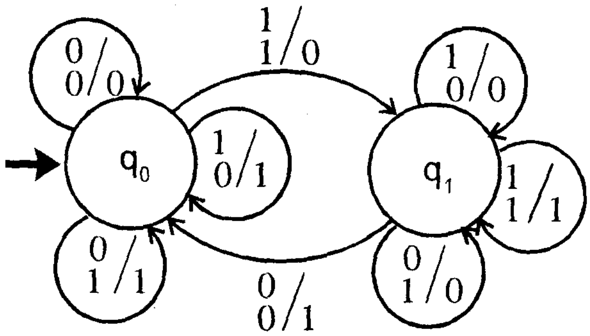
q_0, 1 monēta $\rightarrow$ nekas netiek darīts, q_1 ;

q_1, 1 monēta $\rightarrow$ atdod monētu atpakaļ, q_1 ;

q_1, poga $\rightarrow$ pielej glāzi, q_0.

Katrai 253. zīmējuma shēmas bultiņai atbilst viena rinda. Tās kreisajā pusē norādīts automāta stāvoklis un ārējā iedarbība uz automātu, bet labajā pusē - automāta reakcija "uz ārpusi" un stāvoklis, kurā tam jāpāriet. Varam šīs rindas saukt par gāzētā ūdens automāta komandām, bet q_0 - par gāzētā ūdens automāta sākuma stāvokli.

Aplūkosim 254. zīmējumā attēloto shēmu, nesaistot to ar kādu konkrētu fizisku ierīci. Šī shēma varētu atbilst jebkurai tādai ierīcei, kas saskaita divus binārajā sistēmā pierakstītus skaitļus: ierīce vispirms saņem abu saskaitāmo pēdējos ciparus (tie tiek pierakstīti virs slīpas svītras pie komandu bultiņām) un reaģē uz tiem, paziņojot summas pēdējo ciparu (tas pierakstīts pie komandu bultiņām zem slīpās svītras). Pēc tam ierīce saņem abu saskaitāmo priekšpēdējos ciparus un reaģē uz tiem, paziņojot summas priekšpēdējo ciparu, utt. Stāvoklis q_0 atbilst gadījumam, kad pārnesums no iepriekšējās šķiras nav radies; stāvoklis q_1 atbilst gadījumam, kad, saskaitot kārtējos ciparus, tiem jāpieskaita arī pārnesums no iepriekšējās šķiras.



254. zīm.

Apskatāmajā shēmā paredzēts, ka ciparus ierīcē ievada pa pāriem: vienu - no viena saskaitāmā, otru - no otra saskaitāmā. Ja viena skaitļa cipari tiek ievadīti ātrāk, uzskatīsim, ka šis skaitlis tiek papildināts ar nullēm skaitļa priekšā. Kad shēmā ievadīti abu saskaitāmo n cipari (no labās puses), tā atbildējusi, izvadot summas n ciparus (no labās puses). Ja ievadīti abi saskaitāmie, tad, lai pārbaudītu, vai summā nav vēl viens cipars, shēmā jāievada vēl $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{0}$, t.i., abi saskaitāmie jāpapildina ar vēl vienu nulli skaitļa priekšā. Shēma reaģēs ar 0 (ja tieši pirms tam pārnesums nav radies) vai ar 1 (ja tas ir radies).

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

313. Cik stāvokļu un cik bultiņu (komandu) nepieciešams shēmai, kas līdzīgā veidā realizētu divu skaitļu saskaitīšanu decimālajā pierakstā?
314. Uzzīmēt līdzīgu shēmu, kas realizē triju skaitļu saskaitīšanu binārajā pierakstā. Pārbaudīt shēmas pareizību ar dažādiem piemēriem.

Galīga automāta jēdziens matemātikā ieviests tāpēc, lai varētu vispārīgā veidā pētīt tādas ierīces, kuru iespējas atcerēties iepriekš saņemtu informāciju ir galīgas (ierobežotas). Tāds, piemēram, ir dators bez ārējas atmiņas ierīcēm. Tiešām, dators sastāv no galīga skaita dažādām mehāniskām, elektroniskām, magnētiskām utt. ierīcēm un elementiem, katrs no tiem var atrasties galīgā skaitā stāvokļu. Līdz ar to arī paša datora stāvokļu skaits ir galīgs: apzīmēsim to ar N. Ja dators nonāk N + 1 dažādās situācijās, tad vismaz divas no tām viņa "iekšējā pasaulē" atspoguļojas vienādi, un viņš nespēj tās atšķirt vienu no otras. Tātad, ja datoram piegādātā informācija satur k bitus un $2^k \geq N + 1$, dators visu šo k bitu informāciju "atcerēties" nespēj.

Galīgā automāta jēdziens matemātikā tiek precizēts daudzos veidos atkarībā no konkrētajām problēmām, kuru pētīšanai tas paredzēts. Mēs aplūkosim visvienkāršāko variantu - galīgu automātu ar ieeju un izeju. Tā ir ierīce, kas var atrasties galīgā skaitā stāvokļu (apzīmēsim tos ar q_0, q_1,.... q_n). Viens no šiem stāvokļiem ir tas, kurā automāts sāk darbu; parasti par to izvēlas q_0. Šo stāvokli sauc par automāta sākuma stāvokli.

Automāts spēj atšķirt galīgu skaitu dažādu ārēju iedarbību uz sevi; apzīmēsim šīs iedarbības ar a_1; a_2;...; a_k. Piemēram, datoram šīs iedarbības ir klaviatūras taustiņa nospiešana. Saka arī, ka automātā var ievadīt a_1;a_2;...;a_k jeb ka tā ieejā var padot a_1; a_2;...; a_k.

Atkarībā no tā, kurā stāvoklī automāts atrodas un kāda ārējā iedarbība uz to šajā stāvoklī izdarīta, automātam ir precīzi norādīts,

1) kā ārēji reaģēt uz šo iedarbību (piemēram, datoram - ko parādīt uz ekrāna);

2) kādā jaunā stāvoklī pašam automātam "pārkārtoties" (piemēram, datoram - kā mainīt savu elektronisko, mehānisko un citu elementu stāvokli).

Uztverot nākamo ārējo iedarbību, automāts jau rīkosies saskaņā ar tām instrukcijām, kas paredzētas šim jaunajam stāvoklim. Skaidrs, ka arī automāta ārējo reakciju skaits ir galīgs un nevar pārsniegt (n + 1)k (t. i., stāvokļu skaits, pareizināts ar dažādo iedarbību skaitu uz automātu). Ja automāts reaģē ar reakciju r, teiksim arī, ka tas izvada r.

Piemēram, 254. zīmējumā aplūkotajā shēmā attēlots galīgs automāts skaitļu saskaitīšanai binārajā pierakstā ar diviem stāvokļiem q_0 un q_1; tas spēj atšķirt četras ārējās iedarbības (visus iespējamos binārciparu pārus), un tam ir divas reakcijas - 0 un 1.

Automāts sāk darbu stāvoklī q_0. Tabulā parādīta automāta darbība vienā konkrētā piemērā.

Ārējā iedarbība (ievada)	0 0	0 1	1 1	1 0	1 1	0 0	0 1	1 1	0 1	0 1
Pāriet uz (stāvokli)	q_0	q_0	q_1	q_1	q_1	q_0	q_0	q_1	q_1	q_1
Reakcija (izvada)	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0

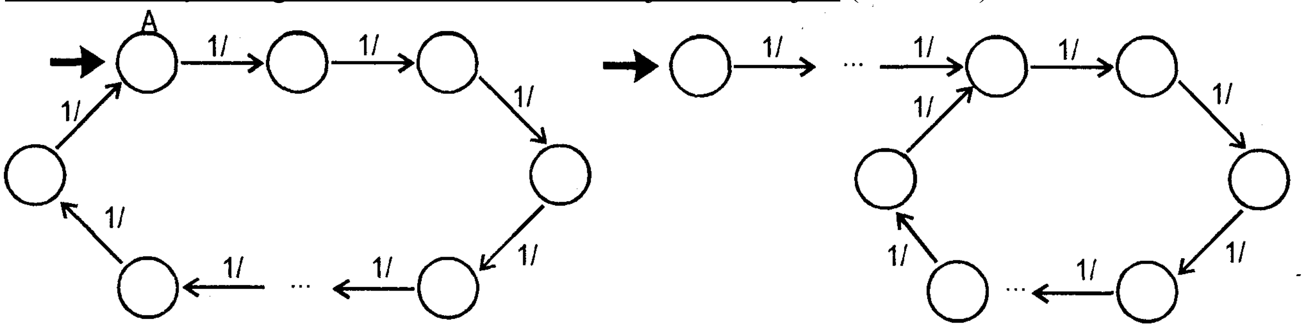
Šajā piemērā labi redzama automāta stāvokļu jēga: katrs stāvoklis atbilst savai situācijai, kuras automātam jāatšķir cita no citas, jo tajās jārīkojas atšķirīgi. Stāvoklis q_0 atbilst situācijai, kad pārnesuma nav, bet stāvoklis q_1 - situācijai, kad pārnesums ir.

7. 3. 2. Uzdevumi, kurus nav iespējams atrisināt ar galīgiem automātiem

Iepriekšējā iedaļā aplūkojām uzdevumus, kuru risināšanai ir iespējams uzbūvēt galīgos automātus. Izrādās, ka pastāv arī tādi uzdevumi, kurus ar galīgo automātu palīdzību atrisināt nav iespējams.

<u>184. piemērs.</u> Parādīsim, ka nav iespējams uzbūvēt galīgu automātu, kas kā ārējo iedarbību uztver tikai ciparu 1 un ar "jā" atbild tad un tikai tad, ja automātā ievadīto vieninieku skaits ir naturāla skaitļa kvadrāts (t.i., 1; 4; 9; 16;...), bet ar "nē" - pretējā gadījumā.

<u>Atrisinājums.</u> Pieņemsim pretējo - ka tāds galīgais automāts ir iespējams. Apzīmēsim tā stāvokļu skaitu ar n. Automāta shēmā no katra stāvokļa iziet tikai viena bultiņa, un pie tās ir rakstīts 1/jā vai 1/nē. Sākot ar automāta sākuma stāvokli, virzīsimies automāta shēmā pa bultiņām. Tā kā stāvokļu pavisam ir n, tad <u>pēc ne vairāk kā n soļiem atgriezīsimies stāvoklī A, kurā jau esam bijuši</u> (255. zīm.).



255. zīm.

Pieņemsim, ka automātā pēc kārtas ievadām vieniniekus. Tad starp pirmo un otro pāreju stāvoklī A (skat. 255. zīm.) automāts būs reaģējis uz tajā ievadītajiem vieniniekiem ar kaut kādu vārdu "jā" un "nē" virkni. Turpinot automātā ievadīt vieniniekus, tā darbība atkal virzīsies pa to pašu ceļu no A līdz A (jo automāta rīcību nosaka vienīgi stāvoklis, kurā tas atrodas, un ārējā iedarbība uz automātu). Tātad atkārtosies arī tā pati automāta reakciju "jā" un "nē" virkne, kuras garums nepārsniegs n. Tādējādi automāts neatšķir, vai tas ir stāvoklī A pirmo, otro,... reizi.

Tālāk šķirosim divus gadījumus.

1. Starp pirmo un otro atrašanos stāvoklī A automāts nav paziņojis nevienu atbildi "jā". Tad tas arī turpmāk nepaziņos nevienu atbildi "jā". Bet tā nedrīkst būt, jo naturālo skaitļu kvadrātu ir bezgalīgi daudz, tāpēc atbilde "jā" jāpaziņo bezgalīgi daudzas reizes.

2. Starp pirmo un otro atrašanos stāvoklī A automāts kaut reizi paziņojis atbildi "jā". Tad katra nākamā atbilde "jā" sekos pēc ne vairāk kā n vieninieku ievadīšanas automātā. Bet tā nedrīkst būt, jo, piemēram,

$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > n$, tātad, ievadot pēc kārtas 2n vieniniekus (no vieninieka, kura numurs ir $n^2 + 1$, līdz vieniniekam, kura numurs ir $n^2 + 2n$), visām automāta atbildēm jābūt "nē".

Iegūtās pretrunas rāda, ka mūsu pieņēmums ir nepareizs un galīgs automāts, kas pazīst, vai vieninieku skaits ir pilns kvadrāts, nav iespējams.

Izšķirošais moments pierādījumā bija izceltie vārdi par automāta atgriešanos jau bijušā stāvoklī, kas tieši izriet no Dirihlē principa. Automāta atmiņa ir pārāk maza, lai tā spētu atšķirīgi atspoguļot visas dažādās iespējamās situācijas, kuras jāatšķir viena no otras (katru situāciju - zaķi - ievietot savā būrī). Tāpēc automāts spiests "vairākus zaķus ievietot vienā būrī" (vairākas principiāli dažādas situācijas atspoguļot ar vienu un to pašu stāvokli) un tāpēc vismaz vienā no tām kļūdīties.

Līdzīgi spriedumi ir pamatā arī visiem citiem neiespējamības pierādījumiem par galīgiem automātiem.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

315. Pieņemsim, ka aplūkotajā piemērā automātam ar "jā" ir jāatbild tikai tajos gadījumos, kad ievadītu vieninieku skaits ir naturāla skaitļa kvadrāts, kas nepārsniedz 1000000. Pierādīt, ka tādu automātu var uzbūvēt.

316. Pierādīt, ka neeksistē galīgs automāts, kas veic skaitļu reizināšanu binārajā pierakstā. Šādam automātam vajadzētu atšķirt ārējās iedarbības $\begin{smallmatrix}0,0,1,1\\0,1,0,1\end{smallmatrix}$ (binārciparu pārus), un pēc katra ievadītā binārciparu pāra (pēdējā, priekšpēdējā utt.) automātam vajadzētu reaģēt ar kārtējo reizinājuma ciparu (pēdējo, priekšpēdējo utt.).

Norādījums: pieņemt, ka eksistē tāds automāts ar n stāvokļiem, un pārbaudīt, vai tas pareizi reizina skaitļus $\underbrace{10\ldots00}_{10n}\underbrace{10\ldots00}_{n+2}$ un $\underbrace{10\ldots00}_{10n}\underbrace{10\ldots00}_{n+2}$.

<u>Piezīme.</u> Šī uzdevuma rezultāts ļauj dziļāk izprast aritmētisko operāciju dabu: tas parāda, ka skaitļu reizināšana ne tikai šķiet sarežģītāka par saskaitīšanu, bet tiešām tāda arī ir. Saskaitīšanu var realizēt ar galīga automāta palīdzību, bet reizināšanu nevar; reizināšanas procesā jāsaglabā daudz vairāk informācijas, ko sniedz abi darbības locekļi, nekā saskaitīšanas procesā.

317. Pierādīt, ka neeksistē galīgs automāts, kas spēj atšķirt ārējās iedarbības a un b, reaģēt uz tām ar "jā" vai "nē" un kas reaģē ar "jā" tad un tikai tad, ja ievadītajā burtu a un b virknē burtu a skaits vienāds ar burtu b skaitu.

Norādījums: pieņemt, ka eksistē tāds automāts ar n stāvokļiem, un aplūkot, kā automāts reaģē pēc virkņu $\underbrace{a.......a}_{n+k}\underbrace{b.......b}_{n}$ un $\underbrace{a...a}_{n}\underbrace{b...b}_{n}$ ievadīšanas, kur k - automāta stāvokļu skaits tajā sistēmas "cilpā", kurā tas nonāk, ja automātā pēc n burtu b ievadīšanas sāk ievadīt tikai burtus a.

318.* Pierādīt, ka neeksistē galīgs automāts, kas kā ārējās iedarbības spēj atšķirt visus decimālciparus un kas reaģē ar "jā" tad un tikai tad, ja ievadītā ciparu virkne ir kāda naturāla skaitļa kvadrāta pieraksts decimālajā sistēmā (ciparus ievada no skaitļa sākuma).

319.* Pierādīt, ka neeksistē galīgs automāts, kas kā ārējo iedarbību uztver tikai ciparu 1 un reaģē ar "jā" tad un tikai tad, ja ievadīto vieninieku skaits ir pirmskaitlis.

Norādījums: izmantot faktu, ka neviens no skaitļiem $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$ nav pirmskaitlis (pamatot to patstāvīgi).

320. Pierādīt, ka neeksistē galīgs automāts, kas kā ārējo iedarbību uztver tikai ciparu 1 un kas, ievadot tajā bezgalīgi daudz vieninieku, izvada skaitļa $\sqrt{2}$ decimālciparu virkni, t.i., ciparus 1; 4; 1; 4; 2; ....

321. Kādiem bezgalīgiem decimāldaļskaitļiem A var uzbūvēt galīgu automātu, kurš uz tajā ievadītu bezgalīgu vieninieku virkni reaģē, pēc kārtas paziņodams A ciparus? Uzzīmēt šāda automāta shēmu, ja $A = 1/7$.

Literatūra

1. *Andžāns A., Bērziņš A., Stupāne M.* Matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi. -R., Zvaigzne, 1992.
2. *Andžāns A., Smotrovs J.* Turnīru matemātika I - VI. // "Zvaigžņotā Debess", 1993 - 1995.
3. *Āboliņa K.* Sakarā ar R. Greiama teorēmu. // "Zvaigžņotā Debess", 1990./91. ziema. - 54. - 55. lpp.

4. *Sedola S.* Kā šķērsot tuksnesi. // "Zvaigžņotā Debess", 1987. rudens. - 46. - 49. lpp.