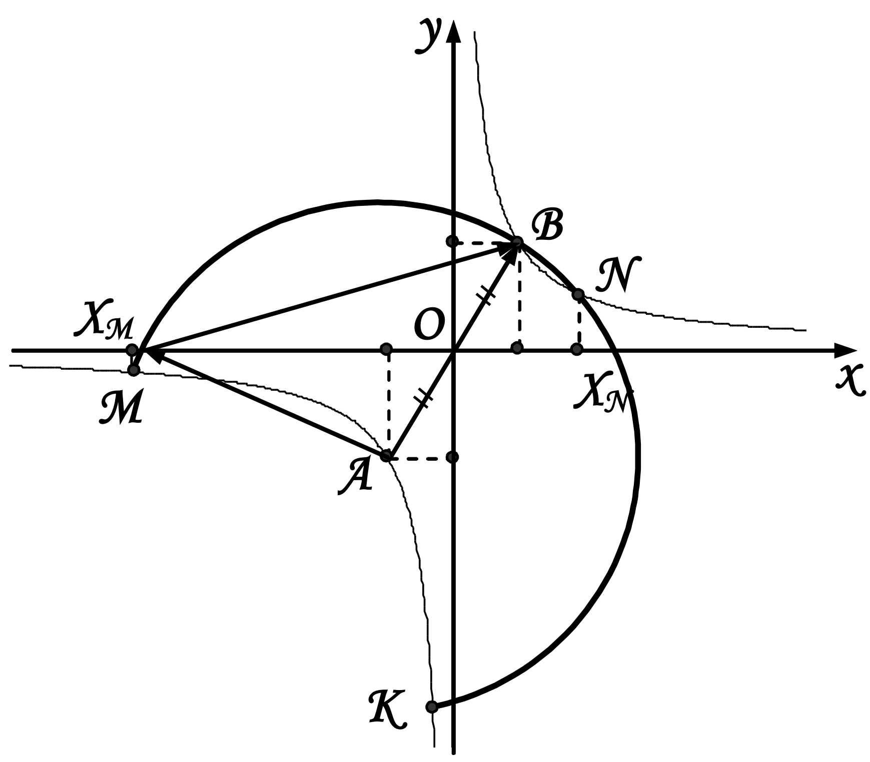
A. Andžāns, L. Ramāna,
B. Johannessons

VEKTORI

1. DAĻA



Rīga 2006

UDK

A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. Vektori. 1. daļa.

Rīga: Latvijas Universitātes Akadēmiskais apgāds, 2006. 117 lpp.

Šajā darbā aplūkoti pamatjautājumi, kas saistīti ar vektora jēdzienu, un galvenās lineārās operācijas ar tiem. Grāmata satur teorētiskā materiāla izklāstu, piemērus, vingrinājumus izpratnes pārbaudei un uzdevumus patstāvīgai risināšanai.

Paredzams, ka darbu varēs izmantot skolēni, skolotāji, matemātikas pulciņu dalībnieki un vadītāji, kā arī pirmo kursu studenti.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

Darbu izdošanai sagatavojušas Inese Bērziņa un Agnese Zalcmane.

ISBN

SATURA RĀDĪTĀJS

IEVADS

No visām matemātikas nodaļām skolēniem tradicionāli vislielākās grūtības sagādā ģeometrija, galvenokārt pierādījuma uzdevumi. Tam ir vairāki dziļi iemesli:

- *ģeometrija skolā tiek būvēta daudzu gadu garumā kā **dedukīva** sistēma; reiz radušies robi patstāvīgi atsaucas uz izpratni turpmākajā mācību procesā. Pretēji tam algebra un matemātiskās analīzes elementi skolā sastāv no vairākām relatīvi izolētām daļām, un pamatjēdzieni tiek ieviesti intuitīvi;*
- *grūtāki ģeometrijas uzdevumi un jautājumi lielākoties ir „kvalitatīva" rakstura - tādi jautājumi, uz kuriem atbilde ir „jā" vai „nē" (piemēram: vai trijstūra augstumi krustojas vienā punktā?). Ģeometriskos uzdevumos katra soļa matemātiskajai jēgai jāseko daudz dziļāk nekā algebrā, kur mērķi parasti sasniedz, lietojot formālas manipulācijas ar matemātiskām izteiksmēm.*

Vektori ir viens no trim formālajiem aparātiem, kas ļauj „kvalitatīvo" jautājumu risināšanā izmantot „kvantitatīvas" metodes, pārtulkojot ģeometriskus apgalvojumus formulu valodā. Tādējādi šos apgalvojumus var pētīt, izmantojot matemātikas algebriskā aparāta vareno spēku; mēs it kā „ļaujam formulām domāt mūsu vietā".

Liela vektoru priekšrocība, salīdzinot ar sintētiskās ģeometrijas metodēm, ir spriedumu neatkarība no konkrētā zīmējuma, kas ļauj vienā risinājumā aptvert visus iespējamos gadījumus.

Tomēr par minētajām priekšrocībām ir arī jāmaksā. Risinājumi ar vektoru palīdzību ir ērti un idejiski skaidri, bet nereti tie ir gari, prasa precizitāti un nevainojamu algebrisko pārveidojumu tehniku. Parasti vislabākie rezultāti grūtu uzdevumu risināšanā sasniedzami, kombinējot vektoriālās un sintētiskās metodes un katrā uzdevumā (dažreiz pat katrā uzdevuma etapā) izvēloties piemērotāko.

Grāmatā izmantoti vairāki specifiski apzīmējumi:

** – grūts uzdevums*

k – ļoti grūts uzdevums

▼ *– pierādījuma sākums*

▲ *– pierādījuma beigas*

Autori izsaka sirsnīgu pateicību Rīgas Ebreju vidusskolas matemātikas skolotājai Elīnai Falkenšteinai. Kaut arī viņa nav piedalījusies nevienas rindiņas tapšanā šajā grāmatā, darbs kopā ar viņu citu darbu sarakstīšanā ļoti daudz devis mūsu izpratnei par to, kā veidojami mācību līdzekļi, kurus paredzēts lasīt ne tikai elitārās lasītāju grupās.

Noslēgumā sirsnīgi pateicamies LU rektoram I.Lācim, LU Matemātikas un informātikas institūtam (direktors prof. J.Bārzdiņš) un LU Fizikas un matemātikas fakultātei (dekāns prof. M.Auziņš) par izrādīto atbalstu, kā arī visiem tiem pedagogiem ,vecākiem un skolēniem, kas ar savu darbu padarījuši vajadzīgu un iespējamu šīs grāmatas tapšanu.

Rīgā, 2006. gada 26. septembrī *Autori*

1. PAMATJĒDZIENI

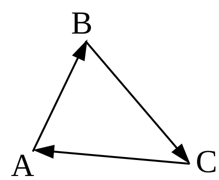
1.1. Vektora definīcija.

Ar nogriežņa un nogriežņa garuma jēdziena palīdzību matemātikā pēta attālumus; ar leņķa un leņķa lieluma jēdziena palīdzību matemātikā pēta virzienus.
Vektora jēdziens ļauj vienlaicīgi pētīt gan attālumus, gan virzienus.

<u>Definīcija.</u> Taisnes nogriezni, kuram viens galapunkts nosaukts par sākuma punktu, bet otrs – par beigu punktu, sauc par nenulles vektoru.
Ja nogriežņa AB galapunkts A nosaukts par sākuma punktu, bet B – par beigu punktu, tad attiecīgo vektoru apzīmē ar $\overrightarrow{AB}$. Ja nogriežņa AB galapunkts B nosaukts par sākuma punktu, bet A – par beigu punktu, tad attiecīgo vektoru apzīmē ar $\overrightarrow{BA}$.
Zīmējumā, attēlojot vektoru $\overrightarrow{XY}$, nogrieznim XY pievieno bultiņu, kas „ieiet” vektora beigu punktā Y.

Piemēri.

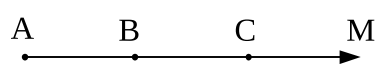
1. Vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ „izveidoti” no trijstūra ABC malām (skat. 1. zīm.).



1. zīm.

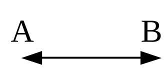
2. Atkarībā no tā, kā izvēlamies vektora sākuma punktu, 2. zīm. attēloti vektori

$$\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}; \overrightarrow{CM}.$$



2. zīm.

3. Vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BA}$ attēloti 3. zīmējumā.



3. zīm.

<u>Definīcija.</u> Katru punktu A sauc par nulles vektoru, kuram gan sākuma, gan beigu punkts ir A. To apzīmē ar $\overrightarrow{AA}$.
Zīmējumā nulles vektoram bultiņas nepievieno.

Svarīga norāde. Datorsalikuma īpatnību dēļ vektoru apzīmējumos lietotās bultiņas šajā grāmatā galvenokārt sastāv no vairākiem gabaliem (ir pārtrauktas). Tam nav nekādas dziļākas jēgas; bultiņa vektora apzīmējumā vienmēr jāuztver kā vienots simbols, un parasti grāmatās un žurnālos tā arī sastāv no viena gabala.

Nenulles un nulles vektorus kopā sauc par vektoriem.

1.2. Vektorus raksturojošie lielumi.

1.2.1. Vektora garums.

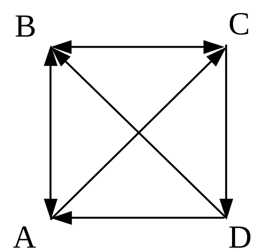
Definīcija. ***Par nenulles vektora $\overrightarrow{AB}$ garumu sauc nogriežņa AB garumu. Nulles vektora garums pēc definīcijas ir 0. Vektora $\overrightarrow{XY}$ garumu apzīmēsim ar $\left|\overrightarrow{XY}\right|$.***

Piemēri.

1. Ja ABCD – kvadrāts ar malas garumu 1, tad

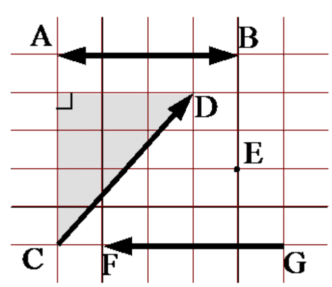
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = 1,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{2}, \ \left|\overrightarrow{AA}\right| = \left|\overrightarrow{DD}\right| = 0 \ \text{(4. zīm.)}.$$



4. zīm.

2. Ja rūtiņas malas garums ir 1 (5. zīm.), tad



5. zīm

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = 4, \ \left|\overrightarrow{GF}\right| = 4, \ \left|\overrightarrow{EE}\right| = 0, \ \left|\overrightarrow{CD}\right| = 5$$ (pielietojot Pitagora teorēmu!)

1.2.2. Vektora virziens.

<u>Definīcija.</u> Par nenulles vektora virzienu sauc tās taisnes virzienu, uz kuras šis vektors atrodas. Nulles vektoram virziena jēdziens netiek definēts.

Piemēri.

1. Vektoru $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{BA}\right|$, $\left|\overrightarrow{GF}\right|$ virzieni 5. zīm. ir vienādi un atšķirīgi no vektora $\overrightarrow{CD}$ virziena. Vektoram $\overrightarrow{EE}$ virziena nav.

2. Ja ABCD – paralelograms, tad vektoru $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$ virzieni ir vienādi (sakrīt). Arī vektoru $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$ virzieni savā starpā ir vienādi, bet atšķiras no iepriekš minēto četru vektoru virzieniem.

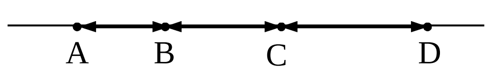
Viegli saprast, ka divu nenulles vektoru virzieni ir vienādi (sakrīt) tad un tikai tad, ja tie atrodas uz vienas un tās pašas taisnes vai uz paralēlām taisnēm.

1.2.3. Vektora vērsums.

<u>Definīcija.</u> Nulles vektoram vērsuma jēdziens netiek definēts. Pieņemsim, ka dots nenulles vektors $\overrightarrow{XY}$. Saka, ka vektors $\overrightarrow{XY}$ vērsts stara XY virzienā vai ka vektora $\overrightarrow{XY}$ vērsums sakrīt ar stara XY vērsumu.

Piemēri.

1. Vektoru $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ vērsumi ir vienādi savā starpā. Arī vektoru $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$ vērsumi vienādi savā starpā, bet atšķiras no triju iepriekšminēto vektoru vērsumiem (6. zīm.).



6. zīm.

2. Ja $\overrightarrow{AB}$ - nenulles vektors, tad vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BA}$ vērsumi noteikti atšķiras.

3. Ja ABCD – paralelograms, tad vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$ vērsumi sakrīt, bet vektoru $\overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{DA}$ vērsumi ir pretēji.

<u>Definīcija.</u> Ja stari AB un CD ir vienādi vērsti, tad saka, ka vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir vienādi vērsti; ja stari AB un CD ir pretēji vērsti, tad saka, ka vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir pretēji vērsti.

Visos trijos iepriekšējos piemēros tie vektori, kuru vērsumi atšķiras, ir pretēji vērsti.

Pārbaudi pats sevi!

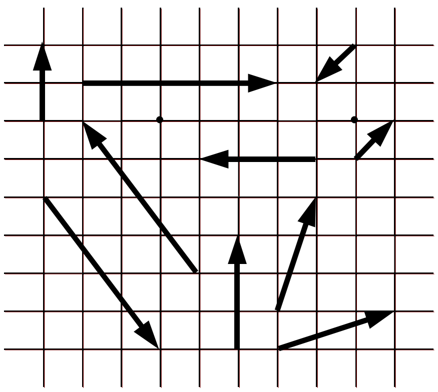
1. Ko sauc par nenulles vektoru?
2. Ko sauc par nulles vektoru?
3. Ko sauc par
   a) nenulles,
   b) nulles

vektora garumu?

4. Kādiem vektoriem apskata virziena jēdzienu? Ko sauc par vektora virzienu?
5. Kādiem vektoriem apskata vērsuma jēdzienu? Ko sauc par vektora vērsumu?
6. Kādus vektorus sauc par
   a) vienādi vērstiem,
   b) pretējiem vērstiem?

Uzdevumi.

1. Starp 7. zīm. attēlotajiem vektoriem atrodi
   a) vienāda garuma vektorus,
   b) viena virziena vektorus,
   c) viena vērsuma vektorus.



7. zīm.

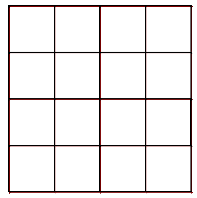
2. Vai divi vektori var būt ar vienādiem virzieniem, bet dažādiem vērsumiem?
3. Vai divi vektori var būt ar vienādiem vērsumiem, bet dažādiem virzieniem?
4. Dots, ka $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right|$. Ko var secināt par punktu A, B, C, D izvietojumu?

5. Vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ virzieni sakrīt. Pierādīt, ka četrstūris ABDC ir vai nu trapece, vai paralelograms.

6. Dots, ka ABCDEF – regulārs sešstūris, O – tā centrs. Kuriem no vektoriem $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ ir
   a) vienādi garumi,
   b) vienādi virzieni,
   c) vienādi vērsumi?

7. Doti trīs vektori ar vienādiem virzieniem. Pierādīt, ka starp tiem var atrast divus, kuru vērsumi ir vienādi.

8. Kādu lielāko skaitu nenulles vektoru var izvēlēties tā, lai to sākuma un beigu punkti atrastos rūtiņu virsotnēs (8. zīm.), bet visu vektoru vērsumi būtu dažādi?



8. zīm.

9.* Dots, ka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - izliekts daudzstūris. Kādam lielākajam daudzumam no vektoriem $\overrightarrow{A_iA_j}$ $(1 \le i,\ j \le n,\ i \ne j)$ var būt vienādi virzieni?

10.[k] Atrisināt iepriekšējo uzdevumu, ja $A_1A_2 \ldots A_n$ - patvaļīgs daudzstūris (ne noteikti izliekts).

11. a) dots, ka $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right|$. Vai ABC noteikti ir regulārs trijstūris?

b)* dots, ka $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$. Vai ABCD noteikti ir rombs?

12. Pieņemsim, ka punkti A, B, C, D uz skaitļu ass attēlo attiecīgi skaitļus a, b, c, d. Pierādīt: vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir vienādi vērsti tad un tikai tad, ja $(a-b)(c-d) > 0$.

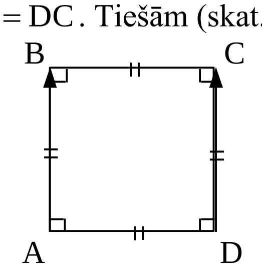
1.3. Vienādi vektori.

<u>Definīcija.</u> Saka, ka nenulles vektors $\overrightarrow{AB}$ vienāds ar nenulles vektoru $\overrightarrow{CD}$, ja tiem ir vienādi garumi, virzieni un vērsumi. Arī katrus divus nulles vektorus sauc par vienādiem.

Vektoru vienādības pierakstīšanai lieto zīmi „=”; to, ka divi vektori nav vienādi, pieraksta, lietojot zīmi „$\ne$”(līdzīgi kā skaitļu, figūru utt. gadījumā).

Piemēri.

1. Ja ABCD – kvadrāts, tad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Tiešām (skat. 9. zīm.),



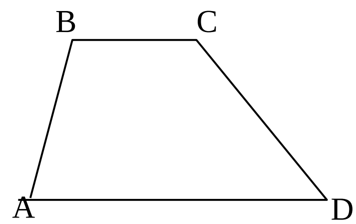
9. zīm.

a) kvadrāta malu garumi ir vienādi, tāpēc $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$,

b) kvadrāta pretējās malas ir paralēlas, tāpēc $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$ virzieni sakrīt,

c) stari AB un DC ir vienādi vērsti, tāpēc $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$ vērsumi sakrīt.

2. Ja ABCD – trapece, tad nekādi divi no vektoriem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ nav vienādi. Tiešām:



10. zīm.

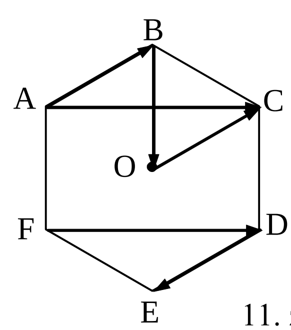
a) šajā gadījumā vektori, kam ir kopīgi galapunkti, nav vienādi tāpēc, ka atšķiras to virzieni (tātad arī vērsumi),

b) trapeces pamatu vektori (10. zīm $\overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{AD}$) nav vienādi tāpēc, ka atšķiras to garumi,

c) trapeces sānu malu vektori (10. zīm $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$) nav vienādi tāpēc, ka atšķiras to virzieni (tātad arī vērsumi).

3. Ja O – riņķa līnijas centrs, bet A, B – tās dažādi punkti, tad $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OB}$, jo noteikti atšķiras $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$ vērsumi (virzieni var arī sakrist).

4. Ja ABCDEF – regulārs sešstūris ar centru O, tad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DE}$, jo šo divu vektoru garumi un virzieni gan sakrīt, bet vērsumi atšķiras.



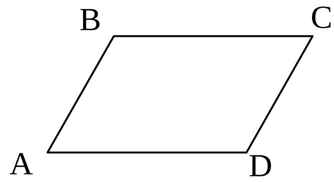
11. zīm.

5. Pieņemsim, ka četri dažādi punkti A, B, C, D neatrodas uz vienas taisnes.

Teorēma. ***ABCD ir paralelograms tad un tikai tad, ja*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Pierādījums.

▼ 1. Pieņemsim, ka ABCD – paralelograms (skat. 12. zīm.). Tā pretējās malas AB un DC ir



12. zīm.

a) vienādas, tad $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$,

b) paralēlas, tad $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$ virzieni sakrīt.

Bez tam stari AB un DC ir vienādi vērsti. Tātad vektoriem $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$ sakrīt gan garumi, gan virzieni, gan vērsumi; tātad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. Pieņemsim, ka četrstūrī ABCD pastāv vienādība $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Tad malas AB un DC ir vienādas un paralēlas. Saskaņā ar paralelograma pazīmi ABCD ir paralelograms.▲

6. Ja A un B patvaļīgi punkti, tad $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

7. Ja A un B ir dažādi punkti, tad $\overrightarrow{AA} \neq \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Tieši no vektoru vienādības definīcijas izriet sekojošas vektoru vienādības pamatīpašības:

1. Katrs vektors vienāds pats ar sevi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ (vektoru vienādības refleksivitāte)
2. Ja pirmais vektors vienāds ar otru, tad otrais vektors vienāds ar pirmo:

ja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tad $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
(vektoru vienādības simetrija).

3. Ja pirmais vektors vienāds ar otru, bet otrais – ar trešo, tad pirmais vektors vienāds ar trešo:

ja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, tad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
(vektoru vienādības transitivitāte).

Kā redzēsim tālāk, vienādus vektorus ļoti daudzos gadījumos var aizstāt vienu ar otru.

Uzdevumi.

1. Dots, ka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Pierādīt, ka $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

2. Kādu lielāko daudzumu pa pāriem dažādu vektoru var uzzīmēt, ja vektoru galapunktiem jābūt 8. zīm. attēlotā režģa rūtiņu virsotnēs?

3. Dots, ka $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ un A, B, C neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

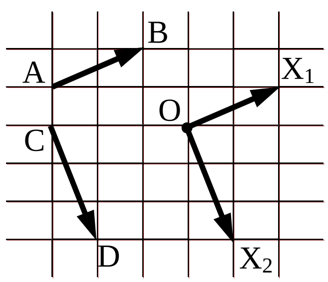
4.* Plaknē doti n dažādi punkti. Kāds ir lielākais un kāds – mazākais daudzums nenulles vektoru, kas visi pa pāriem dažādi un kuru galapunkti ir divi no dotajiem punktiem?

1.4. Vektora atlikšana no punkta.

Definīcija. *Ja $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{AB}$, tad saka, ka vektors $\overrightarrow{AB}$ ir atlikts no punkta O, iegūstot vektoru $\overrightarrow{OX}$.*

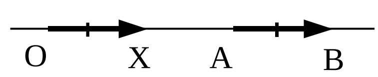
Piemēri.

1. Atliekot vektoru $\overrightarrow{AB}$ no punkta O, iegūstam vektoru $\overrightarrow{OX_1}$; atliekot vektoru $\overrightarrow{CD}$ no punkta O, iegūstam vektoru $\overrightarrow{OX_2}$ (13. zīm.).

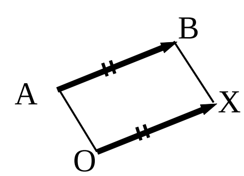


13. zīm.

2. Ja $\overrightarrow{AB}$ atlikts no punkta O, iegūstot vektoru $\overrightarrow{OX}$, tad vai nu O, X, A, B atrodas uz vienas taisnes (14. zīm.), vai arī OABX ir paralelograms (15. zīm.).

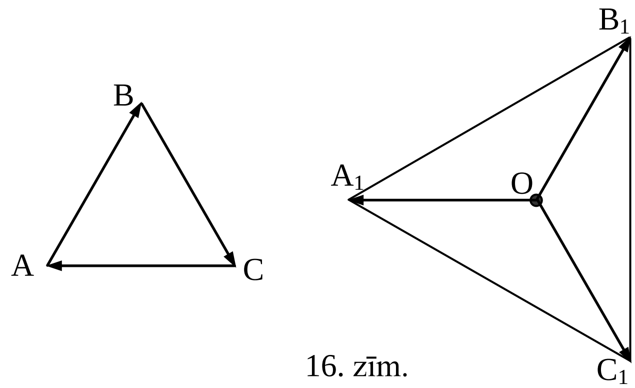


14. zīm.



15. zīm.

3. Ja ΔABC - regulārs trijstūris, tad, atliekot vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ no viena punkta, iegūto vektoru galapunkti ir jauna regulāra trijstūra virsotnes (16. zīm.).



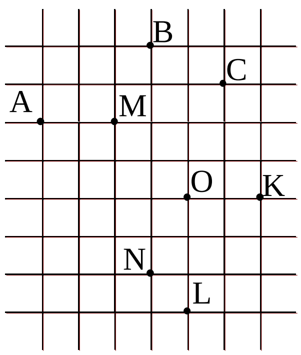
16. zīm.

No vektoru vienādības definīcijas tieši seko

Teorēma par vektoru atlikšanu. *Atliekot vektorus no viena punkta, atlikto vektoru beigu punkti sakrīt tad un tikai tad, ja atliktie vektori ir savā starpā vienādi.*

Uzdevumi.

1. Uzzīmēt vektorus, kurus iegūst, atliekot no punkta O vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{BA}$ (17. zīm.).



17. zīm.

2. No viena punkta atlikti vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ (ΔABC - patvaļīgs). Pierādīt, ka atlikto vektoru galapunkti ir tāda trijstūra virsotnes, kura laukums 3 reizes lielāks par ΔABC laukumu.

3.* Vispāriniet iepriekšējo uzdevumu, ja ΔABC vietā apskata patvaļīgu izliektu četrstūri ABCD.

4. Četrstūra ABCD pēc kārtas ņemtu malu viduspunkti ir M, N, L, K. No punkta M atliek vektoru $\overrightarrow{KL}$. Kas ir atliktā vektora beigu punkts?

1.5. Pretēji vektori.

Definīcija. *Saka, ka vektors $\overrightarrow{CD}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{AB}$, ja vai nu tie abi ir nulles vektori ,vai arī to garumi un virzieni sakrīt, bet vērsumi atšķiras. Minētajā situācijā lieto pierakstu $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.*

Piemēri.

1. Ja ABCD – paralelograms, tad vektors $\overrightarrow{CD}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$).

2. Vektors $\overrightarrow{AA}$ ir pretējs pats sev ($\overrightarrow{AA} = -\overrightarrow{AA}$).

3. Vektors $\overrightarrow{AB}$ 11. zīm. ir pretējs vektoram $\overrightarrow{DE}$.

4. Vektors $\overrightarrow{AB}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$).

5. Ja vektors $\overrightarrow{AB}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{CD}$, tad vektors $\overrightarrow{CD}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{AB}$ (ja $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, tad $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$).

LEMMA PAR VIENĀDU VEKTORU LĪDZTIESĪBU (VVL LEMMA).
Vienādu vektoru pretējie vektori ir vienādi savā starpā.
Pierādījums.

▼ Ja abi vienādie vektori ir nulles vektori, tad arī to pretējie vektori ir nulles vektori un tāpēc vienādi. Ja abi vienādie vektori nav nulles vektori, tad tiem ir vienādi garumi, virzieni un vērsumi; tāpēc arī tiem pretējo vektoru garumi, virzieni un vērsumi ir vienādi, tātad pretējie vektori ir vienādi savā starpā. ▲

No definīcijas seko, ka katram vektoram ir daudz pretēju vektoru. (Piemēram, 11. zīm. vektoram $\overrightarrow{DE}$ pretējs ir gan $\overrightarrow{OC}$, gan $\overrightarrow{AB}$). tomēr no VVL lemmas seko, ka tie visi ir vienādi savā starpā.

Pārbaudi pats sevi!

1. Kādus nenulles vektorus sauc par vienādiem?
2. Vai katri divi nulles vektori ir vienādi savā starpā?
3. Ko nozīmē vārdi „vektoru vienādībai piemīt refleksivitāte, simetrija un transitivitāte”?
4. Pamatojiet vektoru vienādības refleksivitāti, simetriju un transitivitāti.
5. Kādus nenulles vektorus sauc par pretējiem?
6. Vai divi vektori var būt vienlaikus gan vienādi, gan pretēji?
7. Vai vienam vektoram var būt divi pretēji vektori, kas nav savā starpā vienādi?
8. Viens no vektoram $\overrightarrow{AB}$ pretējiem vektoriem ir $\overrightarrow{CD}$. Uzrādi vektoru, kas ir pretējs vektoram $\overrightarrow{CD}$.

Uzdevumi.

1. Atrodi 7. zīm. visus vienādu un pretēju vektoru pārus!

2. Dots, ka ABCDE – regulārs piecstūris. Starp vektoriem, kam abi galapunkti ir piecstūra virsotnēs, nav ne divu vienādu, ne divu pretēju nenulles vektoru. Pierādi to!

3. Dots, ka ABCDEF – regulārs sešstūris un O – tā centrs. Starp vektoriem, kam abi galapunkti ir sešstūra virsotnēs vai centrā, atrodi visus vienādo vektoru pārus un visus pretējo vektoru pārus.

4. Katri divi no n vektoriem ir pretēji viens otram. Pierādīt: vai nu $n \le 2$, vai arī visi vektori ir nulles vektori.

5. Paralelograma ABCD malu AB un CD viduspunkti ir atbilstoši M un N. Pierādīt, ka vektors $\overrightarrow{CM}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{AN}$.

6. Vektors $\overrightarrow{AB}$ ir pretējs vektoram $\overrightarrow{CD}$. Pierādīt, ka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1.6. Vektora reizināšana ar skaitli.

1.6.1.Jēdziens par vektora reizināšanu ar skaitli.

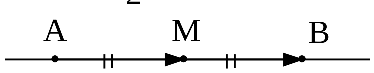
Vektora $\overrightarrow{AB}$ reizinājums ar skaitli k ir vektors, kura sākumpunkts ir A; to apzīmē ar $k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Definīcija. *Ja $\overrightarrow{AB}$ ir nulles vektors (t.i., A un B sakrīt) vai arī k = 0, tad $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$.*

Ja $\overrightarrow{AB}$ nav nulles vektors un $k \neq 0$, tad $k \cdot \overrightarrow{AB}$ ir vektors ar sākumpunktu A, garumu $|k| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$ un virzienu, kas sakrīt ar $\overrightarrow{AB}$ virzienu. Vektora $k \cdot \overrightarrow{AB}$ vērsums sakrīt ar $\overrightarrow{AB}$ vērsumu, ja k > 0, un ir pretējs $\overrightarrow{AB}$ vērsumam, ja k < 0.

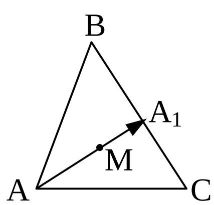
Piemēri.

1. Ja M ir AB viduspunkts, tad $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$ (18. zīm.).

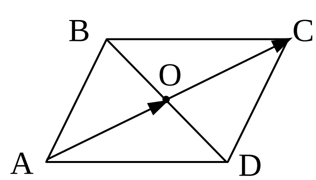


18. zīm.

2. Ja M ir ΔABC mediānu krustpunkts, bet A_1 ir malas BC viduspunkts, tad $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA_1}$ (19. zīm.).



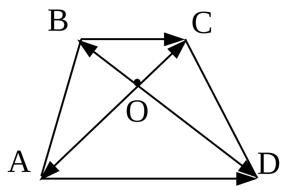
19. zīm.



20. zīm.

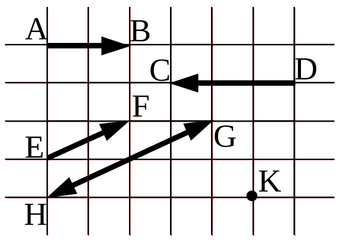
3. Ja O ir paralelograma ABCD diagonāļu krustpunkts, tad $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AO}$ (20. zīm.).

4. Ja trapeces ABCD pamats BC divas reizes īsāks par pamatu AD un trapeces diagonāļu krustpunkts ir O, tad $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OA} = (-2) \cdot \overrightarrow{OC}$ un $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{OD}$. Pamatojumam ievērojiet, ka $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (skat. 21. zīm.)!



21. zīm.

5. Vektoriem 22. zīmējumā pastāv sakarības $\overrightarrow{DC} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{HG} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{KK} = 0 \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH} = (-1) \cdot \overrightarrow{HG}$.



22. zīm.

1.6.2. Svarīgākās īpašības, kas piemīt vektora reizināšanai ar skaitli.

Atzīmēsim svarīgākās īpašības, kas piemīt vektora reizināšanai ar skaitli, salīdzinot tās ar skaitļu reizināšanas īpašībām.

Vektora $\overrightarrow{AB}$ reizināšana ar skaitli	Skaitļu reizināšana
1. $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$	$1 \cdot x = x$
2. $(-1) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$ vektoru reizinot ar (-1), iegūst pretēju vektoru	$(-1) \cdot x = -x$ skaitli reizinot ar (-1), iegūst pretēju skaitli
3. $k \cdot \left(l \cdot \overrightarrow{AB}\right) = (kl) \cdot \overrightarrow{AB}$ asociativitāte	$x \cdot (y \cdot z) = (xy) \cdot z$ asociativitāte
4. Ja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tad $k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$	Ja a = b, tad xa = xb

▼ Pamatosim 3. īpašību. Ja k = 0, l = 0 vai $\overrightarrow{AB}$ ir nulles vektors, abās pierādāmās vienādības pusēs atrodas nulles vektors $\overrightarrow{AA}$, tātad vienādība ir pareiza. Pretējā gadījumā

a) gan $l \cdot \overrightarrow{AB}$, gan $k \cdot \left(l \cdot \overrightarrow{AB}\right)$, gan $(kl) \cdot \overrightarrow{AB}$ sākumpunkts ir A,

b) $\left|\mathrm{k}\cdot\left(l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right| = |\mathrm{k}|\cdot\left|l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |\mathrm{k}|\cdot|l|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |\mathrm{k}l|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|(\mathrm{k}l)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, tātad abu vektoru garumi ir vienādi,

c) abu vektoru virzieni sakrīt ar $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ virzienu, tātad sakrīt arī savā starpā,

d) ja $\mathrm{k} > 0$ un $l > 0$, tad arī $\mathrm{k}l > 0$; tāpēc $l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\mathrm{k}\cdot\left(l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ un $(\mathrm{k}l)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vērsumi sakrīt ar $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vērsumu, tātad sakrīt arī savā starpā. Ja $\mathrm{k} < 0$, $l > 0$, tad $\mathrm{k}l < 0$; tāpēc $l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vērsums sakrīt ar $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, bet $k\cdot\left(l\cdot\overrightarrow{AB}\right)$ vērsums un $(\mathrm{k}l)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vērsums pretējs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vērsumam, tātad sakrīt savā starpā. Līdzīgi pierāda, ka $\mathrm{k}\cdot\left(l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ vērsums sakrīt ar $(\mathrm{k}l)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vērsumu ,ja $\mathrm{k} > 0$, $l < 0$ vai $\mathrm{k} < 0$, $l < 0$; atstājam to izdarīt lasītājam patstāvīgi.

Esam pierādījuši ,ka vektoriem $\mathrm{k}\cdot\left(l\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ un $(\mathrm{k}l)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sakrīt garumi, virzieni un vērsumi; tātad tie ir vienādi.

Līdz ar to 3. īpašība pilnībā pamatota. ▲

1., 2. un 4. īpašību pierādījumi ir gandrīz acīmredzami. Formulēsim 4. īpašību lemmas formā.

LEMMA PAR VIENĀDU VEKTORU LĪDZTIESĪBU (VVL LEMA)
Reizinot vienādus vektorus ar vienu un to pašu skaitli, atkal iegūst vienādus vektorus.

1.6.3. Taisnes punktu izteikšana ar vektoru palīdzību.

Aplūkosim vektoru $\mathrm{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pie fiksēta nenulles vektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ un mainīga skaitļa k. Apzīmēsim $\mathrm{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AK}}$.

1. Ja k = 0, tad $\mathrm{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}}$. Tātad K sakrīt ar A.

2. Ja $\mathrm{k} > 0$, tad $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ virziens un vērsums sakrīt ar $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ virzienu un vērsumu, bet $\left|\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right| = \mathrm{k}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$. Tātad, k palielinoties no 0 līdz 1, punkts K „slīd” no stāvokļa A uz stāvokli B. Ja k = 1, tad $\mathrm{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, t.i., punkts K sakrīt ar B (23. zīm.).

$$\overrightarrow{\mathrm{AK_1}} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}};\ \overrightarrow{\mathrm{AK_2}} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}};\ \overrightarrow{\mathrm{AK_3}} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}};\ \overrightarrow{\mathrm{AK_4}} = 1\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

3. Ja k pārsniedz 1 un turpina palielināties, punkts K, ko nosaka vienādība $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \mathrm{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, šķērso stāvokli B un turpina kustību „pa labi” no punkta A.

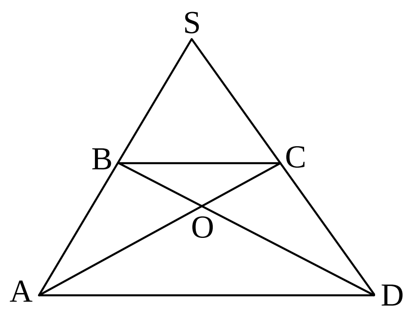
4. Līdzīgi, ja k < 0, tad, k samazinoties (tātad tā absolūtajai vērtībai jeb modulim pieaugot), punkts K, ko nosaka vienādība $\overrightarrow{AK} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, slīd pa taisni AB aizvien tālāk „pa kreisi” no punkta A.
Esam ieguvuši svarīgu rezultātu.

TEORĒMA PAR TAISNES PUNKTU IZTEIKŠANU.
Katram taisnes AB punktam K eksistē tāds viennozīmīgi noteikts skaitlis k, ka $\overrightarrow{AK} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Katram skaitlim k eksistē tāds viennozīmīgi noteikts taisnes AB punkts K, ka $\overrightarrow{AK} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.
Turpmāk šī teorēma ļaus pētīt taisnes punktus, izmantojot darbības ar vektoriem.

Pārbaudi pats sevi!
1. Vai vektora reizinājums ar skaitli ir vektors vai skaitlis?
2. Kas ir nulles vektora reizinājums ar jebkuru skaitli?
3. Kas ir jebkura vektora reizinājums ar 0?
4. Kā savā starpā saistīti nenulles vektora $\overrightarrow{AB}$ un vektoru $k \cdot \overrightarrow{AB}$ un $l \cdot \overrightarrow{AB}$
   a) garumi,
   b) virzieni,
   c) vērsumi,
   ja k < 0 un *l* > 0?

Uzdevumi.
1. Pierādi 3. īpašību, ja
   a) k > 0, *l* < 0,
   b) k < 0, *l* < 0.
2. Dots, ka ABCD – trapece ar pamatiem AD un BC un diagonāļu krustpunktu O; trapeces sānu malu pagarinājumi krustojas punktā S. Zināms, ka $AD = 3BC$.



23. zīm.

Atrodi tādu k, ka
   a) $\overrightarrow{SA} = k \cdot \overrightarrow{SB}$,
   b) $\overrightarrow{SD} = k \cdot \overrightarrow{SC}$,

c) $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OC}$,

d) $\overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OB}$,

e)* $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.

3. Trijstūra ABC malu AB un BC viduspunkti ir attiecīgi M un N. Atrast tādu k, ka

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{NM}.$$

4. Dots, ka ABCD – paralelograms; ar M un N apzīmējam attiecīgi trijstūru ABC un BCD mediānu krustpunktus. Atrast tādu k, ka $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

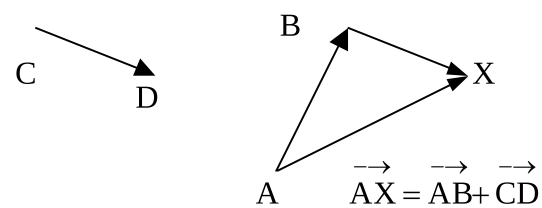
5. Dots, ka četrstūrī ABCD pastāv sakarība $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$. Pierādīt, ka ABCD ir paralelograms vai trapece.

6. Pierādi, ka $(-k) \cdot \overrightarrow{AB} = -\left(k \cdot \overrightarrow{AB}\right)$, un formulē pierādīto īpašību vārdiem, izmantojot jēdzienus par pretējo vektoru un pretējo skaitli.

1.7. Vektoru saskaitīšana.

1.7.1. Vektoru saskaitīšanas definīcija.

__Definīcija.__ Ja no vektora $\overrightarrow{AB}$ galapunkta B atliek vektoru $\overrightarrow{BX}$, kas vienāds ar vektoru $\overrightarrow{CD}$, tad vektoru $\overrightarrow{AX}$ sauc par vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ summu un apzīmē ar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$:

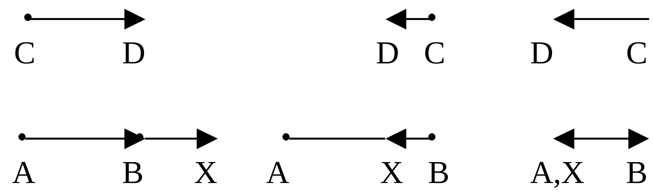


24. zīm.

__1. secinājums.__ Jebkuriem 3 plaknes punktiem A, B, C ir spēkā vienādība

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (trijstūra likums).}$$

Vektoru saskaitīšana vienādi un pretēji vērstu saskaitāmo gadījumos attēlota 25. a), b), c) zīm.



a) b) c)

25. zīm.

<u>2. secinājums.</u> Patvaļīgam vektoram $\overrightarrow{AB}$ pieskaitot jebkuru nulles vektoru, iegūst vektoru $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ZZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.
<u>3. secinājums.</u> Patvaļīgam vektoram pieskaitot tam pretēju vektoru, iegūst nulles vektoru; skat. 25. c) zīm.

1.7.2. Lemma par vienādu vektoru līdztiesību (VVL lemma).

<u>Lemma.</u> Saskaitot vienādus vektorus ar vienādiem, iegūst vienādas summas.
"Formulu valodā" šo VVL lemmu var pierakstīt sekojoši:

ja $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$ un $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{C_2D_2}$, tad $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{C_2D_2}$.

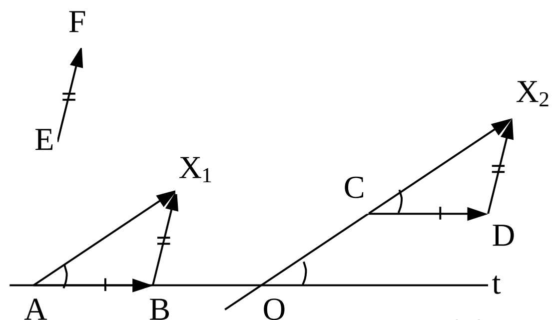
▼Pierādīsim VVL lemmu.
Tieši no vektoru saskaitīšanas definīcijas izriet, ka divu vektoru summā labo saskaitāmo var aizstāt ar tam vienādu vektoru:

ja $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$, tad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$. (*)

Pierādīsim, ka arī kreiso saskaitāmo var aizstāt ar tam vienādu vektoru:

ja $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, tad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$. (**)

Aprobežosimies ar gadījumu, kad $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{EF}$ virzieni atšķiras (skat. 26. zīm.)



26. zīm.

Tā kā $\overrightarrow{BX_1}=\overrightarrow{EF}$ un $\overrightarrow{DX_2}=\overrightarrow{EF}$, tad $\overrightarrow{BX_1}=\overrightarrow{DX_2}$. Tāpēc $AB = CD$ un $BX_1 = DX_2$. Tā kā ΔABX_1 un ΔCDX_2 malas, kas iziet no virsotnēm B un D, ir paralēlas un vienādi vērstas, tad $\angle ABX_1=\angle CDX_2$. Tāpēc $\Delta ABX_1=\Delta CDX_2$; tātad $AX_1 = CX_2$, turklāt, trijstūrus savietojot, A sakrīt ar C un X_1 ar X_2. Ja vēl pierādīsim, ka $AX_1 \parallel CX_2$, vektoru $\overrightarrow{AX_1}$ un $\overrightarrow{CX_2}$ vienādība būs pierādīta.

Tā kā $CD \parallel t$, tad $\angle X_2CD = \angle X_2Ot$. Tā kā $\Delta ABX_1 = \Delta CDX_2$, tad $\angle X_1AB = \angle X_2CD$. Tāpēc $\angle X_1AB = \angle X_2Ot$. Tāpēc $AX_1 \parallel CX_2$ (paralēlu taišņu pazīme pēc kāpšļu leņķiem), k.b.j.

Tagad varam pierādīt VVL-lemmu:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} \overset{(*)}{=} \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_2D_2} \overset{(**)}{=} \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{C_2D_2}$$ ▲

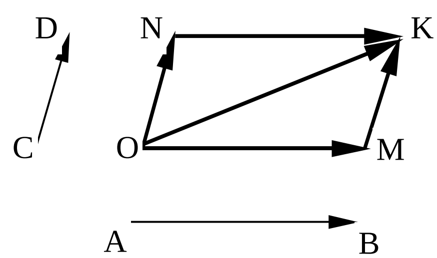
1.7.3. Vektoru saskaitīšanas pamatlikumi.

Tagad apskatīsim vektoru saskaitīšanas pamatlikumus.

1. VEKTORU SASKAITĪŠANAS KOMUTATĪVAIS LIKUMS.

Katriem diviem vektoriem $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ pastāv vienādība $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$.

▼ Pierādījumā aprobežosimies ar gadījumu, kad $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ virzieni ir dažādi.



27. zīm.

Konstruējam paralelogramu OMKN tā, ka $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ (27. zīm.). Tad arī $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CD}$. Saskaņā ar VVL lemmu

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK} \text{ un}$$

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{OK}.$$

No šīm vienādībām seko vajadzīgais. ▲

Ievērosim, ka no nupat veiktā pierādījuma seko

2. PARALELOGRAMA LIKUMS.

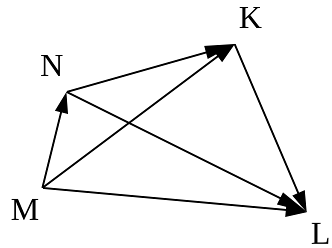
Ja divus vektorus atliek no viena punkta O un uz tiem kā malām konstruē paralelogramu, tad paralelograma diagonālvektors, kas iziet no O, vienāds ar abu atlikto vektoru summu (skat. 27. zīm.)

3. VEKTORU SASKAITĪŠANAS ASOCIATĪVAIS LIKUMS.

Katriem trim vektoriem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ pastāv vienādība

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right).$$

▼ Pierādījumam atliksim vienu otram galā vektorus $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NK}, \overrightarrow{KL}$ tā, ka $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{EF}$ (28. zīm.).



28. zīm.

Tad $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}\right)+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KL}=$

$=\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KL}\right)=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)$, k.b.j.

Ievērojiet, ka pierādījumā daudzkārt tika izmantota VVL lemma un trijstūra likums. ▲

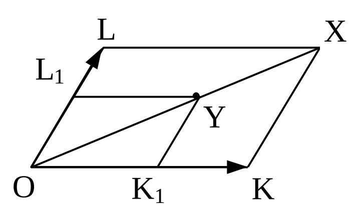
4. AR VEKTORU SASKAITĪŠANU SAISTĪTIE DISTRIBUTĪVIE LIKUMI.

Katriem skaitļiem m un n un katriem vektoriem $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir spēkā vienādības

$$(m+n)\cdot\overrightarrow{AB}=m\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{AB} \quad (*)$$

$$m\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)=m\cdot\overrightarrow{AB}+m\cdot\overrightarrow{CD} \quad (**)$$

▼ Pierādīsim īpašību (**) dažāda virziena vektoru gadījumā, ja 0<m<1. Atliksim vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ kā vektorus $\overrightarrow{OK}$ un $\overrightarrow{OL}$ no viena punkta O un konstruēsim paralelogramu OKXL (29. zīm.).



29. zīm.

Atliksim uz OX tādu punktu Y, ka $OY = m \cdot OX$; tad $\overrightarrow{OY} = m \cdot \overrightarrow{OX} = m\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}\right)$.

Novelkam$YL_1 \parallel OK$ un $YK_1 \parallel OL$; tad pēc Talesa teorēmas $\overrightarrow{OK_1} = m \cdot \overrightarrow{OK}$ un $\overrightarrow{OL_1} = m \cdot \overrightarrow{OL}$.

Tā kā OL_1YK_1 – paralelograms, tad $\overrightarrow{OL_1} + \overrightarrow{OK_1} = \overrightarrow{OY}$ jeb $m \cdot \overrightarrow{OL} + m \cdot \overrightarrow{OK} = m\left(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OK}\right)$.

Saskaņā ar VVL-lemmu

$$m\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = m \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{CD}, \text{ k.b.j. } \blacktriangle$$

5. VEKTORU SUMMAS PRETĒJAIS VEKTORS.
Divu vektoru summas pretējais vektors vienāds ar atsevišķajiem saskaitāmajiem pretējo vektoru summu:

$$-\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \left(-\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{CD}\right)$$

$\blacktriangledown$ Atceroties, ka vektoram pretējais vektors vienāds ar šī vektora reizinājumu ar (-1), iegūstam

$$-\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = (-1) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + (-1) \cdot \overrightarrow{CD} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{CD}\right), \text{ k.b.j.} \blacktriangle$$

1.7.4. Vektoru saskaitīšanas likumi vairāku saskaitāmo gadījumā.

Nupat minētās īpašības ar matemātiskās indukcijas metodes palīdzību viegli vispārināt patvaļīgam skaitam saskaitāmo. Formulēsim tās, pierādījumu atstājot lasītājam.

VISPĀRĪGAIS KOMUTATĪVAIS LIKUMS.

Ja summā $\left(\left(\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}\right) + \overrightarrow{A_3B_3}\right) + \ldots\right) + \overrightarrow{A_nB_n}$ saskaitāmos patvaļīgā secībā maina vietām, iegūtās summas vektors vienāds ar sākotnējās summas vektoru.

VISPĀRĪGAIS ASOCIATĪVAIS LIKUMS.
Visi summu vektori, ko iegūst, dažādā secībā veicot saskaitīšanu izteiksmē $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}$, vienādi savā starpā.

VISPĀRĪGIE DISTRIBUTĪVIE LIKUMI.

Katriem skaitļiem n_1, n_2, ... ,n_k un katram vektoram $\overrightarrow{AB}$ pastāv sakarība

$$\left(n_1 + n_2 + \ldots + n_k\right) \cdot \overrightarrow{AB} = n_1 \cdot \overrightarrow{AB} + n_2 \cdot \overrightarrow{AB} + \ldots + n_k \cdot \overrightarrow{AB}$$

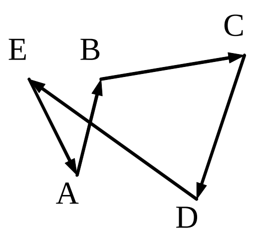
Katram skaitlim k un katriem vektoriem $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ pastāv vienādība

$$k\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}\right) = k \cdot \overrightarrow{A_1B_1} + k \cdot \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}$$

VEKTORU SUMMAS PRETĒJAIS VEKTORS.
Patvaļīga daudzuma vektoru summas pretējais vektors vienāds ar saskaitāmajiem pretējo vektoru summu.

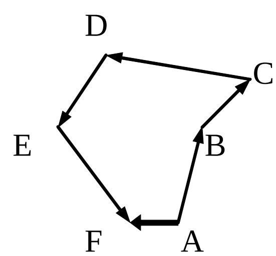
1.7.5. Nosacījums, lai vairāku vektoru summa būtu nulles vektors.

Teorēma.** **Vairāku vektoru summa ir nulles vektors tad un tikai tad, ja, uzzīmējot šos vektorus vienu otram galā, pēdējā uzzīmētā vektora beigu punkts sakrīt ar pirmā uzzīmētā vektora sākumpunktu.
Teorēmas pierādījums tieši izriet no vektoru summas un nulles vektora definīcijas; to ilustrē 29’. zīm. un 29’’. zīm.



29’. zīm

$\overrightarrow{AA}$ ir nulles vektors



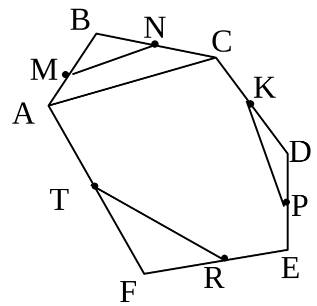
29’’. zīm

$\overrightarrow{AF}$ nav nulles vektors

Piemērs.* Izliekta sešstūra ABCDEF malu AB, BC, CD, DE, EF un FA viduspunkti ir attiecīgi M, N, K, P, R, T. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura malas vienādas un paralēlas ar nogriežņiem MN, KP un RT.

Pierādījums. Acīmredzot pietiek pierādīt, ka $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{RT}$ ir nulles vektors; tad, atliekot šos vektorus vienu otram galā iegūsim tāda trijstūra kontūru, kura malas vienādas un paralēlas ar MN, KP un RT.

Atzīmēsim, ka MN ir ΔABC viduslīnija. Tātad $MN \parallel AC$ un $MN = \frac{1}{2}AC$; no šīm īpašībām seko, ka $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Līdzīgi pierāda, ka $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ un $\overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ (skat. 29.’’’ zīm.).



29’’’. zīm.

Bet tādā gadījumā

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{RT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA},$$

tātad ir nulles vektors. Vajadzīgais pierādīts.

1.7.6. Vektoru summas īpašību lietošana vienu vektoru izteikšanā ar citiem.

Piemērs. Dots, ka $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ un $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{EF}$. Izteikt $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}$ ar vektoru $\overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{EF}$ palīdzību.

Atrisinājums. Saskaņā ar VVL lemmu 21. lpp., izteiksmē $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}$ vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{MN}$ var aizvietot ar tiem vienādiem vektoriem $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ un $-\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{EF}$. Tātad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)+\left(-\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{EF}\right)$. Saskaņā ar vispārīgo komutatīvo likumu četrus saskaitāmos $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, -\overrightarrow{CD}$ un $2\overrightarrow{EF}$ var patvaļīgi mainīt vietām; tātad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}$. Saskaņā ar vispārīgo asociatīvo likumu iegūtajā summā saskaitāmos var patvaļīgi grupēt, tāpēc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)\right)+\left(\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}\right)$.

Saskaņā ar 3. secinājumu no vektoru saskaitīšanas definīcijas $\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$ ir nulles vektors $\overrightarrow{CC}$.

Saskaņā ar distributīvo likumu $\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}=1\cdot\overrightarrow{EF}+2\cdot\overrightarrow{EF}=(1+2)\cdot\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{EF}$.

Saskaņā ar VVL lemmu vektorus $\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$ un $\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}$ var aizstāt ar tiem vienādiem vektoriem $\overrightarrow{CC}$ un $3\overrightarrow{EF}$; tātad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CC}+3\overrightarrow{EF}$.

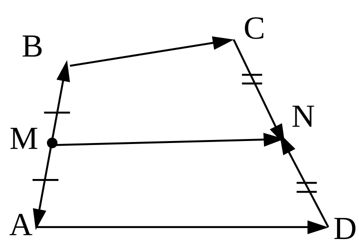
Saskaņā ar komutatīvo likumu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CC}$.

Saskaņā ar 2. secinājumu no vektoru saskaitīšanas definīcijas $3\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CC}=3\overrightarrow{EF}$, tātad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{EF}$.

Protams, ikdienā uzdevumu risināšanā katru soli tik sīki nepamato. Tālāk, 1.9. punktā, mēs formulēsim vispārīgu likumu, kas ļauj ērti pārveidot vektorus saturošas izteiksmes.

Piemērs. Četrstūra ABCD malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka $2\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Atrisinājums. (skat. 29’’’’. zīm.)



29’’’’. zīm.

Viegli redzēt, ka $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ un $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$. Tāpēc

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)=$$

$$=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\right)=\overrightarrow{MM}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD},$$ k.b.j.

Norādiet patstāvīgi, uz kādām vektoru summas īpašībām balstījās katrs no izdarītajiem pārveidojumiem!

Sekojošā teorēma tiek plaši lietota uzdevumu risināšanā.

TEORĒMA PAR NOGRIEŽŅA VIDUSPUNKTU

Ja AB viduspunkts ir M un O – patvaļīgs plaknes punkts, tad $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Pierādījums.

▼ Lai demonstrētu vektoru metodes spēku, neizmantosim pierādījumā nekādu zīmējumu.

Tā kā M ir AB viduspunkts, tad $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{BM}$ ir viens otram pretēji vektori. Tāpēc $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$ ir nulles vektors $\overrightarrow{AA}$.
No trijstūra likuma seko vienādības

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$

Tāpēc $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)$. Tā kā $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$ ir nulles vektors $\overrightarrow{AA}$, tad $2\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Reizinot vienādos vektorus $2\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ar skaitli $\frac{1}{2}$, iegūstam vienādus vektorus; tātad

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\text{, k.b.j.}$$

1.8. Vektoru atņemšana

1.8.1. Vektoru atņemšanas definīcija

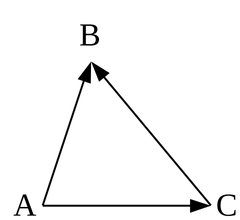
Definīcija. ***Par divu vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ starpību sauc $\overrightarrow{AB}$ summu ar vektoram $\overrightarrow{CD}$ pretējo vektoru $\overrightarrow{DC}$. Minēto starpību apzīmē ar $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$.***

Tātad saskaņā ar definīciju $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$, kas labi saskaņojas ar līdzīgiem likumiem skaitļu saskaitīšanā un atņemšanā.

Piemēri.

1. Ja ABC - trijstūris, tad

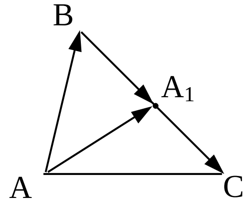
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\ \text{(30. zīm.)}$$



30. zīm.

2. Ja ABC - trijstūris un A_1 ir malas BC viduspunkts, tad

$$\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{A_1C} \text{ (31. zīm.)}$$

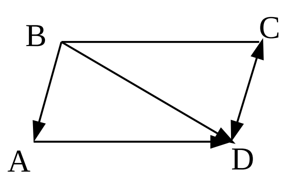


31. zīm.

3. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ZZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ZZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$

4. Ja ABCD - paralelograms, tad

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD} \text{ (32. zīm.)}$$



32. zīm.

Vektoru starpības nosaukumu attaisno sekojoša īpašība, kas analoga divu skaitļu starpības īpašībai.

Vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ starpību saskaitot ar "mazinātāju" $\overrightarrow{CD}$, iegūst "mazināmo" $\overrightarrow{AB}$.

Tiešām, pēc definīcijas $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$. Tāpēc $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{CD}=$

$$=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\left(\left(-\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}.$$

1.8.2. Vektoru starpības īpašības.

Divu vektoru starpībai piemīt virkne īpašību, kas analogas divu vektoru summas īpašībām.

LEMMA PAR VIENĀDU VEKTORU LĪDZTIESĪBU (VVL LEMMA)

Lemma. No vienādiem vektoriem atņemot vienādus, starpības iznāk vienādas.

"Formulu valodā" VVL lemmu var izteikt šādi:

ja $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$ un $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{C_2D_2}$, tad

$$\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{C_2D_2}.$$

AR VEKTORU ATŅEMŠANU SAISTĪTIE DISTRIBUTĪVIE LIKUMI

Katriem skaitļiem m un n un katriem vektoriem $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir spēkā vienādības

$$(m-n)\cdot\overrightarrow{AB}=m\cdot\overrightarrow{AB}-n\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$m\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)=m\cdot\overrightarrow{AB}-m\cdot\overrightarrow{CD}$$

1.8.3. Analoģijas starp vektoru un skaitļu atņemšanu.

Sekojošas vektoru atņemšanas īpašības analogas skaitļu atņemšanas īpašībām.

NULLES VEKTORA ATŅEMŠANA
Nulles vektora atņemšana nemaina vektoru, no kura to atņem:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ZZ}=\overrightarrow{AB}$$

ATŅEMŠANA NO NULLES VEKTORA
Atņemot kādu vektoru no nulles vektora, iegūst atņemtajam pretēju vektoru:

$$\overrightarrow{ZZ}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}.$$

PRETĒJĀ VEKTORA ATŅEMŠANA
Pretējā vektora atņemšanu aizstājot ar paša vektora pieskaitīšanu, abu darbību rezultāti ir vienādi:

$$\overrightarrow{AB}-\left(-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}.$$

SUMMAS PAKĀPENISKA ATŅEMŠANA
Lai atņemtu divu vektoru summa, var pēc kārtas atņemt tās saskaitāmos:

$$\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)-\overrightarrow{EF}.$$

Šo īpašību viegli vispārināt patvaļīga skaita saskaitāmo summas atņemšanai:

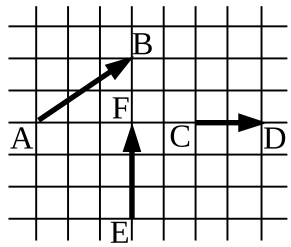
$$\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{x_1y_1}+\overrightarrow{x_2y_2}+\ldots+\overrightarrow{x_ny_n}\right)=\left(\ldots\left(\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{x_1y_1}\right)-\overrightarrow{x_2y_2}\right)-\ldots\right)-\overrightarrow{x_ny_n}$$

Uzticam lasītājam patstāvīgi pamatot šīs īpašības.

Pārbaudi pats sevi!

1. Ko sauc par vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$

a) summu,
b) starpību?
2. Formulē vektoru saskaitīšanas trijstūra likumu! Izveido atbilstošo zīmējumu!
3. Formulē vektoru saskaitīšanas paralelograma likumu! Izveido atbilstošo zīmējumu!
4. Uzzīmē vektorus $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FF}$ (skat. 33. zīm.)

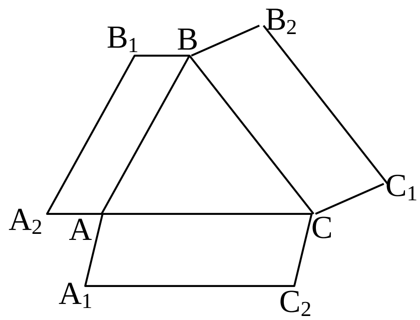


33. zīm

5. Formulē vektoru saskaitīšanas komutatīvo un asociatīvo likumu!
6. Formulē ar vektoru saskaitīšanu un atņemšanu saistītos distributīvos likumus!

Uzdevumi.

1. Dots, ka ABCD - paralelograms. Pierādīt, no $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.
2. Dots, ka ΔABC malu AB, BC, CA viduspunkti ir attiecīgi C_1, A_1, B_1, bet mediānu krustpunkts ir M. Pierādīt, ka
   a) $\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB_1}$,
   b) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$ ir nulles vektors,
   c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ ir nulles vektors.
3. Četrstūra ABCD malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka
   $2\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.
4.* Pierādīt vektoru saskaitīšanas VVL lemmu (skat 21. lpp.) gadījumiem, kad saskaitāmo vektoru virzieni sakrīt vai vismaz viens no tiem ir nulles vektors.
5.* Pierādīt divu vektoru saskaitīšanas komutatīvo likumu gadījumam, kad saskaitāmo virzieni sakrīt vai arī vismaz viens no tiem ir nulles vektors.
6.* Pierādi ar vektoru saskaitīšanas saistītos distributīvos likumus vispārīgā gadījumā.
7.* Pierādi 24. lpp. minētās vektoru saskaitīšanas īpašības.
8.* Dots, ka ABCDEF - regulārs sešstūris un *O* - tā centrs. Izsaki vektorus $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CF}$, izmantojot vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BC}$ reizinājumus ar skaitļiem un to summas vai starpības.
9.* Uz trijstūra ABC malām ārpus tā konstruēti paralelogrami AA_2B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_1A (skat. 34. zīm.)



34. zīm

Pierādi, ka eksistē trijstūris, kura malas paralēlas un vienādas ar nogriežņiem A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

10. Dots izliekts piecstūris. Pierādi, ka eksistē cits piecstūris, kura malas vienādas un paralēlas ar dotā piecstūra diagonālēm.
11. Četru vektoru garumi ir vienādi, bet to summa ir nulles vektors. Pierādi, ka šos vektorus var sadalīt pa pāriem tā, lai katrā pārī ieejošie vektori būtu viens otram pretēji.
12. Dots trijstūris. Pierādīt, ka eksistē otrs trijstūris, kura malas vienādas un paralēlas ar dotā trijstūra mediānām.
13.* Pierādi 1.8. punktā minētās un nepierādītās vektoru starpības īpašības.
14.* Četrstūri ABCD, AEFG, ADFH, FIJE un BIJC ir paralelogrami. Pierādīt, ka arī četrstūris AFHG ir paralelograms.
15.* Doti n vektori, kuru summa ir nulles vektors. Pierādīt, ka tos var tā apzīmēt ar $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$, ka katram *k*, $1 \le k \le n$, vektors $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_kB_k}$ atrodas viena un tā paša 60^o liela leņķa ar virsotni A_1 iekšpusē.
16.* Kādiem četrstūriem uz to malām un diagonālēm var uzzīmēt bultiņas, pārvēršot šos nogriežņus par vektoriem, lai iegūto vektoru summa būtu nulles vektors?
17.* Atrast minimālo perimetru izliektam daudzstūrim ar 32 virsotnēm, kura visas virsotnes atrodas punktos ar veselām koordinātām.
18.* Pierādīt, ka vektors $OB \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OB}$ vērsts pa $\angle AOB$ bisektrisi.
19.* Regulāra sešstūra ABCDEF centrs ir O. Pierādīt, ka $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$ un $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
20.* Pierādīt, ka katriem četriem plaknes punktiem A, B, C, D pastāv vienādības $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ un $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
21.* Trijstūrī *ABC* ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB, BC, AC atbilstoši punktos M, N, P. Zināms, ka $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM}$ ir nulles vektors. Pierādīt, ka ΔABC ir regulārs.

1.9. Lineārās vektoriālās izteiksmes un darbības ar tām.

1.9.1. Vispārīgais secinājums par vienādu vektoru līdztiesību.

Aplūkosim izteiksmes, kas izveidotas no viena vai vairākiem vektoriem, lietojot vektoru saskaitīšanu, vektoru atņemšanu, vektora reizināšanu ar skaitli un pretējā vektora atrašanas operāciju. Tādas izteiksmes ir, piemēram, $\overrightarrow{AB}-6\cdot\overrightarrow{CD}$; $4\cdot 3\cdot\overrightarrow{MK}$; $\overrightarrow{Ox}+\overrightarrow{Oy}$; $-\overrightarrow{LS}+4\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{OK}\right)-3\left(\overrightarrow{LS}+7\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{CA}\right)$.

Tādas izteiksmes sauc par ***lineārām vektoriālām izteiksmēm (LVI)***. Katrai šādai izteiksmei ir ***vērtība*** - vektors, kuru var atrast, norādītajā secībā izpildot darbības ar izteiksmē ieejošiem vektoriem.

No lemmām par vektoru līdztiesību (skat. 21. lpp.) acīmredzami seko

TEORĒMA PAR AIZVIETOŠANU LVI.

Ja dažus vektorus, kas ietilpst LVI, aizstāj ar tiem vienādiem vektoriem, tad jaunās LVI un sākotnējās LVI vērtības ir vienādas.

Šī teorēma ļauj LVI pārveidojumos neatsaukties uz VVL lemmām, bet brīvi aizstāt vienādus vektorus vienu ar otru. Izmantojot šo teorēmu, samērā garais piemēra risinājums ___ lpp. izskatītos šādi:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)+\left(-\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{EF}\right)=\left(\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)\right)+\left(\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}\right)=$$

$$=\overrightarrow{CC}+\left(1\cdot\overrightarrow{EF}+2\cdot\overrightarrow{EF}\right)=\overrightarrow{CC}+3\cdot\overrightarrow{EF}=3\cdot\overrightarrow{FF}+\overrightarrow{CC}=3\cdot\overrightarrow{EF}$$

(Izlaidām atsauces uz komutatīvo, asociatīvo, distributīvo likumu un nulles vektora pieskaitīšanu).

Balstoties uz pierādītajām (un arī uz tikai minētajām) īpašībām, kas piemīt vektoru saskaitīšanai, atņemšanai un reizināšanai ar skaitli, konstatējam, ka ir spēkā arī

TEORĒMA PAR LVI PĀRVEIDOŠANU.

Lineāra vektoriālas izteiksmes var pārveidot pēc tiem pašiem likumiem, pēc kādiem pārveido lineāras algebriskas izteiksmes ar mainīgajiem, katru vektoru uzskatot par citu mainīgo; sākotnējās un iegūtās izteiksmes vērtības ir vienādas. Pie tam ar nulles vektoru rīkojas tāpat kā ar skaitli 0, bet ar pretējo vektoru tāpat, kā ar atbilstošajam mainīgajam pretējo mainīgo.

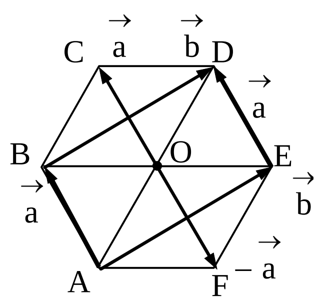
Piemēri.

LVI pārveidošana	*Algebriskas izteiksmes pārveidošana*
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$	$a+b=b+a$
$\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}\right)+\left(6\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{AB}\right)=7\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AB}$	$(2a+b)+(6b-a)=7b+a$

$2\left(3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ZZ})-\left(-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CA}\right)\right)=$ $=6\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{ZZ}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CA}=$ $=6\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ZZ}+\overrightarrow{AC}-2(-\overrightarrow{AC})=$ $=6\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ZZ}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=$ $=9\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ZZ}=9\overrightarrow{AC}$	$2(3a+0)-(-a+2b)=6a+2\cdot 0+a-2b=$ $=6a+0+a-2(-a)=6a+0+a+2a=$ $=9a+0=9a$

1.9.2. Saīsināts vektoru pieraksts.

Vektora apzīmējums, norādot tā sākuma un beigu punktu, norāda ne tikai vektora garumu, virzienu un vērsumu, bet arī tā atrašanās vietu plaknē. Tādējādi vienādiem vektoriem iespējami dažādi apzīmējumi.
Pieļausim turpmāk vektoru apzīmēt arī ar vienu burtu, virs kura rakstīsim vektora zīmi - bultiņu.
Ja divi vektori apzīmēti ar vienu un to pašu mazo burtu, tad tie noteikti ir vienādi. Piemēram, ja ABCDEF - regulārs sešstūris, *O* tā centrs un $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, tad



35. zīm.

$\overrightarrow{OC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{ED}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OF}=-\vec{a}$.
Nupat izdarītā vienošanās neizslēdz iespēju vienādus vektorus apzīmēt arī ar dažādiem mazajiem burtiem. Dažreiz tas var būt pat nepieciešami, ja mums, piemēram, ***jāpierāda*** divu vektoru vienādība; tad darba sākumā šī vienādība nav zināma, un mēs ***esam spiesti*** šos vektorus apzīmēt ar dažādiem burtiem.
Saīsinātā vektoru pieraksta forma sniedz mazāk informācijas nekā līdz šim lietotā. Piemēram, ja 35. zīm. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ un $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$, tad arī $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$. Ja mēs apskatām summu $\vec{a}+\vec{b}$, tad bez papildus informācijas nevaram zināt, vai domāta vektoru summa $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BD}$ vai vēl kāda cita.

Tomēr saskaņā ar teorēmu par aizvietošanu LVI **visi** vektori, kurus iegūst, izteiksmē $\vec{a}+\vec{b}$ ievietojot $\vec{a}$ vietā kādu no vienādajiem vektoriem, kas apzīmēti ar $\vec{a}$, bet $\vec{b}$ vietā - kādu no vienādajiem vektoriem, kas apzīmēti ar $\vec{b}$, ir savā starpā vienādi. Acīmredzami, ka tas pats attiecas uz jebkuru vairāku vektoru izteiksmi, kas satur viena vai vairāku vektoru saīsinātus pierakstus.

Vienosimies saīsinātā pierakstā nulles vektoru apzīmēt ar $\vec{0}$, bet vektoriem $\vec{a}$ pretējos vektorus apzīmēt ar $-\vec{a}$. Vektora $\vec{a}$ garumu apzīmēsim ar $\left|\vec{a}\right|$.

No iepriekš pierādītajām (un arī no tikai minētajām) vektoru saskaitīšanas, atņemšanas utt. īpašībām izriet atbilstošas vienādības, kas pareizas jebkuriem saīsinātā formā pierakstītiem vektoriem (atcerēsimies, ka tās sauc par identitātēm!) Atzīmēsim dažas no tām.

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
4. $k\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{b}$
5. $k\cdot\left(l\cdot\vec{a}\right)=(kl)\cdot\vec{a}$
6. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
7. $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$
8. $(-k)\cdot\vec{a}=-k\cdot\vec{a}$
9. $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}$
10. Ja $\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}$, tad $\vec{a}=\vec{b}+\vec{x}$
11. $k\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\cdot\vec{a}-k\cdot\vec{b}$
12. Ja summā $\left(\ldots\left(\left(\vec{a_1}+\vec{a_2}\right)+\vec{a_3}\right)+\ldots\right)+\vec{a_n}$ patvaļīgi maina vietām saskaitāmos, tad visām iegūtajām summām ir vienādas vērtības.
13. Ja summā $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\ldots+\vec{a_n}$ saskaitāmos patvaļīgi grupē, tad visām iegūtajām summām ir vienādas vērtības.

utt.

Viegli saprast, ka teorēma par LVI pārveidošanu ir spēkā arī tad, ja tajā ietilpst viena un tā paša vektora vairāki saīsinātie pieraksti; ar katru no saīsinātajiem pierakstiem rīkojas kā ar savu mainīgo.

Piemēri.

1. $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)-\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}-2\vec{a}+\vec{a}+2\vec{b}-\vec{b}-\vec{b}=0\cdot\vec{a}-0\cdot\vec{b}=$

$=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

2. $3\left(\vec{x}+7\vec{y}\right)+6\left(\vec{y}-\vec{x}\right)+\overrightarrow{AB}=3\vec{x}+21\vec{y}+6\vec{y}-6\vec{x}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-3\vec{x}+27\vec{y}$.

Ja vienādību abās pusēs atrodas lineāras vektoriālas izteiksmes, tad šīs vienādības var saskaitīt, atņemt vienu no otras, reizināt ar reālu skaitli tāpat, kā algebriskas vienādības. (Tas izriet no VVL lemmām 18, 21. un 29. lpp.) ***Uzmanību!*** Pagaidām vektoriālas vienādības nedrīkst reizināt vienu ar otru, jo mēs neesam definējuši, ko nozīmē sareizināt divus vektorus. Vēl jo vairāk šīs vienādības nedrīkst dalīt vienu ar otru.

Piemēri.

1. Ja $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}-\vec{d}$ un $\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{c}$, tad, saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$\vec{a}+\vec{b}+\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{d}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{0}.$$

2. Ja $2\vec{a}+\vec{b}=2\vec{b}+\vec{a}$, tad, saīsinot abas vienādības puses ar saskaitāmo $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ - tas ir tas pats, kā pieskaitīt dotajai vienādībai vienādību $-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ - iegūstam, ka $\vec{a}=\vec{b}$.

3. Ja $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{b}$, tad, pārnesot $\vec{b}$ no vienādības kreisās puses uz labo ar pretējo zīmi (tas ir tas pats, kā pieskaitīt dotajai vienādībai vienādību $-\vec{b}=-\vec{b}$), iegūstam, ka $\vec{a}=2\vec{b}$.

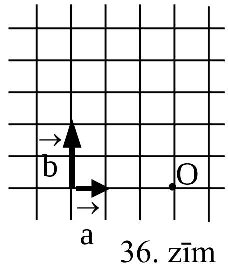
Uzdevumi.

1. Atliec no punkta O vektorus, kas vienādi ar

   a) $\vec{a}+\vec{b}$, b) $2\vec{a}-3\vec{b}$, c) $-4\vec{b}+\vec{0}$,

   d) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)+\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$.

   (skat. 36. zīm.)



36. zīm

2. Pierādi, ka $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)+\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

3. Dots, ka $3\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=4\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Pierādi, ka $\vec{a}=10\vec{b}$.

4. Dots, ka ABCD - paralelograms, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ un $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Izsaki $\overrightarrow{AC}$ un $\overrightarrow{BD}$ ar $\vec{b}$ un $\vec{d}$ palīdzību.

5. Dots, ka $\overrightarrow{OX}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OY}=\vec{a}+2\vec{b}$ un punkti *X* un *Y* sakrīt. Pierādi, ka $\vec{a}=\vec{b}$.

6. Dots, ka ABCD - kvadrāts ar centru *O*, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, S - patvaļīgs punkts. Izsaki vektorus $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ ar vektoru $\overrightarrow{SO}$, $\vec{b}$ un $\vec{d}$ palīdzību.

7.* Sastādi un atrisini 6. uzdevumam līdzīgu uzdevumu, ja kvadrāta vietā dots regulārs sešstūris.

8.* Izliektā četrstūrī ABCD $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$, diagonāļu AC un BD viduspunkti ir atbilstoši M un N. Pierādīt, ka $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

9.* Trijstūra ABC malas BC viduspunkts ir A_1; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Pierādīt, ka $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

10.* Trapecē ABCD ar pamatiem AD un BC punkti M un N ir sānu malu AB un CD viduspunkti. Pierādīt, ka $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. Vai šis rezultāts spēkā arī, ja ABCD nav trapece?

11.* Dots, ka $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Pierādīt, ka patvaļīgam punktam S pastāv vienādība $3\cdot\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

2. KOLINEĀRI UN NEKOLINEĀRI VEKTORI

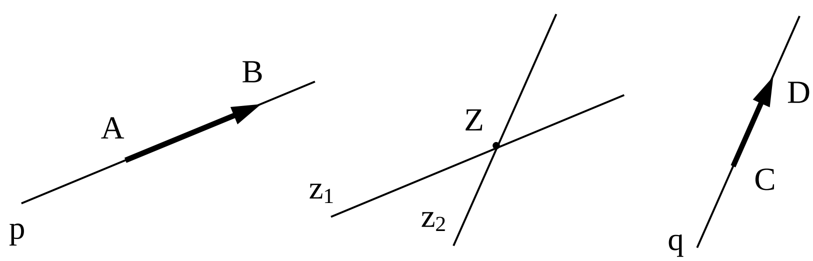
2.1. Definīcija un vienkāršākās īpašības.

Definīcija. ***Ja vektori atrodas uz vienas un tās pašas taisnes vai uz paralēlām taisnēm, tad tos sauc par kolineāriem.***

Piemēri.

1. Ja ABCD – trapece ar pamatiem AD un BC, tad vektori $\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{BC}$ ir kolineāri.
2. Nulles vektors ir kolineārs ar jebkuru citu vektoru.
3. Katrs vektors ir kolineārs ar katru sev pretēji vērstu vektoru.
4. Ja divi vektori ir vienādi, tad tie ir kolineāri.

Ievērosim, ka ***nenulles*** vektoru kolinearitātei piemīt transitīvā īpašība: ja pirmais vektors kolineārs ar otro, bet otrais – ar trešo, tad pirmais kolineārs ar trešo. To garantē apstāklis, ka katrs nenulles vektors atrodas tieši uz vienas taisnes. Turpretī ***jebkuru*** vektoru kolinearitāte nav transitīva: piemēram, $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{ZZ}$ ir kolineāri vektori (atrodas uz paralēlām taisnēm p un z_1), $\overrightarrow{ZZ}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir kolineāri vektori (atrodas uz paralēlām taisnēm z_2 un q), bet $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ nav kolineāri vektori (taisnes p un q nav paralēlas), skat. 37. zīm.



37. zīm.

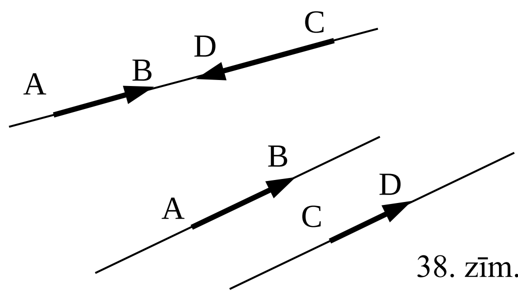
Atšķirība starp abiem gadījumiem rodas tāpēc, ka nulles vektoram nav **viennozīmīgi** noteiktas taisnes, uz kuras tas atrodas.

Teorēma. ***Divi nenulles vektori ir kolineāri tad un tikai tad, ja viens no tiem ir otra reizinājums ar kādu skaitli.***

Pierādījums.

▼ 1. Ja $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ nav nulles vektori un $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, tad $k \neq 0$. Tad vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $k \cdot \overrightarrow{CD}$ virzieni, tātad arī $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ virzieni sakrīt. Tātad $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ atrodas uz vienas taisnes vai uz paralēlām taisnēm.

2. Pieņemsim, ka nenulles vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ atrodas uz vienas vai paralēlām taisnēm (skat. 38. zīm.)



38. zīm.

Viegli pārliecināties, ka 1) $\overrightarrow{AB} = \frac{AB}{CD} \cdot \overrightarrow{CD}$, ja $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir vienādi vērsti vektori,

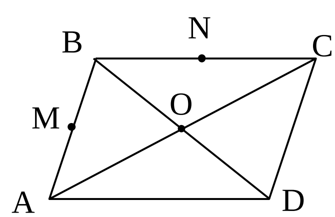
2) $\overrightarrow{AB} = -\frac{AB}{CD} \cdot \overrightarrow{CD}$, ja $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir pretēji vērsti vektori.▲

Pārbaudi pats sevi!

1. Kādus nenulles vektorus sauc par kolineāriem?
2. Formulē nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu tam, lai divi vektori būtu kolineāri!
3. Pierādi nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu tam, lai divi vektori būtu kolineāri.
4. Uzzīmē divus
   a) vienādi vērstus kolineārus vektorus,
   b) pretēji vērstus kolineārus vektorus.

Uzdevumi.

1. Dots, ka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Pierādi, ka $\overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{DA}$ ir kolineāri vektori.
2. Dots, ka $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, $k \neq 1$. Pie kādiem nosacījumiem $\overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{DA}$ ir kolineāri?
3. Atrodi kolineāru vektoru pārus 7. zīmējumā.
4. Dots, ka ABCD – paralelograms, O – tā diagonāļu krustpunkts, M un N – attiecīgi malu AB un BC viduspunkti (39. zīm.).



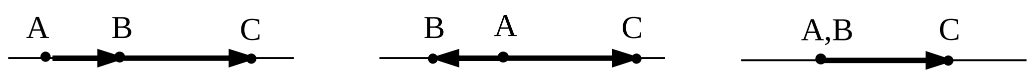
39. zīm.

Kuri no vektoriem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$ ir kolineāri viens ar otru?

2.2. Kolinearitātes lietojumi uzdevumos par punktu piederību vienai taisnei.

Tieši no kolinearitātes definīcijas izriet sekojoša apgalvojuma pareizība:

punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja vektori $\vec{AB}$ un $\vec{AC}$ ir kolineāri. Ilustrācijai skat. 40. zīm.

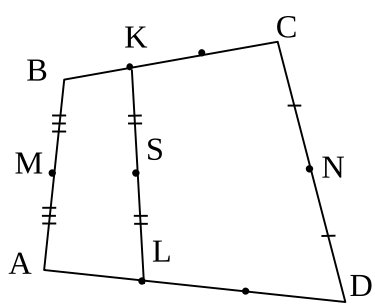


40. zīm

Saskaņā ar iepriekšējā punktā pierādīto teorēmu, lai pierādītu, ka $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$ ir kolineāri, mums pietiek pierādīt, ka $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ vai $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, kur k – patvaļīgs skaitlis. Šādos pierādījumos mēs plaši izmantosim 1. nodaļā izstrādāto tehniku darbībām ar vektoriem.

2.2.1. Ievaduzdevumi.

Piemērs. Izliektā četrstūrī ABCD malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N, bet punkti K un L dala attiecīgi malas BC un AD attiecībā $1:2: \frac{BK}{KC} = \frac{AL}{LD} = \frac{1}{2}$. Nogriežņa KL viduspunkts ir S. Pierādīt, ka punkti K, L, S atrodas uz vienas taisnes (skat. 41. zīm.).



41. zīm.

Atrisinājums. Apzīmēsim $\overrightarrow{MB} = \vec{a}$ (tad $\overrightarrow{MA} = -\vec{a}$), $\overrightarrow{BK} = \vec{b}$ (tad $\overrightarrow{BC} = 3\vec{b}$), $\overrightarrow{CN} = \vec{c}$ (tad $\overrightarrow{DN} = -\vec{c}$) un $\overrightarrow{AL} = \vec{d}$ (tad $\overrightarrow{AD} = 3\vec{d}$). Tad

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} \qquad (*)$$

un

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\vec{a} + 3\vec{d} - \vec{c} \qquad (**)$$

Saskaitot vienādības (*) un (**), vektori $\vec{a}$ un $-\vec{a}$, $\vec{c}$ un $-\vec{c}$ saīsinās, tātad

$$2\overrightarrow{MN}=3\left(\vec{b}+\vec{d}\right) \text{ un}$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}\right) \qquad (1)$$

Līdzīgi, apzīmējot $\overrightarrow{KS}=\vec{e}$ (tad $\overrightarrow{LS}=-\vec{e}$), iegūstam vienādības

$$\overrightarrow{MS}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{e}$$

$$\overrightarrow{MS}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{e},$$

kuras saskaitot iegūstam

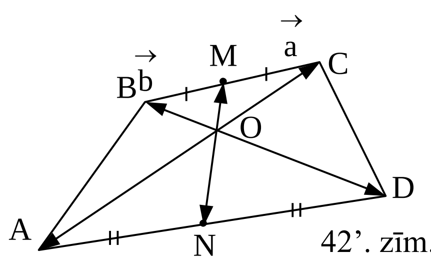
$$2\overrightarrow{MS}=\vec{b}+\vec{d} \text{ un}$$

$$\overrightarrow{MS}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}\right). \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MS}$. Tātad punkti M, N un S atrodas uz vienas taisnes.

Piemērs. Četrstūrī ABCD malu BC un AD viduspunkti un diagonāļu krustpunkts O atrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka ABCD ir trapece vai paralelograms.

Atrisinājums. (skat. 42'. zīm.)



42'. zīm.

Apzīmēsim BC un AD viduspunktus atbilstoši ar M un N. Apzīmēsim arī $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Tā kā $\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{OD}$ ir kolineāri vektori, tad eksistē tāds skaitlis k_1, ka $\overrightarrow{OD}=k_1\cdot\vec{b}$; līdzīgi eksistē tāds skaitlis k_2, ka $\overrightarrow{OA}=k_2\cdot\vec{c}$; pie tam $k_1\neq 0$ un $k_2\neq 0$.

Saskaņā ar teorēmu par nogriežņa viduspunktu (skat. 27. lpp.) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ un $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(k_1\vec{b}+k_2\vec{c}\right)$. Tā kā $\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{ON}$ ir kolineāri vektori saskaņā ar uzdevumā doto, tad eksistē tāds (mūsu gadījumā acīmredzami atšķirīgs no nulles) skaitlis k, ka

$\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{ON}$.

Ievērojot iepriekš iegūtās $\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{ON}$ izteiksmes, no šīs vienādības seko

$$\frac{1}{2}\left(k_1\vec{b}+k_2\vec{c}\right)=k\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \qquad (*)$$

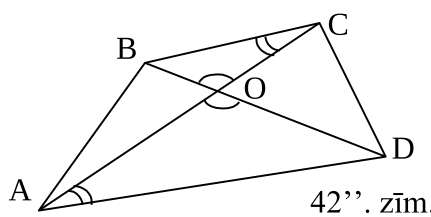
Pārveidojot vienādību (*) saskaņā ar 1. nodaļā pamatotajiem likumiem, pakāpeniski iegūstam

$$k_1\vec{b}+k_2\vec{c}=k\vec{b}+k\vec{c}$$

$$(k_1-k)\vec{b}=(k-k_2)\vec{c} \qquad (**)$$

Ja $k_1-k\neq 0$, tad no (**) seko, ka $\vec{b}=\frac{k-k_2}{k_1-k}\cdot\vec{c}$, tātad vektori $\vec{c}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri. Bet tā ir acīmredzama nepatiesība. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un $k_1-k=0$. Tad no (**) seko, ka $(k-k_2)\cdot\vec{c}=\vec{o}$. Tā kā $\vec{c}$ nav nulles vektors, tad jābūt $k-k_2=0$.

No vienādībām $k-k_1=0$ un $k-k_2=0$ seko, ka $k_1=k_2=k$. Tātad $OD=k\cdot OB$ un $OC=k\cdot OA$. Tāpēc $\Delta AOD\sim\Delta COB$ (vienādi leņķi un proporcionālas tos ietverošās malas). Tāpēc $\angle BCO=\angle OAD$; bet tad no paralēlu taišņu pazīmes pēc iekšējiem šķērsleņķiem izriet, ka $BC\parallel AD$. Tātad ABCD ir paralelograms (ja AD = BC) vai trapece (ja $AD\neq BC$).



42''. zīm.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka trapeces sānu malu pagarinājumu krustpunkts un pamatu viduspunkti atrodas uz vienas taisnes.

2. Atrisināt 2.2.1 apakšpunkta pirmā piemēra variantu, ja M, S, N apmierina sakarības $\frac{BM}{MA}=\frac{KS}{SL}=\frac{CN}{ND}=\alpha$, bet K un L apmierina sakarības $\frac{BK}{KC}=\frac{AL}{LD}=\beta$ (α un β - konstantes).

3. Uz paralelograma ABCD diagonāles AC ņemts tāds punkts M, ka $AM=\frac{1}{3}AC$; punkts N ir malas AB viduspunkts. Pierādīt, ka punkti M, N un D atrodas uz vienas taisnes.

4. Četrstūra ABCD malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka A, MN viduspunkts un BCD mediānu krustpunkts atrodas uz vienas taisnes.

5. Četrstūra ABCD malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N; nogriežņa MN viduspunkts atrodas uz diagonāles AC. Pierādīt, ka diagonāļu krustpunkts dala diagonāli BD uz pusēm.

6.* Pierādīt, ka patvaļīgā trijstūrī mediānu krustpunkts, augstumu krustpunkts un apvilktā riņķa centrs atrodas uz vienas taisnes.

7.* Dots trijstūris ABC un taisne t, kas krusto taisnes BC, CA, AB atbilstoši punktos P, Q, R. No punktiem P, Q, R novelkam perpendikulus atbilstoši pret CA un AB; AB un BC; BC un

CA. Šo perpendikulu pamatus apzīmējam attiecīgi ar P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2. Pierādīt, ka nogriežņu P_1P_2; Q_1Q_2; R_1R_2 viduspunkti atrodas uz vienas taisnes.

8.* Punkti A, B, C neatrodas uz vienas taisnes. Uz stara AC izvēlas patvaļīgu punktu D un trijstūrī ADB ievelk riņķa līniju; pieskaršanās punktus malām AD un BD apzīmē attiecīgi ar E un F. Pierādīt, ka visas taisnes EF, kuras iegūst dažādiem D stāvokļiem uz stara AC, iet caur vienu punktu.

2.2.2. Vektoru lietojuma vispārīgā shēma.

Apskatīsim 2.2.1. apakšpunkta otrā piemēra atrisinājumu. Pirmajā acu uzmetienā tas var likties garš. Patiesību sakot, liela daļa atbildības par to jāuzņemas autoru vēlmei sīki pamatot visus risinājuma soļus, tomēr jāatzīst, ka spriedums nebūtu no visīsākajiem arī tad, ja daudzi paskaidrojumi tiktu izlaisti. Tomēr risinājumā kā skaidrā avotā atspoguļojas visi galvenie posmi, kas piemīt vektoru metodes lietošanai ģeometrijas uzdevumos. Tos varētu salīdzināt ar teksta uzdevumu risināšanu algebrā.

Vektori planimetrijā	Teksta uzdevumi algebrā
Uzdevuma nosacījumu „pārtulkošana vektoru valodā” (mūsu gadījumā formulas (*) iegūšana)	Vienādojuma sastādīšana jeb uzdevuma nosacījumu „pārtulkošana” algebras valodā
Iegūtā „tulkojuma” pārveidošana saskaņā ar īpašībām, kas piemīt vektoriem vai darbībām ar tiem (mūsu gadījumā rezultāta $k_1 = k_2$ iegūšana)	Vienādojuma pārveidošana pēc algebras likumiem aizvien vienkāršākā formā
Pārveidojumos iegūtā rezultāta „pārtulkošana” atpakaļ parastajā ģeometrijas „valodā” (mūsu gadījumā secinājums par līdzību)	Pārveidojumos iegūtā rezultāta „pārtulkošana” atpakaļ uzdevumā lietotajos jēdzienos

Uzdevuma risinājuma pēdējā daļa jau ir tīri ģeometriska, un tai ar vektoriem vairs nav nekāda sakara. Arī algebras uzdevumu risinājumos sprieduma beigu posmam (piemēram, lieko sakņu atmešanai) nav sakara ar risināšanas gaitā sastādītajiem vienādojumiem.

Vienādojumu sastādīšanai algebrā, salīdzinot ar teksta uzdevumu risināšanu „ar jautājumiem”, galvenās priekšrocības ir tieši otrajā posmā – vienādojuma pārveidošanā, ko mēs varam izdarīt pēc vienkāršiem un formāliem likumiem, nedomājot par veicamo pārveidojumu jēgu. Arī vektoru lietošana ģeometrijā galvenās priekšrocības sniedz tieši uzdevumu risināšanas otrajā posmā:

1) vektoriālo izteiksmju pārveidojumos varam lietot visu bagātīgo algebrisko pārveidojumu pieredzi,

2) vektori it kā „domā mūsu vietā”, neprasot veidot palīgkonstrukcijas, papildināt zīmējumu utt.

2.2.3. Menelāja teorēma un tās lietojumi.

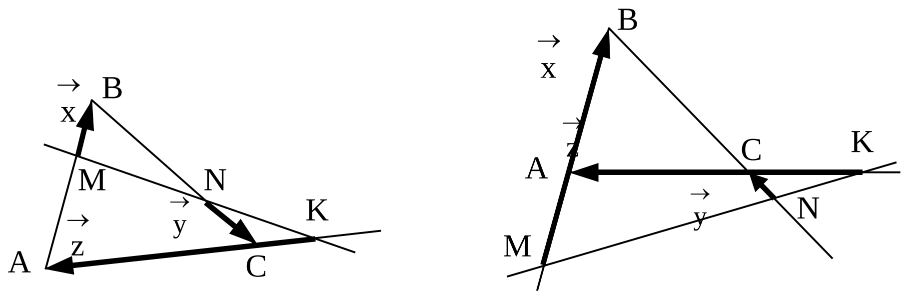
<u>Menelāja teorēma.</u>* Pieņemsim, ka dots trijstūris *ABC*. Punkti *M*, *N*, *K* atrodas attiecīgi uz taisnēm *AB*, *BC*, *CA* un apmierina sakarības $\overrightarrow{MA} = \alpha \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB} = \beta \cdot \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KC} = \gamma \cdot \overrightarrow{KA}$. Pierādīt: punkti *M*, *N*, *K* atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

Pierādījums.

▼ Uzzīmēsim vispirms divus no iespējamiem stāvokļiem, kā taisne var krustot visas trīs taisnes, uz kurām atrodas ΔABC malas:

a) taisne krusto divas malas un trešās malas pagarinājumu,

b) taisne krusto visu malu pagarinājumus.



a) b) 43. zīm.

Apzīmēsim $\overrightarrow{MB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{NC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{KA} = \vec{z}$; tad $\overrightarrow{MA} = \alpha\,\vec{x}$, $\overrightarrow{NB} = \beta\,\vec{y}$, $\overrightarrow{KC} = \gamma\,\vec{z}$.

Tā kā $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$, tad $\overrightarrow{BA} = (\alpha - 1)\,\vec{x}$; līdzīgi $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = (\beta - 1)\,\vec{y}$ un $\overrightarrow{AC} = (\gamma - 1)\,\vec{z}$.

Tā kā $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, tad starp vektoriem $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ pastāv sakarība

$$(\alpha - 1)\,\vec{x} + (\beta - 1)\,\vec{y} + (\gamma - 1)\,\vec{z} = \vec{0} \qquad (1)$$

Ievērosim, ka $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CN} = \gamma\,\vec{z} - \vec{y}$ un $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AM} = \vec{z} - \alpha\,\vec{x}$. Punkti K, M, N atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja vektori $\overrightarrow{KN}$ un $\overrightarrow{KM}$ ir kolineāri, t.i., tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitlis ω, ka

$$\overrightarrow{KM} = \omega \cdot \overrightarrow{KN} \qquad (2)$$

Izmantojot iegūtās $\overrightarrow{KM}$ un $\overrightarrow{KN}$ izteiksmes, iegūstam, ka (2) var pārrakstīt formā

$$\vec{z} - \alpha\,\vec{x} = \omega\left(\gamma\,\vec{z} - \vec{y}\right) \qquad (3)$$

No pašas uzdevuma jēgas seko, ka $\alpha \neq 1$; tāpēc no (1) iegūstam $\vec{x} = -\frac{\beta-1}{\alpha-1}\vec{y} - \frac{\gamma-1}{\alpha-1}\vec{z}$.

Ievietojot šo izteiksmi vienādībā (3), mums jānoskaidro, pie kādiem nosacījumiem eksistē tāds skaitlis ω, ka

$$\vec{z} + \alpha \cdot \frac{\beta-1}{\alpha-1}\vec{y} + \alpha \cdot \frac{\gamma-1}{\alpha-1}\vec{z} = \omega\left(\gamma\vec{z} - \vec{y}\right) \qquad (4)$$

Vienādība (4) identisku pārveidojumu rezultātā pakāpeniski pārveidojas par

$$(\alpha-1)\vec{z} + \alpha(\beta-1)\vec{y} + \alpha(\gamma-1)\vec{z} = \omega(\alpha-1)\left(\gamma\vec{z} - \vec{y}\right)$$

$$\alpha\vec{z} - \vec{z} + \alpha\beta\vec{y} - \alpha\vec{y} + \alpha\gamma\vec{z} - \alpha\vec{z} = \omega\alpha\gamma\vec{z} - \omega\alpha\vec{y} - \omega\gamma\vec{z} + \omega\vec{y}$$

$$\vec{z}(\alpha\gamma + \omega\gamma - 1 - \omega\alpha\gamma) = \vec{y}(\omega - \omega\alpha + \alpha - \alpha\beta) \qquad (5)$$

Skaidrs, ka ne $\vec{z}$, ne $\vec{y}$ nav nulles vektori (ja tā būtu, tad vai nu $\overrightarrow{BC} = 0$, vai arī $\overrightarrow{CA} = 0$, kas nevar būt). tā kā $\vec{y}$ un $\vec{z}$ ir nekolineāri vektori (atrodas uz neparalēlām taisnēm BC un CA), tad vienādība (5) iespējama vienīgi, ja

$$\alpha\gamma + \omega\gamma - 1 - \omega\alpha\gamma = 0 \qquad (6)$$

un

$$\omega - \omega\alpha + \alpha - \alpha\beta = 0 \qquad (7)$$

Pareizinām vienādību (7) ar y; iegūstam

$$\omega\gamma - \omega\alpha\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta\gamma = 0 \qquad (8)$$

Pielīdzinot (6) un (8) kreisās puses, iegūstam

$$\alpha\beta\gamma = 1,$$

kas arī bija jāpierāda. Menelāja teorēma pierādīta.▲

Šeit dotais pierādījums, protams, nav vienkāršs un nav īss. Tomēr atzīmēsim tā stiprās puses.

1. Pierādījums vienlīdz labi der gan 43. a. zīm., gan 43. b. zīm. parādītajām situācijām, gan vēl citā,, kuras mēs varbūt nemaz nespējam iztēloties vai arī neiedomājamies, ka tādas jāapskata (piemēram, ja M, N vai K sakrīt ar kādu no virsotnēm). Patiesībā visus minētos spriedumus varēja izdarīt, pat neuzzīmējot nekādu zīmējumu; pārliecinieties par to patstāvīgi!

2. Pierādījums, tāpat kā visi pierādījumi ar vektoru palīdzību, ir „caurspīdīgs"; mēs no paša sākuma zinām, kāda vienādība mums jāizmanto un kāda jāiegūst, un viss spriedums ir vienas vienādības formāla pārveidošana par otru vienādību.

Uzdevumi.

Izmantojot Menelāja teorēmu, pierādīt sekojošus rezultātus.

1. ***Paskāla teorēma.*** Ja riņķa līnijā ievilkta sešstūra pretējās malas pa pāriem krustojas, tad to krustpunkti atrodas uz vienas taisnes.

2. ***Simpsona teorēma.*** Ja no trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas punkta novelk perpendikulus pret taisnēm AB, BC, CA, tad perpendikulu pamati atrodas uz vienas taisnes.

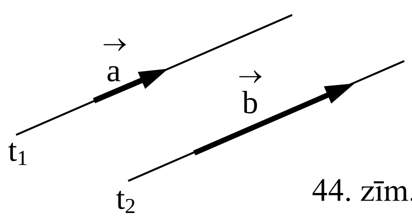
3. ***Čevas teorēma.*** Pieņemsim, ka dots trijstūris ABC. Punkti M, N, K atrodas attiecīgi uz taisnēm AB, BC, CA un apmierina sakarības $\overrightarrow{MA}=\alpha\cdot\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB}=\beta\cdot\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KC}=\gamma\cdot\overrightarrow{KA}$. Pierādīt: taisnes AN, BK, CM krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=-1$.

4. ***Karno teorēma.*** Trim dažādām riņķa līnijām pa pāriem atrasti kopējo ārējo pieskaru krustpunkti. Pierādīt, ka tie atrodas uz vienas taisnes.

5. Trijstūra ABC leņķu A un B bisektrises krusto pretējās malas attiecīgi punktos A_1 un B_1; trijstūra virsotnes C ārējā leņķa bisektrise krusto taisni AB punktā C_1. Pierādīt, ka punkti A_1, B_1, C_1 atrodas uz vienas taisnes.

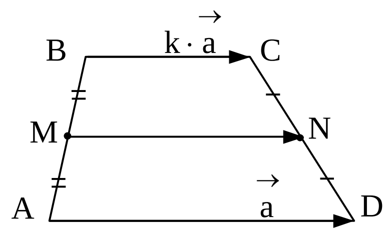
2.3. Kolinearitātes lietojumi uzdevumos par taišņu paralelitāti.

Tieši no kolinearitātes definīcijas izriet sekojoša apgalvojuma pareizība:
ja uz divām dažādām taisnēm var atrast pa nenulles vektoram, kas savā starpā kolineāri, tad minētās taisnes ir paralēlas.
Saskaņā ar kolinearitātes nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu taišņu t_1 un t_2 paralelitāte būs pierādīta, ja pierādīsim vienādību $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$ (skat. 44. zīm.), kur $\vec{a}$ un $\vec{b}$ -kaut kādi nenulles vektori uz taisnēm t_1 un t_2, bet k – patvaļīgs skaitlis.



44. zīm.

Piemērs.
Pierādīt, ka trapeces viduslīnija paralēla pamatiem.
Atrisinājums.
Apzīmēsim $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$; tad $\overrightarrow{BC}=k\cdot\vec{a}$, k – kaut kāds reāls skaitlis (45. zīm.).



45. zīm.

Ja M un N – četrstūra malu AB un CD viduspunkti, tad $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$; tas pierādīts 27. lpp.

Mūsu gadījumā $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+k\,\vec{a}\right)=\frac{1+k}{2}\cdot\vec{a}=\frac{1+k}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$. Tātad taisnes MN un AD ir paralēlas.

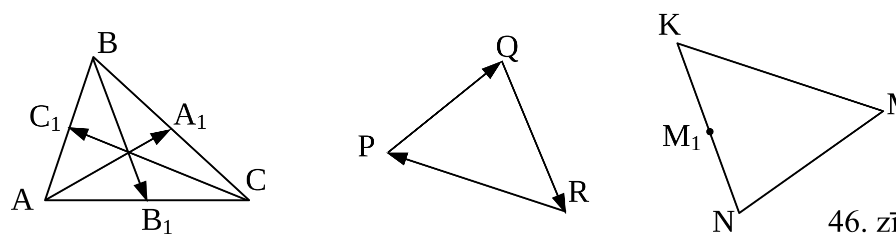
Piemērs.

Dots, ka trijstūra ABC mediānas paralēlas trijstūra MNK malām. Pierādīt, ka trijstūra MNK mediānas paralēlas trijstūra ABC malām (pieņemam, ka neviena mala neatrodas uz vienas taisnes ne ar vienu mediānu).

Atrisinājums.

Apzīmēsim ΔABC mediānas ar AA_1, BB_1, CC_1. Saskaņā ar teorēmu par nogriežņa viduspunktu (skat. 27. lpp.).

$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$. Viegli pārbaudīt, ka $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. Tātad eksistē trijstūris PQR, kura malas vienādas un paralēlas ar ΔABC mediānām (skat. 46. zīm.).



46. zīm.

Tātad trijstūru PQR un MNK malas ir pa pāriem paralēlas; tātad to leņķi ir atbilstoši vienādi un trijstūri PQR un MNK ir līdzīgi. Apzīmēsim līdzības koeficientu ar k; varam pieņemt, ka līdzībā atbilstošo virsotņu pāri ir P un M, Q un N, R un K. Tad $MN=k\cdot PQ$, $NK=k\cdot QR$, $KM=k\cdot RP$; tātad $\overrightarrow{MN}=k\cdot\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{NK}=k\cdot\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{KM}=k\cdot\overrightarrow{RP}$. Apzīmējot malas KN viduspunktu ar M_1, iegūstam, ka $\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MK}\right)=\frac{1}{2}\left(k\cdot\overrightarrow{PQ}-k\cdot\overrightarrow{RP}\right)=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RP}\right)=$

$$=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\right)=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)=$$

$$\frac{k}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\right)=\frac{k}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3k}{2}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Tātad ΔMNK mediāna MM_1 paralēla ΔABC malai AC. Līdzīgi pierāda apgalvojumus par pārējām ΔMNK mediānām.

Uzdevumi.

1. Piecstūra ABCDE malu AB, BC, CD, DE viduspunkti ir atbilstoši M, N, K, L; četrstūris MNKS ir paralelograms. Pierādīt, ka $SL \parallel AE$.

2. Izmantojot iepriekšējā uzdevuma apzīmējumus, pierādīt, ka nogrieznis, kas savieno MK un NL viduspunktus, arī paralēls nogrieznim AE.

3. Pierādīt: ja četrstūra viduslīnija paralēla vienai no tā malām, tad četrstūris ir paralelograms vai trapece.

4. Trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts O. Pierādīt, ka nogrieznis, kas savieno trijstūru ABO un BCO mediānu krustpunktus, paralēls malai AC. Vai rezultāts un pierādījums mainās, ja O atrodas ārpus ΔABC?

5.* Katrs no n vektoriem kolineārs ar visu pārējo vektoru summu. Pierādīt: vai nu visu vektoru summa ir $\vec{0}$, vai arī tie visi ir kolineāri.

6.* Izliektā piecstūrī ABCDE zināms, ka $AB \parallel CE$, $BC \parallel DA$, $CD \parallel EB$ un $DE \parallel AC$. Pierādīt, ka $EA \parallel BD$.

7. Nogrieznis, kas savieno četrstūra ABCD diagonāļu viduspunktus, paralēls vienai no četrstūra malām. Pierādīt, ka ABCD ir trapece.

2.4. Vektoru izteikšana ar diviem nekolineāriem vektoriem.

Jebkuru informāciju uztvert ir vieglāk, ja to pieraksta standartizētā formā. Tāpēc dažādus dokumentus aizpilda uz jau sagatavotām veidlapām; personas kodā katrai ciparu grupai ir stingri noteikta nozīme; skaitļa decimālajā pierakstā pēdējais cipars vienmēr norāda vienu skaitu, priekšpēdējais – desmitu skaitu utt.
Arī plaknes vektoru izteikšanai izstrādātas vairākas „standartformas”.

2.4.1. Vektoru izteikšanas iespējamība un vienīgums.

Pieņemsim, ka plaknē fiksēti divi nekolineāri (tātad noteikti nenulles) vektori; apzīmēsim tos ar $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

TEORĒMA PAR PLAKNES VEKTORU IZTEIKŠANU.

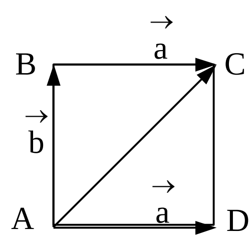
Katram vektoram $\overrightarrow{XY}$ var atrast tādus skaitļus α un β, ka

$$\overrightarrow{XY} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \qquad (*)$$

turklāt skaitļi α un β ir noteikti viennozīmīgi.

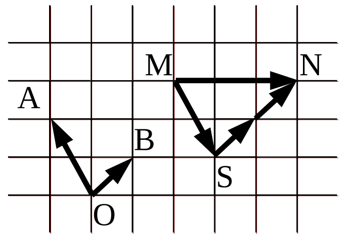
Piemēri

1. Ja ABCD – kvadrāts, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, tad $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$; šeit $\alpha = 1$ un $\beta = 1$ (skat. 47. zīm.).



47. zīm.

2. Ja ABC – trijstūris, $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ un M – malas AB viduspunkts, tad saskaņā ar teorēmu par nogriežņa viduspunktu (27. lpp). $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; te $\alpha = \frac{1}{2}$ un $\beta = \frac{1}{2}$.



48. zīm.

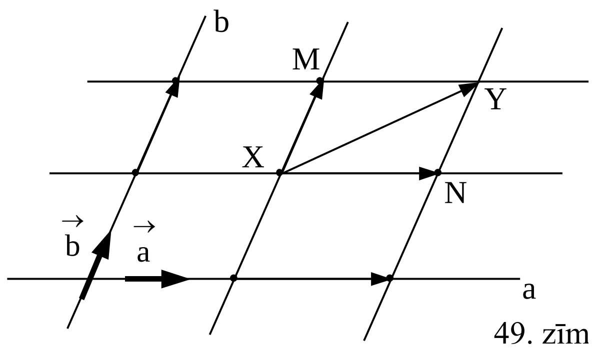
3. Ja $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, tad (skat. 48. zīm.) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SN} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; te $\alpha = -1$ un $\beta = 2$.

▼ Pierādīsim teorēmu.

1. Parādīsim, ka minētos skaitļus noteikti var atrast. Šķirosim divus gadījumus.

a) Ja $\overrightarrow{XY}$ kolineārs vektoram $\vec{a}$ (tai skaitā, ja $\overrightarrow{XY}$ ir nulles vektors), eksistē tāds skaitlis α, ka $\overrightarrow{XY} = \alpha \cdot \vec{a}$. Tad $\overrightarrow{XY} = \alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$. Gadījumu, kad $\overrightarrow{XY}$ kolineārs vektoram $\vec{b}$, apskata līdzīgi.

b) Ja $\overrightarrow{XY}$ nav kolineārs ne vektoram $\vec{a}$, ne vektoram $\vec{b}$, apskatām taisnes a un b, uz kurām atrodas vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Novelkam caur X un Y taisnes paralēli a un b; taišņu krustpunktus apzīmējam, kā parādīts 49. zīm.



49. zīm

Izveidojas paralelograms XMYN. Saskaņā ar paralelograma likumu $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XM}$. Bet $\overrightarrow{XN}$ kolineārs vektoram $\vec{a}$ un $\overrightarrow{XM}$ kolineārs vektoram $\vec{b}$, tātad eksistē tādi skaitļi α un β, ka $\overrightarrow{XN} = \alpha \cdot \vec{a}$ un $\overrightarrow{XM} = \beta \cdot \vec{b}$. Tāpēc esam ieguvuši vajadzīgo sakarību

$$\overrightarrow{XY} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

2. Mēs esam parādījuši ***vienu*** veidu, kā atrast vajadzīgos skaitļus α un β. Tomēr nav izslēgts, ka eksistē vēl kāds cits to atrašanas ceļš. Pierādīsim, ka neatkarīgi no skaitļu α un β atrašanas ceļa to vērtības dotajam vektoram $\overrightarrow{XY}$ vienmēr ir vienas un tās pašas.
Pieņemsim, ka

$$\overrightarrow{XY} = \alpha_1 \cdot \vec{a} + \beta_1 \cdot \vec{b} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{XY} = \alpha_2 \cdot \vec{a} + \beta_2 \cdot \vec{b} \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko

$$\alpha_1 \cdot \vec{a} + \beta_1 \cdot \vec{b} = \alpha_2 \cdot \vec{a} + \beta_2 \cdot \vec{b}\text{, no kurienes}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \vec{a} = (\beta_1 - \beta_2) \cdot \vec{b} \qquad (3)$$

Ja $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$, tad no (3) seko $\vec{a} = \dfrac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \vec{b}$, t.i., vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri; tā ir pretruna.

Tātad $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ un $\alpha_1 = \alpha_2$. Tad no (3) seko, ka $(\beta_1 - \beta_2) \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Tā kā $\vec{b} \neq \vec{0}$, tad $\beta_2 = \beta_1$.
Esam pierādījuši vajadzīgo.▲

<u>Definīcija.</u> Ja $\vec{a}$ un $\vec{b}$ - nekolineāri vektori un $\overrightarrow{XY} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, tad vektorus $\alpha \cdot \vec{a}$ un $\beta \cdot \vec{b}$ sauc par vektora $\overrightarrow{XY}$ komponentēm vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ virzienos. Ja skaidrs, par kādiem virzieniem tiek runāts, tos sauc vienkārši par $\overrightarrow{XY}$ komponentēm.

No nupat pierādītās teorēmas un teorēmas par aizvietošanu (33. lpp) seko

VEKTORU VIENĀDĪBAS NOSACĪJUMS KOMPONENTU FORMĀ.
Divi vektori ir vienādi tad un tikai tad, ja to atbilstošās komponentes ir pa pāriem vienādas.

Izsakot visus vektorus ar $\vec{a}$ un $\vec{b}$ palīdzību, pašus vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$ sauc par **bāzes vektoriem**.
Tad var sacīt, ka ar formulu (*) vektors $\overrightarrow{XY}$ izteikts kā bāzes vektoru **lineāra kombinācija**.
No teorēmas par aizvietošanu seko, ka, aizstājot bāzes vektorus ar tiem vienādiem vektoriem (kurus arī var apzīmēt ar $\vec{a}$ un $\vec{b}$), koeficienti α un β formulā (*) nemainās.

Piemērs.

Izteikt vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$ kā vektoru $\vec{a} + \vec{b}$ un $\vec{a} - \vec{b}$ lineāru kombināciju.

Atrisinājums.

Viegli uzminēt, ka

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \text{ un}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right);$$

pārbaudiet vienādību pareizību patstāvīgi.

Piemērs.

Izteikt vektoru $\vec{a} + 2\vec{b}$ kā vektoru $\vec{a} + \vec{b}$ un $2\vec{a} - 3\vec{b}$ lineāru kombināciju.

Atrisinājums.

Atšķirībā no iepriekšējā gadījuma koeficientus uzminēt vairs nav tik vienkārši. Atradīsim tos „sistemātiskā ceļā".

Pieņemam, ka

$$\vec{a} + 2\vec{b} = \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \beta\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) \qquad (1)$$

Šo vienādību var acīmredzami var pārveidot par

$$1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = (\alpha + 2\beta) \cdot \vec{a} + (\alpha - 3\beta) \cdot \vec{b} \qquad (2)$$

Viegli saprast, ka iegūtā vienādība ***noteikti*** izpildīsies, ja $\alpha + 2\beta = 1$ un $\alpha - 3\beta = 2$ (ja gadījumā $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir nekolineāri vektori, tad šo nosacījumu izpilde ir ***vienīgā iespēja*** vienādībai (2) izpildīties). Atrisinot vienādojumu sistēmu

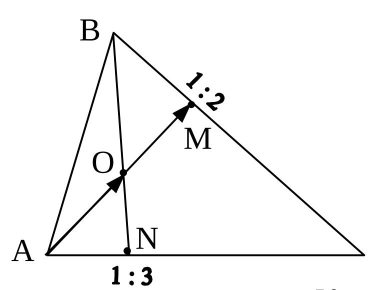
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 3\beta = 2 \end{cases},$$

iegūstam $\alpha = \frac{7}{5}$; $\beta = -\frac{1}{5}$. Tie arī ir vajadzīgie koeficienti.

Ievērosim: ja $\vec{a}$ un $\vec{b}$ būtu kolineāri vektori, tad (2) un līdz ar to arī (1) var izpildīties arī citām α un β vērtībām. Piemēram, ja $\vec{a} = 2\vec{b}$, tad (2) izpildās arī, ja $4\vec{b} = (5\alpha + \beta) \cdot \vec{b}$, un šī vienādība pareiza pie jebkuriem α un β, kas apmierina sakarību $5\alpha + \beta = 4$.

Piemērs.

Uz trijstūra ABC malas BC ņemts punkts M, bet uz malas AC – punkts N tā, ka $BM : MC = 1 : 2$ un $AN : AC = 1 : 3$. Nogriežņi AM un BN krustojas punktā O. Aprēķināt attiecību AO : AM (50. zīm.)



50. zīm.

Atrisinājums.
Apzīmēsim $AO:AM = x$ un sastādīsim vienādojumu, kurā ietilpst x. No šī vienādojuma centīsimies atrast x vērtību.

Tā kā $\overrightarrow{AO}$ un $\overrightarrow{AM}$ ir kolineāri un vienādi vērsti vektori, tad no vienādības $AO = x \cdot AM$ seko $\overrightarrow{AO} = x \cdot \overrightarrow{AM}$ (1).

Mēģināsim izsacīt $\overrightarrow{AO}$ un $\overrightarrow{AM}$ ar vienu un to pašu bāzes vektoru palīdzību. No iegūtajām izteiksmēm arī atradīsim x.

Izvēlēsimies par bāzes vektoriem $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ un $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

1. Izsacīsim $\overrightarrow{AM}$. Skaidrs, ka $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \overrightarrow{BM}$. Tā kā $BM = \frac{1}{3}BC$ un $\overrightarrow{BM}$ un $\overrightarrow{BC}$ ir kolineāri un vienādi vērsti vektori, tad $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Tā kā $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b}$ un $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$. Tāpēc $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ (2).

2. Izsacīsim $\overrightarrow{AO}$. Skaidrs, ka jāizmanto tas, kā punkts O definēts, t.i., tas, ka O ir AM un BN krustpunkts. Pastāv tāds skaitlis y, ka $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{b} + y \cdot \overrightarrow{BN}$, jo vektori $\overrightarrow{BO}$ un $\overrightarrow{BN}$ ir kolineāri. Līdzīgi kā $\overrightarrow{AM}$ izsacīšanā atrodam $\overrightarrow{BN} = \frac{\vec{c}}{4} - \vec{b}$; tāpēc pēc pārveidojumiem iegūstam

$$\overrightarrow{AO} = (1 - y)\vec{b} + \frac{y}{4}\vec{c} \quad (3)$$

3. No formulām (1), (2), (3) seko vienādojums

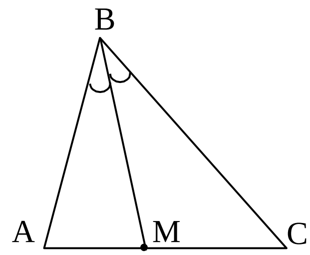
$$(1 - y)\vec{b} + \frac{y}{4}\vec{c} = \frac{2x}{3}\vec{b} + \frac{x}{3}\vec{c} \quad (4)$$

Vektori $\vec{b}$ un $\vec{c}$ ir nekolineāri. Saskaņā ar teorēmu par plaknes vektoru izteikšanu no vienādības (4) seko $1 - y = \frac{2x}{3}$ un $\frac{y}{4} = \frac{x}{3}$. Atrisinot vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 1 - y = \frac{2x}{3} \\ \frac{y}{4} = \frac{x}{3} \end{cases}$, piemēram, ar ievietošanas metodi, iegūstam $y = \frac{2}{3}$ un $x = \frac{1}{2}$.

Tātad $AO:AM = x = 1:2$. Uzdevums atrisināts. Vienlaicīgi esam atraduši arī attiecību $BO:BN = 2:3$.

Piezīme.
Algebrā vienam lineāram vienādojumam ar 2 mainīgajiem ir vai nu bezgala daudzi, vai neviens atrisinājums. Nupat mēs redzējām, ka, ja vienādojums satur „koeficientus” – vektorus, situācija var būt principiāli citāda. Šī efekta dziļākie cēloņi tiks izskaidroti 2.4.2.4. apakšpunktā.

Piemērs.
Pierādīsim no planimetrijas kursa pazīstamo teorēmu:
trijstūra iekšējā leņķa bisektrise dala pretējo malu tieši proporcionāli sānu malām.
Atrisinājums.
Apzīmēsim $AB = c$, $BC = a$ (skat. 51. zīm.)



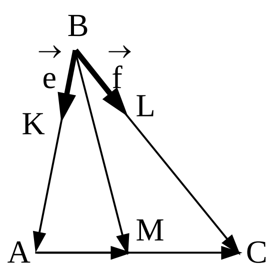
51. zīm.

Mums jāpierāda, ka $AM : MC = c : a$ jeb, kas ir tas pats, $AM : AC = c : (a + c)$.

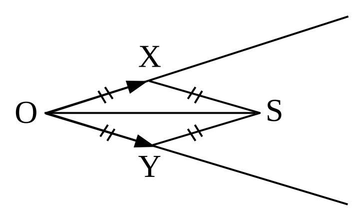
Tā kā $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{AC}$ ir kolineāri vektori, tad eksistē tāds skaitlis x, ka $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC}$. Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $x = \dfrac{c}{a + c}$, uzdevums būs atrisināts.

Koeficientu x sakarībā $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC}$ atkal meklēsim, izsakot vektorus $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{AC}$ ar bāzes vektoru palīdzību.

Šoreiz par bāzes vektoriem ņemsim vienības vektorus (t.i., vektorus ar garumu 1) $\vec{e}$ un $\vec{f}$, kas kolineāri un vienādi vērsti ar vektoriem $\overrightarrow{BA}$ un $\overrightarrow{BC}$ (skat. 52. zīm.)



52. zīm.



53. zīm.

Tā kā vektora $\overrightarrow{BA}$ garums ir c, bet vektora $\overrightarrow{BC}$ garums ir a, tad $\overrightarrow{BA} = c \cdot \vec{e}$ un $\overrightarrow{BC} = a \cdot \vec{f}$.

Ievērosim: ja $\overrightarrow{OX}$ un $\overrightarrow{OY}$ ir nekolineāri vienāda garuma vektori, tad $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$ atrodas uz $\angle XOY$ bisektrises. Tiešām (skat. 53. zīm.), paralelograms OYSX ir rombs, tāpēc tā diagonāle OS dala leņķi XOY uz pusēm. Tāpēc vektors $\overrightarrow{BM}$ kolineārs ar vektoru $\vec{e} + \vec{f}$; tātad eksistē tāds skaitlis y, ka $\overrightarrow{BM} = y\left(\vec{e} + \vec{f}\right)$ (1). No otras puses,

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + x \cdot \overrightarrow{AC} = c \cdot \vec{e} + x\left(a \cdot \vec{f} - c \cdot \vec{e}\right)$ (2)

No (1) un (2) seko vienādība

$$y\left(\vec{e} + \vec{f}\right) = c \cdot \vec{e} + x\left(a \cdot \vec{f} - c \cdot \vec{e}\right),$$

kas viegli pārveidojas par

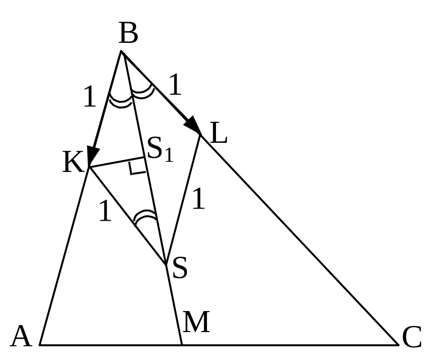
$$y\,\vec{e} + y\,\vec{f} = (c - cx)\,\vec{e} + ax\,\vec{f} \qquad (3)$$

Tā kā $\vec{e}$ un $\vec{f}$ - nekolineāri vektori, tad saskaņā ar teorēmu par vektora izteikšanu no (3) seko, ka $y = c - cx$ un $y = ax$. No šejienes $ax = c - cx$ un $x = \frac{c}{a + c}$, k.b.j.

Piezīme.

Minēto spriedumu nedaudz turpinot, viegli iegūt bisektrises garuma formulu. Tiešām, no iepriekšējā atrisinājuma seko, ka $y = ax = \frac{ac}{a + c}$. Tātad $\overrightarrow{BM} = y\left(\vec{e} + \vec{f}\right) = \frac{ac}{a + c}\left(\vec{e} + \vec{f}\right)$ un $BM = \left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\frac{ac}{a + c} \cdot \left(\vec{e} + \vec{f}\right)\right| = \frac{ac}{a + c} \cdot \left|\vec{e} + \vec{f}\right|$. Atliek aprēķināt $\vec{e} + \vec{f}$ garumu.

Kā jau atzīmējām, vektors $\overrightarrow{BS} = \vec{e} + \vec{f}$ iet pa $\angle ABC$ bisektrisi; tāpēc, ja $\angle ABC = \beta$, tad $\angle KBS = \frac{\beta}{2}$. Tāpēc $BS_1 = BK \cdot \cos\frac{\beta}{2} = 1 \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$.Līdzīgi $SS_1 = \cos\frac{\beta}{2}$, tāpēc $\left|\vec{e} + \vec{f}\right| = BS = 2\cos\frac{\beta}{2}$ un $AM = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a + c}$.



54. zīm.

Pārbaudi pats sevi!

1. Kādas īpašības jāapmierina diviem bāzes vektoriem, ar kuriem var izteikt jebkuru plaknes vektoru?

2. Formulē teorēmu par plaknes vektoru izteikšanu!

3. Ja $\overrightarrow{XY} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, tad ko sauc par $\overrightarrow{XY}$ komponenti vektora $\vec{a}$ virzienā?

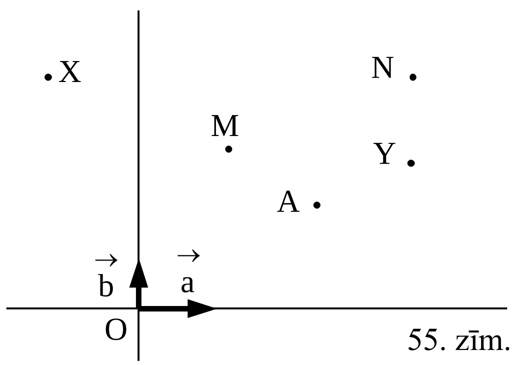
4. Dots, ka $\vec{a}$ un $\vec{b}$ - nekolineāri vektori un $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$. Kādas vienādības pastāv starp skaitļiem α, β, x, y?

5. Kādā gadījumā vektora $\overrightarrow{XY}$ komponente vektora $\vec{a}$ virzienā ir nulles vektors?

6. Kādiem vektoriem abas komponentes ir nulles vektori?

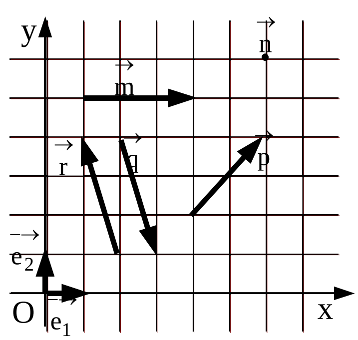
Uzdevumi.

1. Uzzīmē vektoru $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{XN}$, $\overrightarrow{NA}$ komponentes vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ virzienos (skat. 55. zīm.)



55. zīm.

2. Atrodi vektoru $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ komponentes un to garumus $\vec{e}_1$ un $\vec{e}_2$ virzienos (skat. 56. zīm.), ja koordinātu asis Ox un Oy iet pa rūtiņu režģa līnijām un rūtiņas malas garums ir 1.



56. zīm.

3. Dots, ka ABCDEF – regulārs sešstūris, O - tā centrs. Apzīmēsim $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Izsaki vektorus $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BE}$, $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$ kā $\vec{a}$ un $\vec{b}$ lineāras kombinācijas.

4. Izsaki $\vec{a}+2\vec{b}$ un $\vec{a}-2\vec{b}$ kā vektoru $\vec{a}+\vec{b}$ un $\vec{a}-\vec{b}$ lineāras kombinācijas.

5. Izsaki $\vec{m}$ un $\vec{n}$ kā vektoru $3\vec{m}+2\vec{n}$ un $6\vec{m}-7\vec{n}$ lineāras kombinācijas.

6. Uz trijstūra ABC malas BC ņemts tāds punkts M, ka $BM:MC=2:3$. Uz nogriežņa AM ņemts tāds punkts K, ka $AK:KM=1:2$. Taisne BK krusto AC punktā L. Atrast $AL:LC$.

7. Uz trijstūra ABC malām BC un AB ņemti attiecīgi punkti M un N tā, ka $BM:MC=3:4$ un $AN:NB=2:7$. Nogriežņi AM un CN krustojas punktā O. Aprēķināt attiecības $AO:OM$ un $CO:ON$.

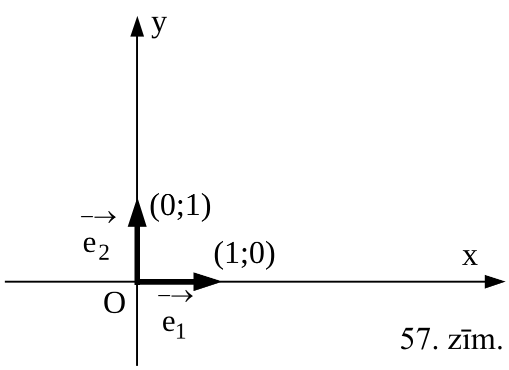
8. Pierādīt: trijstūra ABC virsotnes C ārējā leņķa bisektrise krusto taisni AB tādā punktā C_1, ka $C_1B:C_1A=CB:CA$. Izteikt CC_1 garumu ar ΔABC malu garumiem un leņķu lielumiem, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

9.* Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Pierādīt, ka $\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2.4.2. Vektori koordinātu formā.

2.4.2.1. Vektora koordinātu definīcija.

Iedomāsimies, ka plaknē uzzīmētas taisnleņķa (Dekarta) koordinātu sistēmas asis. To sākumpunktu (nullpunktu) apzīmēsim ar O. Vienības vektorus, kas no O atlikti attiecīgi asu Ox un Oy virzienos, apzīmēsim atbilstoši ar $\vec{e_1}$ un $\vec{e_2}$ (skat. 57. zīm.)



57. zīm.

Skaidrs, ka $\vec{e_1}$ un $\vec{e_2}$ kā nekolineāri vektori var tikt lietoti par bāzes vektoriem, ar kuru palīdzību izsaka jebkuru plaknes vektoru.

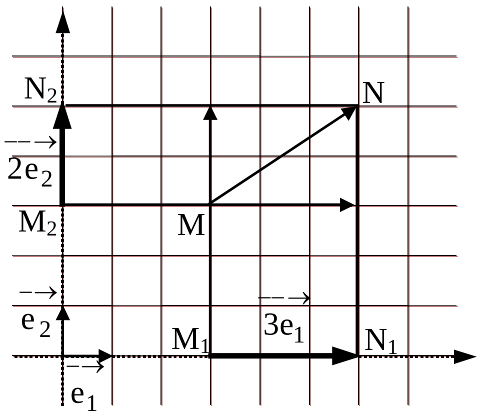
Definīcija. *Ja $\overrightarrow{AB}=x\cdot\vec{e_1}+y\cdot\vec{e_2}$, tad skaitļus x un y sauc par vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātām (x – par abscisu, y – par ordinātu) un vektoram $\overrightarrow{AB}$ līdz ar citiem apzīmējumiem lieto arī apzīmējumu $\overrightarrow{(x;y)}$.*

Piemēri.

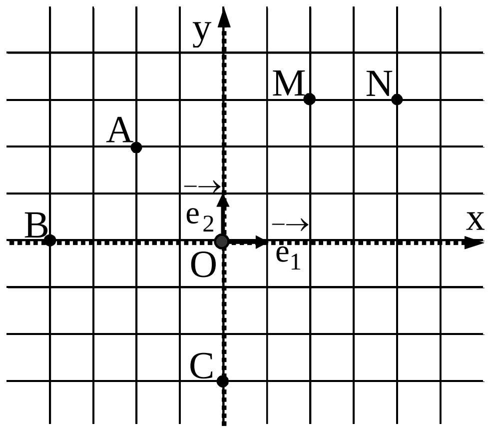
1. Aplūkojot 57. zīmējumu, $\vec{e_1} = \overrightarrow{(1; 0)}$ un $\vec{e_2} = \overrightarrow{(0; 1)}$.

2. Tā kā $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1} + \overrightarrow{M_2N_2} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$, tad $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{(3; 2)}$ (skat. 58. zīm.)

3. Pārliecinieties patstāvīgi, ka $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{(2; 0)}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{(2; 3)}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{(-4; 0)}$, $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{(0; 3)}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{(-2; 2)}$ (skat. 59. zīm.)



58. zīm.



59. zīm.

Gandrīz acīmredzamas ir sekojošas īpašības.

1. Divi vektori ir vienādi tad un tikai tad, ja tiem ir vienādas gan abscisas, gan ordinātas.
2. Vektora $\overrightarrow{OM}$ abscisa un ordināta sakrīt attiecīgi ar punkta M abscisu un ordinātu

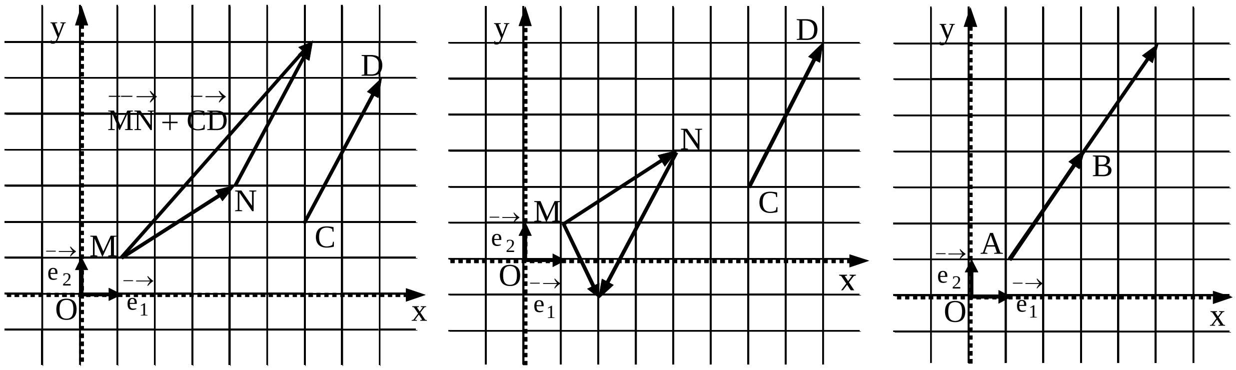
2.4.2.2. Darbības ar vektoriem koordinātu formā.

Teorēma. ***Divus vektorus saskaitot vai atņemot, atbilstošās koordinātas tiek saskaitītas (atņemtas). Reizinot vektoru ar skaitli, abas koordinātas tiek reizinātas ar šo skaitli.***

Piemēri.

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{(3; 2)}$ un $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(2; 4)}$, tad $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(5; 6)}$ (skat. 60. zīm. a), bet $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(1; -2)}$ (skat. 60. zīm. b).

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(2; 3)}$, tad $2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4; 6)}$ (skat. 60. zīm. c).



60. zīm.

Pierādījums.

▼ Ja $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(x_1;y_1)}$ un $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{(x_2;y_2)}$, tad saskaņā ar definīciju $\overrightarrow{AB}=x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}$ un $\overrightarrow{CD}=x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}$. Tāpēc

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}\right)+\left(x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}\right)=(x_1+x_2)\vec{e_1}+(y_1+y_2)\vec{e_2} \quad (1)$$

un

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\left(x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}\right)-\left(x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}\right)=(x_1-x_2)\vec{e_1}+(y_1-y_2)\vec{e_2} \quad (2),$$

kas savukārt saskaņā ar definīciju nozīmē, ka

$$\overrightarrow{(x_1;y_1)}+\overrightarrow{(x_2;y_2)}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{(x_1+x_2;y_1+y_2)} \text{ un}$$

$$\overrightarrow{(x_1;y_1)}-\overrightarrow{(x_2;y_2)}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{(x_1-x_2;y_1-y_2)}, \text{ k.b.j.}$$

Savukārt, ja k – skaitlis un $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(x_1;y_1)}$, tad

$$k\cdot\overrightarrow{(x_1;y_1)}=k\cdot\overrightarrow{AB}=k\cdot\left(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\right)=(kx)\cdot\vec{e_1}+(ky)\vec{e_2}=\overrightarrow{(kx;ky)}, \text{ k.b.j.} ▲$$

Tā kā $-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}$, iegūstam secinājumu:

pretēju vektoru atbilstošās koordinātas ir viens otram pretēji skaitļi.

Nupat pierādīto teorēmu un secinājumu no tās pierakstīsim arī koordinātu formā:

$$\overrightarrow{(x_1;y_1)}+\overrightarrow{(x_2;y_2)}=\overrightarrow{(x_1+x_2;y_1+y_2)}$$
$$\overrightarrow{(x_1;y_1)}-\overrightarrow{(x_2;y_2)}=\overrightarrow{(x_1-x_2;y_1-y_2)}$$
$$k\cdot\overrightarrow{(x;y)}=\overrightarrow{(kx;ky)}$$
$$-\overrightarrow{(x;y)}=\overrightarrow{(-x;-y)}$$

Gan uzdevumu risinājumos, gan spriedumos mēs lietosim visas vektoru pieraksta formas – norādot galapunktu, ar vienu burtu un ar koordinātu palīdzību – un bieži pāriesim no vienas formas uz citu.

2.4.2.3. Vektora koordinātu sakars ar tā galapunktu koordinātām.

Vienā speciālā gadījumā – kad vektora sākumpunkts sakrīt ar koordinātu sistēmas sākumpunktu O – mēs šādu sakarību jau atzīmējām (skat. 2. īpašību 57. lpp.):

ja punkta M koordinātas ir (x, y), tad $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{(x, y)}$. Ievērosim, ka mēs varētu arī rakstīt $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{(x-0, y-0)}$. Atceroties, ka O koordinātas ir (0; 0), iegūstam:

ja vektora sākumpunkts ir koordinātu sākumpunktā, tad tā koordinātas var iegūt, no beigu punkta koordinātām atņemot sākumpunkta koordinātas.

Parādīsim, ka tāpat var rīkoties arī vispārīgā gadījumā.

<u>Teorēma.</u> Vektora abscisu (ordinātu) iegūst, no tā beigu punkta abscisas (ordinātas) atņemot sākuma punkta abscisu (ordinātu).

Piemērs.

Ja koordinātu plaknē doti punkti M (1; 1) un N (4; 3), tad $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{(4-1; 3-1)} = \overrightarrow{(3; 2)}$, skat. 60. zīm.

Pierādījums.

▼ Pieņemsim, ka doti punkti M (x_1; y_1) un N (x_2; y_2). Tad $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{(x_1; y_1)}$ un $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{(x_2; y_2)}$. Tā kā $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$ (trijstūra likums), tad

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{(x_2; y_2)} - \overrightarrow{(x_1; y_1)} = \overrightarrow{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}, \text{ k.b.j. } \blacktriangle$$

Piemērs.

Karlsons atrodas plaknes punktā A (4; 13). Katru minūti viņš pārvietojas par vektoru $\overrightarrow{(3; 2)}$. Kurā punktā Karlsons atradīsies pēc 1 stundas?

Atrisinājums.

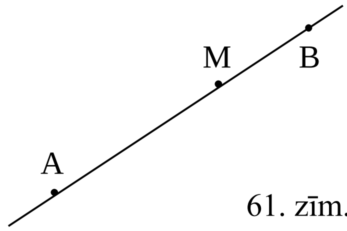
Apzīmēsim Karlsona atrašanās vietas pēc $1, 2, 3, \ldots, 60$ minūtēm attiecīgi ar $K_1; K_2; \ldots; K_{60}$.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $\overrightarrow{AK_1} = \overrightarrow{K_1K_2} = \overrightarrow{K_2K_3} = \ldots = \overrightarrow{K_{58}K_{59}} = \overrightarrow{K_{59}K_{60}} = \overrightarrow{(3; 2)}$.

Tātad $\overrightarrow{AK_{60}} = \overrightarrow{AK_1} + \overrightarrow{K_1K_2} + \ldots + \overrightarrow{K_{58}K_{59}} + \overrightarrow{K_{59}K_{60}} = 60 \cdot \overrightarrow{(3; 2)} = \overrightarrow{(180; 120)}$.

Tāpēc $\overrightarrow{OK_{60}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK_{60}} = \overrightarrow{(4; 13)} + \overrightarrow{(180; 120)} = \overrightarrow{(184; 133)}$. Tātad Karlsons pēc stundas atradīsies punktā, kura abscisa ir 184 un ordināta ir 133.

Piemērs.
Plkst. 12^{00} Karlsons atradās punktā A (33; 65), bet plkst. 13^{00} punktā B (93; 185). Šajā laikā viņš pārvietojās no A uz B pa taisni ar nemainīgu ātrumu. Kurā punktā Karlsons atradās plkst. 12^{35}?
Atrisinājums.



61. zīm.

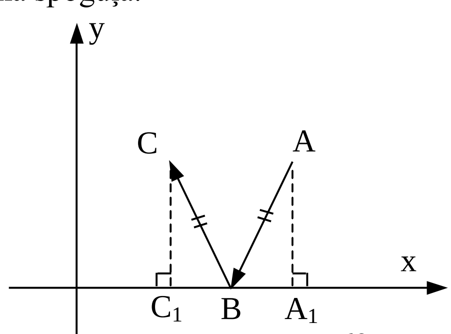
Apzīmēsim meklējamo punktu ar M. Tā kā Karlsons pārvietojas pa nogriezni AB ar konstantu ātrumu, tad viņa noietais ceļš proporcionāls laikam; tāpēc $\frac{AM}{AB}=\frac{35}{60}$ un $AM=\frac{7}{12}\cdot AB$. Tā kā vektori $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{AB}$ ir kolineāri un vienādi vērsti, tad no vienādības $AM=\frac{7}{12}\cdot AB$ seko $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{12}\cdot\overrightarrow{AB}$. Saskaņā ar šajā apakšpunktā pierādīto teorēmu

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(93-33;185-65)}=\overrightarrow{(60;120)}$, tāpēc $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{12}\cdot\overrightarrow{(60;120)}=(35;70)$. No šejienes

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{(33;65)}+\overrightarrow{(35;70)}=\overrightarrow{(68;135)}.$$

Tātad Karlsons plkst. 12^{35} atradās punktā M (68; 135), ko arī vajadzēja aprēķināt.

Piemērs.
Plaknē novietotas divas savstarpēji perpendikulāras taisnes – spoguļi. Gaismas stars vispirms atstarojas no viena spoguļa, pēc tam – no otra saskaņā ar atstarošanās likumu „krītošais un atstarojošais stars veido ar spoguli vienādus leņķus”. Kāds pēc divkārtējās atstarošanās ir stara virziens, salīdzinot ar sākotnējā stara virzienu?
Atrisinājums.
Ieviesīsim koordinātu sistēmu tā, lai koordinātu asis būtu uzdevumā minētās „spoguļtaisnes”.
Aplūkosim atstarošanos no viena spoguļa.



62. zīm.

Izvēlēsimies uz stara pirms atstarošanās vektoru $\overrightarrow{AB}$, bet pēc atstarošanās vektoru $\overrightarrow{BC}$ tā, ka $AB = BC$. No tā, ka $\angle ABA_1 = \angle CBC_1$, seko, ka $\Delta CC_1B = \Delta AA_1B$, tātad $BC_1 = BA_1$ un $CC_1 = AA_1$. Bez tam vektori $\overrightarrow{A_1B}$ un $\overrightarrow{BC_1}$ ir kolineāri un vienādi vērsti, tāpēc $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{BC_1}$. Līdzīgi konstatējam, ka $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{C_1C}$.

Redzam, ka vektoram $\overrightarrow{BC}$ salīdzinājumā ar vektoru $\overrightarrow{AB}$ abscisa saglabājusies, bet ordināta mainījusies uz pretējo. Līdzīgi pierādām, ka pēc atstarošanās no otra spoguļa stara virziena vektora ordināta nemainīsies, bet abscisa mainīsies uz pretējo. Tātad pēc abām atstarošanām stara virziena vektora abas koordinātas mainījušās uz pretējo, tātad arī pats vektors mainījies uz pretējo.
Tātad stars pēc abām atstarošanām maina savu virzienu uz pretējo sākotnējam virzienam.

2.4.2.4. Par vektoriālā pieraksta priekšrocībām un trūkumiem

52. lpp. mēs no viena vienādojuma

$$(1-y)\vec{b} + \frac{y}{4}\vec{c} = \frac{2x}{3}\vec{b} + \frac{x}{3}\vec{c},$$

kas satur mainīgos x un y un kā koeficientus – vektorus $\vec{b}$ un $\vec{c}$, spējām viennozīmīgi atrast mainīgo x un y vērtības, sastādot lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1-y = \dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{x}{3} \end{cases}.$$

Tas bija krasā pretrunā ar mūsu līdzšinējo pieredzi, ka lineāram vienādojumam ar **skaitliskiem** koeficientiem un 2 mainīgajiem ir vai nu bezgalīgi daudzi, vai neviens atrisinājums.

Vektoru pieraksts koordinātu formā izskaidro šo šķietami negaidīto faktu. Ja $\vec{a} = \overrightarrow{(a_x; a_y)}$ un $\vec{b} = \overrightarrow{(b_x; b_y)}$, tad ***viena vektoru vienādība*** $\vec{a} = \vec{b}$ ***ietver sevī divas skaitliskas vienādības*** – starp $\vec{a}$ un $\vec{b}$ abscisām un starp $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ordinātām; var sacīt, ka vienādība $\vec{a} = \vec{b}$ ir ekvivalenta ar vienādību sistēmu

$$\begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \end{cases}.$$

Līdzīgs „mehānisms” bija pamatā minētajam atrisinājumam. Tikai tur no vektoriālās vienādības mēs ieguvām nevis skaitliskas vienādības starp vektoru koordinātām, bet skaitliskas vienādības, kas izsacīja vektoru komponenšu vienādības $\vec{b}$ un $\vec{c}$ virzienos.
Kā redzams, vektora jēdziens ļauj matemātiskus apgalvojumus pierakstīt īsāk; skaidrs, ka **viena** vienādība starp vektoriem ir pārskatāmāka nekā **divas** skaitliskas vienādības. Tomēr par šo ērtību (kā par visu dzīvē) ir jāmaksā. Ar skaitliskām vienādībām mēs varam izdarīt ļoti daudzas operācijas: saskaitīt tās vai atņemt vienu no otras, reizināt vienu ar otru, dalīt vienu ar otru, dalīt

abas puses ar nenulles skaitli utt. Turpretī vektoriālas vienādības mēs gan mākam saskaitīt, atņemt un reizināt ar skaitli, bet nemākam reizināt (tiesa, to iemācīsimies vēlāk) un nemākam dalīt ne vienu ar otru, ne ar nenulles vektoru (to var darīt tikai ļoti specifiskos izņēmuma gadījumos, un mēs tādas iespējas neaplūkosim). Tāpēc katrā konkrētā gadījumā, izšķiroties starp vektoriālu pieraksta formu un pierakstu ar vairākām skaitliskām vienādībām, jāizvērtē visi plusi un mīnusi. ▲

Pārbaudi pats sevi!

1. Vienības vektori $\vec{e}_1$ un $\vec{e}_2$ atrodas uz asīm Ox un Oy un vērsti šo asu virzienos. Uzraksti
   a) vektoru, ko apzīmē ar $\overrightarrow{(3;4)}$!
   b) vektoru, ko apzīmē ar $\overrightarrow{(x;y)}$!
2. Pieņemsim, ka $\overrightarrow{MN}=(p;q)$. Pieraksti vektora $\overrightarrow{MN}$ abscisu un ordinātu!
3. Vai vienādu vektoru abscisas var atšķirties viena no otras? Bet ordinātas?
4. Kāda ir $\vec{0}$ a) abscisa, b) ordināta?
5. Kādas skaitliskas vienādības izriet no vektoru vienādības $\overrightarrow{(k, l)}=\overrightarrow{(r, s)}$?
6. Formulē teorēmu par darbībām ar vektoriem koordinātu formā.
7. Uzraksti vienādības, kas izsaka teorēmu par darbībām ar vektoriem koordinātu formā.
8. Kādas ir vektora $\overrightarrow{MN}$ koordinātas, ja tā galapunkti ir M (1; 7) un N (3; 6)?
9. Formulē teorēmu par vektora koordinātu izteikšanu ar tā galapunktu koordinātām!

Uzdevumi.

1. Pieraksti koordinātu formā 63. zīm. attēlotos vektorus!
2. Atliec no punkta (3; 4) vektorus $\overrightarrow{(3;1)}$; $\overrightarrow{(-2;0)}$; $\overrightarrow{(0;5)}$; $\overrightarrow{(-1;-3)}$; $\overrightarrow{(0;0)}$!
3. Aprēķini
   a) $\overrightarrow{(2;11)}+\overrightarrow{(5;4)}$
   b) $\overrightarrow{(3;-3)}-\overrightarrow{(4;1)}$
   c) $2\cdot\overrightarrow{(6;5)}$
   d) $0\cdot\overrightarrow{(4;-5)}$
   e) $\overrightarrow{(2;7)}-3\cdot\overrightarrow{(1;0)}+4\cdot\overrightarrow{(3;2)}$
   f) $-\overrightarrow{(8;-2)}$
4. Pieraksti kā vienu vektoru izteiksmi
$$\overrightarrow{(x_1;y_1)}-2\cdot\overrightarrow{(x_2;y_2)}+\overrightarrow{(3;7)}$$
5. Atrisini vienādojumu

$$\overrightarrow{(x-3;\ y+1)}+\overrightarrow{(2;\ 3)}=\overrightarrow{(2y+1;\ x-1)}$$

6. Kāds ir nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai vektori

$\overrightarrow{(x_1;\ y_1)}, \overrightarrow{(x_2;\ y_2)}, \ldots, \overrightarrow{(x_n;\ y_n)}$, uzzīmēti cits citam galā veidotu noslēgtu līniju?

7. Pa taisni vienmērīgi rāpo skudra. Plkst. 10^{00} tā atradās punktā A (13; 21), plkst. 15^{00} punktā B (73; -99). Kādā punktā tā atradās plkst. 17^{30}?

8. Kvadrāta ABCD virsotnes atrodas punktos A (2; 1), B (2; 5), C (6; 5), D (6; 1). Punkts S ir kvadrāta centrs. Uz stara AS ņemts tāds punkts K, ka $AK = 13 \cdot AS$. Atrast K koordinātas.

9. Trīs paralelograma virsotnes atrodas punktos (2; 4), (3; 8) un (7; 9). Kur var atrasties ceturtā virsotne?

10. Trīs paralelograma virsotnes atrodas punktos ar veselām koordinātām. Pierādi, ka arī ceturtā virsotne atrodas punktā ar veselām koordinātām.

11.* Pierādi: regulāra piecstūra virsotnes visas vienlaicīgi nevar atrasties punktos ar veselām koordinātām.

12.* Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Izliekta piecstūra visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs. Pierādi: piecstūra iekšpusē atrodas vismaz viena rūtiņu virsotne.

13.[k] **(Minkovska teorēma).** Izliektas figūras laukums lielāks par 4, un tās simetrijas centrs ir punktā (0; 0). Pierādīt, ka figūras iekšpusē atrodas vismaz vēl 2 citi punkti ar veselām koordinātām.

3. RĀDIUSVEKTORS

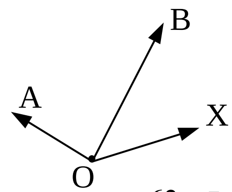
Taisnleņķa koordinātu sistēmā koordinātu sākumpunkts (0; 0) spēlē īpašu lomu – ar koordinātu palīdzību tiek raksturots katra punkta novietojums attiecībā pret sākumpunktu un caur to ejošajām asīm. Līdzīgi, lietojot rādiusvektora jēdzienu, viens punkts tiek izvēlēts kā īpašs punkts; to sauc par ***polu***.

3.1. Rādiusvektora definīcija un īpašības.

Pieņemsim, ka punkts O nosaukts par polu.

Definīcija. *Vektoru $\overrightarrow{OA}$ sauc par punkta A rādiusvektoru attiecībā pret punktu O. Ja ir skaidrs, par kādu polu tiek runāts, tad $\overrightarrow{OA}$ sauc vienkārši par punkta A rādiusvektoru.*

Tātad visi rādiusvektori iziet no viena un tā paša punkta – pola; 63. zīm. attēloti punktu A, B, X rādiusvektori.



63. zīm.

Skaidrs, ka paša pola rādiusvektors ir nulles vektors $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$.
Atzīmēsim trīs svarīgākās rādiusvektora īpašības. To pierādījumi ir acīmredzami un tiek atstāti lasītājam patstāvīgam darbam.

1. Divi punkti sakrīt tad un tikai tad, ja to rādiusvektori ir vienādi:

$$A \text{ un } B \text{ sakrīt} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$$

2. Katriem diviem punktiem X un Y

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$$

(likums „gals mīnus sākums”)

3. Ja par polu O izvēlas koordinātu sākumpunktu un ja punkta A koordinātas ir A (x; y), tad $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{(x; y)}$. ***Arī otrādi, ja*** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{(x; y)}$, ***tad punkta A koordinātas ir A (x; y).***

Otrā īpašība ļauj jebkuru plaknes vektoru izsacīt ar rādiusvektoru palīdzību. Tātad rādiusvektori dod vēl vienu iespēju visus vektorus izteikt standartceļā (pirmā iespēja, ar kuru iepazināmies, bija vektora izteikšana ar divu nekolineāru vektoru palīdzību).
Pirmā īpašība nozīmē to, ka ***rādiusvektors viennozīmīgi apraksta vietu plaknē*** – savu galapunktu.
Tā kā ar vektoriem var veikt darbības – saskaitīšanu, reizināšanu ar skaitli utt. – tad mēs iegūstam iespējas algebriskā ceļā risināt jautājumus par punktu atrašanās vietu plaknē.
Trešā īpašība dod iespēju pāriet no plaknes punktu apraksta ar rādiusvektoru palīdzību uz aprakstu ar koordinātu palīdzību un otrādi.
Parādīsim rādiusvektora lietošanas piemēru uzdevumu risināšanā.

Piemērs.
Plaknē atzīmēti n punkti. Daži no tiem savienoti ar taisnes nogriežņiem. Uz katra no nogriežņiem vienā galā uzzīmēta bultiņa, pārvēršot to par vektoru. Zināms, ka katrā no minētajiem n punktiem ieiet tikpat daudz vektoru, cik no tā iziet. Pierādīt, ka visu vektoru summa ir $\vec{0}$.
Atrisinājums.
Izsacīsim ***katru*** no uzdevumā minētajiem vektoriem ar tā galapunktu rādiusvektoriem: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$. Ja S – patvaļīgs no minētajiem n punktiem, tad rādiusvektors $\overrightarrow{OS}$ parādās ar „+” zīmi katru reizi, kad S ir kāda uzdevumā minētā vektora beigu punkts, un rādiusvektors $\overrightarrow{OS}$ parādās ar „-” zīmi katru reizi, kad S ir kāda uzdevumā minētā vektora sākumpunkts. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $\overrightarrow{OS}$ saīsinās. Tā kā saīsinās visu uzdevumā minēto punktu rādiusvektori, tad sākotnējo vektoru summa tiešām ir $\vec{0}$.

Piemērs.
Paralelograma ABCD trīs virsotņu koordinātas ir A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3). Atrast virsotnes D koordinātas.

Atrisinājums.

Ja par polu izvēlamies koordinātu sākumpunktu, tad $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{(x_1;y_1)}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{(x_2;y_2)}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{(x_3;y_3)}$. Tāpēc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{(x_2-x_1;y_2-y_1)}$. Ja $ABCD$ – paralelograms, tad $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Tāpēc $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{(x_2-x_1;y_2-y_1)}$ un

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{(x_2-x_1;y_2-y_1)}=\overrightarrow{(x_3;y_3)}-\overrightarrow{(x_2-x_1;y_2-y_1)}=\overrightarrow{(x_3-x_2+x_1;y_3-y_2+y_1)}$, ko arī vajadzēja aprēķināt.

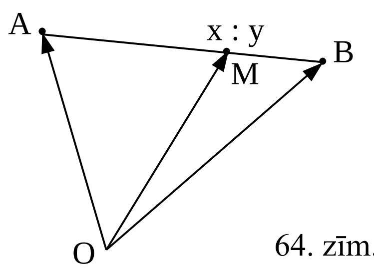
3.2. Nogriežņa iekšējā punkta rādiusvektors.

Ļoti daudzus uzdevumus var atrisināt, balstoties uz sekojošu rezultātu.

TEORĒMA PAR NOGRIEŽŅA IEKŠĒJĀ PUNKTA RĀDIUSVEKTORU (NIPR teorēma).

Ja M ir tāds nogriežņa AB punkts, ka $AM:MB=x:y$, tad

$\overrightarrow{OM}=\frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{y}{x+y}\cdot\overrightarrow{OA}$ (skat. 64. zīm.)



64. zīm.

Pierādījums.

▼ Ja $AM:MB=x:y$, tad $AM:AB=x:(x+y)$, tātad $AM=\frac{x}{x+y}\cdot AB$. Tā kā $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{AB}$ ir kolineāri un vienādi vērsti, tad no iegūtās vienādības starp nogriežņu garumiem seko vienādība starp vektoriem

$$\overrightarrow{AM}=\frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{x}{x+y}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

Tāpēc

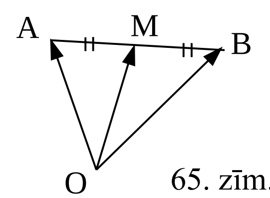
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{x}{x+y}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{x}{x+y}\right)\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{y}{x+y}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{OB}, \text{ k.b.j.}$$ ▲

Piemēri.

1. Ja M – nogriežņa AB viduspunkts, tad $AM : MB = 1 : 1$. Ievietojot formulā (1) m = n = 1, iegūstam šādu svarīgu rezultātu:

TEORĒMA PAR NOGRIEŽŅA VIDUSPUNKTA RĀDIUSVEKTORU.
Nogriežņa viduspunkta rādiusvektors ir abu tā galapunktu rādiusvektoru vidējais aritmētiskais: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ (skat. 65. zīm.)



65. zīm.

2. Pieņemsim, ka ΔABC mediānu krustpunkts ir M. Apzīmēsim malas BC viduspunktu ar A_1. Saskaņā ar nupat pierādīto

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right). \qquad (1)$$

Tā kā mediānu krustpunkts dala mediānu attiecībā 2 : 1, skaitot no virsotnes, tad $AM : MA_1 = 2 : 1$. Tāpēc

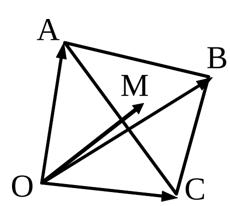
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}. \qquad (2)$$

No formulām (1) un (2) seko

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

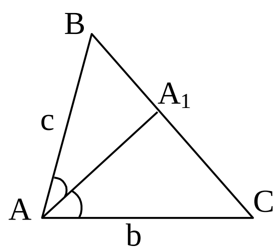
TEORĒMA PAR TRIJSTŪRA MEDIĀNU KRUSTPUNKTA RĀDIUSVEKTORU.
Trijstūra mediānu krustpunkta rādiusvektors ir visu trijstūra virsotņu rādiusvektoru vidējais aritmētiskais:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$



66. zīm.

3. Ja ΔABC leņķa A bisektrise krusto malu BC punktā A_1, tad, kā zināms no planimetrijas kursa, $BA_1 : A_1C = BA : AC$ (skat. 67. zīm.) Ja apzīmējam AB = c, AC = b, tad $BA_1 : A_1C = c : b$ un $\overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ (salīdzini ar piemēru 53. lpp.)



67. zīm.

Komentārs.

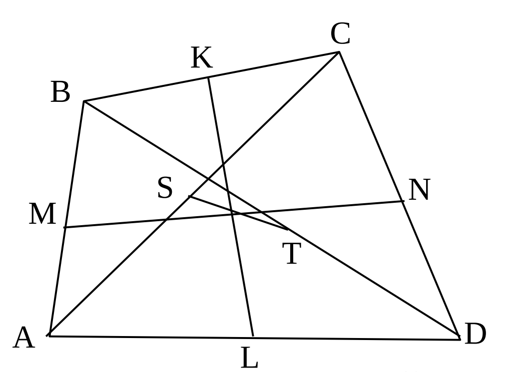
Formulā $\overrightarrow{OM} = \frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{y}{x+y}\cdot\overrightarrow{OA}$ pirmajā brīdī vērojams šķietams „neloģiskums”: nogrieznis x satur punktu A, bet koeficients ar skaitītāju x tiek reizināts ar vektoru $\overrightarrow{OB}$, un otrādi. Tas dažreiz rada grūtības formulu atcerēties. Nedaudz padomājot, var saprast, ka tieši šāda formulas struktūra ir loģiska. Jo lielāks koeficients $\frac{x}{x+y}$ un tātad mazāks koeficients $\frac{y}{x+y}$,jo punkts M ir tuvāk galapunktam B, un tāpēc loģiski pieņemt, ka $\overrightarrow{OB}$ iespaido $\overrightarrow{OM}$ aizvien spēcīgāk, bet vektors $\overrightarrow{OA}$ - aizvien mazāk, kas arī izriet no rādiusvektora $\overrightarrow{OM}$ formulas.
Parādīsim, kā teorēmu par nogriežņa iekšējā punkta rādiusvektoru lieto uzdevumu risināšanā.

Piemērs.

Četrstūra ABCD malu AB, BC, CD, DA viduspunkti ir attiecīgi M, K, N, L, bet diagonālu AC un BD viduspunkti ir S un T. Pierādīt, ka nogriežņi MN, KL un ST krustojas vienā punktā un dalās tajā uz pusēm.

Atrisinājums.

Izsacīsim uzdevumu citiem vārdiem: jāpierāda, ka nogriežņu NM, KL, ST viduspunkti sakrīt.



68. zīm.

Pierādīsim to, parādot, ka šo viduspunktu rādiusvektori ir vienādi.
Izvēlēsimies par O patvaļīgu punktu. Tad saskaņā ar NIPR teorēmu vai teorēmu par nogriežņa viduspunkta rādiusvektoru

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \qquad (6)$$

Apzīmēsim MN viduspunktu ar V_1. Tad $\overrightarrow{OV_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$, izmantojot formulas (1) un (3).

Līdzīgi no (2) un (4) iegūstam formulu

$$\overrightarrow{OV_2}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\right),$$

bet no (5) un (6) – formulu

$$\overrightarrow{OV_3}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right),$$

kur V_2 un V_3 – atbilstoši KL un ST viduspunkti.

Tā kā $\overrightarrow{OV_1}=\overrightarrow{OV_2}=\overrightarrow{OV_3}$, tad saskaņā ar rādiusvektora 1. īpašību sakrīt arī punkti V_1, V_2, V_3, k.b.j.

Definīcija. ***Punktu, kura rādiusvektors ir*** $\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$***, sauc par četrstūra ABCD centroīdu.***

No pierādītā seko, ka centroīda stāvoklis nav atkarīgs no rādiusvektoru sākumpunkta izvēles: centroīds ir četrstūra viduslīniju krustpunkts, un caur to iet arī nogrieznis, kas savieno diagonāļu viduspunktus. Turklāt gan viduslīnijas, gan diagonāļu viduspunktus savienojošais nogrieznis centroīdā dalās uz pusēm.
Pieņemsim: jāpierāda, ka vienā punktā krustojas vairāki nogriežņi, par kuru galapunktiem mums pieejama plaša informācija (tāda, kas ļauj izsacīt šo galapunktu rādiusvektorus). Tad pierādījuma gaita var būt līdzīga iepriekšējā piemēra risinājumam: uz katra nogriežņa izvēlas pa punktam un

pierāda, ka izvēlēto punktu rādiusvektori sakrīt, izsakot tos ar attiecīgo nogriežņu galapunktu rādiusvektoriem.

Piemērs.
Pierādīt, ka 4 nogriežņi, katrs no kuriem izliektā četrstūrī savieno 1 virsotni ar pārējo triju virsotņu veidotā trijstūra mediānu krustpunktu, krustojas vienā punktā.

Atrisinājums.
Atšķirībā no iepriekšējā uzdevuma mums nav zināms, kādā attiecībā šie nogriežņi krustpunktā dalās (un vai tie vispār dalās vienā un tai pašā attiecībā).
Apzīmēsim četrstūri ar ABCD, bet ΔBCD mediānu krustpunktu ar A_1. Ja punkts A_0 dala nogriezni AA_1 attiecībā x : 1, tad

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{x}{x+1}\cdot\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{OA}.$$

Tā kā saskaņā ar 66. lpp. pierādīto

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right), \text{ tad iegūstam}$$

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{x}{3(x+1)}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{x}{3(x+1)}\cdot\overrightarrow{OC} + \frac{x}{3(x+1)}\cdot\overrightarrow{OD} \qquad (1)$$

Līdzīgi apzīmējot ACD, ABD un ABC mediānu krustpunktus ar B_1, C_1 un D_1 un ņemot uz nogriežņiem BB_1, CC_1, DD_1 attiecīgi punktus B_0, C_0, D_0, kas dala šos nogriežņus attiecībā y : 1, z : 1, t : 1 iegūstam

$$\overrightarrow{OB_0} = \frac{y}{3(y+1)}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{1}{y+1}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{y}{3(y+1)}\cdot\overrightarrow{OC} + \frac{y}{3(y+1)}\cdot\overrightarrow{OD} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OC_0} = \frac{z}{3(z+1)}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{z}{3(z+1)}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{z+1}\cdot\overrightarrow{OC} + \frac{z}{3(z+1)}\cdot\overrightarrow{OD} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{OD_0} = \frac{t}{3(t+1)}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3(t+1)}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{t}{3(t+1)}\cdot\overrightarrow{OC} + \frac{1}{t+1}\cdot\overrightarrow{OD} \qquad (4)$$

Formulās (1) – (4) jāizvēlas tādas x, y, z, t vērtības, lai būtu $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OD_0}$; tad punkti A_0, B_0, C_0, D_0 sakritīs.

Visvienkāršāk panākt, lai $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OD_0}$, varētu tad, ja formulās (1) – (4) izdotos izveidot vienādus koeficientus gan pie $\overrightarrow{OA}$, gan pie $\overrightarrow{OB}$, gan pie $\overrightarrow{OC}$, gan pie $\overrightarrow{OD}$. Nedaudz aplūkojot (1) – (4), redzam, ka tas iegūstams, ja x = y = z = t = 3. Tad

$$\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OD_0} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

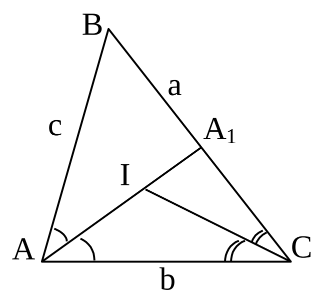
Esam pierādījuši vajadzīgo. Piedevām esam ieguvuši, ka visi minētie nogriežņi iet caur ABCD centroīdu un dalās tajā attiecībā 3 : 1, skaitot no četrstūra virsotnes.

Komentārs „par uzminēšanu”.
Lasītājam var nepatikt tas, ka risinājuma pēdējā daļā mēs x, y, z, t vērtības uzminējām, nevis viennozīmīgi ieguvām aprēķinu ceļā. Pirmkārt, jāatzīmē, ka veiksmīga minēšana un hipotēžu izvirzīšana, kuras pēc tam tiek stingri pamatotas, vispār ir visa pētniecības darba pamatā. Otrkārt, ***iedomāties***, ka jāņem $x = y = z = t = 3$, nav ne ar ko ne labāk, ne sliktāk nekā, piemēram, ģeometrijas uzdevuma klasiskā risinājumā ***iedomāties*** novilkt perpendikulu no dota punkta pret dotu taisni; gan vienu, gan otru mēs nolemjam darīt pēc tam, kad esam pārdomājuši uzdevuma risinājuma gaitā radušos situāciju (formulas (1) – (4) mūsu gadījumā vai atbilstošo zīmējumu klasiskajā risinājumā).

Piemērs.
Trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, bet malu garumi atbilstoši $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Pierādīt, ka

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Atrisinājums.
(skat. 69. zīm.)



69. zīm.

Mēs zinām, ka bisektrise dala trijstūra pretējo malu tieši proporcionāli sānu malām, t.i., $BA_1 : A_1C = c : b$. Tāpēc

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

No vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} BA_1 + A_1C = a \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

viegli atrast (kaut vai ar ievietošanas metodi), ka $A_1C = \frac{ab}{b+c}$. Ievērosim, ka CI ir ΔA_1CA bisektrise; tāpēc $AI : IA_1 = AC : A_1C = b : \frac{ab}{b+c} = 1 : \frac{a}{b+c} = (b+c) : a$. Tāpēc

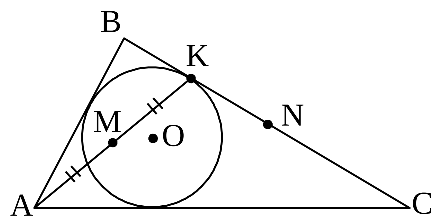
$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b+c}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OA_1} \qquad (2)$$

Ievietojot formulā (2) formulu (1), iegūstam

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=$$
$$=\frac{a}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{OC}\text{, k.b.j.}$$

Piemērs.*

Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir O, un tā pieskaras malai BC punktā K. Nogriežņa AK viduspunkts ir M, malas BC viduspunkts ir N. Pierādīt, ka punkti M, O, N atrodas uz vienas taisnes (skat. 70. zīm.)



70. zīm.

Atrisinājums.

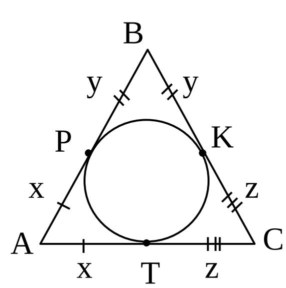
Izsacīsim punktu N, O, M rādiusvektorus, par to sākumpunktu izvēloties virsotni A. Tad ar šo rādiusvektoru palīdzību izsacīsim vektorus $\overrightarrow{MO}$ un $\overrightarrow{ON}$ un parādīsim, ka tie ir kolineāri. Līdz ar to uzdevums būs atrisināts.

Lietosim apzīmējumus AB = c, AC = b, BC = a, a + b + c = 2p (p - pusperimetrs).

1. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ (1) (skat. 27. lpp.)

2. $\overrightarrow{AO}=\frac{a}{2p}\cdot\overrightarrow{AA}+\frac{b}{2p}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{2p}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b}{2p}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{2p}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) (izmantojām iepriekšējā piemēra rezultātu un to, ka $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$).

3. Acīmredzot $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. Lai atrastu $\overrightarrow{AK}$, mums jāzina, kādā attiecībā K dala malu BC. Noskaidrosim to (skat. 71. zīm.):



71. zīm.

ja AP = AT = x, BP = BK = y, CT = CK = z, tad iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y=c \\ x+z=b, \\ y+z=a \end{cases}$$

no kurienes viegli iegūt $x=\dfrac{b+c-a}{2}=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$. Tātad $BK:KC=y:z=(p-b):(p-c)$, un iegūstam

$$\overrightarrow{AK}=\frac{p-c}{p-b+p-c}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{p-b+p-c}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{p-c}{a}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{a}\cdot\overrightarrow{AC},$$

tātad

$$\overrightarrow{AM}=\frac{p-c}{2a}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{2a}\cdot\overrightarrow{AC} \qquad (3)$$

4. No formulām (1), (2) un (3) seko

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}=$$

$$=\frac{b}{2p}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{2p}\cdot\overrightarrow{AC}-\left(\frac{p-c}{2a}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{2a}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=$$

$$=\frac{ab-p(p-c)}{2ap}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{ac-p(p-b)}{2ap}\cdot\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{2ap}\left[ab-\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\right]\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2ap}\left[ac-\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\right]\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{8ap}\left[4ab-(a+b+c)(a+b-c)\right]\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8ap}\left[4ac-(a+b+c)(a-b+c)\right]\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{8ap}\left[\left(c^2-(a-b)^2\right)\overrightarrow{AB}+\left(b^2-(a-c)^2\right)\overrightarrow{AC}\right]=$$

$$=\frac{1}{8ap}\left[(c+a-b)(c-a+b)\overrightarrow{AB}+(b+a-c)(b-a+c)\overrightarrow{AC}\right]=$$

$$=\frac{c-a+b}{8ap}\left[(c+a-b)\overrightarrow{AB}+(b+a-c)\overrightarrow{AC}\right] \qquad (4)$$

un

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\frac{b}{2p}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{2p}\overrightarrow{AC}\right)=$$

$$=\frac{1}{2p}\left[(p-b)\overrightarrow{AB}+(p-c)\overrightarrow{AC}\right]=$$

$$=\frac{1}{2p}\left[\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\overrightarrow{AC}\right]=$$

$$= \frac{1}{4p}\left[(a+c-b)\overrightarrow{AB}+(a+b-c)\overrightarrow{AC}\right] \qquad (5)$$

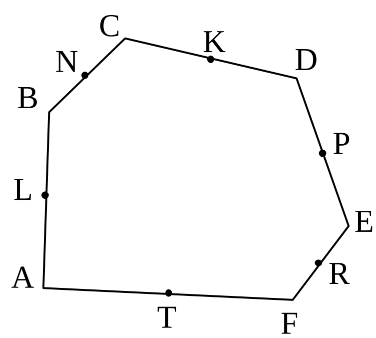
No formulām (4) un (5) redzam, ka abi vektori $\overrightarrow{MO}$ un $\overrightarrow{ON}$ ir kolineāri vienam un tam pašam vektoram $(a+c-b)\overrightarrow{AB}+(a+b-c)\overrightarrow{AC}$, tātad tie ir kolineāri arī savā starpā (jāatceras, ka tie ir nenulles vektori). Papildus no (4) un (5) seko, ka $MO:ON = \frac{c-a+b}{8ap}:\frac{1}{4p} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{2p-2a}{2a} = (p-a):a$.

Piemērs.

Izliekta sešstūra ABCDEF pēc kārtas ņemtu malu viduspunkti ir L, N, K, P, R, T. Pierādīt, ka trijstūru LKR un NPT mediānu krustpunkti sakrīt.

Atrisinājums.

Izvēlēsimies plaknē patvaļīgu punktu O. Tad (skat. 72. zīm.)



72. zīm.

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right) \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right) \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right) \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}\right) \qquad (6)$$

Ja M_1 un M_2 – attiecīgi ΔLKR un ΔNPT mediānu krustpunkti, tad no teorēmas par mediānu krustpunkta rādiusvektoru

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OR}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right).$$

Līdzīgi $\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OT}\right)=$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right).$$

Tā kā $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}$, tad punkti M_1 un M_2 sakrīt, k.b.j.

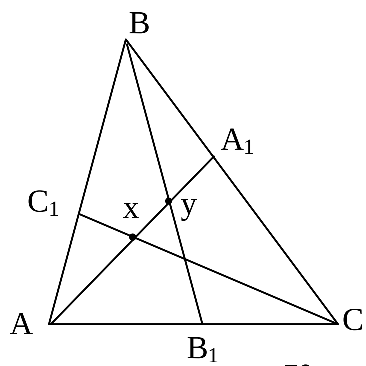
Piemērs*(Čevas teorēma).

Uz ΔABC malām AB, BC, CA attiecīgi ņemti iekšēji punkti C_1, A_1, B_1. Pierādīt: taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja pastāv sakarība

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (1)$$

Atrisinājums.

(skat. 73. zīm.)



73. zīm.

Apzīmēsim AA_1 krustpunktus ar BB_1 un CC_1 attiecīgi ar Y un ar X. Taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja sakrīt punkti X un Y jeb ja sakrīt to rādiusvektori.

Izvēlēsimies par polu virsotni A un apzīmēsim $AC_1 : C_1B = \gamma$, $BA_1 : A_1C = \alpha$ un $CB_1 : B_1A = \beta$. Izsacīsim $\overrightarrow{AX}$ un $\overrightarrow{AY}$ ar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, α, β un γ.

No $AC_1 : C_1B = \gamma : 1$ seko, ka $AC_1 : AB = \gamma : (\gamma + 1)$, tāpēc $\overrightarrow{AC_1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \overrightarrow{AB}$. Tā kā punkts X atrodas uz nogriežņa C_1C, tad eksistē tādi p un q, ka

$$\overrightarrow{AX} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AC_1} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{AC} = \frac{p}{p+q} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1}\overrightarrow{AB} + \frac{q}{p+q} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Apzīmējot $\frac{p}{p+q} = k_1$, iegūstam vienādību

$$\overrightarrow{AX} = k_1 \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1}\overrightarrow{AB} + \left(1 - k_1\overrightarrow{AC}\right) \qquad (2)$$

No otras puses, $\overrightarrow{AX}$ ir kolineārs vektoram $\overrightarrow{AA_1}$, tāpēc $\overrightarrow{AX} = k_2 \overrightarrow{AA_1}$. Savukārt $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AC}$, jo $BA_1 : A_1C = \alpha : 1$. Iegūstam

$$\overrightarrow{AX} = k_2 \cdot \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{AB} + k_2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AC} \qquad (3)$$

Formulas (2) un (3) dod divus veidus, kā $\overrightarrow{AX}$ izsacīts ar nekolineāru vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$ lineāras kombinācijas palīdzību. Tā kā iespējama tikai viena tāda lineāra kombinācija, tad iegūstam vienādības

$$k_1 \frac{\gamma}{\gamma+1} = k_2 \frac{1}{\alpha+1}$$

$$1 - k_1 = k_2 \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

Saskaitot vienādojumus, iegūstam $1 - \frac{k_1}{\gamma+1} = k_2$;

tālāk ar ievietošanas metodi iegūstam $k_1 = \frac{\gamma+1}{\alpha\gamma+\gamma+1}$ un

$$k_2 = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\alpha\gamma+\gamma+1} \qquad (4).$$

Apzīmējot ar k_3 tādu skaitli, ka $\overrightarrow{AY} = k_3 \cdot \overrightarrow{AA_1}$, līdzīgi iegūstam, ka

$$k_3 = \frac{\alpha+1}{\alpha\beta+\beta+1} \qquad (5)$$

(formulu (5) var iegūt arī tieši no formulas (4), aizstājot α ar $\frac{1}{\alpha}$ un γ ar $\frac{1}{\beta}$ - padomājiet paši, kāpēc!)

Vektori $\overrightarrow{AX}$ un $\overrightarrow{AY}$ ir vienādi tad un tikai tad, ja $k_2 = k_3$, jo $\overrightarrow{AX} = k_2 \cdot \overrightarrow{AA_1}$ un $\overrightarrow{AY} = k_3 \cdot \overrightarrow{AA_1}$.

Nosacījums $k_2 = k_3$ ekvivalenti pārveidojas par

$$\frac{\gamma(\alpha+1)}{\alpha\gamma+\gamma+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha\beta+\alpha+1}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha\gamma+\gamma+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+1}$$

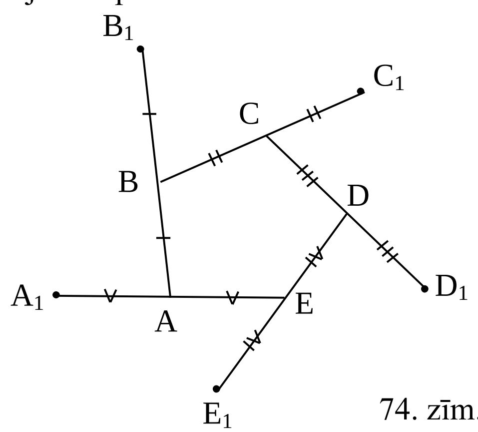
$$\alpha\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma = \alpha\gamma+\gamma+1$$

$$\alpha\beta\gamma = 1, \text{ k.b.j.}$$

Čevas teorēma pierādīta.

Piemērs.*

Plaknē bija dots izliekts piecstūris ABCDE. Uz stariem AB, BC, CD, DE, EA atlikti attiecīgi punkti B_1, C_1, D_1, E_1, A_1 tā, ka $AB_1 = 2AB$, $BC_1 = 2BC$, $CD_1 = 2CD$, $DE_1 = 2DE$ un $EA_1 = 2EA$. Pēc tam piecstūris ABCDE nodzēsts, un palikuši tikai punkti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Kā ar cirkuļa un lineāla palīdzību atjaunot piecstūri ABCDE?



74. zīm.

Atrisinājums.

Izvēlamies plaknē patvaļīgu punktu O. Tad no teorēmas par nogriežņa viduspunkta rādiusvektoru

$$2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA_1} \qquad (1)$$

$$2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} \qquad (2)$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} \qquad (3)$$

$$2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD_1} \qquad (4)$$

$$2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE_1} \qquad (5)$$

Vektori $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OD_1}$, $\overrightarrow{OE_1}$ mums ir zināmi. Ja pratīsim konstruēt vektorus $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, uzdevums būs atrisināts.

Izsacīsim meklējamos vektorus ar zināmo vektoru palīdzību.

No (1) – (5) iegūstam

$$\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1}$$

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB_1}$$
$$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1}$$
$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD_1}$$
$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OE_1}$$

No šejienes

$$\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} = 2\left(2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB_1}\right) - \overrightarrow{OA_1} = 4\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} =$$
$$= 4\left(2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1}\right) - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = 8\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} =$$
$$= 8\left(2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD_1}\right) - 4\overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = 16\overrightarrow{OD} - 8\overrightarrow{OD_1} - 4\overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} =$$
$$= 16\left(2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OE_1}\right) - 8\overrightarrow{OD_1} - 4\overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} =$$
$$= 32\overrightarrow{OE} - 16\overrightarrow{OE_1} - 8\overrightarrow{OD_1} - 4\overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1}$$

No vienādības

$$\overrightarrow{OE} = 32\overrightarrow{OE} - 16\overrightarrow{OE_1} - 8\overrightarrow{OD_1} - 4\overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1}$$

viegli iegūstam

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{31}\left(16\overrightarrow{OE_1} + 8\overrightarrow{OD_1} + 4\overrightarrow{OC_1} + 2\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OA_1}\right) \qquad (6)$$

Tā kā vektori $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OD_1}$, $\overrightarrow{OE_1}$ ir zināmi, tad vienādība (6) ļauj konstruēt vektoru $\overrightarrow{OE}$, tātad arī punktu E. Pēc tam atrodam A kā EA_1 viduspunktu, B kā AB_1 viduspunktu utt. Var arī iegūt rādiusvektoru $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ utt. formulas, kas analogas (6), un rīkoties saskaņā ar tām.

Piemērs.

Koordinātu plaknē doti punkti A $(x_1; y_1)$ un B $(x_2; y_2)$. Punkts K ir tāds nogriežņa AB iekšējs punkts, ka AK : KB = 1 : k. Atrast punkta K koordinātas.

Atrisinājums.

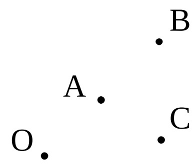
Aplūkosim visu punktu rādiusvektorus no koordinātu sākumpunkta. Tad $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{(x_1; y_1)}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{(x_2; y_2)}$ un

$$\overrightarrow{OK} = \frac{k}{k+1}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{k+1}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{(x_1; y_1)} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{(x_2; y_2)} = \overrightarrow{\left(\frac{kx_1 + x_2}{k+1}; \frac{ky_1 + y_2}{k+1}\right)}.$$

Tāpēc punkta K abscisa ir $\frac{kx_1 + x_2}{k+1}$, bet K ordināta ir $\frac{ky_1 + y_2}{k+1}$.

Pārbaudi pats sevi!

1. Ko sauc par punkta A rādiusvektoru attiecībā pret polu O?
2. Uzzīmē un pieraksti punktu A, B, C, O rādiusvektorus, ja pols ir O (skat. 75. zīm.)



75. zīm.

3. Pols O un punkti A un B atrodas uz vienas taisnes. Ko var teikt par punktu A un B rādiusvektoriem?
4. Vai dažādiem punktiem var būt vienādi rādiusvektori?
5. Pieraksti punkta A (x; y) rādiusvektoru, ja par polu izvēlas koordinātu sākumpunktu1
6. Izsaki vektoru $\overrightarrow{MN}$ ar punktu M un N rādiusvektoriem.
7. Izsaki nogriežņa AB viduspunkta rādiusvektoru ar tā galapunktu un A un B rādiusvektoriem!
8. Punkts X ir nogriežņa AB iekšējs punkts un dala to attiecībā AX : XB = m : n. Izsaki punkta X rādiusvektoru ar punktu A un B rādiusvektoriem!
9. Izsaki ΔABC mediānu krustpunkta rādiusvektoru ar tā virsotņu A, B, C rādiusvektoriem!

Uzdevumi.

1. Dots, ka $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Pierādi, ka $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$. Pierādi apgriezto apgalvojumu. Formulē abus apgalvojumus bez vektoru palīdzības.

2. Apskatām patvaļīgu izliektu piecstūri. Pierādīt, ka visas 15 taisnes, kas savieno

   a) kādas malas viduspunktu ar pārējo triju punktu veidotā trijstūra mediānu krustpunktu,

   b) kādas diagonāles viduspunktu ar pārējo triju punktu veidotā trijstūra mediānu krustpunktu,

   c) kādu virsotni ar pārējo četru virsotņu veidotā četrstūra centroīdu (skat. 68. lpp), krustojas vienā punktā.

3.* Formulējiet un pierādiet līdzīgu apgalvojumu sešstūriem (31 taisne), septiņstūriem (63 taisnes) utt.

4. Dots paralelograms ABCD. Punkti K, M, N, L ir atbilstoši malu AB, BC, CD, DA iekšēji punkti; $ML \parallel AB$, $KN \parallel AD$, ML un KN krustojas punktā S. Pierādīt, ka S, paralelograma ABCD centrs un četrstūra KMNL viduslīniju krustpunkts atrodas uz vienas taisnes.

5. Dots ΔABC. Uz stariem AB, BC, CA ņemti punkti A_1, B_1, C_1 tā, ka $AA_1 = 2AB$, $BB_1 = 2BC$, $CC_1 = 2CA$. Pierādīt, ka trijstūru ABC un $A_1B_1C_1$ mediānu krustpunkti sakrīt.

6. Dots ΔABC. No punkta O atlikti vektori $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{CA}$. Pierādīt, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ mediānu krustpunkts ir O.

7. Pierādīt: četrstūris ABCD ir paralelograms tad un tikai tad, ja $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

8.* No 64 šaha galdiņa rūtiņām 32 nokrāsotas baltas un 32 – melnas tā, ka katrā rindā un katrā kolonā ir 4 baltas un 4 melnas rūtiņas. Balto rūtiņu centrus apzīmēsim ar $B_1, B_2, \ldots, B_{32}$, melno rūtiņu centrus – ar $M_1, M_2, \ldots, M_{32}$. Pierādiet, ka

$$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_{32}}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\ldots+\overrightarrow{OM_{32}}.$$

9.* ABCD – četrstūris, G – tā centroīds (skat. 68. lpp.), O – patvaļīgs punkts. Pierādīt, ka tā četrstūra viduslīniju krustpunkts, kura virsotnes ir ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA mediānu krustpunkti, atrodas uz taisnes OG.

10. Dots ΔABC un patvaļīgs punkts O_1. Attēlojam to simetriski vispirms pret A, iegūto punktu – attiecībā pret B, iegūto punktu – pret C, iegūto – pret A, iegūto – pret B, iegūto – pret C. Pierādīt, ka pēc sestās attēlošanas iegūtais punkts sakrīt ar O_1.

11. Dots ΔABC un punkts O. Ar A_1, B_1, C_1 apzīmējam punktus, kas simetriski punktam O attiecībā pret malu BC, AC, AB viduspunktiem. Pierādīt, ka:

a) taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā Q,

b) O, Q un ΔABC mediānu krustpunkts atrodas uz vienas taisnes.

12.[k] Dota n posmu slēgta lauzta līnija (n – nepāra skaitlis) $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Tās posmu viduspunktus savienojam pēc kārtas, pa vienam izlaižot (A_1A_2 viduspunktu savieno ar A_3A_4 viduspunktu, A_2A_3 viduspunktu – ar A_4A_5 viduspunktu, …, $A_{n-1}A_n$ viduspunktu – ar A_2A_3 viduspunktu). Ar iegūto slēgto lauzto līniju atkārto tādu pašu operāciju, utt. Pierādīt, ka

a) pēc 2 soļiem, ja n = 5,

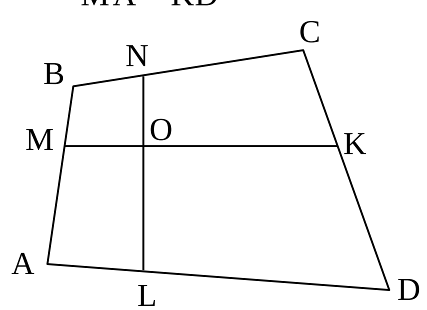
b) pēc 3 soļiem, ja n =7,

c) pēc soļu skaita, kas atkarīgs tikai no n, nevis no sākotnējās lauztās līnijas mēs iegūsim lauztu līniju, kas līdzīga sākotnējai.

13. Trijstūrī ABC punkti M un N dala malas AB un AC attiecīgi attiecībās 3 : 2 un 4 : 3. Izsacīt $\overrightarrow{AO}$ ar $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$ palīdzību, ja O dala nogriezni MN attiecībā 2 : 1.

14. Punkti M un N dala ΔABC malas AB un AC vienādās attiecībās. Savukārt punkti K un L dala nogriežņus MN un BC vienādās attiecībās. Pierādīt, ka punkti A, K, L atrodas uz vienas taisnes.

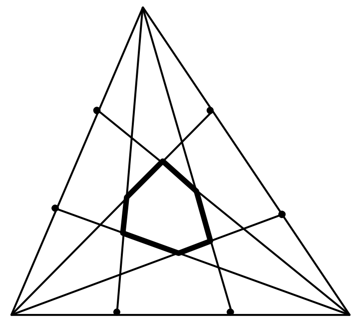
15. Dots, ka $\frac{BN}{NC}=\frac{AL}{LD}=\alpha$ un $\frac{BM}{MA}=\frac{CK}{KD}=\beta$ (76. zīm.)



76. zīm.

Pierādīt, ka $\frac{MO}{OK}=\alpha$ un $\frac{NO}{OL}=\beta$.

16. Caur katru trijstūra virsotni novilktas taisnes, kas sadala pretējo malu 3 vienādās daļās (77. zīm.)



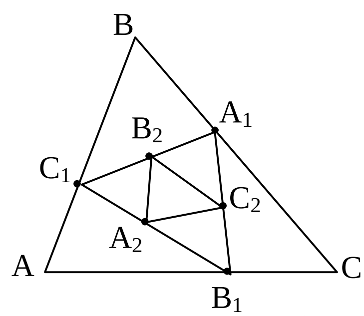
77. zīm.

Pierādīt, ka šo taišņu veidotā sešstūra diagonāles, kas savieno tā pretējās virsotnes, krustojas vienā punktā.

17. Punkti A_1, B_1, C_1 atrodas uz ΔABC malām, bet punkti A_2, B_2, C_2 – uz $\Delta A_1B_1C_1$ malām (78. zīm.) bez tam pastāv vienādības

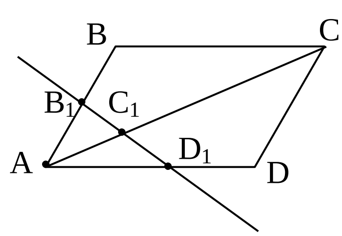
$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{A_1B_2}{B_2C_1} = \frac{C_1A_2}{A_2B_1} = \frac{B_1C_2}{C_2A_1}.$$

Pierādīt, ka $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$.



78. zīm.

18. Taisne t krusto paralelograma ABCD malas un diagonāli atbilstoši punktos B_1, D_1, C_1 (skat. 79. zīm.)

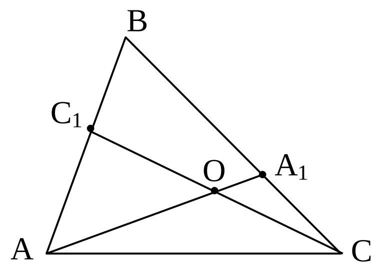


79. zīm.

Pie tam $\frac{AB}{AB_1} = x$, $\frac{AC}{AC_1} = y$, $\frac{AD}{AD_1 = z}$.

Pierādīt, ka x + z = y.

19. Uz ΔABC malām AB un BC ņemti atbilstoši punkti C_1 un B_1 tā, ka $\frac{AC_1}{C_1B} = x$ un $\frac{BA_1}{A_1C} = y$. Taisnes AA_1 un CC_1 krustojas punktā O (80. zīm.)



80. zīm.

Aprēķināt ΔAOC un ΔABC laukumu attiecību.

20. Punkti M un N ir nogriežņu AB un CD viduspunkti. Pierādīt, ka A, MN viduspunkts un ΔBCD mediānu krustpunkts atrodas uz vienas taisnes.

22. Dots ΔABC un punkts O. Ar A_1, B_1, C_1 apzīmējam attiecīgi trijstūru OBC, OAC, OAB mediānu krustpunktus. Pierādīt, ka ΔABC mediānu krustpunkts, $\Delta A_1B_1C_1$ mediānu krustpunkts un O atrodas uz vienas taisnes.

23. Trijstūra ABC bisektrises ir AA_1, BB_1 un CC_1. Nogriežņi AA_1 un B_1C_1 krustojas punktā X. Caur X novilkta taisne paralēli BC, kas krusto AB un AC attiecīgi punktos Y un Z. Pierādīt, ka $YZ = \frac{1}{2}(BY + CZ)$.

24.* Trijstūra ABC iekšienē ņemts punkts O tā, ka $\overrightarrow{AO} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$. Caur O vilkta taisne, kas krusto AB un AC attiecīgi punktos B_1 un C_1.
Pierādīt, ka

$$\frac{L(AB_1C_1)}{L(ABC)} \geq 4xy .$$

25.* Uz ΔABC malas B ņemts punkts Z, kas nav šīs malas viduspunkts. Trijstūru ABZ un ACZ apriņķu centri ir atbilstoši O_1 un O_2. Pierādīt, ka tās trijstūra mediānas vidusperpendikuls, kura iziet no virsotnes A, dala O_1O_2 uz pusēm.

26.* Izmantojot Čevas teorēmu (skat. 74. lpp.), pierādi sekojošus apgalvojumus:

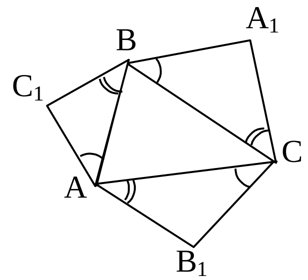
a) katrā trijstūrī nogriežņi, kas savieno virsotnes ar punktiem, kuros ievilktā riņķa līnija pieskaras pretējām malām, krustojas vienā punktā,

b) katrā trijstūrī nogriežņi, kas savieno virsotnes ar punktiem, kuros atbilstošās pievilktās riņķa līnijas pieskaras pretējām malām, krustojas vienā punktā,

c) ΔABC malu AB, BC, CA viduspunkti ir atbilstoši C_1, A_1, B_1; uz šīm malām ņemti atbilstoši vēl punkti C_2, A_2, B_2. Dots, ka AA_2, BB_2, CC_2 krustojas vienā punktā. Pierādīt, ka taisnes, kas iet caur A_1 un AA_2 viduspunktu, B_1 un BB_2 viduspunktu, C_1 un CC_2 viduspunktu, krustojas vienā punktā,

d) katrā šaurleņķu trijstūrī augstumi krustojas vienā punktā,

e) taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā (81. zīm.)



81. zīm.

27.* Izmantojot 24. uzdevuma rezultātu, pierādīt:

a) taisne, kas iet caur trijstūra mediānu krustpunktu, dala to daļās, kuru laukumu attiecība pieder intervālam $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$;

b) ja trijstūrī ABC pusperimetru apzīmējam ar p, CA = b, CB = a un taisne, kas vilkta caur iecentru, krusto malas CA un CB, tad tās atšķeltā trijstūra laukums nav mazāks par $\frac{ab}{p^2} \cdot L(ABC)$.

3.3. *Trijstūra augstumu krustpunkta rādiusvektors.*

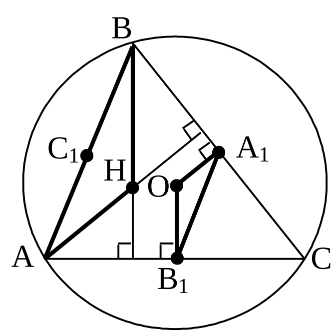
Iepriekš attēlotajos uzdevumos rādiusvektorus varēja atlikt no jebkura punkta (daudzos gadījumos mēs šo punktu pat nenorādījām), un rādiusvektoru sākumpunkta specifiska izvēle tika izdarīta tikai atrisinājuma vienkāršošanas labad (piemēram, 71. lpp.). ***Šajā punktā apskatāmajos uzdevumos rādiusvektoru sākumpunkts (pols) būs daudzstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs.***

TEORĒMA PAR TRIJSTŪRA AUGSTUMU KRUSTPUNKTA RĀDIUSVEKTORU.

Ja ΔABC augstumu krustpunkts ir H un apcentrs ir O, tad $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Pierādījums.

▼ Aplūkosim gadījumu, kad ΔABC ir šaurleņķu. Tad gan H, gan O atrodas tā iekšpusē. Apzīmēsim malu BC, AC un AB viduspunktus attiecīgi ar A_1, B_1 un C_1.



82. zīm.

Tad $\angle OA_1B_1 = \angle HAB$ kā leņķi ar savstarpēji paralēlām malām; līdzīgi $\angle OB_1A_1 = \angle HBA$. Tāpēc $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta HAB$. Tā kā $A_1B_1 = \frac{1}{2}BA$, tad arī $OB_1 = \frac{1}{2}HB$, tāpēc $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$; līdzīgi $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ un $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$, tāpēc

$$2\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1}\right) = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} \qquad (1)$$

Ievērosim, ka $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH}$ un $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$; saskaitot šīs vienādības un ņemot vērā (1), iegūstam

$$3 \cdot \overrightarrow{OH} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + 2\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1}\right) \qquad (2)$$

Savukārt $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1A}$ un $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1C}$; tāpēc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1C} = 2\overrightarrow{OB_1}$, jo $\overrightarrow{B_1A}$ un $\overrightarrow{B_1C}$ ir pretēji vektori. Līdzīgi iegūstam $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC_1}$ un $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA_1}$. Saskaitot trīs pēdējās iegūtās vienādības, iegūstam

$$2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 2\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) \qquad (3)$$

No (2) un (3) seko, ka $3 \cdot \overrightarrow{OH} = 3\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, no kurienes izriet vajadzīgais.▲

Teorēmas pierādījumu taisnleņķa un platleņķa trijstūra gadījumā atstājam veikt lasītājam patstāvīgi.
Parādīsim šīs teorēmas pielietojumus uzdevumu risināšanā. Īsuma labad trijstūra augstumu krustpunktu sauksim par tā ***ortocentru***.

Piemērs.
Pierādīt, ka katrā trijstūrī apcentrs, ortocentrs un mediānu krustpunkts atrodas uz vienas taisnes.
Atrisinājums.
Apzīmēsim ΔABC apcentru, ortocentru un mediānu krustpunktu attiecīgi ar O, H un M. Tā kā $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ un $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (skat. 66. lpp.), tad $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. Tāpēc M pieder nogrieznim OH un dala to attiecībā OM : MH = 1 : 2, kā redzams 83. zīm.

83. zīm.

Piemērā minēto taisni sauc par ***Eilera taisni.***

Piemērs.
Riņķa līnijā ievilkts četrstūris ABCD. Trijstūru ABC, ABD, ACD, BCD augstumu krustpunktus apzīmējam attiecīgi ar H_D, H_C, H_B un H_A. Pierādīt, ka četrstūri ABCD un $H_AH_BH_CH_D$ ir vienādi.

Dosim divus atrisinājumus.

1. atrisinājums.

Apzīmēsim riņķa līnijas centru ar O. Saskaņā ar nupat pierādīto $\overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Tāpēc nogriežņa AH_A viduspunkta A_1 rādiusvektors ir $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH_A}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$. Līdzīgi pierāda, ka arī BH_B, CH_C, DH_D viduspunktu rādiusvektori ir $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$. Tātad nogriežņu AH_A, BH_B, CH_C, DH_D viduspunkti sakrīt. Tāpēc ABCD un $H_AH_BH_CH_D$ ir viens otram simetriski (attiecībā pret punktu, kura rādiusvektors ir $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$), tātad vienādi.

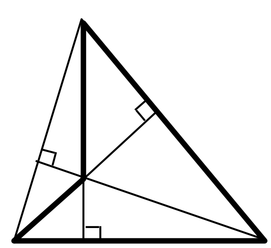
2. atrisinājums.
Apzīmēsim riņķa līnijas centru ar O. Saskaņā ar ortocentra rādiusvektora formulu

$$\overrightarrow{H_AH_B} = \overrightarrow{OH_B} - \overrightarrow{OH_A} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{AB}.$$

Līdzīgi $\overrightarrow{H_BH_C} = -\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{H_CH_D} = -\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{H_DH_A} = -\overrightarrow{DA}$. No šejienes arī izriet vajadzīgais: $H_AH_BH_CH_D$ malas vienādas ar atbilstošajām ABCD malām un veido tādus pašus (tikai pretēji vērstus) leņķus kā atbilstošās ABCD malas.

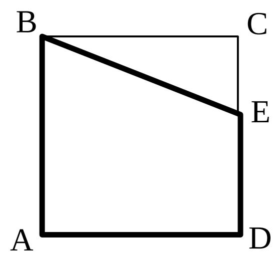
<u>Definīcija.</u> Par četrstūra ABCD augstumu sauc nogriezni, kas savieno vienu no četrstūra virsotnēm ar pārējo triju virsotņu veidotā trijstūra augstumu krustpunktu.

Vispārīgā gadījumā četrstūrim ir 4 augstumi. Ja kāda no virsotnēm sakrīt ar pārējo triju veidotā trijstūra augstumu krustpunktu (skat., piem., 84'. zīm.), tad šāda īpašība piemīt arī pārējām virsotnēm; tad šādam četrstūrim augstuma jēdzienu neievieš. Atzīmēsim, ka tas iespējams tikai ļoti specifiskos ieliektu četrstūru gadījumos.



84'. zīm.

Skaidrs, ka vispārīgā gadījumā četrstūra augstumi nekrustojas vienā punktā. Pierādiet patstāvīgi, ka, piemēram, četrstūra ABED augstumi (84''. zīm.) nekrustojas vienā punktā, ja ABCD – kvadrāts.



84''. zīm.

Ja četrstūra augstumi krustojas vienā punktā, tad šo punktu sauc par četrstūra augstumu krustpunktu jeb ortocentru, bet pašu četrstūri – par ortocentrisku četrstūri.
Nupat aplūkotā piemēru rezultātu var formulēt šādi.

Teorēma. ***Katrs ievilkts četrstūris ir ortocentrisks, un tā augstumi ortocentrā dalās uz pusēm.***

Piemērs.

Uz riņķa līnijas atzīmēti 6 punkti $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Trijstūra $A_mA_nA_l$ mediānu krustpunktu apzīmēsim ar M_{mnl}, bet augstumu krustpunktu – ar H_{mnl}. Pierādīt: visas 20 iespējamās taisnes $M_{ijk}H_{rst}$ (i, j, k, r, s, t – dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 6) krustojas vienā punktā.

Atrisinājums.

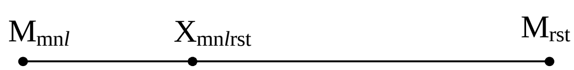
Apzīmēsim riņķa līnijas centru ar O. Tad

$$\overrightarrow{OM}_{mnl} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}_m + \overrightarrow{OA}_n + \overrightarrow{OA}_l\right) \qquad (1)$$

un

$$\overrightarrow{OH}_{rst} = \overrightarrow{OA}_r + \overrightarrow{OA}_s + \overrightarrow{OA}_t \qquad (2)$$

Apskatīsim punktu X_{mnlrst}, kas dala nogriezni $M_{mnl}H_{rst}$ attiecībā 1 : 3:



85. zīm.

Šī punkta rādiusvektors ir $\overrightarrow{OX}_{mnlrst} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OM}_{mnl} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OH}_{rst}$; saskaņā ar formulām (1) un (2) viegli iegūstam, ka $\overrightarrow{OX}_{mnlrst} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}_m + \overrightarrow{OA}_n + \overrightarrow{OA}_l + \overrightarrow{OA}_r + \overrightarrow{OA}_s + \overrightarrow{OA}_t\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4 + \overrightarrow{OA}_5 + \overrightarrow{OA}_6\right) \qquad (3)$$

Formula (3) izsaka viena un tā paša punkta rādiusvektoru neatkarīgi no tā, kuri trīs no naturāliem skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6 ņemti par indeksiem m; n; *l* un kuri – par indeksiem r, s, t. Tāpēc visi nogriežņi $M_{mnl}H_{rst}$ krustojas vienā punktā, ko arī vajadzēja pierādīt. Papildus esam ieguvuši, ka tie visi dalās attiecībā 1 : 3, skaitot no mediānu krustpunkta.

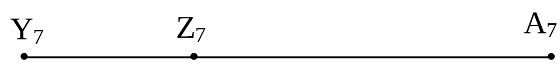
Piemērs.*

Uz riņķa līnijas doti 7 punkti. Atmetot vienu no tiem, paliek seši punkti, kuriem var apskatīt iepriekšējā piemērā minētās taisnes; tās krustojas vienā punktā. Tā kā var atmest jebkuru no 7 punktiem, šādā ceļā varam iegūt 7 dažādus punktus, katrā no kuriem krustojas pa 20 taisnēm. Pierādīt, ka šie 7 punkti visi atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Atrisinājumi.

Apzīmēsim sākotnējās riņķa līnijas centru ar O, bet uz tās izvietotos 7 punktus ar $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Izslēgsim uz laiku no apskates punktu A_7; pārējie 6 punkti saskaņā ar iepriekšējo piemēru nosaka 20 taisnes, kas krustojas punktā ar rādiusvektoru $\overrightarrow{OY_7} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_6}\right)$.

Apskatām nogriezni Y_7A_7 un uz tā punktu Z_7, kas to sadala attiecībā 1 : 4 (skat. 86. zīm.) :



86. zīm.

Tad $\overrightarrow{OZ_7} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OY_7} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OA_7} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7}\right)$.

Līdzīgā ceļā definējot punktus $Z_6, Z_5, \ldots, Z_2, Z_1$, iegūstam, ka $\overrightarrow{OZ_1} = \overrightarrow{OZ_2} = \ldots = \overrightarrow{OZ_7}$. Tātad visi punkti $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ sakrīt; apzīmēsim to kopīgo atrašanās vietu ar Z.

Tātad nogriežņi $Y_1A_1, Y_2A_2, \ldots, Y_7A_7$ visi krustojas punktā Z un dalās tajā attiecībā 1 : 4. Tāpēc septiņstūris $Y_1Y_2\ldots Y_7$ ir homotētisks septiņstūrim $A_1A_2\ldots A_7$ (ar homotētijas centru Z un koeficientu $-\frac{1}{4}$).

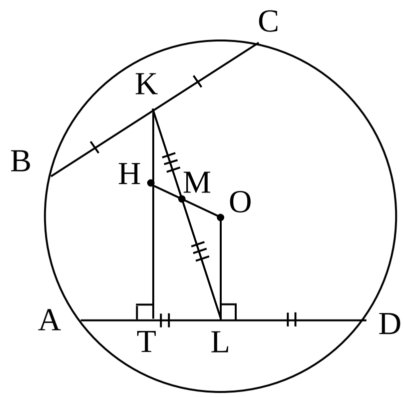
Tā kā ap $A_1A_2\ldots A_7$ ir apvilkta riņķa līnija, tad no šejienes seko, ka arī ap $Y_1Y_2\ldots Y_7$ var apvilkt riņķa līniju (ar 4 reizes mazāku rādiusu nekā sākotnējā).

Piemērs.

Uz riņķa līnijas doti 4 punkti. No katru divu punktu veidotās hordas viduspunkta novilkts perpendikuls pret abu pārējo punktu veidoto hordu. Pierādīt, ka visi 6 perpendikuli krustojas vienā punktā.

Atrisinājums.

Apzīmēsim dotos punktus ar A, B, C, D. Apzīmēsim hordas BC viduspunktu ar K, hordas AD viduspunktu ar L, KL viduspunktu ar M; ar T apzīmējam tā perpendikula pamatu, kas no K novilkts pret AD. Riņķa līnijas centrs ir O, bet taisnes OM krustpunkts ar KT ir H (skat. 87. zīm.)



87. zīm.

Tad $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)$ un

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right) \qquad (1)$$

Tā kā MK =ML (pēc konstrukcijas), $\angle HMK=\angle OML$ (krustleņķi) un $\angle HKM=\angle OLM$ (iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm), tad $\Delta HMK=\Delta OML$.

Tāpēc OM = HM, tātad $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OM}$ un

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right) \qquad (2)$$

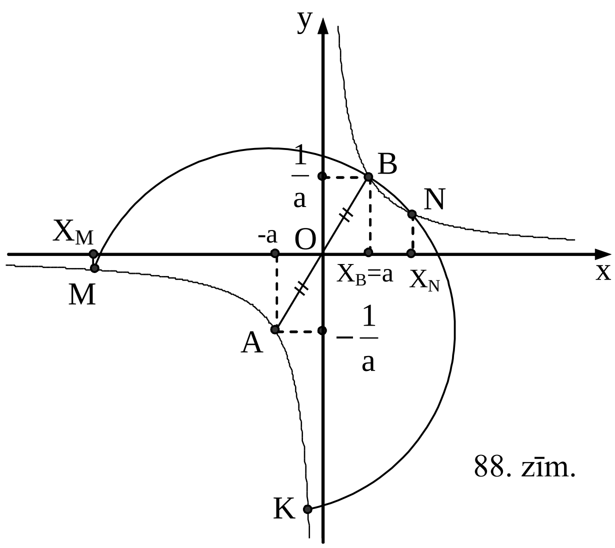
Tā kā visi punkti A, B, C, D formulā (2) ietilpst „līdztiesīgi", tad, konstruējot punktu H līdzīgā ceļā uz perpendikula, kas vilkts no AB viduspunkta pret CD, no AC viduspunkta pret BD utt., iegūsim tādu pašu formulu (2). Tas nozīmē, ka punkts, kura rādiusvektors ir $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$, atrodas uz visiem sešiem apskatāmajiem perpendikuliem; tātad visi šie 6 perpendikuli iet caur vienu punktu, k.b.j.

Atceroties piemēru 84. lpp., redzam, ka caur šo pašu punktu iet arī 4 nogriežņi, kas savieno vienu ievilktā četrstūra virsotni ar pārējo triju virsotņu veidotā trijstūra augstumu krustpunktu, t.i., punkts H ir četrstūra ABCD augstumu krustpunkts (skat. 84. lpp.) Atceroties, ka M ir četrstūra ABCD centroīds (skat. 68. lpp.), iegūstam rezultātu, kas analogs teorēmai par Eilera taisni (skat. 83. lpp.):

Teorēma. ***Ievilktā četrstūrī centroīds dala uz pusēm nogriezni starp apcentru un ortocentru.***

Piemērs.*

Uz hiperbolas $y=\frac{1}{x}$ zariem ņemti divi punkti A un B, kas simetriski viens otram attiecībā pret koordinātu sākumpunktu O. Ar centru A un rādiusu AB novilkta riņķa līnija, kas krusto hiperbolu bez punkta B vēl punktos M, N un K (skat. 88. zīm.)



88. zīm.

Pierādīt, ka ΔMNK ir regulārs.

Atrisinājums.

Apgalvojums, ka ΔMNK ir regulārs, ir līdzvērtīgs apgalvojumam, ka ΔMNK augstumu krustpunkts H un apvilktā riņķa centrs A sakrīt, jeb, kas ir tas pats, ka $\overrightarrow{AH} = \vec{0}$. Tā kā $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK}$, tad pietiek pierādīt, ka $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

Pētīsim vektorus $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AK}$ koordinātu formā. Apzīmēsim punkta B abscisu ar a; tad tā ordināta ir $\frac{1}{a}$, jo B atrodas uz funkcijas $y = \frac{1}{x}$ grafika. Tā kā A un B ir simetriski attiecībā pret koordinātu sākumpunktu ,tad A koordinātas ir $A\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$.

Riņķa līnijas vienādojums ir

$$(x - (-a))^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{a}\right)\right)^2 = AB^2 \qquad (1)$$

Tā kā $AB^2 = (Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 + (2a)^2$, tad (1) pārveidojas par

$$x^2 + 2xa + a^2 + y^2 + \frac{2y}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{a^2} + 4a^2 \qquad (2)$$

Punkti M, N, K atrodas uz riņķa līnijas, tātad to koordinātas apmierina (2). Tie atrodas arī uz hiperbolas ,tātad to koordinātas apmierina vienādojumu

$$y = \frac{1}{x} \qquad (3)$$

Meklēsim punktu M, N, K abscisas x_M, x_N, x_K risinot vienādojumu sistēmu, kas sastāv no vienādojumiem (2) un (3).

Ievietojot $y = \frac{1}{x}$ vienādojumā (2), iegūstam $x^2 + 2xa + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{ax} = \frac{3}{a^2} + 3a^2$, kas pārveidojas par

$$x^4 + 2a \cdot x^3 - \left(\frac{3}{a^2} + 3a^2 \right) \cdot x^2 + \frac{2}{a} \cdot x + 1 = 0 \qquad (4)$$

Tā kā riņķa līnija un hiperbola krustojas 4 punktos M, B, N, K, tad vienādojumam (4) ir četras saknes – punktu M, B, N, K abscisas x_M, x_B, x_N, x_K. Saskaņā ar Vjeta teorēmu 4. pakāpes reducētam vienādojumam šo sakņu summa ir vienāda ar kubiskā locekļa koeficientam pretējo skaitli, t.i.,

$$x_M + x_B + x_N + x_K = -2a \qquad (5)$$

Tā kā $x_B = a$, tad no (4) seko, ka $x_M + x_N + x_K = -3a$, ko var pārrakstīt kā

$$(x_M + a) + (x_N + a) + (x_K + a) = 0 \qquad (6)$$

Bet skaitļi $x_M + a$, $x_N + a$, $x_K + a$ ir attiecīgi vektoru $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AK}$ abscisas ($x_M + a = x_M - (-a)$ utt.)

Tāpēc no (6) seko, ka vektora $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK}$ abscisa ir 0. Līdzīgi iegūst, ka arī šī vektora ordināta ir 0 (vienādojumā (2) ievieto nevis $y = \frac{1}{x}$, bet $x = \frac{1}{y}$ un iegūst (4) analogu vienādojumu, kur x aizstāts ar y). Tātad $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$, k.b.j.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka uz ΔABC Eilera taisnes atrodas arī tā trijstūra apcentrs, kura virsotnes ir ΔABC malu viduspunkti.

2. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā ar rādiusu R. Pierādīt, ka riņķa līnijas, kuru centri ir ΔABC, ΔABD, ΔACD un ΔBCD ortocentros, bet rādiusi vienādi ar R, krustojas vienā punktā.

3. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka 4 riņķa līnijas, kuras iet attiecīgi caur ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD malu viduspunktiem, krustojas vienā punktā.

4. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā.

a) pierādīt, ka punkta A Simpsona taisne attiecībā pret ΔBCD (skat. 45. lpp.) iet caur AH_A viduspunktu, kur H_A ir ΔBCD ortocentrs,

b) pierādīt: ja katrai no ABCD virsotnēm konstruē Simpsona taisni attiecībā pret pārējo virsotņu veidoto trijstūri, tad visas šīs Simpsona taisnes krustojas vienā punktā.

5. Dots, ka M atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas. Punkti M_A, M_B, M_C simetriski punktam M attiecībā pret A, B, C. Pierādīt, ka M_A, M_B, M_C un ΔABC ortocentrs H atrodas uz vienas taisnes.

6.* Vispārināt 85. lpp. piemēra rezultātu gadījumam, ja uz riņķa līnijas atrodas $8, 9, \ldots$ punkti.

7.* Pierādīt, ka caur 85. lpp. piemērā minēto punktu iet arī visas 10 taisnes, kas savieno to riņķa līniju centrus, kuras apvilktas ar $\Delta A_m A_n A_k$ un $\Delta A_r A_s A_t$ malu viduspunktu veidotajiem trijstūriem (m, n, k ,r, s, t – dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 6).

8.* Uz riņķa līnijas atrodas pieci punkti. No katru triju punktu veidotā trijstūra mediānu krustpunkta novilkts perpendikuls pret abu pārējo punktu veidoto hordu. Pierādīt, ka visi šie perpendikuli krustojas vienā punktā.

9.* Uz riņķa līnijas atrodas seši punkti. No katru četru punktu veidotā četrstūra centroīda (skat. 68. lpp.) novilkts perpendikuls pret abu pārējo punktu veidoto hordu. Pierādīt, ka visi šie perpendikuli krustojas vienā punktā.

10.* Atrodiet attiecības, kādās krustpunktā dalās 8. un 9. uzdevumos minētos perpendikuli.

11.* (Tēma patstāvīgiem pētījumiem). Vispārināt 8. un 9. uzdevumos minētos faktus.

12.* (Tēma patstāvīgiem pētījumiem). Pieņemsim, ka riņķa līnijā ievilkts piecstūris ABCDE. Katras četras tā virsotnes veido ortocentrisku četrstūri; tiem kopā ir 5 ortocentri. Kāda ir šo ortocentru veidotās figūras saistība ar sākotnējo piecstūri ABCDE?

13.* (Tēma patstāvīgiem pētījumiem). Vispārināt 12. uzdevuma jautājumu, ņemot citu punktu skaitu uz riņķa līnijas un citu punktu skaitu apakškopās, kurām meklējam ortocentrus.

14.* Dots, ka ΔABC virsotnes pieder hiperbolas $y=\frac{1}{x}$ grafikam. Pierādīt, ka arī ΔABC ortocentrs pieder šim grafikam.

15.* Dots, ka ΔABC virsotnes pieder hiperbolas $y=\frac{1}{x}$ grafikam. Pierādīt, ka ΔABC malu viduspunkti un koordinātu sākumpunkts atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3.4. Taisnes punktu rādiusvektori.

3.4.1. Pamatrezultāti.

Mēs jau atzīmējām 3.2. punktā, ka formula $\overrightarrow{OX}=(1-k)\cdot\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}$, kur $0\le k\le 1$, izsaka nogriežņa AB punktu rādiusvektorus, turklāt katrai k vērtībai atbilst cits AB punkts un otrādi – katram AB punktam atbilst cita k vērtība. Parametram k pieaugot no 0 līdz 1, punkts X slīd pa nogriezni AB no A līdz B.

Izrādās, ka līdzīgā ceļā var aprakstīt arī ***taisnes*** AB punktu rādiusvektorus.

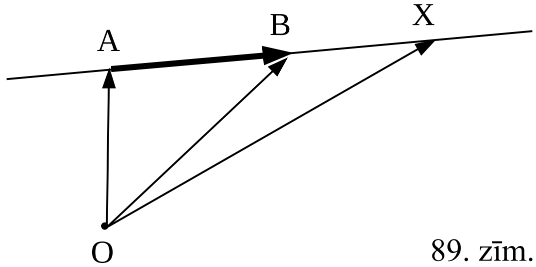
Teorēma. Formula

$$(1)\qquad \overrightarrow{OX}=(1-k)\cdot\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB},$$

kur k – patvaļīgs reāls skaitlis, izsaka taisnes AB punktu rādiusvektorus, turklāt starp parametra k vērtībām un taisnes AB punktiem pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība: katram taisnes AB punktam atbilst tieši viena k vērtība, un katrai k vērtībai atbilst tieši viens taisnes AB punkts.

Pierādījums.

▼ (skat. 89. zīm.)



89. zīm.

Skaidrs, ka katram taisnes AB punktam eksistē tieši viens tāds reāls skaitlis k, ka $\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Ja X sakrīt ar A vai B, tad k = 0 (atbilstoši 1); ja X atrodas starp A un B, tad 0 < k < 1; ja X atrodas „aiz B”, tad k > 1; ja X atrodas „pirms A”, tad k < 0.

Tātad $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}$.

Tātad katram taisnes AB punktam eksistē tāds reāls skaitlis k, ka izpildās (1).
Nupat izklāstītais spriedums parāda vienu ceļu, kā atrast skaitli k formulā (1). Tomēr nav izslēgts, ka eksistē vēl cits ceļš, kas dod citu k vērtību.
Parādīsim, ka tas nav iespējams.
Pieņemsim, ka kādam taisnes AB punktam X vienlaicīgi

(2) $\quad \overrightarrow{OX} = (1-k_1) \cdot \overrightarrow{OA} + k_1 \cdot \overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{OX} = (1-k_2) \cdot \overrightarrow{OA} + k_2 \cdot \overrightarrow{OB}$, kur $k_1 \neq k_2$.

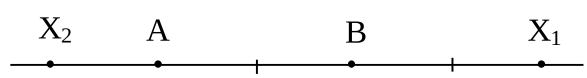
No (2) seko $(1-k_1) \cdot \overrightarrow{OA} + k_1 \cdot \overrightarrow{OB} = (1-k_2) \cdot \overrightarrow{OA} + k_2 \cdot \overrightarrow{OB}$ un tālāk

$$(k_2 - k_1) \cdot \overrightarrow{OA} = (k_2 - k_1) \cdot \overrightarrow{OB}$$

Tā kā $k_2 \neq k_1$, no šīs vienādības seko $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ - pretruna, jo punkti A un B nesakrīt. Tātad teorēma pierādīta.▲

Piemērs.

(skat. 90. zīm.) Ja $AX_1 = 2AB$, tad $k = 2$ (jo $\overrightarrow{AX_1} = 2\overrightarrow{AB}$), tātad $\overrightarrow{OX_1} = -\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OB}$; ja $AX_2 = \frac{1}{2}AB$, tad $k = -\frac{1}{2}$ (jo $\overrightarrow{AX_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$), tātad $\overrightarrow{OX_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, utt.



90. zīm.

Līdz ar nupat iegūto formulu, kas izsaka taisnes punktu rādiusvektorus, dažreiz izdevīgāk lietot arī citu formulu, kurā vektori $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$ ieiet „simetriski”. Apzīmēsim $1-k = \alpha$ un $k = \beta$. Tad $\overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$.
Tātad taisnes AB punktu X rādiusvektorus var izteikt formā

(3) $\quad \overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$, kur

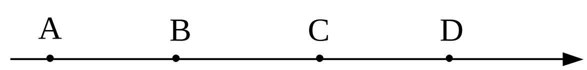
(4) $\quad \alpha + \beta = 1$

Arī otrādi, ja $\overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$, kur $\alpha + \beta = 1$, tad $\overrightarrow{OX} = (1-\beta) \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$, t.i., X ir taisnes AB punkts saskaņā ar iepriekšējo teorēmu.

Izsakot taisnes AB punktu rādiusvektorus saskaņā ar (3) un (4), koeficientiem α un β ir uzskatāma ģeometriska jēga. Lai to noskaidrotu, mums jāievieš ***orientētā garuma jēdziens***.

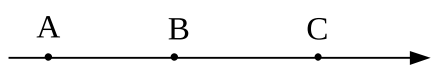
Definīcija. *Ja punkti A un B atrodas uz ass (t.i., taisnes, uz kuras izvēlēts virziens), tad par nogriežņa AB orientēto garumu sauc AB garumu, ja $\overrightarrow{AB}$ vērsums sakrīt ar ass vērsumu, un AB garumu ar mīnusa zīmi, ja $\overrightarrow{AB}$ vērsums ir pretējs ass vērsumam. Nogriežņa AB orientēto garumu apzīmē ar $\overrightarrow{AB}$.*
Ja A un B sakrīt, tad uzskata, ka $\overline{AB} = \overline{AA} = 0$.

Piemērs.
$\overline{AB} = AB,\ \overline{AD} = AD,\ \overline{CB} = -BC,\ \overline{AD} = -\overline{DA}$ (skat. 91. zīm.)



91. zīm.

Piemērs.
Patvaļīgiem trim punktiem A, B, C uz vienas taisnes pastāv sakarība $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (*).
Ja A, B, C atrodas šādā secībā ass virzienā, tad vienādība (*) līdzvērtīga vienādībai AB + BC = AC (skat. 92. zīm.)



92. zīm.

Ja A, B, C uz ass izvietoti secībā B, A, C (skat. 93. zīm.),

93. zīm.

tad vienādība (*) līdzvērtīga vienādībai $(-AB) + BC = AC$ jeb $BC = AB + AC$, kas ir pareiza.
Citus gadījumus pārbauda līdzīgi; atstājam to izdarīt lasītājam patstāvīgi.

<u>Teorēma.</u> *Taisnes AB punkta X rādiusvektors izsakās ar formulu* $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\overline{XB}}{\overline{AB}} \cdot \overrightarrow{OA} + \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Pierādījums.

▼ Tiešām, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \overrightarrow{OA}\left(1 - \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}}\right) + \overrightarrow{OB} \cdot \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} =$

$= \overrightarrow{OA} \cdot \dfrac{\overline{AB} - \overline{AX}}{\overline{AB}} + \overrightarrow{OB} \cdot \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \overrightarrow{OA} \cdot \dfrac{\left(\overline{AX} + \overline{XB}\right) - \overline{AX}}{\overline{AB}} + \overrightarrow{OB} \cdot \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \overrightarrow{OA} \cdot \dfrac{\overline{XB}}{\overline{AB}} + \overrightarrow{OB} \cdot \dfrac{\overline{AX}}{\overline{AB}}$, k.b.j.▲

Piezīme.

Viegli saprast, ka attiecības $\frac{\overline{XB}}{\overline{AB}}$ un $\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}}$ nav atkarīgas no tā, kurš no diviem iespējamiem taisnes AB vērsumiem tiek izvēlēts par ass vērsumu.

Daudzkārt uzdevumu risināšanā noderīgs sekojošs rezultāts, kas simetriskā formā izsaka 3 punktu atrašanos uz vienas taisnes.

Teorēma. ***Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja eksistē tādi skaitļi α, β, γ, kas visi vienlaicīgi apmierina sekojošus nosacījumus:***

a) $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ***,***

b) $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ***,***

c) vismaz viens no skaitļiem α, β, γ nav nulle.

Pierādījums.

▼ 1. Ja A, B, C atrodas uz vienas taisnes un A, B – dažādi punkti, tad $\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1-k) \cdot \overrightarrow{OB}$; tātad

$$(1) \qquad 1 \cdot \overrightarrow{OC} + (-k) \cdot \overrightarrow{OA} + (k-1) \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

Ja visi punkti A, B, C sakrīt, tad

$$(2) \qquad 1 \cdot \overrightarrow{OA} + (-1) \cdot \overrightarrow{OB} + 0 \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

Gan (1), gan (2) ir vajadzīgās vektoriālās vienādības.

2. Pieņemsim, ka $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ un α, β, γ visi vienlaikus nav 0. Varam pieņemt, ka $\alpha \neq 0$. Tad

$$\alpha \cdot \overrightarrow{OA} = -\beta \cdot \overrightarrow{OB} - \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Ievietojot $\alpha = -(\beta + \gamma)$, iegūstam $(\beta + \gamma \neq 0)$

$\overrightarrow{OA} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OB} + (1-k) \cdot \overrightarrow{OC}, k = \frac{\beta}{\beta+\gamma}$. Ja B un C nesakrīt, tad no šīs formulas seko, ka A pieder taisnei BC; ja B un C sakrīt, tad punkti A, B, C noteikti atrodas uz vienas taisnes.

Līdz ar to teorēma pierādīta. ▲

3.4.2. Lietojumi uzdevumu risināšanā.

Piemērs.

Punkts A vienmērīgi kustas pa taisni t_1, bet punkts B – pa taisni t_2. Pierādīt, ka AB viduspunkts arī kustas vienmērīgi pa kādu taisni.

Atrisinājums.

Izvēlamies patvaļīgu polu O. Pieņemsim, ka laika momentā t = 0 punkts A atrodas stāvoklī A_0, bet punkts B – stāvoklī B_0. Pieņemsim, ka punkts A vienā laika vienībā pārvietojas par vektoru

$\vec{a}$, bet punkts B – par vektoru $\vec{b}$. Tad, apzīmējot punktu A un B stāvokļus laika momentā t attiecīgi ar A (t) un B (t), iegūstam $\overrightarrow{OA}(t) = \overrightarrow{OA_0} + \vec{a} \cdot t$, $\overrightarrow{OB}(t) = \overrightarrow{OB_0} + \vec{b} \cdot t$.
Nogriežņa A (t)B (t) viduspunkta V (t) rādiusvektors ir

$$\overrightarrow{OV}(t) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}(t) + \overrightarrow{OB}(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_0} + \vec{a}\,t + \overrightarrow{OB_0} + \vec{b}\,t\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0}\right) + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \cdot t.$$

Iegūtā formula ir tādas taisnes vienādojums, kas iet caur A_0B_0 viduspunktu paralēli vektoram $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; tā kā vienā laika vienībā V pārvietojas par vektoru $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, tad varam secināt, ka V ātruma vektors ir $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Piemērs.
Staru e_1 un e_2 sākumpunkts ir O; p un q – kaut kādas konstantes. Punkti A un B pārvietojas attiecīgi pa e_1 un e_2 tā, ka lielums $\frac{p}{OA} + \frac{q}{OB}$ nemainās. Pierādīt, ka taisne AB visu laiku iet caur vienu fiksētu punktu.
Atrisinājums.
Apzīmēsim nemainīgo lieluma $\frac{p}{OA} + \frac{q}{OB}$ vērtību ar c, bet vienības vektorus, kas atrodas uz stariem e_1 un e_2 un kuru vērsumi sakrīt ar staru e_1 un e_2 vērsumiem, ar $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Tad $\overrightarrow{OA} = OA \cdot \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = OB \cdot \vec{b}$ un taisnes AB punktu rādiusvektorus apraksta formula

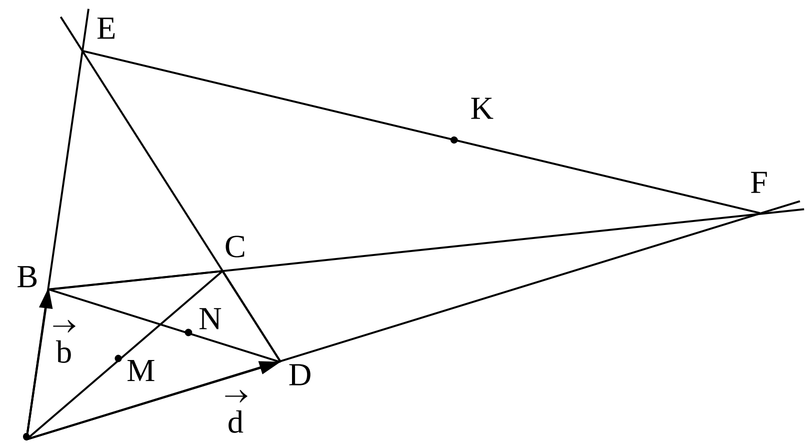
$$(*) \qquad \overrightarrow{OX} = \alpha \cdot OA \cdot \vec{a} + \beta \cdot OB \cdot \vec{b}, \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Lai pierādītu, ka visas taisnes AB iet caur vienu punktu, pietiek uzrādīt tāda punkta rādiusvektoru, kas izsakāms formā (*), izvēloties atbilstošus α un β. Meklēsim šo rādiusvektoru formā $u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$; lielumi u un v var būt atkarīgi no p, q un c, bet nedrīkst būt atkarīgi no OA un OB, lai rādiusvektors $u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$ nemainītos līdz ar taisnes AB maiņu.
Nosacījumu $\frac{p}{OA} + \frac{q}{OB} = c$ var pārrakstīt formā $\frac{p}{c \cdot OA} + \frac{q}{c \cdot OB} = 1$. Ja formulā (*) ievieto $\alpha = \frac{p}{c \cdot OA}$, $\beta = \frac{q}{c \cdot OB}$, iegūst $\overrightarrow{OX} = \frac{p}{c \cdot OA} \cdot OA \cdot \vec{a} + \frac{q}{c \cdot OB} \cdot OB \cdot \vec{b} = \frac{p}{c} \cdot \vec{a} + \frac{q}{c} \cdot \vec{b}$.
Ja $\overrightarrow{OM} = \frac{p}{c}\vec{a} + \frac{q}{c}\vec{b}$, tad punkts M nemaina savu stāvokli atkarībā no taisnes AB izmaiņām. Saskaņā ar to, kā izvēlējāmies $\overrightarrow{OM}$, punkts M pieder visām apskatāmajām taisnēm AB. Tātad visas taisnes AB iet caur vienu punktu M, k.b.j.

Piemērs (Gausa teorēma).
Pieņemsim, ka četrstūra ABCD malu AB un CD pagarinājumi krustojas punktā E, bet BC un AD pagarinājumi krustojas punktā F. Pierādīt, ka nogriežņu AC, BD, EF viduspunkti atrodas uz vienas taisnes.

Atrisinājums.

Apzīmēsim šos viduspunktus attiecīgi ar M, N un K un pierādīsim, ka vektori $\overrightarrow{MN}$ un $\overrightarrow{MK}$ ir kolineāri (skat. 94. zīm.) No tā sekos vajadzīgais.



94. zīm.

Izsacīsim $\overrightarrow{MN}$ un $\overrightarrow{MK}$ ar punktu M, N, K rādiusvektoriem, par to sākumpunktu izvēloties virsotni A.

Apzīmēsim $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AE} = \beta \cdot \vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = \delta \cdot \vec{d}$ (β un δ - atbilstošie skaitliskie reizinātāji). Tā kā vektori $\vec{b}$ un $\vec{d}$ nav kolineāri, tad eksistē tādi (viennozīmīgi noteikti) skaitļi u un v, ka $\overrightarrow{AC} = u \cdot \vec{b} + v \cdot \vec{d}$.
Tad

$$\overrightarrow{AM} = \frac{u}{2}\vec{b} + \frac{v}{2}\vec{d} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right) \qquad (3)$$

Izteiksim $\overrightarrow{AE}$ un $\overrightarrow{AF}$ ar lielumiem $\vec{b}$, $\vec{d}$, β, δ, u, v. Punkts E ir taišņu AB un DC krustpunkts. Tātad tas atrodas gan uz taisnes AB, gan uz taisnes DC. Tāpēc eksistē tādi skaitļi x un y, ka

$$\overrightarrow{AE} = x \cdot \vec{b} \text{ un } \overrightarrow{AE} = \vec{d} + y \cdot \overrightarrow{DC} = \vec{d} + y\left(u\,\vec{b} + v\,\vec{d} - \vec{d}\right).$$

No vienādības

$$x \cdot \vec{b} = \vec{d} + y\left(u\,\vec{b} + v\,\vec{d} - \vec{d}\right),$$

pielīdzinot koeficientus pie $\vec{b}$ un $\vec{d}$, iegūstam

$$x = y \cdot u \text{ un } 0 = 1 + yv - y,$$

no kurienes $y = \dfrac{1}{1-v}$, $x = \dfrac{u}{1-v}$ un $\overrightarrow{AE} = \dfrac{u}{1-v} \cdot \vec{b}$.

Līdzīgi iegūstam $\overrightarrow{AF} = \dfrac{v}{1-u} \cdot \vec{d}$ un

$$\overrightarrow{AK} = \frac{u}{2(1-v)}\vec{b} + \frac{v}{2(1-u)}\vec{d} \qquad (4)$$

Tātad, izmantojot (1), (2) un (3), iegūstam

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1-u}{2}\vec{b} + \frac{1-v}{2}\vec{d} \qquad (5) \qquad \text{un}$$

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \frac{u}{2(1-v)}\vec{b} + \frac{v}{2(1-u)}\vec{d} - \frac{u}{2}\vec{b} - \frac{v}{2}\vec{d} = \frac{uv}{2(1-v)}\vec{b} + \frac{uv}{2(1-u)}\vec{d} \qquad (6)$$

No (5) un (6) acīmredzami seko, ka

$$\overrightarrow{MK} = \frac{uv}{(1-u)(1-v)} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Tātad $\overrightarrow{MN}$ un $\overrightarrow{MK}$ ir kolineāri vektori, k.b.j.

Piemērs.

Koordinātu plaknē Oxy caur punktu $(x_0; y_0)$ novilkta taisne, kas paralēla vektoram $\vec{a} = \overrightarrow{(a_x; a_y)}$. Atrast šīs taisnes vienādojumu, ja $\vec{a}$ nav nulles vektors.

Atrisinājums.

Saskaņā ar vispārīgo teorēmu (19. lpp) minētās taisnes punkti M (x; y) ir tieši tie punkti, kas apmierina sakarību

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{(x_0; y_0)} + k \cdot \vec{a} \qquad \text{jeb}$$

$$(1) \qquad \overrightarrow{(x; y)} = \overrightarrow{(x_0; y_0)} + k \cdot \overrightarrow{(a_x; a_y)} \qquad \text{, k – patvaļīgs reāls skaitlis.}$$

Vektoru vienādība (1) ir līdzvērtīga vienādībām starp koordinātām

$$(2) \qquad \begin{array}{l} x = x_0 + a_x \cdot k \\ y = y_0 + a_y \cdot k \end{array} \qquad \text{, k – patvaļīgs reāls skaitlis.}$$

No (2) seko

$$\begin{array}{l} x - x_0 = a_x \cdot k \\ y - y_0 = a_y \cdot k \end{array} \qquad \text{, no kurienes}$$

$$(3) \qquad a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0)$$

Parādīsim, ka arī otrādi – ja skaitļi x un y apmierina (3), tad eksistē tāds reāls skaitlis k, ka pastāv (2). Tad būs pierādīts, ka (2) un (3) ir līdzvērtīgi apgalvojumi.

Ja $\vec{a}$ nav nulles vektors, tad vai nu $a_x \neq 0$, vai $a_y \neq 0$; varam pieņemt, ka $a_x \neq 0$. Tad eksistē tāds reāls skaitlis k, ka $x - x_0 = a_x \cdot k$, tātad

$$x = x_0 + a_x \cdot k \qquad (4)$$

Ievietojot (4) formulā (3), iegūstam

$$a_y \cdot a_x \cdot k = a_x \cdot (y - y_0)$$

$$a_y \cdot k = y - y_0$$

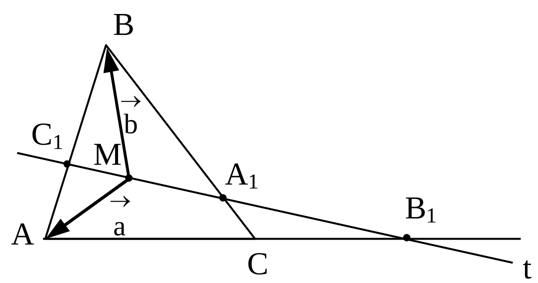
$$y = y_0 + a_y \cdot k \qquad (5)$$

Formulas (4) un (5) izsaka to pašu, ko (2). Tātad tiešām (2) un (3) ir līdzvērtīgi apgalvojumi.
Formulas (2) sauc par taisnes vienādojumu ***parametriskā formā***, bet (3), kas pārveidots izskatā $x \cdot a_y - a_x \cdot y = a_y \cdot x_0 - a_x \cdot y_0$ - par taisnes vienādojumu ***kanoniskā formā.***

Piemērs.

Caur trijstūra ABC mediānu krustpunktu M novilkta taisne t, kas krusto taisnes AB, BC, CA attiecīgi punktos C_1, A_1, B_1. Pierādīt, ka

(1) $$\frac{1}{\overline{\overline{MA_1}}} + \frac{1}{\overline{\overline{MB_1}}} + \frac{1}{\overline{\overline{MC_1}}} = 0$$



95. zīm.

Atrisinājums.

(Skat. 95. zīm.) Atceramies (31. lpp.), ka $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. Apzīmējam $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$ un izmantosim $\vec{a}$ un $\vec{b}$ kā bāzes vektorus, izsakot $\overrightarrow{MC_1}$, $\overrightarrow{MA_1}$ un $\overrightarrow{MB_1}$.

Tā kā C_1 atrodas uz AB, tad eksistē tāds k, ka $\overrightarrow{MC_1} = k \cdot \vec{a} + (1-k) \cdot \vec{b}$. Punkts A_1 atrodas uz BC un uz MC_1; tāpēc eksistē tādi x un y, ka $\overrightarrow{MA_1} = x \cdot \overrightarrow{MC_1} = xk\,\vec{a} + x(1-k)\vec{b}$ un

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MB} + y \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{b} + y\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = \vec{b} + y\left(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{b}\right) = (1-2y)\vec{b} - y \cdot \vec{a}\,.$$

No šīm formulām seko $xk = -y$ un $1 - 2y = x(1-k)$; atrisinot vienādojumu sistēmu (kaut vai ar ievietošanas paņēmienu), iegūstam $y = \frac{k}{3k-1}$ un $\overrightarrow{MA_1} = \frac{1}{1-3k}\overrightarrow{MC_1}$.

Analoģiski $\overrightarrow{MB_1} = \frac{1}{1-3(1-k)}\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{3k-2}\overrightarrow{MC_1}$. Ja izvēlamies uz t vērsumu, kas sakrīt ar $\overrightarrow{MC_1}$ vērsumu, un apzīmējam $\left|\overrightarrow{MC_1}\right| = z$, tad $\frac{1}{\overline{\overline{MC_1}}} + \frac{1}{\overline{\overline{MA_1}}} + \frac{1}{\overline{\overline{MB_1}}} = \frac{1}{z} + \frac{1-3k}{z} + \frac{3k-2}{z} = 0$, k.b.j.

Ja vērsums uz t izvēlēts otrādi, vienādība (1) paliek spēkā, jo visi saskaitāmie maina zīmi uz pretējo.

Piezīme:

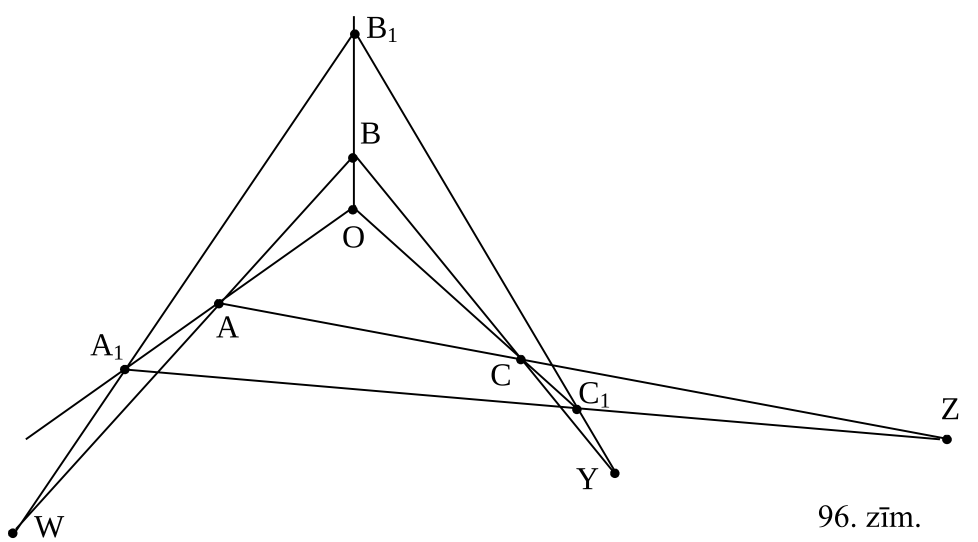
nelietojot orientētā garuma jēdzienu, nupat pierādītais rezultāts varētu tikt formulēts sekojošā „nesimetriskā” formā: viens no lielumiem $\frac{1}{MA_1}$, $\frac{1}{MB_1}$, $\frac{1}{MC_1}$ vienāds ar abu pārējo summu.

Piemērs (Dezarga teorēma).

Ja trijstūri ABC un $A_1B_1C_1$ novietoti tā, ka taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā, tad punkti, kuros krustojas taisnes AB un A_1B_1, BC un B_1C_1, CA un C_1A_1, atrodas uz vienas taisnes (ja šādi krustpunkti vispār eksistē).

1. pierādījums.

▼ Apzīmēsim taišņu AA_1, BB_1, CC_1 kopīgo punktu ar O; $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (sk. 96. zīm.)



96. zīm.

Tad eksistē tādi skaitļi α, β, γ, ka $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = \beta \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} = \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$; turklāt visi skaitļi α, β, γ ir dažādi, jo pretējā gadījumā kāds no apskatāmajiem krustpunktiem neeksistētu (atbilstošās taisnes būtu paralēlas).

Apzīmēsim AB un A_1B_1 krustpunktu ar W un izsacīsim $\overrightarrow{OW}$ ar agrāk ieviestajiem lielumiem.

Punkts W atrodas uz taisnēm AB un A_1B_1, tāpēc eksistē tādi skaitļi x un y, ka $\overrightarrow{OW} = x \cdot \vec{a} + (1-x)\cdot \vec{b}$ un $\overrightarrow{OW} = y \cdot \alpha \vec{a} + (1-y)\cdot \beta \vec{b}$. No šejienes iegūstam skaitliskas vienādības $x = y \cdot \alpha$ un $1-x = (1-y)\cdot \beta$; atrisinot vienādojumu sistēmu, iegūstam $y = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}$ un

$$\overrightarrow{OW} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta}\vec{a} + \frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha}\vec{b} \qquad (1)$$

Līdzīgi, apzīmējot BC un B_1C_1 krustpunktu ar Y, bet AC un A_1C_1 krustpunktu ar Z, iegūstam

$$\overrightarrow{OY} = \frac{\beta(1-\gamma)}{\beta-\gamma}\cdot\vec{b} + \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}\cdot\vec{c} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma}\cdot\vec{a} + \frac{\gamma(1-\alpha)}{\gamma-\alpha}\cdot\vec{c} \qquad (3)$$

Tā vietā, lai tieši meklētu tādus skaitliskus reizinātājus p, q, r, ka $p\cdot\overrightarrow{OW} + q\cdot\overrightarrow{OY} + r\cdot\overrightarrow{OZ} = \vec{0}$, rīkosimies netieši: pierādīsim tikai to eksistenci.

Skaidrs, ka $p\cdot\overrightarrow{OW} + q\cdot\overrightarrow{OY} + r\cdot\overrightarrow{OZ} = \left(p\cdot\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta} + q\cdot 0 + r\cdot\frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma}\right)\cdot\vec{a} +$

$$+\left(p\cdot\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha} + q\cdot\frac{\beta(1-\gamma)}{\beta-\gamma} + r\cdot 0\right)\cdot\vec{b} + \left(p\cdot 0 + q\cdot\frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta} + r\cdot\frac{\gamma(1-\alpha)}{\gamma-\alpha}\right)\cdot\vec{c} \qquad (*)$$

Ja eksistētu tādi skaitļi p, q, r, kas visi reizē nav 0, ka formulā (*) visi koeficienti pie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vienlaikus ir 0, tad $p\cdot\overrightarrow{OW} + q\cdot\overrightarrow{OY} + r\cdot\overrightarrow{OZ} = \vec{0}$, un vajadzīgais būs pierādīts.
Tātad jautājums – vai vienādojumu sistēmai ar mainīgajiem p, q, r, kuru iegūst, pielīdzinot nullei izteiksmes (*) koeficientus pie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, eksistē tāds atrisinājums, ka ne visi p, q, r ir nulles?
Kā zināms, šāds atrisinājums eksistē tad un tikai tad, ja sistēmas determinants ir 0. Pārbaudīsim to:

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta} & 0 & \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma} \\ \frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha} & \frac{\beta(1-\gamma)}{\beta-\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta} & \frac{\gamma(1-\alpha)}{\gamma-\alpha} \end{vmatrix} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\cdot\begin{vmatrix} 1-\beta & 0 & 1-\gamma \\ \alpha-1 & 1-\gamma & 0 \\ 0 & \beta-1 & \alpha-1 \end{vmatrix} =$$

(Iznesām no kolonām un rindām kopīgos reizinātājus)

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\cdot\left[(1-\beta)\cdot(1-\gamma)\cdot(\alpha-1) + (\alpha-1)\cdot(\beta-1)\cdot(1-\gamma)\right] = 0.$$

Līdz ar to vajadzīgais pierādīts. ▲

2. pierādījums.

▼ Nupat izklāstītais pierādījums ir „dabisks" – mēs tieši izteicām vektorus $\overrightarrow{OW}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ un pēc tam pierādījām, ka starp tiem pastāv vajadzīgā sakarība. Tomēr var iedomāties, ka šāds ceļš ir pārāk pamatīgs. Paši vektori $\overrightarrow{OW}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ mums taču nemaz nav vajadzīgi; mums vajadzīga tikai šo vektoru speciāla tipa lineāra kombinācija. Parādīsim, kā šādu kombināciju varēja atrast, neizsakot pašus vektorus.

Atzīmēsim, ka punkts O atrodas uz taisnēm AA_1 un BB_1. Tāpēc varam izsacīt (S – patvaļīgs punkts).

$$\overrightarrow{SO} = \alpha_1 \overrightarrow{SA} + \alpha_2 \overrightarrow{SA_1} \qquad , \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\overrightarrow{SO} = \beta_1 \overrightarrow{SB} + \beta_2 \overrightarrow{SB_1} \qquad , \ \beta_1 + \beta_2 = 1$$

No šejienes

$$\alpha_1 \overrightarrow{SA} + \alpha_2 \overrightarrow{SA_1} = \beta_1 \overrightarrow{SB} + \beta_2 \overrightarrow{SB_1}$$

(1) $\qquad \alpha_1 \cdot \overrightarrow{SA} - \beta_1 \cdot \overrightarrow{SB} = \beta_2 \cdot \overrightarrow{SB_1} - \alpha \cdot \overrightarrow{SA_1}$

No sakarībām $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ un $\beta_1 + \beta_2 = 1$ seko $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ un $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$. Tāpēc no (1)

$$(2) \qquad \frac{\alpha_1 \cdot \overrightarrow{SA} - \beta_1 \cdot \overrightarrow{SB}}{\alpha_1 - \beta_1} = \frac{\beta_2 \cdot \overrightarrow{SB_1} - \alpha_2 \cdot \overrightarrow{SA_1}}{\beta_2 - \alpha_2}$$

Tā kā $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1} + \dfrac{(-\beta_1)}{\alpha_1 - \beta_1} = 1$, tad (1) kreisā puse izsaka kāda taisnes AB punkta rādiusvektoru; līdzīgi (1) labā puse izsaka kāda taisnes A_1B_1 punkta rādiusvektoru.

Tātad gan (1) kreisā, gan labā puse izsaka $\overrightarrow{SW}$. Tāpēc $\overrightarrow{SW} = \dfrac{\alpha_1 \cdot \overrightarrow{SA} - \beta_1 \cdot \overrightarrow{SB}}{\alpha_1 - \beta_1}$ un

$$(3) \qquad (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \overrightarrow{SW} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{SA} - \beta_1 \cdot \overrightarrow{SB}$$

Līdzīgi, apzīmējot $\overrightarrow{SO} = \gamma_1 \overrightarrow{SC} + \gamma_2 \overrightarrow{SC_1}$, iegūstam

$$(4) \qquad (\beta_1 - \gamma_1) \cdot \overrightarrow{SY} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{SB} - \gamma_1 \cdot \overrightarrow{SC};$$

$$(5) \qquad (\gamma_1 - \alpha_1) \cdot \overrightarrow{SZ} = \gamma_1 \cdot \overrightarrow{SC} - \alpha_1 \cdot \overrightarrow{SA}$$

No formulām (3), (4) un (5), tās saskaitot, iegūstam

$$(6) \qquad (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \overrightarrow{SW} + (\beta_1 - \gamma_1) \cdot \overrightarrow{SY} + (\gamma_1 - \alpha_1) \cdot \overrightarrow{SZ} = \vec{0}$$

Formulā (6) koeficientu summa pie vektoriem $\overrightarrow{SW}$, $\overrightarrow{SY}$, $\overrightarrow{SZ}$ acīmredzami ir 0. Tālāk, **neviens** no tiem nav 0; ja, piemēram, $\alpha_1 = \beta_1$, tad taisnes AB un A_1B_1 būtu paralēlas un to krustpunkts W vispār neeksistētu.

Tādēļ formulai (6) var pielietot teorēmu par 3 punktu kolinearitāti simetriskā formā (skat. 93. lpp.), un Dezarga teorēma pierādīta.▲

Pārbaudi pats sevi!

1. Kādas k vērtības tiek lietotas taisnes vienādojumā $\overrightarrow{OX} = (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}$, ja punkts X

a) sakrīt ar A,
b) sakrīt ar B,
c) ir nogriežņa AB iekšējs punkts,
d) atrodas uz taisnes AB otrā pusē punktam B nekā punkts A,
e) atrodas uz taisnes AB otrā pusē punktam A nekā punkts B?

2. Atlieciet uz taisnes AB punktu X, kam pastāv vienādība:

a) $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$,

b) $\overrightarrow{OX} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$,

c) $\overrightarrow{OX} = -3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$.

3. Trijstūra ABC mediānu krustpunkts ir M. Izsacīt $\overrightarrow{CA_1}$ ar vektoriem $\overrightarrow{CA}$ un $\overrightarrow{CM}$, ja A_1 ir malas BC viduspunkts.

4. Kuri no punktiem X, Y, Z pieder taisnei AB, ja $\overrightarrow{OX} = \frac{7}{5}\overrightarrow{OA} - 0{,}4 \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OY} = 1{,}1 \cdot \overrightarrow{OA} + 0{,}1 \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OZ} = -|\alpha| \cdot \overrightarrow{OA} - |\beta| \cdot \overrightarrow{OB}$ (α un β - kaut kādi skaitļi)?

5. Uzrakstīt tādas taisnes vienādojumu, kas iet caur punktu (3; 4) paralēli vektoram $\overrightarrow{(2;3)}$.

Uzdevumi.

1. Trīs punkti katrs kustas pa savu taisni ar nemainīgu ātrumu. Pierādīt, ka to veidotā trijstūra mediānu krustpunkts arī kustas pa kādu taisni ar nemainīgu ātrumu.

2. Punkti A un B katrs kustas pa savu taisni ar nemainīgu ātrumu. Taisne AB visu laiku iet caur vienu un to pašu punktu. Pierādīt, ka A un B kustas pa paralēlām taisnēm.

3.^{k} Punkti A_1, A_2, A_3 ir nekustīgi un atrodas uz vienas taisnes. Punkti B_1, B_2, B_3 pārvietojas plaknē. Turklāt zināms, ka B_1 un B_2 pārvietojas katrs pa savu taisni, taisne B_1B_2 visu laiku iet caur A_3, taisne B_2B_3 – caur A_1, bet taisne B_1B_3 – caur A_2.
Pierādīt, ka B_3 arī pārvietojas pa taisni.

4.^{k} Vispārināt iepriekšējā uzdevuma rezultātu punktu sistēmām $A_1,\ldots,A_n$, $B_1,\ldots,B_n$, kur $n \geq 4$.

5. Vai trīs punkti var kustēties katrs pa savu taisni ar konstantu ātrumu tā, lai visi ātrumi būtu dažādi pēc skaitliskās vērtības , starp taisnēm nebūtu paralēlu un minētie punkti nevienu brīdi neatrastos uz vienas taisnes (pieņemam, ka kustība sākusies bezgalīgi ilgi atpakaļ un turpināsies bezgalīgi ilgi uz priekšu)?

6.* Starp 5 taisnēm nekādas 2 nav paralēlas un nekādas 3 neiet caur vienu punktu. Apskatām visus 5 četrstūrus, katru no kuriem veido 4 no šīm taisnēm; katram no šiem četrstūriem apskatām taisni, kas iet caur tā diagonāļu viduspunktiem.
Pierādīt, ka iegūtās 5 taisnes iet caur vienu punktu.

7.^{k} Vispārināt iepriekšējā uzdevuma rezultātu.

8. Dots, ka ABC – trijstūris, P – patvaļīgs punkts, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B, ne ar C. Caur P velkam taisnes paralēli AB, BC, CA; to krustpunktus atbilstoši ar BC, CA, AB apzīmējam ar K, L, T.

Pierādīt, ka ΔKLT mediānu krustpunkts atrodas PM viduspunktā, kur M – ΔABC mediānu krustpunkts.

9. Dots, ka ABC – trijstūris, P – malas AB punkts. Caur P vilktas taisnes paralēli ΔABC mediānām AA_1 un BB_1; šo taišņu krustpunktus atbilstoši ar BC un AC apzīmējam ar A_2 un B_2. Kādu figūru aizpilda ΔPA_2M_2 mediānu krustpunkts, ja P kustas pa nogriezni AB no A uz B?

10. Caur paralelograma ABCD virsotni vilkta taisne krusto taisnes BD, BC, CD atbilstoši punktos K, L, M. pierādīt, ka $\frac{1}{\overline{\overline{KA}}}+\frac{1}{\overline{\overline{KN}}}+\frac{1}{\overline{\overline{KM}}}=0$.

11. Pierādīt Dezarga teorēmai apgriezto teorēmu.

12. Noskaidrojiet, par kādu apgalvojumu pārveidojas Dezarga teorēma, ja $AB \parallel A_1B_1$, bet pārējie malu pāri krustojas (skat. 98. lpp.)

13. Pierādi sekojošu Čevas teorēmas vispārinājumu (skat. 74. lpp.): ja ABC – trijstūris un punkti A_1, B_1, C_1 atrodas attiecīgi uz taisnēm BC, CA, AB, tad taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā tad un tikai tad, ja $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{\overline{C_1B}}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{\overline{A_1C}}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{\overline{B_1A}}}=1$

14. Pierādi sekojošu Menalāja teorēmas vispārinājumu (skat. 44. lpp.): ja ABC – trijstūris un punkti A_1, B_1, C_1 atrodas attiecīgi uz taisnēm BC, CA, AB, tad A_1, B_1, C_1 pieder vienai taisnei tad un tikai tad, ja $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{\overline{C_1B}}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{\overline{A_1C}}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{\overline{B_1A}}}=-1$.

3.5. Masas centra rādiusvektors un baricentriskās koordinātas.

3.5.1. Masas centra rādiusvektors.

Mēs pieņemam, ka lasītājs ir pazīstams ar masas centra jēdzienu un īpašībām.

<u>Teorēma par masu centra rādiusvektoru.</u> Ja punktos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izvietotas attiecīgi masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ un M -to masas centrs, tad patvaļīgam vektoru sākumpunktam O

$$(1)\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{m_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+\ldots+m_n\cdot\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

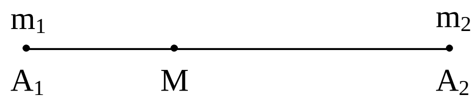
Pierādījums.

▼ Izmantosim matemātisko indukciju.

Ja n = 1, tad vienīgās masas m_1 masas centrs M sakrīt ar tās atrašanās vietu A_1. Tad, protams,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA_1}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}}{m_1}.$$

Ja n = 2, tad masu m_1 un m_2 masas pēc Arhimeda sviras likuma dala nogriezni A_1A_2 apgriezti proporcionāli punktos A_1 un A_2 esošajām masām. Tāpēc saskaņā ar nogriežņa iekšējā punkta rādiusvektora formulu (skat. 97. zīm.)



97. zīm.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_1} \cdot \frac{MA_2}{A_1A_2} + \overrightarrow{OA_2} \cdot \frac{MA_1}{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_1} \cdot \frac{MA_2}{MA_1 + MA_2} + \overrightarrow{OA_2} \cdot \frac{MA_1}{MA_1 + MA_2} =$$

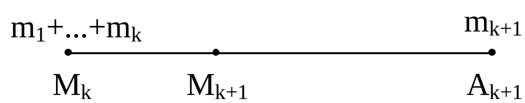
$$= \overrightarrow{OA_1} \cdot \frac{\frac{MA_2}{MA_1}}{1 + \frac{MA_2}{MA_1}} + \overrightarrow{OA_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{MA_2}{MA_1}} = \overrightarrow{OA_1} \cdot \frac{\frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} + \overrightarrow{OA_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} =$$

$$= \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2}, \text{ k.b.j.}$$

Pieņemsim tagad, ka formula (1) pierādīta k punktu gadījumam. Apskatīsim k + 1 punktus $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$, kuros izvietotas attiecīgi masas $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}$; apzīmēsim pirmo k masu centru ar M_k, bet visu k + 1 masu centru ar M_{k+1}.
Saskaņā ar pieņēmumu

$$\overrightarrow{OM_k} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_k \cdot \overrightarrow{OA_k}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}.$$

Punktu M_{k+1} var atrast kā masas centru divām masām: punktā A_{k+1} esošajai masai m_{k+1} un punktā M_k esošajai „apvienotajai masai” $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$. Atrašanā lietosim jau pierādīto formulu n = 2 (skat. 98. zīm.):



98. zīm.

$$\overrightarrow{OM_{k+1}} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k) \cdot \overrightarrow{OM_k} + m_{k+1} \cdot \overrightarrow{OA_{k+1}}}{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k) + m_{k+1}} =$$

$$= \frac{(m_1 + \ldots + m_k) \cdot \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_k \cdot \overrightarrow{OA_k}}{m_1 + \ldots + m_k} + m_{k+1} \cdot \overrightarrow{OA_{k+1}}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k + m_{k+1}} =$$

$$= \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_k \cdot \overrightarrow{OA_k} + m_{k+1} \cdot \overrightarrow{OA_{k+1}}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k + m_{k+1}}$$

Induktīvā pāreja izdarīta, tātad mūsu formula pierādīta visiem naturāliem n.▲
Formula (1) ir „simetriska”; tā nemainās, ja punktu A_1 un masu m_1 nosauc par A_2 un m_2 un otrādi. Tāpēc mēs redzam, ka masas centra stāvoklis nav atkarīgs no tā, kādā kārtībā mēs „apvienojam” punktus, vispirms atrodot punktos A_1 un A_2 novietoto masu m_1 un m_2 masas centru

M_2, pēc tam punktā M_2 novietotās masas $m_1 + m_2$ un punktā A_3 novietotās masas m_3 centru M_3, utt.
Sekojošā teorēma ievērojami atvieglo masas centra atrašanu.

TEORĒMA PAR GRUPĒŠANU.

Ja punktos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ izvietotas masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ un punktos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ izvietotas masas $m'_1, m'_2, \ldots, m'_k$, pie tam punktos B_i izvietoto masu centrs ir M_B un punktos C_i izvietoto masu centrs ir M_C, tad visu masu centram M pastāv vienādība

$$(2) \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{(m_1 + \ldots + m_n) \cdot \overrightarrow{OM_B} + (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_k) \cdot \overrightarrow{OM_C}}{(m_1 + \ldots + m_n) + (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_k)}.$$

Teorēmas pierādījumam atliek 3 reizes lietot formulu (1), izsakot $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_B}$, $\overrightarrow{OM_C}$.

Teorēmai par grupēšanu ir uzskatāma fizikāla jēga: tā apgalvo, ka masas centru var atrast, sadalot masas divās grupās, atrodot masas centru katrai grupai atsevišķi un pēc tam atrodot masas centru abiem atrastajiem masas centriem, kuros sakoncentrētas atbilstošo grupu kopīgās masas.

Lasītājs bez grūtībām var pierādīt līdzīgu teorēmu, ja sākotnējās masas tiek sadalītas nevis divās, bet lielākā skaitā grupu.

<u>Definīcija.</u> Ja visos punktos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izvietotas vienādas masas, tad to centru sauc par punktu sistēmas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ centroīdu.

Ja izvietotās masas ir m, tad centroīdam M saskaņā ar (1)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OA_n}}{m + m + \ldots + m} = \frac{m\left(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}\right)}{n \cdot m} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}}{n},$$

t.i., centroīda stāvoklis nav atkarīgs no tā, cik lielas vienādas masas izvietotas punktos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Acīmredzot, divu punktu centroīds ir to veidotā nogriežņa viduspunkts, triju punktu centroīds - to veidotā tristūra mediānu krustpunkts, četru punktu centroīds - to veidotā četrstūra viduslīniju krustpunkts (skat. attiecīgi 27., 66., 68. lpp.)

No teorēmas par grupēšanu izriet šāds rezultāts.

<u>Teorēma.</u> Ja n punktu sistēmu patvaļīgā veidā sadala divās k un n - k punktu apakšsistēmās un savieno iegūto apakšsistēmu centroīdus ar taišņu nogriežņiem, tad visi šādā ceļā iegūtie nogriežņi krustojas vienā punktā - un dalās tajā attiecībā (n - k) : k.

Atstājam to lasītājam pamatot patstāvīgi.

Daudzus iepriekš pierādītus rezultātus (piem., tos, kas balstās uz Čevas teorēmu) var ērti pamatot, izmantojot centroīda jēdzienu; atstājam to izdarīt lasītājam patstāvīgi.

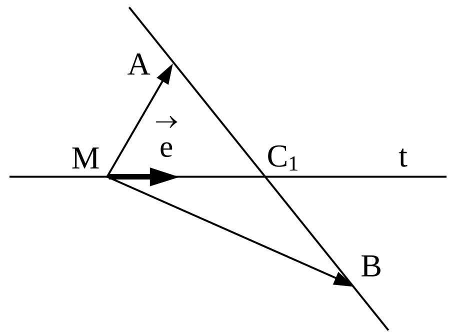
Piemērs.

Pieņemsim, ka trijstūra ABC virsotnēs ievietotas attiecīgi masas m_A, m_B un m_C. Caur to masas centru vilkta taisne krusto taisnes AB, BC, CA attiecīgi punktos C_1, A_1, B_1. Pierādīt, ka

$$\frac{m_A}{\overline{\overline{MA_1}}} + \frac{m_B}{\overline{\overline{MB_1}}} + \frac{m_C}{\overline{\overline{MC_1}}} = 0.$$

Atrisinājums.
Ņemot formulā (1) O = M, mūsu gadījumā iegūstam

$$(3)\qquad m_A\cdot\overrightarrow{MA}+m_B\cdot\overrightarrow{MB}+m_C\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$



99. zīm.

Izvēlamies uz taisnes t vienības vektoru $\vec{e}$ un tādu vērsumu, kas sakrīt ar $\vec{e}$ vērsumu.

Skaidrs, ka M neatrodas uz malas AB. Tāpēc $\overrightarrow{MA}$ un $\overrightarrow{MB}$ nav kolineāri vektori; tad eksistē tādi α_1 un β_1, ka

$$(4)\qquad \vec{e}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{MA}+\beta_1\cdot\overrightarrow{MB}$$

Mēs apgalvojam, ka $\overrightarrow{MC_1}=\dfrac{\vec{e}}{\alpha_1+\beta_1}$. Tiešām

$$\frac{\vec{e}}{\alpha_1+\beta_1}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1}\cdot\overrightarrow{MA}+\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\cdot\overrightarrow{MB};\ \text{tā kā}\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1}+\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}=1,$$

tad no punkta M atliktā vektora $\dfrac{\vec{e}}{\alpha_1+\beta_1}$ galapunkts atrodas uz taisnes AB, bet tas atrodas arī uz taisnes t, jo atliktais vektors kolineārs vektoram $\vec{e}$. Tātad atliktā vektora galapunkts ir t un AB krustpunkts, t.i., C_1.

Tā kā $\overrightarrow{MC_1}=\overline{MC_1}\cdot\vec{e}$ un $\overrightarrow{MC_1}=\dfrac{1}{\alpha_1+\beta_1}\cdot\vec{e}$, tad $\overline{MC_1}=\dfrac{1}{\alpha_1+\beta_1}$ un

$$(4')\qquad \frac{1}{\overline{MC_1}}=\alpha_1+\beta_1$$

Līdzīgi iegūst formulas

$$(5)\qquad \vec{e}=\beta_2\,\overrightarrow{MB}+\gamma_1\,\overrightarrow{MC}$$

$$(5')\qquad \frac{1}{\overline{MA_1}}=\beta_2+\gamma_1$$

$$(6) \qquad \vec{e} = \gamma_2 \overrightarrow{MC} + \alpha_2 \overrightarrow{MA}$$

$$(6') \qquad \frac{1}{\overline{\overline{MB_1}}} = \gamma_2 + \alpha_2$$

Mums jāpierāda, ka

$$(7) \qquad m_A(\beta_2+\gamma_1)+m_B(\gamma_2+\alpha_2)+m_C(\alpha_1+\beta_1)=0$$

No formulām (4) un (5) iegūstam, ņemot vērā (3), ka

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{MA} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{MB} = \beta_2 \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma_1 \cdot \left(-\frac{m_A}{m_C} \cdot \overrightarrow{MA} - \frac{m_B}{m_C} \cdot \overrightarrow{MB} \right)$$

Tā kā $\overrightarrow{MA}$ un $\overrightarrow{MB}$ - nekolineāri vektori, tas iespējams tikai tad, ja abās vienādības pusēs sakrīt koeficienti gan pie $\overrightarrow{MA}$, gan pie $\overrightarrow{MB}$; tātad $\alpha_1 = -\gamma_1 \cdot \frac{m_A}{m_C}$ jeb

$$(8) \qquad \alpha_1 \cdot m_C + \gamma_1 \cdot m_A = 0.$$

Līdzīgi iegūstam sakarības

$$(9) \qquad \beta_1 \cdot m_C + \gamma_2 \cdot m_B = 0$$

$$(10) \qquad \beta_2 \cdot m_A + \alpha_2 \cdot m_B = 0$$

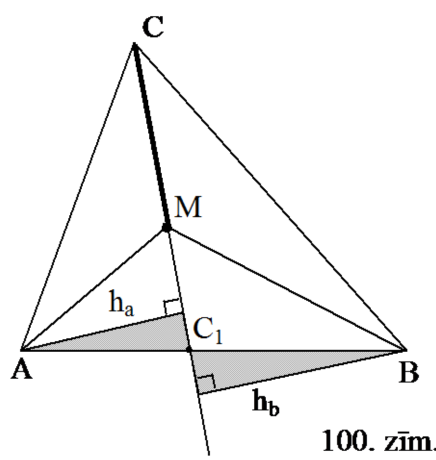
Saskaitot (8), (9) un (10), iegūstam (7). Uzdevums atrisināts.

Ļoti daudzu uzdevumu risināšanas pamatā ir sekojoša teorēma, kas ļauj izsacīt trijstūra iekšēja punkta rādiusvektoru ar tā virsotņu rādiusvektoriem.

Teorēma.* *Ja trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts M un virsotnēs A, B, C ievietotas atbilstoši masas L (BCM), L (CAM) un L (ABM), tad masu centrs ir punktā M.

Pierādījums.

▼ Apzīmēsim CM pagarinājuma krustpunktu ar AB ar C_1. Pieņemsim, ka būtu pierādīts: ***virsotnēs A un B ievietoto masu centrs ir C_1.*** Tad visu triju masu centram jāatrodas uz taisnes CC_1 jeb, kas ir tas pats, uz taisnes CM. Līdzīgi tam jāatrodas arī uz taisnēm AM un BM; tātad tas atrodas punktā M.



100. zīm.

Lai pierādītu izcelto apgalvojumu, saskaņā ar Arhimeda sviras likumu jāpierāda, ka

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{L(CAM)}{L(BCM)}.$$

Un tiešām, izmantojot iekrāsoto trijstūru līdzību,

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{\frac{1}{2}h_a \cdot MC}{\frac{1}{2}h_b \cdot MC} = \frac{L(CAM)}{L(BCM)}, \text{ k.b.j.}$$

▲

No šīs teorēmas un formulas (1) uzreiz seko

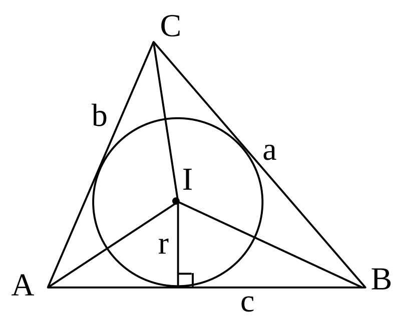
TEORĒMA PAR TRIJSTŪRA IEKŠĒJĀ PUNKTA RĀDIUSVEKTORU.

Ja trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts M, tad

$$(11) \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{L(BCM)}{L(ABC)} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{L(CAM)}{L(ABC)} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{L(ABM)}{L(ABC)} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Piemēri.

1. Ja I - trijstūrī ABC ievilktā riņķa centrs, tad (skat. 101. zīm.)

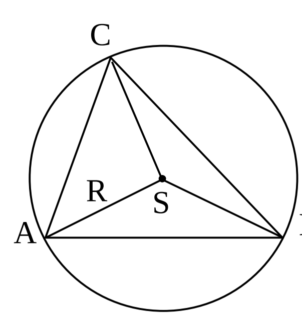


101. zīm.

$$L(ABC) = p \cdot r, \; L(ABI) = \frac{c}{2} \cdot r, \; L(BCI) = \frac{a}{2} \cdot r, \; L(CAI) = \frac{b}{2} \cdot r. \text{ Tāpēc}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

2. Ja S - šaurleņķu trijstūrim ABC apvilktā riņķa centrs (skat. 102. zīm.), tad



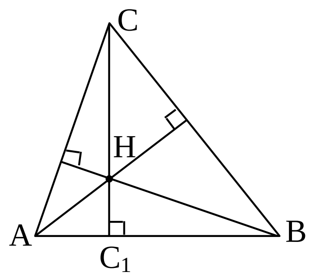
102. zīm.

$$\angle ASB = 2\angle ACB = 2\angle C\text{, tāpēc } L(ABS) = \frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot \sin 2C = \frac{1}{2}R^2\sin 2C.$$

Līdzīgi $L(BCS) = \frac{1}{2}R^2\sin 2A$ un $L(CAS) = \frac{1}{2}R^2\sin 2B$. Tāpēc

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA} + \sin 2B\cdot\overrightarrow{OB} + \sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

3. Ja H - šaurleņķu trijstūra ABC augstumu krustpunkts, tad (skat. 103. zīm.)



103. zīm.

$$\frac{L(ABH)}{L(ABC)} = \frac{HC_1}{CC_1} = \frac{AC_1\cdot tg\angle HAC_1}{AC_1\cdot tg\angle CAB} = \frac{tg(90^0 - B)}{tgA} = \frac{1}{tgA\cdot tgB}.$$

Tāpēc

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{tgA\cdot tgB}\cdot\overrightarrow{OC} + \frac{1}{tgA\cdot tgC}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{tgB\cdot tgC}\cdot\overrightarrow{OA}.$$

3.5.2. Trijstūra iekšējā punkta baricentriskās koordinātas.

Ievietojot iepriekšējā apakšpunktā iegūtajā formulā (11) O = M, seko, ka

$$(12)\qquad \frac{L(BCM)}{L(ABC)}\cdot\overrightarrow{MA} + \frac{L(CAM)}{L(ABC)}\cdot\overrightarrow{MB} + \frac{L(ABM)}{L(ABC)}\cdot\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Apzīmēsim $\frac{L(BCM)}{L(ABC)} = x_1$, $\frac{L(CAM)}{L(ABC)} = y_1$, $\frac{L(ABM)}{L(ABC)} = z_1$.

Tad, tā kā $L(BCM) + L(CAM) + L(ABM) = L(ABC)$, iegūstam

$$(13)\qquad x_1\cdot\overrightarrow{MA} + y_1\cdot\overrightarrow{MB} + z_1\cdot\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$(14)\qquad x_1 + y_1 + z_1 = 1$$

Definīcija. ***Skaitļus x_1, y_1, z_1, kas apmierina (13) un (14), sauc par punkta M baricentriskajām koordinātām trijstūrī ABC.***

Ja ir skaidrs, par kuru trijstūri ir runa, x_1, y_1, z_1 sauc vienkārši par punkta M baricentriskajām koordinātām.

Šī apakšpunkta ietvaros trijstūris ABC būs fiksēts.

Formula (12) parāda, ka katram trijstūra ABC iekšējam punktam **eksistē** vismaz viens baricentrisko koordinātu komplekts, un parāda arī, kā to izsacīt ar ΔABC un tā daļu laukumu palīdzību.

TEORĒMA PAR UNITĀTI.
Punkta M baricentriskās koordinātas ir noteiktas viennozīmīgi.

Pierādījums.

▼ Pieņemsim, ka kādam punktam M pastāv sakarības

$$(15)\qquad x_1\cdot\overrightarrow{MA}+y_1\cdot\overrightarrow{MB}+z_1\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0},$$
$$(16)\qquad x_1+y_1+z_1=1,$$
$$(17)\qquad x_2\cdot\overrightarrow{MA}+y_2\cdot\overrightarrow{MB}+z_2\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0},$$
$$(18)\qquad x_2+y_2+z_2=1$$

No (15) un (16) seko, ka

$$x_1\cdot\overrightarrow{MA}+y_1\cdot\overrightarrow{MB}+(1-x_1-y_1)\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$x_1\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+y_1\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$x_1\cdot\overrightarrow{CA}+y_1\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$(19)\qquad \overrightarrow{CM}=x_1\cdot\overrightarrow{CA}+y_1\cdot\overrightarrow{CB}$$

Līdzīgi no (17) un (18) iegūst

$$(20)\qquad \overrightarrow{CM}=x_2\cdot\overrightarrow{CA}+y_2\cdot\overrightarrow{CB}$$

Tā kā $\overrightarrow{CA}$ un $\overrightarrow{CB}$ ir nekolineāri vektori; tad no (19) un (20) seko, ka $x_1 = x_2$ un $y_1 = y_2$; tad no (16) un (18) seko arī, ka $z_1 = z_2$. Teorēma par unitāti pierādīta. ▲

TEORĒMA PAR RĀDIUSVEKTORA SAKARU AR BARICENTRISKAJĀM KOORDINĀTĀM.
Ja x, y, z - punkta M baricentriskās koordinātas, tad patvaļīgam punktam O

$$(21)\qquad \overrightarrow{OM}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Pierādījums.

▼ Viegli pārbaudīt, ka

$$x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC}=x\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+y\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+z\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)=$$
$$=\overrightarrow{OM}(x+y+z)+\left(x\cdot\overrightarrow{MA}+y\cdot\overrightarrow{MB}+z\cdot\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{OM}\cdot 1+\vec{0}=\overrightarrow{OM},\ \text{k.b.j.}$$

Tā kā formulu (21) var uzrakstīt arī formā

$$\overrightarrow{OM}=\frac{x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC}}{x+y+z},$$

iegūstam baricentrisko koordinātu fizikālo jēgu: punkta M baricentriskās koordinātas ir tādas masas, kuru summa ir 1 un kuras ievietojot ΔABC virsotnēs, masu centrs ir punktā M. No šejienes arī radies nosaukums; „baricentrs" latviski nozīmē „smaguma centrs". ▲

3.5.3. Baricentrisko koordinātu vispārinājums patvaļīgam plaknes punktam.

3.5.3.1. Formālā definīcija.

Pieņemsim, ka ABC - fiksēts trijstūris, M - **kaut kāds** plaknes punkts. No vektoriem $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ vismaz divi ir nekolineāri (citādi A, B, C atrastos uz vienas taisnes). Varam pieņemt, ka nekolineāri vektori ir $\overrightarrow{MA}$ un $\overrightarrow{MB}$. Tad eksistē tādi skaitļi α un β, ka

$$\overrightarrow{MC} = -\alpha \cdot \overrightarrow{MA} - \beta \cdot \overrightarrow{MB}, \text{ ko var pārrakstīt kā } 1 \cdot \overrightarrow{MC} + \alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Ievērosim, ka $1+\alpha+\beta \neq 0$; pretējā gadījumā punkti A, B, C atrastos uz vienas taisnes (skat. 93. lpp.) Tāpēc iegūto vienādību varam pierakstīt kā

$$\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{1+\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{1}{1+\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Apzīmējot $\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} = x$, $\frac{\beta}{1+\alpha+\beta} = y$, $\frac{1}{1+\alpha+\beta} = z$, iegūstam

$$(22) \qquad x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$(23) \qquad x + y + z = 1,$$

kas saskaņojas ar 3.5.2. apakšpunkta definīciju. Attiecinot šo definīciju uz patvaļīgu plaknes punktu, esam vispārinājuši baricentrisko koordinātu jēdzienu patvaļīgam plaknes punktam.
3.5.2. apakšpunktā pierādot teorēmas par unitāti un par rādiusvektora sakaru ar baricentriskajām koordinātām, nekur neizmantojām to, ka M ir ΔABC iekšējs punkts, bet atsaucāmies tikai uz sakarībām, kas līdzvērtīgas (22) un (23). Tāpēc šīs abas teorēmas paliek spēkā arī patvaļīgam plaknes punktam M.

3.5.3.2. Ģeometriskā jēga.

Noskaidrosim patvaļīga plaknes punkta M baricentrisko koordinātu ģeometrisko jēgu. Šim nolūkam ievedīsim ***orientēta laukuma jēdzienu.***

Definīcija. ***Par ΔABC orientētu laukumu sauc***

a) ΔABC laukumu L (ABC), ja virsotnes A, B, C sakārtotas pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam (tad saka, ka ΔABC orientēts pozitīvi),

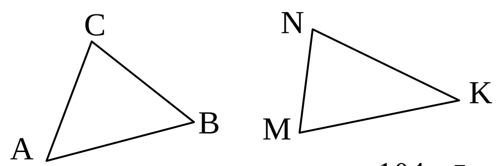
b) ΔABC laukumam pretējo lielumu -L (ABC), ja virsotnes A, B, C sakārtotas pulksteņa rādītāja kustības virzienā (tad saka, ka ΔABC orientēts negatīvi).

ΔABC orientēto laukumu apzīmē ar [ABC.]

Ja punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes, tad pēc definīcijas [ABC] = 0.

Piemēri.

1. [ABC] = L (ABC), [MNK] = - L (MNK) (skat. 104. zīm.)



104. zīm.

2. Patvaļīgam trijstūrim ABC $[ABC]=[BCA]=[CAB]=-[BAC]=-[ACB]=-[CBA]$.

Teorēma. ***Ja ABC - trijstūris un M - patvaļīgs punkts, tad [ABC] = [ABM] + [BCM] + [CAM].***

Pierādījums.

▼Aplūkosim gadījumu, kad ΔABC orientēts pozitīvi; otra gadījuma apskatīšana ir pilnīgi analoga.

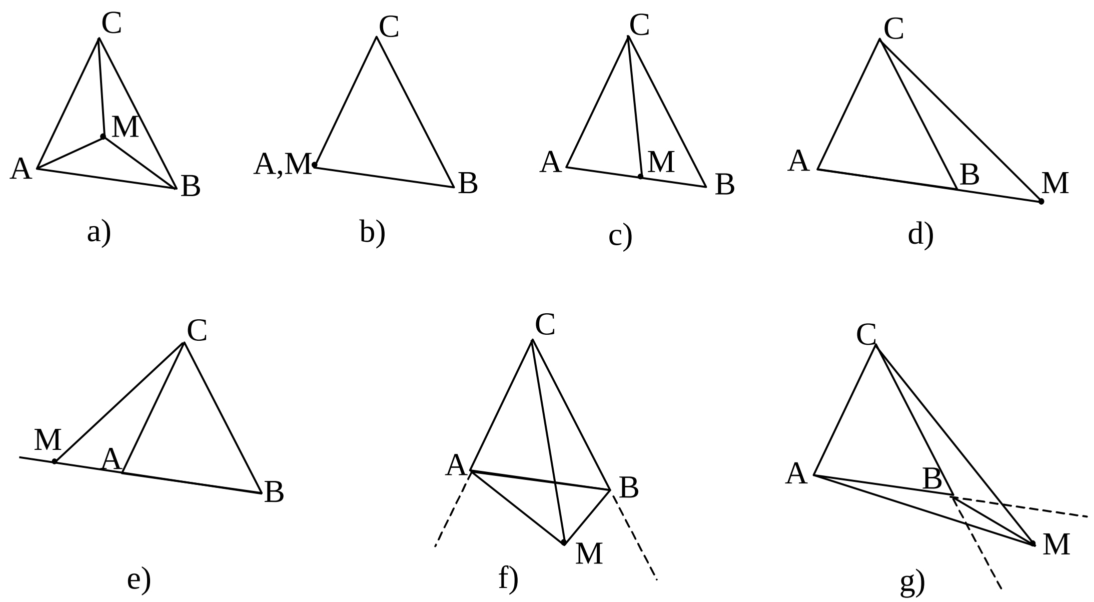
Šķirosim apakšgadījumus atkarībā no tā, kur atrodas punkts M.

a) M ir ΔABC iekšējs punkts (skat. 105.a zīm.). Tad

$$[ABC]=L(ABC)=L(ABM)+L(BCM)+L(CAM)=[ABM]+[BCM]+[CAM].$$

b) M sakrīt ar kādu no virsotnēm, piemēram, ar A (skat. 105.b zīm.). Tad

$$[ABC]=L(ABC)=0+L(BCA)+0=[ABM]+[BCM]+[CAM].$$



105. zīm.

c) M ir kādas malas, piemēram, AB, iekšējs punkts (105.c zīm.). Tad

$$[ABC]=L(ABC)+0+L(BCM)+L(CAM)=[ABM]+[BCM]+[CAM]$$

d) M atrodas uz malas pagarinājuma pozitīvajā ΔABC apiešanas virzienā (105.d. zīm.). Tad

$$[ABC]=L(ABC)=0+L(CAM)-L(BCM)=[ABM]-[CBM]+[CAM]=[ABM]+[BCM]+[CAM]$$

e) M atrodas uz malas pagarinājuma pretēji pozitīvajam ΔABC apiešanas virzienam (105.e. zīm.). Tad

$$[ABC] = L(ABC) = 0 + L(BCM) - L(CAM) = [ABM] + [BCM] + [CAM]$$

f) M atrodas ārpus trijstūra ABC, bet kāda tā virsotnes leņķa iekšpusē (105.f zīm.). Tad

$$[ABC] = L(ABC) = -L(ABM) + L(BCM) + L(CAM) = [ABM] + [BCM] + [CAM]$$

g) M atrodas ārpus trijstūra ABC, bet kādas virsotnes leņķa krustleņķa iekšpusē (105.g zīm.). Tad

$$[ABC] = L(ABC) = L(AMC) - L(ABM) - L(CBM) = -L(ABM) - L(BCM) + L(CAM) =$$
$$= [ABM] + [BCM] + [CAM]$$

Vajadzīgā vienādība pārbaudīta visos iespējamos gadījumos. Līdz ar to teorēma pierādīta. ▲

Piezīme.

Vēlāk, kad iepazīsimies ar vektoru pseidoskalārā reizinājuma jēdzienu, šāda variantu šķirošana nebūs nepieciešama; pierādījumus uzdevumos, kas saistīti ar orientētā laukuma jēdzienu, varēsim veikt „uzreiz vispārīgā veidā”.

<u>Teorēma.</u> Ja dots ΔABC, tad patvaļīgam punktam M pastāv sakarība

$$(24) \qquad \frac{[BCM]}{[ABC]} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{[CAM]}{[ABC]} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{[ABM]}{[ABC]} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}\ .$$

▼ Mūsu pašreizējās zināšanas ļauj šo teorēmu pierādīt vienīgi, analizējot daudzus iespējamus gadījumus atkarībā no punkta M izvietojuma attiecībā pret ΔABC. Tas ir garlaicīgi un nav pamācoši. Tāpēc teorēmas pierādījumu atliksim līdz nodaļai „Vektoru pseidoskalārais reizinājums”, kur visus gadījumus varēsim aptvert ar vienu īsu spriedumu. Pašreiz teorēmas ilustrācijai atzīmēsim tikai, ka gadījumā, kad M - trijstūra ABC iekšējs punkts, teorēmas pareizība seko no formulas (12) 108. lpp; visiem trijstūriem ABC, BCM, CAM, ABM orientācijas ir vienādas, tāpēc

$$\frac{[BCM]}{[ABC]} = \frac{L(BCM)}{L(ABC)},\ \frac{[CAM]}{[ABC]} = \frac{L(CAM)}{L(ABC)},\ \frac{[ABM]}{[ABC]} = \frac{L(ABM)}{L(ABC)}.$$

Atzīmēsim, ka no iepriekš pierādītās teorēmas seko

$$(25) \qquad \frac{[BCM]}{[ABC]} + \frac{[CAM]}{[ABC]} + \frac{[ABM]}{[ABC]} = 1$$

Vienādības (24) un (25) ļauj secināt:

punkta M baricentriskās koordinātas trijstūrī ABC ir skaitļi $\frac{[BCM]}{[ABC]}, \frac{[CAM]}{[ABC]}, \frac{[ABM]}{[ABC]}$.

Turpmāk punkta M baricentriskās koordinātas trijstūrī ABC apzīmēsim ar M_A, M_B, M_C, t.i.,

$$M_A = \frac{[BCM]}{[ABC]},\ M_B = \frac{[CAM]}{[ABC]},\ M_C = \frac{[ABM]}{[ABC]}.$$

Punktu koordinātu formā apzīmēsim arī kā M (M_A, M_B, M_C), piemēram (skat. 107. – 108. lpp.):

$$I\left(\frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c}\right),\ H\left(\frac{1}{tgBtgC}; \frac{1}{tgAtgC}; \frac{1}{tgAtgB}\right) \text{ utt. } \blacktriangle$$

TEORĒMA PAR KOLINEARITĀTI.

Trīs punkti M, K, L atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} M_A & M_B & M_C \\ K_A & K_B & K_C \\ L_A & L_B & L_C \end{vmatrix} = 0 .$$

Pierādījums.

▼ Atceroties 93. lpp. minēto teorēmu, M, K un L atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja eksistē tādi skaitļi x, y, z, kas visi vienlaikus nav 0, ka

$$x + y + z = 0 \text{ un } x \cdot \overrightarrow{OM} + y \cdot \overrightarrow{OK} + z \cdot \overrightarrow{OL} = \vec{0} .$$

Izsakot $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OL}$ ar baricentrisko koordinātu palīdzību, iegūstam

$$x\left(M_A \cdot \overrightarrow{OA} + M_B \cdot \overrightarrow{OB} + M_C \cdot \overrightarrow{OC}\right) + y\left(K_A \cdot \overrightarrow{OA} + K_B \cdot \overrightarrow{OB} + K_C \cdot \overrightarrow{OC}\right) +$$

$$+ z\left(L_A \cdot \overrightarrow{OA} + L_B \cdot \overrightarrow{OB} + L_C \cdot \overrightarrow{OC}\right) = \vec{0} ,$$

ko var pārrakstīt kā

$$(27)\qquad (x \cdot M_A + y \cdot K_A + z \cdot L_A) \cdot \overrightarrow{OA} + (x \cdot M_B + y \cdot K_B + z \cdot L_B) \cdot \overrightarrow{OB} +$$

$$+ (x \cdot M_C + y \cdot K_C + z \cdot L_C) \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} .$$

Ievērosim, ka $(x \cdot M_A + y \cdot K_A + z \cdot L_A) + (x \cdot M_B + y \cdot K_B + z \cdot L_B) + (x \cdot M_C + y \cdot K_C + z \cdot L_C) =$
$= x(M_A + M_B + M_C) + y(K_A + K_B + K_C) + z(L_A + L_B + L_C) = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = x + y + z = 0$.

Tā kā punkti A, B, C neatrodas uz vienas taisnes, tad formulā (27) visām iekavām jābūt 0; iegūstam, ka vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x \cdot M_A + y \cdot K_A + z \cdot L_A = 0 \\ x \cdot M_B + y \cdot K_B + z \cdot L_B = 0 \\ x \cdot M_C + y \cdot K_C + z \cdot L_C = 0 \end{cases}$$

jāeksistē nenulles atrisinājumam, kas savukārt ir ekvivalents nosacījumam (26). Līdz ar to teorēma pierādīta. ▲

Piemērs.

Pierādīsim vēlreiz Menelāja teorēmu (skat. 44. lpp.)

Ja punkts C_1 atrodas uz taisnes AB, tad tā baricentriskās koordinātas ir $\left(\dfrac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}}, \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}, 0\right)$. Līdzīgi B_1 un A_1 baricentriskās koordinātas ir attiecīgi $\left(\dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{AC}}, 0, \dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\right)$ un $\left(0, \dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{BC}}, \dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}\right)$. Saskaņā ar teorēmu par kolinearitāti A_1, B_1, C_1 atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{BC}} & \dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} \\ \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{AC}} & 0 & \dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}} \\ \dfrac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}} & \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{jeb} \qquad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1C} & \overline{BA_1} \\ \overline{B_1C} & 0 & \overline{AB_1} \\ \overline{C_1B} & \overline{AC_1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Izvēršot determinantu, šis nosacījums līdzvērtīgs ar

$$\overline{A_1C}\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{C_1B}+\overline{BA_1}\cdot\overline{B_1C}\cdot\overline{AC_1}=0$$

$$\left(-\overline{CA_1}\right)\cdot\overline{AB_1}\left(-\overline{BC_1}\right)=-\left(-\overline{A_1B}\right)\cdot\overline{B_1C}\cdot\left(-\overline{C_1A}\right)$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}=-1, \text{ k.b.j.}$$

Uzdevumi.

Uzdevumos 1.-3. lietoti apzīmējumi AB = c, BC = a, CA = b, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, $r-\Delta ABC$ ierādiuss, r_a, r_b, r_c - atbilstoši tā pierādiusi, I - iecentrs, I_a, I_b, I_c - piecentri, O - patvaļīgs punkts.

1. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB, BC, CA atbilstoši punktos C_1, A_1, B_1.

a) izmantojot Čevas teorēmu, pierādi, ka taisnes AA_1, BB_1, CC_1 krustojas vienā punktā Z (Žergona punkts),

b) pierādi, ka $\overrightarrow{OZ}=\dfrac{r_a\cdot\overrightarrow{OA}+r_b\cdot\overrightarrow{OB}+r_c\cdot\overrightarrow{OC}}{r_a+r_b+r_c}$.

2. Trijstūra ABC pieriņķa līnijas pieskaras malām AB, BC, CA atbilstoši punktos C_2, A_2, B_2.

a) izmantojot Čevas teorēmu, pierādi, ka taisnes AA_2, BB_2, CC_2 krustojas vienā punktā N (Nāgela punkts),

b) pierādi, ka $\overrightarrow{ON}=\dfrac{(p-a)\cdot\overrightarrow{OA}+(p-b)\cdot\overrightarrow{OB}+(p-c)\cdot\overrightarrow{OC}}{p}$.

3. a) pierādi, ka taisnes, kas simetriskas trijstūra mediānām attiecībā pret atbilstošajām bisektrisēm, krustojas vienā punktā L (Lemuāna punkts),

b) pierādi, ka $\overrightarrow{OL}=\dfrac{a^2\cdot\overrightarrow{OA}+b^2\cdot\overrightarrow{OB}+c^2\cdot\overrightarrow{OC}}{a^2+b^2+c^2}$.

4. Pierādīt, ka

$$\overrightarrow{OI_a}=\frac{-a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{-a+b+c}.$$

Atrast analogas formulas vektoriem $\overrightarrow{OI_b}$ un $\overrightarrow{OI_c}$.

5. Iegūt trijstūra mediānu krustpunkta rādiusvektora formulu ar baricentrisko koordinātu palīdzību.

6. Vispārināt trijstūra augstumu krustpunkta rādiusvektora formulu (skat. 82. lpp.) platleņķa trijstūra gadījumam.

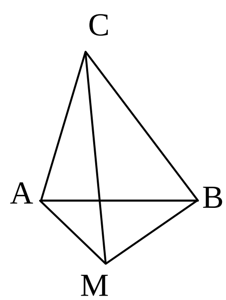
7. Pierādīt, ka patvaļīgā trijstūrī iecentrs, mediānu krustpunkts un Nāgela punkts (skat. 2. uzd.) atrodas uz vienas taisnes (Nāgela taisne).

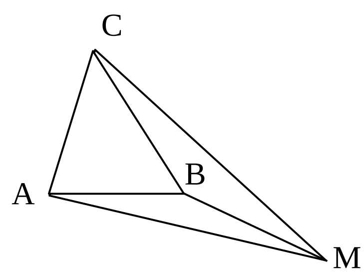
8. Pierādīt, ka uz Nāgela taisnes (skat. 7. uzd.) atrodas arī ΔABC malu viduspunktu veidotā trijstūra iecentrs.

9. Izmantojot 2. uzdevuma rezultātu, izsaki attiecības, kādās Nāgela punkts dala nogriežņus AA_1, BB_1, CC_1, ar ΔABC malu garumiem.

10. Pierādi, ka Lemuāna punkts (skat. 3. uzd.) atrodas uz taisnes, kas iet caur malas viduspunktu un pret to vilktā augstuma viduspunktu.

11.* Pierādi formulu (24) gadījumiem, kas attēloti 106. zīm.





106. zīm.

12.[k] Pamēģini iegūt rezultātus, kas analogi 7., 8. un 9. uzdevuma rezultātiem, ja Nāgela punkta (skat. 2. uzd.) vietā apskata Žergona punktu (skat. 1. uzd.)

13. Kādu figūru aizpilda tie punkti, kuriem viena no baricentriskajām koordinātām ir

a) nulle,

b) vieninieks,

c) cita konstante?

14. Pieņemsim, ka dots punkts M (M_A, M_B, M_C) un taisne AM krusto taisni BC. Pierādīt, ka krustošanās notiek punktā $A_1\left(0, \frac{M_B}{M_B+M_C}, \frac{M_C}{M_B+M_C}\right)$.

15.[k] Izstrādājiet baricentrisko koordinātu fizikālu interpretāciju gadījumam, kad tās var būt arī 0 vai negatīvi skaitļi; izmantojiet nulles masas un negatīvas masas. Interpretācijas izveides gaitā ieviesiet patvaļīgu (pozitīvu, negatīvu vai nulles) masu centra jēdzienu un pierādiet tā īpašības, kas analogas jau pierādītajām teorēmām par masu centra rādiusvektoru (skat. 102. lpp.), par masu centra rādiusvektora sakaru ar vispārīgajām baricentriskajām koordinātām (skat. 109. lpp.). ***Aplūkojiet tikai gadījumu, kad visu izvietoto masu summa nav 0.***

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA" GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. ***Invariantu metodes elementi.*** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. ***Leņķu ģeometrijas uzdevumi.*** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Andžāns, L. Egle, L. Ramāna, B. Johannessons. ***Vektori. 1. daļa.*** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. ***Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.*** Rīga: LIIS, 1999.
5. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. ***Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.*** Rīga: LU, 2001.
6. A. Cibulis. ***Pentamino. 1. daļa.*** Rīga: LU, 2001.
7. A. Andžāns, J. Kluša. ***Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.*** Rīga: LU, 2001.
8. E. Fogels, E. Lejnieks. ***Trijstūru ģeometrija.*** Rīga: LU, 2001.
9. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. ***Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.*** Rīga: LU, 2001.
10. A. Bērziņš. ***Algebra.*** Rīga: LU, 2001.
11. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. ***Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1999./2000.m.g.*** Rīga: LU, 2001.
12. A. Cibulis. ***Pentamino. 2. daļa.*** Rīga: LU, 2001.
13. I. Saulīte. ***Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.*** Rīga: LU, 2002.
14. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. ***Algoritmisko uzdevumu krājums.*** Rīga: LIIS, 2004.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. ***Dirichlet Principle. Part I.*** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, B. Johannesson. ***Dirichlet Principle. Part II.*** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
17. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. ***„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.*** Rīga: LU, 2006.
18. A. Cibulis. ***Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.*** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
19. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. ***Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.*** Rīga: LU, 2006.
20. M. Lehtinen. ***The Nordic Mathematical Competition 1997. – 2006. Problems and Solutions.*** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. ***Vektori. 1. daļa.*** Rīga: LU, 2006.