Uzdevumi algoritmikā un algoritmiskajā kombinatorikā ar atrisinājumiem

Andris Ambainis, Agnis Andžāns, Aivars Bērziņš

Rīga, 2004.

Anotācija

Šeit aplūkoti uzdevumi un to atrisinājumi, kuri izmantojami darbā ar matemātikā ieinteresētiem skolēniem. Tajās tēmās, par kurām ir labas grāmatas, dotas atsauces uz tām un uzdevumi izklāstīti īsāk, neatkārtojot to, kas rakstīts minētajās grāmatās. Uzdevumi izvēlēti tā, lai aptvertu iespējami dažādas tēmas, risināšanas idejas un tehniskus paņēmienus.

Saturs

1 Variantu skaitīšana

1.1 Ievads

Galvenie fakti, kas jāzina par variantu skaitīšanu, ir šādi:

Summas likums.

Reizinājuma likums.

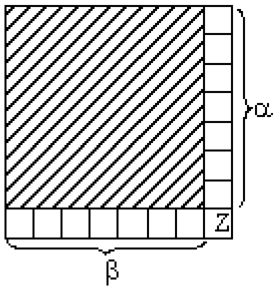
Formulas permutāciju, variāciju un kombināciju skaitam, to izvedumi.

Vienkāršus ievaduzdevumus, kur šie fakti var tikt pielietoti tiešā veidā, var atrast, piemēram, [L]. Nākošajās sadaļās tiek doti sarežģītāki uzdevumi par variantu skaitīšanu.

1. uzdevums. *[2002.g. Latvijas valsts olimpiāde] Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta 0 vai 1 tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis. Cik ir dažādu kvadrāta aizpildījumu ar šādu īpašību? (Divi aizpildījumi skaitās dažādi, ja tie atšķiras kaut vienā rūtiņā).*

Atrisinājums. Izdalām kvadrātā apakškvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas un aizpildām to ar nullēm un vieniniekiem patvaļīgā secībā. Tā kā šādu aizpildāmu rūtiņu ir 49, katru aizpilda neatkarīgi no citām un katrā rūtiņā var ierakstīt vienu no diviem simboliem, tad dažādo aizpildījumu ir $\underbrace{2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}_{49} = 2^{49}$.

Lai uzdevums būtu atrisināts, mums vēl jāpierāda, ka atlikušo "apmali" **var** aizpildīt tā, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos, un to var izdarīt **vienā vienīgā veidā** (skat. zīm.).



Apgabalos α un β ierakstāmie skaitļi ir noteikti **viennozīmīgi**. Iesvītrotajā apgabalā un α ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis; tāpat iesvītrotajā apgabalā un β ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis (7 rindiņu resp. 7 kolonnu summa). Tāpēc α un β ierakstītās skaitļu summas vai nu abas ir pāra, vai abas – nepāra. Tāpēc Z skaitli **var** ierakstīt, un tas ir noteikts **viennozīmīgi**.

1.2 C_n^k īpašības

2. uzdevums. Pierādīt, ka

1. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$;

2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_k^k$;

3. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$;

4. $1C_n^0 + 2C_n^1 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$;

5. $2\cdot 1C_n^2 + 3\cdot 2C_n^3 + ...n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$;

6. $C_m^0 C_m^m + C_m^1 C_m^{m-1} + ... + C_m^m C_m^0 = C_{2m}^m$;

7. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... = 0$.

Atrisinājums. Vairākus šī uzdevuma punktus var risināt ar interpretāciju palīdzību.

1. Formula C_{n+1}^{k+1} apraksta, cik veidos no n+1 elementiem var izvēlēties k+1 elementus. Izvēlamo elementu kopas var sadalīt divās grupās.
Pirmās grupas kopas nesatur pamatkopas pirmo elementu; tad no atlikušajiem elementiem ir jāizvēlas k+1 elementi. Tādu kopu skaits ir C_n^{k+1}.
Otrās grupas kopas satur pamatkopas pirmo elementu; tad no atlikušajiem elementiem ir jāizvēlas k elementi. Tādu kopu skaits ir C_n^k.
Pierādāmā formula seko no summas likuma.

2. Formulu pierāda atkārtoti pielietojot 1. punkta formulu:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k \ldots + C_k^k$$

3. Abās vienādības pusēs ir uzrakstīts n-elementu kopas apakškopu skaits. Doto formulu var pierādīt arī uzrakstot Ņūtona binoma formulu binomam $(1+1)^n$.

4. Uzrakstīsim Ņūtona binoma formulu binomam $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

Atvasināsim abas formulas puses.

$$n(1+x)^{n-1} = 1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1}.$$

Ievietojot formulā $x=1$, iegūstam pierādāmo vienādību.
Dosim vēl otru risinājumu.
Apskatām veidu skaitu, kā var izvēlēties kopas {1, ..., n} netukšu apakškopu un vienu pie tās piederošu elementu (vai citiem vārdiem, komandu, kurā ir daži vai visi no dotajiem n cilvēkiem un komandas kapteini). Var sākumā izvēlēties elementu skaitu, tad komandu, tad kapteini. Ja par elementu skaitu izvēlas i, tad komandu var izvēlēties C_n^i veidos. Tad, kad izvēlēta komanda, kapteini var izvēlēties i veidos. Summējot pa visiem i, iegūst

$$1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n$$

veidus. Var arī sākumā izvēlēties kapteini un tad pārējos komandas dalībniekus. Tad, kapteini var izvēlēties n veidos, bet pārējo dalībnieku kopu 2^{n-1} veidos. (Tā var būt jebkura (arī tukša) pārējo $n-1$ dalībnieku kopas apakškopa.) Šādi skaitot, veidu skaits ir $n2^{n-1}$. Šie divi lielumi ir vienādi, jo tie apraksta vienu un to pašu veidu skaitu.

5. Pierāda līdzīgi 4. punkta formulai; tikai Ņūtona binoma formula ir jāatvasina divas reizes.

6. Abās formulas pusēs uzrakstīts, cik m-elementu apakškopu ir $2m$-elementu apakškopai.

7. Šeit uzrakstīta Ņūtona binoma formula binomam $(1-1)^n$.

1.3 Uzdevumi, kas risināmi, lietojot kombināciju skaita formulu (un citus līdzīgus spriedumus)

3. uzdevums. *[Indija, 1994] Atrast nedeģenerētu trijstūru, kam visas virsotnes pieder kopai*

$$\{(s,t) \in Z \mid 0 \le s \le 4,\, 0 \le t \le 4\},$$

skaitu.

Atrisinājums. Trīs punktus norādītajā kvadrātā var izvēlēties C_{25}^3 veidos. Saskaitīsim, cik no šiem trijniekiem veido deģenerētu trijstūri, t.i., punkti atrodas uz vienas taisnes.
Paralēlajā un horizontālajā virzienā tādu trijnieku ir $10 \cdot C_5^3$. Paralēli diagonālēm ir $2 \cdot \left(2 \cdot C_3^3 + 2 \cdot C_4^3 + C_5^3\right)$ trijnieki. Virzienos $(1,\pm 2), (2,\pm 1)$ var izvēlēties $4 \cdot 4 = 16$ trijniekus. Citos virzienos 3 punktus izvēlēties nevar.
Atņemot no kopīgā trijnieku skaita trijnieku skaitu, kas atrodas uz vienas taisnes, iegūstam kopējo nedeģenerēto trijstūru skaitu. Tas ir 2152.

4. uzdevums. *[[MC95],Taiwan] Viesībās piedalās n viesi. Katram ir tieši 8 draugi. (Draudzības ir abpusējas: ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs.) Katriem 2 draugiem ir tieši 4 cilvēki, kas draudzējas ar viņiem abiem. Katriem 2 cilvēkiem, kas nav draugi, ir tieši 2 cilvēki, kas draudzējas ar viņiem abiem. Atrast n vērtību.*
Atrisinājums. Kopējais draudzību skaits ir 4*n*.
Pavisam ir $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ delegātu trijnieku.
Trijnieku, kuros visi delegāti ir draugi, ir $\frac{4n \cdot 4}{3}$.
Trijnieku, kuros ir divas draudzības, ir $\left(\frac{n(n-1)}{2} - 4n\right) \cdot 2$.
Trijnieku, kuros ir viena draudzība, ir $4n(n-12)$.
Trijnieku , kuros nav nevienas draudzības, ir $\left(\frac{n(n-1)}{2} - 4n\right) \cdot \left(\frac{n-16}{3}\right)$.
Iegūstam vienādību
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{16}{3} + \left(\frac{n(n-1)}{2} - 4n\right) \cdot 2 + 4n(n-12) + \left(\frac{n(n-1)}{2} - 4n\right) \cdot \left(\frac{n-16}{3}\right).$$
Izdalot vienādību ar *n* un pareizinot ar 6, pēc vienkāršošanas iegūstam vienādību
$$0 = 8n - 168.$$
Atbilde: *n* = 21.

5. uzdevums. *[[KV],M1458, 1994.g Krievijas olimpiāde] Regulārā (6n+1) stūrī S virsotnes nokrāsotas sarkanas, pārējās – zilas. Pierādīt, ka vienkrāsainu vienādsānu trijstūru daudzums nav atkarīgs no tā, kuras k virsotnes ir sarkanas.*
Atrisinājums. Lai saīsinātu pierakstu, vienādsānu trijstūrus ar vienas krāsas virsotnēm regulāra (6*n*+1)-stūra virsotnēs sauksim vienkārši par trijstūriem.
Ievērosim, ka katra daudzstūra diagonāle un katra tā mala pieder tieši trim dažādiem trijstūriem (šis fakts izpildās tikai pie nosacījuma, ka daudzstūra malu skaits, dalot ar 6, dod atlikumu 1 vai 5).
Apzīmēsim ar n_{zz}, n_{zs} un n_{ss} diagonāļu un malu skaitu, kuru galapunkti nokrāsoti zilā un zilā krāsās, zilā un sarkanā krāsās un sarkanā un sarkanā krāsās atbilstoši. Ar t_3, t_2, t_1, t_0 apzīmēsim trijstūru skaitu, kuriem ir 3, 2, 1, 0 zilas virsotnes.
Tad $3 \cdot n_{zz} = 3t_3 + t_2$ (pamatojiet šo formulu!).
Līdzīgi pierāda formulas $3n_{zs} = 2t_2 + 2t_1$ un $3_{ss} = t_1 + 3t_0$. No šīm vienādībām seko, ka
$$t_3 + t_0 = n_{ss} + n_{zz} - \tfrac{1}{2} n_{zs2} = \tfrac{1}{2} S(S-1)) + \tfrac{1}{2} Z(Z-1) - \tfrac{1}{2} Z \cdot S,$$
kur *Z* ir zilo virsotņu skaits. Tā kā $Z = 6n + 1 - S$, tad uzdevuma apgalvojums pierādīts.

6. uzdevums. *[PSRS, 1990] Ir 30 senatori. Katri 2 no tiem vai nu draudzējas vai arī ir ienaidnieki. Katram senatoram ir 6 ienaidnieki. Katri 3 senatori veido komisiju. Cik ir komisiju, kur visi 3 ir draugi vai visi 3 ir ienaidnieki?*

Atrisinājums. Aplūkosim vienu senatoru A. Saskaitīsim cik ir tādu senatoru pāru B, C, ka viens no tiem ir A draugs, bet otrs ir A ienaidnieks. Tādu pāru ir 6·23=138. Veidojas senatoru trijnieks, visi nav vienlaicīgi draugi vai ienaidnieki. Tātad pavisam šādu trijnieku ir $\frac{138\cdot 30}{2}=4060$, jo katrs trijnieks ieskaitīts divas reizes. Tātad komisiju, kur visi 3 ir draugi vai visi 3 ir ienaidnieki ir $C_{30}^{3}-2070=1990$.

7. uzdevums. *[Žūrija, 1989, ROK5] Apskatām regulāru (2n+1) stūri.*
Cik ir trijstūru ar virsotnēm (2n+1)-stūra virsotnēs, kuri satur (2n+1)-stūra centru?

Atrisinājums. Fiksēsim vienu virsotni A. No tās uz dažādām pusem atliksim lokus, kuru galapunktus uzskatīsim par trijstūra virsotnēm B, C. Par vienības loku uzskatīsim $\frac{2\pi}{2n+1}$. Tātad lokus AB un AC raksturosim ar naturāliem skaitļiem x un y, kas parāda, cik vienības lokus tie satur. Lai trijstūris ABC saturētu daudzstūra centru, jāizpildās nevienādībām $x\le n,\ y\le n,\ x+y\ge n+1$. Šos nocījumus apmierina šādi pāri: $(1, n)$, $(2, n-1)$, $(2, n)$, $(3, n-2)$, $(3, n-1)$, $(3, n)$, ..., (n, n). Viegli aprēķināt, ka to skaits ir $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Tātad prasīto trijstūru skaits ir $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

8. uzdevums. *[[SP96],73.uzd.] Ir 2000 pilsētas. Katras 2 savienotas ar ceļu. Transporta ministrija izskatīja visus iespējamos variantus, kā ieviest vienvirziena kustību uz visiem ceļiem, un atmeta tos, kuros nebija iespējams aizbraukt no katras pilsētas uz katru citu. Pierādīt, ka tika atmests mazāk par pusi no visiem variantiem.*

Atrisinājums. Pavisam vienvirziena kustību var ievest $2^{\frac{2000\cdot1999}{2}}$ veidos. Aplūkosim situāciju, kad ir pilsēta A, no kuras nevar nokļūt visās pilsētās. To pilsētu kopu, kurās var nokļūt no A, apzīmēsim ar [A]. Pieņemsim, ka [A] satur k pilsētas. Tad no atlikušajām pilsētām uz visām [A] pilsētām ceļu virzieni fiksēti ved no ārpuses uz [A]. Tātad kustību var ievest $2^{\frac{2000\cdot1999}{2}-k\cdot(2000-k)}$ veidos. Tātad nederīgo variantu skaits nepārsniedz $2^{1999000-1\cdot1999}\cdot 2000$. Šis skaitlis acīmredzami nepārsniedz pusi no visiem variantiem, jo $\frac{2000}{2^{1999}}<\frac{1}{2}$.

9. uzdevums. *[[MC95],Balkaniāde]* $S=\{(s,t)\,|\,0\le s\le n, 0\le t\le n\}$. *T - visu kvadrātu, kam virsotnes pieder S, kopa. Ar ak apzīmējam punktu pāru, kas ir virsotnes tieši k kvadrātiem no kopas T, skaitu. Pierādīt, ka* $a_0=a_2+2a_3$.

Atrisinājums. Atzīmēsim, ka punktu pāris nevar piederēt vairāk kā trim *T* elementiem, bet var piederēt trim *T* elementiem (uzzīmējiet piemēru!).

Pavisam kopā ir n^2 punktu, tātad $\frac{n^2(n^2-1)}{2}=\frac{(n-1)n^2(n+1)}{2}$ punktu pāri. Protams, ka šis skaits ir vienāds ar $a_0+a_1+a_2+a_3$. Katram kvadrātam ir 6 virsotņu pāri. Tātad $a_1+2a_2+3a_3$ ir kopējais kvadrātu skaits pareizināts ar 6. Tagad atzīmēsim, ka

$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + 2a_2 + 3a_3) = a_0 - a_2 - 2a_3$. Atlicis pierādīt, ka kopējais kvadrātu skaits ir $\frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}$. Pārbaudiet to patstāvīgi.

10. uzdevums. *[[MC95],ASV] Starp n cilvēkiem ir q draugu pāri. Pierādīt, ka ir cilvēks, starp kura ienaidniekiem ir ne vairāk kā* $q\left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ *draugu pāri. (2 cilvēki ir uzskatāmi par ienaidniekiem, ja viņi nav draugi.)*
Atrisinājums. Saskaita cilvēku trijniekus A, B, C, kur B un C ir draugi, bet A ir viņu abu ienaidnieks. Tos skaita, sākumā saskaitot trijniekus, kur ir vismaz viens draugu pāris un tad no šī skaita atņemot tos trijniekus, kur ir 2 draugu pāri. Iegūst, ka šādu trijnieku ir ne vairāk kā $qn\left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$. Tādēļ kāds cilvēks ir A priekš ne vairāk kā $q\left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ trijniekiem.

1.4 Redukcijas

Dažreiz iespēja pielietot kombināciju skaita formulu rodas, ja uzdevums tiek aizstāts ar citu, ekvivalentu uzdevumu.

11. uzdevums. *Cik ir n-ciparu skaitļu, kuriem ciparu summa ir 9?*
Atrisinājums. Aizstāj ciparu 0 ar 0, 1 ar 10, 2 ar 110, utt. Tādā veidā tiek nodibināta savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp šādiem skaitļiem un no 0 un 1 sastāvošām virknītēm garumā *n*+9, kurās pirmais cipars ir 1, bet pēdējais - 0. Viegli redzēt, ka šādu virknīšu ir tieši C_{n+7}^{8}.

Tālāk seko vēl daži šāda tipa uzdevumi. Citas variācijas par šo ideju var atrast [[L],134.-136.lpp] un [[R82],11.-13. lpp].

12. uzdevums. *Cik ir n-ciparu skaitļu, kuru cipari veido nedilstošu virkni?*
Atrisinājums. Apzīmēsim ar a_k cipara *k* skaitu aplūkojamajā *n*-ciparu skaitlī. Tad $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = n$. Mums jānoskaidro cik veidos skaitli *n* var izteikt kā deviņu nenegatīvu skaitļu summu. Uzzīmēsim rindā *n* punktus un atdalīsim tos ar 8 svītriņām. Punktu skaits starp svītriņām atbilst skaitlim a_k. Tātad varam uzskatīt, ka mums ir *n*+8 punkti, no kuriem 8 ir jāpārvērš par strīpiņām.. To var izdarīt C_{n+8}^{8} veidos. Tā arī ir atbilde uz doto jautājumu.

13. uzdevums. *Cik veidos var salikt n bumbiņas m kastēs, ja visas bumbiņas ir vienādas, bet kastes – atšķirīgas?*
Atrisinājums. Tāpat kā iepriekšējā uzdevumā saliksim bumbiņas rindiņā un ar *m*-1 strīpiņu tās atdalīsim pa grupām (kastēm).
Atbilde: C_{n+m-1}^{m-1}.

14. uzdevums. *Cik veidos var izvēlēties m no n-stūra malām tā, lai nekādām 2 izvēlētajām malām nebūtu kopīga galapunkta?*
Atrisinājums. Sanumurēsim daudzstūra virsotnes pa riņķi no 1 līdz *n*. Aplūkosim pirmo gadījumu, kad nogrieznis A_1A_2 ir izvēlēts. Tad nogriežņu izvietojumu pa apli raksturo *m* atstarpes starp izvēlētajām malām. Tie ir *m* naturāli skaitļi s_k, kas summā dod *n-m*. Tos var

aizvietot ar m nenegatīviem skaitļiem, kas summā dod n-2m. Tos var izvēlēties C_{n-m-1}^{m-1} veidos. Ja, nogriežņa A_1A_2 nav, tad aplūkojam m+1 atstarpes, pirmā un pēdējā atstarpes satur punktu A_1. Turklāt pēdējā atstarpe var būt arī 0. Ja tā ir 0, tad variantu skaits analoģiski ir C_{n-m-1}^{m-1}. Ja pēdējā atstarpe nav 0 , tad variantu skaits ir C_{n-m}^{m}.

Atbilde: $2C_{n-m-1}^{m-1}+C_{n-m}^{n}$.

15. uzdevums. *[Vietnam, 1996] Atrast virknīšu (x_1, x_2, ..., x_k) skaitu, kas ir izveidotas no skaitļiem 1, 2, ..., n tā ka katrs skaitlis ir virknītē ne vairāk kā 1 reizi un izpildās vismaz viens no 2 sekojošiem nosacījumiem:*

1. eksistē i, j tādi, ka i < j, bet $x_i > x_j$,

2. eksistē i tāds, ka x_i–1 nedalās ar 2.

16. uzdevums. *Taisnstūris ar izmēriem m×n kas sadalīts rūtiņās 1×1. Cik ir ceļu, kas sākas apakšējā kreisajā stūrī, iet tikai pa rūtiņu malām uz augšu vai pa labi un beidzas augšējā labajā stūrī?*

Atbilde: C_{n+m}^{m}.

Atrisinājums. Katrs ceļš sastāv no n+m posmiem ar garumu 1, no kuriem jebkuri m var būt vertikāli. Tādējādi tiek nodibināta atbilstība starp ceļiem un kombinācijām no n+m pa m.

17. uzdevums. *[[VS],76. uzd.] ABCD ir taisnstūris uz rūtiņu lapas, kura malas atrodas uz rūtiņu līnijām. Zināms, ka AD = k·AB. Apskata ceļus ar garumu AB+AD, kas sākas A un ved uz C, ejot tikai pa rūtiņu līnijām. Pierādīt, ka ceļu, kam pirmais posms atrodas uz AD, ir k reizes vairāk nekā ceļu, kam pirmais posms atrodas uz AB.*

Atrisinājums. Apzīmēsim AB garumu ar n. Izmantojot 15. uzdevumu secinām, ka ceļu skaits, kuram pirmais posms atrodas uz AD ir C_{n+kn-1}^{n}, bet ceļu skaits, kuram pirmais posms atrodas uz AB, ir C_{n-1+kn}^{n-1}. Tad $\frac{C_{n+kn-1}^{n}}{C_{n+kn-1}^{n-1}}=\frac{(n+nk-1)!\cdot(n-1)!(kn)!}{n!(kn-1)!(n+nk-1)!}=k$. Apgalvojums pierādīts.

1.5 Loģiskie spriedumi

Šeit apkopoti uzdevumi, kuros nozīmīga vieta ir spriedumiem par skaitāmo objektu struktūru (piemēram, to, kādas tieši var būt skaitāmās permutācijas).

18. uzdevums. *[[MC95],Turcija] Cik ir skaitļu 1, ..., n permutāciju x_1, x_2, ..., x_n, tādu, ka $x_i \geq i$*

1. *tieši vienam i?*

2. *tieši diviem i?*

Atrisinājums. 1. Tā kā $x_1 \geq 1$, tad visiem pārējiem locekļiem jāizpildās nevienādībai $x_k < k$. Taču, ja $x_k = n$, tad šāda nevienādība nevar izpildīties. Tas nozīmē, ka $x_1 = n$ un visiem pārējiem locekļiem izpildās nevienādība $x_k < k$. Tātad skaitlis n-1 var atrasties tikai n-tajā vietā. Līdzīgi skaitlim n-2 atliek tikai n-1 pozīcija. Tā turpinot, mēs iegūstam vienīgo permutāciju n, 1, 2, 3, ..., n-1.

19. uzdevums. *Par skaitļu 1, 2, 3, ..., n permutācijas (i_1, i_2, ..., i_n) nekustīgu punktu sauc katru tādu skaitli k, ka k=i_k. Apzīmēsim ar f(m) to permutāciju skaitu, kurām ir tieši m nekustīgi punkti. Pierādīt, ka*

$$1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + ... + n \cdot f(n) = n!$$

Atrisinājums. Acīmredzot kreisajā pusē ir **visu** permutāciju **visu** nekustīgo punktu kopskaits. Tā kā katrs skaitlis ir nekustīgais punkts tieši $(n-1)!$ permutācijās, tad šis kopskaits ir $n \cdot (n-1)! = n!$, k.b.j.

20. uzdevums. *[[ABS],89.175.] Cik ir skaitļu 1, ..., n permutāciju, kurās pirms jebkura skaitļa k, kas nav pirmajā vietā, ir vai nu k–1, vai k+1?*

Atrisinājums. Pieņemsim, ka pirmajā vietā ierakstīts skaitlis *x*, tad aiz viņa seko *x*+1, vai *x*-1. Viegli redzēt, ka pirmajā gadījumā trešais skaitlis būs *x*+2, u.t.t.. Otrajā gadījumā trešais loceklis būs *x*-2, u.t.t. Tātad iespējamas divas šādas permutācijas: 1, 2, 3, ..., *n* un *n*, *n*-1, *n*-2, ... 2, 1.

1.6 Rekurentās sakarības

21. uzdevums.

1. *Cik veidos var sagriezt taisnstūri 2×12 gabaliņos 1×2?*

2. *Tas pats taisnstūrim 3×12.*

Atrisinājums. 1. Ar a_k apzīmēsim, cik veidos var sagriezt taisnstūri 2×*k* gabaliņos 1×2. Viegli redzēt, ka $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Aplūkosim taisnstūri 2×*n*. Tā kreiso apakšējo rūtiņu var nosegt divos variantos:

1) ar vertikālu domino; tad pirmā kolonna ir nosegta un atliek noklāt taisnstūri 2×(*n*-1)

2) ar horizontālu domino, bet tad obligāti virs viņa jaievieto otrs horizontāls domino, un mums atliek noklāt taisnstūri 2×(n-2).

No summas likuma izriet rekurenta sakarība $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Izmantojot šo sakarību, iegūstam virkni 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Tātad pavisam ir 233 sadalījuma veidi.

22. uzdevums. *[2001.g. Latvijas matemātikas olimpiādes 2.kārta] Dots, ka n≥2 - naturāls skaitlis. Virkni, kurā pa reizei izrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot, sauksim par labu, ja tieši viens skaitlis ir lielāks par tam šajā virknē sekojošo skaitli. Cik ir labu virkņu? Atbildiet uz šo jautājumu*

a) *ja a=5,*

b) *vispārīgā gadījumā.*

Atrisinājums. Apskatīsim uzreiz vispārīgo gadījumu. Labo virkņu skaitu apzīmēsim ar *f*(*n*). Viegli pārbaudīt, ka *f*(2)=1. Apskatīsim labās virknes garumā *n*+1. Tās iedalās divās grupās:

1) virknes, kurās pēdējais loceklis ir *n*+1. Skaidrs, ka šādu virkņu ir *f*(*n*), jo saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem pa kreisi no *n*+1 jāizvieto skaitļi no 1 līdz *n*.

2) virknes, kurās *n*+1 atrodas 1., 2., ..., *n*-jā vietā. Tad *n*+1 noteikti ir lielāks par savu sekotāju. Tāpēc gan pa kreisi, gan pa labi no *n*+1 skaitļi ir monotoni augošā secībā. Tātad katram šādam *n*+1 novietojumam virkni viennozīmīgi nosaka to skaitļu **kopa**, kas atrodas pa kreisi no *n*+1. Par šādu kopu var kalpot jebkura kopas {1; 2; ...; *n*} apakškopa (ieskaitot tukšo), kas nesakrīt ar pašu {1; 2; ...; *n*}; tādu apakškopu ir 2^n-1, tātad apskatāmā tipa virkņu ir 2^n-1.

Rezultātā iegūstam $f(n+1)=f(n)+2^n-1$.

Saskaitot vienādības

$f(n)=f(n-1)+2^{n-1}-1$

$f(n-1)=f(n-2)+2^{n-2}-1$
...
$f(3)=f(2)+2^2-1$
$f(2)=1$
iegūstam $f(n)=1+(2^2+2^3+...+2^{n-1})-(n-2)=2^n-n-1$.
Pie $n=5$ labo virkņu skaits ir 26.

23. uzdevums. *[Latvijas valsts olimpiāde, 2003] Deviņu ciparu virkni sauc par labu, ja tā vienlaicīgi apmierina šādus divus nosacījumus:*
a) *tā satur visus ciparus no 1 līdz 9,*
b) *neviens cipars, sākot ar otro, nav par 1 lielāks nekā iepriekšējais cipars.*
Cik ir labu virkņu?
Atrisinājums. Apzīmēsim ar $f(n)$ tādu virkņu skaitu, kas satur katru no cipariem 1, 2, ..., n tieši vienu reizi un kurās neviens cipars nav par 1 lielāks nekā iepriekšējais; šādas virknes sauksim par n- labām virknēm (n = 1; 2; 3; ...; 9).
Mums jāaprēķina $f(9)$. Viegli saprast, ka $f(1) = 1$ un $f(2) = 1$ (attiecīgās labās virknes ir 1 un 2, 1).
Mēs pierādīsim, ka pie $1 \le n \le 7$

$$\textbf{(*)}\quad f(n+2) = (n+1)\cdot f(n+1)+n\cdot f(n)$$

Ja tas būs pierādīts, tad

$$f(3) = 2\cdot 1+1\cdot 1 = 3;$$
$$f(4) = 3\cdot 3+2\cdot 1 = 11;$$
$$f(5) = 4\cdot 11+3\cdot 3 = 53;$$
$$f(6) = 5\cdot 53+4\cdot 11 = 309;$$
$$f(7) = 6\cdot 309+5\cdot 53 = 2119;$$
$$f(8) = 7\cdot 2119+6\cdot 309 = 16687;$$
$$f(9) = 8\cdot 16687+7\cdot 2119 = 148329.$$

Atliek pierādīt (*).
Katru (n+2)– labu virkni var iegūt vienā no diviem veidiem:
a) vai nu (n+1) – labai virknei pievienojot ciparu n+2 jebkurā no n+1 vietām (pirms pirmā cipara, starp jebkuriem diviem blakus esošiem cipariem vai pēc pēdējā cipara, tikai ne tieši pēc cipara n+1); šādu (n+2)– labu virkņu ir $\boldsymbol{(n+1)f(n+1)}$, un tās ir tās, no kurām izsvītrojot ciparu (n+2), iegūst (n+1)– labu virkni,
b) vai arī ņemot virkni α, kas pa reizei satur ciparus 1, 2, 3, ..., n, n+1 un kurā ir **tieši viens** „aizliegtais” blakus esošo ciparu pāris (k; k+1), un ievietojot ciparu n+2, starp šiem cipariem k un k+1. Tās ir tās (n+2)– labās virknes, no kurām, izsvītrojot ciparu n+2, **neiegūst** (n+1)– labu virkni. Ievērosim, ka katram fiksētam k šādu virkņu α ir tieši $f(n)$. Tiešām, šādas virknes α iegūstamas, n– labā virknē aiz k ievietojot k+1, bet veco k+1 aizstājot ar k+2, k+2 – ar k+3, k+3 – ar k+4 utt. Tāpat no virknes α izsvītrojot k+1 un aizstājot k+2 ar k+1, k+3 – ar k+2 utt., iegūst n– labu virkni.
Tā kā virknē α cipars k var būt jebkurš no cipariem 1; 2; ...; n (virknē α ir arī cipars k+1), tad šādu virkņu α ir $\boldsymbol{n\cdot f(n)}$.
Līdz ar to formula (*) pierādīta.

24. uzdevums. *n dīvaiņi, katram no kuriem ir 1 cepure, grib samainīties cepurēm tā, lai katram būtu pa 1 cepurei, bet nevienam nebūtu savējā. Cik veidos to var izdarīt?*
Atrisinājums. Pavisam ir $N(A_i)=(n-1)!$ veidi, kad i-tais cilvēks saņem savu cepurīti. Līdzīgi ir $N(A_i, A_j)=(n-2)!$ veidu, kad savas cepures iegūst cilvēki *Ai* un *Aj*, utt. Izmantojot izslēgšanas un ieslēgšanas formulu, iegūstam galīgo atbildi

$$N\left(\overline{A_1}, \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}\right) = n! - S_1 + S_2 + \cdots (-1)^n S_n \Big) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} .$$

25. uzdevums. *[Baltijas ceļš, 1995] Cik veidos {1, ... , n} var sadalīt 3 netukšās kopās tā, lai nevienā kopā nebūtu 2 pēc kārtas esošu skaitļu?*
Atrisinājums. Uzrakstīsim rindiņā skaitļus no 1 līdz n un zem katra no tiem rakstīsim vienu no skaitļiem – grupas numuru. Pirmajā vietā mēs varam ierakstīt jebkuru skaitli 1, 2 vai 3. Katrā nākošajā vietā rakstām vienu no diviem skaitļiem, kas nesakrīt ar iepriekšējo. Tātad pavisam iegūstam $3 \cdot 2^{n-1}$ variantus. Tā kā grupas nav numurētas, tad šis skaits ir jādala ar 6. Iegūstam 2^{n-2} variantus. Starp šiem variantiem ir viens, kurā viena no grupām ir tukša. Tiešām, divās grupās skaitļus var sadalīt tikai vienā veidā: pāra skaitļi vienā grupā, bet nepāra skaitļi – otrā.
Atbilde: $2^{n-2} - 1$.

26. uzdevums. *[[MC95],Rumānija] Cik veidos var izkrāsot regulāra n-stūra virsotnes p krāsās (p > 2) tā, lai blakus punkti nebūtu vienā krāsā?*
Atrisinājums. Apzīmēsim ar a_n iespējamo krāsošanu skaitu. Pirmo virsotni var nokrāsot p veidos, katru nākošo var nokrāsot p-1 veidos. Kopā šādu krāsojumu skaits ir $p(p-1)^{n-1}$. Visi šie krāsojumi būs derīgi, izņemot tos krāsojumus, kad n-tā un pirmā virsotnes nokrāsotas vienādi. Uzskatīsim tagad šīs divas virsotnes par vienu, tad šādu krāsojumu skaits ir a_{n-1}. No šejienes iegūstam rekurentu formulu:

$$a_k = p(p-1)^{k-1} - a_{k-1}$$

Par bāzi ņemam vienādību $a_3 = p(p-1)(p-2)$.

27. uzdevums. *[ASV, 1996] Ar a_n apzīmējam n ciparu 0 un 1 virkņu, kas nesatur apakšvirkni 010, skaitu, bet ar b_n apzīmējam n ciparu 0 un 1 virkņu, kas nesatur apakšvirknes 0011 un 1100, skaitu. Pierādīt, ka $b_{n+1} = 2a_n$.*
Atrisinājums. Mēs sauksim binārās virknes (a_n) par A-virknēm, bet virknes (b_n) par B-virknēm. Katrai binārai virknei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eksistē atbilstoša binārā virkne $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ definēta ar formulu $y_0 = 0$ un $y_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i \pmod 2$. Viegli redzēt, ka šī atbilstība piekārto viennozīmīgi katrai binārai virknei no n elementiem virkni no n+1 elementa, kuras pirmais elements ir 0. Turklāt virkne $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satur elementu virkni 0, 1, 0 tad un tikai tad, ja atbilstošā virkne $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ satur apakšvirkni 0, 0, 1, 1 vai 1, 1, 0, 0. B tipa virkņu skaits no n+1 elementa, kuru pirmais loceklis ir 0, ir puse no visām tāda veida virknēm. No šejienes seko prasītais apgalvojums.

28. uzdevums. *[[VS],52.uzd.] Izteiksmē $x_1 : x_{2:} : \ldots : x_n$ saliek iekavas, norādot darbību secību. Pēc tam iekavas atver un iegūst daļu*

$$\frac{x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik}}{x_{j1} x_{j2} \cdots x_{j_{n-k}}}$$

kurā daži no $x_1, x_2, ..., x_n$ ir skaitītājā, bet pārējie - saucējā. Cik dažādas daļas var iegūt šādā veidā?
Atrisinājums. Viegli saprast, ka uzrakstītajā daļā x_1 atradīsies daļas skaitītājā, bet skaitlis x_2 – daļas saucējā. Izrādās, ka, saliekot atbilstoši iekavas, pārējie skaitļi var atrasties gan daļas saucējā, gan skaitītājā. Šo apgalvojumu pierāda ar indukciju. Tātad dažādo daļu skaits ir 2^{n-2}.

29. uzdevums. *[Kanāda, 1996] Ar s_n apzīmējam virknīšu ($x_1, x_2, ..., x_n$) skaitu, kas apmierina šādus nosacījumus:*

1. *($x_1, x_2, ..., x_n$) ir skaitļu 1, ..., n permutācija,*
2. *$x_1 = 1$,*
3. *$|x_{i+1} - x_i| \leq 2$,*

Pierādīt, ka

$$s_{n+3} = s_{n+2} + s_n + 1$$

Atrisinājums. Konstruēsim virknīti garumā n+3. Iespējami šādi varianti;
1) 1, 2, ... Varam uzskatīt, ka mums jāraksta permutācija no elementiem 2, 3, ... , n+3 ar mazāko elementu kā pirmo. Tādu permutāciju skaits ir s_{n+2}.
2) 1, 3, 2, 4, ... Tādu permutāciju skaits ir s_n
3) 1, 3, 4, 2. Šo permutāciju nevar turpināt (izņēmums, ja n=1; tad permutācija jau ir uzrakstīta)
4) 1, 3, 5, ... Šajā gadījumā skaitlim 2 jābūt pēdējam, jo tam blakus var stāvēt tikai viens elements 4; savukārt tam blakus var stāvēt tikai skaitlis 6, tātad skaitlim 5 var stāvēt blakus tikai skaitlis 7. Un mēs iegūstam vienu fiksētu permutāciju:
1, 3, 5, 7, ... , 8, 6, 4, 2.
Formula $s_{n+3} = s_{n+2} + s_n + 1$ tagad seko no summas likuma.

30. uzdevums. *[Žūrija, 1987, Polija] Cik veidos kopu {1, ..., n} var sadalīt 3 apakškopās A_1, A_2, A_3 tā, lai katrs skaitlis ietilptu tieši vienā no tām un izpildītos 2 nosacījumi:*

1. *sakārtojot jebkuru no kopām augošā secībā, iegūst virkni, kurā katriem 2 blakus skaitļiem ir dažādas paritātes,*
2. *ja visas 3 kopas ir netukšas, tad tieši vienai no tām mazākais skaitlis ir pārskaitlis?*

Atrisinājums. Mēs varam izvēlēties kopu numurus. Ar A_1 apzīmēsim kopu, kura satur skaitli 1. Kopu A_2 izvēlēsimies tā, ka šīs kopas mazākais elements ir mazāks par kopas A_3 mazāko elementu. Tagad mēs varam konstruēt sadalījumu kopās pēc uzdevuma nosacījumiem, pakāpeniski pievienojot skaitļus dotajām kopām. Skaitli 1 mēs ievietojam kopā A_1. Tālāk pierādīsim, ka katru nākošo skaitli var ievietot vienā no divām kopām. Ja A_2 un A_3 ir pagaidām tukšas, tad nākošo skaitli var ievietot kopā A_1 vai A_2. Līdzīgi pamatojumi pierāda, ka katrā gājienā ir divas iespējas (pamatojiet to!). Līdz ar to mēs iegūstam atbildi 2^{n-1}.

31. uzdevums. [*PSRS papildsacensības, 1991*] *S un T ir kopas* {*1, 2, ..., 10*} *apakškopas, kas var būt tukšas. Sakārtotu pāri* (*S, T*) *sauc par pieļaujamu, ja katrs skaitlis, kas ietilpst vienā no kopām S un T, ir stingri lielāks par elementu skaitu otrā kopā. Cik daudz ir pieļaujamu pāru*?

32. uzdevums. [*IMO, 1989*] *Skaitļu 1, 2, ..., 2n permutāciju sauc par labu, ja kādam i skaitļi i un i+n ir blakus. Pierādīt, ka jebkuram n ≥ 1 vismaz puse permutāciju ir labas.*

1.7 Veidi, kā skaitli sadalīt saskaitāmajos

Šajā nodaļā tiek apskatīts veidu, kā naturālu skaitli n var sadalīt saskaitāmajos, kas visi ir naturāli skaitļi, skaits. Sadalījumi, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, uzskatāmi par vienādiem. Dažādu sadalījumu skaitam ērtas formulas (tādas, kā kombināciju skaitam) nav zināmas. Veidu skaitīšana parasti notiek ar rekurentu sakarību palīdzību:

33. uzdevums. *Ar $P_k(n)$ apzīmējam skaitļa n sadalījumu k naturālos saskaitāmajos skaitu. Pierādīt, ka*

$$P_k(n) = P_{k-1}(n-k) + P_{k-1}(n-2k) + \dots$$

34. uzdevums. *[[MC95],Koreja] Pierādīt, ka veidu, kā skaitli n var izteikt kā k dažādu naturālu skaitļu summu, ir tikpat daudz, cik veidu, kā skaitli* $n - \frac{k(k-1)}{2}$ *var izteikt kā k naturālu skaitļu (starp kuriem var būt vienādi) summu.*

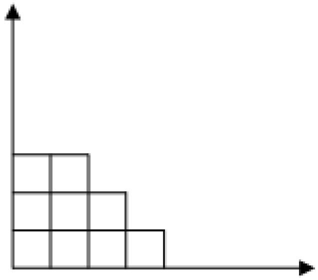
Atrisinājums. Katram skaitļa $n - \frac{k(k-1)}{2}$ sadalījumam k naturālu skaitļu summā viennozīmīgi piekārtosim skaitļa n sadalījumu k dažādu naturālu skaitļu summā. Pieņemsim, ka

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n - \frac{k(k-1)}{2},$$

kur skaitļi a_1, a_2, ..., a_k sakārtoti nedilstošā secībā. Tad skaitļi $b_i = a_i + i - 1$ visi ir dažādi un summā dod n. Skaidrs, ka šim attēlojumam atbilst apgrieztais, kas no skaitļu b_i kopas dod atbilstošu skaitļu a_i kopu.

35. uzdevums. *[[R85],27. lpp] Pierādīt, ka veidu, kā skaitli n var izteikt kā k naturālu skaitļu summu, ir tikpat daudz cik veidu, kā n var izteikt kā naturālu skaitļu, neviens no kuriem nepārsniedz k, summu. (Vismaz vienam no skaitļiem ir jābūt vienādam ar k.)*

Atrisinājums. Pieņemsim, ka skaitlis n izteikts kā skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_k$ summa. Uzskatīsim, ka skaitļi sakārtoti neaugošā secībā. Rūtiņu kvadrantā uzzīmēsim kolonnas, kur i-tā kolonna satur a_i rūtiņas. Piemēram, skaitļu 3+3+2+1 = 9 grupai atbilst šāds zīmējums:



Skaitot tagad rūtiņas vertikālā virzienā, mēs iegūstam skaitļa n sadalījumu naturālos skaitļos, kas nepārsniedz k. Šajā gadījumā 4+3+2=9. Tātad iegūta atbilstība starp pirmā un otrā veida summām.

36. uzdevums. *[[KV],M1148] Ar* $[x]$ *apzīmējam skaitļa x veselo daļu. Pierādīt, ka, ja* $a > 1$ *un* $a \neq \sqrt[q]{p}$ *nekādiem naturāliem p un q, tad*

$$[\log_a 2] + [\log_a 3] + \dots + [\log_a n] = nk - [a] - [a^2] + \dots + [a^k],$$

kur $k = [\log_a n]$.

Atrisinājums. Koordinātu plaknes pirmajā kvadrantā jāuzzīmē taisnstūris $k \times n$, un tas ir jāsadala divās daļās ar funkcijas $y = a^x$ funkcijas grafiku. Tad summa $[\log_a 2] + [\log_a 3] + \cdots + [\log_a n]$ saskaitīs rūtiņas, kas atrodas virs līknes, bet summa $[a] + [a^2] + \cdots + [a^k]$ saskaitīs rūtiņas, kas atrodas zem līknes, ieskaitot arī tās rūtiņas, kuras līkne šķeļ. Protams, kopā iegūsim taisnstūra laukumu nk. Prasītais pierādīts.

Tālāk seko sarežģītāki uzdevumi par to pašu tēmu:

37. uzdevums. *Aplūkosim visus naturālu skaitļu četriniekus* $<x, y, z, t>$, *kur* $1 \leq x, y, z, t \leq n$. *Katram no tiem atrodam mazāko elementu. Pierādīt, ka šo mazāko elementu summa ir* $1^4 + 2^4 + ... + n^4$.

38. uzdevums. *[R85, 27.lpp.] Veidu, kā n var izteikt kā dažādu naturālu skaitļu summu, ir tikpat daudz, cik veidu, kā n var izteikt kā nepāra naturālu skaitļu (starp kuriem var būt vienādi) summu.*

Cita interesanta uzdevumu kopa veidojas, ja par saskaitāmajiem ļauj lietot nevis visus skaitļus, bet tikai dažus.

39. uzdevums. *Cik ir veidu, kā skaitli 4n var izteikt kā naturālu skaitļu summu, ja par saskaitāmajiem var būt:*

a) *1 un 2?*

b) *1, 2 un 4?*

40. uzdevums. *[VS, 439. uzd.] Polinomu sauc par labu, ja visi tā koeficienti ir 0, 1, 2 vai 3. Cik ir labu polinomu P(x), kuriem P(2) = n?*

41. uzdevums. *[IMO, 1997) f(n) – veidu, kā n izteikt kā 2 pakāpju ar nenegatīviem veseliem kāpinātājiem, skaits (veidi, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, uzskatāmi par vienādiem). Pierādīt, ka jebkuram veselam* $n \geq 3$

$$2^{\frac{n^2}{4}} \leq f\left(2^n\right) \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$$

1.8. Dažādi uzdevumi

42. uzdevums. *[R82, 17.lpp.] Plaknē ir n taisnes vispārīgā stāvoklī (t.i. nekādas 2 nav paralēlas un nekādas 3 nekrustojas vienā punktā).*

a) *Cik daudz nogriežņu un staru rodas?*

b) *Cik daudz daļās tiek sadalīta plakne?*

c) *Pieņemsim, ka trīs (vai vairāk) taisnes var krustoties vienā punktā. Ar* k_i *apzīmēsim punktu, kas krustojas tieši i taisnes, skaitu. Cik daļās tiek sadalīta plakne (izteikt ar n un* k_i*)?*

43. uzdevums. *[[VS],406. uzd.] Plaknē ir n taisnes vispārīgā stāvoklī. Dažas no daļām, kurās sadalīta plakne, nokrāsotas, pie tam nevienām divām nokrāsotajām daļām nav kopīgas malas. Pierādīt, ka nokrāsotas ne vairāk kā* $\frac{(n^2+n)}{3}$ *daļas.*

Atrisinājums. Ar m_k apzīmēsim iekrāsoto apgabalu skaitu, kuriem ir k malas. Tad $m_2 \leq n$. Katru taisni pārējās taisnes sadala ne vairāk kā n daļās. Tātad kopējais taišņu daļu skaits nepārsniedz n^2. Tātad $2m_2 + 3m_3 + \cdots + km_k \leq n^2$. No šejienes iegūstam

$$m_2 + m_3 + \cdots m_k \leq \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + 3m_3 + \cdots + km_k}{3} \leq \frac{n(n+1)}{3}.$$

Kas arī bija jāpierāda.

44. uzdevums. *[[SP96],54. uzd.] Uz vienvirziena ielas atrodas n vietas, kur var apstāties mašīnas. Pa ielu pēc kārtas brauc n mašīnas. Katrai no tām ir sava mīļotā stāvvieta. (Stāvvieta var būt mīļotā arī vairāk nekā vienai mašīnai.) i-ās mašīnas stāvvietu apzīmē ar* a_i.

Katra mašīna brauc līdz savai vietai; ja tā ir brīva, apstājas tur. Pretējā gadījumā mašīna brauc līdz nākošajai brīvajai vietai un apstājas tur; ja visas nākošās vietas ir aizņemtas, brauc projām. Cik ir tādu virknīšu $a_1, \ldots, a_n$*, ka nevienai mašīnai nav jābrauc projām?*

Atbilde: $(n+1)^{n-1}$

2 Grafi

Ieteicamā grāmata: [V]. Vairākām tēmām var lietot arī [[AC],3. nodaļa] vai [[L], 152.-170.lpp].

2.1 Grafa virsotnes pakāpe

Skat. [[AC], 60.-62.lpp]

2.2 Ramseja teorēma grafiem

Labs ievads Ramseja teorijā izstāstīts [[AC], 76.-81.lpp]. Vēl iesakāms pievērst uzmanību uzdevumiem par nepilniem grafiem ([[AC], 94.-95.lpp]) un pretpiemēru konstruēšanas paņēmieniem (kas [AC] gandrīz neparādās). Vairākas idejas ļoti labi var nodemonstrēt šādā uzdevumā:

45. uzdevums. *[IMO, 1992] Doti 9 punkti telpā, no kuriem nekādi 4 nav vienā plaknē. Atrast mazāko n ar šādu īpašību: jebkurā veidā novelkot n nogriežņus starp šiem punktiem un nokrāsojot tos 2 krāsās, būs vienkrāsains trijstūris.*
Atbilde: 33.
Atrisinājums. Vienu atrisinājumu sk. žūrijas materiālos. Ir arī otra pretpiemēra konstrukcija pie 32 nogriežņiem (piemērs sanāk tas pats, bet loģiskais spriedums cits):
Ja starp 5 punktiem novilkti visi nogriežņi, tos var izkrāsot 2 krāsās tā, lai neveidotos vienkrāsaini trijstūri. 9 punktus var sadalīt 5 grupās (4 grupas ar 2 punktiem katrā un 1 grupa ar 1 punktu). Nogriežņus starp vienas grupas punktiem nenovelk. Visus nogriežņus starp i-to un j-to grupu krāso tāpat kā starp i-to un j-to punktu pie 5 punktiem.
Visi spriedumi (gan žūrijas materiālos esošie, gan šeit uzrakstītais) var tikt vispārināti patvaļīgam punktu daudzumam m (9 vietā). Tad mazākais n, kuram noteikti veidojas vienkrāsains trijstūris, ir $\left[\frac{2m^2}{5}\right]+1$.

Ar Ramseja teoriju saistīti uzdevumi, kas neparādās [AC]:

46. uzdevums. [Žūrija, 1990, ROM4] Ir 10 pilsētas un 2 aviolīnijas. Starp katrām divām pilsētām lido viena aviolīnija. Pierādīt, ka viena no aviolīnijām var nodrošināt 2 maršrutus bez kopīgām pilsētām, katrs no kuriem beidzas tajā pašā pilsētā, kur sākas.

2.3 Minimālais šķautņu skaits saistītā grafā

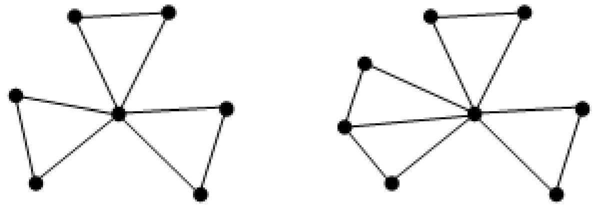
47. uzdevums. *[Baltijas ceļš, 1993] Kādā valstī ir 13 pilsētas. Starp dažiem pilsētu pāriem ir nodibināta abpusēja satiksme ar autobusu, vilcienu vai lidmašīnu (ne vairāk kā 1 no šiem veidiem starp katrām 2 pilsētām). Kāds ir mazākais iespējamais šādu pāru skaits, ja zināms, ka, izvēloties jebkurus 2 transporta veidus, var nokļūt no jebkuras pilsētas uz jebkuru citu, lietojot tikai šos 2 veidus (varbūt ar 1 vai vairāk pārsēšanām)?*
Atbilde: 18.

Atrisinājums. Priekš jebkuriem 2 veidiem grafam, ko veido šo veidu līnijas, jābūt sakarīgam, t.i., jāsatur vismaz 12 šķautnes. Tādēļ kopā jābūt vismaz $\frac{3}{2}\cdot 12=18$ līnijām.

Piemēru ar 18 pāriem veido šādi:
Autobusi: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7);
Vilcieni: (7, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 11), (11, 12), (12, 13);
Lidmašīnas: (1, 8), (2, 9), (3, 10), (4, 11), (5, 12), (6, 13).

48. uzdevums. *Klasē ir n skolēnu, n ≥ 4. Daži no tiem draudzējas (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A). Katriem diviem skolēniem var atrast trešo, kas draudzējas ar tiem abiem. Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits klasē?*

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka draudzību skaits var būt $x=n-1+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$. Raksturīgi piemēri nepāra un pāra n parādīti zīmējumā.



Tagad parādīsim, ka šo skaitu nevar samazināt. Ja katram skolēnam ir vismaz 3 draugi, tad ir vismaz $\frac{3n}{2}>x$ draudzību. Tāpēc apskatām iespēju, ka eksistē skolēns A, kam ir **tikai divi draugi B un C**. Tie noteikti draudzējas savā starpā. Ar M apzīmēsim visu pārējo skolēnu kopu. Katrs skolēns no M draudzējas vai nu ar B, vai ar C; sauksim šo draudzību par īpašu. Katram skolēnam no M jābūt vismaz vēl vienai citai draudzībai; šo draudzību ir vismaz $\left\lceil\frac{n-3}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1$. Iegūstam, ka ir vismaz $3+n-3+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1=x$ draudzības.

2.4 Cikla eksistence grafā

Teorēma 1. *Jebkurā grafā ar n virsotnēm un vismaz n šķautnēm eksistē cikls.*

49. uzdevums.

1. *Pierādīt, ka jebkurā grafā ar n virsotnēm un n+1 šķautni var jebkurai šķautnei atrast ciklu, kas neiet caur šo šķautni.*

2. *Kādam minimālajam skaitam šķautņu jābūt grafā ar n virsotnēm, lai noteikti jebkurai virsotnei varētu atrast ciklu, kas neiet caur šo virsotni?*

Atrisinājums. 1. Izmetīsim jebkuru šķautni no aplūkojamā grafa. Iegūsim grafu ar n virsotnēm un n šķautnēm. No teorēmas 1 seko, ka šajā grafā ir cikls.
2. Jābūt 2n-2 šķautnēm. Ņemsim jebkuru no grafa virsotnēm un izmetīsim to un šķautnes, kas no tās iziet. Paliks grafs ar n-1 virsotnēm un vismaz n-1 šķautnēm. No teorēmas 1 seko, ka atlikušajā grafā ir cikls. Viegli konstruēt piemēru grafam ar 2n-3 virsotnēm, kuram neizpildās uzdevuma nosacījumi: n-1 virsotne savienotas virknē, bet no n-tās virsotnes iziet šķautnes uz visām pārējām virsotnēm.

50. uzdevums. *Pierādīt, ka grafā ar n virsotnēm un n+1 šķautni ir cikls ar pāra skaitu šķautņu vai 2 cikli ar nepāra skaitu šķautņu bez kopīgām šķautnēm.*

Atrisinājums. Izmetīsim kādu no grafa šķautnēm. Tad no teorēmas 1 seko, ka atlikušajā grafā ir cikls. Ja tas satur pāra skaitu šķautņu, tad viss pierādīts. Pieņemsim, ka tas satur nepāra skaitu šķautņu. Izmetīsim vienu no šā cikla šķautnēm un aplūkosim ciklu, kas veidojas atlikušajā grafā. Ja tas satur pāra skaitu šķautņu, tad viss pierādīts. Ja tas satur nepāra skaitu šķautņu un tam nav kopīgu šķautņu ar pirmo ciklu, apgalvojums arī pierādīts. Pretējā gadījumā no šiem diviem cikliem var izveidot vienu ciklu ar pāra skaitu šķautņu.

51. uzdevums. *[Krievija, 1994] Ziedu pilsētā ir n laukumi un m ielas, $m \geq n+2$. Katra iela savieno 2 laukumus. Iela var būt zila vai sarkana. Katru gadu izvēlas vienu laukumu un nomaina visu no tā izejošo ielu krāsu. Pierādīt, ka var tā izvēlēties ielu sākotnējo krāsojumu, lai nevarētu panākt, ka visas ielas ir vienā krāsā.*
Atrisinājums. Vispirms atzīmēsim to, ka nav svarīga secība, kādā mēs pārkrāsojam ielas, un pārkrāsot ielas, kas iziet no viena laukuma, nav nozīmes vairāk kā vienu reizi. Tātad faktiski no viena krāsojuma (teiksim, krāsojuma vienā krāsā) var iegūt ne vairāk kā 2^n dažādus ielu krāsojumus. Tā kā pavisam ir $2^m > 2\cdot 2^n$ dažādi ielu krāsojumi, tad ne visus krāsojumus var iegūt no diviem vienkrāsainajiem krāsojumiem. Izvēloties kādu no neiegūstamajiem krāsojumiem, mēs iegūsim prasīto krāsojumu.

52. uzdevums. *[[VS],111] Pilsēta uzbūvēta taisnstūra veidā: n ielas paralēlas viena otrai, bet m citas ielas ir tām perpendikulāras. Uz ielām (bet ne krustojumos) stāv miliči. Katrs milicis pieraksta visu garāmbraucošo automašīnu numurus, braukšanas virzienu un laiku. Kāds mazākais miliču skaits ir jāizvieto uz ielām, lai pēc viņu pierakstiem varētu atjaunot jebkuras mašīnas, kas brauc pa noslēgtu maršrutu, ceļu (maršruts neiet divreiz pa vienu ielas posmu)?*
Norāde: maršrutu var atjaunot tad un tikai tad, ja grafs, kas sastāv no visiem tiem posmiem, kur nav miliču, nesatur ciklus.

53. uzdevums. *Pierādīt, ka katrā grafā ar n virsotnēm un n+4 šķautnēm var atrast 2 ciklus bez kopīgām šķautnēm.*

54. uzdevums. *Kāds ir maksimālais iespējamais šķautņu skaits grafā ar n virsotnēm, kurā nav ciklu ar pāra skaitu šķautņu?*
Atbilde: $\left\lfloor \dfrac{3(n-1)}{2} \right\rfloor$.

55. uzdevums. *[Neklātienes konkurss, 1990] 10 bērni pirmdien pastaigājas pa pāriem, otrdien arī, pie tam neviens pāris neatkārtojas. Pierādīt, ka trešdienas rītā var izvēlēties 5 bērnus, nekādi 2 no kuriem vēl nav staigājuši kopā.*

56. uzdevums. *[[VS], 79. uzd.] Katrām 3 grafa virsotnēm A, B, C ir ceļš no A uz B, kas neiet caur C. Pierādīt, ka katrām divām virsotnēm A un B ir divi ceļi no A uz B, kam nav kopīgu virsotņu.*
Atrisinājums. Sauksim par ceļa garumu nogriežņu skaitu, no kuriem sastāv ceļš. Pieņemsim, ka n ir īsākā ceļa garums no A līdz B. Uzdevuma apgalvojumu pierādīsim ar indukciju pēc n.
Ja n = 1 tad, izņemot īsāko ceļu AB, eksistē ceļš, kas iet no A uz C≠A, kurš atrodas no B attālumā 1 un neiet caur B. Tas dod mums otru ceļu no A uz B.
Pieņemsim, ka n > 1, D – tuvākais A punkts īsākajā ceļā no A uz B. No induktīvā pieņēmuma seko, ka eksistē divi nešķeļošies ceļi p un q no D uz B. Iesim no A uz B pa ceļu, kas nesatur D. Ja šis ceļš nekrusto ceļus p un q, tad viss ir pierādīts. Ja šis ceļa pirmais krustojums ir, teiksim, ar p, tad tālāk ceļu vajag turpināt pa ceļu p līdz B. Otrs ceļš veidosies no nogriežņa AD un ceļa q. Apgalvojums pierādīts.

57. uzdevums. *[2002.g. Latvijas valsts olimpiāde] Funkcijas f definīcijas apgabals ir kopa A={1;2;3;…;12;13}, un šī funkcija pieņem katru vērtību no kopas A. Funkcijas f(f(x)) vērtības attēlotas tabulā:*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(f(x))$	10	9	12	8	13	3	4	1	5	11	6	2	7

*Atrodiet visas iespējamās funkcijas f un pierādiet, ka citu bez jūsu atrastajām nav. (**Piezīme:** atrast funkciju nozīmē uzrādīt tās vērtību tabulu.)*

Atrisinājums. Funkcijas $f(f(x))$ "iedarbību" uz kopu A var attēlot ar grafu:

$$1 \to 10 \to 11 \to 6 \to 3 \to 12 \to 2 \to 9 \to 5 \to 13 \to 7 \to 4 \to 8$$

Tātad $f(f(x))$ attēlojas ar ciklu. Tāpēc arī $f(x)$ attēlojas ar ciklu; ja $f(x)$ sastāvētu no vairākiem cikliem, tad tiem būtu jāparādās arī $f(f(x))$grafā.

Turpmāk ar f^k sapratīsim funkciju

$$\underbrace{f(f(f(\ldots(f)\ldots)}_{k \text{ reizes } f}$$

Tā kā f ir cikls, tad f^{13} ir identiskā funkcija: $f^{13}(x) = x$ visiem x. Tas nozīmē, ka $f^{14} = f(x)$. Bet $f^{14}(x) = (f(f(x)))^7$. Tātad $f(x)$ vērtību tabulu varam iegūt, $f(f(x))$ grafā katram x atrodot 7 vietas "uz priekšu" esošo elementu:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	9	1	4	12	11	7	3	2	10	5	13	8	6

No risinājuma seko, ka tāda f ir viena vienīga.

58. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 1995] Kvadrātiska tabula sastāv no n×n rūtiņām, n ≥ 2. Katrā rūtiņā ierakstīts kaut kāds burts. Zināms, ka katras divas rindiņas atšķiras viena no otras vismaz vienā vietā.*

Pierādīt: var izsvītrot vienu kolonnu tā, ka palikušajā tabulā katras divas rindiņas joprojām atšķirsies viena no otras vismaz vienā vietā.

Atrisinājums. Vispirms rindiņas pēc kārtas, sākot ar pirmo, sanumurēsim. Zināms, ka rindiņas ar dažādiem numuriem atšķiras vismaz vienā rūtiņā. Zīmējumā var skatīt tādas tabulas piemēru.

1.	a	b	c	d	e
2.	a	b	c	d	f
3.	a	b	c	e	e
4.	a	d	c	d	f
5.	b	d	e	d	f

Pieņemsim no pretējā, ka nevar izsvītrot nevienu kolonnu tā, lai palikušajā tabulā katras divas rindiņas joprojām atšķirtos vismaz vienā rūtiņā. Tas nozīmē, ka, izsvītrojot jebkuru kolonnu, vismaz divas rindiņas sakritīs pilnībā.

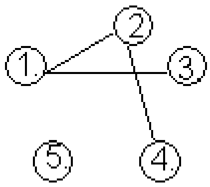
Tālāk uzzīmēsim grafu, kur grafa virsotnes būs rindiņu numuri. Tātad, ja tabula sastāv no $n \times n$ rūtiņām, tad virsotņu skaits grafā būs n.

Respektējot mūsu pieņēmumu no pretējā, no tabulas pēc kārtas svītrosim pa vienai kolonnai ārā. Kā zināms, vismaz divas rindiņas katrā jauniegūtajā tabulā sakritīs pilnībā. Mūsu grafā ar šķautni savienosim tās divas virsotnes, kurām atbilstošās rindiņas jaunajā tabulā sakritušas.

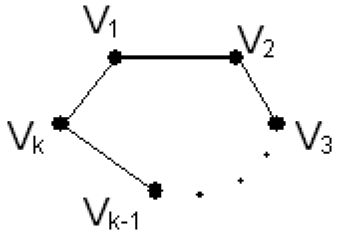
Ja, izsvītrojot kolonnu, uzreiz sakritušas vairāk nekā divas rindiņas, tad tomēr grafā zīmē tikai vienu (pēc brīvas izvēles) no atbilstošajām šķautnēm.

Tādējādi, n kolonnas svītrojot, grafā tiks iegūtas tieši n šķautnes, pie tam katra šķautne atbilst citas kolonnas izsvītrojumam.

Dotajai tabulai 5×5 atbilstošais grafs ir sekojošs.

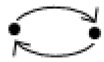


Pirmo kolonnu (skaitot no labās) svītrojot, sakrīt 1. un 2. rindiņa, svītrojot 2.kolonnu, sakrīt 1. un 3. rindiņa, 4. kolonnu svītrojot, sakrīt 2. un 4. rindiņa. Svītrojot 3. vai 5. kolonnu, nesakrīt nevienas divas rindiņas.
Ja izpildītos mūsu pieņēmums, ka pēc katras kolonnas svītrošanas vismaz divas rindiņas sakrīt, tad izveidotajā *n* virsotņu grafā būtu tieši *n* šķautnes.
Pēc mūsu izdarītā pieņēmuma tātad seko, ka izveidotajā *n* virsotņu grafā būs cikls.
Vispirms pierādīsim, ka cikls saturēs vismaz trīs virsotnes.
Pieņemsim, ka cikls satur tikai divas virsotnes. Tātad starp divām virsotnēm ir novilktas divas atšķirīgas šķautnes. Tas nevar būt, jo katra šķautne radusies pēc citas kolonas izsvītrošanas, bet, ja, izsvītrojot *r*-to kolonnu, radusies šķautne, tas liecina, ka *r*-tajā rūtiņā attiecīgās rindiņas bijušas atšķirīgas, bet līdz ar to, arī pēc *s*-tās kolonnas ($s \neq r$) izsvītrošanas tās būs atšķirīgas, tātad jauniegūtās rindiņas nebūs vienādas un starp tām pašām virsotnēm otru šķautni novilkt nevarēs.
Tādējādi izveidojies cikls saturēs vismaz trīs virsotnes.
Aplūkosim divas šī cikla blakusvirsotnes V_1 un V_2. Tabulā aplūkosim to kolonnu (apzīmēsim to ar *i*-to), kuru izsvītrojot, šīm virsotnēm atbilstošās rindiņas sakritīs.



Tātad rindiņu V_1 un V_2 *i*-tās rūtiņas būs atšķirīgas.
Aplūkosim pārējās cikla šķautnes. Tā kā tās radušās, izsvītrojot citas kolonnas (ne *i*-to), tad *i*-tajā rūtiņā to atbilstošās rindiņas sakritīs. T.i., *i*-tajā rūtiņā sakritīs burti rindiņām V_2 un V_3, tāpat rindiņām V_3 un V_4, utt., sakritīs burti rindiņām V_{k-1} un V_k, kā arī rindiņām V_k un V_1.
Tā kā ciklā katrām divām blakusvirsotnēm (izņemot V_1 un V_2) atbilstošām rindiņām *i*-tajā rūtiņā burti sakritīs, tad tie sakritīs visām rindiņām uzreiz, t.i., sakritīs arī rindiņām V_1 un V_2. Bet tas ir pretrunā ar iepriekš izdarīto apgalvojumu.
Tātad sākumā izdarītais pieņēmums bijis nepareizs - tomēr var izsvītrot vienu kolonnu tā, lai palikušajā tabulā katras divas rindiņas joprojām atšķirtos viena no otras vismaz vienā vietā, kbj.

59. uzdevums. *Rindā atrodas 2n dažādi skaitļi. Ar vienu gājienu var vai nu mainīt vietām divus skaitļus, vai arī cikliski mainīt vietām 3 skaitļus (izvēlamies a, b, c un novietojam a tai vietā, kur pirms šī gājiena bija b, b – tai vietā, kur pirms šī gājiena bija c, un c – tai vietā, kur pirms šī gājiena bija a). Kāds ir minimālais gājienu skaits, ar kuru vienmēr pietiek, lai izvietotu skaitļus augošā kārtībā?*
Atbilde: *n* gājieni.
Atrisinājums. Ja skaitlis *y* atrodas vietā, kur beigās jābūt skaitlim *x*, attēlosim to ar bultiņu $x \to y$. skaidrs, ka no sākuma visi skaitļi sadalās pa cikliem: cilpām , bināriem cikliem

 un „gariem cikliem”  (vismaz 3 skaitļi). Skaidrs, ka katru bināru ciklu var pārveidot divās cilpās ar vienu gājienu. Ja ir garš cikls, kas satur fragmentu $...a \to b \to c \to ...$, mainām *a, b, c* cikliski; rodas vismaz 2 cilpas. Tādējādi ar katru gājienu cilpu skaits pieaug par vismaz 2. Tāpēc pēc augstākais *n* gājieniem būs 2*n* cilpas, t.i., mērķis būs sasniegts.
Analizējot visas iespējas, kā divi vai trīs skaitļi var būt sadalīti pa dažādiem cikliem, viegli iegūstam: ciklu skaits vienā gājienā nepieaug vairāk par 2. Ja sākotnēji ir tikai 1 cikls, tad mērķa sasniegšanai vajag vismaz *n* gājienus.

2.5 Eilera cikli un ceļi

60. uzdevums. *[[VS],349. uzd.] Dots kvadrāts 4×4, kurš sadalīts 1×1 rūtiņās. Vai rūtiņu malas var sadalīt:*

1. *5 lauztās līnijās, katra no kurā ir ar garumu 8;*

2. *8 lauztās līnijās, katrai no kurām garums ir 5?*

Atrisinājums. 1. Aplūkosim 12 virsotnes, kas atrodas uz kvadrāta malām, bet ne kvadrāta virsotnēs. No katras šādas virsotnes iziet trīs nogriežņi. Tas nozīmē, ka katra no šīm virsotnēm ir kādas lauztās līnijas galapunkts. Taču piecām līnijām ir tikai 10 galapunkti, un tie nevar atrasties 12 punktos.
2. Uzzīmējiet piemēru, kas parāda, ka tas ir iespējams.

61. uzdevums.

1. *Saistītā grafā ir 2k nepāra virsotnes. Pierādīt, ka var atrast tādus k ceļus, ka katra šķautne ietilpst tieši 1 ceļā un tieši 1 reizi. (Ceļš var iet vairākas reizes caur vienu virsotni.)*

2. *Ja* $k \geq 2$, *tad tādus ceļus var izvēlēties vismaz 2 dažādos veidos.*

Atrisinājums. 1. Grafam pievienosim vēl *k* šķautnes, kas pa pāriem savieno dotās 2*k* virsotnes. Veidosies sasaistīts multigrafs, kuram visas virsotnes ir pāra virsotnes. No Eilera teorēmas seko, ka šim grafam eksistē Eilera cikls. Izmetot no šī grafa *k* pievienotās šķautnes, iegūsim *k* ceļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.
2. Ja $k \geq 2$, tad šīs *k* šķautnes var pievienot dažādos veidos, kas dos mums dažādas iespējas izveidot *k* ceļus.

62. uzdevums. *[IMO, 1991] Dots saistīts grafs ar n šķautnēm. Pierādīt, ka grafa šķautnes var sanumurēt ar skaitļiem 1, ..., n (katru skaitli - tieši 1 šķautnei) tā, lai katrā virsotnē, kurā ieiet vairāk par vienu šķautni, visu uz šīm šķautnēm uzrakstīto skaitļu lielākais kopējais dalītājs būtu 1.*

63. uzdevums. *Pierādīt, ka jebkuram i un k eksistē no skaitļiem 1, ..., k sastāvoša virkne, kas satur jebkuru no šiem skaitļiem sastāvošu virkni garumā i tieši vienreiz.*
Atrisinājums. Apskatām grafu, kura virsotnes atbilst virknēm garumā i-1. Virsotnes $(a_1, ..., a_{i-1})$ un $(b_1, ..., b_{i-1})$ savienojam ar šķautni tad un tikai tad, ja $a_2 = b_1$, $a_3 = b_2$, ..., $a_i = b_{i-1}$. Šī grafa šķautnes atbilst virknēm ar garumu *i*, bet Eilera cikls šajā grafā - meklētajai virknei.

64. uzdevums. *[Latvijas valsts olimpiāde, 1995] Izliektā n-stūrī jānovelk n-3 diagonāles tā, lai tas sadalītos n-2 trijstūros un lai nekādām divām novilktajām diagonālēm nebūtu citu kopēju punktu, izņemot varbūt galus. Bez tam nepieciešams, lai iegūto nogriežņu sistēmu (n-stūra malas un novilktās diagonāles) varētu uzzīmēt kā slēgtu lauztu līniju ar vienu vilcienu, neatraujot zīmuli no papīra un nevienu nogriezni nenovelkot vairāk par vienu reizi.*

Vai to var izdarīt, ja

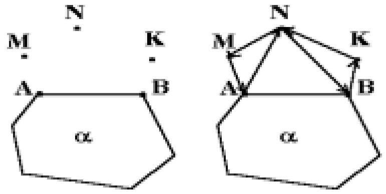
__a)__ n = 1994,

__b)__ n = 1995?

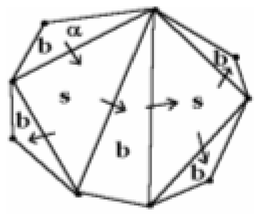
Atrisinājums. Vispirms parādīsim, ka prasītais ir izdarāms, ja *n* dalās ar 3. Lietosim matemātisko indukciju:

a) pie *n*=3 jāzīmē tikai trijstūra kontūra,

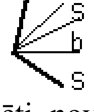
b) pieņemsim, ka pie *n*=3*k* ir uzzīmēta prasītā slēgtā lauztā līnija *w*, kas sadala *n*-stūri α un sākas un beidzas virsotnē A.



Skaidrs, ka līnija NMA*w*ANBKN sadala prasītajā veidā (*n*+3)-stūri $\alpha \cup$ AMNKB.
Tātad pie *n* = 1995 uzdevuma prasības ir izpildāmas.
Tagad pierādīsim, ka citiem *n* prasītais nav izpildāms. Tādējādi tas nebūtu izdarāms arī pie *n* = 1994.
Pieņemsim, ka prasītā slēgtā līnija novilkta. Uz brīdi pieņemsim, ka esam pierādījuši: iegūtos plaknes apgabalus (trijstūrus un bezgalīgo ārējo apgabalu) var katru nokrāsot baltu vai sarkanu tā, ka diviem vienādi nokrāsotiem apgabaliem nav kopīgas malas. Tad katrs nogrieznis ir viena balta un viena sarkana apgabala mala, tāpēc visu sarkano apgabalu malu kopskaits vienāds ar visu balto apgabalu malu kopskaitu. Bet visi apgabali, izņemot ārējo, ir ar 3 malām, turpretī ārējam apgabalam ir *n* malas. Iegūstam, ka *n* jādalās ar 3.



Atliek pierādīt mūsu apgalvojumu par krāsojuma iespējamību.
Iegūtajā triangulācijā eksistē trijstūris, kuram ir divas daudzstūra malas (zīmējumā Δ-is α); ja tāda nebūtu, tad daudzstūra malu skaits nepārsniegtu *n*-2, un tā ir pretruna.
Nokrāsosim šo trijstūri baltu, tam kaimiņos esošos - sarkanus, tiem kaimiņos esošos - baltus, utt. Skaidrs, ka šādā ceļā katriem diviem blakus esošiem trijstūriem ir dažādas krāsas (kaimiņos jeb blakus esošie trijstūri ir trijstūri ar kopīgu malu), jo katra diagonāle pārdala daudzstūri divās daļās, kurām citu kopīgu nogriežņu bez šīs diagonāles nav.
Lai krāsojums būtu pabeigts, jāpamato, ka visi "uz ārpusi" izejošie trijstūri būs vienā krāsā (tad ārējo apgabalu varēs nokrāsot pretējā krāsā).
Pieņemsim, ka eksistē divi "uz ārpusi" izejoši trijstūri pretējās krāsās. Tad eksistē arī divi šādi trijstūri ar kopēju virsotni. Tā kā starp trijstūriem krāsojuma pretrunu nav, tad šajā virsotnē starp tiem ir vēl pāra skaits citu trijstūru (lai varētu realizēties ķēdīte b s b s…b s b s trijstūru krāsām ap doto virsotni).
Tas nozīmē, ka no šīs virsotnes pavisam iziet nepāra skaits nogriežņu



Bet tā nav taisnība: visi nogriežņi ir uzzīmēti, novelkot slēgtu lauztu līniju, kas katrā virsotnē tik pat reižu ieiet, cik no tās iziet; tāpēc katrā virsotnē "satiekas" pāra skaits nogriežņu.
Iegūtā pretruna parāda, ka varēs nokrāsot arī ārējo apgabalu un pabeigt krāsojumu.

2.6 Hamiltona cikli

Skat. [[V], 48.-51.lpp] un [[AC], 3.3.2. nodaļa]. Citi uzdevumi par Hamiltona cikliem:

65. uzdevums. *[[SP96],61.uzd.] Valstī, kas sastāv no 2 provincēm, katras 2 pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļu. Braucot pa ceļiem, iespējams no katras pilsētas nokļūt katrā citā. Tūrisma firma "Hamiltons" piedāvā n maršrutus pa 1. provinces pilsētām un m maršrutus pa 2. provinces pilsētām. Katrā no šiem maršrutiem tiek apmeklētas tikai vienas provinces pilsētas, katrā iegriežoties tieši vienreiz un beigās atgriežoties sākuma pilsētā. Pierādīt, ka pastāv vismaz mn līdzīgi maršruti pa visas valsts pilsētām.*

66. uzdevums. *[Žūrija, 1988, SIN1] Pie apaļa galda sēž n cilvēki. Katram no viņiem ir 3 draugi. Secību, kādā cilvēki sēž ap galdu, sauc par perfektu, ja katram cilvēkam abās pusēs sēž draugi. Pierādīt, ka, ja eksistē viena perfekta secība, tad eksistē arī otra, ko nevar iegūt no pirmās ar pagrieziena vai simetrijas palīdzību.*

Grafu teorijas valodā: grafā, kurā no katras virsotnes iziet tieši 3 škautnes, ir vai nu neviens Hamiltona cikls vai arī vismaz 2 Hamiltona cikli.

67. uzdevums. *Pasaku mežā dzīvo n dzīvnieki, katrs savā alā ($n \geq 3$). Katras divas alas savieno tieši viena taciņa. Pirms Meža Karaļa vēlēšanām daži dzīvnieki veica priekšvēlēšanu kampaņas. Katrs tāds dzīvnieks apmeklēja katru no citām alām tieši vienu reizi, gāja tikai pa iepriekšminētajām taciņām, nenogriezās no taciņām, atrazdamies starp alām, un kampaņas beigās atgriezās savā alā. Ir arī zināms, ka ne pa vienu taciņu negāja vairāk par vienu kampaņas organizētāju.*

a) *pierādīt: ja n – pirmskaitlis, tad kampaņas organizētāju maksimālais iespējamais skaits ir* $\frac{n-1}{2}$,

b) *atrodiet maksimālo iespējamo kampaņas organizētāju skaitu pie n=9.*

Atrisinājums. a) Tā kā katrs KO (kampaņas organizators) izmanto n taciņas un taciņu pavisam ir $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, tad KO nav vairāk par $\frac{n-1}{2}$. Ja n – pirmskaitlis, var izveidot šādus Hamiltona ciklus bez kopīgām šķautnēm (alas – virsotnes apzīmējam ar skaitļiem 0; 1; 2; ...; n-1):

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to ... \to n-1 \to 0$$

$$0 \to 2 \to 4 \to 6 \to ... \to n-2 \to 0 \quad (x_{i+1} = x_i + 2(\mathrm{mod}\, n))$$

$$0 \to 3 \to 6 \to 9 \to ... \to n-3 \to 0 \quad (x_{i+1} = x_i + 3(\mathrm{mod}\, n))$$

utt.

b) Līdzīgi kā a) punktā pierāda, ka nevar būt vairāk par 4 KO. Četru Hamiltona ciklu piemērs ir

$$0 \to 1 \to 2 \to 8 \to 3 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 0$$

$$0 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 8 \to 5 \to 7 \to 6 \to 0$$

$$0 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1 \to 6 \to 8 \to 7 \to 0$$

$$0 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 \to 7 \to 1 \to 8 \to 0$$

***Komentārs*:** ar līdzīgām metodēm kā b) punktā parāda, ka **katram** *n* var uzbūvēt $\frac{n-1}{2}$ Hamiltona ciklus bez kopīgām šķautnēm.

2.7 Eilera formula, tās secinājumi

Teorēma 2. *[Eilera formula] Ja V, S un SK ir planāra grafa virsotņu, šķautņu un skaldņu skaits, tad*

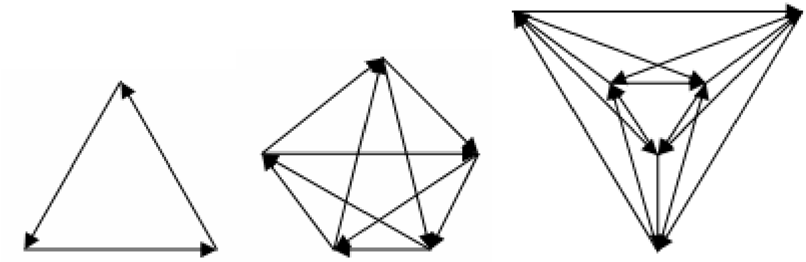
$$V - S + SK = 1$$

Teorēmu un ar to saistītus uzdevumus var atrast [[V], 80.-87.lpp.] un [[L], 162.-164.lpp]. Šai teorēmai ir vairāki vienkārši, bet interesanti secinājumi, ko arī var izstāstīt nodarbībās:

1. Formula $\boldsymbol{S \leq 3V - 6}$ (sk. [[V],84. lpp]).
2. Tas, ka jebkura planāra grafa virsotnes var izkrāsot 5 krāsās tā, ka nav 2 virsotņu vienā krāsā, kas savienotas savā starpā [[V],6. nodaļa].
3. Tas, ka ir tikai 5 regulāri daudzskaldņi.

2.8 Orientēti grafi

68. uzdevums. *[[VS], 176. uzd.] Pierādīt, ka, ja n > 4, tad starp n punktiem var novilkt bultiņas tā, lai starp katriem 2 punktiem būtu tieši 1 bultiņa un no katra punkta uz katru citu varētu aiziet pa 1 vai 2 bultiņām.*
Atrisinājums. Uzdevumu risina ar matemātisko indukciju.
<u>Bāze:</u> Ja *n*=3, *n*=5, *n*=6, tad atrisinājumi parādīti zīmējumā.



<u>Induktīvā pāreja:</u> pieņemsim, ka konstruēta prasītā bultiņu sistēma *n* punktiem $A_1, A_2, ..., A_n$. Tad sistēmu *n*+2 punktiem konstruējam šādi: no A_{n+1} velkam bultiņas uz visiem iepriekšējiem punktiem $A_1, A_2, ..., A_n$, no visiem punktiem $A_1, A_2, ..., A_n$ velkam bultiņas uz A_{n+2} un velkam bultiņu no A_{n+2} uz A_{n+1}. Prasītā konstrukcija iegūta.

69. uzdevums. *[Žūrija, 1989, POL3] Dots orientēts grafs ar n virsotnēm, kurā starp katrām divām virsotnēm ir bultiņa tieši vienā virzienā. Pierādīt, ka izpildās viens no 2 sekojošiem apgalvojumiem:*

1. virsotnes var sadalīt 2 netukšās kopās V_1, V_2 tā, ka no V_2 uz V_1 neiet neviena bultiņa, vai

2. virsotnes var sanumurēt ar $A_1, ..., A_n$ tā, lai no A_1 ietu bultiņa uz A_2, no A_2 uz A_3 utt., no A_{n-1} uz A_n, no A_n uz A_1.

70. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2003] Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1}-2$ komandas (n – naturāls skaitlis), katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi* *(neizšķirtu nav). Pierādīt: pēc turnīra beigām var izvēlēties n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām n.*

Atrisinājums. Vismaz vienam turnīra dalībniekam noslēgumā būs vismaz $(n+2)\cdot 2^{n-2}-1$ uzvara un tātad ne vairāk kā $(n+2)\cdot 2^{n-2}-2$ zaudējumi (pretējā gadījumā katram dalībniekam uzvaru būtu mazāk nekā zaudējumu, bet tā nevar būt). Atrodam šādu A_1 un apskatām tos $\leq(n+2)\cdot 2^{n-2}-2$ spēlētājus, kam viņš ir zaudējis. Šo spēlētāju "iekšējā turnīrā" var atrast spēlētāju, kam nav vairāk par $(n+2)\cdot 2^{n-3}-2$ zaudējumiem, utt. Līdzīgi turpinot, pēc n-1 gājieniem būs atrasti spēlētāji A_1, A_2, ... A_{n-1} ar īpašību: A_{n-1} cietis $\leq n$ zaudējumus pēdējā apskatītajā "apakšturnīrā", un katra komanda, izņemot A_1, A_2, ..., A_{n-1} un tās $\leq n$ komandas, kam A_{n-1} zaudējusi pēdējā "apakšturnīrā", zaudējusi vismaz pret vienu no A_1, A_2, ..., A_{n-1}. Šķirojam divas iespējas:

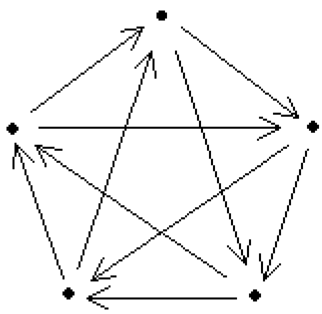
a) Eksistē tāda komanda, kam zaudējušas visas minētās $\leq n$ "apakšturnīra" komandas, kurām zaudējusi A_{n-1}. Pievienojot to grupai A_1, A_2, ..., A_{n-1}, iegūstam vajadzīgo.

b) Tādas komandas nav. Tādā gadījumā pašas šīs $\leq n$ komandas veido vajadzīgo grupu (papildinot to līdz skaitam n ar patvaļīgām komandām).

71. uzdevums. *[Latvijas valsts olimpiādes 2.posms, 2004] Parlamentā ir 100 deputātu. Ir zināms, ka nevienam deputātam nav aizspriedumu pret vairāk nekā 2 citiem deputātiem. (Ja A ir aizspriedumi pret B, tad B var arī nebūt aizspriedumu pret A.)*

Kāds ir mazākais komisiju skaits, kurās noteikti var sadalīt jebkura šāda parlamenta deputātus (katram deputātam jāpiedalās vismaz vienā komisijā) tā, ka nevienā komisijā nevienam deputātam nav aizspriedumu ne pret vienu citu?

Atrisinājums. a) Var gadīties, ka ir 5 deputāti, kuru „aizspriedumu struktūra" attēlota zīmējumā. Nekādus divus no tiem nevar iekļaut vienā komisijā. Tātad var gadīties, ka nepieciešamas vismaz 5 komisijas.



b) Parādīsim, ka ar 5 komisijām vienmēr pietiek. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju patvaļīgam deputātu skaitam n. Pie n = 1; 2; 3; 4; 5 tas ir acīmredzams (katrā komisijā iekļauj vienu deputātu).

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n = 1; 2; 3; ...; m - 1, kur $m\geq 6$. Apskatīsim m deputātus. Ja katru no šiem deputātiem „ienīst" vairāk nekā 2 citi, tad kopējais „ienaidu" skaits ir lielāks par $2m$, tā ir pretruna, jo katram deputātam ir aizspriedumi pret augstākais 2 citiem, tāpēc „ienaidu" nav vairāk par $2m$.

Tāpēc eksistē deputāts A, pret kuru aizspriedumu nav vairāk kā 2 citiem. Apskatīsim visus m-1 deputātus, izņemot A. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi tos var sadalīt 5 komisijās vajadzīgā veidā. Deputāts A ir „nepieņemams" ne vairāk kā 4 no tām (jo ir ≤ 2 deputāti, kam ir aizspriedumi pret viņu, un ir ≤ 2 deputāti, pret kuriem viņam ir aizspriedumi). Tātad A var pievienot vismaz 1 komisijai. Induktīvā pāreja izdarīta.

72. uzdevums. *[„Baltijas ceļš 1994"] Brīnumsalas izlūkdienests nosūtījis uz Tartu 16 spiegus. Katrs no tiem izseko dažus savus kolēģus. Ir zināms, ka nekādi divi spiegi neizseko*

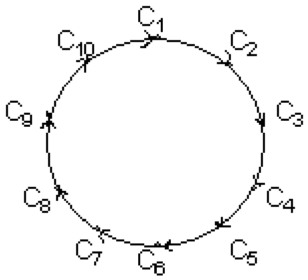
viens otru. Katrus desmit spiegus var nostādīt pa apli tā, ka katrs no viņiem izseko savu kaimiņu pa labi.
Pierādīt, ka arī katrus 11 spiegus var nostādīt pa apli tā, lai katrs no viņiem izsekotu savu kaimiņu pa labi.
Atrisinājums. Sauksim divus spiegus par savstarpēji neitrāliem, ja tie neviens neizseko otru. Apzīmēsim spiegus ar A_1, A_2,…A_{16}. Katram i, $1 \le i \le 16$, ar a_i apzīmēsim to spiegu skaitu, kuri izseko A_i; ar b_i - to spiegu skaitu, kurus izseko pats A_i; ar c_i - to spiegu skaitu, kuri ir neitrāli ar A_i.
Skaidrs, ka katram i pastāv sakarība $a_i + b_i + c_i = 15$ **(1)**
Pieņemsim, ka $a_i + c_i > 8$; tad $a_i + c_i \ge 9$. Aplūkosim spiegu A_i un vēl deviņus no tiem spiegiem, kuri izseko A_i vai ir neitrāli ar A_i. Skaidrs, ka šos 10 spiegus nevar uzdevumā minētajā veidā nostādīt pa apli - nav, kas stāv pa labi no A_i. Tāpēc katram i pastāv sakarība

$$a_i + c_i \le 8 \qquad \textbf{(2)}$$

Līdzīgi iegūstam, ka katram i pastāv sakarība

$$b_i + c_i \le 8 \qquad \textbf{(3)}$$

Saskaitot (2) un (3), mēs iegūstam $(a_i + b_i + c_i) + c_i \le 16$.
Ņemot vērā (1), iegūstam $c_i \le 1$.
Tagad pieņemsim no pretējā, ka var atrast 11 spiegus, kurus neizdodas nostādīt pa apli prasītajā veidā. Apzīmēsim vienu no tiem ar B. Pārējos desmit saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var nostādīt pa apli:

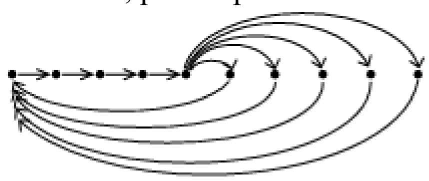


Pieņemsim, ka starp spiegiem C_1, C_2, …, C_{10} nav neviena, kurš būtu neitrāls attiecībā pret B. Tad vai nu B izseko visus spiegus C_1, C_2, …, C_{10}, vai arī visi spiegi C_1, C_2, …, C_{10} izseko B (pretējā gadījumā B varētu "ievietot" aplī starp diviem secīgiem spiegiem C_i, un tā būtu pretruna ar mūsu pieņēmumu.) Gan vienā, gan otrā gadījumā iegūstam pretrunu ar (2) vai (3). Tātad B ir neitrāls ar kādu no pārējiem spiegiem no apskatāmās 11 spiegu grupas. Tā kā par B varēja ņemt patvaļīgu spiegu no šīs grupas un katrs spiegs ir neitrāls ar augstākais vienu citu ($c_i \le 1$), tad 11 spiegi sadalās savstarpēji neitrālu spiegu pāros. Acīmredzot tā nevar būt. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un 11 spiegus prasītajā veidā var nostādīt.

73. uzdevums. *Kādā valstī ir 10 pilsētas. Dažas pilsētas savienotas ar vienvirziena aviolīnijām (katra aviolīnija savieno divas pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās). No katras pilsētas var aizlidot uz katru, varbūt ar pārsēšanos. Atrodiet mazāko n ar īpašību: katrā šādā valstī eksistē iespēja aplidot visas pilsētas un atgriezties izejas punktā, izdarot n pārsēšanās.*
Atbilde: $n = 30$.
Atrisinājums. Ar x_{ij} apzīmēsim mazāko lidojumu skaitu, lai no i-tās pilsētas nokļūtu j-tajā pilsētā; ar m apzīmēsim max x_{ij} ($i \ne j$). Varam uzskatīt, ka ceļojums ar garumu m ietver pilsētas p_1, p_2, ..., p_{m+1}. Papildinām to līdz cikliskam ceļojumam p_1, p_2, ..., p_{m+1}, p_{m+2}, ..., p_{10}, p_1. Saskaņā ar m izvēli šajā cikliskajā ceļojumā izmantoti ne vairāk kā $S = m + m\cdot(10-(m+1)+1)$ lidojumi. Bet

$$S = m(11 - m) \le \left(\frac{m + 11 - m}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}, \text{ tāpēc } S \le 30.$$

To, ka 30 lidojumi var būt nepieciešami, parāda piemērs:



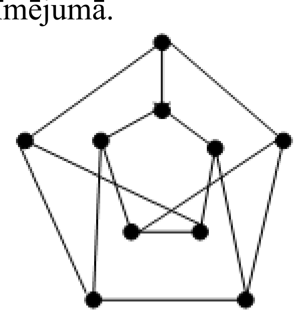
2.9 Dažādi uzdevumi

74. uzdevums. *[[VS], 123. uzd.] Grafā no katras virsotnes iziet 3 šķautnes un no katras virsotnes uz katru citu var aiziet pa ne vairāk kā 2 šķautnēm.*

1. *Pierādīt, ka virsotņu ir ne vairāk kā 10.*

2. *Kāds ir maksimālais iespējamais virsotņu skaits?*

Atrisinājums. No vienas grafa virsotnes A var nonākt ne vairāk kā uz trim virsotnēm, bet no karas no šīm 3 virsotnēm ne vairāk kā līdz 2 citām (neskaitot A). Tātad kopā grafam ir ne vairāk kā $1+3+3\cdot2=10$ virsotnes.
Piemērs ar 10 virsotnēm parādīts zīmējumā.



75. uzdevums. *[[MO], 38.13.] Ir vairākas pilsētas. Dažas no tām ir savienotas ar ceļiem. Ir tādas pilsētas A un B, ka no A uz B nevar aizbraukt, braucot mazāk kā caur 2 citām pilsētām. Visus ceļus slēdz un pēc tam rada ceļus starp visiem pilsētu pāriem, kur to pirms tam nebija. Pierādīt, ka tagad no jebkuras pilsētas uz jebkuru citu var aizbraukt, braucot caur ne vairāk kā 2 citām pilsētām.*

76. uzdevums. *[[VS], 290. uzd.] Apaļa ezera malā ir vairākas pilsētas. Starp dažām no tām ir divvirziena kuģu satiksme. Zināms, ka kuģi brauc starp divām pilsētām tad un tikai tad, ja tie nebrauc starp divām pilsētām, kas seko pēc tām pulksteņa rādītāja virzienā. Pierādīt, ka var aizbraukt no jebkuras pilsētas uz jebkuru, izmantojot ne vairāk kā 2 pārsēšanās.*

Atrisinājums. Pieņemsim, ka A, B un C ir trīs pilsētas, kas seko viena otrai ezera krastā. No uzdevuma nosacījuma seko, ka A un B ir savienotas ar kuģu līniju tad un tikai tad, kad B un C nav savienotas. Tādā veidā visas pilsētas sadalās blakus stāvošu pilsētu pāros, kuras ir savienotas ar kuģu līniju. Turklāt jebkuri divi tādi pilsētu pāri ir savienoti, t.i. viena no pirmā pilsētu pāra pilsētām ir savienota ar kādu no otrā pāra pilsētām. No šejienes izriet uzdevuma apgalvojums.

77. uzdevums. *Kāds ir minimālais tāds šķautņu skaits m, ka jebkurā grafā ar n virsotnēm un m šķautnēm starp jebkurām 4 virsotnēm var atrast 3, kas savienotas savā starpā?*

78. uzdevums. *[[VS], 310. uzd.] Ir 1997 pilsētas un ceļi starp tām. Katrs ceļš savieno 2 pilsētas. Zināms, ka no katras pilsētas var aizbraukt uz katru citu.*

__1.__ Pierādīt, ka eksistē 95 tādas pilsētas, ka no jebkuras citas var aizbraukt uz vismaz vienu no tām, braucot caur ne vairāk kā 20 citām.

__2.__ Pierādīt, ka 94 pilsētas ar šādu īpašību var nebūt.

79. uzdevums. *[Krievija, 1993] Ir 1993 pilsētas, no katras iziet ceļi uz vismaz 93 citām. Zināms, ka no katras pilsētas var aizbraukt uz katru citu. Pierādīt, ka to var izdarīt, braucot caur ne vairāk kā 62 citām pilsētām.*

80. uzdevums. *[Neklātienes konkurss, 1991] Ir 2n pilsētas. Katras 2 no tām savienotas ar vienu transporta veidu: gaisa transportu, autotransportu vai dzelzceļa transportu. Pierādīt, ka var atrast tādas n pilsētas un tādu transporta veidu, ka no katras no tām uz katru citu no tām var aizbraukt ar šo transporta veidu (varbūt ar pārsēšanos).*

81. uzdevums. *[[Z],25.7.] Grafā katrām 2 blakus virsotnēm nav kopīgu kaimiņu, bet katrām 2 „ne blakus" virsotnēm ir tieši 2 kopīgi kaimiņi. Pierādīt, ka no visām virsotnēm iziet vienāds skaits šķautņu.*

Atrisinājums. Var divos veidos saskaitīt ciklus ar garumu 4, kas ietver kaut kādu virsotni A. Pieņemsim, ka kopā ir *n* virsotnes, bet no A iziet k šķautnes. Tad:

1. 2 virsotnes, kas ciklā ir blakus A, viennozīmīgi nosaka A pretējo virsotni. Šīs divas virsotnes var izvēlēties $\frac{k(k-1)}{2}$ veidos.

2. A pretējā virsotne viennozīmīgi nosaka abas blakus virsotnes. Pretējo virsotni var izvēlēties $n-k$ - 1 veidos.

Tādēļ $\frac{k(k-1)}{2}=n-k-1$. Jebkuram *n* ir ne vairāk kā viens pozitīvs *k*, kas apmierina šādu vienādību.

3 Minimaksa teorēmas

3.1 Holla teorēma

Teorēma. *Pieņemsim, ka galīga kopa X sadalīta n apakškopās (varbūt ar kopīgiem elementiem):* $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$*. Nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai varētu izvēlēties n dažādus elementus* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tā, ka* $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$ *ir šāds: jebkuram k,* $1 \le k \le n$*, kopu* $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ *apvienojumā ir vismaz k elementi.*

Holla teorēmu, ar to saistītos rezultātus (Kēniga, Mengera u.c. teorēmas) un uzdevumus par tiem var atrast [[AC], 99.-103. lpp.] un [[V], 7. nodaļa].

3.2. Dilvorsa lemma

Lemma. *Ja daļēji sakārtota kopa satur mn+1 elementus, tad tajā var atrast vai nu ķēdi, kuras garums ir m+1, vai antiķēdi, kuras garums ir n+1.*

Dilvorsa teorēma. *Galīgā daļēji sakārtotā kopā minimālais ķēžu skaits, kas satur visus kopas elementus, ir vienāds ar vislielāko no antiķēžu garumiem.*

Šī tēma izklāstīta [AC][109.-112. lpp.]. Šeit tiek doti daži ar to saistīti uzdevumi, kas neparādās [AC]. Labs ievaduzdevums ir šāds:

82. uzdevums. *[[VS], 160. uzd.] Uz taisnes ir 50 nogriežņi. Pierādīt, ka vismaz viens no diviem sekojošiem apgalvojumiem ir patiess: a) ir 8 nogriežņi ar kopēju punktu, b) ir 8 nogriežņi, nekādiem diviem no kuriem nav kopēja punkta.*
Atrisinājums. Šo uzdevumu var rēķināt, gan atsaucoties uz Dilvorsa lemmu, gan arī citādi (pie tam nenākas atkārtot visu Dilvorsa lemmas pierādījumu). Uzdevumam ir analogs plaknes gadījumā, kura risinājumā gan Dilvorsa lemma neparādās:

83. uzdevums. *[[MC95], Krievija] Plaknē dots galīgs skaits kvadrātu. Visiem kvadrātiem malas ir paralēlas. Starp katriem k+1 kvadrātiem var atrast 2 kvadrātus ar kopīgu punktu. Pierādīt, ka visus kvadrātus var sadalīt 2k-1 kopās tā, lai katrā kopā visiem kvadrātiem būtu kopīgs punkts.*

Negaidītā veidā Dilvorsa lemmu var lietot šādā uzdevumā:
84. uzdevums. *[Neklātienes konkurss, 1990] Plaknē ir 101 punkts, nevieni 3 no kuriem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var izvēlēties 11 no tiem tā, lai jebkuri 3 izvēlētie punkti veidotu platleņķa trijstūri.*
Atrisinājums. Ievieš koordinātas tā, lai nekādiem 2 punktiem nebūtu vienādas x vai y koordinātes. Definē daļēju sakārtojumu: punkts A ar koordinātēm (x_1, y_1) ir mazāks par B ar koordinātēm (x_2, y_2), ja $x_1 < x_2$ un $y_1 < y_2$. Pēc Dilvorsa lemmas, eksistē ķēde vai antiķēde ar 11 punktiem. Acīmredzot jebkuri 3 no šiem 11 izvēlētiem punktiem veidotu platleņķa trijstūri.

3.3. Špernera teorēma

Teorēma. *Lielākais daudzums apakškopu, ko var izvēlēties no n elementu kopas tā, lai neviena izvēlētā apakškopa nebūtu apakškopa citai izvēlētai, ir*

a) C_{2k}^{k}, *ja* $n = 2k$,

b) C_{2k+1}^{k}. *ja* $n = 2k + 1$.

Skat. [[AC], 104.-107. lpp.].

4 Dirihlē princips, vidējās vērtības metode

Skat. [AC].

5 Krāsojumi un invarianti

Vienkāršu ievadu šajā tēmā var atrast [[L], 140.-151.lpp]. Uzdevumus par to var atrast arī [[PR], 22. nod.].

5.1. Krāsošana

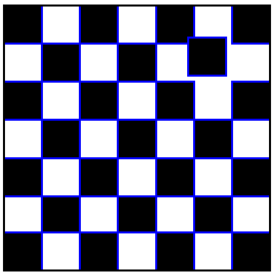
Šī metode ir ļoti populāra olimpiāžu uzdevumos. Tāpēc sīkāk aplūkosim to, sākot ar vairākiem piemēriem. Tālāk, aprakstot uzdevumus, varēsim dot tikai īsus norādījumus kādu krāsojuma veidu izmantot

1. piemērs. *Vai kubu ar izmēriem 6×6×6 var uzbūvēt no 27 ķieģeļiem, kuriem ir taisnstūra paralēlskaldņa forma, bet izmēri ir 1×2×4?*
Analīze. Šis ir jautājums, uz kuru atbilde ir "jā" vai "nē". Pirmkārt, ievērosim, ka $6\cdot6\cdot6=1\cdot2\cdot4\cdot27$. Tātad materiālu kuba izveidošanai pietiek. Nedaudz ģeometriskas iztēles, un mēs redzam, ka ar 26 etaloniem 1×2×4 var aizpildīt kubu, kura vienā stūrī paliek nenoklāts kubs ar izmēriem 2×2×2. Skaidrs, ka ar etalonu 1×2×4 to noklāt nevar. Var izmēģināt arī citus variantus, bet tie visi būs neveiksmīgi. Galvenais tagad saprast, ka tas, ka pirmais noklāšanas variants nav bijis veiksmīgs, nekādā gadījumā nenozīmē, ka kuba izveidošana no etaloniem 1×2×4 nav iespējama. Ļoti bieži šādā gadījumā palīdz kubiņu iekrāsošana. Izdomājot pareizo iekrāsošanas veidu, mēs iegūsim atrisinājumu.
Atrisinājums. Tā kā stereometrijā iekrāsošana ģeometriski ir pārāk sarežģīta un nevizuāla, tad pāriesim pie algebriska pieraksta. Tātad kubs 6×6×6 var tikt aprakstīts kā mazo kubiņu 1×1×1 kopa ar koordinātēm (m, n, k), kur skaitļi m, n, k ir naturāli skaitļi robežās no 1 līdz 6. Tagad iekrāsosim melnus kubiņus, kuru koordinātes m, n, k ir nepāra skaitļi. Redzam, ka tādu kubiņu skaits ir 3·3·3=27. Tagad atliek saprast, ka katrs etalons var noklāt 0, 2 vai 4 iekrāsotos kubiņus. Tas seko no tā, ka katrs etalons 1×2×4 sastāv no diviem paralēlskaldņiem 1×1×4, kurā var būt iekrāsoti 0 vai 2 kubiņi (precīzāk iztēlojoties kubu, var saprast arī, ka noklāti var būt tikai 0 vai 2 iekrāsotie kubiņi). Tas nozīmē, ka ar dotajiem etaloniem var noklāt tikai pāra skaita iekrāsotos kubiņus. Bet, tā kā jānoklāj 27 iekrāsotie kubiņi, tad tas nav iespējams.

Krāsojumi

Mēs redzējām, ka kubiņu iekrāsošana palīdzēja mums atrisināt doto uzdevumu. Tagad aplūkosim galvenos krāsošanas veidus.
Sāksim ar rūtiņu lapas krāsojumiem.
Izvēloties vienu rūtiņu lapas rūtiņas centru par koordinātu plaknes sākumpunktu, visu rūtiņu centru koordinātes būs veseli skaitļi. Tātad katrai rūtiņai mēs piekārtosim veselu skaitļu pāri (m, n) – rūtiņas centra koordinātes. Tātad, piemēram, rūtiņu taisnstūri $m\times n$ mēs varētu aprakstīt šādi: rūtiņu kopa, kuru koordinātēm (x, y) izpildās nevienādības $1\le x\le m$, $1\le y\le n$; taču bieži ir ērtāk izvēlēties skaitļu x un y robežas intervālos $0\le x\le m-1$, $0\le y\le n-1$.

K1. Šahveida krāsojums

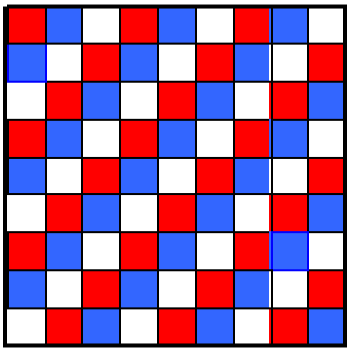


Šeit uzzīmēts rūtiņu kvadrāta 7×7 šahveida krāsojums. Tas ir viens no visbiežāk izmantojamajiem krāsojumiem uzdevumu risinājumos.
Uzdevumu krājumos varat atrast simtiem uzdevumu, kurus risina, izmantojot šādu krāsojumu. Vajadzētu arī saprast, kā algebriski pierakstīt iekrāsoto rūtiņu koordinātes. To var pierakstīt šādi: rūtiņa ar koordinātēm (x, y) tiek iekrāsota melna, ja $x + y \equiv 0 \pmod 2$. Aplūkosim tikai vienu piemēru, kas to ilustrē.

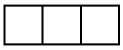
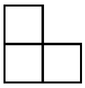
2. piemērs. *Rūtiņu kvadrāta 7×7 kreisajā augšējā stūrī atrodas figūra "zirdziņš". Vai zirdziņš var apiet visu kvadrātu, katrā laucinā nonākot vienu reizi, un pēdējā gājienā atgriezties sākuma laucinā?*
Analīze. Ievērosim, ka zirdziņš katrā gājienā pāriet uz pretējās krāsas lauciņu.
Atrisinājums. Nē, nevar. Atzīmēsim divas galvenās īpašības:
1. Zirdziņš katrā gājienā pāriet uz pretējās krāsas lauciņu.
2. Lai apietu visu rūtiņu kvadrātu, tam ir jāizpilda 49 gājieni.
Tātad pēc 49 gājieniem zirdziņš, kurš sākumā atradās uz melnā lauciņa, atradīsies uz baltā lauciņa, un tāpēc nevarēs atrasties sākuma lauciņā.

K2. Diagonālveida krāsojums

Atcerēsimies šahveida krāsojuma algebrisko pierakstu: lauciņš ir melns, ja $x + y \equiv 0 \pmod 2$. Izmainot kongruences moduli (teiksim, 2 par n), lauciņus varēsim nokrāsot n krāsās. Apzīmēsim krāsas ar skaitļiem no 0 līdz n-1. Lauciņu ar koordinātēm (x, y) nokrāsosim krāsā $x + y \pmod n$. Uzzīmēsim rūtiņu kvadrāta 9×9 diagonālveida krāsojumu trīs krāsās:



Uzskatīsim, ka kreisās augšējās rūtiņas koordinātes ir (0, 0). Šeit rūtiņa ir nokrāsota sarkana, ja $x + y \equiv 0 \pmod 3$, zila, ja $x + y \equiv 1 \pmod 3$ un balta, ja $x + y \equiv 2 \pmod 3$. (Koordinātu asis atbilst datoru koordinātēm: ass Ox vērsta horizontāli pa labi, ass Oy – vertikāli uz leju).
Tagad aplūkosim vienu no daudzajiem uzdevumiem, kas izmanto diagonālkrāsojumu.

3. piemērs. *Pierādīt, ka kvadrātu 9×9 nevar noklāt ar 26 nešķeļošām trimino figūrām*  *un vienu figūru* .

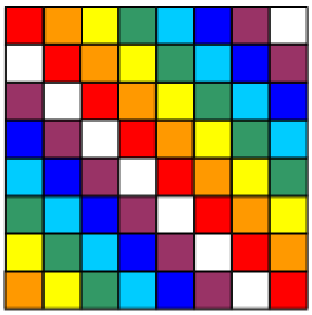
Analīze. Lielākā daļa figūru pārklāšanas uzdevumu ir saistīta ar lauciņu iekrāsošanu. Tā kā figūriņas sastāv no trim kvadrātiem, tad loģiski būtu izmantot trīskrāsu krāsojumu. Ļoti būtiski ir tas, ka trīskrāsu diagonālkrāsojumā katra taisnā trimino figūra noklāj vienu katras krāsas rūtiņu. Atliek analizēt, cik kādas krāsas lauciņus pārklāj leņķveida trimino figūra.

Atrisinājums. Šoreiz uzdevums ir „vienkāršāks”, jo mums nav jātērē laiks pozitīvo piemēru konstruēšanai, bet jāmeklē pretrunas iemesls. Vispirms iekrāsosim trīs krāsās diagonālveidā kvadrātu 9×9. Saskaitīsim, cik ir kādas krāsas rūtiņu. Sarkano rūtiņu skaits ir 27, zilo rūtiņu skaits ir 27 un balto rūtiņu skaits ir 27. Izvēloties krāsojuma virzienu, mēs varam uzskatīt, ka leņķa figūra ir novietota tā, ka tā noklāj divas vienas krāsas rūtiņas un vienu otras krāsas rūtiņu. Teiksim, tā noklāj divas sarkanas un vienu zilu rūtiņu. Tādā gadījumā mums paliek 25 sarkanas, 26 zilas un 27 baltas rūtiņas. Katra taisnā trimino figūra noklāj vienu sarkanu, vienu zilu un vienu baltu rūtiņu. Tā kā atlikušajā daļā dažādu krāsu rūtiņu skaiti nav vienādi, tad ar taisnajām trimino figūrām to noklāt nav iespējams.

4. piemērs. *Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām; 33 rūtiņās ievietots pa zvaigznītei. Pierādīt, ka var atrast tādas 5 zvaigznītes, no kurām nekādas divas neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā.*

Analīze. Uzdevuma formulējums vedina uz domu, ka būs jāizmanto Dirihlē princips. Sāksim ar tradicionālu nepareizu spriedumu. Tā kā zvaigznītes ir 33, tad tās nevar izvietot četrās kolonnās, t.i. vismaz piecās kolonnās būs zvaigznītes. To pašu var teikt arī par rindiņām. Tad šajās kolonnās un rindiņās paņemsim pa zvaigznītei. Protams, ka tas nav pierādījums, jo ņemot piecas zvaigznītes, kas atrodas piecās kolonnās nav nekādas garantijas, ka to varēs izdarīt tā, lai tās atrastos dažādās rindiņās. Kaut gan šajā nepareizajā spriedumā tika izmantots Dirihlē princips, tas nenoveda pie atrisinājuma. Uzdevuma risinājumā Dirihlē princips būs jāizmanto kombinācijā ar diagonālveida iekrāsojumu pēc moduļa 8.

Atrisinājums. Sadalām rūtiņas 8 grupās, kā parādīts zīmējumā.

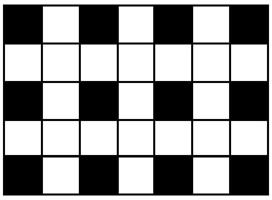


Vienas grupas rūtiņas iekrāsotas vienā krāsā. Kā redzam, vienādi iekrāsotās rūtiņas neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā. Ja katrā grupā atrastos ne vairāk par 4 zvaigznītēm, tad kopā to būtu ne vairāk par 32; tātad kādā no grupām ir vismaz 5 zvaigznītes. Tās arī izvēlēsimies.

K3. Diskrētais krāsojums

Varam izmantot arī krāsojumu, kurā tiek iekrāsotas rūtiņas, kuru koordinātes pieņem noteiktu vērtību pēc noteikta moduļa. Vienkāršākais no tiem ir šāds: rūtiņa tiek iekrāsota, ja $x \equiv 1 \pmod 2$ un $y \equiv 1 \pmod 2$.

5. piemērs. *Vai iespējams rūtiņu taisnstūri 5×7 pārklāt ar 35 leņķveida trimino figūrām tā, ka katra rūtiņa būtu pārklāta ar trim trimino figūrām?*
Analīze. Lai pierādītu, ka pārklājums nav iespējams, izmantojiet tikko aprakstīto diskrēto krāsojumu pēc moduļa 2. Rūtiņu taisnstūrim 5×7 tas izskatās šādi:



Taču pretruna šoreiz nebūs paritātē vai arī pēc cita moduļa. Lieta ir tāda, ka mums ir pārāk daudz melno rūtiņu.
Atrisinājums. Lai atrisinātu šo uzdevumu, izmantosim tikko aplūkoto krāsojumu. Mums pavisam ir 12 iekrāsotas rūtiņas. Katra no tām ir jāpārklāj ar trim leņķveida trimino figūrām. Ievērosim, ka katra leņķveida trimino figūra var pārklāt lielākais vienu iekrāsoto rūtiņu. Tātad, lai trīskārši pārklātu iekrāsotās rūtiņas, mums nepieciešamas vismaz 36 trimino figūras. Taču mums šādas figūras ir tikai 35. Tātad prasītais pārklājums nav iespējams.

K4. Periodisks rūtiņu lapas krāsojums

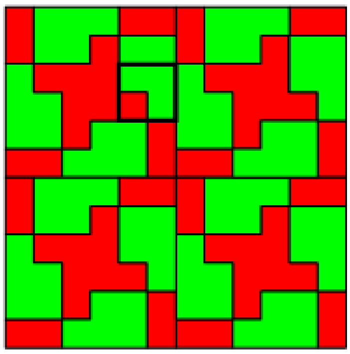
Periodisku rūtiņu lapas krāsojumu varam iegūt šādi: ar horizontālām un vertikālām taisnēm sadalām rūtiņu plakni taisnstūros $m\times n$. Vienu šādu taisnstūri iekrāsojam patvaļīgi k krāsās. Pārējos taisnstūrus $m\times n$ iekrāsojam tāpat kā izvēlēto taisnstūri. Algebriski periodisko krāsojumu var definēt kā divargumentu funkciju $f(x, y)$, kas katram veselu skaitļu pārim (x, y) (rūtiņas koordinātes) piekārto veselu skaitli no intervāla $[0, k\text{-}1]$ (krāsas numurs).

Definīcija. *Rūtiņu lapas krāsojumu $f(x, y)$ sauc par (m, n)-periodisku, ja jebkuriem veseliem skaitļiem x, y, u, v, kuriem $x \equiv u \pmod{m}$ un $y \equiv v \pmod{n}$, izpildās vienādība $f(x, y) = f(u, v)$.*

Visi iepriekš aprakstītie krāsojumi ir periodiski.
Nākošā uzdevuma atrisinājums izmanto ļoti sarežģītu periodisku divkrāsu krāsojumu.

6. piemērs. *Bezgalīgas rūtiņu lapas rūtiņas sākumā ir baltas. Atļauts izvēlēties jebkuru kvadrātu 3×3 vai 4×4 un pārkrāsot tā rūtiņas pretējā krāsā (baltu rūtiņu par melnu, melnu par baltu). Vai, atkārtoti pielietojot šādas operācijas, ir iespējams iegūt rūtiņu lapu, kurā melnas ir tikai 4 rūtiņas, kas veido kvadrātu 2×2?*
Analīze. Pēc dažiem neveiksmīgiem pārkrāsošanas mēģinājumiem mēs nonākam pie slēdziena, ka atbilde varētu būt: nē, nav iespējams. Tātad mums vajadzētu izmantot invariantu metodi. Pieņemsim, ka mums izdotos iekrāsot rūtiņu lapu divās krāsās, teiksim, sarkanā un zaļā tā, ka katrs kvadrāts 3×3 un 4×4 satur pāra skaitu sarkano rūtiņu, bet eksistē kvadrāts 2×2, kas satur nepāra skaitu sarkano rūtiņu. Tādā gadījumā viegli pierādīt uzdevumā prasītās pārkrāsošanas neiespējamību. Tiešām, izpildot atļautos pārveidojumus, melno rūtiņu skaits plaknes sarkanajā daļā vienmēr būs pāra skaitlis (tas arī ir šī uzdevuma pārveidojumu invariants). Bet mums vajag iegūt melnu kvadrātu 2×2, kurš satur nepāra skaitu sarkanās daļas rūtiņu (protams, melnbaltā kvadrāta izvietojumu mēs varam izvēlēties paši; tāpēc krāsojumā pietiek norādīt tikai vienu šādu kvadrātu 2×2). Tātad apgalvojums būs pierādīts, ja mēs atradīsim šo sarkanzaļo plaknes krāsojumu. Ja Jums tas neizdodas, tad lasiet atrisinājumu.

Atrisinājums. Nē, nav iespējams. Kā bija parādīts uzdevuma analīzē, pārveidojumu neiespējamība būs pierādīta, ja mums izdotos iekrāsot rūtiņu lapu divās krāsās, teiksim sarkanā un zaļā tā, ka katrs kvadrāts 3×3 un 4×4 satur pāra skaitu sarkano rūtiņu, bet eksistē kvadrāts 2×2, kas satur nepāra skaitu sarkano rūtiņu. Viens šāds (6, 6)-periodisks krāsojums parādīts zīmējumā.

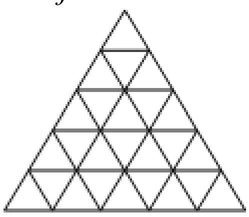


Kvadrāts 2×2 zīmējumā norādīts, bet to, ka katrs kvadrāts 3×3 un 4×4 satur pāra skaitu sarkano rūtiņu, ir jāpārbauda, aplūkojot visus iespējamos kvadrātu 3×3 un 4×4 izvietojumus. Tā kā krāsojums ir periodisks, tad jāaplūko 36 kvadrāta 3×3 izvietojumi (kvadrāta 3×3 kreiso augšējo rūtiņu ievietojot vienā no kreisā augšējā kvadrāta 6×6 rūtiņām) un 36 kvadrāta 4×4 izvietojumi.

K5. Regulāra trijstūra „šahveida" krāsojums

Krāsošanu var izmantot ne tikai uzdevumos par rūtiņu lapu, bet arī citos gadījumos, kad noteikta figūra sadalīta vairākās mazās figūrās. Par „šahveida" krāsojumu tad sauc divkrāsu krāsojumu, kurā figūras ar kopīgu malu iekrāsotas dažādās krāsās. Protams, ne katru figūras sadalījumu var šādi iekrāsot. Aplūkosim dažus uzdevumus, kuros regulārs trijstūris sadalīts vienādos mazākos regulāros trijstūros.

7. piemērs. *Regulārs trijstūris ar malas garumu 5 sadalīts 25 regulāros trijstūros ar malas garumu 1 (skat. zīm.). Kādu lielāko skaitu rombu, kas sastādīti no diviem „mazajiem" trijstūriem, var izgriezt no dotā „lielā" trijstūra?*



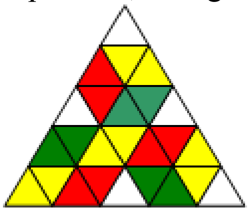
Analīze. Uzdevumu atrisinājumi, kuru formulējums ir „Kādu lielāko (mazāko) skaitu ... var iegūt ?" sastāv no divām daļām: piemēra, kas parāda, ka var iegūt *n* prasītās „konfigurācijas" (šajā gadījumā – no piemēra, kur parādīts, kā var izgriezt *n* rombus), un pierādījuma, ka skaitli *n* nevar palielināt (šajā uzdevumā jāpierāda, ka vairāk par *n* rombiem izgriezt nevar). Samērā viegli ir uzzīmēt piemēru, kurā izgriezti 10 rombi. Tālāk jāpāriet pie pierādījuma, ka vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar. Šajos pierādījumos skolnieki bieži pieļauj vienu un to pašu kļūdu. Viņi saka: „Lūk, es visizdevīgākajā veidā izgriezu 10 rombus, un ir redzams, ka 11-to rombu vairs izgriezt nevar". Šādos gadījumos pasniedzējam ļoti rūpīgi un neatlaidīgi ir jāpaskaidro, kādas kļūdas ir pielaistas šajā spriedumā, jo tās liecina: skolniekam vēl nav precīzas izpratnes par to, kas ir matemātisks pierādījums.
Kļūdas šeit ir divas:

1. Nav skaidrs, ko nozīmē vārds „visizdevīgākajā”.

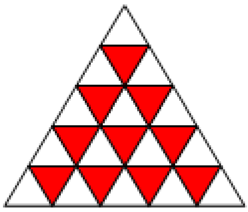
2. Nav nekāda pamata uzskatīt, ka 10 rombus jāizvēlas tieši tā, kā parādīts skolnieka piemērā; un tiešām, 10 rombus var izgriezt ļoti daudzos veidos. Tad kāpēc gan kādā no citiem piemēriem nebūs palikusi vieta 11-ajam rombam?

Lai iegūtu precīzu pierādījumu, ka vairāk par 10 rombiem izgriezt nevar, izmantosim „šahveida” krāsojumu.

Atrisinājums. zīmējumā parādīts viens piemērs, kā izgriezt 10 rombus.



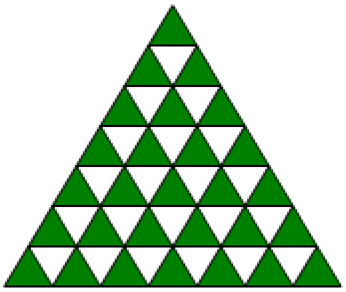
Pierādīsim, ka vairāk nekā 10 rombus izgriezt nevar. Lai to pierādītu, iekrāsosim mazos trijstūrus divās krāsās, kā parādīts zīmējumā.



Ievērosim, ka katrs izgrieztais rombs satur vienu baltu un vienu sarkanu trijstūri. Tā kā sarkano trijstūru skaits ir 10, tad vairāk par 10 rombiem izgriezt nevar.

8. piemērs. *Regulārs trijstūris ar taisnēm, kas ir paralēlas tā malām, sadalīts 49 vienādos regulāros trijstūros. Novilkta neslēgta lauzta līnija, kuras posmi iet pa mazo trijstūru malām un iet caur katru „mezgla punktu” (tā sauksim jebkuru no mazo trijstūru virsotnēm). Pierādīt, ka līnijas posmi veido vismaz 7 šaurus leņķus.*

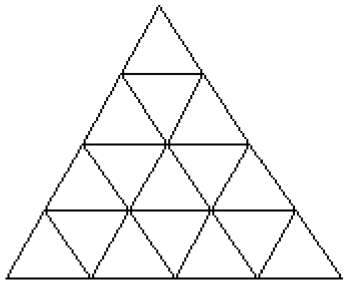
Analīze. Zīmējot piemērus, redzam, ka vienmēr izveidojas vismaz septiņi 60° leņķi. Lai pierādītu šo apgalvojumu atkal izmantosim trijstūra šahveida krāsojumu.



Vispirms ievērosim, ka visi līnijas posmi iet pa zaļo trijstūru malām. Tālāk mums vajadzētu aprēķināt līnijas garumu (tas nav atkarīgs no tā, kā šī līnija novilkta), ievērot, ka līnija nevar saturēt trīs viena zaļā trijstūra malas, bet, ja tā satur divas viena zaļā trijstūra malas, tad tās veido 60° leņķi. Tagad pamēģiniet veikt aprēķinus un, izmantojot Dirihlē principu, pierādīt prasīto.

Atrisinājums. Iekrāsosim mazos trijstūrus, kā parādīts uzdevuma analīzē. Ievērosim, ka pavisam zīmējumā ir 36 mezgla punkti. Tā kā līnija iet caur visiem šiem punktiem, tad tā sastāv no 35 zaļo trijstūru malām. Zaļo trijstūru skaits ir 28. Līnija nevar saturēt trīs viena zaļā trijstūra malas. Pieņemsim, ka ir ne vairāk par 6 tādiem zaļajiem trijstūriem, kuriem divas malas pieder novilktajai līnijai. Apzīmēsim šādu trijstūru skaitu ar k. Tad kopējais līnijas garums nepārsniedz $2k+(28-k)=k+28\le 34$ vienības (mazā trijstūra mala ir viena vienība). Bet tas ir pretrunā ar to, ka līnija satur 35 zaļo trijstūru malas. Iegūtā pretruna pierāda, ka ir vismaz 7 zaļie trijstūri, kuriem divas malas pieder novilktajai līnijai. Līnijas posmi, kas satur šo trijstūru divas malas, veido 60° leņķi. Apgalvojums pierādīts.

9. piemērs. *Vienādmalu trijstūra katra mala sadalīta n vienādos nogriežņos; dalījuma punkti savienoti ar nogriežņiem, kas paralēli trijstūra malām. Sākotnējais trijstūris tādējādi sadalās* n^2 *mazos vienādmalu trijstūrīšos (skat. zīm., kur n = 4). Šo trijstūrīšu virsotnes saucam par režģa virsotnēm.*



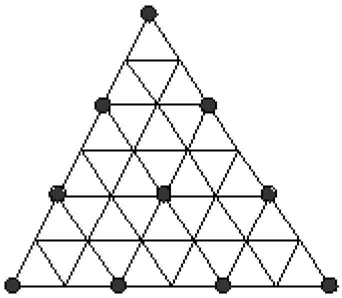
Katrā iegūtā režģa virsotnē atrodas pa skudrai. Skudras vienlaicīgi sāk ar vienādiem un nemainīgiem ātrumiem rāpot pa režģa līnijām. Skudras maina kustības virzienu tikai režģa virsotnēs. Nonākot kādā režģa virsotnē, katra skudra pagriežas par 60° vai 120° (vienalga uz kuru pusi) un turpina ceļu pa režģa līnijām.

a) *Pierādiet: ja n = 6, tad dažas skudras kādreiz noteikti satiksies.*

b) *Vai tas noteikti notiks, ja n = 7?*

Analīze. Lai pierādītu uzdevuma a) punktu, izmantosim režģa virsotņu krāsojumu divās krāsās, kurš parādīts zīmējumā, un aplūkosim tās skudras, kas sākotnēji vai pēc pirmā gājiena atradās melnajos punktos. Tālāk jāizmanto Dirihlē princips.

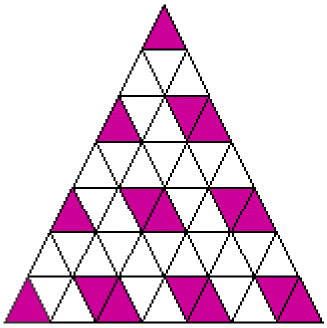
Uzdevuma b) punktā atbilde ir negatīva: nē, tas var arī nenotikt. Tas nozīmē, ka ir tikai jāizdomā piemērs, kurā parādīts, kā skudrām rāpot pa režģa līnijām, lai tās nesatiktos. Ja uzreiz neizdodas atrast šādu piemēru, tad pamēģiniet atrast piemēru, kad $n = 1$ un $n = 3$.



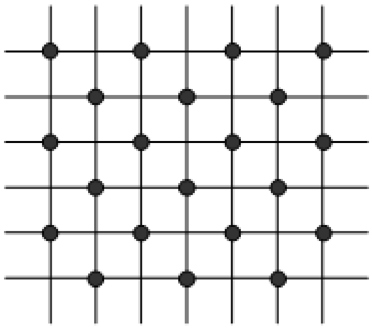
Atrisinājums. a) Aplūkosim 10 melnos punktus (skat. zīm.).

Pieņemsim, ka skudras nesatiekas. Aplūkosim 10 skudras, kas sākotnēji atradās melnajos punktos. Tad pēc viena gājiena tās atradīsies baltajos punktos. Aplūkosim vēl 10 skudras, kas pēc pirmā gājiena atradās melnajos punktos. Pēc otrā gājiena tās atradīsies baltajos punktos; arī pirmās 10 skudras atradīsies baltajos punktos (jo divos gājienos nevar aiziet no melnā punkta uz melno). Tātad vismaz 20 skudras atradīsies baltajos punktos, taču šādu punktu ir tikai 18. Iegūta pretruna.

b) Nē, ne noteikti. Piemēram, skudras var kustēties cikliski apkārt zīmējumā iekrāsotajiem trijstūriem vai rombiem.



10. piemērs. *Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Uz tās novietoja kubu tā, ka viena kuba skaldne precīzi sakrita ar vienu no rūtiņām. Kubu sāka ripināt pa plakni, pakāpeniski "pārveļot" pāri kādai no atbalsta skaldnes šķautnēm. Kādā brīdī tika konstatēts, ka kubs balstās uz plaknes ar to pašu skaldni, ar kuru sākumā, un atrodas tai pašā vietā, kur sākumā. Vai var gadīties, ka šai brīdī kubs, salīdzinot ar sākotnējo pozīciju, pagriezts par 90° ap vertikālo asi, kas iet caur atbalsta skaldnes centru?*
Analīze. Lai atrisinātu šo uzdevumu, atkal ir jāizmanto krāsošana. Jāiekrāso gan plaknes režģa virsotnes, gan kuba virsotnes. Plaknes režģa virsotņu krāsojums ir tradicionāls divkrāsu diagonālais (jeb vienkārši šahveida) krāsojums. Arī kuba virsotņu krāsojums ir tradicionāls divkrāsu krāsojums, kurā katra šķautne satur melnu un baltu virsotni.
Atrisinājums. Nē, tā nevar notikt. Iekrāsosim kuba virsotnes divās krāsās – melnā un baltā tā, ka katra šķautne satur melnu un baltu virsotni, un izkrāsosim arī plaknes režģa virsotnes "šaha galdiņa" kārtībā (skat. zīm.).



Saskaņosim krāsojumu tā, lai sākuma pozīcijā melnās kuba virsotnes sakristu ar melnajām režģa virsotnēm. Viegli redzēt, ka šī īpašība saglabājas, kad kubs pārveļas kādai no atbalsta skaldnes šķautnēm. Tātad šī īpašība saglabāsies līdz kustības beigām. Bet, ja kubs būtu pagriezts par 90° ap vertikālo asi, tā nebūtu saglabājusies.

85. uzdevums. *Vai šaha galdiņu 8×8, no kura izgrieztas 2 pretējās stūra rūtiņas, var sagriezt 1×2 gabaliņos?*
Atrisinājums. Izmantosim šahveida krāsojumu. Figūra satur 32 vienas krāsas rūtiņas un 30 otras krāsas rūtiņas, bet katrs gabaliņš 1×2 – pa vienai katras krāsas rūtiņai. Tātad var noklāt tikai figūru, kura satur vienādu skaitu melno un balto rūtiņu. Tātad doto figūru nevar sagriezt gabaliņos 1×2.

86. uzdevums. *Vai var šaha galdiņu 5×5 apstaigāt ar zirdziņu, katrā rūtiņā iegriežoties tieši 1 reizi un*

1. *sākot no augšējās rindas 2. rūtiņas?*
2. *sākot no kaut kādas citas rūtiņas?*

Atrisinājums. 1. Aplūkojam galdiņa šahveida krāsojumu, uzskatot, ka kreisā augšējā rūtiņa nokrāsota melna. Tad mums ir 13 melnas un 12 baltas rūtiņas. Tā kā zirdziņš savu maršrutu sāk no baltās rūtiņas, maršrutam būtu jāsastāv no 13 baltām un 12 melnām rūtiņām. Tātad pirmajā gadījumā apiet šaha galdiņu nav iespējams.
2. Parādiet ar piemēru, ka tas ir iespējams.

87. uzdevums. [[VS], 133. uzd.] *Vienādmalu trijstūra katra mala sadalīta k vienādās daļās. Caur dalījuma punktiem novilktas taisnes, kas paralēlas malām. Tādējādi trijstūris sadalīts k^2 mazos trijstūros. "Ķēdīte" ir mazo trijstūru virkne, kurā neviens trijstūris nav vairāk kā 1 reizi un katram nākošajam trijstūrim ir kopīga mala ar iepriekšējo. Kāds ir maksimālais iespējamais trijstūru skaits "ķēdītē"?*
Atrisinājums. Izmantosim trijstūra šahveida krāsojumu, uzskatot, ka augšējais trijstūris ir melns. Tad trijstūris satur $\left(\dfrac{k^2-k}{2}\right)$ baltos trijstūrus. Skaidrs, ka ķēdīte nevar saturēt vairāk par $2\cdot\left(\dfrac{k^2-k}{2}\right)+1=k^2-k+1$ trijstūriem. Viegli uzzīmēt piemēru ar šādu trijstūru skaitu.

88. uzdevums. *Kurus no taisnstūriem 5×6, 5×8, 6×8, 10×10 var sagriezt T formas figūriņās, kas sastāv no 4 launciņiem?*
Atrisinājums. Tā kā rūtiņu skaitām jādalās ar 4, tad, protams, nevar sagriezt taisnstūri 5×6.
Aplūkojot iespējamos figūriņu izvietojumus pie malas ar garumu 5, secinām, ka nekādu taisnstūri ar malas garumu 5 nevar sagriezt T formas figūriņās.
Aplūkojot šahveida krāsojumu, secinām, ka jābūt vienādam skaitam T figūriņu ar 1 balto rūtiņu un T figūriņu ar 1 melno rūtiņu. Tātad figūriņu skaits ir pāra skaitlis un taisnstūra rūtiņu skaitam jādalās ar 8. Tātad taisnstūri 10×10 arī nevar sagriezt T figūriņās.
Sākot figūru izvietošanu pie malas ar garumu 6, arī nonākam pie pretrunas. Tātad arī figūru 6×8 nevar sagriezt T figūriņās.

89. uzdevums. *[[PR],22.14] Taisnstūris sagriezts gabaliņos 1×4 un 2×2. Vienu 2×2 gabaliņu aizvieto ar 1×4 gabaliņu. Pierādīt, ka no iegūtā gabaliņu komplekta nevar izveidot tādu pašu taisnstūri.*
Atrisinājums. Izmantojiet 5. piemērā parādīto krāsojumu un to, ka katra figūra 1×4 noklāj pāra skaitu melno rūtiņu, bet katra figūra 2×2 vienu (tātad nepāra skaitu melno rūtiņu).

90. uzdevums. *[[PR],22.18] Vai taisnstūri 10×10 var sagriezt taisnstūros 1×4?*
Atrisinājums. To nevar izdarīt. Pie pretrunas noved 4 krāsu diagonālkrāsojums (rūtiņu skaiti dažādās krāsās nav vienādi).

91. uzdevums. *Vai šaha zirdziņš var apstaigāt galdiņu 4×n, katrā rūtiņā nonākot tieši vienreiz un beigās atgriežoties sākuma rūtiņā?*
Atrisinājums. Nē, nevar. Aplūkojam šahveida krāsojumu un secinām, ka apgaitā zirdziņš katrā gājienā maina balto un melno krāsas. Tagad iekrāsojam pirmo un ceturto joslu sarkanā krāsā, bet divas vidējās joslas zaļā krāsā. Tā kā no sarkanās krāsas rūtiņas zirdziņš var nonākt tikai zaļās krāsas rūtiņā, un abu krāsu rūtiņu skaits ir vienāds, tad no zaļās krāsas rūtiņas tam jānonāk sarkanās krāsas rūtiņā. Tādā gadījumā melnbaltajam un sarkanzaļajam krāsojumiem būtu jāsakrīt. Bet tā ir pretruna.

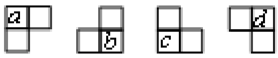
92. uzdevums. *[Žūrija, 1986, CA4] Superzirdziņš vienā gājienā var iet 3 rūtiņas vienā virzienā un 2 rūtiņas otrā virzienā. Vai var ar superzirdziņu apstaigāt 12×12 šaha galdiņu, katrā rūtiņā nonākot tieši vienreiz un beigās atgriežoties sākuma rūtiņā?*

93. uzdevums. *[PSRS, 1989] Uz šaha galdiņa 2n×2n atrodas 2n figūras tā, ka katrā vertikālē un katrā horizontālē to ir pa 1. Pierādīt, ka melnajās rūtiņās atrodas pāra skaits figūru.*
Atrisinājums. No sākuma novietojam visas figūras uz melnās diagonāles. Tad melnajās rūtiņās atrodas 2n – pāra skaits figūru. Katras divas figūras atļautajās konfigurācijās nosaka taisnstūri, kura pretējās virsotnēs tās atrodas. Par inversiju sauksim šādu divu izvēlētu figūru pārvietošanu uz divām citām pretējām taisnstūra virsotnēm. Viegli pārbaudīt, ka inversijas rezultātā nemainās figūru skaita paritāte, kas atrodas melnajās rūtiņās. Atliek piezīmēt, ka ar šādām inversijām var iegūt jebkuru atļauto izvietojumu.

94.uzdevums. *[IMO, 1996] Uz galdiņa 20×12 rūtiņas atrodas figūra, kas var iet no vienas rūtiņas uz otru, ja attālums starp rūtiņu centriem ir* $\sqrt{k}$ *. Vai šī figūra var nokļūt no labā apakšējā stūra uz kreiso apakšējo stūri, ja*
1. *k dalās ar 2 vai 3?*
2. *k = 73?*
3. *k = 97?*
Atbildes: 1. nē; **2.** jā; **3.** nē. **3.** var risināt gan ar krāsojumu, gan citādi, grūti pateikt, kurš no risinājumiem vieglāks (abi nav viegli izdomājami).

95. uzdevums. *[IMO, 1993] Uz bezgalīgas rūtiņu lapas spēlē spēli pēc šādiem noteikumiem: ja kauliņam A blakus rūtiņā ir cits kauliņš B un rūtiņa aiz B ir brīva, tad var ar kauliņu A pārlēkt pāri uz brīvo rūtiņu. Kauliņš B, kam pārlec pāri, tiek novākts no lapas. Sākumā ar kauliņiem ir aizpildīts taisnstūris n×n, bet visas pārējās rūtiņas ir brīvas. Vai ir iespējams, ka paliek tikai viens kauliņš, ja **1)** n = 4, **2)** n = 6; **3)** n = 8?*

96. uzdevums. *[[KV], M1454, 1994. gada Krievijas olimpiāde] Taisnstūris m×n sagriezts stūrīšos:*



Pierādīt, ka starpība starp a veida stūrīšu skaitu un b veida stūrīšu skaitu dalās ar 3.

97. uzdevums. *[Žūrija, 1989, FRA2] Taisnstūris sagriezts mazākos taisnstūros. Katram mazākajam taisnstūrim vismaz vienas malas garums ir vesels skaitlis. Pierādīt, ka arī lielajam taisnstūrim vismaz vienas malas garums ir vesels skaitlis.*

Atrisinājums. Izkrāso taisnstūri 2 krāsās kā šaha galdiņu ar malu $\frac{1}{2}$. Tad jebkurā taisnstūrī ar vesela garuma malu laukumi abās krāsās ir vienādi. Tādēļ arī lielajā taisnstūrī tie ir vienādi. Tas ir iespējams tikai, ja lielajam taisnstūrim viena mala ir vesels skaitlis.
Piezīme: to var risināt arī bez krāsošanas. Tas ir mazāk pārsteidzoši, bet vieglāk izdomājami.

5.2 Permutācijas paritāte

Invariantu veidošanai var izmantot permutācijas paritāti. Permutācijas $(a_1, ..., a_n)$ paritāte ir tādu pāru (i, j), ka $i < j$, bet $a_i > a_j$, skaits. Viegli redzēt, ka divu blakus elementu apmaiņa vietām paritāti maina uz pretējo. Tāpat to uz pretējo maina divu blakus neesošu elementu apmaiņa vietām. Tālāk seko virkne uzdevumu, kuri izmanto šo ideju.

Pirmie ir ievaduzdevumi, kurus var risināt arī bez permutācijas paritātes, izmantojot to, ka objektu skaits ir neliels. Tālāk, uzdevumu grūtībai pieaugot, rodas nepieciešamība paritātes jēdzienu ieviest atklātā veidā.

98. uzdevums. *Uz taisnes ir 3 blusas. Jebkurai blusai atļauts pārlēkt pāri jebkurai citai (bet ne divām reizē). Vai pēc 97 lēcieniem blusu secība var būt tāda pati kā sākumā?*
Atrisinājums. Apzīmēsim blusas ar cipariem 1, 2, 3. Tad blusu izvietojumu uz taisnes apraksta skaitļu 1, 2, 3 permutācija. Katrā lēcienā šīs permutācijas paritāte mainās uz pretējo, tātad pēc 97 lēcieniem blusu izvietojuma paritāte būs pretējā. Tātad blusu secība nebūs sākotnējā.

99. uzdevums. *Tas pats, kas iepriekšējā uzdevumā, ja blusām jānostājas secībā, kas pretēja sākotnējai:* ***a)*** *3 blusas,* ***b)*** *5 blusas.*
Atrisinājums. a) Ar trīs lēcieniem (2, 3), (1, 3), (1, 2) novietojam blusas secībā (3, 2, 1); pārējos 94 lēcienos var 47 reizes izpildīt lēcienu (1, 2), un mēs iegūsim prasīto izvietojumu.
b) Tas nav iespējams, jo permutācija (5, 4, 3, 2, 1) ir pāra permutācija, bet, izpildot 97 lēcienus, mēs iegūsim nepāra permutāciju.

100. uzdevums. *3 blusas atrodas plaknē. Jebkura blusa drīkst pārvietoties uz jebkuru punktu tā, lai nogrieznis, kura galapunkti ir tās sākuma un beigu stāvoklis, šķērsotu nogriezni, kura galapunkti ir abas pārējās blusas. Vai iespējams, ka pēc 1993 gājieniem blusas atgriezīsies sākuma stāvoklī?*
Atrisinājums. Apejot blusas pulksteņa rādītāja virzienā, katram blusu izvietojumam atbilst permutācija (1, 2, 3) vai (3, 2, 1). Katrā lēcienā šī permutācija mainās uz pretējo. Tātad pēc 1993 gājieniem nevar iegūt sākuma stāvokli.

101. uzdevums. *Tas pats, kas 98. uzd., ja atļauts jebkurām 2 blusām mainīties vietām:*
a) *3 blusas,* ***b)*** *n blusas.*
Atrisinājums. Atbilde ir atkarīga no blusu galīgā stāvokļa permutācijas paritātes. Permutācijas (*n*, *n*-1, ..., 1) paritāte ir $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Tātad prasītais ir iespējams, ja $n = 4k + 1$ vai $n = 4k + 2$.

102. uzdevums. *Dota virkne 1, ..., 78. Atļauts nodzēst jebkurus 5 blakus stāvošus skaitļus a, b, c, d, e un to vietā uzrakstīt e, a, b, c, d. Vai var iegūt virkni 78, 77, ..., 1?*
Atrisinājums. Ievērosim, ka pārveidojums $(a, b, c, d, e) \to (e, a, b, c, d)$ nemaina permutācijas paritāti, bet virknes (78, 77, ..., 1) paritāte ir nepāra, tātad iegūt prasīto virkni nav iespējams.

103. uzdevums. *Pa apli vienā virzienā brauc 25 mašīnas. Viena mašīna var apdzīt otru. Pēc kāda laika visas mašīnas nonāk tajās pašās vietās, kur sākumā. Pierādīt, ka noticis pāra skaits apdzīšanu.*
Atrisinājums. Apgalvojums seko no tā, ka vienas apdzīšanas laikā mašīnu izvietojuma permutācijas paritāte mainās uz pretējo.

104. uzdevums. Pierādīt, ka spēlē 15 ir stāvokļi, ko nevar iegūt vienu no otra, pārvietojot kauliņus saskaņā ar noteikumiem.
Atrisinājums. Aizvietojam tukšumu ar īpašu kauliņu "16". Tad katrs atļauts gājiens maina permutācijas, ko veido skaitļu virkne, paritāti. Tukšums var atgriezties sākuma stāvoklī tikai pēc pāra skaita gājienu. Tādēļ jebkuras 2 konfigurācijas, kur permutācijas paritāte atšķiras, bet

tukšums ir vienā un tai pašā vietā, nevar iegūt vienu no otras. (Piemēram, vienu no otras nevar iegūt konfigurācijas, kuras atšķiras tikai ar to, ka 14 un 15 apmainīti vietām.)

5.3 Citi

105. uzdevums. *[[VS],154.uzd.] Regulāra 12-stūra $A_1...A_{12}$ virsotnē A_1 ierakstīts -1, bet pārējās virsotnēs +1.*

1. *Atļauts vienlaikus mainīt zīmes jebkurās 6 pēc kārtas esošās virsotnēs. Pierādīt, ka ar šādu operāciju virkni nevar panākt, lai A2 būtu -1 un visās citās virsotnēs +1.*

2. *Tas pats, ja 6 vietā ir 4.*

3. *Tas pats, ja 6 vietā ir 3.*

Atrisinājums. 1. Apzīmēsim ar $A_{3k+1}(T)$ "-1" skaitu, kas ierakstīti virsotnēs ar numuriem $i = 3k + 1$. Dotie pārveidojumi nemaina šā lieluma paritāti. Tā kā sākumā šis lielums ir nepāra skaitlis, bet beigās tam jābūt pāra skaitlim, tad prasītais pārveidojums nav iespējams.

2. Pārveidojums nav iespējams, jo atļautie pārveidojumi nemaina skaitļa $A_{2k+1}(T)$ paritāti.

3. Dotie pārveidojumi katrā solī maina skaitļu $A_{3k}(T), A_{3k+1}(T), A_{3k+2}(T)$ paritātes. Tātad, lai iegūtu prasīto pārveidojumu, ievērojot, ka lielums $A_{3k}(T)$ nav mainījies, ir jāizpilda pāra skaitu pārveidojumu. Ievērojot, ka lielums $A_{3k+1}(T)$ ir mainījies, ir jāizpilda nepāra skaits pārveidojumu. Iegūta pretruna, kas norāda, ka ar dotajiem pārveidojumiem nav iespējams izpildīt prasīto pārveidojumu.

106. uzdevums. *[[VS], 214.uzd.] Uz tāfeles uzrakstīti vairāki 0, 1 un 2. Atļauts nodzēst 2 dažādus skaitļus un uzrakstīt to vietā trešo (0 un 1 vietā – 2, 0 un 2 vietā – 1, 1 un 2 vietā – 0). Pierādīt, ka, ja pēc šādu darbību virknes paliek viens skaitlis, tad tas nav atkarīgs no darbību secības.*

Atrisinājums. Apzīmēsim ar *p* nuļļu skaitu, ar *q* – vieninieku skaitu, ar *r* – divnieku skaitu, kas uzrakstīti uz tāfeles. Katrā operācijā mainās visu šo skaitļu paritāte. Kad uz tāfeles paliek viens skaitlis, tad tieši viens no skaitļiem *p, q* vai *r* ir vienāds ar 1, bet divi pārējie ar 0. Tātad sākumā uzrakstīto skaitļu skaita paritāte vienam no skaitļiem bija atšķirīga no citu uzrakstīto skaitļu paritātes. Šis skaitlis būs uzrakstīts uz tāfeles pārveidojumu nobeigumā.

107. uzdevums. *[[VS], 105. uzd.] Šaha galdiņa 8×8 rūtiņās ierakstīti „+" un „–". Vienā gājienā drīkst mainīt zīmes uz pretējām jebkurā vertikālē, horizontālē vai diagonālē. Vai var no stāvokļa, kur rūtiņā a_1 ir „–" un visur citur „+", iegūt stāvokli, kur b_1 ir „–", bet visur citur „+"?*

Atrisinājums. Aplūkosim laucinus a_2, a_3, b_1, b_4, c_1, c_4, d_2, d_3. Ievērosim, ka katrs pārveidojums nemaina „–" skaita paritāti atzīmētajos lauciņos. Tā kā sākuma pozīcijā „–" skaits atzīmētajos lauciņos ir 0, bet beigu pozīcijā 1, tad ar dotajiem pārveidojumiem to izdarīt nav iespējams.

108. uzdevums. *[[VS],233.uzd.] Regulāra n-stūra ar centru O virsotnēs ierakstīti skaitļi +1 un -1. Vienā solī atļauts nomainīt zīmi visiem skaitļiem, kas ir kāda regulāra daudzstūra ar centru O virsotnēs. (Tiek pieļauts arī regulārs 2-stūris: 2 pretējas virsotnes (ja n ir pāra).) Pierādīt, ka eksistē 2 konfigurācijas, ko nevar iegūt vienu no otras ar šādu gājienu virkni:*

a) *n = 15,*

b) *n = 30,*

c) *jebkuram n > 2,*

d) *Mēģiniet noteikt, kāds ir konfigurāciju, ko nevar iegūt vienu no otras, skaits K(n). Piemēram, var pierādīt, ka K(200) =* 2^{80}.

Atrisinājums. Atzīmēsim vispirms dažus faktus, kas izpildās jebkuram n. Pavisam eksistē 2^n skaitļu "+1" un "-1" izvietojumi regulāra n-stūra virsotnēs. Divus skaitļu "+1" un "-1" izvietojumus sauksim par ekvivalentiem, ja no viena izvietojuma ar atļautajām operācijām var iegūt otru izvietojumu. Jebkuras šādas operācijas komutē – rezultāts nav atkarīgs no tā, kādā secībā tiek izpildītas operācijas; divkāršu operācijas izpildīšanu var izslēgt – tā ir identiska operācija. Turklāt var iztikt tikai ar operācijām, kas maina zīmes regulāra p-stūra virsotnēs, kur p ir pirmskaitlis (sauksim tos par veidotājdaudzstūriem). Jebkura regulāra n-stūra virsotnes var sadalīt $\frac{n}{p}$ veidotājdaudzstūros.

Tagad aplūkosim konkrētos uzdevumus.

a) Ja $n = 15$, tad eksistē pavisam 8 veidotājdaudzstūri: 5 trijstūri un 3 piecstūri. Izvietojumu, kurā ir visi plusi, apzīmēsim ar E. Jebkurš izvietojums, kurš ir ekvivalents ar E, viennozīmīgi ir noteikts, norādot šo 8 veidotājdaudzstūru kopas apakškopu, kuriem tiek izmainītas zīmes. Pavisam eksistē 2^8 šādas apakškopas, kas ir mazāk par visu iespējamo zīmju izvietojumu skaitu 2^{15}. Tātad eksistē izvietojumi, kas nav ekvivalenti ar E.

b) Ja $n = 30$, tad kopējais veidotājdaudzstūru skaits ir 15+10+6=31; tātad, lai atrisinātu uzdevumu, nepieciešami papildus spriedumi. Ievērosim, ka var iztikt ar mazāku veidotājdaudzstūru skaitu: piemēram, no katra simetrisku (attiecībā pret centru) trijstūru vai piecstūru pāra var atstāt tikai vienu (realizēt simetriskā trijstūra zīmju maiņu var, izmantojot divstūrus). Atliek 15+5+3=23 veidotājdaudzstūru; tas nozīmē, ka eksistē ne vairāk kā $2^{23} < 2^{30}$ izvietojumu, kas ir ekvivalenti ar E.

c) Parādīsim, kā jebkuram n atrast precīzu izvietojumu skaitu $T(n)$, kas ir ekvivalenti ar E. Ievērosim, ka izvietojumu skaits, kas ir ekvivalenti ar kādu citu izvietojumu A, arī ir vienāds ar $T(n)$: tie visi ir iegūstami, pareizinot izvietojuma A zīmes ar jebkura izvietojuma zīmēm, kas ir ekvivalents ar E. Apzīmēsim ar $K(n)$ ekvivalences klašu skaitu – maksimālo pa pāriem neekvivalento izvietojumu skaitu; tad

$$K(n) = \frac{2^n}{T(n)}.$$

Pieņemsim, ka n satur s dažādus pirmreizinātājus:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$$

Apzīmēsim $p_1 p_2 \cdots p_s = q$, $\frac{n}{q} = m$. Sadalīsim regulāru n-stūri m regulāros q-stūros. Uzdevums par $T(n)$ aprēķināšanu reducējas uz vienkāršāku uzdevumu – $T(q) = T(p_1 \dots p_s)$ aprēķināšanu, jo katrs no veidotāj p_i-daudzstūriem pieder tikai vienam no q-stūriem, citiem vārdiem, pārveidojumi, kas notiek dažādos q-stūros, ir neatkarīgi, tātad

$$T(n) = (T(q))^m,\ K(n) = (K(q))^m.$$

Sāksim ar gadījumu $s = 2$; pieņemsim, ka $n = p_1 p_2$. Daudzstūra virsotnes sanumurēsim ar skaitļiem 0, 1, ... , n-1. Ierakstīsim šos skaitļus tabulā $p_1 \times p_2$ tā, ka skaitļi vienā kolonnā dod vienādus atlikumus pēc moduļa p_1, bet skaitļi vienā rindiņā ir vienādi pēc moduļa p_2. Skaitļu +1 un -1 izvietojumam uz riņķa līnijas atbilst skaitļu +1 un -1 izvietojums $\sigma(r_1, r_2)$ tabulas rūtiņās. Jebkuru šādu izvietojumu var pārveidot tādā, ka tabulā zīmes pirmajā rindiņā un pirmajā kolonnā ir +1. Tādi reducētie izvietojumi ir pa pāriem neekvivalenti. No šejienes seko vienādības

$$K(p_1 p_2) = 2^{(p_1-1)(p_2-1)},\ T(p_1 p_2) = 2^{p_1+p_2-1}.$$

Speciālgadījumos $K(15)=2^8$, $T(15)=2^7$; $K(10)=2^4$. No pēdējās vienādības var atrast $K(200)$; $n=200=2^3 5^2$, $q=10$, $m=20$, $K(200)=(K(10))^{20}=2^{80}$.
Ar vispārīgo gadījumu varat iepazīties [[VS], 23. uzd.].

109. uzdevums. *[[VS],260.uzd.] Ir 3 automāti. Pirmais saņem kartiņu (x, y) un izdod kartiņu (x+1, y+1). Otrais saņem kartiņu (x, y) un izdod* $\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$ *(ja x vai y nedalās ar 2, automāts salūst un vairs nav lietojams). Trešais saņem divas kartiņas (x, y) un (y, z) un izdod (x, z). Vēl visi automāti atdod atpakaļ visas kartiņas, ko tie saņem. Vai, lietojot šos automātus, var:*

a) *iegūt kartiņu (1, 50) no (5, 19)?*
b) *iegūt kartiņu (1, 100) no (5, 19)?*
c) *kādos gadījumos var no (a, b), kur a < b, iegūt (1, n)?*

Atrisinājums. a) To var izdarīt:

$$(5,19)\to(6,20)\to(3,10)\to\cdots\to(10,17)\mapsto(3,17)\to$$
$$(4,18)\to(2,9)\to\cdots\to(9,16)\mapsto(2,16)\to(1,8)\to\cdots\to$$
$$(8,15)\mapsto(1,15)\to\ldots\to(8,22)\mapsto(1,22)\to\cdots\to(1,50).$$

b) To nevar izdarīt, jo jebkurai no (5, 19) iegūtajai kartiņai skaitļu starpība dalīsies ar 7.
c) ***Atbilde:*** kartiņai (*a*, *b*) ar *d* apzīmēsim lielāko skaitļa (*b*-*a*) nepāra dalītāju. Tad no kartiņas (*a*, *b*) var iegūt kartiņu (1, *n*) tad un tikai tad, kad *n* = 1 + *dk*.
Šī nosacījuma nepieciešamība ir acīmredzama, jo jebkuras iegūtās kartiņas skaitļu starpība dalās ar *d*. Patstāvīgi pierādiet, ka var iegūt kartiņu (1, 1+*d*) un tālāk arī kartiņu (1, 1+*dk*).

110. uzdevums. *Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 2,* $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Atļauts izvēlēties jebkurus 2 no tiem (a un b) un aizstāt tos ar* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ *un* $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. *Vai var panākt, lai uz tāfeles ir skaitļi 1,* $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ *?*

Atrisinājums. Pārveidojumu rezultātā saglabājas uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa. Tātad prasītais nav sasniedzams.

111. uzdevums. *[PSRS, 1990] Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5. Atļauts nodzēst jebkurus 2 skaitļus x, y un to vietā uzrakstīt x+y un |x-y|. Vai ar šādu darbību virknes palīdzību iegūt*

a) *4, 4, 4, 4, 4;*
b) *6, 6, 6, 6, 6;*
c) *8, 8, 8, 8, 8?*
d) *Kādiem n, m var 1, 2, ..., n pārveidot par m, m, ..., m?*

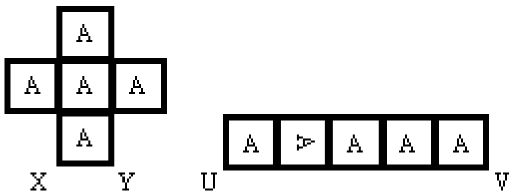
Norāde. Ievērosim, ka, izpildot dotos pārveidojumus, nevar samazināties lielākais no uzrakstītajiem skaitļiem; tātad no virknes 1, 2, 3, 4, 5 nevar iegūt virkni 4, 4, 4, 4, 4.

112. uzdevums. *[[VS],425.uzd.] Regulāra sešstūra katra mala sadalīta 1000 vienādās daļās. Dalījuma punkti savienoti ar nogriežņiem, kas paralēli sešstūra malām. Izvēlas 3 punktus, kas atrodas regulāra trijstūra virsotnēs, un tos nokrāso. To atkārto līdz brīdim, kad šādus 3 punktus vairs nevar atrast. Pierādīt: ja paliek viens punkts, tad tas nav sākotnējā sešstūra virsotne.*

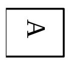
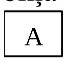
Atrisinājums. Režģa mezglus sanumurēsim ar cipariem 0, 1, 2 tā, lai jebkura mazā trijstūra malās būtu ierakstīti dažādi skaitļi un sešstūra virsotnēs būtu ierakstīti skaitļi 0 un 1 (parādiet zīmējumā, kā to izdarīt).
1) Ievērosim, ka visu skaitļu summa, kas ierakstīti mezglu punktos, pēc moduļa 3 ir vienāda ar 2.
2) Ja *P, Q, R* ir patvaļīga regulāra trijstūra virsotnes, tad tajās ierakstīti vai nu vienādi skaitļi, vai arī visi tie ir dažādi. Jebkurā gadījumā to summa dalās ar 3.
Tātad jebkurā momentā skaitļu summa atlikušajos punktos ir vienāda ar 2 pēc moduļa 3. Tātad, ja atlicis viens punkts, tas nevar būt sešstūra virsotne.

113. uzdevums. *Pa apli izvietoti n aplīši (n ≥3), kam viena puse ir balta, otra – sarkana. Ar vienu gājienu var noņemt aplīti, kam uz augšu ir balta puse, un apgriezt otrādi tam blakus esošus aplīšu (ja tādi ir).* <u>Par blakus aplīšiem sauc tādus, kas bija blakus jau pašā sākumā.</u> *Kādiem sākuma izvietojumiem iespējams noņemt visus aplīšus?*
Atbilde: tad un tikai tad, ja sākumā uz augšu ir nenulles pāra skaits balto pušu.
Atrisinājums. Ievērojam, ka katrs gājiens maina balto pušu (*b*) paritāti. Izdarām pirmo gājienu. Mums jāpierāda: pārpalikušo **virkni** var noņemt tad un tikai tad, kad tajā ir nepāra skaits *b*.
Lietosim indukciju: apgalvojums ir pareizs pie $n = 2$ vai $n = 1$. Pieņemam, ka ir n aplīšu virkne ar nepāra skaitu *b*. Atrodam tādu *b*, kas ir malējais starp *b*, un noņemam to. Esam reducējuši uzdevumu uz vienu vai divām īsākām virknēm, katrā no kurām atkal ir nepāra skaits *b*.
Pieņemam, ka ir pāra skaits *b*. Katram *b* vismaz uz vienu pusi no tā ir nepāra skaits *b*. Noņemot šo *b*, attiecīgajā pusē paliek īsākā virkne ar pāra skaitu *b*, ko saskaņā ar induktīvo hipotēzi nevar likvidēt.

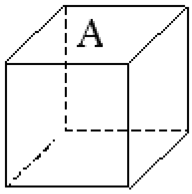
114. uzdevums. *Pieciem vienādiem kubiem katram uz vienas skaldnes uzrakstīts burts A. Kubi sākotnēji novietoti uz līdzena galda tā, kā parādīts 1. zīm. (skats no augšas). Kubus var pārvietot, vienīgi pārveļot pāri kādai no šķautnēm, ar kurām tie pieskaras galda virsmai. Pēc vairākām pārvelšanām kubi ieņem tādu stāvokli, kāds parādīts 2. zīm. (nogriežņi XY un UV ir paralēli savā starpā). Kurā vietā šajā rindā atrodas tas kubs, kas sākumā atradās centrā?*

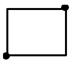
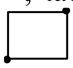
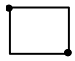


1. zīm. 2. zīm.

Atrisinājums. Sadalīsim plakni rūtiņu režģī tā, ka rūtiņa vienāda ar kuba skaldni. Iekrāsosim rūtiņas šaha galdiņa secībā tā, ka centrālais kubs sākumā stāv uz melnas rūtiņas.
1. lemma. Pēc pāra skaita gājieniem kubs atrodas uz tās pašas krāsas rūtiņas, kur sākumā, bet pēc nepāra skaita gājieniem - uz pretējas krāsas rūtiņas.
Tas ir acīmredzams.
2. lemma. Ja kubs no stāvokļa  pārgājis stāvoklī , tad tas izdarījis nepāra skaitu gājienu; ja pārgājis stāvoklī , tad tas izdarījis pāra skaitu gājienu.
Šo lemmu pierādīsim vēlāk.
Sauksim klucīšus par centrālo un malējo atkarībā no to sākuma pozīcijas un par 1., 2., 3., 4., 5. atkarībā no to beigu pozīcijas (no kreisās uz labo).
2. kubs saskaņā ar 2. lemmu izdarījis nepāra skaitu gājienu. Ja 2. kubs būtu centrālais, tad 2. rūtiņa būtu balta. Tad 1. rūtiņa būtu melna, un uz to nonācis kāds no malējiem kubiem (no

baltas rūtiņas!); 1. un 2. lemma kopā dod pretrunu. Tātad 2. kubs nav centrālais; tātad tas ir malējais, un no lemmām seko, ka 2. rūtiņa ir melna, jo uz 2. rūtiņu pārgājis malējais kubs no baltas rūtiņas. Ir vēl tikai viena cita melna rūtiņa - 4. rūtiņa. Centrālais kubs no $\boxed{\text{A}}$ pārgājis uz $\boxed{\text{A}}$, tātad izdarījis pāra skaitu gājienu, tātad nonācis melnā rūtiņā; **tātad centrālais kubs ir 4. kubs.**
Atliek pierādīt 2. lemmu.



Iezīmēsim kubā 4 virsotnes. Ja skats no augšās ir $\boxed{\text{A}}$, tad iezīmētajām virsotnēm augšējā skaldnē jābūt konfigurācijā . Bet ar katru gājienu  mainās par  un atpakaļ. No šejienes seko 2. lemma.

115. uzdevums. *Ja uz tāfeles uzrakstīti polinomi f un g, tad tur drīkst uzrakstīt arī polinomus f+g, f-g, un f·g. Vai var iegūt uz tāfeles polinomu x, ja sākotnēji uzrakstīti*

- ***a)*** *x^2+x un x^2+2,*
- ***b)*** *$2x^2+x$ un $2x$,*
- ***c)*** *x^2+x un x^2-2?*

Atrisinājums. a) nevar. Pie $x = 2$ abu sākotnējo polinomu vērtības dalās ar 3, tāpēc ar 3 jādalās arī visu iegūstamo polinomu vērtībām. Bet x nedalās ar 3, ja $x = 2$.

b) nevar. Pretrunu iegūst pie $x = \frac{1}{2}$ (vērtības iegūstamajiem polinomiem ir veseli skaitļi).

c) var. Ja $x^2+x=f$ un $x^2-2=g$, tad $x=(f-g)(f-g)+2g-3f$.

6 Augošie / dilstošie invarianti

Šī tēma diezgan pilnīgi apskatīta [KF]. Šeit tiek doti daži papildus uzdevumi.

116. uzdevums. *[[ABS],89.110] Parkā ir $m \cdot n$ taciņas un daži klajumi. Katra taciņa savieno 2 klajumus un neiet caur citiem klajumiem. Zināms, ka taciņas var nokrāsot m krāsās tā, lai katram klajumam visas izejošās taciņas būtu dažādās krāsās. Pierādīt, ka to var izdarīt tā, lai katrā krāsā būtu tieši n taciņas.*

117. uzdevums. *Par 2k-transformāciju sauc šādu pārveidojumu: izvēlas dažādas grafa virsotnes $A_1, ..., A_{2k}$ tā, ka A_1 un A_2 ir savienotas ar šķautni, A_2 un A_3 nav, A_3 un A_4 ir, utt., A_{2n-1} un A_{2n} ir un A_{2n} ar A_1 nav. Nodzēš šķautnes $A_1A_2, ..., A_{2n-1}A_{2n}$ un to vietā novelk $A_2A_3, ..., A_{2n-2}A_{2n-1}, A_{2n}A_1$.*

1. *Pierādīt, ka, lietojot 2n-transformācijas, jebkuru grafu var pārveidot par jebkuru citu grafu, kurā ir tāds pats virsotņu skaits un tāds pats no katras virsotnes izejošo šķautņu skaits.*

2. *Tas pats, ja drīkst lietot tikai 4-transformācijas.*

Atrisinājums. Vispirms pierāda, ka ar prasītajiem pārveidojumiem var panākt, ka no vienas virsotnes izejošās šķautnes ir pārveidotas atbilstoši jaunā grafa šķautnēm. Pēc tam apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju.

118. uzdevums. *Pa apli uzrakstīti n veseli skaitļi. Starp katriem diviem skaitļiem ieraksta to starpības absolūto vērtību, tad visus vecos skaitļus nodzēš. Pierādīt: ir tāds skaitlis d, ka kaut kad visi skaitļi būs vai nu 0, vai d.*

119. uzdevums. *[IMO, 1986] Pa apli uzrakstīti 5 veseli skaitļi. Atļauts izvēlēties jebkurus blakus esošus skaitļus x, y un z un, ja $y < 0$, tad nomainīt tos ar $x+y$, $-y$ un $z+y$. Pierādīt, ka kaut kad šādas nomaiņas vairs nebūs iespējamas.*

Norāde. Apskatiet, kā mainās visu blakus neesošo skaitļu pāru starpību kvadrātu summa. Rezultāts ir spēkā arī, ja uzrakstīti reāli skaitļi, bet spriedums tad ir principiāli cits.

7 Matemātiskās spēles

Šī tipa uzdevumiem raksturīgās idejas labi izklāstītas [[L], 62.-71.lpp] (skat. arī uzdevumu apkopojumu [[L], 212.-214.lpp]).

120. uzdevums.

1. *Divi spēlētāji pēc kārtas ņem akmeņus no kaudzītes, kurā sākumā ir 97 akmeņi. Vienā gājienā var paņemt 1, 2, 3 vai 4 akmeņus. Uzvar tas, kas paņem pēdējo. Kurš spēlētājs uzvar, ja abi spēlē pareizi?*

2. *Tas pats, ja drīkst ņemt 1, 3, 4 vai 15 akmeņus.*

Atrisinājums. 1. Pareizi spēlējot uzvar pirmais spēlētājs. Viņa stratēģija ir šāda: viņš paņem tik daudz akmeņu, lai kaudzītē paliktu $5k$ akmeņi; pēc pirmā gājiena paliks 95 akmeņi, pēc otrā 90, u.t.t. Pirmais spēlētājs, protams, paņems arī pēdējo akmeni.

2. Arī šajā gadījumā uzvar pirmais spēlētājs. Viņam jāspēlē tā, ka pēc viņa gājiena kaudzītē paliek $7k$ vai $7k+2$ akmeņi. Viegli pārbaudīt, ka pēc otrā spēlētāja gājiena kaudzītē paliks $7k+1$, $7k+3$, $7k+4$, $7k+5$ vai $7k+6$ akmeņi. No šiem stāvokļiem pirmais spēlētājs atkal var iegūt uzvarošo pozīciju.

121. uzdevums. *Ir 2 akmeņu kaudzes. Sākumā tās satur 19 un 88 akmeņus. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Vienā gājienā vienu kaudzi paņem sev, otru sadala divās kaudzēs jebkādā veidā. Tas, kas nevar izdarīt gājienu (t.i., tas, kam paliek 2 kaudzes ar 1 akmeni katrā), zaudē. Kā jāspēlē, lai uzvarētu?*

Atrisinājums. Uzvar pirmais spēlētājs. Viņa stratēģija ir ļoti vienkārša. Viņš seko, lai pēc katra viņa gājiena abās palikušajās kaudzēs būtu nepāra skaits akmeņu. Tātad sākumā viņš paņem sev kaudzi ar 19 akmeņiem un otru patvaļīgi sadala kaudzēs ar nepāra skaitu akmeņiem katrā. Pēc otrā spēlētāja gājiena viņš atkal iegūs vienu kaudzi ar nepāra skaitu akmeņiem (to viņš paņems sev), bet otru patvaļīgi sadalīs divās kaudzēs ar nepāra skaitu akmeņiem katrā. Skaidrs, ka tādas spēles rezultātā divas kaudzes ar vienu akmeni katrā var izveidoties tikai pēc pirmā spēlētāja gājiena.

122. uzdevums. *Sākumā ir 3 akmeņu kaudzītes ar 83, 87 un 109 akmeņiem. Vienā gājienā spēlētājs sadala katru kaudzīti, kas satur vairāk kā 1 akmeni, 2 mazākās. Uzvar tas, kas izdara pēdējo gājienu (t.i. tas, pēc kura gājiena visās kaudzītes ir pa 1 akmenim). Kā jāspēlē?*

123. uzdevums. *[Spēle NIM] Ir vairākas kaudzes ar akmeņiem. Vienā gājienā var ņemt jebkuru skaitu no jebkuras (bet tikai vienas) kaudzes. Uzvar tas, kas paņem pēdējo akmeni. Kā jāspēlē, ja ir*

1. *2 kaudzes, kurās sākumā ir 5 un 7 akmeņi,*

2. *3 kaudzes, kurās sākumā ir 3, 4 un 5 akmeņi.*

Atrisinājums. 1. Uzvar pirmais spēlētājs. Viņš katrā gājienā izlīdzina akmeņu skaitu abās kaudzītēs. Līdz ar to viņš paņems arī pēdējo akmeni.

2. Uzvar pirmais spēlētājs. Ievērojot pirmā uzdevuma atrisinājumu redzam, ka jebkurš no spēlētājiem zaudēs, ja paņems visus kādas kaudzes akmeņus, ja atlikušajās kaudzēs ir dažāds akmeņu skaits, vai izlīdzinās akmeņu skaitu divās kaudzēs, ja trešā nav tukša. Pirmajā gājienā pirmais spēlētājs atņem no pirmās kaudzes divus akmeņus, iegūstot pozīciju 1, 4, 5 akmeņi. Lai nepārkāptu iepriekš teikto, otrajam spēlētājam jāatņem akmeņi no otrās vai trešās kaudzītes, neizlīdzinot akmeņu skaitu nekādās divās kaudzītēs. Viegli pārbaudīt, ka pirmais spēlētājs otrajā gājienā var panākt pozīciju 1, 2, 3 akmeņi. Skaidrs, ka nākamajā gājienā otrais spēlētājs ir spiests pārkāpt aprakstītos likumus un tātad zaudē.

124. uzdevums. *[[MC95], Bulgārija] Divi spēlētāji pēc kārtas ņem akmeņus no kaudzes. Pirmajā gājienā pirmais spēlētājs var ņemt jebkuru daudzumu, bet ne visus. Tālāk katrs spēlētājs var ņemt ne vairāk akmeņu kā otrs spēlētājs iepriekšējā gājienā. Kurš uzvar, ja abi spēlē pareizi? Sākumā kaudzē ir 1996 akmeņi.*

Atrisinājums. Ievērosim, ka $1996=499\cdot4$. Ievērosim, ka pirmais spēlētājs, kas paņems nepāra skaitu akmeņu, zaudēs, jo otrais varēs turpināt ņemt pa vienam akmenim, tādā veidā uzvarot. Pirmais spēlētājs var uzvarēt šādi: viņš ņem 4 akmeņus un turpina to darīt, kamēr otrais arī ņem 4 akmeņus; ja tas turpinās līdz galam, tad pirmais uzvar. Tātad kādā momentā otrais spēlētājs būs spiests ņemt divus akmeņus, atstājot $2\cdot(2k+1)$ akmeņus. Pirmais spēlētājs turpina ņemt 2 akmeņus. Ja tā turpina arī otrais, tad viņš zaudē; bet, kā tika atzīmēts, ja viņš sāk ņemt vienu akmeni, tad arī zaudē.

125. uzdevums. *[[VS],256.uzd.] Divas kaudzītes ar akmeņiem. Vienā ir m, bet otrā - n akmeņi, $m > n$. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem akmeņus. Vienā reizē var paņemt no lielākās kaudzītes jebkuru akmeņu skaitu, kas dalās ar akmeņu skaitu mazākajā kaudzītē. Uzvar tas, kas paņem pēdējo akmeni no vienas kaudzītes. Pierādīt, ka, ja $m > 2n$, tad pirmajam spēlētājam eksistē uzvaras stratēģija.*

Atrisinājums. Šajā uzdevumā tiek pakāpeniski realizēts Eiklīda algoritms skaitļiem m un n. Tā kā $m>2n$, tad pirmajam spēlētājam ir izvēle izpildīt pirmo Eiklīda algoritma soli vienā gājienā vai divos. Atkarībā no tā, kāda izveidojas situācija pēc Eiklīda algoritma izpildes (mēs to nezinām, bet katra situācija ir uzvaroša vai zaudējoša), pirmais spēlētājs var noteikt, vai pirmā dalīšana ar atlikumu notiks vienā vai divos soļos, tātad nonākot sev izdevīgā situācijā. Protams, lai to noteiktu, nepieciešami konkrēti aprēķini ar konkrētiem skaitļiem, un uzrakstīt vispārīgu vienkāršu stratēģiju šajā gadījumā nav iespējams.

126. uzdevums. *[[SP96],46.uzd.] Divi spēlētāji pēc kārtas liek kauliņus kvadrāta 101×101 rūtiņās. Pirmais var likt kauliņu jebkurā tukšā rūtiņā, kurai tajā pašā kolonnā un tajā pašā rindā esošo kauliņu skaits ir pārskaitlis. Otrais var likt jebkurā tukšā rūtiņā, kurai šis daudzums ir nepāra skaitlis. Zaudē tas, kurš nevar izdarīt gājienu.*

1. *Pierādīt, ka pirmajam spēlētājam ir uzvaras stratēģija.*

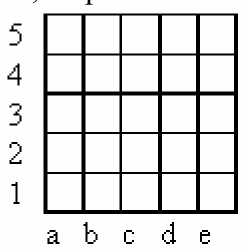
2. *Pierādīt, ka pirmais spēlētājs uzvar neatkarīgi no tā, kā viņš spēlē.*

Atrisinājums. Viegli pārbaudīt sekojošu apgalvojumu: ja dotajā pozīcijā pirmais spēlētājs nevar izpildīt gājienu, tad iepriekšējā pozīcijā nevarēja izpildīt gājienu otrais spēlētājs.

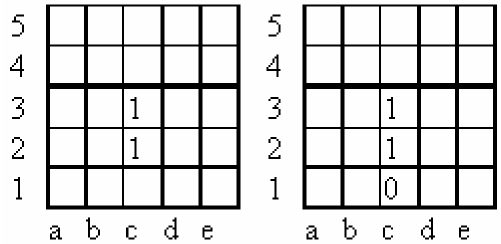
127. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2003] Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Spēlētāji A un B pamīšus raksta tukšajās rūtiņās skaitļus (sāk A): A – vieninieku, B – nulli. A mērķis ir panākt, lai pēc tam, kad visas rūtiņas aizpildītas, varētu atrast 3×3 rūtiņu kvadrātu ar iespējami lielu tajā ierakstīto skaitļu summu S; B cenšas viņam traucēt.*
Kādu lielāko summu S var sasniegt spēlētājs A?

Atbilde: S lielākā iespējamā vērtība ir 6.

Atrisinājums. 1. Parādīsim, ka A var panākt vismaz vienā 3×3 rūtiņu kvadrātā summu 6.
Apzīmēsim kvadrāta rindas un kolonnas, kā parādīts zīmējumā.



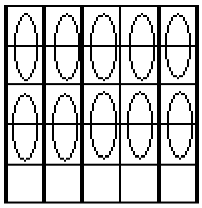
Mēs lietosim izteicienus "A raksta rūtiņā c4" utml.. Ar K(c4) sapratīsim 3×3 rūtiņu kvadrātu, kura centrālā rūtiņa ir c4, utml.



Pirmo gājienu A izdara rūtiņā c3. Simetrijas pēc varam uzskatīt, ka B atbild ar gājienu 4. vai 5. rindiņā. Otro gājienu A izdara rūtiņā c2. Ja tagad B neizdarīs gājienu rūtiņā c1, tad vismaz vienā no kvadrātiem K(b2) un K(d2) paliks 2 vieninieki un neviena nulle. Tad A savu trešo gājienu izdarīs rūtiņā c1. Tagad vai nu K(b2), vai K(d2) satur 3 vieniniekus un nevienu nulli. Turpinot spēlēt tikai šajā kvadrātā, A sasniegs savu mērķi.

Tāpēc pieņemam, ka B otrais gājiens ir rūtiņā c1. Savus 2 nākamos gājienus A izdara rūtiņās b3 un d3. Viegli saprast, ka B jāatbild ar gājieniem attiecīgi kvadrātos K(b2) un K(d2), citādi vienā vai otrā no tiem A sasniegs savu mērķi. Tagad kvadrātā K(c4) ir 3 vieninieki un **varbūt** viena nulle (ja B to tur ierakstīja savā pirmajā gājienā). Šajā kvadrātā ir vismaz 5 tukšas rūtiņas, tāpēc A var sasniegt savu mērķi.

2. Parādīsim, kā B var nepieļaut, ka S>6.



Ievērosim, ka katrs 3×3 rūtiņu kvadrāts satur 3 pilnus rūtiņu pārus. Tāpēc B spēlē, katrā no šiem pāriem ierakstot vismaz vienu nulli. Viņš to spēj izdarīt: ja A ieraksta 1 līdz tam tukša pāra vienā rūtiņā, B atbild ar nulli otrā šī pāra rūtiņā. Pretējā gadījumā B izdara patvaļīgu gājienu.

8 Kopas un apakškopas

8.1 Apakškopu sistēmas

128. uzdevums. *[Žūrija, 1988, VDR1] Kopas {1, ..., n} apakškopu sistēmu $A_1, ..., A_k$ sauc par pārklājošu, ja katrs skaitlis pieder vismaz vienai kopai. $A_1, ..., A_k$ sauc par atdalošu, ja katriem diviem skaitļiem i, j eksistē kopa A_l, kurai pieder tieši viens no i un j. Kāds ir mazākais iespējamais kopu skaits k sistēmā, kas ir gan pārklājoša, gan atdaloša?*

129. uzdevums.

1. *Pierādīt, ka no 25 deputātiem nevar sastādīt vairāk par 30 komisijām tā, lai katrā komisijā būtu 5 deputāti un nekādi 2 deputāti nebūtu kopā vairāk kā 1 komisijā.*

2. *Pierādīt, ka 30 šādas komisijas sastādīt var.*

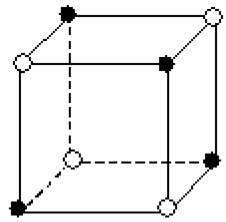
Atrisinājums. 1. Ievērosim, ka no 25 deputātiem var izvēlēties 300 pārus. Tā kā katra komisija satur 10 pārus, tad 31 komisija satur 310 pārus, un no Dirihlē principa seko, ka ir komisijas, kas satur vienu un to pašu pāri, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

2. Apzīmēsim komisijas locekļus ar skaitļu pāriem (x, y), $0 \le x, y \le 4$. Aplūkosim 25 šādas pāru grupas: fiksējam $a, b,$ $0 \le a, b \le 4$, un aplūkojam kopu $\{(x,y) \mid y \equiv ax + b \pmod 5\}$. Vēl pievienojam 5 grupas $\{(x,y) \mid x = a\}$. Faktiski šeit tiek aplūkotas visas iespējamās taisnes plaknē pēc moduļa 5. Protams, visi uzdevuma nosacījumi izpildās (divām dažādām taisnēm nevar būt vairāk par vienu krustpunktu).

Skat. arī Špernera teorēmu (3. nodaļa) un 140., 141. uzd.

130. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2003] Kādā klubā ir 8 biedri. Vai var nodibināt vairākas komisijas tā, lai vienlaicīgi izpildītos divas prasības:*
a) katrā komisijā ir tieši 4 biedri,
b) katri 3 no astoņiem kluba biedriem ir kopā tieši vienā komisijā?

Atrisinājums. Attēlosim kluba biedrus ar kuba virsotnēm. Izvēlēsimies šādas 4 virsotņu kopas:
a) visas 6 skaldnes,
b) visus 6 diagonālšķēlumus,
c) divu kubā "ievilkto" regulāro tetraedru virsotņu kopas.



Skaidrs, ka nekādas divas no šīm kopām "nešķeļas" pa triju virsotņu sistēmu. Tātad visi virsotņu trijnieki, kurus tās satur, ir dažādi. Kopā tās satur $14 \cdot C_4^3 = 14 \cdot 4 = 56$ trijniekus. Tā kā trijnieku pavisam arī ir $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$, risinājuma pareizība pamatota.

131. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2004] Konkursā uz direktora vietu pieteicās n kandidāti. Tos vērtēja 8 eksperti. Katrs eksperts katru kandidātu novērtēja ar „derīgs" vai „nederīgs". Izrādījās, ka katriem diviem kandidātiem A un B izpildās sekojošais:*

„A derīgs, B derīgs” nolēmuši 2 eksperti,
„A derīgs, B nederīgs” nolēmuši 2 eksperti,
„A nederīgs, B derīgs” nolēmuši 2 eksperti,
„A nederīgs, B nederīgs” nolēmuši 2 eksperti.
Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?
Atrisinājums. Sekojošā tabula parāda, ka var būt $n = 7$:

1. tiesn.	n	n	n	n	n	n	n
2. tiesn.	n	d	d	d	d	n	n
	n	d	d	n	n	d	d
⋮	n	n	n	d	d	d	d
	d	n	d	n	d	n	d
	d	n	d	d	n	d	n
	d	d	n	n	d	d	n
8. tiesn.	d	d	n	d	n	n	d

Parādīsim, ka nevar būt $n = 8$. Pieņemsim pretējo.
Ievērosim: mainot kolonā d par n un n par d, uzdevuma nosacījumi saglabājas. Tāpēc varam uzskatīt, ka 1. tiesnesis nevienu kandidātu nav atzinis par derīgu (1. rinda sastāv no n). Pieņemsim, ka i-jā rindā ir x_i vērtējumi „n”. Skaidrs, ka $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 32$, tāpēc $x_2 + x_3 + ... + x_8 = 24$. i-jā rindā esošu „n” pāru ir $C_{x_i}^2 = \frac{1}{2} x_i (x_i - 1)$. Tāpēc 2., 3., 4., ..., 8. rindā pavisam ir $\frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2 + ... + x_8^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_2 + ... + x_8\right)$ šādu pāru; pirmajā rindā šādu pāru ir $C_8^2 = 28$. Tāpēc šo pāru pavisam ir $\frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2 + ... + x_8^2\right) - 12 + 18$. No otras puses, tādu pāru pavisam ir $C_8^2 \cdot 2 = 56$ (uz katrām divām kolonām divi pāri). Iegūstam

$$(*) \quad \begin{cases} x_2^2 + x_3^2 + ... + x_8^2 = 80 \\ x_2 + x_3 + ... + x_8 = 24 \end{cases}.$$

Bet tā ir pretruna ar nevienādību starp vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko, saskaņā ar kuru jābūt $\frac{x_2^2 + .. x_8^2}{7} \geq \left(\frac{x_2 + ... + x_8}{7}\right)^2$: pēc (*) tā neiznāk.

132. uzdevums. *Saeimā ir 100 deputāti. Nevienam deputātam nav pieejas valsts noslēpumiem. Daži deputāti savā starpā draudzējas, citi – nē. (Ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A.). Ar vienu gājienu var izvēlēties 1 deputātu un gan viņam, gan visiem viņa draugiem mainīt statusu attiecībā uz valsts noslēpumiem: tiem, kam šāda pieeja bija, to atņemt, bet tiem deputātiem, kam šādas pieejas nebija, to piešķirt.*
Pierādīt: ar vairākiem šādiem gājieniem var panākt, ka visiem deputātiem ir pieeja valsts noslēpumiem.
Atrisinājums. Pierādīsim līdzīgu apgalvojumu saeimai ar n deputātiem. Pie n=1 tā pareizība ir acīmredzama. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs pie $n < k$. Apskatām Saeimu ar k deputātiem. Apskatām k-1 deputātus (visus, izņemot vienu deputātu A). Pielietojot induktīvo hipotēzi šiem k-1 deputātiem, viņiem visiem var sagādāt pieeju valsts noslēpumiem (*pvn*). Ja šī procesa rezultātā A arī ir ieguvis *pvn*, viss kārtībā.
Mums jāaplūko tikai situācija, kad **patvaļīgam** daputātam A aprakstītā procesa rezultātā A nav ieguvis *pvn*. Tādā gadījumā no iepriekšējā izriet: **mēs varam mainīt jebkuru *k*-1 deputātu statusu, *k*-tā deputāta A statusu atstājot nemainīgu**. Sauksim šo procesu par A diskrimināciju.
Ja k – pāra skaitlis, tad pēc kārtas diskriminējot pa reizei visus deputātus, iegūstam vajadzīgo.
Ja k – nepāra skaitlis, tad vismaz vienam deputātam B ir pāra skaits draugu. Diskriminēsim pēc kārtas šo deputātu un visus viņa draugus. Tā rezultātā visi tie, kas nav B draugi, iegūs *pvn*,

bet ne B, ne viņa draugiem nebūs *pvn*. Pēdējā solī piešķirsim *pvn* deputātam B un viņa draugiem.

8.2 Aritmētiskas progresijas

133. uzdevums. *[Žūrija, 1988, MON1] Zināms, ka jebkurā veidā izvēloties n skaitļus no 1, ..., 1988, būs 29, kas veido aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka n > 1788.*

Ir spēkā šāds rezultāts (sk. [G], arī [[AC], 151. lpp.]):

Teorēma. *[Van der Vardens] Katram m, l eksistē tāds n, ka, jebkurā veidā sadalot {1, ..., n} m kopās, eksistē aritmētiska progresija ar garumu l, kas pieder vienai kopai.*

Tomēr *n* vērtība, ko dod Van der Vardena teorēmas pierādījums, aug ļoti, ļoti strauji.

Par kopām, kas satur vai nesatur aritmētiskas progresijas, skat. arī 146. uzdevumu nodaļā par bezgalīgām kopām.

8.3 Apakškopas ar citām aritmētiska rakstura īpašībām

134. uzdevums. *[IMO, 1989] Vai var kopu {1, ..., 1989} sadalīt 117 kopās tā, lai katrā no tām būtu tieši 17 elementi un visām kopām elementu summas būtu vienādas?*

135. uzdevums. *[Žūrija, 1988, MON4] Atrast mazāko tādu n, ka jebkurā veidā kopu {1, ..., n} sadalot 2 apakškopās, var atrast 3 dažādus skaitļus a, b, c, kuri pieder vienai kopai un kuriem izpildās* $a \cdot b = c$.

136. uzdevums. *[Žūrija, 1988, UNK3] Pierādīt, ka visus naturālos skaitļus var sadalīt 2 kopās A un B tā, lai izpildītos nosacījumi:*
1. $1 \in A$;
2. Nekādiem 2 dažādiem skaitļiem no vienas kopas summa nav vienāda ar 2^k+2 $(k = 0, 1, ...)$.
Pierādīt, ka to var izdarīt tieši vienā veidā, un atrast, kurai kopai pieder 1987, 1988, 1989.
Atrisinājums. Vispirms visus skaitļus samazināsim par 1; tad kopai A pieder skaitlis 0, un nekādu divu vienas kopas dažādu skaitļu summa nav divnieka pakāpe. Sāksim konstruēt kopas: 1 pieder kopai B (jo 1+0 ir divnieka pakāpe), 2 pieder kopai B, 3 – kopai A, 4 – kopai B, 5 – kopai B, 6 – kopai A, 7 – kopai A. Pieņemsim, ka mēs jau esam izvietojuši pa kopām skaitļus no 0 līdz 2^n-1. Redzam, ka viennozīmīgi tie nosaka skaitļu 2^n līdz 2^{n+1}-1 izvietojumu: tiešām skaitlim 2^n ir jāatrodas kopā B (jo kopai A pieder skaitlis 0) bet skaitlim 2^n+a ir jāatrodas pretējā grupā ar skaitli 2^n-a. Tagad aplūkosim kādām grupām pieder skaitļi 1987, 1988, 1989. Samazinot par 1, iegūstam skaitļus 1986, 1987, 1988. Tad skaitļi 2048-1986=62, 2048-1987=61, 2048-1988=60 pieder pretējām grupām. Savukārt skaitļi 64-62=2, 64-61=3, 64-60=4 tām pašām grupām. Tātad skaitlis 1987 pieder grupai B, skaitlis 1988 – grupai A, skaitlis 1989 – grupai B.

137. uzdevums. *[Balkaniāde, 1996] Pierādīt, ka eksistē tāda kopa* $A \subset \{1, ..., 2^{1996}-1\}$, *ka*
1. $1 \in A$ *un* $2^{1996}-1 \in A$,

2. katrs A elements (izņemot 1) ir divu citu A elementu (kas var būt vienādi) summa,
3. A nesatur vairāk par 2012 elementiem.

138. uzdevums. *[IMO, 1991] Kādu vislielāko daudzumu skaitļu var izvēlēties no 1, ..., 280 tā, lai nekādiem 5 skaitļiem nebūtu kopīga dalītāja, kas lielāks par 1?*

8.4 Punktu režģi

139. uzdevums. *[[Z], 26.14.-15.]*

1. *Taisnstūra 4×7 rūtiņas nokrāsotas 2 krāsās. Pierādīt, ka var atrast taisnstūri, kura stūra rūtiņas visas ir vienā krāsā.*

2. *Izkrāsot taisnstūri 4×6 tā, lai šī īpašība neizpildītos.*

3. *Taisnstūra 12×12 rūtiņas nokrāsotas 3 krāsās. Pierādīt, ka var atrast taisnstūri, kura stūra rūtiņas visas ir vienā krāsā.*

140. uzdevums.

1. *Uzkonstruēt 7 trijniekus, kas sastāv no skaitļiem {1, ..., 7} tā, lai katri 2 skaitļi būtu kopā ne vairāk kā vienā trijniekā.*

2. *Pierādīt, ka 8 šādus trijniekus uzkonstruēt nevar.*

141. uzdevums. *[[VS],208. uzd.]*

a) *Pierādīt, ka kvadrātā 7×7 var atzīmēt 21 rūtiņu centrus tā, lai nekādi 4 atzīmētie punkti neveidotu taisnstūri ar malām, kas paralēlas kvadrāta malām.*

b) *Pierādīt, ka 22 punktus tā nevar izvēlēties.*

c) *Kādu vislielāko punktu daudzumu var izvēlēties kvadrātā 13×13?*

Atrisinājums. Zinot 140. uzdevumu, šī uzdevuma (a) punkts ir gandrīz triviāls. Tomēr, bez šādām priekšzināšanām, uzdevums ir diezgan grūts. Pierādījumā, ka vairāk punktus izvēlēties nevar, iesakāms censties lietot vispārīgus spriedumus (kā [VS]), nevis gadījumu šķirošanu. Ja taisnstūru vietā ir kvadrāti (sk. nākošo uzdevumu), tad gan vispārīgi spriedumi neizdodas un atliek tikai gara variantu pētīšana.

142. uzdevums. *[Baltijas ceļš, 1993] Kvadrāts sadalīts 16 vienādos kvadrātos, tādējādi iegūstot 25 virsotņu kopu. Kāds ir mazākais virsotņu skaits, kuras var izņemt no šīs kopas tā, lai nekādi 4 no atlikušajiem punktiem neveidotu kvadrātu ar malām, kas paralēlas sākotnējā kvadrāta malām?*

9 Bezgalīgas kopas

9.1 Bezgalīgas kopas aizvietošana ar lielu galīgu kopu

Skat. [[AC],149.-151.lpp.]. Ar šo paņēmienu risina arī šādu [AC] nepieminētu uzdevumu.

143. uzdevums. [Žūrija, 1990, CZE2] Naturālo skaitļu kopa sadalīta r kopās A_1, ..., A_r. Pierādīt, ka eksistē tādi m, l, ka jebkuram k var atrast skaitļus $a_1 \in A_l, \ldots, A_l$, tādus, ka $0 < a_{i+1} - a_i \leq m$.

9.2 Dirihlē princips bezgalīgām kopām

144. uzdevums. *[Žūrija, 1987, FIN3] Dota bezgalīga kopa A. Katrs skaitlis šajā kopā ir ne vairāk kā 1987 dažādu pirmskaitļu reizinājums. Pierādīt, ka A ir tāda bezgalīga apakškopa B tāda, ka visiem $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B$ izpildās LKD(x_1, y_1) = LKD(x_2, y_2).*

9.3 Bezgalīgi grafi, Kēniga lemma

Skat. [[AC], 152.-153.lpp.] un [[V], 53.-54.lpp.].

145. uzdevums. *Pierādīt, ka jebkurai bezgalīgai skaitļu virknei ir vai nu bezgalīga nedilstoša apakšvirkne, vai arī bezgalīga neaugoša apakšvirkne.*

9.4 Pretpiemēru veidošana

146. uzdevums. *[Baltijas ceļš, 1996] Pierādīt, ka naturālo skaitļu kopu var sadalīt 2 daļās A, B tā, lai izpildītos:*
1. A nesatur nekādu bezgalīgu aritmētisku progresiju;
2. B nesatur nekādu 3 elementu aritmētisku progresiju.

147. uzdevums. *[[ABS], 88.150.] Zināms, ka vilks pārvietojas pa taisni ar konstantu ātrumu tā, ka veselā skaitā stundu viņš atrodas punktos ar veselām koordinātēm. Katru stundu var izšaut 1 raķeti uz jebkuru plaknes punktu. Raķete savu mērķi sasniedz tieši pēc 1 stundas. Vai eksistē apšaudes stratēģija, kas garantē, ka vilkam kaut kad trāpīs?*

148. uzdevums. *[IMO, 1994] Pierādīt, ka eksistē tāda kopa S, ka jebkurai bezgalīgai pirmskaitļu kopai A eksistē k, x_1 un x_2, tādi, ka gan x_1, gan x_2 ir k dažādu pirmskaitļu, kas visi pieder A, reizinājumi, $x_1 \in S$, bet $x_2 \notin S$.*

149. uzdevums. *[Neklātienes konkurss, 1991] Par Fibonači tipa virkni sauc naturālo skaitļu virkni, kurā katrs skaitlis ir 2 iepriekšējo summa. Vai visus naturālos skaitļus var sadalīt:*

***a)** galīgā skaitā Fibonači tipa virkņu bez kopīgiem elementiem;*

***b)** bezgalīgā skaitā Fibonači tipa virkņu bez kopīgiem elementiem?*

Atbilde: a) nē, b) jā.

Atrisinājums. a) Pieņemsim, ka izdevies atrast *n* tādas virknes. Aplūkosim naturālos skaitļus 3*n*+2, 3*n*+3, ..., 6*n*+3. To pavisam ir 3*n*+2. Ja kādai F-virknei *a* ir **pirmais** loceklis no šī intervāla, tad $a \geq 3n+2$. Tad šīs F-virknes nākošais loceklis b arī apmierina sakarību $b \geq 3n+2$. Tāpēc vēl nākošais loceklis ir jau $\geq(3n+2)+(3n+2)=6n+4>6n+3$. Tātad katrai F-virknei šajā intervālā ir augstākais 2 locekļi; tātad visas kopā tās satur augstākais $2n$ skaitļus no šī intervāla, kurā ir $3n+2$ skaitļi. Tātad daži skaitļi nepieder nevienai no mūsu F-virknēm.

b) Ar Fibonači skaitļu virkni mēs sapratīsim F-virkni $f_1=1$, $f_2=2$, $f_3=3$, $f_4=5$, $f_5=8$, $f_6=13$, ... Mūsu risinājums balstīsies uz sekojošu lemmu.

Lemma. Katru naturālu skaitli var, un pie tam vienā vienīgā veidā, izsacīt kā dažādu Fibonači skaitļu summu, tā, lai nekādi divi saskaitāmie nebūtu Fibonači virknes blakus locekļi. (Piemērs: $30=21+8+1=f_7+f_5+f_1$.)

Pieņemsim, ka lemma jau pierādīta. Tad, pamatojoties uz to, mēs varam ieviest jaunu pozicionālu skaitīšanas sistēmu, kurā bāzes skaitļi ir Fibonači skaitļi, bet kā cipari kalpo tikai 1 un 0. Piemēram, skaitlis "trīsdesmit" šajā sistēmā pierakstās kā 1010001, jo $30=1 \cdot f_7+0 \cdot f_6+1 \cdot f_5+0 \cdot f_4+0 \cdot f_3+0 \cdot f_2+1 \cdot f_1$. Pamatojoties uz lemmu, šāds pieraksts katram naturālam skaitlim eksistē un ir viens vienīgs. Piemēram, paši Fibonači skaitļi šajā pierakstā izskatās kā 1; 10; 100; 1000; 10000; ...

Pieņemsim tagad, ka α **- kaut kāda galīga nuļļu un vieninieku virkne, kas sākas ar 1, beidzas ar 1 un kurā divi vieninieki nekur neatrodas blakus**. Ar $\alpha 0$, $\alpha 00$, $\alpha 000$ utt. sapratīsim jaunas virknes, kuras iegūtas, virknei α galā pierakstot vienu, divas, trīs ... nulles.

Pārbaudīsim, ka

$$\alpha\underbrace{00\ldots0}_{n} + \alpha\underbrace{00\ldots0}_{n+1} = \alpha\underbrace{00\ldots0}_{n+2}$$

Tiešām, ja

$$\alpha\underbrace{00\ldots0}_{n} = f_{i_1} + f_{i_2} + \ldots + f_{i_k}$$

(kur $i_1>i_2>\ldots>i_k$), tad

$$\alpha\underbrace{00\ldots0}_{n+1} = f_{i_1+1} + f_{i_2+1} + \ldots + f_{i_k+1} \quad \text{un} \quad \alpha\underbrace{00\ldots0}_{n+2} = f_{i_1+2} + f_{i_2+2} + \ldots + f_{i_k+2}$$

Tagad skaidri redzams, ka

$$(f_{i_1} + f_{i_2} + \ldots + f_{i_k}) + (f_{i_1+1} + f_{i_2+1} + \ldots + f_{i_k+1}) =$$
$$= (f_{i_1} + f_{i_1+1}) + (f_{i_2} + f_{i_2+1}) + \ldots + (f_{i_k} + f_{i_k+1}) =$$
$$= f_{i_1+2} + f_{i_2+2} + \ldots + f_{i_k+2}$$

k.b.j. **Tātad α, $\alpha 0$, $\alpha 00$, $\alpha 000$, ... ir F-virkne.**

Tagad skaidrs, ka meklēto naturālo skaitļu kopas sadalījumu F-virknēs bez kopīgiem elementiem mēs iegūsim, ņemot visas iespējamās galīgās virknes α, kas aprakstītas augstāk, un veidojot no tām F-virknes, kā nupat aprakstīts.

Atliek pierādīt lemmu. Darīsim to, izmantojot matemātisko indukciju.

Attiecībā uz skaitļiem 1; 2; 3 lemmas pareizība ir acīmredzama. Pieņemsim, ka lemma pareiza visiem skaitļiem 1; 2; 3; ...; n-1. Apskatīsim, kā izsacīt skaitli n.

Atradīsim **lielāko** Fibonači skaitli f_k, kas nepārsniedz skaitli n. Tad $n=f_k+(n-f_k)$. Ja $n-f_k=0$, tad esam ieguvuši $n=f_k$. Ja $n-f_k \neq 0$, tad ievērojam, ka $n-f_k<n$, tāpēc saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $n-f_k$ var izsacīt vajadzīgajā formā. Turklāt $n-f_k<f_{k-1}$ (ja būtu citādi, tad $n \geq f_k+f_{k-1}=f_{k+1}$, un tad f_k vietā būtu ņemts f_{k+1}), tāpēc lielākais Fibonači skaitlis $(n-f_k)$ izsacīšanā nav f_{k-1}, un summā, kas iegūstama no $n=f_k+(n-f_k)$, nekādi divi Fibonači skaitļi nav Fibonači virknes blakus locekļi.

Līdz ar to izsacīšanas **iespējamība** pierādīta. Jāpierāda **unitāte**.

Pieņemsim, ka n izsacīts divos veidos:

$n = f_{i_1} + f_{i_2} + ... + f_{i_k}$ un $n = f_{j_1} + f_{j_2} + ... + f_{j_k}$. Ja $f_{i_1} = f_{j_1} = a$, tad iegūstam pretrunu ar induktīvo pieņēmumu, jo tad jau skaitli *n-a* varētu izsacīt divos veidos. Tāpēc $f_{i_1} \neq f_{j_1}$. Varam pieņemt, ka $f_{i_1} > f_{j_1}$.

Tā kā Fibonači skaitļu virkne ir augoša un summā $f_{j_1} + f_{j_2} + ... + f_{j_k}$ nav blakusesošu locekļu, tad $n = f_{j_1} + f_{j_2} + ... + f_{j_k} \leq f_{j_1} + f_{j_1 - 2} + f_{j_1 - 4} ... + f_{2\,vai\,1}$ **(*)**. Ievērosim, ka $f_2+f_4+f_6+...+f_{2m}=(f_3-f_1)+(f_5-f_3)+(f_7-f_5)+...+(f_{2m+1}-f_{2m-1})=f_{2m+1}-f_1<f_{2m+1}$ un līdzīgi $f_1+f_3+...+f_{2m+1}<f_{2m+2}$. Tāpēc **(*)** var turpināt kā ...$< f_{j_1+1}$. Tāpēc esam ieguvuši $f_{i_1} \leq n < f_{j_1+1}$, kas ir pretruna, jo $i_1 \geq j_1+1$. Līdz ar to pieņēmums par *n* izsacīšanu divos veidos ir nepareizs. Lemma pierādīta.

10 Datorzinātņu teorija

10.1 Kārtošanas un meklēšanas algoritmi

Galvenokārt skat. [GA].

150. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2001] Uz pieņemšanu pie Šerloka Holmsa atnācis Puaro un vēl 99 citi viesi; Holmss nepazīst nevienu atnācēju. Puaro zina, kā sauc jebkuru no pārējiem viesiem, bet neviens no pārējiem viesiem nezina, kā sauc Puaro. Holmsam ir atļauts pieiet pie jebkura viesa, norādīt tam uz jebkuru citu viesi un jautāt: "Vai jūs zināt, kā viņu sauc?" Visas atbildes ir patiesas. Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Holmss garantēti var noskaidrot, kurš no viesiem ir Puaro?*
Atbilde: ar 99 jautājumiem.
Atrisinājums. a) Ja Holmss, jautājot A: "Vai jūs zināt, kā sauc B?", saņem atbildi "nē", tad A nav Puaro; ja viņš saņem atbildi "jā", tad B nav Puaro. Tādējādi pēc 99 kandidatūru izslēgšanas vajadzīgais noskaidrots.
b) Pieņemsim, ka ir situācija, kurā arī citi viesi neviens nezina otra vārdu (Holmsam jābūt gatavam arī uz tādu gadījumu). Ja Holmss uzdod 98 jautājumus, tad var gadīties, ka tie visi uzdoti "pārējiem viesiem"; tad uz visiem saņemtas atbildes "nē". Šādā situācijā Puaro var būt jebkurš no tiem, kam Holmss nav jautājis.

151. uzdevums. *[Latvijas valsts olimpiāde, 2004] Juris iedomājies naturālu skaitli x no 1 līdz n ieskaitot. Andris drīkst viņam uzdot jautājumus "vai x ir no kopas A?", kur A – jebkura tādu dažādu naturālu skaitļu kopa, kuru summa ir 18. Vai Andris var noskaidrot iedomāto skaitli ar 3 jautājumiem, ja*
a) *$n = 8$,*
b) *$n = 9$?*
Atrisinājums. Ievērojam, ka uz 3 jautājumiem ir 8 dažādas atbilžu "jā" un "nē" kombinācijas. Tā kā pie $n = 9$ jāšķiro 9 situācijas, prasītais nav panākams. Pie $n = 8$ Andris **var** noskaidrot iedomāto skaitli, kā tas redzams sekojošā tabulā.

A \ x	1	2	3	4	5	6	7	8
1, 2, 7, 8	+	+	-	-	-	-	+	+
1, 3, 6, 8	+	-	+	-	-	+	-	+
1, 4, 6, 7	+	-	-	+	-	+	+	-

152. uzdevums. *[Latvijas valsts olimpiāde, 2002] Uz galda atrodas 1001 viena lata monētas. Katrai no tām uz augšu var būt vai nu ģerbonis, vai lasis. Tiek izdarīti 1000 gājieni. Ar n-to gājienu (n = 1; 2; 3; …; 1000) izvēlas n monētas un apgriež tās otrādi. Pierādīt:*

a) *var panākt, lai pēc visu gājienu izdarīšanas visas monētas būtu ar vienu un to pašu pusi uz augšu,*

b) *to, vai monētas būs ar ģerboni vai lasi uz augšu, viennozīmīgi nosaka monētu sākotnējais novietojums.*

Atrisinājums. a) Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka prasītais sasniedzams patvaļīgam naturālam monētu skaitam n, izdarot 1; 2; …; n-1 apgriešanas ($n \geq 3$).
Bāze n=3. Sākotnējā situācija var būt LLL, LLĢ, LĢĢ, ĢĢĢ. Ja tā ir LLL, apgriežam 1 monētu un pēc tam – abas pārējās. Ja tā ir LLĢ, apgriežam vienu L un pēc tam divus Ģ. Pārējie gadījumi simetriski apskatītajiem.

Pieņemsim, ka prasītais izdarāms $2k$-1 monētām, un apskatām $2k$+1 monētas. Šķirojam divus gadījumus:
1) sākumā visas monētas ir ar vienu un to pašu pusi uz augšu. Sadalām gājienus pāros: (1, $2k$), (2, $2k$-1), …, (k, k+1). Ar vienā pārī ietilpstošajiem gājieniem griežam apkārt pa reizei visas $2k$+1 monētas. tad katra monēta tiks apgriezta k reizes, un beigās visas atkal būs ar vienu pusi uz augšu.
2) sākumā monēta A ir ar ģerboni uz augšu, bet monēta B – ar lasi uz augšu. Vispirms, izdarot gājienus 1, 2, …, $2k$-2, panākam, ka pārējās $2k$-1 monētas ir ar vienu pusi uz augšu. Tāpēc tagad ir $2k$ vienādi novietotas monētas, bet viena novietota atšķirīgi no tām. Apgriežam $2k$-1 no vienādi novietotajām monētām; atkal ir $2k$ vienādi novietotas un 1 "citādi" novietota monēta. Ar pēdējo gājienu apgriežam $2k$ vienādi novietotās monētas.
b) pieņemsim, ka no kādas sākotnējās situācijas var iegūt, gan "visus ģerboņus", gan "visus lašus". Tad "visus lašus" var pārveidot par "visiem ģerboņiem" ar $(1+2+\ldots+1000)\cdot 2$ apgriešanām. Bet katrai monētai šādai pārveidošanai vajag nepāra skaitu apgriešanu. Tā kā monētu ir nepāra skaits, tad arī kopējam apgriešanu skaitam jābūt nepāra – pretruna.

153. uzdevums. *Dotas 20 monētas. Tās var būt gan īstas (to masa ir starp 11 g un 11,1 g ieskaitot), gan viltotas (to masa ir starp 10,6 g un 10,7 g ieskaitot). Dažādām īstām un dažādām viltotām monētām masas var atšķirties. Ar vienu jautājumu var norādīt uz jebkuru monētu kopu un uzzināt tās kopējo masu.*
Izstrādājiet metodi, kas ļauj noskaidrot visu monētu dabu ar pēc iespējas mazāku jautājumu skaitu. (Jums nav jāpierāda, ka jūsu atrastais skaits ir mazākais iespējamais.)
Atrisinājums. Parādīsim, ka ar 3 jautājumiem var noskaidrot visu par 4 monētām. Tātad par 20 monētām visu var noskaidrot ar **15 jautājumiem**. Tas ir labākais zināmais (mums) rezultāts.
Apzīmēsim monētas ar A, B, C, D. Vispirms jautājam par A, B, C. Iespējamie rezultāti apkopoti tabulā:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{3 viltotas} & 31{,}8 \le S \le 32{,}1 \\ \text{2 viltotas} & 32{,}2 \le S \le 32{,}5 \\ \text{1 viltotas} & 32{,}6 \le S \le 32{,}9 \\ \text{0 viltotas} & 33 \le S \le 33{,}3 \end{array}\right\} \text{visas 4 iespējas atšķiramas cita no citas}$$

Ja viltoto monētu ir 3 vai 0, ar vienu svēršanu noskaidrojam vajadzīgo par D, un kopā patērētas tikai 2 svēršanas.
Ja viltoto monētu ir 2 vai 1, ar otro svēršanu nosveram A un D, bet ar trešo nosveram B un D. Iespējamie rezultāti apkopoti tabulā:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{2 viltotas} & 21{,}2 \le S \le 21{,}4 \\ \text{1 viltotas} & 21{,}6 \le S \le 21{,}8 \\ \text{0 viltotas} & 22 \le S \le 22{,}2 \end{array}\right\} \text{visas 3 iespējas atšķiramas cita no citas}$$

Tagad secinājumus izdara sekojoši.
I Pārī (A, D) abas monētas ir īstas. Tad no (B, D) rezultāta uzzinām, kāda ir B, un no (A, B, C) rezultāta – kāda ir C.
II Līdzīgi analizē gadījumu, kad (A, D) abas ir viltotas vai (B, D) abas ir īstas, vai (B, D) abas ir viltotas.
III Katrā no pāriem (A, D) un (B, D) viena ir īsta, viena viltota.

III$_1$ Ja (A, B, C) ir 2 viltotas, tad A, B ir viltotas, C un D – īstas.

III$_2$ Ja (A, B, C) ir viena viltota, tad A, B ir īstas, C un D – viltotas.

154. uzdevums. *[Profesora Cipariņa klubs, 2001] Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Piecām no tām masas ir vienādas, bet sestajai varbūt atšķiras. Doti arī svari ar skalu, uz kuras var nolasīt uz svariem uzlikto monētu kopējo masu. Kā ar 3 svēršanām noskaidrot monētu masas?*

Atrisinājums. Apzīmēsim monētas ar A; B; C; D; E un F. Pirmajā svēršanā nosveram vienlaicīgi A, B un C, bet otrajā nosveram vienlaicīgi B, C, D un E. Aplūkosim sekojošas iespējas:

a) visas svērtās monētas ir ar vienādu masu. tad svaru rādījumu attiecība ir $\frac{3}{4}$;

b) B vai C ir ar masu y, un tā atšķiras no pārējo monētu masas x. Tad svaru rādījumu attiecība ir $\frac{2x+y}{3x+y}$. Ja būtu $\frac{2x+y}{3x+y}=\frac{3}{4}$, tad $4(2x+y)=3(3x+y)$, $8x+4y=9x+3y$ un $x=y$ - pretruna. Tātad svaru rādījumu attiecība noteikti nav $\frac{3}{4}$.

c) līdzīgi kā **b)** gadījumā pierāda, ka svaru rādījumu attiecība nav $\frac{3}{4}$ arī gadījumos, ja A, D vai E ir ar atšķirīgu masu no pārējām monētām.

No šejienes varam secināt: ja abu svaru rādījumu attiecība ir $\frac{3}{4}$, tad visas monētas A, B, C, D, E ir ar vienādu masu, kuru no svaru rādījumiem viegli aprēķināt. Tad ar trešo svēršanu nosakām F masu. Ja turpretī abu svaru rādījumu attiecība nav $\frac{3}{4}$, tad viena no monētām A, B, C, D, E ir ar citādu masu nekā pārējās (un tad F noteikti ir "īstā" monēta). Šajā gadījumā ar trešo svēršanu nosveram vienlaicīgi C un D. Apzīmējot piecu monētu masas ar x, bet atšķirīgās monētas masu ar y, iegūstam sekojošu tabulu, kas rāda svēršanu rezultātus m_1, m_2 un m_3 atkarībā no tā, kura no monētām A; B; C; D; E ir ar masu y:

Svēršanas rezultāts	A	B	C	D	E
m_1	$2x+y$	$2x+y$	$2x+y$	$3x$	$3x$
m_2	$4x$	$3x+y$	$3x+y$	$3x+y$	$3x+y$
m_3	$2x$	$2x$	$x+y$	$x+y$	$2x$

Viegli pārbaudīt, ka
1) $m_2 = 2m_3$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir A,
2) $m_3 = 2(m_2-m_1)$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir B,
3) $m_2+m_3=2m_1$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir C,
4) $2m_1=3(m_2-m_3)$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir D,
5) $2m_1=3m_3$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir E.
Tā kā skaitļi m_1, m_2 un m_3 mums ir zināmi, tad mēs varam noskaidrot, kurš no minētajiem gadījumiem ir spēkā, un katrā gadījumā viegli aprēķināt x un y vērtības.

Komentārs. Var pierādīt, ka 7 monētu gadījumā, no kurām vienai varbūt ir citāda masa nekā pārējām, visu monētu masas iespējams noskaidrot ar 5 svēršanām (pierādījums ir ļoti sarežģīts).

10.2 Kodēšanas teorija

Skat. [[AC],220.-225. lpp.]. Interesanti, ka uz kodēšanas teoriju reducējas šāds Vissavienības olimpiādes uzdevums:

155. uzdevums. *[PSRS, 1991] Izmeklētājam ir plāns, kā ar ne vairāk kā 91 jautājumu, uz katru no kuriem atbilde ir "jā" vai "nē", var noskaidrot patiesību, ja vien visas atbildes ir patiesas. Pierādīt, ka, ja nepatiesa ir ne vairāk kā viena atbilde, tad patiesību var noskaidrot ar ne vairāk kā 105 jautājumiem.*

Kodēšanas teorijas metodes (Heminga kods un tam atbilstošais apakšējais novērtējums) ļauj pierādīt, ka šajā uzdevumā pietiek ar 99 jautājumiem, bet 98 ir par maz. Vairāki Heminga koda speciālgadījumi aprakstīti [BL]. Apakšējo novērtējumu meklēšanu var atrast gan [BL], gan [[AC],308.uzd.].

11 Specifiski risināšanas paņēmieni

11.1 Vērtības palielināšana par 1

156. uzdevums. *[[MC95],Israel] Divi zagļi nozaguši virknīti ar 2k lielām un 2m mazām krellēm. Viņi grib sadalīt to, sagriežot vairākos gabalos un katrs paņemot dažus no tiem tā, lai katrs dabūtu k lielās un m mazās krelles. Kāds ir mazākais pietiekamais griezumu skaits?*

157. uzdevums. *[IMO, 1996] n, p un q ir naturāli skaitļi, n > p+q.* $x_0, ..., x_n$ *apmierina šādas īpašības:*
1. $x_0 = x_n = 0$*;*
2. Ja $1 \le i \le n$*, tad* $x_i - x_{i-1} = p$ *vai* $x_i - x_{i-1} = -q$*.*
Pierādīt, ka eksistē i, j, kuriem izpildās $i < j, (i, j) \ne (0, n)$ *un* $x_i = x_j$*.*

158. uzdevums. *Ir 1996 zili un 1000 sarkani punkti, no kuriem nekādi 3 nav uz vienas taisnes. Pierādīt, ka ir taisne, kurai katrā pusē ir 998 zili un 500 sarkani punkti.*

159. uzdevums. *[IMO, 1994] Ar S(k) apzīmē kopas {k+1, ..., 2k} elementu, kuriem binārajā pierakstā ir tieši 3 vieninieki, skaitu.*

a) *Pierādīt, ka katram m eksistē tāds k, ka S(k) = m.*
b) *Kādiem m tāds k ir tikai viens?*

Šīs paņēmiens dažreiz der, arī pierādot nevienādības.

160. uzdevums. [IMO, 1997] Par skaitļiem $x_1, ..., x_n$ zināms, ka

$$|x_1 + ... + x_n| = 1, \quad |x_i| \le \frac{n+1}{2} \text{ priekš } i = 1, ..., n.$$

Pierādīt, ka šos skaitļus var pārkārtot, iegūstot $y_1, ..., y_n$, kuriem

$$|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \le \frac{n+1}{2}$$

Citus uzdevumus par šo paņēmienu var atrast [[L],220.-221.lpp.]. Lielākā daļa no tur esošajiem uzdevumiem gan ir diezgan vienkārši.

11.2 Virknes elementu periodiska atkārtošanās

161. uzdevums. *Skaitļu virknē* $x_1, x_2, ...$ *zināms, ka*

$$x_1 = 3979,\ x_2 = 5961,\ x_3 = 9925,\ x_4 = 7853,\ x_{n+4} = (x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) \bmod 10000.$$

Pierādīt, ka kaut kur šajā virknītē būs 4 pēc kārtas esoši locekļi 1997.

162. uzdevums. *[IMO, 1993] Ir n lampas, katra no kurām var būt ieslēgta vai izslēgta. Sākumā visas lampas ir ieslēgtas. Tad veic virkni gājienu, i-ā gājienā pārbaudot, vai (i mod n)-ā lampa ir ieslēgta. Ja tā ir ieslēgta, tad maina ((i+1) mod n)-ās lampas stāvokli uz pretējo.*

a) *Pierādīt, ka kaut kad visas lampas atkal būs ieslēgtas.*
b) *Ja* $n = 2^k$*, tad tas notiks pēc* n^2-1 *gājiena.*
c) *Ja* $n = 2^k+1$*, tad tas notiks pēc* n^2-n+1 *gājieniem.*

12 Dažādi uzdevumi

163. uzdevums. *[Žūrija, 1985, IL4] Uz riņķa līnijas ir 665 skaitļi +1 un 1332 skaitļi -1. Pierādīt, ka ir skaitlis ar šādu īpašību: saskaitot visus skaitļus, sākot no šī skaitļa, ejot pulksteņa rādītāja virzienā un beidzot ar patvaļīgu skaitli, vienmēr iegūst pozitīvu summu. Kas notiek, ja ir 666 skaitļi +1?*

164. uzdevums. *[Žūrija, 1989, ROM4] Uz riņķa līnijas sēž 155 putni. 2 putni ir vienlaicīgi redzami, ja loks starp tiem nepārsniedz 10 grādus. Kāds ir minimālais iespējamais vienlaicīgi redzamu putnu pāru skaits?*

165. uzdevums. *[[VS],246.uzd.] Ir 1000 biļetes ar numuriem no 000 līdz 999 un 100 kastes ar numuriem no 00 līdz 99. Biļeti var likt kastē, ja kastes numuru var iegūt no biļetes numura, izsvītrojot 1 ciparu. Pierādīt, ka*

a) *visas biļetes var salikt 50 kastēs;*

b) *biļetes nevar salikt mazāk kā 40 kastēs;*

c) *biļetes nevar salikt mazāk kā 50 kastēs;*

d) *Apskatām biļetes ar četrciparu numuriem (no 0000 līdz 9999). Biļeti var likt kastē, ja kastes numuru var iegūt no biļetes numura, izsvītrojot 2 ciparus. Pierādīt, ka pietiek ar 34 kastēm.*

c) *Kāds ir mazākais nepieciešamais kastu skaits priekš k-ciparu biļetēm (k = 4, 5, ...)?*

166. uzdevums. *Seifa atslēga sastāv no 3 cipariem, katrs no kuriem var būt no 0 līdz 7. Seifs ir sabojāts un tādēļ tas atveras tad, ja vismaz 2 cipari sakrīt ar pareizajiem. Kāds ir mazākais ciparu kombināciju, kas jāizmēģina, lai noteikti atvērtu seifu, skaits?*

167. uzdevums. *[Žūrija, 1988, POL4]*

1. *49 studenti risina 3 uzdevumus, katrs no kuriem tiek vērtēts ar atzīmi no 0 līdz 7. Pierādīt, ka eksistē 2 tādi studenti A un B, ka A katrā uzdevumā ir augstāka vai tāda pati atzīme kā B.*

2. *Pierādīt, ka 48 studentiem tas var neizpildīties.*

168. uzdevums. *[Žūrija, 1988, HUN3] Testā ir 4 jautājumi, uz katru no tiem ir iespējamas 3 atbildes. Zināms, ka katriem 3 skolniekiem var atrast jautājumu, uz kuru viņi devuši 3 dažādas atbildes. Kāds ir maksimālais skolnieku skaits, kuram iespējama šāda situācija?*

169. uzdevums. *[[Z],26.17.]*

1. *Izvietot uz $3n \times 3n$ šaha galdiņa $4n$ torņus tā, lai katrs tornis sistu ne vairāk kā 1 citu.*

2. *Pierādīt, ka vairāk torņu izvietot nevar.*

3. *Cik torņu var izvietot, ja katrs tornis drīkst sist ne vairāk kā 2 citus?* (***Atbilde:*** $6n$).

170. uzdevums. *[Krievija, 1993] Kāds ir lielākais n, kuram iespējams atzīmēt n rūtiņas uz $n \times n$ šaha galdiņa tā, lai katrs taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu malām un laukums ir vismaz n, saturētu vismaz 1 atzīmēto rūtiņu?*

171. uzdevums. *[[VS],64. uzd.] Vai var kvadrāta ar malu 1 iekšienē izvietot 1965 punktus tā, lai jebkurā taisnstūrī ar laukumu $\frac{1}{200}$, kas atrodas kvadrāta iekšienē un kura malas paralēlas kvadrāta malām, iekšā būtu vismaz 1 no šiem punktiem?*

Atbilde: var. Pietiek arī ar mazāku punktu skaitu (piemēram, 1704).

172. uzdevums. *[Baltijas ceļš, 1993] Vienādmalu trijstūris ABC sadalīts 100 vienādos vienādmalu trijstūros. Kāds ir lielākais mazo trijstūru virsotņu skaits, ko var izvēlēties tā, lai nekādas 2 neatrastos uz taisnes, kas paralēla kādai no trijstūra malām?* (***Atbilde:*** 7.)

173. uzdevums. *[IMO, 1990] Uz apļa ir 2n-1 punkti. Cik no tiem var izvēlēties tā, lai starp nekādiem 2 izvēlētajiem nebūtu*

a) *tieši 1 cits punkts?*
b) *tieši 2 citi punkti?*
c) *tieši n citi punkti?*

174. uzdevums. *[IMO, 1988] Par kopu B un tās apakškopām $A_1, ..., A_{2n+1}$ zināms, ka:*
1. katra kopa A_i satur tieši 2n elementus,
2. katru 2 dažādu kopu A_i un A_j šķēlums satur tieši 1 elementu,
3. katrs B elements pieder vismaz 2 no kopām $A_1, ..., A_{2n+1}$.
Kādiem n ir iespējams atzīmēt dažus B elementus tā, lai katrā kopā A_i būtu tieši n atzīmētie elementi?

175. uzdevums. *[IMO, 1987] Uz rūtiņu lapas atzīmētas dažas rūtiņu virsotnes. Pierādīt, ka tās var nokrāsot 2 krāsās tā, lai uz katras vertikāles un katras horizontāles dažādās krāsās esošo punktu skaiti atšķirtos ne vairāk kā par 1.*
Norāde. Izmantojiet matemātisko indukciju ar soli 1 un soli 2.

176. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2002] Ap apaļu galdu sēž n rūķīši, kam pēc kārtas piešķirti numuri 1; 2; ...; n. Sākumā pirmajam rūķītim ir par vienu dālderi vairāk nekā otrajam, otrajam – par vienu dālderi vairāk nekā trešajam, ..., (n-1)-am – par vienu dālderi vairāk nekā n-tajam.*
*Pirmais rūķītis iedod 1 dālderi otrajam. Pēc tam otrais iedod 2 dālderus trešajam. Pēc tam trešais iedod 3 dālderu ceturtajam utt. (**Katrā** nākošajā reizē tiek dots viens dālderis vairāk nekā iepriekšējā.) Tā turpina, kamēr iespējams (varbūt "apriņķojot" galdu vairāk nekā vienu reizi). Kad process beidzās, izrādījās, ka vienam no rūķīšiem bija tieši 6 reizes vairāk naudas nekā vienam no viņa kaimiņiem. Cik bija rūķīšu un cik naudas sākumā viņiem bija? (Dālderi sīkāk nedalās.)*
Atrisinājums. Pieņemsim, ka sākumā n-tajam rūķītim ir x dālderi. Tad (n-1) -am ir x+1, (n-2) -am ir x+2,..., pirmajam ir n+x-1 dālderi; naudas daudzumus izsaka virkne

$$n+x-1,\ n+x-2,\ n+x-3,\ ...,\ x+2,\ x+1,\ x$$

Pēc 1. apļa naudas daudzumi ir

$$2n+x-2,\ n+x-3,\ n+x-4,\ ...,\ x+1,\ x,\ x-1$$

Pēc 2. apļa naudas daudzumi ir

$$3n+x-3,\ n+x-4,\ n+x-5,\ ...,\ x,\ x-1,\ x-2$$

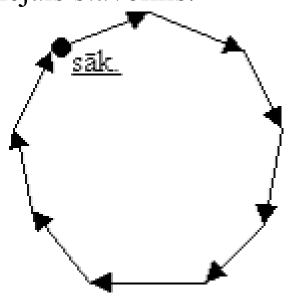
Process beigsies brīdī, kad naudas daudzumi būs

$$x+(x+1)(n-1),\ n-2,\ n-3,\ ...,\ 2,\ 1,\ 0$$

Skaidrs, ka vienīgi 1. rūķītim var būt 6 reizes vairāk naudas nekā kaimiņam, jo n-2; n-3; ...; 1; 0 ir pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Tāpēc $x+(x+1)(n-1)=6(n-2)$, no kurienes $x = 5 - \frac{11}{n}$. Tā kā x - naturāls skaitlis, tad n=1 vai n=11. Pēc uzdevuma jēgas nevar būt n=1. Tāpēc **n=11** un **x=4**.

Piezīme. Šis risinājums neder, ja x=0 (nevar tikt izpildīts pat pirmais aplis). Tad process sākas ar n-1; n-2; n-3; ...; 1; 0; n-1. Viegli redzēt, ka tā nevar būt, jo neviens skaitlis nevar būt 11 reizes lielāks par savu kaimiņu.

177. uzdevums. *[Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde, 2001] Pa apli novietoti n trauki, katrā no tiem ir k monētas (n un k - naturāli skaitļi). Izņemam no viena trauka visas monētas un pa vienai liekam tās pēc kārtas traukos, kas ir nākošie pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Kad visas monētas ieliktas, atkārtojam šo procesu, izņemot visas monētas no trauka, kurā ielikām pēdējo monētu. Līdzīgi turpinām uz priekšu.*
Pierādīt, ka agri vai vēlu visas monētas vienlaicīgi atradīsies vienā traukā.
Atrisinājums. Sauksim par stāvokli situāciju, kura izveidojusies, kad visas no kāda trauka izņemtās monētas ieliktas traukos; tātad stāvokli raksturo monētu sadalījums traukos un tas, no kura trauka mēs gatavojamies izņemt monētas, sākot jaunu etapu. Skaidrs, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka **nākošo** stāvokli. Parādīsim, ka katrs stāvoklis viennozīmīgi nosaka arī **iepriekšējo** stāvokli. Tiešām, iepriekšējo stāvokli var atrast, sākot pa vienai salasīt monētas no traukiem **pretēji** pulksteņa rādītāja kustības virzienam, kamēr atrodam tukšu trauku; tad tajā ieliekam visas salasītās monētas.
Tā kā iespējamu stāvokļu ir tikai galīgs skaits, tad tiem agri vai vēlu jāatkārtojas , t.i., process būs periodisks. Iepriekš pierādītais ļauj secināt, ka veidosies tīrs periods – bez priekšperioda. Tas nozīmē, ka tiks iegūts arī sākotnējais stāvoklis.



Bet sākotnējo stāvokli var iegūt tikai no tāda, kādu mēs meklējam – visas monētas vienā traukā.

178. uzdevums. *Andris un Juris katrs slepeni no otra pateica Pēterim kādu naturālu skaitli. Pēteris uzrakstīja uz tāfeles divus dažādus naturālus skaitļus un paziņoja, ka viens no tiem ir viņam pateikto skaitļu summa. Pēc tam viņš pamīšus jautāja Andrim un Jurim: „Vai tu vari pateikt, kāda ir abu jūsu iedomāto skaitļu summa?”*
Pieņemsim, ka Andris un Juris ir godīgi un neierobežoti gudri. Pierādiet, ka kādreiz kāds no viņiem pateiks „jā”.
Atrisinājums. Pieņemsim, ka Andra un Jura pasacītie skaitļi ir a un j, bet Pētera uzrakstītie skaitļi ir S_1 un S_2, kur $S_1<S_2$. Apzīmēsim $S_2-S_1=d$ un pieņemsim, ka nekad neviens nepateiks „jā”. Apzīmēsim ar α_i resp γ_i speciāla veida secinājumus, kurus Andris, resp. Juris var izdarīt pēc tam, kad i reizes dzirdējis otru zēnu atbildam „nē”, i=1; 2; ... .
Pēc Andra pirmā „nē” Juris var secināt

$$\gamma_1: \quad 0 < a < S_1$$

(Tiešām, ja būtu $a \geq S_1$, tad $a+j>S_1$ un Andris būtu sapratis, ka $a+j=S_2$.)
Pēc Jura pirmā „nē” Andris var secināt

$$\alpha_1: \quad d < j < S_1$$

(Tiešām, Andris vispirms sapratīs, ka $j<S_1$. Tālāk Andris spriež tā: Juris zina, ka $a<S_1$. Ja būtu $j \leq d$, tad Juris zinātu $a+j<S_1+d=S_2$ un varētu pateikt, ka $a+j=S_1$, tāpēc atbildētu „jā”; bet viņš (Juris) to nedara.)

Pēc Andra otrā „nē” Juris var secināt

$$\gamma_2: \quad 0 < a < S_1 - d$$

(tiešām, ja būtu $a \geq S_1 - d$, tad Andris uz α_1 pamata varētu secināt, ka $a+j > S_1 - d + d = S_1$ un saprast, ka $a+j = S_2$), bet pēc Jura otrā „nē” Andris var secināt

$$\alpha_2: \quad 2d < j < S_1$$

(tiešām, ja būtu $j \leq 2d$, tad Juris uz γ_2 pamata secinātu, ka $a+j < S_1 - d + 2d = S_1 + d = S_2$, un saprastu, ka $a+j = S_1$).

Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka pēc k-tā „nē” pāra var izdarīt secinājumus

$$\alpha_k: \quad kd < j < S_1$$

$$\gamma_k: \quad 0 < a < S_1 - (k-1)d$$

Skaidrs, ka tā nevar būt visiem naturāliem k.

Literatūra

[ABS] A. Andžāns, A. Bērziņš, M. Stupāne. Matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi. Rīga, 1992.

[AC] A. Andžāns, J. Čakste u.c. Vidējās vērtības metode. Rīga, 1996.

[BL] А. Барг, С. Лицин. Что есть Фортуна. Kvant, 1990.g. 9. numurs, 8.-16. lpp.

[G] Р. Грехом. Начала теории Рамсея. Maskava, 1984.

[GA] A. Gailītis, A. Andžāns. Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi. Aizkraukle, 1995.

[L] С. Генкин и др. Ленинградские математические кружки. Sankt-Pēterburga, 1994.

[KV] Žurnāls "Kvant".

[KF] Л. Курляндчик, Д. Фомин. Этюды о полуинварианте. Kvant, 1989.g. 7. numurs, 53.-58.lpp.

[MC95] Mathematical Contests 95 (ASV publicēts nacionālo olimpiāžu uzdevumu krājums).

[MO] Г. Гальперин, А. Толпыго. Московские математические олимпиады. Maskava, 1986.

[PR] В. Прасолов. Задачи по планиметрии, ч. II. Maskava, 1986

[R82] К. Рыбников. Комбинаторный анализ: задачи и упражнения. Maskava, 1982.

[R85] К. Рыбников. Введение в комбинаторный анализ. Maskava, 1985.

[SP96] Задачи Санкт-Петербургской городской олимпиады по математике. Sankt-Pēterburga, 1996.

[VS] Н. Васильев, А. Егоров. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. Maskava, 1988.

[V] Р. Вилсон. Введение в теорию графов. Maskava, 1977.

[Z] Зарубеные математические олимпиады. Maskava, 1987.