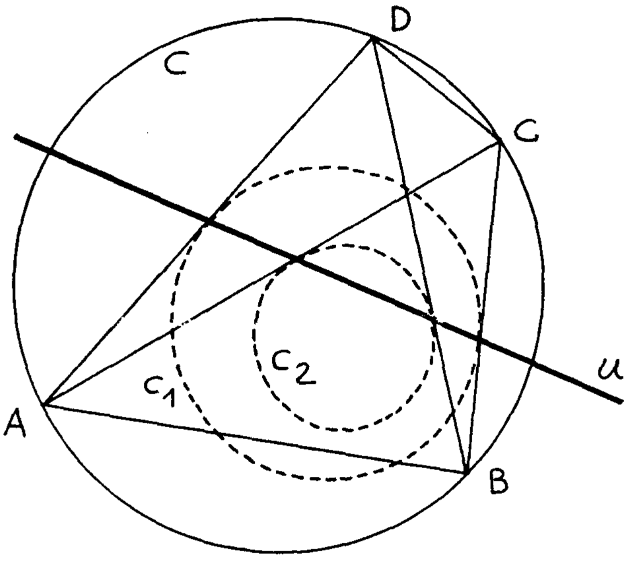
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

E. FOGELS, E. LEJNIEKS

TRIJSTŪRU ĢEOMETRIJA



Rīga 2001

Ievads

Eiklīda planimetrija pārdzīvojusi divus lielus uzplaukuma periodus: Senajā Grieķijā un 19.gadsimtā. Otrais periods iezīmējās ar jaunām pieejām, kas pamatā tika izveidotas citās matemātikas nozarēs un elementārajā ģeometrijā atrada neskaitāmus negaidītus un iespaidīgus pielietojumus. Kā galveno te jāmin dažādu ģeometrisku pārveidojumu izpēte un izmantošana. Ievērojamus pētījumus planimetrijā veica ne tikai pirmā lieluma zinātnieki; daudzus izcilus rezultātus ieguva ģimnāziju, koledžu un liceju matemātikas skolotāji. Šodien 99% šī interesantā materiāla vairs neatrodas aktīvā zinātniskā apritē.

Prof. E.Lejnieka lekcijās apskatīti paši galvenie "augstākās elementārās ģeometrijas" fakti un ilustrētas dažas no visbūtiskākajām metodēm. Protams, šis darbs ne tuvu nav izsmeļošs.

Izdevums sagatavots pēc E.Fogela rokraksta fotokopijas, kuru mūsu rīcībā laipni nodeva E.Laudiņa.

Tekstā pēc iespējas saglabāta E.Fogela valoda un viņa lietotā interpunkcija, kas ievērojami atšķiras no mūsdienās pieņemtās. Izmaiņas izdarītas tikai tur, kur pretējā gadījumā varētu rasties pārpratumi. Izlabotas pārrakstīšanās kļūdas un neprecizitātes. Daži pierādījumi aizstāti ar vienkāršākiem.

E.Fogela izklāsts ir matemātiski korekts, tomēr ļoti konspektīvs. Vairākos spriedumos "acīmredzami" fakti tiek noklusēti. Īpaši minēsim:

a) teorēmu par sekanti un tās ārējo daļu,
b) inversijas singulāro punktu - inversijas centru,
c) iespēju izmantot spriedumos "bezgalīgi tālo punktu" - paralēlu taišņu domājamo krustpunktu.

Tekstu publicēšanai uz datora sagatavoja I.Kreicberga, G. Vītols un L.Strazdiņa.

A.Andžāns

Satura rādītājs

I. APOLONIJA PROBLĒMA

II. TRANSVERSĀLES

III. IEVILKTIE UN APVILKTIE DAUDZSTŪRI

IV. INVERSIJA

I. APOLONIJA PROBLĒMA

1.§ Problēmas vēsture.

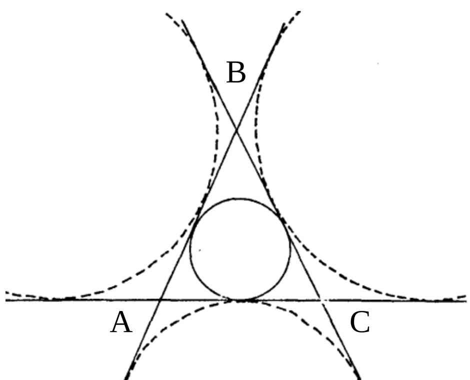
Grieķu ģeometrs Pergas Apolonijs dzīvojis ap - 200 g. No viņa daudzajiem darbiem uzglabājušās tikai 7 grāmatas (eksistējušas 8) par kona šķēlumiem, kurās Apolonijs attīsta tālāk jau Arhimedam un citiem agrākajiem autoriem pazīstamu teoriju par otrās pakāpes līknēm. Pazudušā darbā "Par pieskaršanos" Apolonijs atrisina problēmu, kā konstruēt aploci, kas pieskaras trim dotām aplocēm. Apolonija atrisinājumu 16.gs. mēģināja restaurēt Vjets (F.Vieta). Viņš problēmu atrisina vispirms vienkāršākajos gadījumos, kad vienai vai vairākām aplocēm rādiusi ir 0 vai ∞ (t.i., aploce a kļūst par punktu P vai taisni t) un vispārīgo gadījumu reducē uz šiem vienkāršākajiem. Ņūtons mēģināja atrisināt Apolonija problēmu ar analītiskās ģeometrijas metodēm un viņam sekoja Eilers, Fuss, Mertens (1874). 1812.g. Gotjē (L.Gaultier) un 1816.g. Žergons (J.D.Gergonne) atrada problēmas vispārīgo tiešo atrisinājumu ar elementārām metodēm.

Sekojošos 2. - 11. paragrāfos apskatīsim Apolonija problēmas Koši atrisinājumu (A.L.Cauchy, 1806) šādā speciālo gadījumu sakārtojumā I(P,P,P); II(t,t,t); III(P,P,t); IV(P,t,t); V(P,P,a); VI(P,t,a); VII(t,t,a); VIII(t,a,a); IX(P,a,a); X(a,a,a) (Vjeta sakārtojums ir citādāks, un tas atšķiras arī no Apolonija sakārtojuma). 12. un 13.§ apskatīsim ticamāko Apolonija atrisinājuma restaurāciju un 14. - 19.§ atrisināsim Apolonija problēmu ar 19.gs. metodēm.

2.§ Problēmas speciālie gadījumi I, II

Speciālā gadījumā I ir jāvelk aploce x caur trim dotiem punktiem A, B, C. Problēmai ir tikai viens atrisinājums. Ja A, B, C pieder vienai taisnei t, tad x ir t. Pretējā gadījumā x centrs ir trijstūra ABC malu vidusperpendikulu krustpunktā.

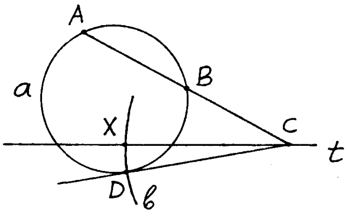
Speciālā gadījumā II ir jāvelk aploce x, kas pieskaras trim dotām taisnēm. Vispārīgā gadījumā, kad šīs taisnes krustojas 3 dažādos punktos A, B, C, uzdevuma prasības izpilda 4 aploces, kuru centri pieder trijstūra ABC iekšējo vai ārējo leņķu bisektrisēm *(1. zīm.).*



1. zīm.

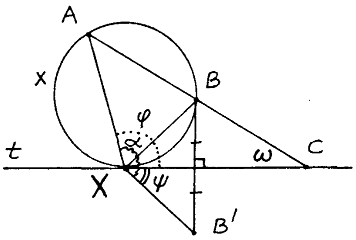
3.§ Problēmas III speciālais gadījums

Šinī gadījumā jākonstruē aploce, kas iet caur punktiem A, B un pieskaras taisnei t.



2. zīm.

Vispārīgā gadījumā taisnes AB un t krustojas punktā C *(2.zīm.).* Ja a ir patvaļīga aploce caur punktiem A, B un tās punktā D vilktā pieskare iet caur C, tad $CD^2 = AC \cdot BC$, kādēļ, a mainoties, punkts D apraksta aploci b, kuras centrs ir C un rādiuss ir nogriežņu AC, BC vidējais ģeometriskais. Noteicot aploces b un taisnes t krustpunktus X, X', problēmu reducē uz speciālo gadījumu (A, B, X), (A, B, X') un iegūst divus atrisinājumus.

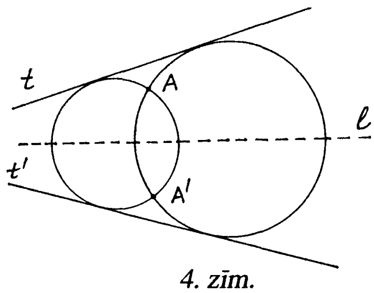


3. zīm.

Apskatīsim vēl otru atrisinājumu, kuru devis Lemuāns (E.Lemoine, 1879). Pieņemot, ka x ir meklējamā aploce, X ir x un t pieskaršanās punkts, B' ir B simetriskais attiecībā uz taisni t un leņķi α, φ, ψ, ω noteikti kā *3.zīmējumā,* tad ievērojot, ka leņķi CXB un BAX ir vienlīdzīgi (jo katrs no tiem mērojams ar pusi loka BX), izteic $\alpha=\varphi + \psi = \varphi+ \angle CXB = \varphi + \angle BAX = 180° - \omega$. Tādēļ X pieder to punktu ģeometriskai vietai, no kuriem nogrieznis AB' redzams leņķī $180° - \omega$. Šī ģeometriskā vieta ir zināma aploce, kas ar taisni t krustojas divos punktos X un X'.

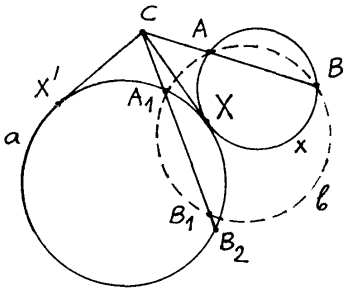
4.§ Problēmas IV speciālais gadījums

Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas iet caur dotu punktu A un pieskaras taisnēm t, t'. Tās centrs atrodas uz leņķa (t, t') bisektrises l, un x iet arī caur punktu A', kas ir A simetriskais attiecībā uz l. Ar to uzdevums reducēts uz speciālo gadījumu III(A,A',t) un tam ir divi atrisinājumi *(4.zīm.).*



4. zīm.

5.§ Problēmas V speciālais gadījums



5. zīm.

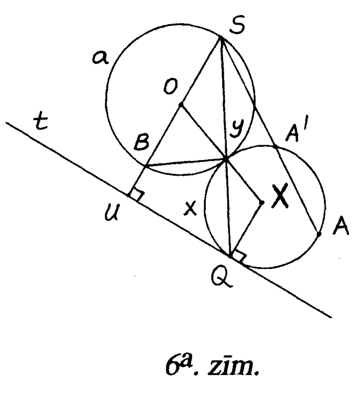
Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas iet caur punktiem A, B un pieskaras aplocei a *(5.zīm.).* Novelkot pieskaršanās punktā X aploču a, x kopīgo pieskari, ar C apzīmējam tās krustpunktu ar taisni AB. Brīvi izvēloties a punktu A_1, caur punktiem A, B, A_1 velk aploci b un taisnes CA_1 krustpunktus ar b, a apzīmē ar B_1, B_2; tad $CX^2 = AC \cdot BC = A_1C \cdot B_1C$ un arī $CX^2 = A_1C \cdot B_2C$, kādēļ punkti B_1, B_2 sakrīt.

Tādēļ, ja brīvi izvēlas aploci b, kas iet caur punktiem A, B, un noteic a, b krustpunktus A_1, B_1, tad atrod AB, A_1B_1 krustpunktu C, no kura velk pieskares aplocei a. Konstruējot pieskaršanās punktus X, X', uzdevumu reducē uz speciālo gadījumu I(A,B,X), (A,B,X'). Tātad vispārīgā gadījumā uzdevumam ir divi atrisinājumi.

6.§ Problēmas VI speciālais gadījums

Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas iet caur punktu A un pieskaras taisnei t un aplocei a *(6^a.zīm.).* Aploču a, x centrus apzīmējam ar O, X un pieskaršanās punktu ar Y. Šie punkti pieder vienai taisnei. Ar U un Q apzīmējam no O un X uz t vilkto perpendikulu pamatus. OU krustpunkti ar a ir B un S.

Leņķi SOX un OXQ ir vienlīdzīgi kā paralēlo taišņu SU, XQ šķērsleņķi. Tādēļ arī $\angle OYS (= \angle OSY)$un $\angle QYX (= \angle YQX)$ ir vienlīdzīgi un $\angle SYQ$ ir taisne. Ar A' apzīmējot SA, x krustpunktu, ir $SA \cdot SA' = SQ \cdot SY$. **(1)**



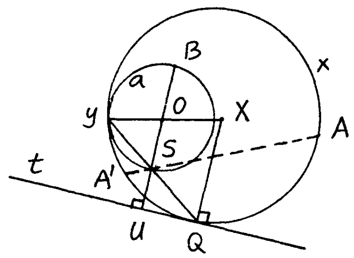
6^a. zīm.

Taisnleņķa trijstūru SYB, SUQ līdzības dēļ ir

$$SQ:SB = SU:SY, \text{ jeb } SQ \cdot SY = SB \cdot SU,$$

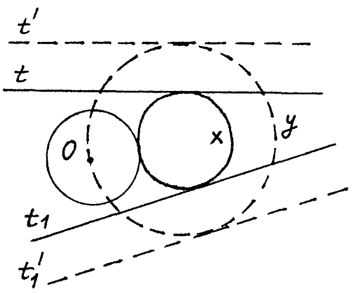
kādēļ pēc **(1)** $SA \cdot SA' = SB \cdot SU$. Pēdējā sakarība pierāda, ka aploce b, kas iet caur punktiem A, U, B, iet arī caur punktu A'; šī aploce, krustojoties ar taisni AS, noteic tādu punktu A'. Ar to uzdevums reducēts uz speciālo gadījumu III(A,A',t), kas dod divus atrisinājumus. Divus citus atrisinājumus dabū, izpildot līdzīgas konstrukcijas *zīmējumā 6^b*. Tagad $\angle SOX + \angle OXQ = 2d$ un

$\angle QYX = \angle YQX = \frac{1}{2}(2d - \angle X) = \frac{1}{2}\angle SOX = \angle SYO$, kādēļ $\angle QSY$ ir taisne utt.



6b. zīm.

7.§ Problēmas VII speciālais gadījums



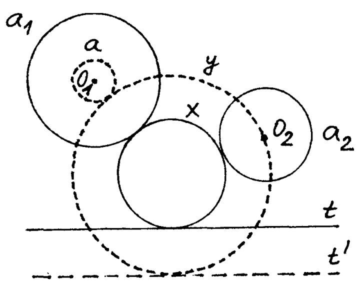
7. zīm.

Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas pieskaras taisnēm t, t_1 un aplocei a ar centru O un rādiusu r *(7.zīm.).* Ar 4.§ metodi konstruējam aploci y, kas iet caur punktu O un pieskaras palīgtaisnēm t', t'_1; pēdējās vilktas paralēli t, t_1 tā, ka to attālums līdz O ir par r lielāks (vai mazāks) kā t, t_1 attālums. y rādiusu samazinot (resp. palielinot) par r, dabū x. Vispārīgā gadījumā uzdevumam ir 4 atrisinājumi.

8.§ Problēmas VIII speciālais gadījums

Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas pieskaras taisnei t un aplocēm a_1, a_2, kuru centri ir O_1, O_2 un rādiusi r_1, r_2 *(8.zīm.).*

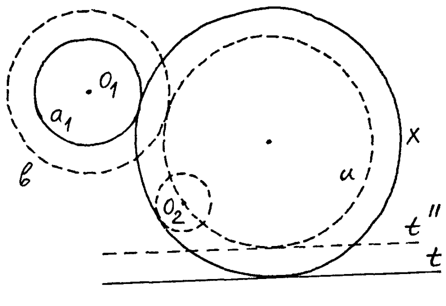
Pieņemam, ka $r_1 > r_2$. Ar 6.§ metodi konstruējam aploci y, kas iet caur punktu O_2 un pieskaras aplocei a (centrs O_1, rādiuss $r_1 - r_2$) un taisnei t'; pēdējā vilkta paralēli t tā, ka tās attālums līdz O_2 ir par r_2 lielāks nekā t attālums, y rādiusu samazinot par r_2, dabū x.



8. zīm.

Vispārīgā gadījumā uzdevumam ir 8 atrisinājumi, no kuriem apskatītā konstrukcija dod četrus. Atlikušos četrus dabū, velkot aploci u, kas iet caur punktu O_2 un pieskaras aplocei b (centrs O_1, rādiuss $r_1 + r_2$) un taisnei t''; pēdējā vilkta paralēli t, ka tās attālums līdz O_2 ir par r_2 mazāks kā t attālums, u rādiusu palielinot par r_2, dabū x *(9.zīm.).*

Pirms apskatām nākošā speciālā gadījuma atrisinājumu, iepriekš iepazīsimies ar jēdzienu par divu aploču līdzības jeb homotētijas centru.

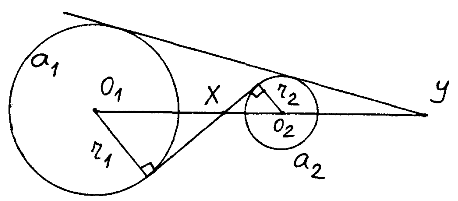


9. zīm.

9.§ Aploču līdzības centrs

Definīcija. *Par divu nekoncentrisku aploču* a_1, a_2 *līdzības centriem sauc centru līnijas punktus X, Y, kuru attālumi līdz aploču centriem attiecas kā šo aploču rādiusi:*

$O_1X:XO_2=r_1:r_2$, $O_1Y:YO_2=r_1:r_2$ ***(2)***



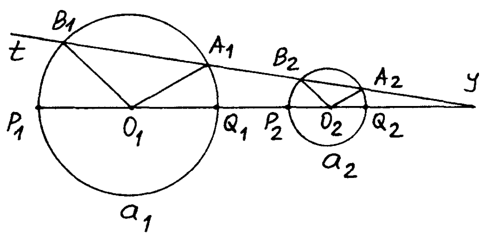
10. zīm.

10. zīmējumā attēlotā gadījumā X sauc par iekšējo un Y - par ārējo līdzības centru

.

Ja a_1 *un* a_2 *pieskaras ārēji (iekšēji), tad pieskaršanās punkts ir abu aploču iekšējais (ārējais) līdzības centrs.*

Par līdzības centru pirmais rakstījis Eilers, bet liekas, ka to pazinuši jau grieķi. Ar līdzīgiem trijstūriem *(10.zīm)* pierāda, ka gadījumā, ja aploces a_1, a_2 ir viena ārpus otras, tad šo aploču kopīgās pieskares iet caur līdzības centriem.



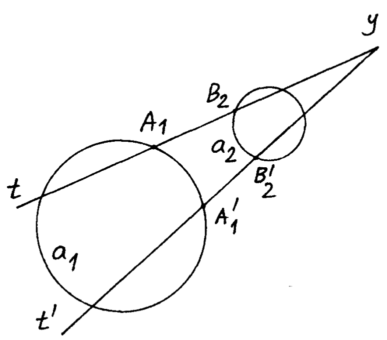
11. zīm.

Tāpat pierāda ***1.teorēmu:*** *Taisnes, kas savieno aploču* a_1, a_2 *vienā virzienā vilktu paralēlu rādiusu galu punktus, iet caur aploču ārējo līdzības centru; pretējos virzienos vilktu paralēlu rādiusu galu punktus savienojošā taisne iet caur aploču iekšējo līdzības centru (11. zīm.)*

2.teorēma. *Ja caur aploču* a_1, a_2 *līdzības centru vilkta taisne t šīs aploces krusto četros punktos, tad caur vienas aploces krustpunktiem ejošie rādiusi paralēli attiecīgajiem otras aploces rādiusiem:* $O_1A_1||O_2A_2$ *un* $O_1B_1||O_2B_2$ *(11. zīm.)*

Pierādījums. Trjstūriem O_1YA_1, O_2YA_2 ir kopīgs leņķis virsotnē Y un pēc ***(2)*** to divas malas ir proporcionālas. Tādēļ tie ir līdzīgi trijstūri, to leņķi virsotnēs O_1, O_2 ir vienlīdzīgi, kādēļ $O_1A_1||O_2A_2$ utt. Pastāvot teorēmas nosacījumiem, abu aploču paralēlo rādiusu galu punktus (A_1, A_2, kā arī B_1, B_2) sauc par homologiem, bet neparalēlo rādiusu galu punktus (A_1, B_2, kā arī A_2, B_1) sauc par antihomologiem punktiem.

Lemma. *Antihomologo punktu attālumu līdz līdzības centram reizinājums ir pastāvīgs lielums.*



12. zīm.

Pierādījums. Pēc aploces sekantes īpašības *11. zīmējumā* ir

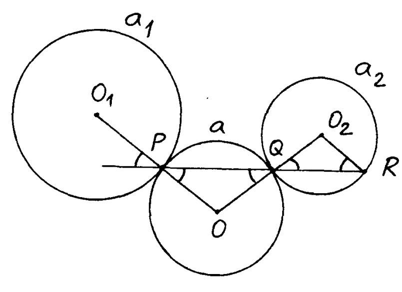
$YA_2 \cdot YB_2 = YQ_2 \cdot YP_2$, $YA_1 \cdot YB_1 = YQ_1 \cdot YP_1$,

no kurienes visām taisnēm t caur līdzības centru Y ir $YA_1 \cdot YB_1 \cdot YA_2 \cdot YB_2 = \text{const}$ ***(3)***

Ar līdzīgiem trijstūriem pierāda proporcijas $YA_1:YA_2= r_1:r_2$, $YB_1:YB_2= r_1:r_2$, no kurienes $YA_1 \cdot YB_2 = YA_2 \cdot YB_1$, un, ievērojot ***(3)***, seko $YA_1 \cdot YB_2 = \text{const}$. ***(4)***

Līdzīgā kārtā lemmu pierāda iekšējam līdzības centram X. Ja t' ir cits stars caur līdzības centru Y *(12.zīm.)* un A'_1. B'_2 ir atbilstošie antihomologie punkti, tad pēc ***(4)*** $YA_1 \cdot YB_2=YA'_1 \cdot YB'_2$ **(5)** un seko, ka aploce, kas iet caur trim no punktiem A_1, B_2, A'_1, B'_2, iet arī caur ceturto. Tātad der

3.teorēma. *Divi antihomologu punktu pāri pieder vienai un tai pašai aplocei vai vienai un tai pašai taisnei.*



13. zīm.

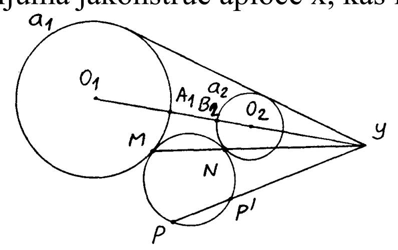
4.teorēma. *Ja aploces a_1 un a_2 abas pieskaras aplocei a ārēji vai abas iekšēji, tad pieskaršanās punktus P, Q savienojošā taisne iet caur a_1, a_2 ārējo līdzības centru Y. Ja viena no aplocēm pieskaras iekšēji, otra ārēji, tad PQ iet caur a_1, a_2 iekšējo līdzības centru X.*

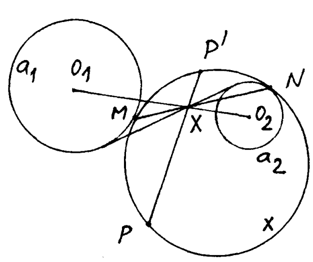
Pierādījums. Ja a_1, a_2 pieskaras aplocei a ārēji, tad ievērojot, ka *13.zīmējumā* leņķi pie virsotnēm P, Q, R ir vienlīdzīgi, secina, ka $O_1P \parallel O_2R$.

Tādēļ pēc 1.teorēmas taisne PQR iet caur ārējo līdzības centru. Līdzīgi pierāda teorēmu pārējos gadījumos.

10.§ Problēmas IX speciālais gadījums

Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas iet caur punktu P un pieskaras aplocēm a_1, a_2.



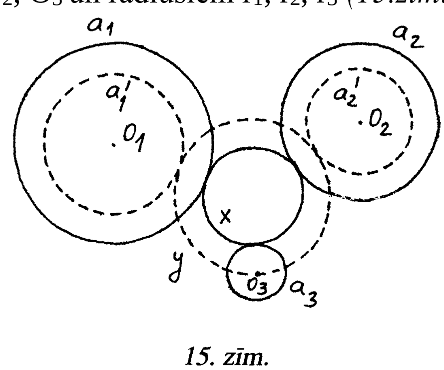


14ᵃ. zīm. *14ᵇ. zīm.*

Ja a_1, a_2 pieskaras aplocei x ārēji punktos M, N, tad pēc iepriekšējās teorēmas taisne MN iet caur a_1, a_2 ārējo līdzības centru Y. Ar P' apzīmējot taisnes PY un aploces x krustpunktu, ir $YP \cdot YP' = YM \cdot YN$. ***(6)*** Izvēloties patvaļīgi antihomologus punktus A_1, B_2 (piemēram, punktus uz centru līnijas O_1O_2) pēc ***(5)*** ir $YM \cdot YN = YA_1 \cdot YB_2$ un, ievērojot ***(6)***, $YP \cdot YP' = YA_1 \cdot YB_2$. Tādēļ aploce b, kas vilkta caur punktiem P, A_1, B_2, iet arī caur punktu P'. Noteicot šīs aploces un taisnes PY krustpunktus P', P'', problēmu reducē uz $V(P,P',a_1)$, kas dod divus atrisinājumus *(14a. zīm.).* Divus citus atrisinājumus dabū, izpildot līdzīgas konstrukcijas *zīmējumā 14b.*

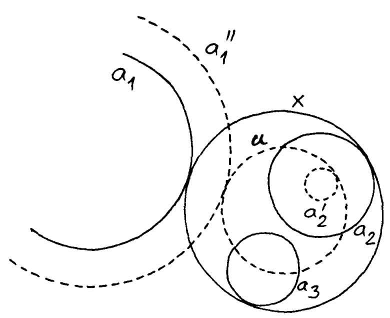
11.§ Problēmas X speciālais gadījums

Šinī gadījumā jākonstruē aploce x, kas pieskaras trim dotajām aplocēm a_1, a_2, a_3 ar centriem O_1, O_2, O_3 un rādiusiem r_1, r_2, r_3 *(15.zīm.).*



15. zīm.

Pieņemam, ka $r_3 < r_2 \leq r_1$. Ar 10.§ metodi konstruējam aploci y, kas iet caur punktu O_3 un pieskaras aplocēm a'_1 (centrs O_1, rādiuss $r_1 - r_3$), a'_2 (centrs O_2, rādiuss $r_2 - r_3$). y rādiusu samazinot par r_3, dabū x. Vispārīgā gadījumā uzdevumam ir 8 atrisinājumi (vienai aplocei x visas trīs dotās aploces pieskaras ārēji, otrai visas iekšēji, trim aplocēm x viena no dotajām aplocēm pieskaras iekšēji, divas ārēji un vēl trim x divas no dotajām aplocēm pieskaras iekšēji, trešā ārēji), no kuriem aprakstītā konstrukcija dod četrus.



16. zīm.

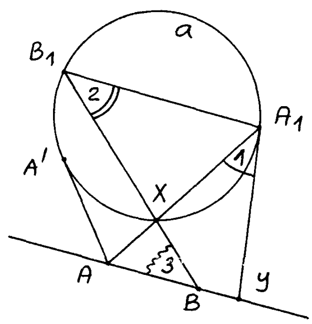
Atlikušos četrus dabū, velkot aploci u, kas iet caur punktu O_3 un pieskaras aplocēm a'_2 un a''_1 (centrs O_1, rādiuss $r_1 + r_3$). Palielinot u rādiusu par r_3, dabū x *(16.zīm.).* Liekas, ka pats Apolonijs savu pieskaršanās problēmu ir atrisinājis citādā ceļā.

Aleksandrijas Papus, kas dzīvoja ap 350g., ir atstājis 8 grāmatas (no tām pirmā un daļa otrās ir pazudušas), kurās apskatīti tā laika ievērojamāko matemātisko darbu īsi kopsavilkumi un lemmas, kas atvieglo šo darbu studēšanu. Pēc šiem materiāliem vēlākos gadsimtos mēģināja veco autoru zudušos darbus restaurēt.

Pirms apskatām varbūtējo Apolonija atrisinājumu, iepriekš apskatīsim divas Papus problēmas.

12.§ Papus pirmā problēma

Jāatrod dotās aploces a tāds punkts X, ka caur to un dotiem punktiem A, B vilktu hordu galu punktus A_1, B_1 savienojošā taisne būtu paralēla AB.



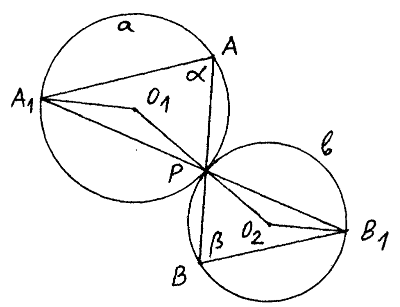
17. zīm.

Papus atrisinājums: Ja Y ir *17.zīm.* punktā A_1 vilktās a pieskares krustpunkts ar taisni AB, tad $\angle 1 = \angle 2$ (jo tie abi mērojami ar loka XA_1 pusi). $\angle 2 = \angle 3$ (jo $AB \| A_1B_1$), kādēļ $\angle 3 = \angle 1$ un četrstūra A_1XBY divu pretīmguļošo leņķu A_1, B summa ir 180°. Tādēļ ap četrstūri var apvilkt aploci un pēc sekantes īpašības $AX \cdot AA_1 = AB \cdot AY$. ***(7)***

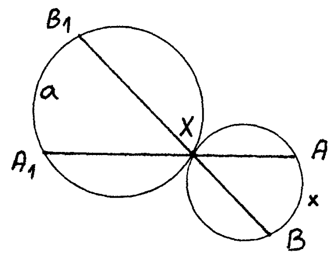
No punkta A velk a pieskari AA'; tad $AA'^2 = AX \cdot AA_1$. No šejienes un ***(7)*** $AA'^2 = AB \cdot AY$.

Ar šo formulu punktu Y var konstruēt. Velkot no tā a pieskares, dabū divus pieskaršanās punktus A_1. Savienojot tos ar A, dabū divus punktus X. Tātad problēmai ir divi atrisinājumi.

Lemma. *Caur divu aploču a, b pieskaršanās punktu P vilktu staru galapunktus savienojošās hordas AA_1, BB_1 ir paralēlas.*



18. zīm.



19. zīm.

Vispirms pierāda, ka *18.zīmējumā* (kur O_1, O_2 ir aploču centri) trijstūru PO_1A_1, PO_2B_1 leņķi ir attiecīgi vienlīdzīgi. No šejienes seko, ka arī leņķis α (kā leņķa PO_1A_1 puse) vienlīdzīgs leņķim β, kādēļ hordas AA_1, BB_1 paralēlas. Apolonija problēmas speciālo gadījumu V, kur jāvelk aploce x, kas iet caur dotiem punktiem A, B un pieskaras dotai aplocei a, var reducēt uz Papus pirmās problēmas atrisināšanu (ko lieto arī Vjets): Ja X ir x un a pieskaršanās punkts *(19.zīm.),* A_1 un B_1 ir staru AX, BX krustpunkti ar aploci a, tad pēc iepriekšējās lemmas $A_1B_1 \| AB$ un punktu X dabū ar Papus pirmās problēmas konstrukciju.

Šeit apskatītie jautājumi izteikti Papus 105. -108.lemmās.

13.§ Papus otrā problēma

Dotajā aplocē a jāievelk trijstūris MNP tā, lai tā malu pagarinājumi ietu katrs caur vienu no dotiem punktiem A, B, C, kas pieder taisnei t (šī ir Papus 117.1emma).

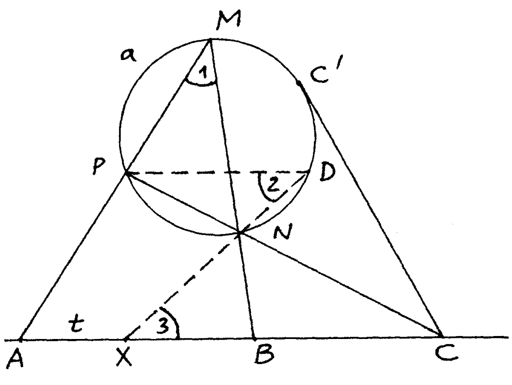
Atrisinājums. Velkot *20.zīmējumā* PD || t, savienojot D ar N un pagarinot dabū taisnes t punktu X un vienlīdzīgus leņķus $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Tādēļ četrstūra AMNX divu pretīmgulošo leņķu (pie virsotnēm M un X) summa ir 180°, ap četrstūri AMNX var apvilkt aploci un pēc sekantes īpašības $CP \cdot CN = CA \cdot CX$ ***(8)***

No punkta C velk a pieskari CC', tad

$$CC'^2 = CP \cdot CN.$$

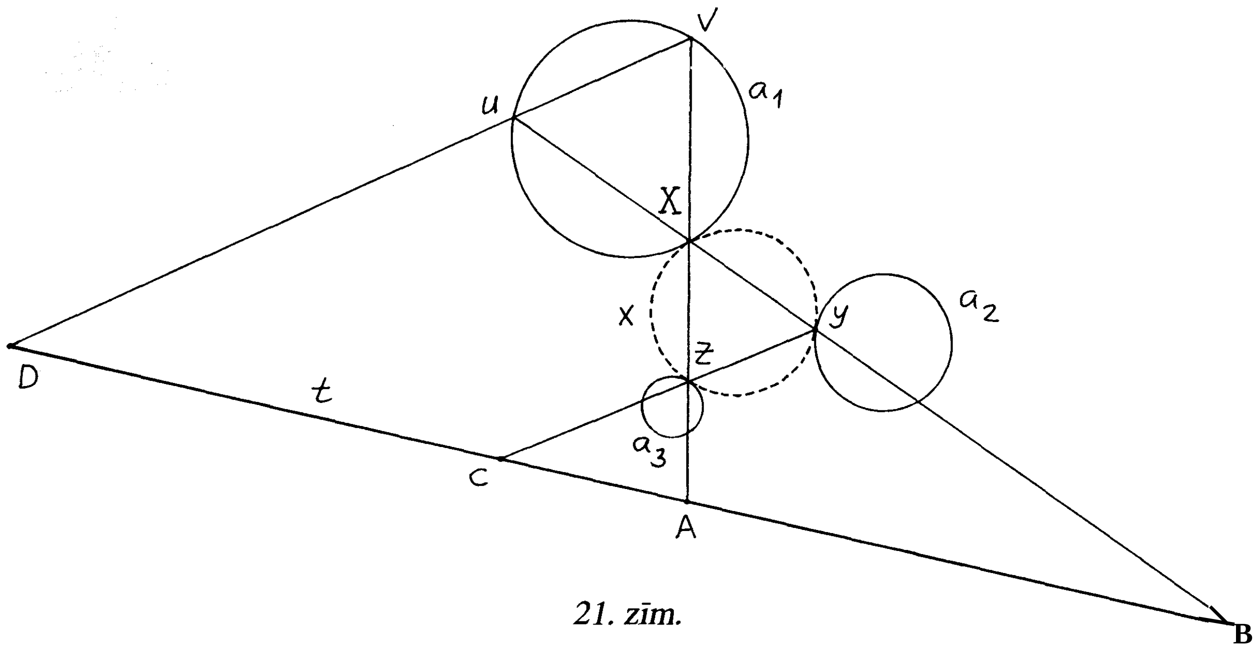
No šejienes un ***(8)*** $CC'^2 = CA \cdot CX$.

Ar šo formulu konstruē punktu X un, lietojot Papus pirmās problēmas metodi, noteic punktu N, ko savienojot ar B, C, atrod meklējamā trijstūra pārējās virsotnes P, M.



20. zīm.

Ir patērēts daudz pūļu, lai noskaidrotu, kā Papus problēmas izlietojamas Apolonija problēmas vispārīgā gadījuma atrisināšanai. 1734.g. angļu ģeometrs R.Simpsons atrada, ka, iepriekš atrisinot Apolonija problēmu IX(a,a,P), ar Papus otrās problēmas palīdzību var arī atrisināt X(a,a,a). Laikā no 1750. līdz 1850.g., izdarot daudzus vēsturiskus pētījumus, noskaidrojās, ka Apolonija metode būs bijusi citādāka, jo Papus grāmatā ir citāds problēmu sakārtojums (pati Apolonija problēma tur atrisināta tikai speciālā gadījumā, kad dotās trīs aploces savstarpēji pieskaras).



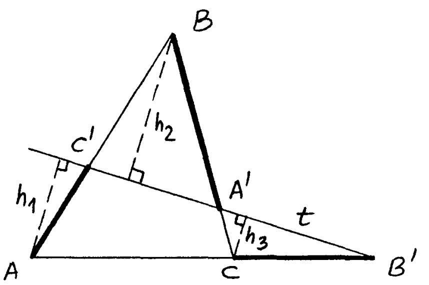
21. zīm.

1890.g. itāļu autors Skorca (Skorza) deva ļoti ticamu Apolonija metodes rekonstrukciju, ko te apskatīsim. Pieņemsim, ka x ir meklējamā aploce, kas pieskaras dotajām aplocēm a_1, a_2, a_3 punktos X, Y, Z *(21.zīm.)*. Nākošajā paragrāfā pierādīsim, ka aploču a_1, a_2, a_3 visi triji ārējie līdzības centri A, B, C pieder kopējai taisnei t. Pēc 9.§ 4. teorēmas pieskaršanās punktus X, Y, Z savienojošās taisnes iet caur līdzības centriem A, B, C un to pagarinājumi dod aplocē a_1 ievilktu trijstūri XUV. Ar D apzīmējam malas UV un taisnes t krustpunktu. Pēc iepriekšējā paragrāfa lemmas trijstūri BYC un BUD ir līdzīgi, kādēļ $BU:BY=BD:BC$ ***(9)***

Ievērojot, ka Y un U ir homologi punkti, ar r_1, r_2 apzīmējot a_1, a_2 rādiusus, pēc 9.§ der vienlīdzība BU:BY = $r_1:r_2$. No šejienes un ***(9)*** BD:BC = $r_1:r_2$

Ar šo formulu konstruē punktu D, pēc tam, atrisinot Papus otro problēmu, aplocē a_1 ievelk trijstūri UVX, pagarinot tā malas, atrod punktus Y, Z un velk aploci x caur punktiem X, Y, Z. Ievērojot, ka arī aploču a_1, a_2, a_3 ik divi iekšējie un viens ārējais līdzības centrs pieder kopējai taisnei, ar šo metodi var konstruēt Apolonija problēmas X(a,a,a) visus 8 atrisinājumus. Pirms pārejam pie 19.gs. autoru metodēm Apolonija problēmas atrisināšanā, iepriekš apskatīsim Menelaja teorēmu (Menelajs dzīvoja Aleksandrijā ap l00.g. un rakstīja par sfēriskiem trijstūriem).

14.§ Menelaja teorēma. Triju aploču līdzības asis



22. zīm.

Menelaja teorēma. *Ja taisne t šķeļ trijstūra ABC malas vai malu pagarinājumus punktos A', B', C', tad no dabūtiem 6 nogriežņiem to triju reizinājums, kam nav kopīgu galu punktu, ir pastāvīgs. Ja ievēro arī nogriežņu virzienu, tad AC'·BA'·CB'=-C'B·A'C·B'A.* ***(10)***

Pierādījums. Ja h_1, h_2, h_3 ir perpendikulu garumi, kas vilkti no A, B, C uz t *(22.zīm.),* tad no līdzīgiem trijstūriem

AC':C'B = $h_1:h_2$, BA':A'C = $h_2:h_3$, CB':B'A = $h_3:h_1$.

Šīs proporcijas sareizinot, dabū ***(10)***. (Agrākos gadsimtos ***(10)*** formulu sauca par Ptolomeja teorēmu. Šals (M.Chasles) 1837.g. pierādīja, ka tā pieder Menelajam.)

Apgrieztā teorēma. *Ja no A', B', C' divi punkti pieder trijstūra ABC malām un trešais - malas pagarinājumam vai arī visi trīs punkti pieder malu pagarinājumiem un der* ***(10)***, *tad punkti A', B', C' pieder vienai un tai pašai taisnei.*

Pierādījums. Ja punktus A', B' savienojošā taisne t krusto malu AB (vai tās pagarinājumu) punktā C'', tad pēc iepriekšējās teorēmas AC''·BA'·CB' = - C''B·A'C·B'A. No šejienes un ***(10)*** AC'':C''B = AC':C'B, kādēļ punkti C' un C'' sakrīt.

Sekas. *Triju aploču a_1, a_2, a_3 ārējie līdzības centri A', B', C' pieder vienai un tai pašai taisnei. Arī ik divi iekšējie ar vienu ārējo līdzības centru pieder kopējai taisnei. Šīs taisnes sauc par aploču a_1, a_2, a_3 līdzības asīm.*

Pierādījums. Ja A, B, C ir aploču a_1, a_2, a_3 centri un r_1, r_2, r_3 - rādiusi, tad pēc ***(2)*** ir :

AB':B'C = - $r_1:r_3$, CA':A'B = - $r_3:r_2$, BC':C'A = - $r_2:r_1$.

Līdz ar to der ***(10)*** un seko, ka ārējie līdzības centri A', B', C' pieder vienai taisnei. Pārējos gadījumos pierādījums līdzīgs.

15.§ Aploču potenclīnija

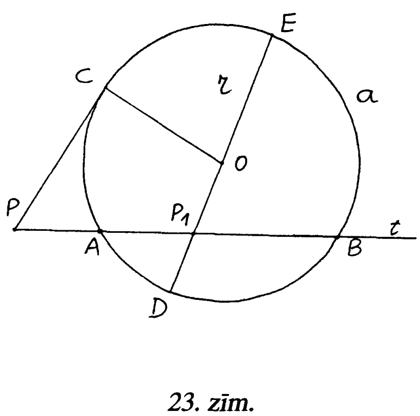
1.definīcija. *Par punkta P potenci attiecībā uz aploci a ar centru O un rādiusu r sauc starpību $p=PO^2-r^2$,* ***(11)*** *kas ir >0, <0 vai =0 atkarīgi no tā, vai punkts P atrodas ārpus aploces, iekšpus tās, vai pieder aplocei.*

Ja caur P vilktas patvaļīgas taisnes t krustpunkti ar a ir A, B un PC ir a pieskare (kad P ārpus a), tad pēc ***(11)*** $p=PC^2$ ***(12)*** un līdz ar to p=PA·PB ***(13)***

Pēdējā vienlīdzība der arī gadījumā, kad P = P_1 atrodas iekšpus a, jo tad pēc hordu īpašības un ***(11)*** *23.zīmējumā* ir

$P_1A \cdot P_1B = P_1D \cdot P_1E = (P_1O - r)(P_1O + r) = P_1O^2 - r^2 = p.$

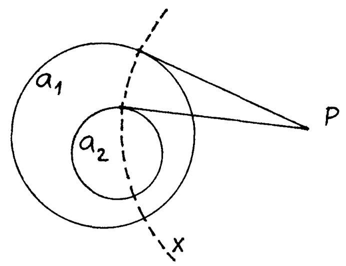
Šteiners (J.Steiner) punkta P potenci definē ar ***(13)***.



23. zīm.

2.definīcija. *Par divu apločų a_1, a_2 potenclīniju sauc visu to punktu P ģeometrisko vietu, kam attiecībā uz a_1, a_2 ir vienādas potences.*

Potenclīnija ir Šteinera apzīmējums. Plikers (J.Plücker) to sauc par hordali. Gotjē definē apločų a_1, a_2 radikālo asi kā visu to punktu P ģeometrisko vietu, no kuriem vilkto pieskaru pret a_1, a_2 garumi ir vienlīdzīgi. Caur pieskaršanās punktiem vilkta aploce ar centru P krusto a_1 un a_2 ortogonāli *(24.zīm.)*. Pēc ***(12)*** apločų a_1, a_2 radikālā ass sakrīt ar šo apločų potenclīniju (ja aploces nekrustojas) vai potenclīnijas daļu, kas atrodas ārpus aplocēm.

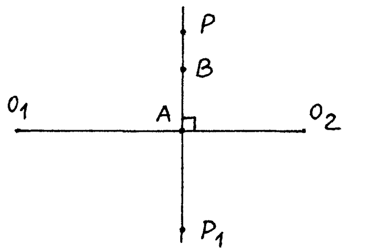


24. zīm.

1.teorēma. *Apločų a_1, a_2 potenclīnija ir centru līnijai O_1O_2 perpendikulāra taisne.*

Pierādījums. Ja punkts P pieder a_1, a_2 potenclīnijai un r_1, r_2 ir apločų rādiusi, tad pēc ***(11)*** $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$ ***(14)***

Potenclīnijai pieder arī P simetriskais punkts P_1 attiecībā uz O_1O_2 un arī taisnes PP_1 jebkurš punkts B, jo, ja A ir O_1O_2 un PP_1 krustpunkts *(25.zīm.)*, tad pēc ***(14)*** $O_1A^2+AP^2-r_1^2 = O_2A^2 + AP^2 - r_2^2$ un līdz ar to $O_1A^2- r_1^2 = O_2A^2- r_2^2$.



25. zīm.

Pieskaitot abām pusēm AB^2, dabū vienlīdzību

$BO_1^2 - r_1^2= BO_2^2 - r_2^2$, kas pierāda, ka B ir a_1, a_2 potenclīnijas punkts.

Sekas. *Ja aploces a_1, a_2 krustojas, tad potenclīnija ir taisne, kas satur to kopīgo hordu (jo attiecībā uz abām aplocēm krustpunktu potence ir 0).*

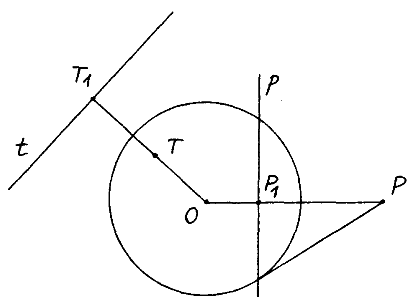
2.teorēma. *Triju apločų, ņemtu ik pa divi, potenclīnijas t_1, t_2, t_3 iet caur kopīgu punktu C, ko sauc par apločų a_1, a_2, a_3 radikālo centru (pieņemam, ka potenclīnijas nav paralēlas - A.A.).*

Pierādījums. Ja a_1, a_2 potenclīnija ir t_1, bet a_1, a_3 potenclīnija t_2 un t_1, t_2 krustojas punktā C, tad punktam C ir viena un tā pati potence attiecībā uz katru aploci a_1, a_2, a_3. Tādēļ arī a_2, a_3 potenclīnija iet caur C.

Sekas. *1) Ja ik divas no trim aplocēm a_1, a_2, a_3 krustojas, tad to kopīgās hordas iet caur radikālo centru.*

2) Ja triju apločų a_1, a_2, a_3 radikālais centrs C atrodas ārpus šīm aplocēm, tad eksistē aploce z, kas ortogonāla visām trim aplocēm (z iet caur pieskaru galu punktiem, kuras vilktas no C pret a_1, a_2, a_3).

16. § Pols un polāre



26. zīm.

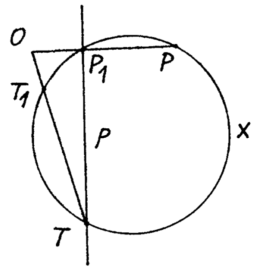
Definīcija. *1) Par punkta P polāri attiecībā uz aploci a (ar centru O un rādiusu r) sauc taisni p, kas perpendikulāra PO un krusto PO punktā P_1 ar $OP{\cdot}OP_1=r^2$* ***(15)*** *(26.zīm.). (Ja punkts P pieder aplocei a, tad P polāre ir a pieskare punktā P.)*

2) Par taisnes t polu attiecībā uz aploci a sauc no O uz t vilktā perpendikula OT_1 punktu T ar $OT{\cdot}OT_1=r^2$.

1.teorēma. *Ja punkts P atrodas ārpus aploces a, tad no P vilktas a pieskares PC pieskaršanās punkts C pieder P polārei p.*

Pierādījums. Ar P_2 apzīmējot C projekciju uz OP un ievērojot, ka taisnleņķa trijstūrī OCP katete OC ir vidējā ģeometriskā starp hipotenūzu OP un savu projekciju uz hipotenūzu, seko vienlīdzība $r^2 = OP_2{\cdot}OP$, no kurienes un ***(15)*** $OP_2 = OP_1$.

Sekas. *Ja aploce z ar centru P krusto aploci a ortogonāli, tad a, z kopīgā horda ir punkta P polāre attiecībā uz aploci a.*



27. zīm.

2.teorēma. *Ja punkts T pieder punkta P polārei p, tad T polāre t (attiecībā uz vienu un to pašu aploci a) iet caur P.*

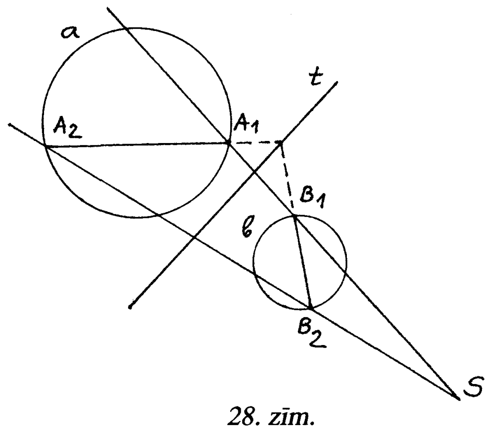
Pierādījums. Ja O ir aploces a centrs, r - rādiuss, T_1 ir OT punkts ar $OT_1 \cdot OT = r^2$, tad ievērojot ***(15)*** ir $OT_1 \cdot OT = OP_1 \cdot OP$. Tādēļ punkti T, T_1, P_1, P pieder vienai un tai pašai aplocei x *(27.zīm.)*. Tā kā TP_1P ir taisns leņķis, tad tāds ir arī leņķis TT_1P (šie leņķi balstās uz x vienu un to pašu loku), un pēc 2.definīcijas T_1P ir punkta T polāre.

17. § Antihomologās hordas

Definīcija. *Ja A_1, A_2 ir aploces a punkti un B_1, B_2 tiem antihomologie aploces b punkti (9.§), tad A_1A_2 un B_1B_2 sauc par antihomologām hordām (28.zīm.).*

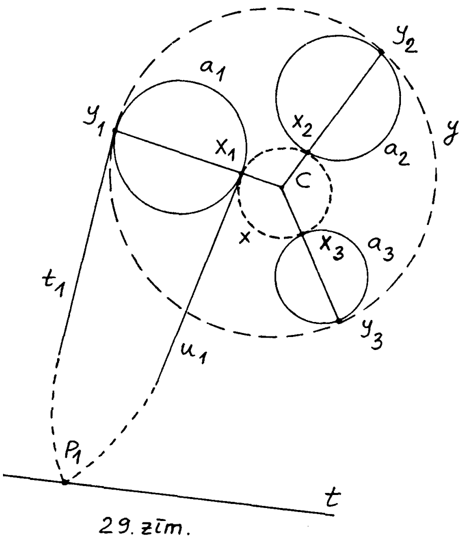
Teorēma. *Aploču a, b antihomologās hordas krustojas uz šo aploču potenclīnijas.*

Pierādījums. Pēc 9.§ 3.teorēmas punkti A_1, B_1, A_2, B_2 pieder vienai un tai pašai aplocei x. Pēc 15.§ A_1A_2 ir x, a potenclīnija, B_1B_2 ir x, b potenclīnija un visas trīs potenclīnijas krustojas vienā punktā.



28. zīm.

18.§ Apolonija problēmas Žergona atrisinājums



29. zīm.

Pieņemsim, ka dotās aploces a_1, a_2, a_3 meklējamai aplocei x pieskaras ārēji, aplocei y iekšēji un pieskaršanās punkti ir X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 *(29.zīm.)*. Pēc 9.§ Y_1 ir a_1, y ārējais līdzības centrs un X_1 ir a_1, x iekšējais līdzības centrs. Pēc 14.§ x, y iekšējais līdzības centrs C pieder taisnei X_1Y_1. Līdzīgā kārtā C pieder arī taisnēm X_2Y_2, X_3Y_3.

Pēc 9.§ 4.teorēmas X_1, X_2, kā arī Y_1, Y_2 ir aploču a_1, a_2 antihomologu punktu pāri, kādēļ X_1Y_1 un X_2Y_2 ir antihomologas hordas, kas pēc iepriekšējā § krustojas uz a_1, a_2 potenclīnijas.

Tātad punkts C pieder aploču a_1, a_2 potenclīnijai. Līdzīgā kārtā punkts C pieder arī a_2, a_3 un a_1, a_3 potenclīnijām un tātad sakrīt ar aploču a_1, a_2, a_3 radikālo centru (15.§); X_1, Y_1 un X_2, Y_2 ir x, y antihomologu punktu pāri, kādēļ pēc iepriekšējā § hordu X_1X_2, Y_1Y_2 krustpunkts pieder x, y potenclīnijai t.

Pēc 9.§ X_1X_2 un Y_1Y_2 krustojas a_1, a_2 ārējā līdzības centrā, kas tātad pieder taisnei t. Pēdējai pēc analoģijas pieder arī a_2, a_3, resp. a_1, a_3 ārējie līdzības centri. Tātad x, y potenclīnija t sakrīt ar a_1, a_2, a_3 līdzības asi, ko noteic ārējie līdzības centri (14.§).

Aploču a_1, y potenclīnija t_1 ir viņu kopīgā pieskare punktā Y_1 un aploču a_1, x potenclīnija u_1 ir viņu kopīgā pieskare punktā X_1.

Pēc 15.§ 2.teorēmas taisnes t, t_1, u_1 krustojas punktā P_1 (kas ir x, y, a_1 radikālais centrs). Pēc 16.§ taisne X_1Y_1 ir punkta P_1 polāre attiecībā uz aploci a_1 un taisnes t polam T_1 (attiecībā uz a_1) jāpieder nogrieznim X_1Y_1

No šejienes seko priekšraksts apločų x, y konstruēšanai:

1) jākonstruē punkts C kā a_1, a_2, a_3 radikālais centrs;

2) jākonstruē taisne t kā a_1, a_2, a_3 ārējo līdzības centru ass;

3) jākonstruē taisnes t poli T_1, T_2, T_3 attiecībā uz a_1, a_2, a_3;

4) jānoteic taišņu T_1C, T_2C, T_3C un apločų a_1, a_2, a_3 krustpunkti X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3;

5) jāvelk aploce x caur punktiem X_1, X_2, X_3 un aploce y caur punktiem Y_1,Y_2, Y_3.

Līdzīgā kārtā izlietojot a_1, a_2, a_3 pārējās trīs līdzības asis, konstruē Apolonija problēmas X(a,a,a) pārējos atrisinājumu pārus. Problēmas pārējos gadījumus I - IX dabū, specializējot šo vispārīgo gadījumu (t.i., uzskatot punktus un taisnes kā apločų speciālus gadījumus).

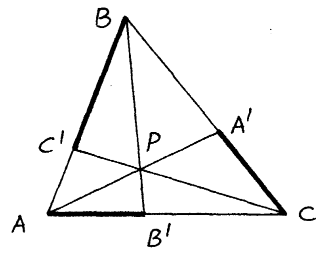
19. § Gotjē atrisinājums

Gotjē metode izlieto to apstākli, ka punkti Y_1, X_1, C *(29.zīm.)* pieder vienai taisnei, kādēļ attiecībā uz aploci a_1 punktu X_1 un Y_1 polāres (kas ir a_1 pieskares punktos X_1, Y_1) krustojas ar C polāri kopīgā punktā P_1, kas pieder a_1, a_2, a_3 līdzības asij t. C polāres noteikšanai izdevīgi lietot a_1, a_2, a_3 ortogonālaploci z (15.§). Pēdējās un a_1, a_2, a_3 kopīgās hordas (kas pēc 16.§ ir ortogonālaploces centra C polāres attiecībā uz a_1, a_2, a_3) krusto taisni t punktos P_1, P_2, P_3) no kuriem vilkto a_1, a_2, a_3 pieskaru pieskaršanās punkti ir X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3.

II. TRANSVERSĀLES

20.§ Čeva teorēma

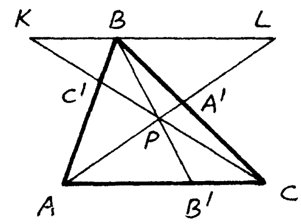
(G.Ceva) teorēma. *Ja punktu P ar trjstūra ABC virsotnēm savienojošās taisnes krustojas ar trijstūra malām vai to pagarinājumiem punktos A', B', C' (30.zīm.), tad no trijstūra malu 6 nogriežņiem to triju reizinājums, kam nav kopīgu galu punktu, ir pastāvīgs:* $AC'{\cdot}BA'{\cdot}CB'=C'B{\cdot}A'C{\cdot}B'A$ ***(16)***



30. zīm.

(Līdz pagājušā gadsimta vidum šo teorēmu, ko publicējis Čeva 1678.g., sauca par Bernulli (Bernoulli) teorēmu. 14.§ apskatītā Menelaja teorēma ar Čeva teorēmu ir duālas. Tās dabū vienu no otras, mainot punkta un taisnes lomas).

Pierādījumi. I. Pēc Menelaja teorēmas trijstūrim ABB' un taisnei CC', kā arī trijstūrim BB'C un taisnei AA' der vienlīdzības $AC'{\cdot}BP{\cdot}B'C = -\ C'B{\cdot}PB'{\cdot}CA$, $A'B{\cdot}PB'{\cdot}AC = -\ CA'{\cdot}BP{\cdot}B'A$, kuras sareizinot dabū ***(16).***



31. zīm.

II. Velkot taisni KL || AC, dabū līdzīgu trijstūru pārus BKP, B'CP un APB', LPB *(31.zīm.),* kādēļ $CB':B'A = KB:BL$. Trijstūru KBC', ACC' līdzības dēļ $AC':C'B=AC:KB$, un no trijstūriem BLA', ACA' izteic $BA':A'C = BL:AC$.

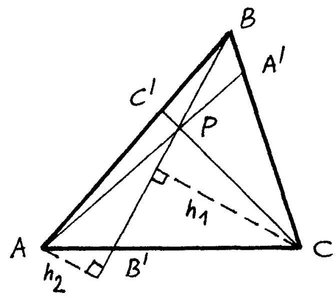
Šīs proporcijas sareizinot un saīsinot, dabū ***(16).***

III. Ja diviem trijstūriem ir kopīgs pamats, tad to laukumi attiecas tāpat kā augstumi. Tādēļ, ar L(ABC) apzīmējot trijstūra ABC laukumu, *32.zīmējumā* ir $L(CPB):L(APB) = h_1:h_2 = CB':B'A$,

$L(APB):L(APC) = BA':A'C$, $L(APC):L(BPC) = AC':C'B$.

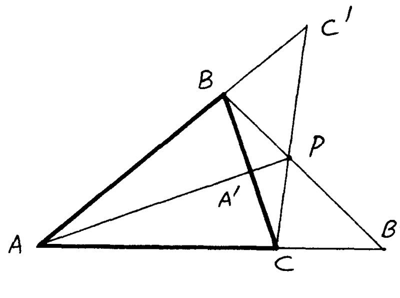
Šīs vienlīdzības sareizinot un saīsinot, dabū ***(16).***

Ja punkts P atrodas ārpus trijstūra ABC *(33.zīm.),* tad pierādījums līdzīgs.



32. zīm.

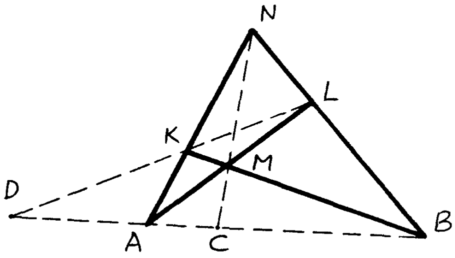
Apgrieztā teorēma. *Ja punkti A', B', C' visi trīs pieder trijstūra malām (kā 30.zīm.) vai viens pieder malai un divi malu pagarinājumiem (kā 33.zīm.) un der* ***(16)****, tad punktus A, A'; B, B'; C, C' savienojošās taisnes krustojas kopīgā punktā P.*



33. zīm.

Pierādījums. Pieņem, ka taišņu AA', BB' krustpunktu P un trijstūra virsotni C savienojošā taisne CP krusto malu AB vai tās pagarinājumu punktā C''. Lietojot tiešo teorēmu, pierāda, ka C'' sakrīt ar C'. Turpmākajos paragrāfos (21. - 24.) sekos Čeva un Menelaja teorēmu izlietošanas piemēri.

21.§ Pilnīgais četrmalis un četru punktu anharmoniskā attiecība



34. zīm.

Definīcija. *Pilnīgais četrmalis ir figūra, ko veido četras taisnes, ja trīs no viņām neiet caur kopīgu punktu. Pilnajam četrmalim ir 4 malas, 6 virsotnes (34. zīm. A, B, K, L, M, N), trīs diagonāles (AB, KL, MN).*

1.teorēma. *Ja C, D ir punkti, kuros pilnīgā četrmaļa diagonāli AB krusto pārējās divas diagonāles, tad punktu A, B, C, D anharmoniskā attiecība*

$$(A, B, C, D) = (AC:CB):(AD:DB) = -1 \quad \textbf{(17)}$$

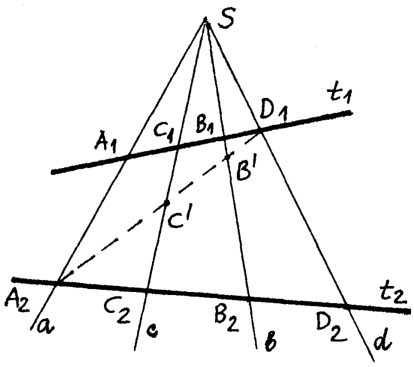
(šinī gadījumā saka, ka punkti C, D punktus A, B sadala harmoniski; arī saka, ka D ir punktu A, B, C ceturtais harmoniskais punkts).

Pierādījums. Pēc Čeva teorēmas trijstūrī ABN ir AC·BL·NK = CB·LN·KA.

Tā kā taisne DL šķeļ trijstūri ABN, pēc Menelaja teorēmas (14.§) ir

$$NL\cdot BD\cdot AK = -LB\cdot DA\cdot KN.$$

Sareizinot ar iepriekšējo vienlīdzību un saīsinot, pierāda ***(17)***.



35. zīm.

2.teorēma. *Ja A_1, C_1, B_1, D_1 un A_2, C_2, B_2, D_2 ir punkti, kuros patvaļīgas taisnes t_1, t_2 krusto caur kopīgu punktu S ejošas taisnes a, b, c, d, tad*

$$(A_1, C_1, B_1, D_1)=(A_2, C_2, B_2, D_2) \quad \textbf{(18)}$$

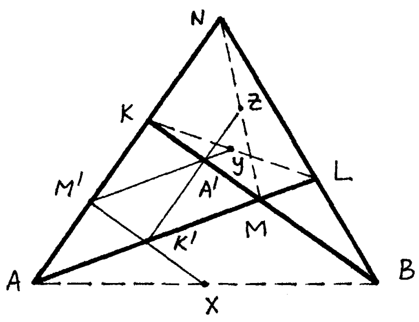
Pierādījums. Ar C', B' apzīmējam taisnes A_2D_1 krustpunktus ar c, b *(35.zīm.).* Pēc Menelaja teorēmas trijstūrim A_2B_2B' un taisnēm c, d der vienlīdzības

$$A_2C'\cdot B'S\cdot B_2C_2 = -C'B'\cdot SB_2\cdot C_2A_2,$$

$$D_1B'\cdot SB_2\cdot D_2A_2 = -A_2D_1\cdot B'S\cdot B_2D_2,$$

kuras sareizinot pierāda, ka $(A_2, B_2, C_2, D_2) = (A_2, B', C', D_1)$.

Līdzīgi pierāda, ka $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B', C', D_1)$ un secina ***(18)***.



36. zīm.

3.teorēma *Pilnīgā četrmaļa diagonāļu viduspunkti X, Y, Z (36.zīm.) pieder vienai taisnei.* (Daži autori XYZ sauc par Gausa taisni. Šteiners bez pietiekoša pamata to sauca Ņūtona vārdā.)

Pierādījums. Ar A', K', M' apzīmējam trijstūra AKM malu viduspunktus. M', A', Y kā nogriežņu AK, MK, LK viduspunkti atrodas uz kopīgas taisnes. Līdzīgā kārtā arī K', A', Z pieder taisnei un tāpat M', K', X. Tātad punkti X, Y, Z pieder trijstūra A'K'M' malu pagarinājumiem un tādēļ pēc Menelaja apgrieztās teorēmas (14.§) viņu piederība vienai taisnei līdzvērtīga ar nosacījumu

$$M'X\cdot K'Z\cdot A'Y = -XK'\cdot ZA'\cdot YM'. \quad \textbf{(19)}$$

Pēc Menelaja tiešās teorēmas trijstūrim AKM un taisnei NB der vienlīdzība

$$AN\cdot KB\cdot ML = -NK\cdot BM\cdot LA.$$

Te liekot AN = 2·K'Z, KB = 2·M'X, ... un saīsinot ar 8, dabū ***(19).***

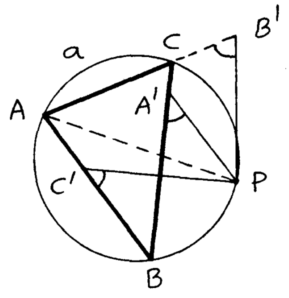
22.§ Simsona teorēma

Teorēma. *Ja no trijstūrim ABC apvilktās aploces a jebkura punkta P vilkti nogriežņi, kas* ar *trijstūra malām veido vienu un to pašu leņķi (precīzāk: kas, pagriezti ap punktu P pozitīvā virzienā par leņķi α, top paralēli trijstūra malām), tad šo nogriežņu galu punkti A', B', C' pieder vienai taisnei.*

(Šīs teorēmas speciālo gadījumu, kad α - taisns leņķis, Žergons nosaucis Simsona vārdā. Īstenībā to pierādījis jau agrāk Volless (Wallace, 1798.g.))

Pierādījums. Pēc Menelaja apgrieztās teorēmas (14.§) pietiek pierādīt, ka *37.zīmējumā* AC'·BA'·CB' = - C'B·A'C·B'A ***(20)***

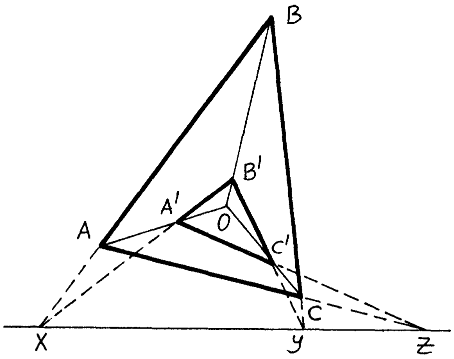
Trijstūru pāri PAB', PBA'; PBC', PCB'; PCA', PAC' ir līdzīgi, jo tiem ir divi attiecīgi vienlīdzīgi leņķi.
Proporcijas A'B:B'A = BP:AP, B'C:C'B = CP:BP, AC':CA' = PA:PC sareizinot un saīsinot, dabū ***(20)***.



37. zīm.

23.§ Dezarga teorēma(G.Desargues)

Teorēma. *Ja divu trijstūru virsotnes savienojošās taisnes krustojas vienā punktā (jeb tie ir perspektīvi trijstūri), tad trijstūru atbilstošo malu krustpunkti pieder vienai taisnei. Der arī apgrieztā teorēma.*



38. zīm.

Pierādījums. *38.zīmējumā* pēc Menelaja teorēmas trijstūriem AOB, COA, BOC un transversālēm A'B', C'A', B'C' ir

OB'·BX·AA' = - B'B·XA·A'O,
OA'·AZ·CC' = - A'A·ZC·C'O,
OC'·CY·BB' = - C'C·YB·B'O.

No šejienes AZ·CY·BX = - ZC·YB·XA un pēc Menelaja apgrieztās teorēmas punkti X, Y, Z pieder vienai taisnei. Dezarga apgriezto teorēmu var pierādīt pieņemot pretējo; tad, lietojot tiešo teorēmu, dabū pretrunu.

24.§ Paskāla teorēma (B.Pascal)

Teorēma. Aplocē ievilkta 6-stūra pretējo malu krustpunkti pieder vienai taisnei t; to sauc par dotā 6 - stūra Paskāla taisni.

Pierādījums. Trijstūrim ABC un transversālēm LZ, PY, QX (39.zīm.) pēc Menelaja teorēmas ir

AM·CZ·BL= -MC·ZB·LA,
AN·CP·BY= - NC·PB·YA,
CQ·BK·AX = - QB·KA·XC.

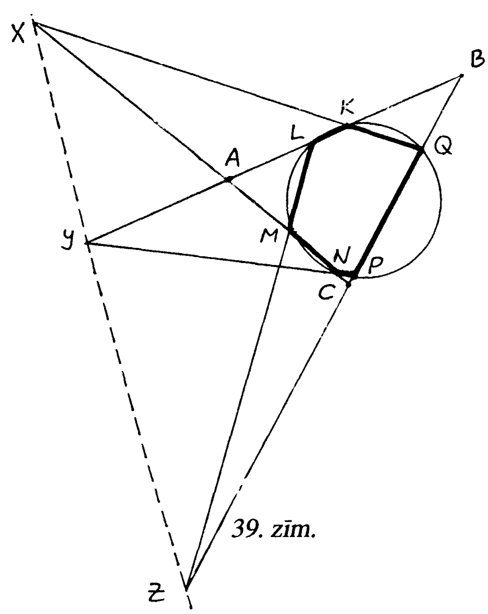
Pēc sekantes īpašības

LA·KA = AM·AN, NC·MC = CP·CQ, QB·PB = BK·BL.

Šīs vienlīdzības sareizinot un saīsinot, dabū vienlīdzību BY·AX·CZ = - YA·XC·ZB, kas teorēmu pierāda.

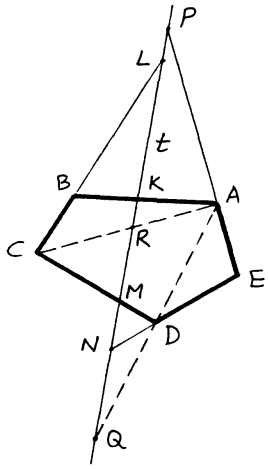
39.zīmējumu projicējot pierāda, ka Paskāla teorēma der jebkuram 6-stūrim, kas ievilkts otrās pakāpes līknē.

Turpmākos paragrāfos (25. - 27.) apskatīsim Menelaja un Čeva teorēmu vispārinājumus.



39. zīm.

25.§ Karno teorēma



40. zīm.

(L.N.M.Carnot) teorēma. *Ja taisne t, krustojoties ar n- stūra malām (vai to pagarinājumiem), tās sadala 2n nogriežņos, tad to n nogriežņu reizinājumi, kam nav kopīgu gala punktu, ir absolūti (pēc absolūtās vērtības -A.A.) vienlīdzīgi. Ar n > 3 Karno apgrieztā teorēma neder.*

Pierādījums. No n - stūra virsotnēm uz taisni t novelk perpendikulus, uzraksta līdzīgo trjstūru malu proporcijas, tās sareizina un saīsina (kā 14.§). Lietojot citu metodi, n - stūri ar diagonālēm (kas iet caur kopīgu virsotni) sadala trijstūros un pēdējiem izlieto Menelaja teorēmu. *40.zīmējumā* attēlotā gadījumā ir

$$AK\cdot BL\cdot CR=-KB\cdot LC\cdot RA,\ AR\cdot CM\cdot DQ = - RC\cdot MD\cdot QA,$$

$$DN\cdot EP\cdot AQ = - NE\cdot PA\cdot QD.$$

Šīs vienlīdzības sareizinot un saīsinot, dabū vienlīdzību

$$AK\cdot BL\cdot CM\cdot DN\cdot EP = - KB\cdot LC\cdot MD\cdot NE\cdot PA$$

26.§ Ponselē teorēma

(J.V.Poncelet) teorēma. *Ja taisnes, kas savieno jebkurā n - stūrī (n -nepāru skaitlis) virsotnes ar patvaļīgi izvēlētu punktu O, sadala virsotnei pretīmguļošo malu vai tās pagarinājumu divos nogriežņos, tad to n nogriežņu reizinājums, kam nav kopīgu galapunktu, ir pastāvīgs.*

Pierādījums. Pieņemam, piemēram, n = 5; 41.zīmējumā velkot diagonāles CA, CE, dabūjam trijstūrus COA, COE ar laukumu attiecību L(COA):L(COE) = h_1:h_2=AC':C'E.

Līdzīgā kārtā L(BOE):L(BOD) = EB':B'D,

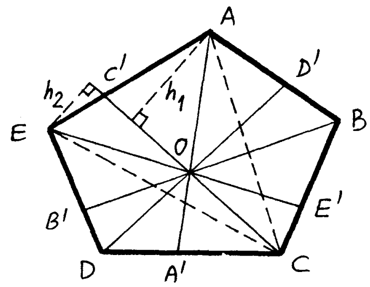
L(AOD):L(AOC) = DA':A'C, L(EOC):L(EOB) = CE':E'B,

L(DOB):L(DOA) = BD':D'A.

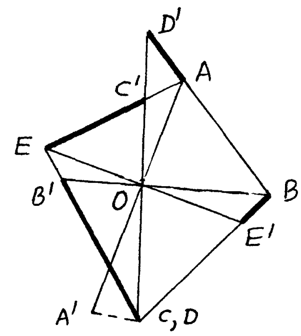
Šīs vienlīdzības sareizinot un saīsinot, dabū rezultātu

AC'·EB'·DA'·CE'·BD' = C'E·B'D·A'C·E'B·D'A. ***(21)***

Dažos gadījumos Ponselē teorēmu var lietot arī tad, ja n ir pāru skaitlis. Piemēram, kad 42.zīmējumā punkti C un D sakrīt un A' atrodas uz CD pagarinājuma, tad DA' = - A'C un no ***(21)*** seko vienlīdzība AC'·EB'·CE'·BD' = C'E·B'D·E'B·D'A, kas der 42.zīmējuma četrstūrim. Ja n pāru skaitlis, tad n - stūrī virsotnei pretimgulošā mala nav noteikta nepārprotami.



41. zīm.



42. zīm.

27.§ Ferari teorēma (1895.g.)

Teorēma. *Ja taisne t_1, kas savieno n - stūra $A_1A_2....A_n$ virsotni A_1 ar patvaļīgu punktu O, sadala n - stūra malas A_sA_{s+1} , $A_{n-s+1}A_{n-s+2}$ divos nogriežņos un taisne t_2, kas savieno virsotni A_2 ar O, sadala malas $A_{s+1}A_{s+2}$, $A_{n-s+2}A_{n-s+3}$ divos nogriežņos, utt., tad to nogriežņu reizinājums, kam nav kopīgu galu punktu, ir pastāvīgs katram pastāvīgam s (1 < s < n-1).*

Pierādījums. Pieņemam, piemēram, n = 4. Tad s = 2 un *43.zīmējumā* ir

$L(A_2OA_1):L(A_1OA_3) = A_2K_1: K_1A_3$

$L(A_2OA_4):L(A_2OA_1)= A_4K_2: K_2A_1$

$L(A_1OA_3):L(A_3OA_2) = A_1K_3: K_3A_2$

$L(A_1OA_4):L(A_4OA_2)= A_1K_4: K_4A_2$

$L(A_1OA_3):L(A_1OA_4) = A_3L_1: L_1A_4$

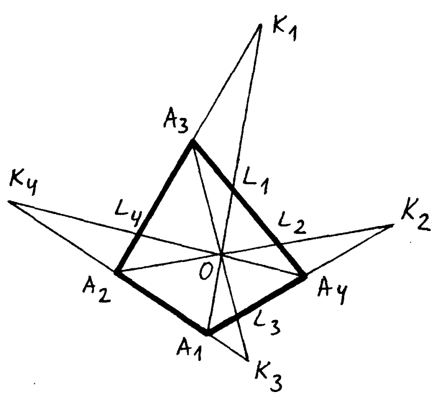
$L(A_3OA_2):L(A_2OA_4)= A_3L_2: L_2A_4$

$L(A_3OA_4):L(A_1OA_3) = A_4L_3: L_3A_1$

$L(A_4OA_2):L(A_3OA_4)= A_2L_4: L_4A_3$.

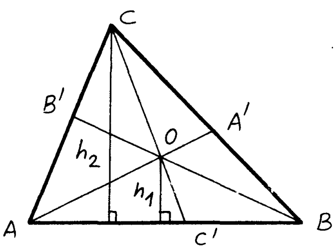
Šīs proporcijas sareizinot un saīsinot, pierāda vienlīdzību

$A_2K_1{\cdot}A_3L_1{\cdot}A_4K_2{\cdot}A_3L_2{\cdot}A_1K_3{\cdot}A_4L_3{\cdot}A_1K_4{\cdot}A_2L_4 =$
$= K_1A_3{\cdot}L_1A_4{\cdot}K_2A_1{\cdot}L_2A_4{\cdot}K_3A_2{\cdot}L_3A_1{\cdot}K_4A_2{\cdot} L_4A_3$



43. zīm.

28.§ Žergona formula



44. zīm.

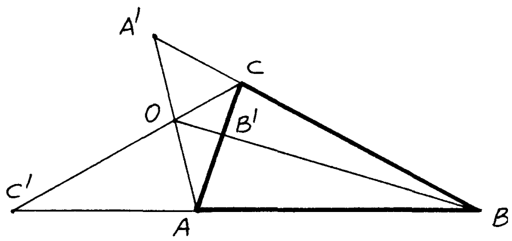
Teorēma. *Ja patvaļīgu punktu O ar trijstūra ABC virsotnēm savienojošie stari krusto pretimgulošās malas vai to pagarinājumus punktos A', B', C', tad OA':AA'+ OB':BB' + OC':CC' = 1* ***(22)*** *(Šo teorēmu Žergons publicēja uzdevuma veidā savā žurnālā "Annales de Mathematiques" 1810.g. Ap 1818. -19.g. parādījās četri atrisinājumi)*

Pierādījums. Ja punkts O atrodas trijstūrī *(44.zīm.),* tad izteic laukumu attiecības $L(OAB):L(CAB) = h_1:h_2 = OC':CC'$

$L(OCA):L(BCA) = OB':BB'$,

$L(OBC):L(ABC) = OA':AA'$.

Tās saskaitot, dabū ***(22)***. Šīs attiecības der arī tad, ja punkts O atrodas ārpus trijstūra ABC kā *45.zīmējumā.*



45. zīm.

Tad attiecība

$OB':BB' = L(OCA):L(BCA)$

ir negatīva un ***(22)*** dabū, izteicot

$L(OAB) = L(ABB') + L(B'OA)$,

$L(OBC) = L(B'BC) + L(B'CO)$

un ievērojot, ka $L(OCA) + L(B'OA) + L(B'CO) = 0$.

29.§ Šteinera teorēma

Teorēma. *Ja no patvaļīga punkta O uz trijstūra malām vilkti perpendikuli sadala malas (vai to pagarinājumus) 6 nogriežņos a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, tad to triju nogriežņu kvadrātu summa, kam nav kopīgu galu punktu, ir pastāvīga:*

$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2$. ***(23)***

Pierādījums. *46.zīmējumā* ir

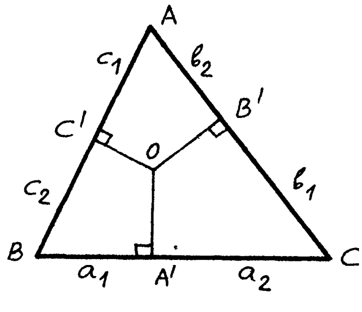
$BO^2 = a_1^2 + A'O^2$, $CO^2 = a_2^2 + A'O^2$

no kurienes $a_1^2 - a_2^2 = BO^2 - CO^2$.

Līdzīgā kārtā $b_1^2 - b_2^2 = CO^2 - AO^2$ un $c_1^2 - c_2^2 = AO^2 - BO^2$.

Trīs pēdējās formulas saskaitot, dabū ***(23)***.

Apgrieztā teorēma. Ja punkti *A', B', C' sadala trijstūra ABC malas 6 nogriežņos tā, ka triju nogriežņu, kam nav kopīgu gala punktu, kvadrātu summa ir pastāvīga, tad dalījuma punktos pret trijstūra malām celtie perpendikuli krustojas kopīgā punktā O.*



46. zīm.

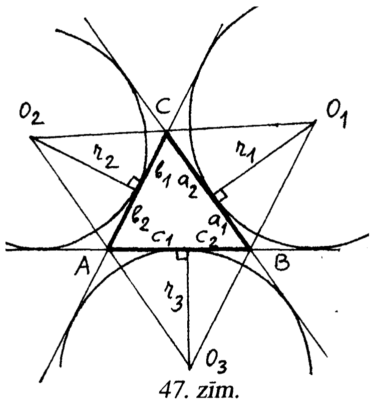
Pierādījumā no divu perpendikulu krustpunkta velk perpendikulu pret trešo malu un lieto **(23)**.

Sekas. *Katram trijstūrim ārēji pievilkto triju aploču un trijstūra malu pieskaršanās punktos pret trijstūra malām vilktie perpendikuli iet caur kopīgu punktu.*

Pierādījums. No taisnleņķu trijstūriem *47.zīmējumā* izteic vienlīdzības $a_2^2 = O_1C^2 - r_1^2$, $b_1^2 = O_2C^2 - r_2^2$, utt., no kurienes seko vienlīdzība

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2-a_1^2-b_1^2-c_1^2 =$$
$$= O_1C^2+ O_2A^2+ O_3B^2- CO_2^2- AO_3^2- BO_1^2.$$

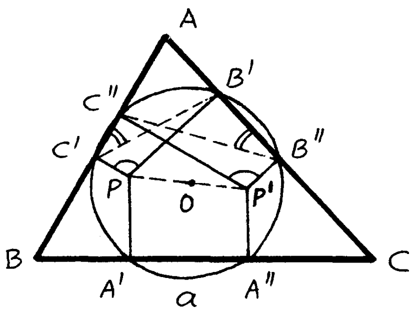
Pēdējā izteiksme ir 0, jo trijstūra $O_1O_2O_3$ malu punktos A, B, C celtie perpendikuli (kā trijstūra ABC bisektrises) krustojas vienā punktā.



47. zīm.

30.§ Izogonāli saistīti punkti

1.teorēma. *Ja aploce a, kas iet caur patvaļīga punkta P ortogonālām projekcijām A', B', C' uz trijstūra ABC malām, tās krusto citos trīs punktos A", B", C", tad pēdējos pret trijstūra malām celtie perpendikuli iet caur punktu P'. P un P' sauc par* *izogonāli saistītiem punktiem* *attiecībā uz trijstūri ABC. Izogonalitāte ir* *involutīva* *transformācija, t.i., ja P izogonālais punkts ir P', tad P' izogonālais ir P.*



48. zīm.

Pierādījums. Ja O ir *a* centrs un *48.zīmējumā* konstruē OP punktu P' tā, ka P'O = OP, tad (ievērojot, ka hordas A'A" perpendikulārs diametrs dala hordu uz pusēm) seko, ka punktā A" pret BC celtais perpendikuls iet caur punktu P'. Līdzīgā kārtā caur P' iet arī punktos B" un C" celtie perpendikuli.

2.teorēma. *Ja x, y, z ir punkta P attālumi līdz trijstūra ABC malām un x', y', z' ir izogonāli saistītā punkta P' attālumi, tad xx' = yy' = zz'* ***(24)***

Pierādījums. *48.zīmējumā* ir ∠AC'B' = ∠AB"C" (jo šie leņķi balstās uz vienu un to pašu loku) un

∠C'PB' = 180° - ∠BAC = ∠C"P'B".

Tādēļ trijstūri C'PB', B"P'C" ir līdzīgi un der proporcija PC':P'B" = PB':P'C", kas pierāda ***(24)*** otro daļu.

Līdzīgi pierāda pirmo; x, y, z sauc par punkta P trilineārām koordinātām jeb trijstūra koordinātām. No ***(24)*** seko, ka x:1/x' = y:1/y' = z:1/z', jeb punkta P koordinātas proporcionālas P' koordinātu inversajiem lielumiem. Šī iemesla dēļ Matjē (P.Mathieu) 1865.g. P un P' sauca par inversiem punktiem attiecībā uz trijstūri ABC.

31.§ Izogonālās taisnes

1.teorēma. *Izogonālos punktus P, P'* ar *trijstūra virsotnēm savienojošās taisnes AP, AP' ir simetriskas pret leņķa A bisektrisi.*

Pierādījums. Tā kā četrstūra AB'PC' *(48.zīm.)* pretējo leņķu summa ir 180°, tad četrstūrim var apvilkt aploci un pierādīt, ka leņķi PAC' un PB'C' (kas balstās uz vienu un to pašu loku) ir vienlīdzīgi. Līdzīgā kārtā arī ∠P'AB" = ∠P'C"B" un tā kā pēc iepriekšējās teorēmas pierādījuma ∠P'C"B" = ∠PB'C', seko ∠PAC' = ∠P'AB".

Līdzīgi pierāda, ka taisnes PB, P'B simetriskas pret leņķa B bisektrisi un PC, P'C simetriskas pret leņķa C bisektrisi. Tādas taisnes sauc par izogonālām taisnēm. Lai konstruētu punkta P izogonālo punktu attiecībā uz trijstūri ABC, pietiek konstruēt taisnes AP simetrisko taisni t_1 pret leņķa A bisektrisi un taisnes PB simetrisko taisni t_2 pret leņķa B bisektrisi; t_1 un t_2 krustosies meklējamā punktā P'.

No šejienes seko, ka eksistē četri punkti, no kuriem katrs izogonāls pats sev: tie ir trijstūra iekšējo un ārējo leņķu bisektrišu krustpunkti jeb trijstūrī ievilktās un pievilkto apločų centri *(47.zīm.).*

Definīcija. *Taisni, kas attiecībā uz trijstūra bisektrisi ir simetriska ar mediānu, pēc Dokaņa (d'0cagne) parauga sauc par trijstūra simediānu.*

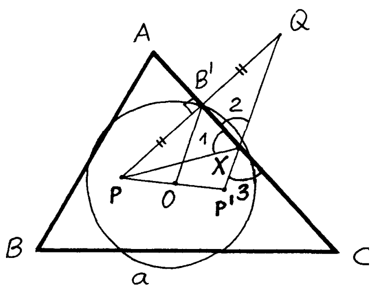
Pēc iepriekšējās teorēmas un 30.§ 1.teorēmas trijstūra simedianas iet caur kopīgu punktu K, ko sauc par Lemuāna punktu (E.Lemoine). Pēdējais ir izogonāli saistīts ar trijstūra smaguma centru (mediānu krustpunktu). Par šo punktu Lemuāns referēja 1873.g. matemātiķu kongresā, uzrādot kādas desmit tā īpašības, un tādēļ to sāka saukt par Lemuāna punktu. Šo punktu jau daudz agrāk pazinis Liljē (Simon Lhuilier; sal. 42.§). Dažreiz to arī sauc par Grebe punktu vai simedianu punktu. Terminus "Lemuāna punkts", "Lemuāna taisne" (45.§) u.c. ieveda beļģu matemātiskā žurnāla "Mathesis" redaktors Neubergs pagājušā gadsimta astoņdesmitajos gados.

2. teorēma. *Ja P ir patvaļīgs punkts trijstūrī ABC, P'-tā izogonālais punkts, a - aploce, kas iet caur P un P' projekciju punktiem uz trijstūra malām, tad elipse e, kuras fokusi ir P un P' un lielā ass ir a diametrs, pieskaras trijstūra malām.*

Pierādījums. Ja *49.zīmējumā* Q ir P simetriskais punkts attiecībā uz AC un X ir QP', AC krustpunkts tad

$$PX + P'X = P'X + XQ = P'Q = 2 \cdot OB'$$

(jo OB' ir trijstūra QPP' viduslīnija) jeb, ar r apzīmējot a rādiusu, PX + P'X = 2r. Tātad punkts X pieder elipsei e. Ievērojot, ka $\angle 1$ (= $\angle 2$) = $\angle 3$ un elipses pieskare veido vienādus leņķus ar pieskaršanās punkta rādiusvektoriem, seko, ka AC ir e pieskare punktā X. Līdzīgi pierāda e pieskaršanos trijstūra pārējām malām. Elipse e ir ievilkta reizē trijstūrī ABC un aplocē a.



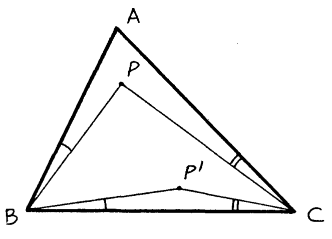
49. zīm.

Sekas. ***1)*** *Stari, kas jebkuru punktu C ārpus elipses savieno ar elipses fokusiem P, P', veido vienādus leņķus ar elipses pieskarēm caur punktu C.*

2) *Eksistē viena vienīga elipse ar dotu fokusu P un dotām pieskarēm AB, BC, CA.*

32.§ Izogonāli saistīto punktu sadalījums

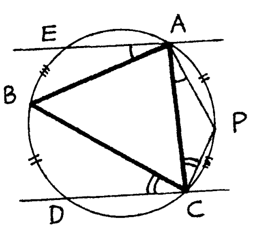
Trijstūra ABC iekšējo punktu P izogonālie punkti arī ir trijstūra iekšēji punkti. Ja punkts P tuvojas trijstūra virsotnei A, tad viņa izogonālais punkts P' tuvojas kādam malas BC punktam *(50.zīm.),* kuru noteic virziens, kādā P tuvojas A.



50. zīm.

Tādēļ visa taisne BC jāuzskata par trijstūra virsotnei A izogonālo punktu ģeometrisko vietu. Tātad trijstūra virsotnes ir izogonālās transformācijas singulāri punkti. Ja P ir trijstūrim apvilktas aploces a jebkurš punkts *(51.zīm.),* tad tā izogonālais punkts P' pieder taisnēm CD, AE, kas ir paralēlas, jo $\overset{\smile}{AP} = \overset{\smile}{BD}$, $\overset{\smile}{PC} = \overset{\smile}{BE}$ un līdz ar to

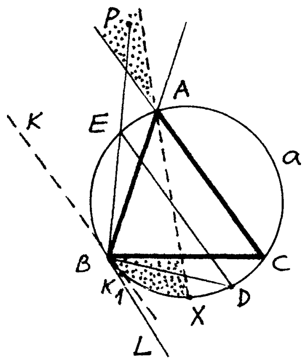
$$\overset{\smile}{APC} = \overset{\smile}{DBE} \cdot$$



51. zīm.

Tātad a punktu izogonālie punkti atrodas bezgalībā.

Teorēma. *Visu to punktu P, kuri atrodas starp trijstūra bisektrises AX un malas AC pagarinājumiem, izogonālie punkti P' atrodas trijstūrim apvilktajā aplocē a starp malu BC un bisektrisi AX (52.zīm.).*



52. zīm.

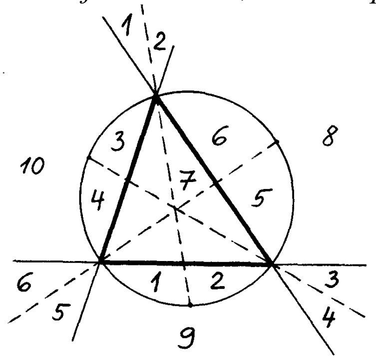
Pierādījums. Ja E ir taisnes PB un aploces a krustpunkts un $ED \parallel AC$, tad $\angle PBA = \angle DBC$, kādēļ punkts P' pieder taisnei BD. To konstruē kā taisnes BD krustpunktu ar taisnei AP simetrisko taisni attiecībā uz bisektrisi AX. Ekstremālā gadījumā, kad taisne BP sakrīt ar $KBK_1 \parallel AC$ un BL ir a pieskare, tad leņķi LBC un KBA ir vienlīdzīgi, jo pirmais no tiem mērojams ar $\frac{1}{2}\overset{\cup}{BK_1C}$, bet otrais vienāds ar

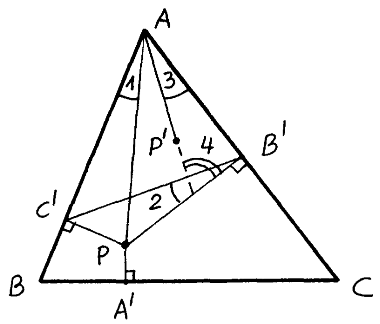
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BK_1C}.$$

53.zīmējumā ar vienādiem skaitļiem 1-6 apzīmēto apgabalu punkti ir savstarpēji izogonāli; apgabalu 7-10 punktu izogonālie punkti atrodas tajos pat apgabalos.

33.§ Projekciju trijstūri

Definīcija. *Par punkta P projekciju trijstūri (Fusspunktdreieck, triangle podaire) attiecībā uz trijstūri ABC sauc trijstūri A'B'C', ko veido punkta P ortogonālās projekcijas uz ABC malām.*





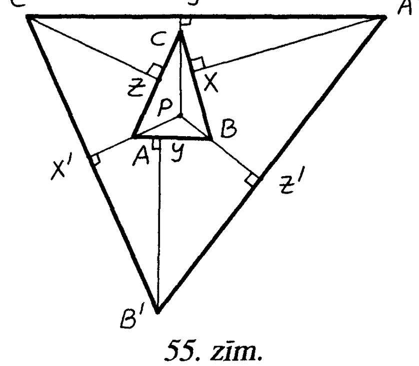
53. zīm.

54. zīm.

Teorēma. *Punkta P projekciju trijstūra (attiecībā uz trijstūri ABC) malas ir perpendikulāras stariem, kas savieno ABC virsotnes ar P izogonālo punktu P'.*

Pierādījums. *54.zīmējumā* ir $\angle 3 = \angle 1 = \angle 2$ (sal. 31.§ 1.teorēmas pierādījumu) un, tā kā $\angle 3+\angle 4 = 90°$, arī seko $\angle 2+\angle 4 = 90°$, kādēļ taisnes AP', B'C' ir perpendikulāras. Līdzīgi pierāda, ka $A'B' \perp CP'$ un $C'A' \perp BP'$. Izlietojot iepriekšējo teorēmu, var dotā trijstūrī ABC ievilkt trijstūri A'B'C' tā, lai pēdējā malas būtu perpendikulāras stariem, kas savieno dotu punktu P' ar dotā trijstūra virsotnēm. Meklētais trijstūris ir punkta P' izogonālā punkta P projekciju trijstūris.

34.§ Ortologi trijstūri



55. zīm.

Šteinera teorēma. *Ja no trijstūra ABC virsotnēm pret trijstūra A'B'C' saderīgām malām vilktie perpendikuli krustojas vienā punktā P, tad arī no trijstūra A'B'C' virsotnēm pret atbilstošajām ABC malām vilktie perpendikuli A'X, B'Y, C'Z krustojas vienā punktā.*

(Pastāvot teorēmas nosacījumiem, ABC un A'B'C' sauc par ortologiem trijstūriem.)

Pierādījums. *55. zīmējumā* pēc 29.§ der vienlīdzība $(A'Y'^2 - Y'C'^2) + (C'X'^2 - X'B'^2) + (B'Z'^2 - Z'A'^2) = 0$, ko, lietojot Pitagora teorēmu, pārveido par

$$(A'C^2 - CC'^2) + (C'A^2 - AB'^2) + (B'B^2 - BA'^2) = 0, \text{ jeb}$$

$$(A'C^2 - BA'^2) + (C'A^2 - CC'^2) + (B'B^2 - AB'^2)=0$$

Pēdējo ar Pitagora teorēmu pārveido par vienlīdzību

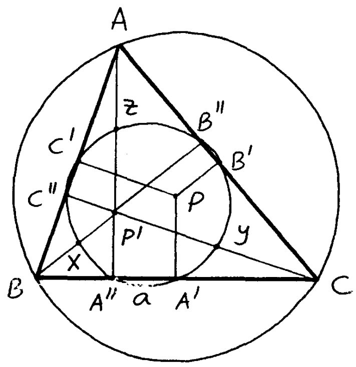
$(CX^2 - XB^2) + (AZ^2 - ZC^2) + (BY^2 - YA^2) = 0$, kas pēc 29.§ teorēmu pierāda. Tās speciāls gadījums ir 33.§ teorēma.

35.§ Feierbaha aploce (K.W.Feuerbach)

1.teorēma *Katrā trijstūrī malu viduspunkti un augstumu pamatpunkti pieder aplocei a, kuras centrs O ir trijstūrim apvilktās aploces centru un ortocentru (augstumu krustpunktu) savienojošā nogriežņa viduspunkts.*

a arī sauc par dotā trijstūra Feierbaha aploci. (Mūsdienu literatūrā šo aploci sauc par Eilera riņķa līniju. - A.A.)

Pierādījums. *56. zīmējumā* trijstūrim ABC apvilktās aploces centra P projekciju trijstūra mala B'C' ir trijstūra ABC viduslīnija un tai perpendikulārā taisne AA" ir trijstūra ABC augstums; uz tā pēc 33.§ teorēmas atrodas P izogonālais punkts P'. Līdzīgā kārtā P' pieder arī trijstūra ABC pārējiem augstumiem un tātad sakrīt ar trijstūra ortocentru. Tālākais seko no 30.§ .



56. zīm.

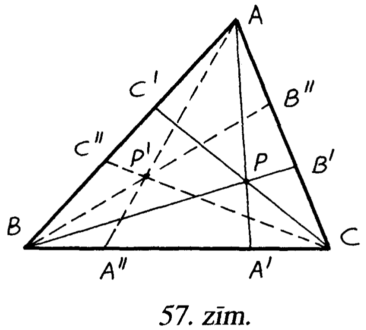
2. teorēma. *Feierbaha aploce a dala uz pusēm trijstūra augstumu nogriežņus starp trijstūra virsotnēm un ortocentru. (Tādēļ a sauc arī par 9 punktu aploci).*

Pierādījums. Ar X, Y, Z apzīmējam teorēmā minēto augstumu nogriežņu viduspunktus. Pēc 1.teorēmas trijstūrim BP'C (kam malu viduspunkti ir A', X, Y un augstumu pamatpunkti A", B", C") punkti X un Y pieder aplocei *a*. Līdzīgā kārtā pierāda, ka arī Z pieder *a*.

Izrādās, ka Feierbaha aploce pieskaras trijstūrī ievilktai aplocei un arī visām trim aplocēm, kas trijstūrim pievilktas ārēji (kā *47.zīm.).* Šo teorēmu, kam ir ap 40 pierādījumu, apskatīsim 74.§ .

36. § Izotomi saistītie punkti

Definīcija. *Nogriežņa AB ik divus punktus X, Y, kas vienādi attālināti no nogriežņa galiem, sauc par nogriežņa AB izotomiem punktiem.*



57. zīm.

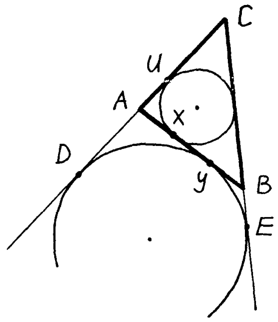
Teorēma. *Ja A', B', C' ir punkti, kuros ar trijstūra ABC malām krustojas stari, kas savieno plaknes patvaļīgu punktu P ar trijstūra virsotnēm, tad tiem izotomos trijstūra malu punktus A", B", C" un trijstūra virsotnes savienojošie stari iet caur kopīgu punktu P' (57.zīm.).*

P un P' sauc par izotomiem punktiem attiecībā uz trijstūri ABC; izotomija acīmredzot ir involutīva transformācija. Trijstūra smaguma centrs ir pats ar sevi izotoms. Caur trijstūra virsotnēm pamatiem paralēli vilktas taisnes krustojoties noteic 3 citus punktus, kas paši ar sevi izotomi.

Pierādījums. Pēc Čeva teorēmas (20.§) der vienlīdzība

AC'·BA'·CB' = C'B·A'C·B'A, no kurienes (tā kā AC' = C"B, A'C = BA", CB' = B"A, BA' = A"C, C'B = AC", B'A = CB") arī C"B·A"C·B"A = AC"·BA"·CB" un pēc Čeva apgrieztās teorēmas AA", BB", CC" iet caur kopīgu punktu P'.

Lemma. *Katram trijstūrim ievilktās un ārēji pievilktās aploces pieskaršanās punkti X, Y ir šī trijstūra malu izotomi punkti.*



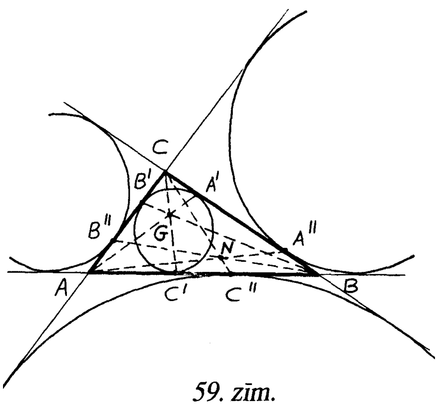
58. zīm.

Pierādījums. Apzīmējot trijstūra virsotnēm A, B, C pretīmgulošo malu garumus ar a, b, c, liekot a+b+c=2p un ievērojot, ka no kopīga punkta vilkto aploces pieskaru garumi ir vienlīdzīgi, pierāda, ka *58.zīmējumā* ir

$$AX = AU = p - a,\ YB = BE = CE - a = CD - a =$$
$$= b + AD - a = b + AY - a = b + c - BY - a,$$

no kurienes $2\cdot YB = b + c - a = 2(p - a) = 2\cdot AX$ un $YB = AX$.

Sekas. *Jebkuram trijstūrim ABC ievilktās aploces pieskaršanās punktus A', B', C' ar trijstūra virsotnēm savienojošās taisnes iet caur kopīgu punktu G, ārēji pievilkto apločus pieskaršanās punktus A", B", C" ar trijstūra virsotnēm savienojošās taisnes iet caur kopīgu punktu N (59.zīm.) G sauc par trijstūra ABC Žergona punktu un N par Nāgela punktu.*

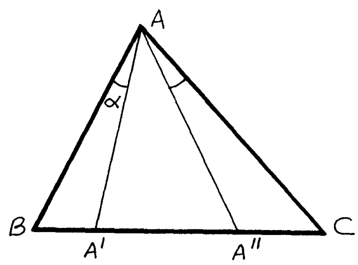


59. zīm.

Pierādījums . Taišņu AA', BB', CC' krustošanos kopīgā punktā G pierāda ar apgriezto Čeva teorēmu (20.§), ievērojot, ka B'A = AC', C'B = BA', A'C = CB'. Pēc iepriekšējās lemmas punkti A", B", C" ir izotomi (attiecībā uz trijstūra malām) ar punktiem A', B', C'. Tādēļ, ievērojot iepriekšējo teorēmu, arī taisnes AA", BB", CC" krustojas kopīgā punktā N.

37.§ Izogonāli saistītās un reciprokās taisnes

Lemma. *Ja A' un A" ir trijstūra ABC malas BC tādi punkti, kam* $\angle BAA'=\angle CAA''$ *(60.zīm.), tad* $(BA'\cdot BA''):(CA'\cdot CA'') = AB^2:AC^2$ ***(25)***



60. zīm.

Pierādījums . Ar trijstūru laukumu attiecību

$$L(BAA'):L(AA'C) = BA':CA' \text{ pierāda proporciju}$$
$$(AB\cdot AA'\sin\alpha):(AA'\cdot AC\sin(A - \alpha)) = BA':CA' \text{ jeb } BA':CA' =$$
$$=AB\sin\alpha:AC\sin(A - \alpha).$$

Līdzīgā kārtā $BA'':CA'' = AB\sin(A - \alpha):AC\sin\alpha$. Sareizinot ar iepriekšējo un saīsinot, dabū ***(25)***.

1.teorēma. *Ja taisne l krustojas ar trijstūra ABC malām vai to pagarinājumiem punktos A', B', C', un A", B", C" ir to pašu malu punkti, kam taisnes AA', AA" ir simetriskas pret leņķa A bisektrisi utt., tad punkti A", B", C" pieder taisnei l'.* (Matjē *l* un *l'* sauca par izogonāli saistītām taisnēm).

Pierādījums . Pēc ***(25)*** der vienlīdzības $(BA'\cdot BA''):(CA'\cdot CA'') = AB^2:AC^2$,

$$(CB'\cdot CB''):(AB'\cdot AB'') = CB^2:AB^2,\ (AC'\cdot AC''):(BC'\cdot BC'') = AC^2:BC^2,$$

no kurienes $BA'\cdot CB'\cdot AC'\cdot BA''\cdot CB''\cdot AC'' = CA'\cdot AB'\cdot BC'\cdot CA''\cdot AB''\cdot BC''$

un, ievērojot ***(10)***, $BA''\cdot CB''\cdot AC'' = - CA''\cdot AB''\cdot BC''$.

Tādēļ pēc Menelaja apgrieztās teorēmas (14.§) punkti A", B", C" pieder taisnei.

2.teorēma. *Ja taisne t krustojas ar trijstūra ABC malām vai to pagarinājumiem punktos A', B', C' un to izotomi saistītie punkti attiecībā uz trijstūra malām ir A", B", C", tad arī pēdējie punkti pieder taisnei t'.* Longšamps (G.de Longchamp) *t* un *t'* sauc par reciprokām taisnēm.

Pierādījums . Vienlīdzībā ***(10)*** liek AC' = C"B, BA' = A"C, CB' = B"A un lieto Menelaja apgriezto teorēmu.

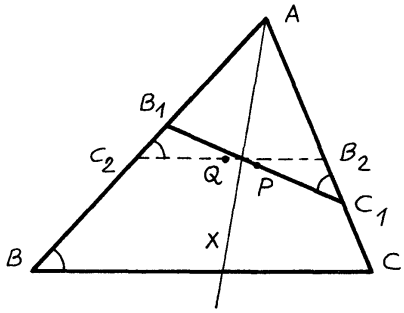
38.§ Trijstūra simediānas

Definīcija. *Taisni B_1C_1 sauc par trijstūra ABC pamatam BC antiparalēlu taisni tad, ja trijstūra malu punkti B, C, B_1, C_1 pieder vienai aplocei.*

Teorēma. *Starp trijstūra malām ieslēgto pamatam antiparalēlo nogriežņu viduspunktu ģeometriskā vieta ir trijstūra simediāna (31.§).*

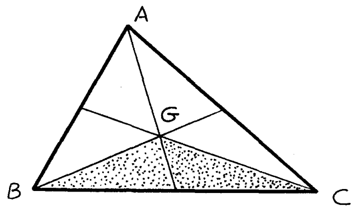
(Ievērojam, ka starp trijstūra malām ieslēgto pamatam paralēlo nogriežņu viduspunktu ģeometriskā vieta ir trijstūra mediāna).

Pierādījums . Pieņemam, ka *61.zīmējumā* B_1C_1 ir BC antiparalēle, tātad $\angle C_1 = \angle B$, un x ir leņķa A bisektrise. Atspoguļojot pret x, mala AC ies pa malu AB, punkts C_1 nonāks punktā C_2 un B_1 - punktā B_2, pie kam $\angle C_2 = \angle C_1 = \angle B$. Tātad trijstūra pamatam antiparalēlās taisnes B_1C_1 atspoguļojums pret bisektrisi ir pamatam paralēla taisne B_2C_2. Līdz ar to B_1C_1 viduspunkta P pret x simetriskais punkts ir B_2C_2 viduspunkts Q, kas pieder BC mediānai. B_2C_2 pārvietojoties sev paralēli, punkts Q apraksta BC mediānu un pret bisektrisi x simetriskais punkts P (jeb antiparalēles viduspunkts) apraksta simediānu.



61. zīm.

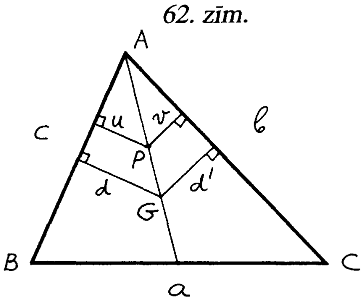
39.§ . Lemuāna punkts



62. zīm.

Lemma. *Trijstūra smaguma centru ar trijstūra virsotnēm savienojošās taisnes trijstūri sadala vienādu laukumu trijstūros.*

Pierādījums. Ievērojot, ka trijstūra smaguma centrs G sadala katru mediānu attiecībā 2:1 (skaitot no virsotnes), *62.zīmējumā* ir L(GBC):L(ABC) = 1:3.

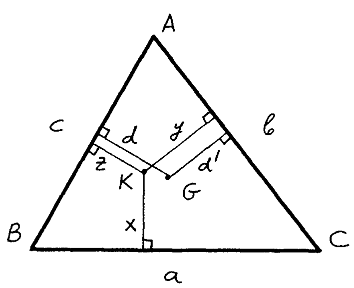


63. zīm.

1.teorēma *Mediānas katra punkta P (speciālā gadījumā arī trijstūra smaguma centra) attālumi līdz trijstūra malām ir pretēji proporcionāli šīm malām.*

Pierādījums. Ar u, v apzīmējot punkta P attālumus un ar d, d' apzīmējot smaguma centra G attālumus līdz trijstūra malām AB, AC, pēc iepriekšējās lemmas *63.zīmējumā* ir u:v = d:d' = b:c ***(26)***

2.teorēma. *Trijstūra ABC Lemuāna punkta K (31.§) attālumi x, y, z līdz trijstūra malām ir tieši proporcionāli šīm malām.*



64. zīm.

Pierādījums . Ar z, y apzīmējot punkta K attālumus un ar d, d' punkta G attālumus līdz trijstūra malām AB, AC (*64.zīm.*), pēc ***(24)*** ir zd = yd' jeb z:y = d':d. No šejienes un ***(26)*** z:y = c:b jeb y:b = z:c.

Sekas. *Ja trijstūra ABC Lemuāna punkta K attālumus līdz trijstūra malām a, b, c apzīmē attiecīgi ar x, y, z, tad x:a = y:b = z:c* ***(27)***

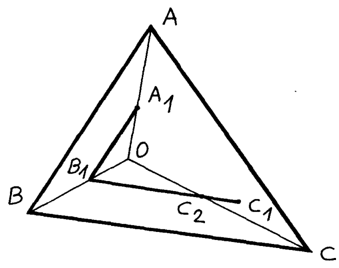
Lietojot atvasināto proporciju un trijstūra ABC laukumu apzīmējot ar L, dabū vienlīdzības

$$ax:a^2 = by:b^2 = cz:c^2 = (ax + by + cz):(a^2 + b^2 + c^2) = = 2L:(a^2 + b^2 + c^2)$$ (sal. *64.zīm.),*

no kurienes $x = a\cdot 2L:(a^2 + b^2 + c^2)$, $y = b\cdot 2L:(a^2 + b^2 + c^2)$, $z = c\cdot 2L:(a^2 + b^2 + c^2)$.

40.§ Lemuāna punkta konstrukcijas

Trijstūra ABC Lemuāna punktu K var konstruēt kā divu simediānu krustpunktu. K citas konstruēšanas metodes, ko devis E.W.Grebe 1847.g., pamatā ir iepriekšējā teorēma.



65. zīm.

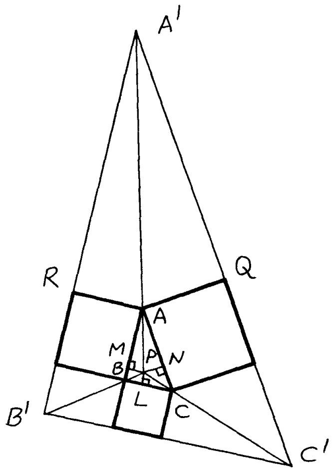
__Lemma.__ *Ja divu trijstūru malas ir pa pāriem paralēlas, tad saderīgās virsotnes savienojošās taisnes krustojas vienā punktā.*

__Pierādījums.__ Ja AB || A_1B_1, taišņu AA_1, BB_1 krustpunktu apzīmē ar O un OC krustpunktu ar B_1C_1 apzīmē ar C_2 *(65.zīm.),* tad ievērojot, ka B_1C_2 || BC, pierāda, ka trijstūris $A_1B_1C_2$ līdzīgs trijstūrim ABC un līdz ar to trijstūrim $A_1B_1C_1$, kādēļ virsotnēm C_1, C_2 jāsakrīt.

__Grebe konstrukcija.__ Uz trijstūra ABC malām konstruē kvadrātus un, to malas pagarinot, dabū līdzīgu trijstūri A'B'C' *(66.zīm),* kura malas paralēlas ABC malām. Tādēļ virsotnes A, A'; B, B'; C, C' savienojošās taisnes krustojas punktā P, kura projekcijas uz BC, AB, AC apzīmējam ar L, M, N. No līdzīgiem taisnleņķu trijstūriem AMP, A'RA; ANP, A'QA izteic

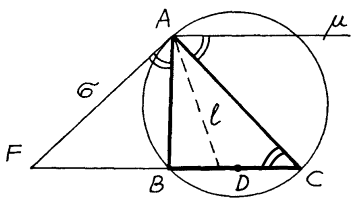
MP:RA = AP:A'A = NP:QA jeb MP:c = NP:b.

Līdzīgā kārtā pierāda, ka NP:b = LP:a un, salīdzinot ar ***(27)***, secina, ka P ir trijstūra ABC Lemuāna punkts.



66. zīm.

41.§ Trijstūra ārējās mediānas un simediānas



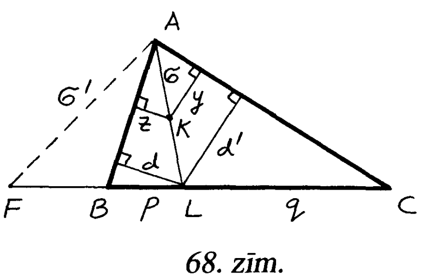
67. zīm.

Trijstūra ABC iekšējā mediāna savieno trijstūra virsotni A ar pamata BC punktu D, kas vienādi attālināts no pamata galu punktiem B, C. Savienojot trijstūra virsotni ar pamata <u>pagarinājuma</u> punktu E, kas vienādi attālināts no B, C, dabū caur virsotni vilktu <u>pamatam paralēlu</u> taisni. To sauc par trijstūra <u>ārējo mediānu.</u> Ārējai mediānai μ simetrisko taisni σ attiecībā uz trijstūra virsotnes leņķa bisektrisi l sauc. par trijstūra <u>ārējo simediānu.</u>

Ievērojot, ka leņķis starp pieskari un hordu, kā arī ievilktais leņķis ir mērojami ar pusi no atbilstošā loka, seko, ka trijstūra ārējā simediāna ir trijstūrim apvilktās aploces pieskare *(67.zīm.).* No šejienes seko

<u>1.teorēma.</u> *Pieskares, kas vilktas trijstūra ABC virsotnēs trijstūrim aprakstītai aplocei, ir šī trijstūra ārējās simediānas.*

<u>2.teorēma.</u> *Katra simediāna sadala trijstūra pamatu nogriežņos p, q, kas proporcionāli tiem piegulošo sānu malu kvadrātiem.*



68. zīm.

__Pierādījums .__ **1)** Ja σ ir trijstūra ABC iekšējā simediāna, kas krusto trijstūra pamatu BC punktā L, kura attālumi līdz malām AB, AC ir d un d', bet Lemuāna punkta K attālumi līdz šīm malām ir z, y, tad no taisnleņķu trijstūriem 68.zīmējumā, lietojot ***(27)***, izteic

$$p:q = BL:LC = (d:\sin B):(d':\sin C) = (z\sin C):(y\sin B) = (c\sin C):(b\sin B) = c^2:b^2 \quad \mathbf{(28)}$$

(jo csinB = bsinC).

2) ja σ ir trijstūra ārējā simediāna, tad, ievērojot, ka 67.zīmējumā

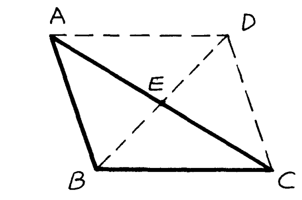
$AF^2 = FB \cdot FC$ un trijstūri AFB, CFA ir līdzīgi, izteic

$FB:FC = FB^2:(FB \cdot FC) = FB^2:AF^2 = AB^2:AC^2 = c^2:b^2$ ***(29)***

1.sekas. *Trijstūra iekšējo un ārējo simediānu krustpunkti L, F (68.zīm.) ar trijstūra pamatu BC tā gala punktus sadala harmoniski (21.§).*

Pierādījums . Pēc ***(28)*** un ***(29)*** ir (BL:LC) : (BF:FC) = - 1

2.sekas. *Ar p', q' un p", q" apzīmējot nogriežņus, kuros trijstūra ABC iekšējās simediānas sadala malas CA, AB, pēc* ***(28)*** *der formulas $p:q = c^2:b^2$, $p':q' = a^2:c^2$, $p'':q'' = b^2:a^2$, no kurienes $pp'p'' = qq'q''$. Tālāk lietojot Čeva teorēmu (20.§), dabūjam jaunu pierādījumu 31.§ rezultātam, ka trijstūra visas iekšējās simediānas iet caur kopīgu punktu K.*



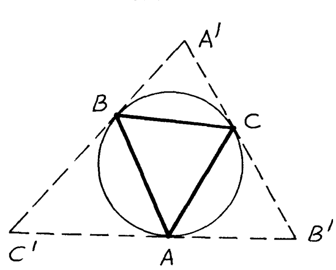
69. zīm.

3.teorēma. *Trijstūra divas ārējās mediānas AD, CD un viena iekšējā mediāna BE krustojas kopīgā punktā D.*

Pierādījums . 69.zīmējumā paralelograma ABCD diagonāle BD iet caur otras diagonāles AC viduspunktu E, tātad sakrīt ar iekšējo mediānu BE.

4.teorēma. *Trijstūra divas ārējās un trešā iekšējā simediāna krustojas kopīgā punktā.*

Pierādījums. Teorēmā minētās simediānas ir AD, BE, CD *(69.zīm.)* izogonālās taisnes. Pēc iepriekšējās teorēmas un 30., 31.§ tās iet caur punkta D izogonāli saistīto punktu.



70. zīm.

Ar 1. un 4. teorēmu pamato trijstūra ABC Lemuāna punkta K sekojošo konstrukcijas metodi. Trijstūrim apvelk aploci un, velkot tās pieskares virsotnēs A, B un C, dabū tangenciālo trijstūri A'B'C' *(70.zīm.)*. Caur tā virsotnēm jāiet dotā trijstūra iekšējām simediānām, kas tātad ir taisnes AA', BB', CC'. To krustpunkts K ir dotā trijstūra ABC Lemuāna punkts un reizē tangenciālā trijstūra A'B'C' Žergona punkts (36.§).

42.§ Lemuāna punkta ekstremālā īpašība

1.teorēma. *Trijstūra ABC punkts, kura attālumu kvadrātu summa līdz trijstūra malām ir minimālā, ir šī trijstūra Lemuāna punkts.*

(Šo rezultātu publicējis uzdevuma veidā Liljē 1809.g.).

Pierādījums. Ar x, y, z apzīmē patvaļīga punkta P attālumus līdz trijstūra ABC malām BC, AC, AB un ar a, b, c šo malu garumus. Lieto identitāti

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 \quad \textbf{\textit{(30)}}$$

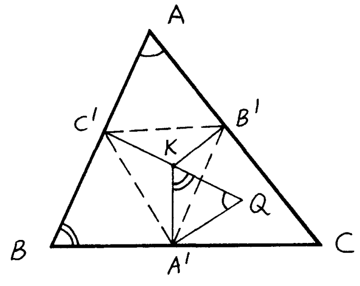
(ko pārbauda, atverot abās pusēs iekavas) un ievēro, ka ax + by + cz ir trijstūra ABC divkāršots laukums, tātad neatkarīgs no x, y, z. Tādēļ ***(30)*** kreisajai pusei un līdz ar to summai $x^2+y^2+z^2$ minimālā vērtība ir tādā punktā P, kur

$$\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 0,$$

jeb der ***(27)***. Tādēļ P ir trijstūra ABC Lemuāna punkts.

Lemma. *Trijstūra ABC Lemuāna punkts K ir šī punkta projekciju trijstūra A'B'C' (33.§) smaguma centrs.*

Pierādījums. 71. zīmējumā KQ ir C'K pagarinājums un A'Q || KB'. Trijstūri ABC un QKA' līdzīgi (jo to malas savstarpēji perpendikulāras), kādēļ A'Q:AC = QK:AB = KA':BC. Pēc ***(27)*** KA':BC=KB':AC un pēc iepriekšējā seko A'Q:AC = KB':AC, tātad A'Q = KB'.



71. zīm.

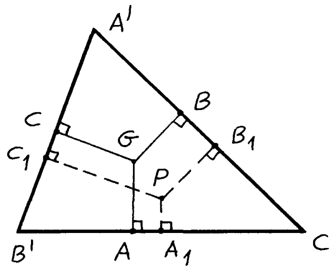
Tādēļ KA'QB' ir paralelograms un tā diagonāles dalās uz pusēm. No tā seko, ka C'K ir trijstūra A'B'C' mediāna. Pēc analoģijas arī A'K un B'K ir šī trijstūra mediānas, tātad K ir tā smaguma centrs.

<u>**2.teorēma.**</u> *Trijstūra ABC punkts, kura attālumu kvadrātu summa līdz trijstūra virsotnēm ir minimālā, ir šī trijstūra smaguma centrs.*

<u>**Pierādījums.**</u> Ar x, y, z apzīmējam trijstūra ABC smaguma centra G attālumu līdz trijstūra virsotnēm un konstruējam trijstūri A'B'C', kam G ir Lemuāna punkts. Jebkura cita punkta P attālumus līdz A'B'C' malām apzīmējot ar x_1, y_1, z_1, pēc iepriekšējās teorēmas *72.zīmējumā* ir $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > x^2 + y^2 + z^2$ jeb

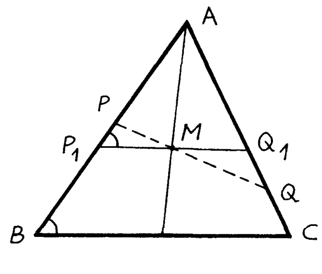
$PA^2 - AA_1^2 + PB^2 - BB_1^2 + PC^2 - CC_1^2 > x^2 + y^2 + z^2$;

$PA^2 + PB^2 + PC^2 > x^2 + y^2 + z^2$, kas teorēmu pierāda.



72. zīm.

43.§ Lemuāna pirmā aploce un pirmais sešstūris



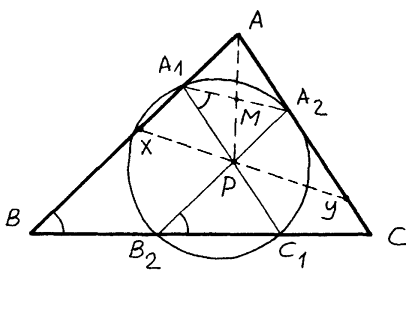
73. zīm.

<u>***Lemma.***</u> *Ja starp trijstūra ABC sānu malām ieslēgta nogriežņa PQ viduspunkts M pieder pamata mediānai, tad PQ paralēls pamatam.*

<u>**Pierādījums**</u> **.** Pieņemot pretējo, *73.zīmējumā* caur punktu M velk $P_1Q_1 \| BC$. Tad trijstūri PMP_1, QMQ_1 ir kongruenti un

$2d = \angle AQ_1M + \angle MQ_1Q = \angle C + \angle P_1 = \angle C + \angle B$, kas neiespējams.

<u>***1.teorēma.***</u> *Visu to punktu P ģeometriskā vieta, caur kuriem trijstūra ABC sānu malām paralēli vilktas taisnes krusto sānu malas un pamatu četros vienai aplocei piederīgos punktos, ir trijstūra pamata simediāna.*

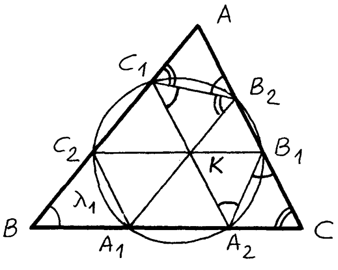


74. zīm.

<u>**Pierādījums.**</u> Ja *74.zīmējumā* $A_1C_1 \| AC$ un $A_2B_2 \| AB$ un A_1, A_2, C_1, B_2 pieder vienai aplocei, tad taisne A_1A_2 antiparalēla BC (jo$\angle B = \angle A_2B_2C_1 = \angle C_1A_1A_2 = \angle A_1A_2A$).

Tā kā AA_1PA_2 ir paralelograms, tad diagonāles A_1A_2 viduspunkts M pieder diagonālei AP, kādēļ M un līdz ar to P ir pamata simediānas punkts (38.§).

Apgrieztā kārtā, ja punkts P pieder pamata simediānai, caur P velk $A_1C_1 \| AC$, $A_2B_2 \| AB$ un velk pamatam antiparalēlu taisni XY, tad P ir XY viduspunkts un AP ir trijstūra AXY mediāna. Pēc iepriekšējās lemmas paralelograma AA_1PA_2 diagonāle A_1A_2 ir paralēla XY un līdz ar to antiparalēla BC. Ja aploce, kas vilkta caur punktiem A_1, A_2, C_1 neietu caur B_2, tad leņķis $A_2B_2C_1$ būtu mērojams ar to loku pussummu vai pusstarpību, kas ieslēgti starp tā malām vai to pagarinājumiem, un atšķirtos no leņķa $A_2A_1C_1$.



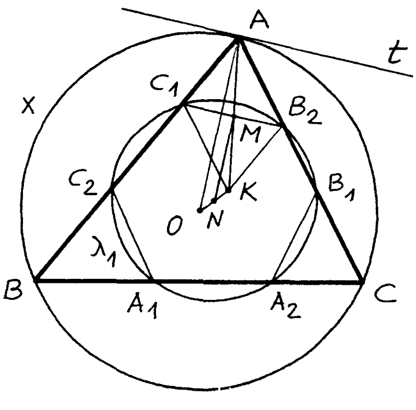
75. zīm.

<u>***Sekas.***</u> *Caur trijstūra ABC Lemuāna punktu K trijstūra malām paralēli vilktas taisnes krusto trijstūra malas 6 punktos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, kas pieder vienai un tai pašai aplocei λ_1 (75.zīm.).*

To sauc par <u>Lemuāna pirmo</u> aploci. $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ sauc par <u>Lemuāna pirmo sešstūri</u>. Tā ik divas pretīmgulošās malas ir antiparalēlas. Savienojot trijstūra ABC Lemuāna punktu K ar pirmā sešstūra visām virsotnēm, dabū 6 trijstūrus, kas līdzīgi ABC. Ievērojot, ka trapecei $C_1A_2B_1B_2$ leņķi pie pamata vienlīdzīgi, secina, ka $C_1B_2=A_2B_1$. Līdzīgā kārtā pierāda, ka trijstūra ABC pirmā Lemuāna sešstūra trīs malas A_1C_2, A_2B_1, B_2C_1, kas ieslēgtas starp ABC malām, ir vienlīdzīgas.

<u>***2.teorēma.***</u> *Trijstūra ABC Lemuāna pirmā aploce atšķeļ no trijstūra malām nogriežņus A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, kas attiecas kā šo malu kubi.*

Pierādījums. Ar x, y apzīmējot trijstūra ABC Lemuāna punkta K attālumus līdz malām BC, CA un ar h_a, h_b, pret šīm malām vilktos trijstūra augstumus, *75.zīmējumā* ir $A_1A_2:BC = x:h_a$, $B_1B_2:AC = y:h_b$. Tā kā $ah_a= bh_b$, no šejienes un ***(27)*** izteic $A_1A_2:B_1B_2 = (xh_b{\cdot}BC):(h_ay{\cdot}AC) = a^3:b^3$. Tas teorēmu pierāda.



76. zīm.

3.teorēma. *Trijstūra ABC pirmās Lemuāna aploces λ_1 centrs O_1 ir trijstūrim apvilktās aploces x centru O un Lemuāna punktu K savienojošā nogriežņa viduspunkts.*

Pierādījums. *76.zīmējumā* punktā A vilktā x pieskare t ar AC veido $\angle(t,AC)= \angle B$, kādēļ t, kā arī taisne C_1B_2 ir antiparalēlas BC, tādēļ paralēlas savā starpā (38.§) un līdz ar t arī C_1B_2 perpendikulārs OA. Ar M apzīmējot paralelograma AC_1KB_2 diagonāļu krustpunktu un ar N nogriežņa OK viduspunktu, taisne MN ir trijstūra AOK viduslīnija, tātad paralēla OA un līdz ar to perpendikulāra C_1B_2. Tātad C_1B_2 vidusperpendikuls (uz kura atrodas λ_1 centrs) iet caur punktu N. Līdzīgā kārtā arī B_1A_2 vidusperpendikuls iet caur punktu N, kādēļ N ir λ_1 centrs.

44. § Lemuāna otrā aploce un otrais sešstūris

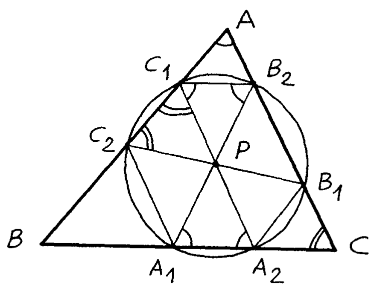
1.teorēma. *Caur trijstūra ABC Lemuāna punktu K (un tikai caur to) trijstūra malām vilktas antiparalēles krusto malas 6 punktos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, kas pieder vienai aplocei λ_2; tās centrs ir K. λ_2 sauc par trijstūra ABC otro Lemuāna aploci un $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ par otro Lemuāna sešstūri.*

Pierādījums. 1) Ja *77.zīmējumā* caur punktu P vilktās antiparalēles krusto trijstūra malas 6 punktos, kas pieder vienai aplocei, tad sekojošie leņķi ir vienlīdzīgi kā leņķi pie antiparalēlām taisnēm vai kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku:

$$\angle A = \angle A_2 = \angle A_1B_2C_1,\ \angle A = \angle A_1 = \angle A_2C_1B_2,$$
$$\angle PC_2C_1 = \angle C = \angle PC_1C_2.$$

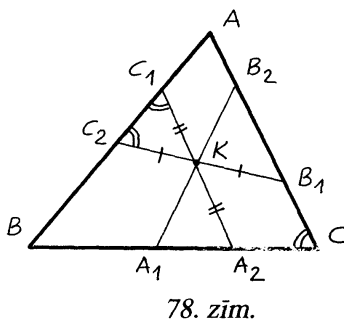
Tādēļ B_2C_1P un C_1PC_2 ir vienādsānu trijstūri un seko malu vienlīdzības $PB_2 = PC_1 = PC_2$ utt.

Tātad punktā P trijstūra ABC malu antiparalēles dalās uz pusēm, kādēļ P ir ABC Lemuāna punkts.



77. zīm.

2) Apgrieztā kārtā, ja *78.zīmējumā* K ir trijstūra ABC Lemuāna punkts un A_1B_2, A_2C_1, B_1C_2 caur K vilkto trijstūra malu antiparalēles, tad $\angle C = \angle C_1 = \angle C_2$, kādēļ C_1KC_2 ir vienādsānu trijstūris, un aploce ar centru punktā K un rādiusu C_1K iet caur punktiem C_1, C_2 utt., kas teorēmu pierāda.



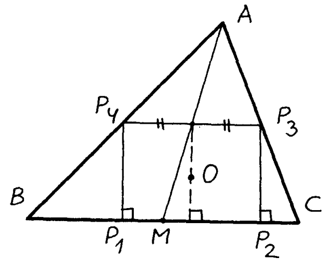
78. zīm.

***Sekas** 1) Lemuāna otrā sešstūra pretējās malas ir paralēlas un vienlīdzīgas.*

***2)** Caur trijstūra ABC Lemuāna punktu K trijstūra malām vilktās antiparalēles ir vienāda garuma.*

Lemma. *Ja trijstūrī ABC ievilkta taisnstūra $P_1P_2P_3P_4$ divas pēc kārtas ejošās virsotnes P_1, P_2 pieder trijstūra pamatam, tad taisnstūra centrs (t.i., diagonāļu krustpunkts) O pieder taisnei, ko veido no pamata mediānas MA punktiem uz pamatu vilkto perpendikulu viduspunkti*

Pierādījums *79.zīmējumā* acīmredzams.



79. zīm.

2.teorēma. *Trijstūra ABC Lemuāna punkts K ir šinī trijstūrī ievilkto taisnstūru (kuru divas pēc kārtas ejošas virsotnes pieder kādai no trijstūra malām) centru ģeometrisko vietu krustpunkts.*

Pierādījums. Tā kā *77.zīmējumā* trijstūra ABC Lemuāna otrā sešstūra pretējās malas A_1A_2, B_2C_1 ir paralēlas un vienlīdzīgas, tad četrstūris $A_1A_2B_2C_1$ ir paralelograms. Pēdējais ir taisnstūris, jo tā diagonāles vienlīdzīgas. Tādēļ to krustpunkts K pieder iepriekšējā lemmā minētai taisnei, utt.

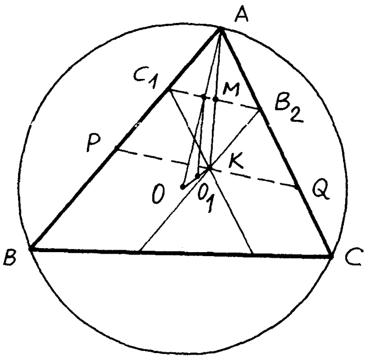
3.teorēma. *Trijstūra ABC otrā Lemuāna aploce λ_2 atšķeļ no trijstūra malām nogriežņus, kas proporcionāli pretīmgulošo leņķu kosinusiem.*

Pierādījums . Ar ρ_2 apzīmējot λ_2 rādiusu 77.zīmējumā, ir $C_1C_2 = 2\rho_2\cos C$, utt.

4.teorēma. *Trijstūra ABC Lemuāna pirmā sešstūra malas, kas antiparalēlas trijstūra malām, ir vienlīdzīgas Lemuāna otrās aploces rādiusam ρ_2.*

Pierādījums. *80.zīmējumā* K ir trijstūra ABC Lemuāna punkts, O ir apvilktās aploces centrs, $B_2K \parallel AB$, $C_1K \parallel AC$ un taisne PKQ antiparalēla BC. Tad pēc 43.§ taisne C_1B_2 antiparalēla BC, tātad (38.§) paralēla PQ, četrstūris C_1KQB_2 ir paralelograms un

$$\rho_2 = KQ = C_1B_2.$$



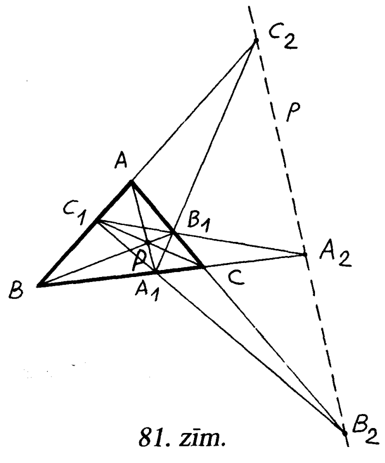
80. zīm.

5.teorēma. *Ja trijstūra ABC Lemuāna pirmās un otrās aploces rādiusi ir ρ_1, ρ_2 un trijstūrim apvilktās aploces rādiuss R, tad $(2\rho_1)^2=\rho_2^2+R^2$* ***(31)***

Pierādījums. *80.zīmējumā* B_2MO_1 ir taisnleņķa trijstūris (43.§), kādēļ $O_1B_2^2 = O_1M^2 + MB_2^2$. Tā kā $MB_2 = 0{,}5C_1B_2 = 0{,}5\cdot\rho_2$, $O_1M = 0{,}5\cdot OA = 0{,}5R$, $O_1B_2= \rho_1$, no šejienes ***(31)*** seko.

45. § Lemuāna taisne

Lemma. *Ja trijstūra ABC virsotni A ar patvaļīgi izvēlētu iekšēju punktu P savienojošā taisne AP krusto pamatu BC punktā A_1, tad B, C, A_1 ceturtais harmoniskais punkts A_2 (21.§) ar līdzīgā kārtā definētiem trijstūra pārējām malām atbilstošajiem punktiem B_2, C_2 pieder vienai un tai pašai taisnei p (ko sauc par punkta P trilineāro polāri vai harmonisko polāri attiecībā uz trijstūri ABC).*



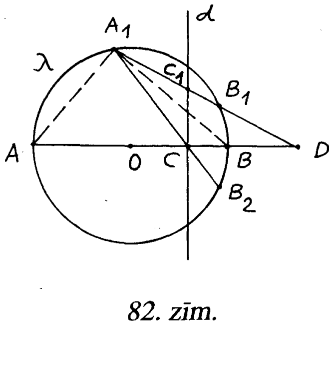
81. zīm.

Pierādījums. *81.zīmējumā* taisnes BC un B_1C_1 pēc 21.§ krustojas punktā A_2, taisnes AC, A_1C_1 punktā B_2 un AB, A_1B_1 punktā C_2. Pēc Dezarga teorēmas (23.§) punkti A_2, B_2, C_2 pieder vienai taisnei.

1.lemma. *Ja stari a, b, c, d ar kopīgu virsotni O krustojas ar patvaļīgu taisni t punktos A, B, C, D, pie kam $c\perp d$ un c ir leņķa (a,b) bisektrise, tad A, B, C, D ir harmoniski punkti.*

Pierādījums. Pēc ***(18)*** var pieņemt $t\perp c$. Tad $t\parallel d$, D ir bezgalīgi tālais punkts, AC = CB un pēc ***(17)*** (A, B, C, D) = - 1.

2.lemma. *Pols D un polāre d (attiecībā uz aploci λ) dala harmoniski katru hordu, kas iet caur D.*



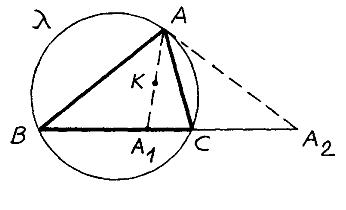
82. zīm.

Pierādījums. Pieņemsim, ka D atrodas ārpus λ un horda iet caur λ centru O. Tad ar r apzīmējot λ rādiusu, pēc 16.§ *82.zīmējumā* ir $2OC\cdot OD = 2r^2$ un līdz ar to $(OC + r)(OD - r) = (OD + r)(r - OC)$ jeb $AC\cdot BD = AD\cdot CB$ un pēc **(17)** punkti C, D sadala punktus A, B harmoniski.

Tagad pieņemsim, ka A_1B_1 ir patvaļīga horda, kas iet caur D, un tās krustpunkts ar D polāri d($\perp AB$) ir C_1. Tā kā A, B, C, D ir harmoniski punkti un $AA_1\perp A_1B$, pēc iepriekšējas lemmas nepieciešami, ka $\angle B_2A_1B = \angle BA_1B_1$, no kurienes seko $\cup B_1B = \cup BB_2$ un $\angle B_1CB = \angle B_2CB$. Tā kā A_1CB_1, B_1CB_2 ir blakusleņķi un BC ir pēdējā leņķa bisektrise, tad C_1C ($\perp CB$) ir pirmā leņķa bisektrise un pēc iepriekšējās lemmas $(A_1, B_1, C_1, D) = -1$ Līdzīgi pierāda lemmu gadījumā, kad D atrodas iekšpus λ.

Definīcija. *Trijstūra ABC Lemuāna punkta K trilineāro polāri (attiecībā uz ABC) sauc par šī trijstūra Lemuāna taisni.*

Teorēma. *Trijstūra ABC Lemuāna taisne ir Lemuāna punkta K polāre attiecībā uz trijstūrim apvilkto aploci λ (16.§)*



83. zīm.

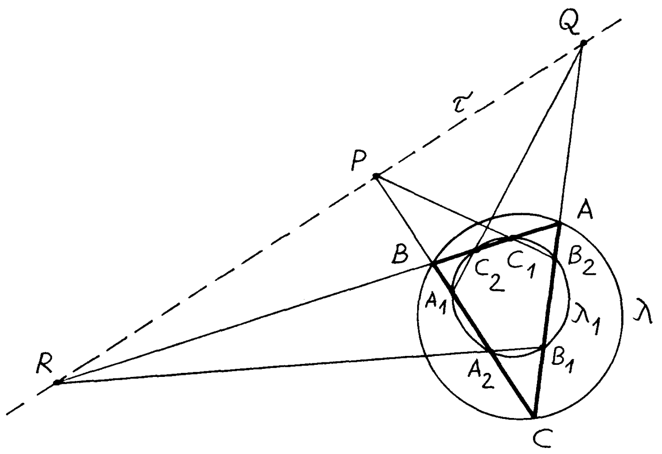
Pierādījums. *83.zīmējumā* AA_1 ir trijstūra ABC simediāna un pēc 41.§ λ pieskare punktā A iet caur B, C, A_1 ceturto harmonisko punktu A_2. Pēc 16.§ un iepriekšējās lemmas punkta A_2 polāre attiecībā uz λ ir taisne AA_1, kas iet caur Lemuāna punktu K. Tādēļ K polāre iet caur A_2. Pēc analoģijas K polāre iet arī caur B_2 un C_2.

No pierādījuma seko, ka trijstūra ABC iekšējās simediānas AA_1 pols attiecībā uz trijstūrim apvilkto aploci λ ir trijstūra ārējās simediānas un pamata krustpunkts A_2.

46.§ Pirmā Lemuāna sešstūra Paskāla taisne

1.teorēma *Trijstūra ABC pirmā Lemuāna sešstūra (43.§) Paskāla taisne (24.§) ir trijstūrim apvilktās aploces λ* un *pirmās Lemuāna aploces λ_1 radikālā ass (15.§)*

Pierādījums. Ja *84.zīmējumā* $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ ir trijstūra ABC pirmais Lemuāna sešstūris, tad taisnes B_2C_1 un BC ir antiparalēlas (38.§) un punkti B, C, B_2, C_1 pieder vienai aplocei x. Aploču λ, x radikālā ass ir BC un λ_1, x radikālā ass ir B_2C_1. Tās krustojas punktā P un caur to pēc 15.§ jāiet arī λ, λ_1 radikālai asij t. Pēc analoģijas tai jāiet arī caur AC, A_1C_2 krustpunktu Q un AB, A_2B_1 krustpunktu R, t.i., jāsakrīt ar sešstūra $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ Paskāla taisni.

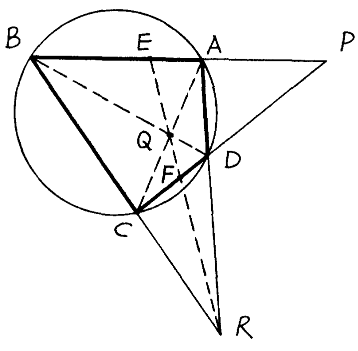


84. zīm.

Lemma *Aplocē ievilkta četrstūra divu pretējo malu AB, CD krustpunkta P polāre iet caur diagonāļu krustpunktu Q.*

Pierādījums. Ar R apzīmējam četrstūra malu AD, BC krustpunktu un ar E, F - punktus, kuros QR krusto malas AB, CD *(85.zīm.).* Pēc 21.§ ir $(A, B, E, P) = -1$ un $(C, D, F, P) = -1$.

Pēc iepriekšējā § 2.1emmas punkta P polāre iet caur E, F, tātad sakrīt ar taisni QR.

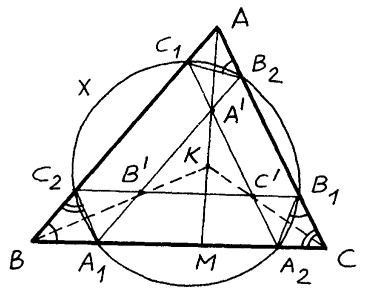


85. zīm.

2.teorēma. *Trijstūra ABC pirmā Lemuāna sešstūra Paskāla taisne PQ ir Lemuāna punkta K polāre attiecībā uz trijstūra pirmo Lemuāna aploci* λ_1.

Pierādījums. *84.zīmējumā* aplocē λ_1 ievilktā četrstūra $A_1A_2B_2C_1$ diagonāles A_1B_2, A_2C_1 krustojas punktā K (sal. 43.§), kādēļ pēc iepriekšējās lemmas punkta P polāre iet caur K. Pēc 16.§ 2.teorēmas punkta K polāre iet caur punktu P. Pēc analoģijas tā iet arī caur punktu Q un tātad sakrīt ar taisni PQ.

47.§ Takera aploces un Takera taisne (R.Tucker)



86. zīm.

Pēc 43.§ jebkuras divas taisnes A_1B_2, A_2C_1, kas vilktas caur trijstūra ABC pamata simediānas jebkuru punktu A' paralēli sānu malām, krusto trijstūra malas četros punktos A_1, A_2, B_2, C_1, kas pieder vienai aplocei x *(86.zīm.).*

Pēdējā krusto trijstūra sānu malas vēl divos punktos B_1, C_2. Nogrieznis C_1B_2 antiparalēls BC (43.§) un A_1C_2 antiparalēls AC

(no $\cup B_2C_1A_1 - \cup A_2B_1 = \cup B_2C_1C_2A_1 - \cup B_2C_1 = \cup C_1C_2A_1$ seko $\angle C = \angle BC_2A_1$).

Pēc analoģijas arī B_1A_2 antiparalēls AB. Nogriežņi B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1 ir vienlīdzīgi (jo $A_1B_2C_1C_2$ un $C_1A_2B_1B_2$ ir vienādsānu trapeces). No tā seko, ka arī $B_1C_2 \parallel BC$. Paralelograma $BA_1B'C_2$ diagonāle BB' arī ir trijstūra ABC simediāna (jo tā dala uz pusēm nogriezni A_1C_2, kas antiparalēls AC), un simediāna ir arī CC'. Pēc 31.§ trijstūru ABC un A'B'C' virsotnes savienojošās taisnes AA', BB', CC' krustojas kopīgā punktā K (kas ir trijstūra ABC Lemuāna punkts) un trijstūru malas ir paralēlas.

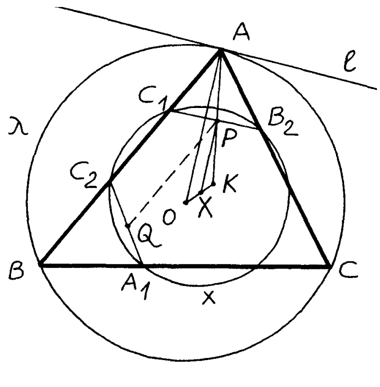
Tādēļ saka, ka ABC, A'B'C' ir homotētiski trijstūri ar homotētijas centru K.

Šie spriedumi pierāda:

1.teorēmu. *Punkti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, kuros trijstūra ABC malas krusto homotētiska trijstūra A'B'C' (ar homotētijas centru trijstūra ABC Lemuāna punktā K) malu pagarinājumi, pieder vienai un tai pašai aplocei x.*

Punktam A' aprakstot simediānu AM, x apraksta aploču saimi, ko sauc par trijstūra ABC Takera aplocēm. Šai saimei pieder trijstūrim ABC apvilktā aploce un abas Lemuāna aploces (tās dabū speciālā gadījumā, kad A' sakrīt ar A vai K vai kad K ir AA' viduspunkts).

2.teorēma. *Trijstūra ABC Takera aploču centru ģeometriskā vieta ir taisne t, kas savieno trijstūrim apvilktās aploces centru O ar trijstūra Lemuāna punktu K. t sauc par trijstūra ABC Takera taisni.*



87. zīm.

Pierādījums. *87.zīmējumā* O ir trijstūrim ABC apvilktās aploces λ centrs, *l* ir λ pieskare punktā A; x, K, B_2, C_1, C_2, A_1 nozīme kā iepriekšējā zīmējumā, P un Q ir B_2C_1 resp., C_2A_1 viduspunkti (kādēļ $PQ \parallel AB$), X ir B_2C_1 vidusperpendikula krustpunkts ar KO. Tā kā pieskare *l* perpendikulāra AO un antiparalēla BC (43.§), tā paralēla B_2C_1, seko $PX \parallel AO$ un

$$KX:KO = KP:KA = PQ:AB$$

Pieņemot, ka A_1C_2 vidusperpendikuls krusto KO punktā Y, līdzīgā kārtā pierāda proporciju $KY:KO = KQ:KB = PQ:AB$. Salīdzinot ar iepriekšējo, secina, ka $KX = KY$ jeb punkti X un Y sakrīt. Tas pierāda teorēmu.

Ievērojot, ka divu aploču radikālā ass ir perpendikulāra centru līnijai, dabū šādas

Sekas: *Trijstūra ABC Takera taisne ir perpendikulāra trijstūrim apvilktās aploces un pirmās Lemuāna aploces radikālajai asij. t.i., pirmā Lemuāna sešstūra Paskāla taisnei (46.§).*

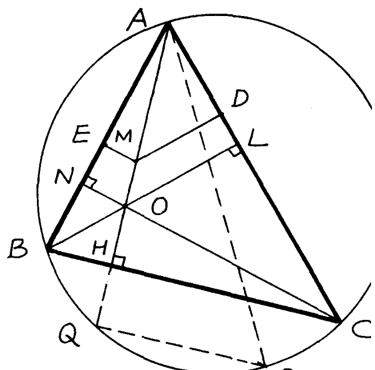
86.zīmējumā trijstūru $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ malas veido ar ABC malām vienu un to pašu leņķi φ, mērojamu ar loka B_2C_1 pusi.

Trijstūri $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ ir kongruenti (jo $A_1C_1 = B_2C_2$ kā vienādsānu trapeces diagonāles, utt.) un abi līdzīgi trijstūrim ABC ($\angle B = \angle C_1A_1B_1$, jo trijstūrī A_1BC_1 $\varphi + \angle C_1A_1B_1$ ir ārējais leņķis, bet φ un B ir tam nepiegulošie iekšējie leņķi, utt.).

No šejienes seko

3.teorēma. *Ja $A_1B_1C_1$ ir dotā trijstūrī ABC ievilkts līdzīgs trijstūris, kura malas ar ABC malām veido patvaļīgu leņķi φ, tad tā virsotnes A_1, B_1, C_1 pieder trijstūra ABC vienai un tai pašai Takera aplocei x; φ mainot no $0°$ līdz $180°$, dabū trijstūra ABC visas Takera aploces.*

48.§ Teilora aploce

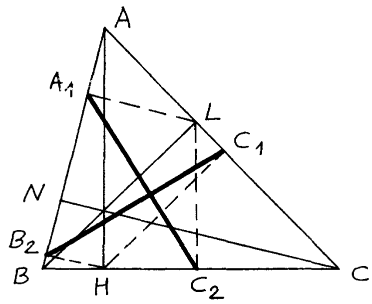


88. zīm.

(Taylor) lemma. *Trijstūra ABC augstuma AH jebkura punkta M projekcijas uz sānu malām savienojošais nogrieznis DE antiparalēls pamatam; tā garums $DE=AM\cdot a:2r$ **(32)**, kur r ir trijstūrim apvilktās aploces λ rādiuss un a - trijstūra mala BC.*

Pierādījums. *88.zīmējumā* O ir trijstūra ABC augstumu krustpunkts un AP ir λ diametrs. Tā kā punkti L, N pieder aplocei, kuras diametrs BC, tad LN antiparalēls BC (38.§). Trijstūriem ADE, ALN ir kopīgs leņķis un to ieslēdzošās malas proporcionālas: AE:AN = AD:AL (= AM:AO). Tādēļ tie ir līdzīgi trijstūri, no kā seko ED || LN un līdz ar to ED antiparalēls BC.

Ievērojot, ka PQ || BC, seko, ka loki BQ, PC ir vienlīdzīgi. Līdz ar to arī ∠BAQ = ∠PAC, ΔAEM ~ ΔACP, ΔADM ~ ΔABP un arī četrstūri AEMD, ACPB ir līdzīgi un seko proporcija DE:AM = BC:AP, kas ***(32)*** pierāda.



88a. zīm.

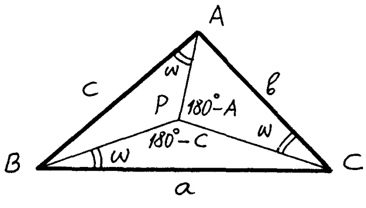
Teorēma. *Seši punkti, kurus dabū, trijstūra ABC augstumu pamatus H, L, N projicējot uz sānu malām, atrodas uz vienas aploces x'; pēdējā pieder Takera aploču saimei, x' sauc par trijstūra ABC Teilora aploci.*

Pierādījums. Punktu H, L, N projekcijas uz trijstūra ABC malām apzīmējam ar B_2, C_1; A_1, C_2; A_2, B_1 un trijstūra augstumus ar h_a, h_b, h_c. Ievērojot, ka katrā trijstūrī $ah_a= bh_b = ch_c$, ar ***(32)*** pierāda, ka trijstūra malu antiparalēles B_2C_1, A_1C_2 un A_2B_1 ir vienlīdzīgas. Tādēļ Takera aploce x', kas iet caur punktiem B_2, C_1, arī ies caur punktiem A_1, C_2, A_2, B_1 (sal. *86.zīm.)*

49.§ Brokāra punkti

(H.Brocard) 1.teorēma. *Ja punktu P ar trijstūra ABC virsotnēm savienojošie stari ar trijstūra malām veido vienu un to pašu leņķi ω, tad der Krelles formula (A.Crelle, 1816)*

$$ctg\omega = ctgA + ctgB + ctgC \quad \textbf{(33)}$$



89. zīm.

Pierādījums. *89.zīmējumā* no trijstūriem ABC, PBC, PCA izteic proporcijas b:a=sinB:sinA, a:PC = sinC:sinω, PC:b = sin(A - ω):sinA, kuras sareizinot dabū vienlīdzību

$\sin^2A\cdot\sin\omega = \sin B\cdot\sin C\cdot\sin(A - \omega)$, no kurienes

(tā kā ∠A=180°-∠B-∠C)

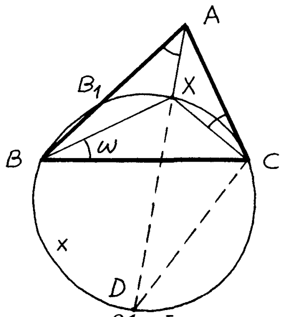
$\sin(B + C):(\sin B\cdot\sin C) = \sin(A - \omega):(\sin A\cdot\sin\omega)$ un, liekot

$\sin(B + C) = \sin B\cdot\cos C + \cos B\cdot\sin C$,

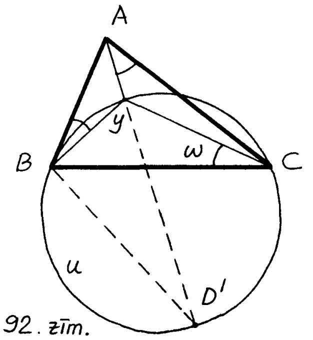
$\sin(A - \omega) = \sin A\cdot\cos\omega - \cos A\cdot\sin\omega$, dabū ***(33).***

2.teorēma. *Katrā trijstūrī ABC eksistē divi punkti X un Y, kurus ar trijstūra virsotnēm savienojošie stari veido ar trijstūra malām vienu un to pašu leņķi ω < 90° (tikai katram punktam citā virzienā).*

Punktus X un Y sauc par trijstūra ABC Brokāra punktiem un ω - par Brokāra leņķi. Par pirmo (otro) Brokāra punktu sauc to, no kura apejot Brokāra leņķus, trijstūra virsotnes tiek aprakstītas pozitīvā (negatīvā) virzienā (sal. *91., 92.zīm).*



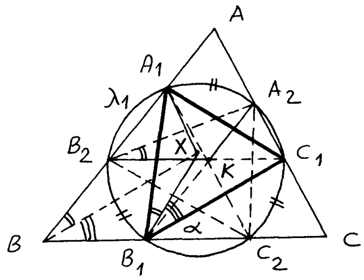
91. zīm.



92. zīm.

Pierādījums. *90.zīmējumā* K ir trijstūra ABC Lemuāna punkts, λ_1 - pirmā Lemuāna aploce un $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$ - pirmais sešstūris. Tādēļ $B_2KC_1 \| BC$, $A_2KB_1 \| AB$ un loki A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ir vienlīdzīgi (43.§). No šejienes seko, ka trijstūri $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ir kongruenti, abi līdzīgi trijstūrim ABC un to malas (katram citā virzienā) veido ar ABC saderīgajām malām vienu un to pašu leņķi α, kas mērojams ar $\cup C_1C_2$ pusi (sal. arī 47.§). Uzskatot K par trijstūra $A_2B_2C_2$ punktu, noteicam $A_1B_1C_1$ atbilstošo punktu X, konstruējot

$$\angle XA_1B_1 = \angle KA_2B_2 \text{ un } \angle XB_1A_1 = \angle KB_2A_2.$$



90. zīm.

Tā kā $\angle B + \angle X = \angle B_2 + \angle X = \angle A_2B_2C_1 + \angle C_1B_2C_2 + \angle X =$
$= \angle A_1B_1X + \angle B_2A_2B_1 + \angle X = \angle A_1B_1X + \angle B_1A_1X + \angle X = 2d,$
tad ap četrstūri BA_1XB_1 var apvilkt aploci x. Tādēļ leņķi A_1BX un A_1B_1X (kas balstās uz x vienu un to pašu loku) ir vienlīdzīgi. Līdz ar to $\angle XBB_1 = \angle XB_1C_1$ un seko, ka $\angle BXB_1 = \angle C_1B_1C = \alpha$. Līdzīgā kārtā pierāda, ka arī $\angle AXA_1$ un $\angle CXC_1$ vienlīdzīgi ar α.

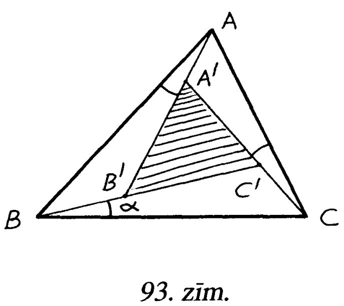
Tādēļ, pagriežot trijstūri $A_1B_1C_1$ negatīvā virzienā ap punktu X par leņķi α, taisne XB_1 ies XB virzienā, šī trijstūra malas kļūs paralēlas trijstūra ABC saderīgajām malām un saderīgās virsotnes savienojošās taisnes ies caur punktu X, kas būs abu trijstūru homotētijas centrs (47.§). Uzskatot K par trijstūra $A_1B_1C_1$ punktu, līdzīgā kārtā konstruē tam atbilstošo $A_2B_2C_2$ punktu Y, kas ir ABC un $A_2B_2C_2$ homotētijas centrs (pēc pagriešanas par leņķi α pozitīvā virzienā),

$$\angle XBC = \angle XB_1C_1 = \angle B_1 - \angle A_1B_1X = \angle B_2 - \angle A_2B_2C_1 = \angle C_1B_2C_2 = \alpha.$$

Līdzīgā kārtā arī leņķi XCA, XAB, YCB, YAC, YBA visi ir α, kas teorēmu pierāda.

Sekas. *Tā kā trijstūra ABC abi Brokāra punkti X, Y ir arī izogonāli saistīti punkti, tad tos projicējot uz trijstūra malām, dabū 6 punktus, kas pieder vienai aplocei (30.§).*

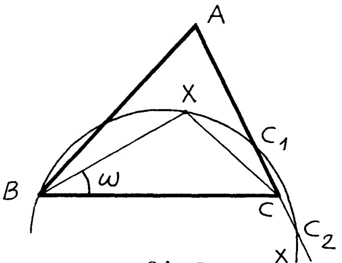
50.§ Brokāra punktu konstrukcijas



93. zīm.

Trijstūra ABC Brokāra punktu noteikšanai varētu konstruēt starus AA', BB', CC', kas ar trijstūra malām veido vienu un to pašu leņķi α; tā dabū trijstūrī ABC ieslēgtu trijstūri A'B'C' *(93.zīm.).* Pēdējais pamazinās ar α palielināšanos un robežgadījumā dod vienu no Brokāra punktiem.

Precīzu Brokāra punktu konstruēšanas metodi pamato ar sekojošo ***lemmu.*** *Aploce x, kas iet caur trijstūra ABC pamata BC galu punktiem un Brokāra punktu X, pieskaras vienai no sānu malām.*



94.zīm.

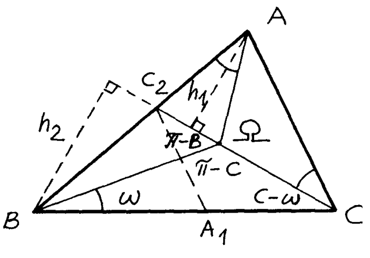
<u>Pierādījums.</u> Ja *94.zīmējumā* X ir pirmais Brokāra punkts un caur punktiem B, X, C vilktā aploce x sānu malai AC nepieskaras, bet krustojas ar AC punktos C, C_1 vai C, C_2, tad leņķis XCA ir mērojams ar pusi loka XC_1 vai pusi loka XC_2 un atšķiras no leņķa XBC (kas mērojams ar pusi loka XC).

Tātad Brokāra pirmo punktu X var konstruēt kā divu aploču x, y krustpunktu, ja x iet caur virsotni B un punktā C pieskaras malai AC un y iet caur virsotni C un punktā A pieskaras malai AB. Otrā Brokāra punkta konstruēšanai velk aploces u, v, no kurām pirmā iet caur virsotni C un punktā B pieskaras malai AB, bet otrā iet caur virsotni A un punktā C pieskaras malai BC. Punktu X var konstruēt arī kā aploces x krustpunktu ar taisni AD, ja D ir punkts, kurā x krustojas ar trijstūra malai AB paralēlu taisni caur punktu C *(91.zīm.)* un Y var konstruēt kā aploces u krustpunktu ar taisni AD', ja D' ir punkts, kurā u krustojas ar malai AC paralēlu taisni caur punktu B *(92.zīm.)*.

Pierādījumā jāievēro, ka *91.zīmējumā*

$$\cup BD - \cup B_1X = \cup B_1C - \cup B_1X = \cup XC, \text{ kādēļ } \angle XAB = \angle XBC = \angle XCA.$$

Līdzīgi pierāda vajadzīgo leņķu vienlīdzību *92.zīmējumā.*



95. zīm.

Lai apskatītu vēl citu konstrukcijas metodi, pieņemam, ka *95.zīmējumā* Ω ir trijstūra ABC Brokāra punkts, h_1, h_2 ir taisnes CΩ attālumi līdz A, B un C_2 ir tās krustpunkts ar AB. Tad trijstūriem BΩC, BΩA ir

$$a:B\Omega = \sin(\pi - C):\sin(C - \omega),\ B\Omega:c = \sin\omega:\sin(\pi - B),$$

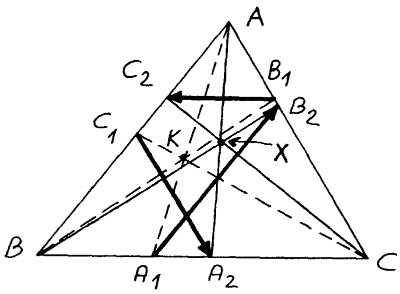
no kurienes $\sin A:\sin C = a:c = (\sin C \cdot \sin\omega):\sin B\cdot\sin(C - \omega)$

un līdz ar to $\sin\omega:\sin(C - \omega) = (\sin A\cdot\sin B):\sin^2 C$. Ja $C_2A_1 \| AC$, no šejienes

(un tā kā $a\sin B = b\sin A$) izteic $CA_1:A_1B = AC_2:C_2B = h_1:h_2 =$

$$= (b\cdot\sin\omega):a\sin(C - \omega) = (b\cdot\sin A\cdot\sin B):a\sin^2 C = (\sin B:\sin C)^2 = b^2:c^2.$$

Pēc 41.§ punkts A_1 pieder pamata BC simediānai. No šejienes seko, ka caur trijstūra ABC simediānu galu punktiem A_1, B_1, C_1 (jeb punktiem, kurus dod trijstūra virsotnes ar Lemuāna punktu K savienojošās taisnes) velkot trijstūra malām paralēlas taisnes vienā un tanī pat rotācijas virzienā, dabū trijstūra malu punktus C_2, A_2, B_2, kurus ar pretējām virsotnēm savienojošās taisnes krustojas vienā no Brokāra punktiem. Velkot paralēlas taisnes pretējā rotācijas virzienā, tādā pat kārtā konstruē otru Brokāra punktu.



96. zīm.

Ja trijstūra <u>patvaļīgu</u> punktu K savieno ar virsotnēm un ar uz pretējām malām dabūtajiem punktiem A_1, B_1, C_1 izdara tikko apskatīto konstrukciju *(96.zīm.),* arī tad punktus C_2, A_2, B_2 ar pretējām virsotnēm savienojošās taisnes krustojas vienā un tanī pat punktā X (jo pēc Čeva teorēmas $(AB_1:B_1C)(CA_1:A_1B)(BC_1:C_1A) = 1$ un šīs attiecības var apmainīt ar $BA_2:A_2C$, $AC_2:C_2B$, $CB_2:B_2A$). Mainot rotācijas virzienu, tādā pat kārtā dabū vēl otru punktu Y. Tā konstruētos punktus ap 1870.g. daži autori sauca par brokāriskiem punktiem.

51.§ Brokāra leņķis

<u>1.teorēma.</u> *Brokāra leņķim ω der novērtējums $0 < \omega \leq 30°$.*
Vienādmalu trijstūrim ir $\omega = 30°$.

<u>Pierādījums.</u> Ja $A + B + C = 180°$, tad $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C =$

$$= ((\sin A\cdot\cos B + \sin B\cos A)\cdot\cos C + \sin C\cdot\cos A\cdot\cos B):(\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C) =$$

$$= (\sin(A + B)\cdot\cos C + \sin C\cdot\cos A\cdot\cos B):(\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C) =$$

$$= ((\sin C(- \cos(A + B) + \cos A\cdot\cos B)):(\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C) =$$

$= (\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C):(\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$ jeb $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B \cdot \mathrm{tg}C$.

Te liekot $\mathrm{tg}A = 1/\mathrm{ctg}A$, $\mathrm{tg}B = 1/\mathrm{ctg}B$, $\mathrm{tg}C = 1/\mathrm{ctg}C$ un atmetot kopīgos saucējus, dabū formulu $\mathrm{ctg}A \cdot \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}B \cdot \mathrm{ctg}C + \mathrm{ctg}C \cdot \mathrm{ctg}A = 1$ ***(34)***

No šejienes un ***(33)*** ir $0 \le (\mathrm{ctg}A - \mathrm{ctg}B)^2 + (\mathrm{ctg}B - \mathrm{ctg}C)^2 + (\mathrm{ctg}C - \mathrm{ctg}A)^2 =$

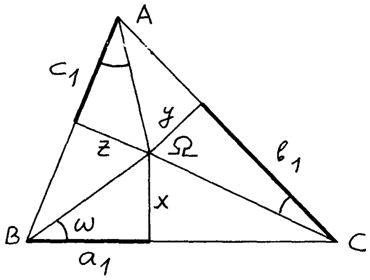
$= 2(\mathrm{ctg}^2A + \mathrm{ctg}^2B + \mathrm{ctg}^2C) - 2 =$

$=2((\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C)^2 - 2(\mathrm{ctg}A \cdot \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}A \cdot \mathrm{ctg}C + \mathrm{ctg}B \cdot \mathrm{ctg}C)) - 2 =$

$=2(\mathrm{ctg}^2\omega - 2) - 2$, kādēļ $\mathrm{ctg}^2\omega \ge 3$ un $0 < \omega \le 30°$.

Ja $A = B = C = 60^0$, tad pēc **(33)** ir $\mathrm{ctg}\omega = 3 \cdot \mathrm{ctg}60° = \sqrt{3}$ un $\omega = 30°$.

2.teorēma. *Trijstūrim ar malām a, b, c un laukumu L ir* $\mathrm{ctg}\omega = (a^2+b^2+c^2):4L$ ***(35)***



97. zīm.

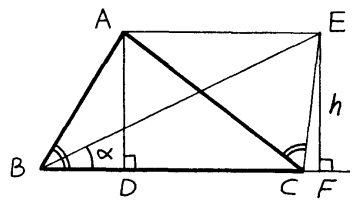
Pierādījums. Ja, Brokāra punktu Ω projicējot uz trijstūra malām, dabū nogriežņus a_1, b_1, c_1 *(97.zīm.),* tad pēc Šteinera teorēmas (29.§) ir $a_1^2+b_1^2+c_1^2=(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2$, no kurienes

$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0{,}5\,(a^2 + b^2 + c^2)$ ***(36)***

Ar x, y, z apzīmējot punkta Ω attālumus līdz trijstūra malām, izteic $L = 0{,}5(ax+by+cz) = 0{,}5(aa_1\mathrm{tg}\omega+bb_1\mathrm{tg}\omega+cc_1\mathrm{tg}\omega) =$

$= 0{,}5(aa_1 + bb_1 + cc_1)\mathrm{tg}\omega$.

No šejienes un ***(36)*** teorēma seko.



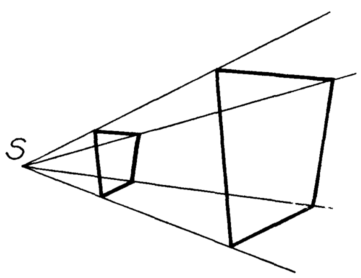
98. zīm.

Lai konstruētu trijstūra ABC Brokāra leņķi ω , caur virsotni A velk pamatam BC paralēlu taisni AE, kur punktu E noteic, atliekot $\angle ACE = \angle B$ *(98.zīm.).*

Savienojot B ar E, dabū leņķi α, kam, ar h apzīmējot trijstūra augstumu, ir $h \cdot \mathrm{ctg}\alpha = BF = BD + DC + CF =$

$= h \cdot \mathrm{ctg}B + h \cdot \mathrm{ctg}C + h \cdot \mathrm{ctg}A$ jeb $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C$. Salīdzinot ar ***(33)***, secina, ka $\alpha = \omega$.

52.§ Trijstūru līdzības centrs

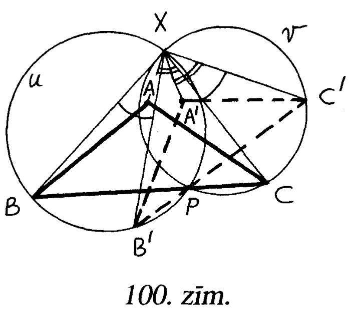


99. zīm.

Definīcija. *Divus n - stūrus sauc par* *homotētiskiem* *tad, ja viņu atbilstošās malas paralēlas un saderīgās virsotnes savienojošās taisnes iet caur kopīgu punktu S (99.zīm.); pēdējo sauc par homotētijas centru (sal. 47.§).*

Homotētiskās figūras ir perspektīvu figūru (23.§) speciāls gadījums.

No definīcijas seko, ka homotētiski n -stūri ir arī līdzīgi, t.i., saderīgie leņķi ir vienlīdzīgi un malas proporcionālas. Apgrieztais spriedums neder. Tomēr ik divām līdzīgām plāksnes figūrām (piemēram, viena un tā paša apgabala divām dažāda mēroga ģeogrāfiskajām kartēm) var atrast punktu X, ap kuru vienu figūru par piemērotu leņķi pagriežot, divas figūras kļūst homotētiskas (ar centru X - A.A.); tādu X sauc par abu figūru līdzības centru. Pietiek pierādīt tā eksistenci gadījumā, kad figūras ir trijstūri.



100. zīm.

1.teorēma. *Ik diviem līdzīgiem trijstūriem ABC, A'B'C' eksistē līdzības centrs X, ko noteic krustojoties divas aploces u, v, katra no kurām iet caur vienu pāri saderīgu virsotņu un to savienojošo malu krustpunktu.*

Pierādījums. *100.zīmējumā* ir $\Delta BCX \sim \Delta B'C'X$, jo

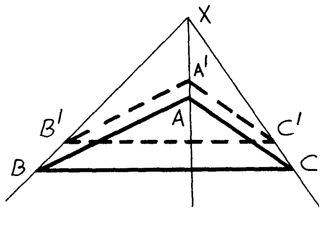
$\angle XBC = \angle XB'C'$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz u loku PX)

un $\angle BCX = \angle B'C'X$ (kā leņķi, kas balstās uz v loku XP),

kādēļ $\angle BXC = \angle B'XC'$ un līdz ar to $\angle BXB'=\angle CXC'$.

Tā kā $\angle ACX = \angle BCX - \angle BCA = \angle B'C'X - \angle B'C'A' = \angle A'C'X$ un

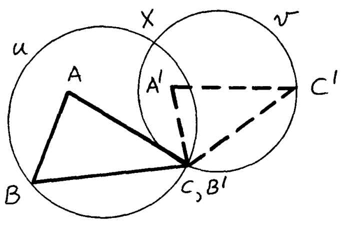
$AC:A'C' = BC:B'C' = CX:C'X$, tad $\Delta XAC \sim \Delta XA'C'$, $\angle AXC = \angle A'XC'$ un seko
$\angle AXA' = \angle AXC + \angle CXA' = \angle A'XC' + \angle CXA' = \angle CXC' = \varphi$.



101. zīm.

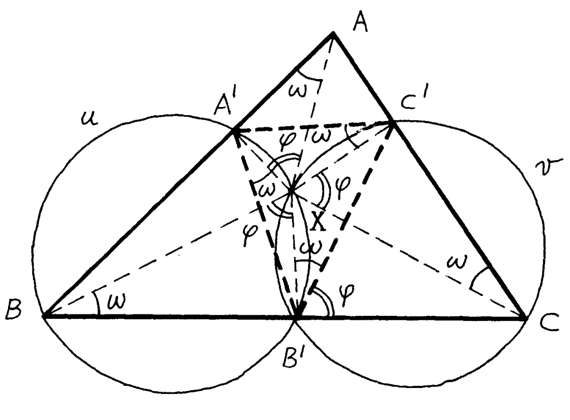
Lietojot līdzīgos trijstūrus ABX, A'B'X, pierāda, ka arī $\angle BXB' = \varphi$. Tādēļ, trijstūri B'XC' pagriežot ap punktu X negatīvā virzienā par leņķi φ, mala XB' ies pa XB, XC' pa XC, trijstūru BXC, B'XC' līdzības dēļ malas BC, B'C' būs paralēlas, XA' ies pa XA un trijstūri ABC, A'B'C' būs homotētiski *(101.zīm.)* Speciālā gadījumā, kad B' atrodas uz malas BC, tad punkti B', P sakrīt un aploce u malai B'C' punktā B' pieskaras. Citādi pierādījums kā iepriekš.

Ja B' sakrīt ar C *(l02.zīm.),* tad aploce u iet caur B, C un punktā C pieskaras malai B'C', bet v iet caur B', C' un punktā C pieskaras malai BC. Pierādījums kā iepriekš.



102. zīm.

<u>2.teorēma.</u> *Ja A'B'C' ir trijstūrī ABC ierakstīts līdzīgs trijstūris, kura virsotne A' pieder malai AB, tad trijstūru līdzības centrs X abos trijstūros ir pirmais Brokāra punkts.*



103. zīm.

<u>Pierādījums.</u> Ar u apzīmējam aploci, kas iet caur punktiem B, B' un pieskaras malai B'C', bet ar v - aploci, kas iet caur C, C', B' *(l03.zīm.).*

Tā kā $\angle B = \angle B'$, tad aplocei u jāiet arī caur punktu A'.

Ievērojam, ka $\angle XBC = \angle XB'C'$, jo katrs no tiem mērojams ar u loka B'X pusi, un $\angle XCB = \angle XC'B'$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz v loku XB'.

Tādēļ $\Delta BCX \sim \Delta B'C'X$ un $\angle BXC = \angle B'XC'$.

Līdz ar to $\angle BXB' = \angle CXC' = \varphi$. ***(37)***

Bez tam $\angle XCA = \angle BCA - \angle BCX =$
$= \angle B'C'A' - \angle B'C'X = \angle XC'A'$ un arī
$\angle XCA = \angle XB'C' = \omega$ (kā leņķi, kas balstās uz loku XC').

Tā kā arī $AC:A'C' = BC:B'C' = XC:XC'$, tad $\Delta ACX \sim \Delta A'C'X$ un seko $\angle A'XC' = \angle AXC$, kādēļ arī $\angle A'XA = \angle C'XC = \varphi$. Tas kopā ar ***(37)*** pierāda, ka X ir trijstūru ABC, A'B'C' līdzības centrs.

Ievērojam, ka $\omega = \angle XBB' = \angle XA'B'$ (kā leņķi, kas balstās uz loku XB') un arī $\angle A'C'X = \angle XCC' = \omega$, jo $\Delta XC'A' \sim \Delta XCA$. Ap četrstūri AA'XC' var apvilkt aploci, jo $\angle XC'A = \angle XB'C$ (katrs no tiem mērojams ar v loka XC'C pusi) un $\angle AA'X = \angle XB'B$ (mērojami ar u loka XA'B pusi), tātad četrstūra pretējo leņķu summa ir 2d. Tagad $\omega = \angle A'C'X = \angle A'AX$ (jo balstās uz vienu un to pašu loku) un teorēma seko.

Trijstūru ABC un A'B'C' saderīgās malas veido vienu un to pašu leņķi φ. Tam mainoties, dabūjam bezgalīgi daudzus ierakstītos trijstūrus A'B'C', kam visiem ar ABC ir kopīgs līdzības centrs X.

Ja trijstūrī ABC līdzīgais trijstūris A'B'C' ir ievilkts tā, ka virsotne A' atrodas uz malas AC, tad trijstūru līdzības centrs Y abos trijstūros ir otrais Brokāra punkts. Pieņemot virsotni A' uz malas BC, nekādu vienkāršu rezultātu nedabū.

53.§ Brokāra pirmais trijstūris un aploce

Ja uz dotā trijstūra ABC malām konstruē vienādsānu trijstūrus A'BC, ..., kuriem leņķis pie pamata ir ABC Brokāra leņķis ω, tad virsotņu A', B', C' veidoto trijstūri A'B'C' sauc par pirmo Brokāra trijstūri. Ja Ω un Ω' ir dotā trijstūra Brokāra punkti, tad A' var konstruēt kā BΩ, CΩ' krustpunktu; B' ir CΩ, AΩ' krustpunkts, bet C' ir AΩ, BΩ' krustpunkts.

Pēc definīcijas A' pieder malas BC vidusperpendikulam, B' - malas AC vidusperpendikulam, C' - malas AB vidusperpendikulam.

No taisnleņķa trijstūra A'MB (kur M ir BC viduspunkts) un ***(35)*** izteic

$$A'M = BM\cdot tg\omega = a/2\cdot 4L:(a^2 + b^2 + c^2) = 2a\cdot L:(a^2 + b^2 + c^2).$$

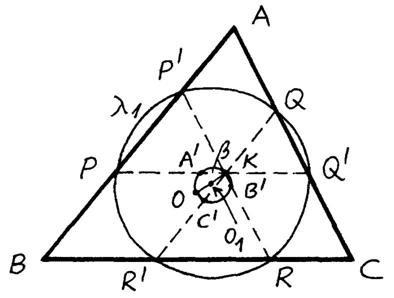
Pēc 39.§ tāds pat ir arī Lemuāna punkta K attālums līdz malai BC. Tādēļ punkts A' ir punkta K projekcija uz BC vidusperpendikula un līdzīgs spriedums der punktiem B', C'.

Tas pierāda ***1.teorēmu.*** *Pirmā Brokāra trijstūra virsotnes ir dotā trijstūra Lemuāna punkta K projekcijas uz malu vidusperpendikuliem.*

Pirmajam Brokāra trijstūrim apvilkto aploci sauc par trijstūra ABC Brokāra aploci.

2.teorēma. *Trijstūris ABC ir apgriezti līdzīgs savam pirmajam Brokāra trijstūrim. Trijstūra ABC Brokāra aploces β centrs ir trijstūra apvilktās aploces centru O un Lemuāna punktu K savienojošā nogriežņa viduspunkts (tātad pēc 43.§ Brokāra aploce koncentriska pirmajai Lemuāna aplocei λ_1), un β iet caur punktiem O, K, Ω, Ω'. (Brokārs savu aploci sauca par 7 punktu aploci).*

Pierādījums. Tā kā KA'O ir taisns leņķis, tad punkts A' pieder aplocei ar diametru OK. Līdzīgā kārtā šai aplocei pieder arī punkti B' un C', kādēļ tā ir Brokāra aploce. Uz trijstūra malām paralēlām taisnēm, kas vilktas caur punktu K, atrodas pirmā Brokāra trijstūra virsotnes un pirmās Lemuāna aploces λ_1 krustpunkti P, P', Q, Q', R, R' ar dotā trijstūra malām. Tādēļ *104.zīmējumā* BPKR' ir paralelograms un ∠B=∠A'KC'=∠B' (pēdējie leņķi balstās uz β □vienu un to pašu loku). Līdzīgi pierāda, ka ∠C = ∠C', ∠A=∠A'. Trijstūri ABC un A'B'C' jāsauc par apgriezti līdzīgiem, jo to atbilstošās virsotnes sakārtotas pretējos rotācijas virzienos.

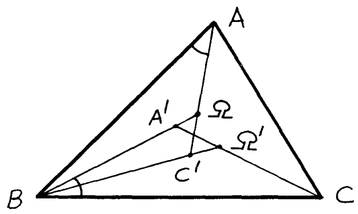


104. zīm.

105.zīmējumā A'ΩC' ir trijstūra AΩB ārējais leņķis.

Tādēļ ∠A'ΩC' = ∠ABΩ + ∠BAΩ = ∠B - ω + ω = ∠B = ∠B'.

Tādēļ Ω pieder to punktu ģeometriskai vietai, no kuriem nogrieznis A'C' redzams leņķī B', t.i., Brokāra aplocei β. Līdzīgi pierāda, ka šai aplocei pieder arī punkts Ω'.

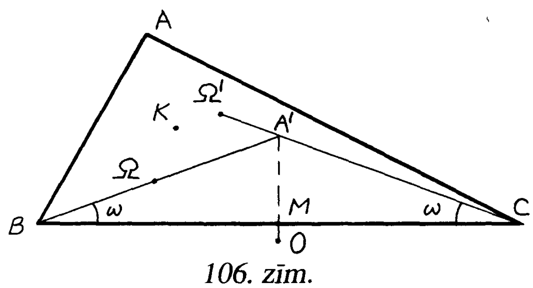


105. zīm.

Nogriezni OK sauc par Brokāra diametru. ΩΩ' sauc par Brokāra taisni.

3.teorēma. *Brokāra taisne ir perpendikulāra Brokāra diametram (jeb punkti Ω, Ω' ir simetriski pret OK).*

Pierādījums. *106.zīmējumā* uz Brokāra aploces loku ΩK balstās ∠KA'Ω=ω; uz loku Ω'K balstās leņķis KA'Ω' = ω. Tādēļ šie loki vienlīdzīgi un teorēma seko.



106. zīm.

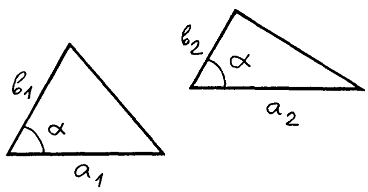
4.teorēma. Trijstūris *ABC ar tā pirmo Brokāra trijstūri ir trijkārt perspektīvi trijstūri: saderīgās virsotnes A, A'; B, B'; C, C' savienojošās taisnes iet caur kopīgu punktu X, virsotnes A, C'; B, A'; C, B' savienojošās taisnes iet caur punktu* Ω, *bet virsotnes A, B'; B, C'; C, A' savienojošās taisnes iet caur punktu* Ω'.

Pierādījums. Tā kā *104.zīmejumā* β un λ_1 ir koncentriskas aploces, tad

$$A'P = KQ',\ KQ = C'R',\ KP' = B'R.$$

Šos nogriežņus projicējot no trijstūra ABC virsotnēm uz pretīmgulošām malām, dabū šo malu izotomi saistītus punktus A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 (36.§). Tos ar trijstūra virsotnēm savienojošās trīs taisnes iet caur kopīgu punktu K. Tādēļ arī pārējās trīs iet caur punktu X, kas ar K izotomi saistīts attiecībā uz trijstūri ABC. Teorēmas otru daļu pierāda ar trijstūra A'B'C' konstruēšanas priekšrakstu *(l06.zīm.).*

54.§ Brokāra pirmā trijstūra laukums



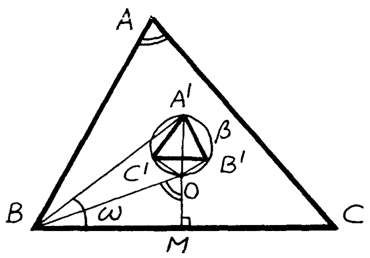
107. zīm.

Lemma. *Ja diviem trijstūriem ir vai nu viens un tas pats leņķis α vai vienā ir leņķis α un otrā 180°- α, tad trijstūru laukumi attiecas kā šo leņķi ieslēdzošo malu reizinājumi.*

Pierādījums. Ja 107.zīmējumā trijstūru laukumi ir L_1, L_2, tad $L_1 = 0{,}5\cdot a_1b_1\sin\alpha$, $L_2 = 0{,}5\cdot a_2b_2\sin\alpha$ un $L_1:L_2 = (a_1b_1):(a_2b_2)$.

Teorēma. *Ja L(ABC) apzīmē trijstūra ABC laukumu, ω ir trijstūra ABC Brokāra leņķis un A'B'C' - pirmais Brokāra trijstūris,*

tad $\lambda = L(A'B'C'):L(ABC) = \frac{1}{4}(1 - 3\mathrm{tg}^2\omega)$ ***(38)***



108. zīm.

Pierādījums. Ja *108.zīmējumā* O ir trijstūra ABC (ar malām a, b, c) apvilktās aploces α centrs un A'OM - malas BC vidusperpendikuls, tad, apskatot α lokus, uz kuriem balstās A un BOM, pierāda, ka šie leņķi vienlīdzīgi; tādēļ $OM=0{,}5a\cdot\mathrm{ctg}A$. Tā kā $A'M = 0{,}5\cdot a\cdot\mathrm{tg}\omega$, tad $OA' = A'M - OM = 0{,}5\cdot a(\mathrm{tg}\omega-\mathrm{ctg}A)$. ***(39)***

Līdzīgi pierāda, ka $OB' = -0{,}5b(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}B)$,

$OC' = -0{,}5c(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}C)$. ***(40)***

Trijstūriem A'C'O un ABC ir viens un tas pats leņķis: $\angle B = \angle B' = \angle C'OA'$ (kā leņķi, kas balstās uz β vienu un to pašu loku). Arī trijstūros A'B'O un ABC ir pāris vienlīdzīgu leņķu: $\angle C=\angle C'= \angle A'OB'$, bet trijstūros C'OB' un ABC ir leņķi C'OB' un A'=A, kuru summa 180°. Tādēļ pēc iepriekšējās lemmas $L(C'OA'):L(ABC) = (OC'\cdot OA'):ac$, $L(A'OB'):L(ABC) = (OA'\cdot OB'):ab$,

$$L(C'OB'):L(ABC) = (OC'\cdot OB'):bc.$$

No šejienes un ***(39)***, ***(40)***, ***(33)***, ***(34)*** izteic

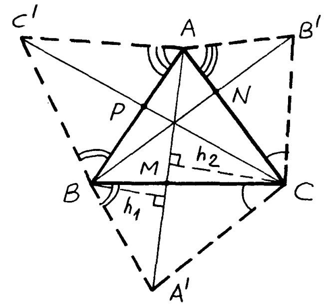
$$\lambda = L(A'B'C'):L(ABC) = (L(C'OA') + L(A'OB') - L(C'OB')):L(ABC) =$$
$$= -0{,}25(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}A)(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}C) - 0{,}25(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}A)(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}B) - 0{,}25(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}B)(\mathrm{tg}\omega - \mathrm{ctg}C) =$$
$$= -0{,}25\,[3\mathrm{tg}^2\omega - 2\mathrm{tg}\omega\,(\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C) + \mathrm{ctg}A\cdot\mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}A\cdot\mathrm{ctg}C + \mathrm{ctg}B\mathrm{ctg}C] =$$
$$= -0{,}25(3\mathrm{tg}^2\omega - 2 + 1) = 0{,}25(1 - 3\mathrm{tg}^2\omega),$$ kas teorēmu pierāda.

No šejienes seko, ka $\mathrm{tg}^2\omega \leq 1/3$ jeb $\omega \leq 30°$ (sal. 51.§). Ievērojot, ka līdzīgu trijstūru laukumi attiecas kā saderīgo malu kvadrāti, kā apvilkto aploču rādiusu kvadrāti utt., izteic Brokāra pirmā trijstūra malas $a' = a\sqrt{\lambda}$, $b' = b\sqrt{\lambda}$, $c' = c\sqrt{\lambda}$ ***(41)*** un Brokāra aploces rādiusu $r' = r\sqrt{\lambda}$ (ja r ir trijstūrim ABC apvilktās aploces rādiuss). No ***(38)*** un ***(41)*** seko, ka vienādmalu trijstūrī pirmais Brokāra trijstūris reducējās uz punktu.

55.§ Telkampfa teorēma (1825.g.)

Teorēma. *Ja uz dotā trijstūra ABC malām to vienādās pusēs (iekšpusē vai ārpusē) ir konstruēti trijstūri A'BC, B'AC, C'AB, kam vienā un tanī pat virsotnē saejošie leņķi vienlīdzīgi, tad atbilstošās virsotnes A, A'; B, B'; C, C' savienojošās taisnes krustojas vienā punktā X.*

Pierādījums. Ja *109.zīmējumā* M, N, P ir taišņu AA', BB', CC' krustpunkti ar trijstūra ABC malām un h_1, h_2 ir punktu B, C attālumi līdz taisnei AA', tad L(ABA'):L(ACA') = h_1:h_2 = BM:MC un līdzīgā kārtā L(BCB'):L(BAB') = CN:NA, L(CAC'):L(CBC') = AP:PB,



109. zīm.

no kurienes k = (BM:MC)·(CN:NA)·(AP:PB) =

= (L(ABA'):L(ACA'))·(L(BCB'):L(BAB'))·(L(CAC'):L(CBC')) =

=(L(ABA'):L(CBC'))·(L(BCB'):L(ACA'))·(L(CAC'):L(BAB')) ***(42)***

Labajā pusē vienas un tās pašas attiecības trijstūros ir pa vienam vienādam leņķim, kādēļ pēc iepriekšējā § lemmas to laukumi attiecas kā šo leņķi ieslēdzošo malu reizinājumi, no kurienes

k = (AB:CB)·(BA':BC')·(BC:AC)·(CB':CA')·(CA:BA)·(AC':AB') =

= (BA':CA')·(CB':AB')·(AC':BC') = 1 pēc sinusu teorēmas.

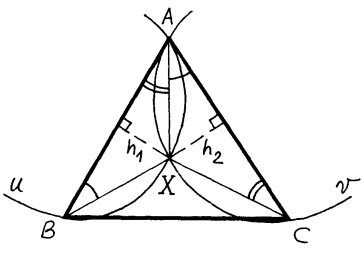
Tāpēc no ***(42)*** BM·CN·AP = MC·NA·PB un vajadzīgo rezultātu pierāda Čeva apgrieztā teorēma (20.§).

Sekas. *Ja uz trijstūra ABC malām to vienādās pusēs ir konstruēti vienādsānu trijstūri ar vienu un to pašu leņķi pie pamata, tad to virsotnes ar pretējām dotā trijstūra virsotnēm savienojošās taisnes iet caur vienu un to pašu punktu X.*

No šejienes un trijstūra ABC pirmā Brokāra trijstūra A'B'C' konstrukcijas *(105.zīm.)* seko 53.§ rezultāts, ka ABC un A'B'C' ir perspektīvi trijstūri.

56.§ Brokāra otrais trijstūris

1.lemma. *Ja aplocei u trijstūra ABC sānu mala AB ir horda un sānu mala AC pieskare, bet aplocei v otrādi (t.i. AC - horda un AB -pieskare), tad uz šīm sānu malām konstruētu tieši līdzīgu trijstūru (vai citu figūru) līdzības centrs ir u, v krustpunkts X un taisne AX ir trijstūra ABC simediāna.*

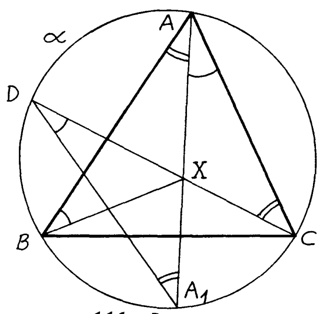


110. zīm.

Pierādījums. *110.zīmējumā* ∠ABX = ∠XAC (abi mērojami ar u loka AX pusi) un ∠BAX = ∠XCA (mērojami ar v loka AX pusi).

Tādēļ ∠AXB = ∠AXC = φ. Trijstūri AXC pagriežot pozitīvā virzienā par leņķi φ, mala AC būs paralēla malai AB un uz šīm malām konstruēti līdzīgi trijstūri kļūs homotētiski. Tā kā līdzīgo trijstūru AXB, AXC augstumi h_1, h_2 ir proporcionāli saderīgajām malām: h_1:h_2= c:b, tad pēc 39.§ AX ir trijstūra ABC simediāna.

2.lemma. *Iepriekšējā lemmā minētais punkts X dala caur viņu ejošo trijstūrim ABC apvilktās aploces α hordu AA_1 uz pusēm.*

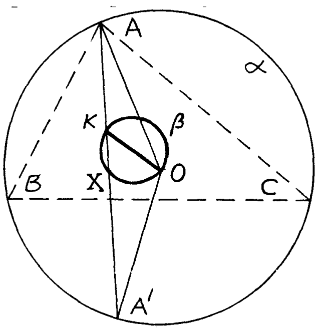


111. zīm.

Pierādījums. Ievērojot iepriekšējo pierādījumu, *111.zīmējumā* ir ∠ABX = ∠A_1AC = ∠A_1DC (kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku A_1C) un ∠BAX = ∠ACD = ∠AA_1D (balstās uz α loku AD). Tādēļ aploces α loki AD un BA_1 ir vienlīdzīgi. Līdz ar to arī

∪AB = ∪AD + ∪DB = ∪DB + ∪BA_1 = ∪DA_1 un seko hordu vienlīdzība AB = DA_1. Tādēļ trijstūri ABX un A_1DX ir kongruenti un seko AX=XA_1.

3.lemma. *Iepriekšējās lemmās minētais punkts X pieder trijstūra ABC Brokāra aplocei β.*



112. zīm.

Pierādījums. Ja *112.zīmējumā* K ir trijstūra ABC Lemuāna punkts un O -apvilktās aploces α centrs, tad, ievērojot iepriekšējās lemmas, OX $\perp AA_1$ jeb OXK ir taisns leņķis. Tā kā OK pēc 53.§ ir aploces β diametrs, tad punkts X pieder β.

Trijstūra ABC simediānas krustojas ar Brokāra aploci Lemuāna punktā K un trīs citos punktos A'', B'', C'' (A'' pieder virsotnes A simediānai utt.), kuri veido otro Brokāra trijstūri. Tas ir Brokāra aplocē ievilkts dotajam trijstūrim ABC perspektīvs trijstūris ar perspektīvas centru Lemuāna punktā K. Otrā Brokāra trijstūra virsotne A'' ir iepriekšējo lemmu punkts X, kas ir uz dotā trijstūra ABC malām AB, AC konstruētu līdzīgu figūru līdzības centrs. Analoga īpašība ir trijstūra pārējām virsotnēm B'', C''. Tas pierāda

teorēmu: *Trijstūra ABC otrā Brokāra trijstūra virsotnes A'', B'', C'' ir tādu līdzīgu figūru līdzības centri, kas konstruētas uz atbilstošā virsotnē saejošām dotā trijstūra malām.*

III. IEVILKTIE UN APVILKTIE DAUDZSTŪRI

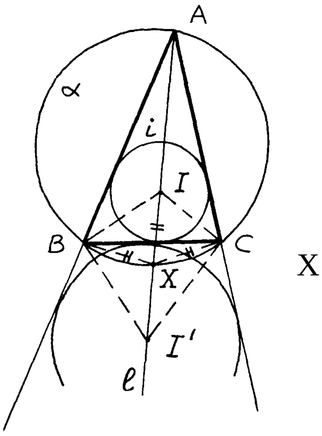
57.§ Eilera formula

Lemma. *Jebkura trijstūra bisektrise l krusto trijstūrim apvilkto aploci α punktā X, kas vienādi attālināts no trijstūrī ievilktās aploces i centra l un trijstūra tās malas galu punktiem, kuru l krusto.*

Pierādījums. *113.zīmējumā* ∠BAX = ∠CAX, kādēļ arī ∪BX=∪CX un līdz ar to BX = CX. Tā kā BI un BI' ir blakus leņķu bisektrises, tad tās perpendikulāras. Tādēļ aploce u ar diametru II' iet caur punktu B. Līdzīgā kārtā u iet arī caur punktu C. Leņķis BIX kā trijstūra AIB ārējais leņķis ir

0,5(∠A + ∠B), arī ∠IBX = ∠IBC + ∠CBX = 0,5(∠B + ∠A).

Tādēļ IXB ir vienādsānu trijstūris jeb IX = BX. Aploce ar centru un rādiusu XB iet caur punktiem B, I, C, tātad sakrīt ar u un iet arī caur punktu I'. Tas pierāda, ka X ir II' viduspunkts.

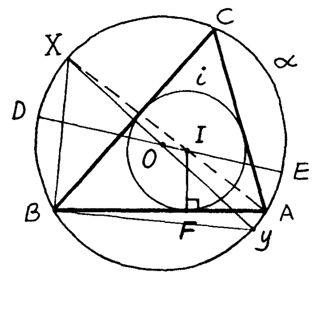


113. zīm.

1.teorēma. *Ja R ir trijstūrim ABC apvilktās aploces rādiuss, r - ievilktās aploces rādiuss un d - aploču centru attālums, tad $d^2=R^2-2Rr$* ***(43)***

(Šo formulu ar gariem algebriskiem aprēķiniem pierādīja Eilers 1765.g. un to sauc Eilera vārdā. Kāds toreiz pazīstams angļu autors Čepls (Chapple) 1746.g. pierādīja apgriezto slēdzienu zemāk sekojošās 2.teorēmas formā. Ilje (L. Huilier) 1811.g. pirmais pamanīja, ka, ja eksistē viens trijstūris, kas ievilkts dotajā aplocē α un apvilkts dotai aplocei i, tad tādu trijstūru ir bezgalīgi daudz.)

Pierādījums. *114.zīmējumā* O ir trijstūra ABC apvilktās aploces α centrs, I - ievilktās aploces i centrs, F ir i pieskaršanās punkts malai AB. XY ir malai BC perpendikulārs α diametrs, bet DE - diametrs caur punktu I. Tad ∪BX = ∪XC un leņķa A bisektrise AI iet caur punktu X.



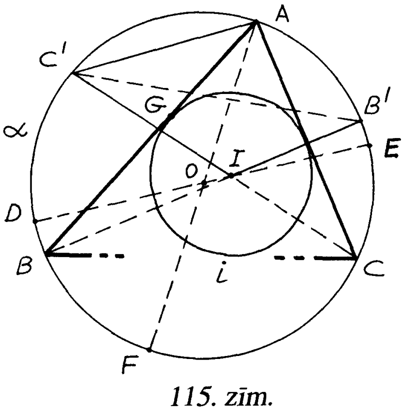
114. zīm.

Leņķi Y un BAX ir vienlīdzīgi (jo balstās uz α vienu un to pašu loku), kādēļ taisnleņķa trijstūri AFI, YBX ir līdzīgi un IF:AI = BX:XY jeb IF·XY = AI·BX. Tā kā pēc iepriekšējās lemmas BX = IX, seko vienlīdzības r·2R = AI·IX = EI·ID = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2, kas formulu ***(43)*** pierāda.

Ievērojot, ka d^2=R(R - 2r) ≥ 0, seko, ka 2r ≤ R ***(44)***, jeb trijstūrī ievilktās aploces diametrs nepārsniedz apvilktās aploces rādiusu. Patvaļīgi izvēlētajiem r, R, kam der ***(44)***, var konstruēt d (kā R un R-2r vidējo ģeometrisko) tā, ka der ***(43)***. Tad atbilstošā aploce i atrodas iekšpus α (pretējā gadījumā ir d + r > R, no kurienes d^2>R^2 + r^2 - 2Rr un, lietojot ***(43)***, secina 0 > r^2).

2.teorēma. *Ja i un α ir divas aploces, kuru rādiusi r, R un centru distance d apmierina nosacījumu* ***(43)****, tad var konstruēt bezgalīgi daudz trijstūru ABC, kam i ir ievilktā un α apvilktā aploce.*

Pierādījums. *115.zīmējumā* I ir i centrs un O - aploces α centrs. Izvēloties α patvaļīgu punktu A, velk i pieskares AB, AC, leņķa A bisektrisi AI, taisnes BIB', CIC' un dabūtos α punktus B', C' savieno savā starpā un ar punktu A. Ja pierādīsim, ka četrstūra AC'IB' pretējās virsotnēs B', C' saejošās malas ir vienlīdzīgas: C'A=C'I un B'A = B'I ***(45)*** (tādu četrstūri sauc par deltoīdu), tad



115. zīm.

būs $\Delta AC'B' \cong \Delta IC'B'$ un sekos, ka leņķi AC'B', IC'B' ir vienlīdzīgi. Līdz ar to būs vienlīdzīgi arī leņķi ABB', CBB' (kas balstās uz α vienlīdzīgiem lokiem) un sekos, ka punkts I vienādi attālināts no trijstūra ABC visām trim malām, kādēļ i ir trijstūrī ievilkta aploce.

Ar DE apzīmējam α diametru, kas iet caur I.

Pēc ***(43)*** ir $2Rr = (R + d)(R - d) = DI \cdot IE = BI \cdot IB' = CI \cdot IC'$, no kurienes

$$BI:r = 2R:B'I, \quad CI:r = 2R:C'I \quad \textbf{\textit{(46)}}$$

Ja AF ir α diametrs, kas iet caur A, un G - punkts, kurā AB pieskaras i, tad taisnleņķa trijstūri BGI, FB'A ir līdzīgi (jo $\angle GBI = \angle F$ kā leņķi, kas balstās uz α vienu un to pašu loku) un der proporcija $BI:r = 2R:B'A$. No šejienes un ***(46)*** seko ***(45)*** otrā vienlīdzība. Līdzīgi pierāda pirmo. Ievērojot, ka par A var izvēlēties jebkuru α punktu, teorēma seko.

58.§ Ievilkti un apvilkti četrstūri

1.lemma. *To punktu X ģeometriskā vieta, kuru attālumu kvadrātu summa līdz diviem dotiem punktiem A un B pastāvīga:* $AX^2 + BX^2 = const$ ***(47),*** *ir aploce ar centru AB viduspunktā.*

Pierādījums. Līdz ar punktu X meklējamai ģeometriskai vietai pieder arī X pretējā virsotne Y paralelogramā, kas konstruēts uz malām AX, BX. Tā kā paralelograma malu kvadrātu summa vienlīdzīga diagonāļu kvadrātu summai, ar O apzīmējot diagonāļu viduspunktu, pēc ***(47)*** ir

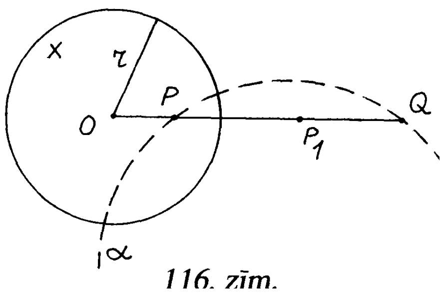
$$4(OX^2 + OB^2) = const \text{ un līdz ar to arī } OX = const.$$

Definīcija. *P un P_1 sauc par inversiem punktiem attiecībā uz aploci x ar centru O un rādiusu r tad, ja tie atrodas uz viena stara ar virsotni O un* $OP \cdot OP_1 = r^2$ ***(48)***

Par ģeometriskas figūras F inverso figūru sauc figūru F', ko veido F punktu inversie punkti.

2.lemma. *Aploces α, kas neiet caur inversijas centru O, inversā figūra arī ir aploce α'. Tās centrs pieder taisnei, kas savieno α centru ar inversijas centru.*

Pierādījums. Ja *116.zīmējumā* punkts P apraksta aploci α, tad šo aploci apraksta arī punkts Q, kas atrodas uz viena stara ar virsotni inversijas centrā O, pie kam $OP \cdot OQ = const$. Izdalot ar ***(48)***, izteic $OQ:OP_1 = const$, kādēļ, punktam Q izskrienot aploci α, punkts P_1 apraksta tai līdzīgu figūru ar līdzības centru O un lemma seko.



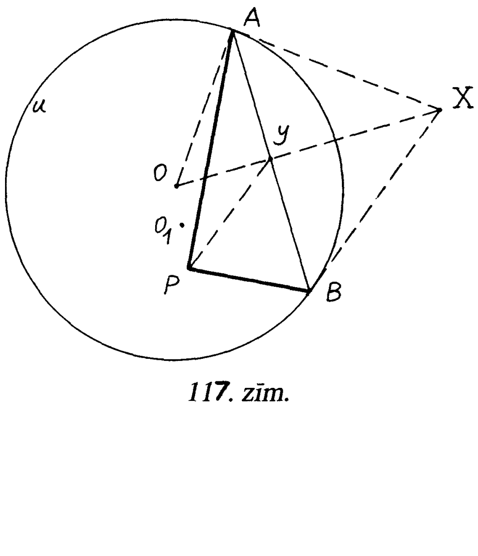
116. zīm.

3.1emma. *Ja taisnais leņķis griežas ap nekustīgu virsotni P iekšpus aploces u, tad punktos A un B, kuros leņķa malas krusto aploci u, novilkto pieskaru krustpunkts X apraksta aploci v.*

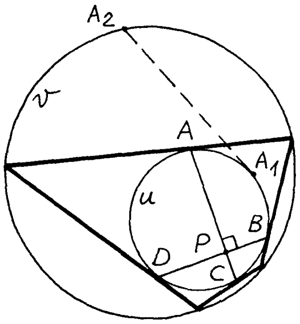
Pierādījums. *117.zīmējumā* X ar aploces u centru O savienojošā taisne OX krusto hordu AB viduspunktā Y un ir tai perpendikulāra. Taisnleņķa trijstūrī APB mediāna PY vienlīdzīga hipotenūzas pusei, kādēļ

$$PY = AY \text{ un } OY^2 + PY^2 = OY^2 + AY^2 = OA^2 = const.$$

Pēc 1.lemmas Y apraksta aploci, kuras centrs ir nogriežņa OP viduspunkts O_1. Tā kā $OY \cdot OX = OA^2$, tad punkti X un Y ir inversi attiecībā uz aploci u un pēc 2.1emmas līdz ar Y arī X apraksta aploci. Tās centrs O_2 pieder staram OO_1.



117. zīm.



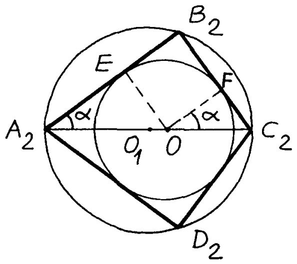
118. zīm.

Parādīsim, kā jebkurai aplocei u var aprakstīt bezgalīgi daudzus četrstūrus A'B'C'D', kas visi reizē ir ievilkti kādā citā aplocē v.

Caur patvaļīgi izvēlētu u iekšēju punktu P *(118.zīm.)* velk divas perpendikulāras hordas AC, BD. Caur to galu punktiem A, B, C, D vilktās pieskares veido četrstūri, kura virsotnes pēc iepriekšējās lemmas pieder vienai un tai pašai aplocei v. Punktu P atstājot vietā, bet mainot perpendikulāro hordu virzienus, dabū bezgalīgi daudzus četrstūrus, kas apvilkti aplocei u un reizē ievilkti aplocē v (var iepriekš izvēlēties četrstūra vienu virsotni v patvaļīgā punktā A_2, no kura tad velk u pieskari A_2A_1, caur punktu P velk perpendikulāras u hordas, no kurām viena iet caur A_1 utt.)

Sekas. *Ja iepriekšējās teorēmas aploču u, v rādiusi ir r un R un centru distance d, tad der formula* $(R + d)^{-2} + (R-d)^{-2} = r^{-2}$ ***(49)***

(Šo formulu ar komplicētiem aprēķiniem 18.g.s. beigās pierādīja Eilera skolnieks N.Fuss. Ja visus kāpinātājus - 2 atvieto ar -1, tad dabū trijstūriem atbilstošo formulu ***(43)****)*



119. zīm.

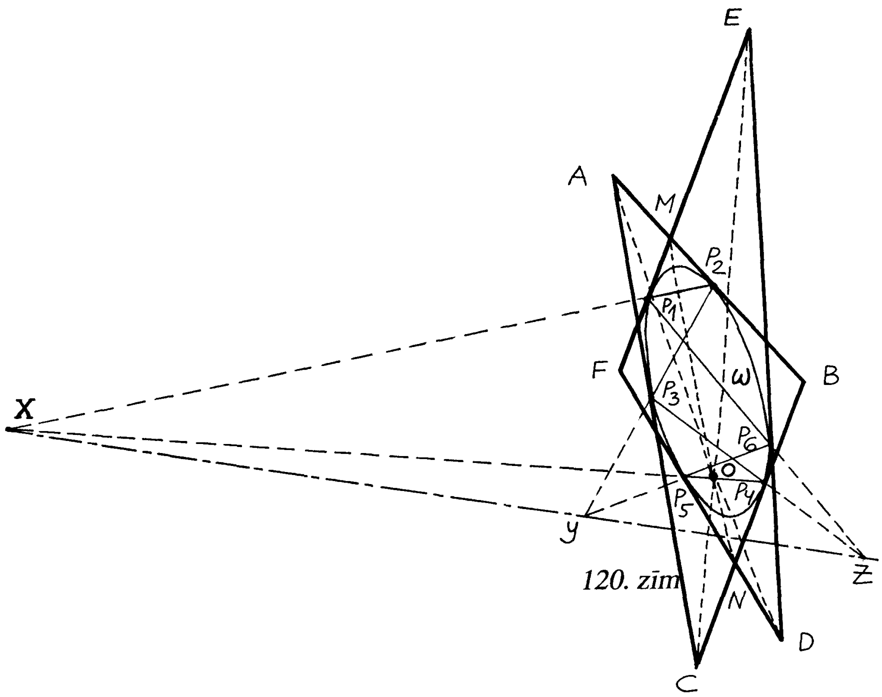
Pierādījums. Ja četrstūra virsotni A_2 izvēlas uz aploču u, v centru līnijas OO_1, tad simetrijas dēļ virsotne C_2 būs A_2 diametrāli pretējais punkts *(119.zīm.)*. Ja E, F ir malu A_2B_2, B_2C_2 un aploces u pieskaršanās punkti, tad OF || A_2B_2, kādēļ $\angle B_2A_2C_2 = \angle FOC_2 = \alpha$ un

$$\sin\alpha = OE:A_2O = r:(R + d),\ \cos\alpha = OF:OC_1 = r:(R - d).$$

Šīs vienlīdzības kāpinot kvadrātā, saskaitot un dalot ar r^2, dabū ***(49)***.

59.§ Otrās pakāpes līknēm apvilkti trijstūri

1.teorēma. *Otrās pakāpes līknei u aprakstītu divu trijstūru ABC, DEF virsotnes pieder citai otrās pakāpes līknei v.*



120. zīm.

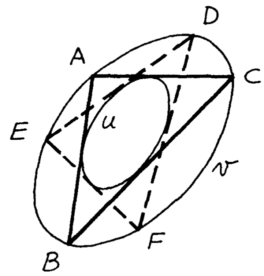
Pierādījums. *120.zīmējumā* ar $P_1, ..., P_6$ apzīmējam līknei u apvilkto trijstūru malu pieskaršanās punktus; ar M un N apzīmējam malu AB, EF resp. BC, DF krustpunktus. Pēc Paskāla teorēmas (24.§) sešstūra $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ pretējo malu P_1P_2, P_4P_5; P_2P_3, P_5P_6; P_3P_4, P_6P_1 krustpunkti X, Y, Z pieder vienai taisnei. 16.§ aplocei pierādītie rezultāti par polu un polāri der jebkurai otrās pakāpes līknei (pierāda, aploci projicējot no piemērota centra), kādēļ punkta E polāre ir P_1P_6, C polāre P_3P_4 un taisnes EC pols ir Z. Līdzīgi spriežot, pierāda, ka taisnes AD pols ir Y un MN pols ir X. Tādēļ arī punktu X, Y, Z polāres ir taisnes MN, AD, EC un tām jākrustojas vienā punktā O (jo X, Y, Z pieder taisnei). Sešstūra BADFEC pretējās malas BA, FE; AD, EC; DF, CB krustojas punktos M, O, N, kas pieder vienai taisnei.

Tādēļ pēc Paskāla apgrieztās teorēmas ap sešstūri BADFEC var aprakstīt otrās pakāpes līkni v. Lietojot Briansona teorēmu (pēc kuras otrās pakāpes līknei apvilkta 6 - stūra pretējās virsotnes savienojošās diagonāles krustojas vienā punktā) un tās apgriezto, līdzīgā kārtā pierāda

<u>duālo teorēmu:</u> *Otrās pakāpes līknē v ievilkti divi trijstūri reizē ir apvilkti citai otrās pakāpes līknei u.*

<u>2.Ponselē teorēma.</u> *Ja eksistē viens trijstūris ABC, kas ievilkts otrās pakāpes līknē v un apvilkts otrās pakāpes līknei u, tad tādu trijstūru ir bezgalīgi daudz.*

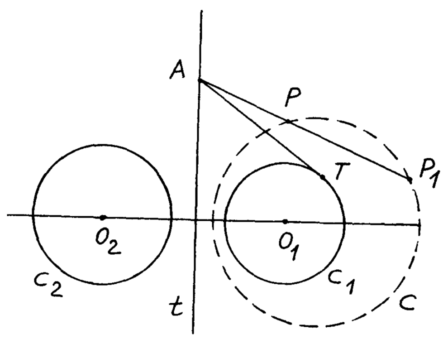
<u>Pierādījums.</u> Izvēlas v patvaļīgu hordu DE, kas pieskaras u, un no punktiem D, E velk u pieskares un noteic to krustpunktu F *(121.zīm.).* Pēc pirmās teorēmas punkti A, B, C, D, E, F pieder vienai un tai pašai otrās pakāpes līknei, kas identiska v, jo ar 5 punktiem A, B, C, D, E otrās pakāpes līkne ir noteikta viennozīmīgi. Tas teorēmu pierāda (jāpiezīmē, ka u un v var būt dažādu nosaukumu otrās pakāpes līknes, piemēram, u ir parabola, v - elipse).



121. zīm.

60.§ Koaksiālu aploču saime

<u>1.teorēma.</u> *Ik divas aploces c_1, c_2, kuru centri O_1, O_2 ir divi dažādi punkti, viennozīmīgi noteic apločų saimi S, kuras ik divām aplocēm ir viena un tā pati radikālā ass t, perpendikulāra taisnei O_1O_2, kam pieder S apločų centri. Caur plaknes jebkuru punktu P iet S viena vienīga aploce.*



122. zīm.

<u>Pierādījums.</u> Teorēma acīmredzama gadījumā, kad aploces c_1, c_2 krustojas punktos A un B, tad t iet caur A un B. Ja aploces c_1, c_2 pieskaras punktā A, tad t ir to kopīgā pieskare un S katra aploce pieskaras taisnei t punktā A. Ja aplocēm c_1, c_2 nav kopīgu punktu *(122.zīm.),* tad, izvēloties to radikālās ass t patvaļīgu punktu A, velk c_1 pieskari AT, ārpus t dotajam punktam P konstruē punktu P_1 tā, ka $AP \cdot AP_1 = AT^2$, un velk aploci c caur punktiem P, P_1 ar centru uz taisnes O_1O_2. Pēc 15.§ t ir arī apločų c, c_1 radikālā ass, kādēļ c ir saimes S aploce, kas iet caur punktu P. Ja caur punktu P ietu vēl cita S aploce c', tad c, c' radikālā ass ietu caur punktu P, kādēļ c un c' abas reizē nevar būt saimes S aploces. (Pieņemot, ka koncentrisku apločų radikālā ass ir bezgalīgi tālā taisne, teorēmu var vispārināt arī koncentrisku apločų saimei.)

<u>2.teorēma.</u> *Katra aploce a, kuras centrs A pieder koaksiālo apločų saimes S radikālai asij un rādiuss vienlīdzīgs pieskares garumam AT (kas vilkta no punkta A pret S kaut kuru aploci c_1), krusto S katru aploci ortogonāli.*

<u>Pierādījums.</u> No punkta A vilktām S apločų pieskarēm ir pastāvīgs garums (sal. 15.§).

61.§ Robežpunkti

<u>Teorēma.</u> *Katra aploce x, kas ortogonāla nekrustojošamies aplocēm c_1, c_2 (un līdz ar to ortogonāla ar c_1, c_2 noteiktās koaksiālo apločų saimes S katrai aplocei), iet caur c_1, c_2 centru līnijas O_1O_2 diviem pastāvīgiem punktiem.*

Ponselē šos punktus sauc par apločų saimes S <u>robežpunktiem</u> un apzīmē ar L, L'.

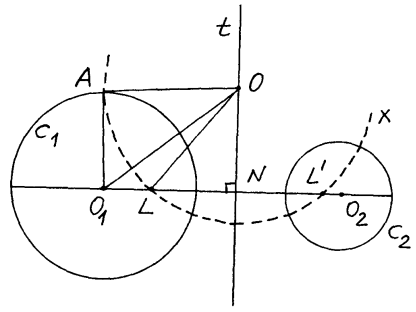
Pierādījums. Ja *123.zīmējumā* t ir c_1, c_2 radikālā ass, N - tās krustpunkts ar centru līniju O_1O_2, O ir t patvaļīgs punkts un OA ir c_1 pieskare, tad aploce x ar centru O un rādiusu r = OA aploces c_1, c_2 krusto ortogonāli. No taisnleņķu trijstūriem OAO_1, ONO_1 izteic

$$OA^2 = OO_1^2 - O_1A^2 > OO_1^2 - O_1N^2 = ON^2$$

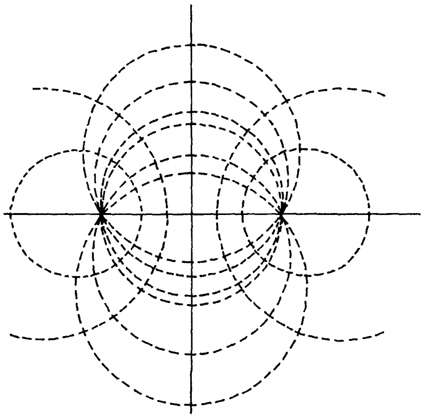
un secina OA>ON. Tādēļ aploce x centru līniju O_1O_2 krusto punktos L, L', kas acīmredzot ir simetriski pret radikālo asi t. No taisnleņķa trijstūriem LNO, OAO_1 izteic vienlīdzības

$$LN^2 = LO^2 - ON^2 = OA^2 - ON^2 =$$
$$=OO_1^2 - O_1A^2 - ON^2 = O_1N^2 - O_1A^2 = k^2,$$

kur konstante k no aploces x nav atkarīga. Tas teorēmu pierāda. Ievērojot, ka c_1 un x krustojas ortogonāli, var viegli pierādīt, ka punkts L, kurā x krusto O_1O_2, atrodas aplocē c_1 un līdzīgā kārtā L' atrodas aplocē c_2. (Tiešām, tā kā *123.zīmējumā* $\angle OLO_1 > \angle OAO_1 = 90°$, tad, atņemot $\angle OLA=\angle OAL$, dabū trijstūra ALO_1 leņķu nevienlīdzību $\angle ALO_1 > \angle O_1AL$, kam seko malu nevienlīdzība $AO_1 > O_1L$.) Šis slēdziens der arī tad, ja c_1, c_2 atvieto ar tās pašas saimes S citām aplocēm un liek to rādiusiem tuvoties nullei. Robežgadījumā c_1 top par L un c_2 par L'.



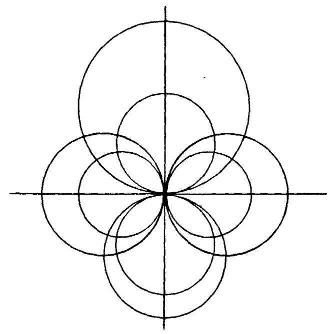
123. zīm.



124. zīm.

Sekas. *Koaksiālu apločhu saimes S ortogonālās aploces x arī veido koaksiālu apločhu saimi S'. Vienas saimes radikālā ass ir otras saimes centru līnija. Tādas saimes S, S' sauc par* *saistītām koaksiālu apločhu saimēm (124.zīm.).*

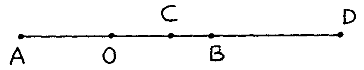
Speciālā gadījumā, kad saimes S visas aploces savstarpēji pieskaras punktā A, tad arī S' visas aploces šinī punktā pieskaras un vienu saimi dabū no otras ar pagriešanu ap punktu A par taisnu leņķi (125.zīm).



125. zīm.

62.§ Robežpunkti kā inversi punkti

1.lemma. *Ja A, B, C, D ir četri harmoniski saistīti punkti, t.i., (AC:CB):(AD:DB) = - 1* ***(50)*** *un O ir AB viduspunkts, tad* $OC{\cdot}OD=OA^2$ ***(51)*** *Apgrieztā kārtā no* ***(51)*** *seko* ***(50)***.



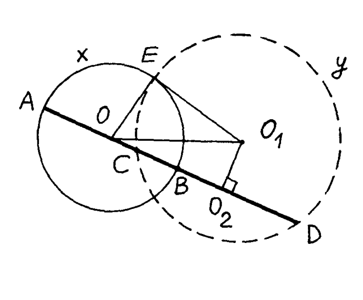
126. zīm.

Pierādījums. Ievērojot ***(50)***, der vienlīdzība

$$AC{\cdot}DB = - CB{\cdot}AD, \text{ kur liek}$$

AC = AO + OC, DB = DO - BO, - CB = OC - OB, AD = AO + OD *(126.zīm.),* atver iekavas un saīsina abās pusēs vienādos locekļus (ievērojot, ka AO = OB); paliek vienlīdzība $2{\cdot}OA^2 = 2{\cdot}OC{\cdot}OD$.

2.lemma. *Ja x un y ir ortogonālas aploces un AB ir x patvaļīgs diametrs, kas krustojas ar y punktos C, D, tad A, B, C, D ir harmoniski saistīti punkti.*



127. zīm.

Pierādījums. *127.zīmējumā* no taisnleņķu trijstūriem OO_2O_1, CO_2O_1, OEO_1 izteic

$$OO_2^2 = OO_1^2 - O_1O_2^2 = OE^2+O_1E^2 - (O_1C^2 - CO_2^2) = OE^2+ CO_2^2,$$

no kurienes $OO_2^2 - CO_2^2 = OE^2$,

$$(OO_2 - CO_2)(OO_2 + CO_2) = OA^2,\ OC(OO_2 + O_2D) = OA^2$$

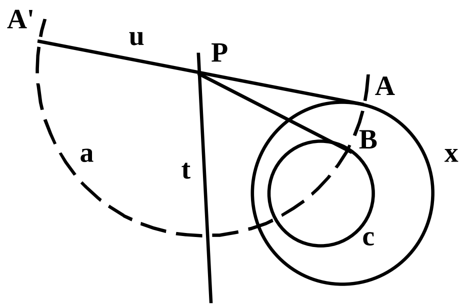
jeb der **(51)**, kādēļ A, B, C, D ir harmoniski saistīti punkti. Pēc 58.§ C un D sauc par inversiem punktiem attiecībā uz aploci x ar centru O un rādiusu OA tad, ja tie atrodas uz viena stara ar virsotni O un der ***(51)***. No šīs definīcijas, iepriekšējām lemmām un 61.§ seko

Teorēma. *Koaksiālu aploču saimes S robežpunkti L, L' ir inversi attiecībā uz saimes jebkuru aploci c.*

63.§ Saimes aploces, kas pieskaras dotajai taisnei

Teorēma. *Ja taisne u nav paralēla koaksiālo aploču saimes S radikālai asij t, tad eksistē tieši divas saimes aploces* x, y *(katrā t pusē pa vienai), kas pieskaras taisnei u.*

Pierādījums. Pieņemam, ka eksistē saimes S aploce x, kas pieskaras taisnei u punktā A, un ar P apzīmējam t, u krustpunktu *(128.zīm.).* Aploce a ar centru P un rādiusu PA krusto ortogonāli aploci x un līdz ar to saimes S jebkuru aploci c. Tādēļ a var konstruēt kā saimes aplocei c ortogonālo aploci ar centru P (tās rādiuss sakrīt ar pieskari PB, kas vilkta no punkta P). Taisne u krustojas ar aploci a diametrāli pretējos punktos A, A', kuros pret u celtie perpendikuli, krustojoties ar saimes aploču centru līniju v, noteic meklējamo aploču x, y centrus un rādiusus.



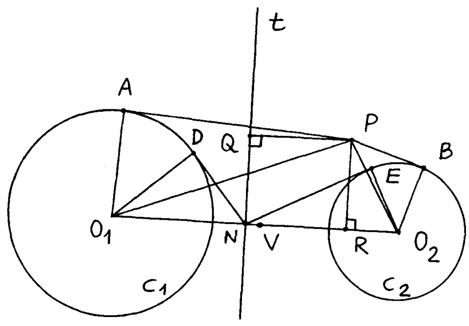
128. zīm.

Ja taisne u paralēla saimes S radikālai asij t, tad taisnei u pieskaras tikai viena S aploce (pieņemot, ka robežpunkti un radikālā ass ir saimes aploču speciāli gadījumi).

64.§ Kēsija teorēma

(J.Casey) teorēma. *Ja punkts P atrodas ārpus aplocēm c_1, c_2 ar centriem O_1, O_2 un p_1, p_2 ir P potences attiecībā uz šīm aplocēm (15.§), tad $p_1 - p_2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot PQ$,* ***(52)****, kur PQ ir punkta P attālums līdz c_1, c_2 radikālai asij.*

Pierādījums. Ar A un B apzīmējot c_1, c_2 punktus, kuros vilktās pieskares iet caur P, pēc ***(12)*** ir $p_1 = PA^2$, $p_2 = PB^2$. Ar R apzīmējam punkta P projekciju uz centru līniju, ar N apzīmējam radikālās ass krustpunktu ar centru līniju, ar D, E apzīmējam c_1, c_2 punktus, kuros vilktās pieskares iet caur N, un ar V apzīmējam O_1O_2 viduspunktu *(129.zīm.).* Tad no taisnleņķa trijstūriem PAO_1, PBO_2, PRO_1, PRO_2, O_1DN, O_2EN izteic



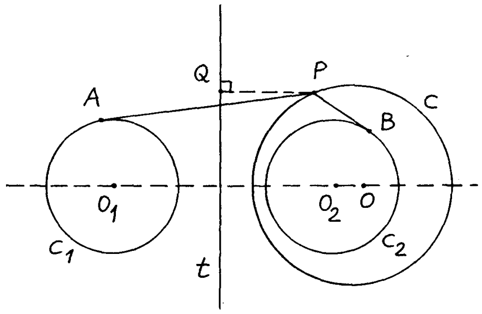
129. zīm.

$$p_1 - p_2 = PA^2 - PB^2 = (PO_1^2 - AO_1^2) - (PO_2^2 - BO_2^2) =$$
$$= (PR^2 + O_1R^2 - AO_1^2) - (PR^2 + RO_2^2 - BO_2^2) =$$
$$= O_1R^2 - RO_2^2 - (AO_1^2 - BO_2^2) =$$
$$= (O_1R + RO_2)(O_1R - RO_2) - (DO_1^2 - EO_2^2) =$$
$$= O_1O_2 \cdot 2VR - (O_1N^2 - DN^2 - NO_2^2 + EN^2) =$$
$$= 2\, O_1O_2 \cdot VR - (O_1N^2 - NO_2^2) =$$
$$= 2 \cdot O_1O_2 \cdot VR - (O_1N - NO_2) \cdot (O_1N + NO_2) =$$
$$= 2 \cdot O_1O_2 \cdot VR - O_1O_2 \cdot 2 \cdot VN = 2 \cdot O_1O_2 \cdot (VR - VN) =$$
$$= 2 \cdot O_1O_2 \cdot NR = 2 \cdot O_1O_2 \cdot PQ$$

(Pierādījumā dažviet jādomā par orientētiem nogriežņiem. - A.A.)

65.§ Apolonija teorēmas vispārinājums

1.teorēma. *No koaksiālu aploču saimes S jebkuras aploces c punktiem pret tās pašas saimes aplocēm c_1, c_2 vilkto pieskaru garumu attiecība ir pastāvīga.*



130.zīm.

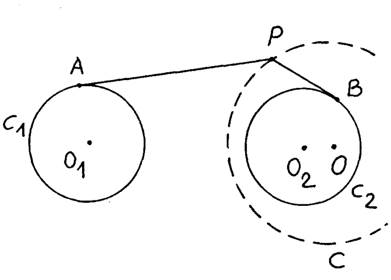
Pierādījums. Ar O, O_1, O_2 apzīmējam c, c_1, c_2 centrus, ar P - c patvaļīgu punktu, ar Q apzīmējam P projekciju uz saimes S radikālo asi t, ar A un B apzīmējam c_1, c_2 punktus, kuros vilktās pieskares iet caur P *(130.zīm.).* Ievērojot, ka punkta P potence attiecībā uz aploci c ir 0 un lietojot ***(12)***, ***(52),*** aplocēm c, c_1, resp. c, c_2, izteic $PA^2=2\cdot OO_1\cdot PQ$, $PB^2=2\cdot OO_2\cdot PQ$, no kurienes

$$PA^2:PB^2=OO_1:OO_2= \text{const} \quad \textbf{\textit{(53)}}$$

Liekot c_1 un c_2 rādiusiem tuvoties nullei (sal. 61.§), dabū:

Sekas: *Koaksiālu aploču saimes S jebkuras aploces c punktu attālumu attiecība līdz saimes S robežpunktiem L, L' ir pastāvīga.*

2.(apgrieztā) teorēma. *Visu to punktu P ģeometriskā vieta, no kuriem pret aplocēm c_1, c_2 vilkto pieskaru garumu attiecība pastāvīga, ir aploce c, kas koaksiāla ar c_1, c_2.*



131. zīm.

Pierādījums. Pieņemsim, ka P ir punkts, no kura pret aplocēm c_1, c_2 vilktajām pieskarēm PA, PB ir vajadzīgā attiecība PA:PB = k *(131.zīm.).* Caur punktu P velkam ar c_1, c_2 koaksiālu aploci c (kas pēc 60.§ ir noteikta viennozīmīgi). Tās centrs O pieder taisnei O_1O_2 un pēc ***(53)*** $PA^2:PB^2 = OO_1:OO_2 = k^2$.

Ja P' ir meklējamās ģeometriskās vietas cits punkts, caur kuru iet saimes aploce c' ar centru O', tad līdzīgā kārtā pierāda vienlīdzību $O'O_1:O'O_2 = k^2$. Salīdzinot ar iepriekšējo, secina, ka O' ar O sakrīt. Līdz ar to sakrīt arī c un c' (pretējā gadījumā no radikālās ass jebkura punkta pret c, c' vilkto pieskaru garumi nav vienlīdzīgi), kas teorēmu pierāda.

Sekas. *Visu to punktu ģeometriskā vieta, kuru attālumu attiecība līdz koaksiālu aploču saimes S robežpunktiem pastāvīga, ir viena no S aplocēm.*

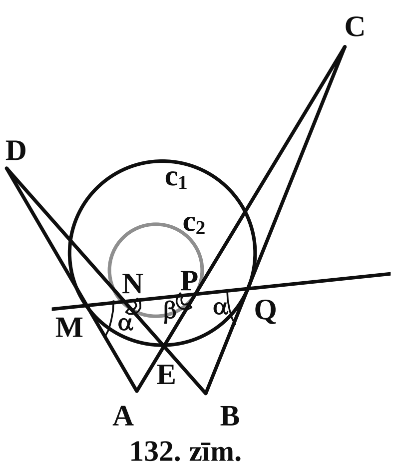
No šejienes un 62.§ seko Apolonija teorēma: visu to punktu ģeometriskā vieta, kuru attālumu attiecība līdz diviem dotiem punktiem L, L' pastāvīga, ir aploce c, kuras centrs pieder taisnei LL' un kuras krustpunkti ar šo taisni punktus L, L' sadala harmoniski. 2.teorēmu var uzskatīt par Apolonija teorēmas vispārinājumu.

66.§ Teorēma par divu apločų pieskarēm

Teorēma. *Ja taisnes u krustpunktos M, N, P, Q ar aplocēm c_1, c_2 ir vilktas pieskares, tad dažādo apločų pieskaru krustpunkti A, B, C, D pieder vienai un tai pašai aplocei* c, *kas koaksiāla ar c_1, c_2.*

Pierādījums. *132. zīmējumā* leņķi pie virsotnēm M, Q ir vienlīdzīgi (jo tie mērojami ar loka MEQ pusi) un arī leņķi pie virsotnēm N, P ir vienlīdzīgi. Ievērojot, ka trijstūra malas attiecas kā pretimgulošo leņķu sinusi, der vienlīdzības

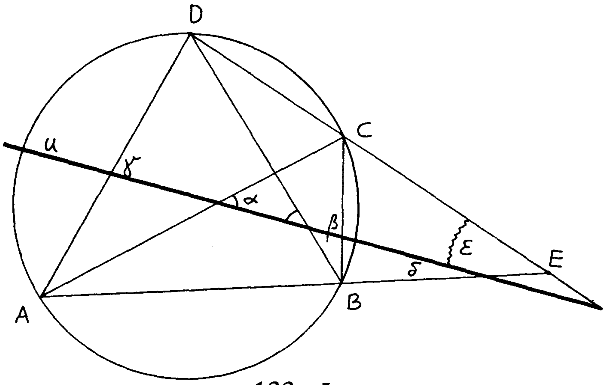
$$AP:AM = BN:BQ = CP:CQ = DN:DM = \sin\alpha:\sin\beta = k.$$



132. zīm.

Tātad no punktiem A, B, C, D pret aplocēm c_1, c_2 vilkto pieskaru garumu attiecība ir pastāvīga, kādēļ pēc iepriekšējā § 2.teorēmas šie punkti pieder aplocei c, kas koaksiāla ar c_1, c_2.

67. § Teorēma par aplocē ievilktu pilnīgo četrstūri

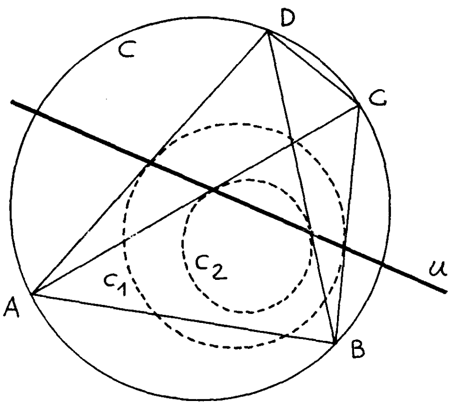


133. zīm.

Par <u>pilnīgo četrstūri</u> sauc figūru, ko veido dotos 4 punktus A, B, C, D (no kuriem ik trīs nepieder vienai taisnei) savienojošie 6 nogriežņi, ko sadala pa trim pretējo malu pāriem AB, CD; AC, BD; AD, BC (133.zīm.).

<u>1.lemma</u>. *Taisne u, kas veido vienādus leņķus ar divām aplocē ievilktā pilnīgā četrstūra ABCD pretējām malām, arī veido vienādus leņķus ar pārējām šī četrstūra pretējām malām.*

<u>Pierādījums.</u> Ja u veido vienādus leņķus ($=\alpha$) ar AC un BD, tad 133.zīmējumā ir $\beta=2d-\alpha-\angle ACB=2d-\alpha - \angle ADB = \gamma$ jeb u veido vienādus leņķus ar AD, BC, un $\varepsilon = \beta - \angle BCE = \beta - (2d - \angle BCD) = \gamma - \angle DAB = \delta$ jeb u veido vienādus leņķus arī ar malām AB un DC.



134. zīm.

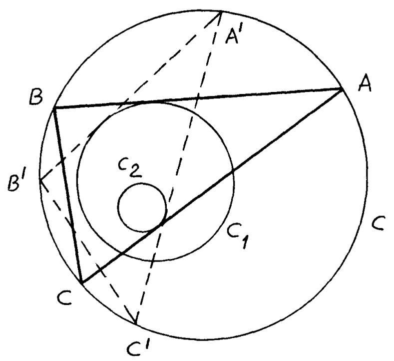
<u>2.lemma</u>. *Ja taisne u veido vienādus leņķus ar aplocē c ievilkta pilnīgā četrstūra pretējām malām, tad aploces c_1, c_2, c_3, kas šīm malām pieskaras viņu krustpunktos ar u, ir koaksiālas ar c.*

<u>Pierādījums.</u> Pēc 66.§ *134.zīmējumā* aploce c ir koaksiāla ar aplocēm c_1, c_2. Līdzīgā kārtā tā koaksiāla ar aplocēm c_1, c_3 (pēdējā aploce zīmējumā nav uzrādīta). Tātad aplocēm c, c_1, c_2 ir kopīga radikālā ass t un aplocēm c, c_1, c_3 ir kopīga ass t'. Tā kā radikālā ass ir pilnīgi noteikta ar divām aplocēm, tad t un t' jāsakrīt.

<u>Teorēma</u>. *Ja aploce c_1 ieslēgta aplocē c, tad katram aplocē c ievilktam pilnīgajam četrstūrim ABCD, kura viens pretējo malu pāris AD, BC pieskaras c_1, pārējie malu pāri pieskaras aplocēm, kas koaksiālas ar c, c_1.*

<u>Pierādījums.</u> *134.zīmējumā* par u izvēlas taisni, kas savieno c_1 pieskaršanās punktus ar AD, BC. Tad u veido ar AD, BC vienādus leņķus un var lietot iepriekšējās lemmas.

68.§ Ponselē teorēma par ievilktiem - apvilktiem daudzstūriem



135. zīm.

<u>1.lemma</u>. *Ja* c, *c_1, c_2 ir koaksiālu apločču saimes S aploces, c aptver c_1 un c_1 aptver c_2, tad katram aplocē c ierakstītam trijstūrim ABC, kura viena mala pieskaras c_1* un *otra c_2, arī trešā mala pieskaras S vienai un tai pašai aplocei c'.*

<u>Pierādījums.</u> Pieņemam, ka *135.zīmējumā* AB un A'B' pieskaras aplocei c_1, bet AC un A'C' pieskaras c_2. Lietojot iepriekšējo teorēmu četrstūrim AB'BA', secina, ka AA' un BB' pieskaras saimes S kādai aplocei c_3. Līdzīgā kārtā pierāda, ka arī AA' un CC' pieskaras S aplocei c_4. Pēdējai jāsakrīt ar c_3, jo pēc 63.§ vienpus radikālās ass eksistē tikai viena S aploce, kas pieskaras taisnei AA'.

Tagad aplocē c ierakstītā pilnīgā četrstūra BC'CB' pretējās malas BB', CC' pieskaras aplocei c_3, kādēļ pēc iepriekšējās teorēmas arī malas BC, B'C' pieskaras aplocei c', kas koaksiāla ar c, c_3. Ar to lemma pierādīta. Liekot, lai c_2 ar c_1 sakrīt, dabū:

Sekas. *Ja aploce c aptver aploci c_1, tad katram aplocē c ievilktam trijstūrim, kura divas malas pieskaras c_1, trešā mala pieskaras vienai un tai pašai aplocei c', kas koaksiāla ar c, c_1.*

Gadījumā, kad c' ar c_1 sakrīt, tad no šejienes dabūjam 57.§ minēto

Iljē teorēmu: *Ja aploce c aptver aploci c_1 un eksistē aplocē c ievilkts trijstūris, kura visas trīs malas pieskaras c_1, tad ikkatram aplocē c ievilktam trijstūrim, kura divas malas pieskaras c_1, arī trešā mala pieskaras c_1.*

2.lemma. *Ja c, c_1, c_2, ..., c_{n-1} ir koaksiālu aploču saimes S aploces, c aptver c_1, c_1 aptver c_2, utt., tad katram aplocē c ievilktam n - stūrim $A_1A_2... A_{n-1}A_n$, kura malas A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ pieskaras attiecīgi aplocēm c_1, c_2, ..., c_{n-1}, arī pēdējā mala A_nA_1 pieskaras S vienai un tai pašai aplocei c_n.*

Pierādījums. Pēc iepriekšējās lemmas katram aplocē ievilktam trijstūrim $A_1A_2A_3$, kura mala A_1A_2 pieskaras c_1 un mala A_2A_3 pieskaras c_2, arī mala A_3A_1 pieskaras S vienai un tai pašai aplocei c'_2. Lietojot to pašu lemmu aplocē c ievilktam trijstūrim $A_1A_3A_4$, secina, ka tā virsotņu visiem iespējamiem novietojumiem, ja vien A_1A_3 pieskaras S pastāvīgai aplocei c'_2 un A_3A_4 pieskaras S aplocei c_3, tad arī A_4A_1 pieskarsies S vienai un tai pašai aplocei c'_3, utt.

Speciālā gadījumā, kad visas aploces c_1, ..., c_n sakrīt, dabū sekojošo

Ponselē teorēmu: *Ja eksistē n - stūris, kas ievilkts aplocē c un apvilkts aplocei c_1, tad ikkatram aplocē c ievilktam n - stūrim, kura n - 1 malas pieskaras c_1, arī pēdējā mala pieskaras c_1.*

Šo Ponselē teorēmu var vispārināt daudzstūriem, kas ievilkti un apvilkti otrās pakāpes līknēm, jo, piemēroti izvēloties projekcijas centru, šīs līknes var transformēt par aplocēm. Jakobi (kopoto darbu III sējumā) apskata ar otrās pakāpes līknēm saistītu vispārīgu poligonu teorijas sakaru ar eliptisko funkciju teoriju.

IV. INVERSIJA

69.§ Inverso punktu konstrukcija

Pēc 58.§ punktus P un P_1 sauc par <u>inversiem</u> attiecībā uz aploci a ar centru O un rādiusu r tad, ja šie punkti pieder vienam un tam pašam staram ar virsotni O un $OP \cdot OP_1 = r^2$ ***(54)***.

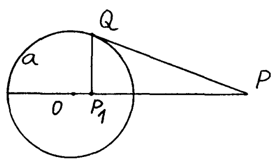
a sauc par <u>inversijas aploci,</u> O - par <u>inversijas centru</u> un r - par <u>inversijas rādiusu.</u>

No definīcijas seko, ka inversija ir involutīva transformācija (30.§), t.i., ja P inversais punkts ir P_1, tad P_1 inversais ir P. Aploces a iekšējos punktus tā transformē par ārējiem, ārējos par iekšējiem un a punktus atstāj to vietās.

Liekot vienādojumā ***(54)*** $OP = r + d$, $OP_1 = r - d_l$ un dalot ar r, izteic

$$d - d_1 = dd_1/r \rightarrow 0 \text{ jeb } d \rightarrow d_1, \text{ ja } r \rightarrow \infty.$$

Robežgadījumā inversijas aploce kļūst par taisni, pret kuru inversie punkti P, P_1 ir simetriski. Šī iemesla dēļ inversus punktus arī sauc par <u>simetriskiem punktiem pret inversijas aploci.</u>



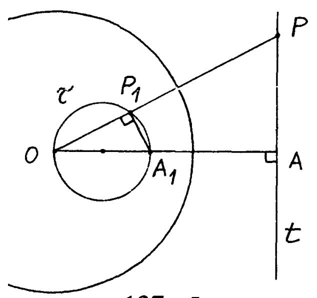
136. zīm.

Ja P ir ārpus a, tad pēc 16.§ P_1 konstruē kā P polāres p krustpunktu ar OP. Apgrieztā kārtā, ja dots a iekšējs punkts P_1 (kas nesakrīt ar O), tad inverso punktu P konstruē kā taisnes OP_1 krustpunktu ar a pieskari pret OP_1 perpendikulāras hordas gala punktā *(136.zīm.).*

Inversijas jēdziens bija pazīstams jau grieķu astronomiem. Vēlāk to bieži izlietoja kartogrāfijā. Ap 1830.-40.g. inversiju sāka lietot ģeometrijā itāļu autors G. Bellavitis, angļu autors Stabs (I. W. Stubbs), Mebiuss (A. F. Mōbius) un Liuvils (J. Liouville).

70.§ Taisnes inversā figūra

<u>1.teorēma.</u> *Ja taisns t neiet caur inversijas centru O, tad t inversā figūra ir aploce, kas iet caur inversijas centru* O.



137. zīm.

<u>Pierādījums.</u> Ja P ir t patvaļīgs punkts, $OA \perp t$ un A_1, P_1 ir A, P inversie punkti *(137.zīm.),* tad $OA \cdot OA_1 = r^2 = OP \cdot OP_1$ jeb $OA:OP_1 = OP:OA_1$. No tā seko, ka trijstūri OAP, OP_1A_1 (ar kopīgu leņķi virsotnē O) ir līdzīgi, kādēļ OP_1A_1 ir taisns leņķis. Tādēļ punktam P izskrienot taisni t, tā inversais punkts P_1 apraksta aploci ar diametru OA_1.(Ja t krusto inversijas aploci punktos B, C, tad arī aploce iet caur šiem punktiem.)

<u>2.teorēma.</u> *Caur inversijas centru ejošas taisnes t inversā figūra ir tā pati taisne.*

Pierādījums acīmredzams.

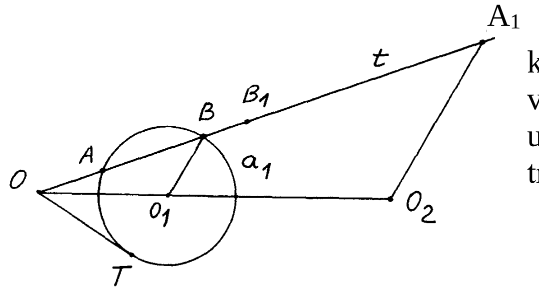
71.§ Aploces inversā figūra

<u>1.teorēma</u>. *Caur inversijas centru O ejošas aploces τ inversā figūra ir taisne t, kas neiet caur punktu O.*

<u>Pierādījums.</u> Ja A_1, P_1 ir τ punkti un A, P to inversie, tad pēc iepriekšējā § taisnes AP inversā figūra ir aploce τ. Tā kā inversija ir involutīva transformācija, tad inversā figūra ir taisne AB.

<u>2.teorēma.</u> *Caur inversijas centru O neejošas aploces a_1 inversā figūra ir aploce a_2, kas arī neiet caur O. Punkts O ir abu aploču ārējais līdzības centrs.*

Pierādījums.



138. zīm.

Pierādījums. Ar A, B apzīmējam punktus, kuros aploci a_1 (ar centru O_1) krusto patvaļīgs stars t ar virsotni O, ar A_1, B_1 apzīmējam A, B inversos punktus un velkam $A_1O_2 \parallel BO_1$ *(138.zīm.).* Tad ar līdzīgiem trijstūriem un lietojot ***(54)*** pierāda, ka

$$OO_2 = OO_1\cdot(OA_1:OB) = OO_1\cdot(OA_1:OB)\cdot(OA:OA) =$$
$$= OO_1\cdot(r^2:OT^2)=k_1 \quad \textbf{\textit{(55)}} \text{ (OT ir } a_1 \text{ pieskare) un}$$
$$A_1O_2 = O_1B\cdot(OO_2:OO_1) = k_2 \quad \textbf{\textit{(56)}},$$

kur konstantes k_1 un k_2 no stara t virziena nav atkarīgas.

Tas pierāda, ka, punktam A aprakstot aploci a_1, tā inversais punkts A_1 apraksta aploci a_2 ar centru O_2 un rādiusu k_2 **(a_1 un a_2 centri O_1 un O_2 nav inversi punkti)**. Ja t ir a_1 pieskare, tad punkti A, B sakrīt, līdz ar to sakrīt arī punkti A_1, B_1, kādēļ t ir arī a_2 pieskare un pēc 9.§ punkts O ir aploču a_1, a_2 ārējais līdzības centrs.

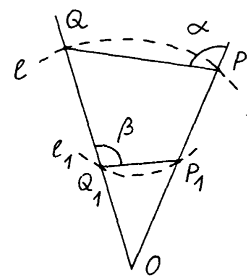
Uzskatot taisni par aploces speciālu gadījumu, var teikt, ka aploces inversā figūra ir aploce. Šo aploču radniecību Mebiuss sauca par "Kreisverwandschaft". Ja aploce a_1 krustojas ar inversijas aploci a punktos A un C, tad caur šiem punktiem iet arī aploce a_2 un visu triju aploču kopīgā horda AC ir to kopīgā radikālā ass. Šinī gadījumā pēc 60.§ aploces a, a_1, a_2 veido koaksiālu aploču saimi. Pamatojoties uz nepārtrauktības principu, Ponselē taisa slēdzienu, ka arī gadījumā, kad aplocēm a, a_1, a_2 nav reālu krustpunktu, tām tomēr jābūt kopīgai radikālai asij.

72.§ Leņķu saglabāšana

Teorēma. *Inversija saglabā leņķus.*

Pierādījums. Ja l un l_1 ir inversas līknes, O - inversijas centrs un (P, P_1), (Q, Q_1) ir inversu punktu pāri, tad pēc ***(54)*** $OP\cdot OP_1 = OQ\cdot OQ_1$, kādēļ P, P_1, Q, Q_1 ir vienas un tās pašas aploces punkti un *139.zīmējumā* ir $\alpha = \beta$ ***(57)***

Ja punkts Q pa līkni l tuvojas punktam P, līdz ar ko Q_1 pa l_1 tuvojas P_1, tad ***(57)*** robežgadījumā dod vienlīdzību $\alpha_0 = \beta_0$, kur α_0 ir leņķis starp OP un l pieskari punktā P, bet β_0 leņķis starp OP_1 un l_1 pieskari punktā P_1. Tas teorēmu pierāda.



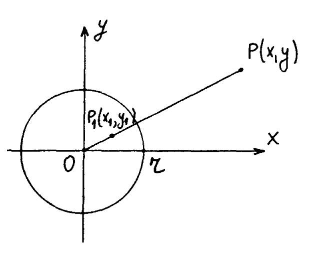
139. zīm.

Sekas. ***1)*** *Divu ortogonālu līkņu inversās līknes arī ir ortogonālas. Ja divas līknes punktā P viena otrai pieskaras, tad arī to inversās līknes viena otrai pieskaras P inversā punktā P_1.*

[Vispārīgi transformācijas, kas saglabā līkņu pieskaršanos (jeb kontaktu), sauc par pieskāršanās transformācijām (Bercührungstransformation); šo transformāciju teoriju izstrādāja Sofuss Lī (Sophys Lie).]

2) *Ja aploce c krusto aploci a ortogonāli, tad c inversā aploce attiecībā uz a sakrīt ar c. Tas tādēļ, ka caur a diviem punktiem A, B var novilkt vienu aploci, kas ortogonāla a. Tās centrs ir punktos A, B vilkto a pieskaru krustošanās punkts.*

73.§ Inversija kā biracionāla transformācija



140. zīm.

Ja inversijas centrs ir koordinātu sākums O, inversijas rādiuss r un P(x.y), $P_1(x_1,y_1)$ ir inversu punktu pāris, tad *140.zīmējumā* no līdzīgiem trijstūriem un ***(54)*** *izteic*

$$x_1:x = y_1:y = OP_1:OP = OP\cdot OP_1:OP^2 = r^2:(x^2 + y^2), \text{ no kurienes}$$

$x_1 = r^2\cdot x:(x^2 + y^2)$, $y_1 = r^2\cdot y:(x^2 + y^2)$. ***(58)*** Līdzīgā kārtā no proporcijām

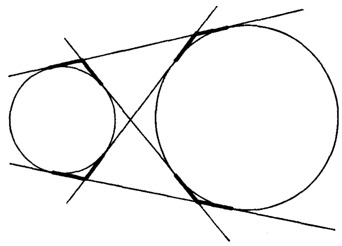
$$x:x_1 = y:y_1 = OP:OP_1 = OP\cdot OP_1:OP_1^2 = r^2:(x_1^2 + y_1^2), \text{ izteic}$$

$$x = r^2 \cdot x_1 : (x_1^2 + y_1^2),\ y = r^2 \cdot y_1 : (x_1^2 + y_1^2).\ \mathbf{(59)}.$$

Vispārīgā gadījumā transformāciju, kas punktu P(x.y) transformē par punktu $P_1(x_1,y_1)$ tā, ka x_1 un y_1 ir x un y racionālas funkcijas un reizē arī x, y ir x_1, y_1 racionālas funkcijas, sauc par biracionālu transformāciju. Pēc ***(58)*** un ***(59)*** inversija ir biracionāla tranformācija. Ja inversijas rādiuss r = a un punkts P apraksta vienādsānu hiperbolu $x^2 - y^2 = a^2$, tad pēc ***(59)*** P inversais punkts P_1 apraksta Bernulli lemniskatu $a^2(x_1^2-y_1^2)=(x_1^2+y_1^2)^2$.

Turpmākos paragrāfos 74. - 78. apskatīsim dažus inversijas izlietojumus.

74.§ Feierbaha teorēma

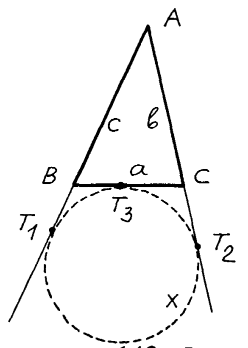


141. zīm.

1.lemma. *Divu aploču kopīgo iekšējo un ārējo pieskaru nogriežņi no to krustošanās punkta līdz pieskaršanās punktiem ir vienlīdzīgi (141.zīm.)*

Pierādījums: 36.§

2.1emma. *Ja AT_1, AT_2 ir aploces x punktos T_1, T_2 vilktas pieskares un B, C ir to krustošanās punkti ar x pieskari punktā T_3, tad nogriežņi AT_1, AT_2 vienlīdzīgi trijstūra ABC pusperimetram $0{,}5\cdot(a+b+c)$.*

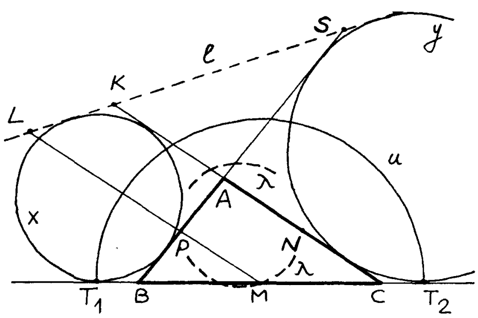


142. zīm.

Pierādījums. *142.zīmējumā* ir $BT_1 = AT_1 - c$, $CT_2 = AT_2 - b$. Šīs vienlīdzības saskaitot un ievērojot, ka $AT_1 = AT_2$ un

$BT_1 + CT_2 = BT_3 + CT_3 = a$, izteic $2AT_1 =(a + b + c)$.

Teorēma. *Trijstūra ABC Feierbaha aploce (35.§) pieskaras trijstūrī ierakstītai un trijstūrim pierakstītajām aplocēm.*



143. zīm.

Teilora pierādījums. (J.P.Taylor, 1875). *143.zīmējumā* M, N, P ir trijstūra ABC malu viduspunkti, x, y ir trijstūrim pievilktas aploces un l to kopīga pieskare. Lietojot iepriekšējās lemmas, pierāda, ka $MT_2 = MT_1 = CT_1 - CM = 0{,}5\cdot(a + b + c) - 0{,}5a = 0{,}5(b + c)$.

Aploce u ar centru M un rādiusu $r = MT_1$ krusto aploces x, y ortogonāli. Tādēļ, izdarot inversiju attiecībā uz u, aploces x, y nemainās (72.§). Pieskare l, kas neiet caur inversijas centru, transformējas par aploci λ, kas arī pieskaras x un y un iet caur inversijas centru M.

Ar K, L S apzīmējam punktus, kuros l krustojas ar taisnēm AC, MP, AB. Lietojot iepriekšējās lemmas un līdzīgus trijstūrus, izteic

$$PL=AK\cdot(PS:AS)= AB\cdot((PA + AC):AC) = c/b(c/2 + b),$$

$$ML= MP + PL = b/2 + c/b\cdot(c/2 + b) = (b + c)^2:2b,$$

$$MP\cdot ML = b/2\cdot((b + c)^2:2b) = ((b + c):2))^2 = r^2.$$

Tātad L un P ir inversi punkti (attiecībā uz u), kādēļ aploce λ iet caur AB viduspunktu P. Līdzīgi pierāda, ka λ iet arī caur punktu N, kādēļ pēc 35.§ λ ir trijstūra ABC Feierbaha aploce. Uz analoģijas pamata λ pieskaras arī trešai trijstūrim pievilktai aplocei.

Ar z, z_1 apzīmējam trijstūrī ABC ievilkto un trešo pievilkto aploci *(144.zīm),* to pieskaršanās punktus malai BC apzīmējam ar R, R_1 un BC viduspunktu apzīmējam ar M. Tā kā pēc 1.lemmas

$R_1C = BR = p - b$ (sal. 36.§), seko, ka $RM = MR_1 = 0{,}5\cdot(b - c)$, aploce v ar centru M un rādiusu $\rho = MR_1$ krusto z un z_1 ortogonāli, kādēļ, izdarot inversiju attiecībā uz v, aploces z, z_1

nemainās, bet to kopīgā pieskare t (kas neiet caur M) transformējas par aploci τ, kas iet caur punktu M un arī pieskaras aplocēm z, z_1.

Ar P apzīmējam AB viduspunktu, ar Q, E, F - t krustpunktus ar PM, AB, AC un ar E_1 - taisnes AB un aploces z pieskaršanās punktu. Tad pēc 1.lemmas

$$BE = BE_1 - EE_1 = BR_1 - BR = RR_1 = 2MR_1 = b - c$$

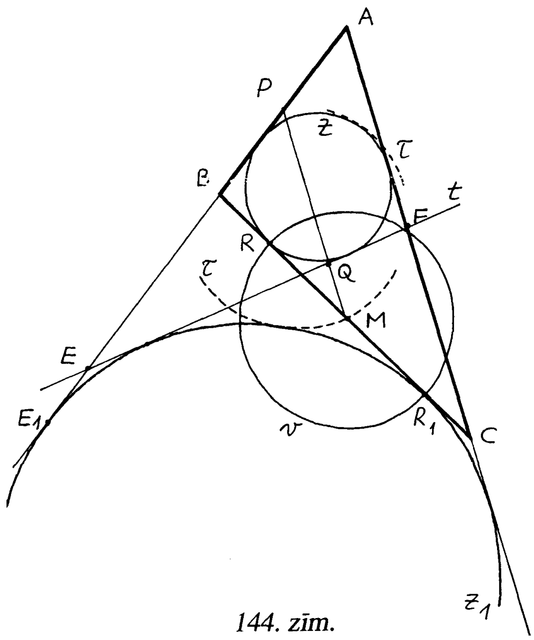
un no līdzīgiem trijstūriem izteic

$$PQ = AF\cdot(PE:AE) = AB\cdot((PB + BE):(AB + BE)) =$$
$$= c\cdot((c/2 + b - c):(c + b - c) = c/b\cdot(b - c/2),$$

no kurienes

$$MQ = PM - PQ = 0{,}5b - c/b\cdot(b - c/2) = (b - c)^2/2b$$
$$\text{un } MQ\cdot MP = (b - c)^2:2b\cdot(b/2) = ((b - c)/2)^2 = \rho^2.$$

Tas pierāda, ka P ir Q inversais punkts, kādēļ aploce τ iet arī caur AB viduspunktu P. Uz analoģijas pamata τ iet arī caur AC viduspunktu N un tādēļ τ ir trijstūra ABC Feierbaha aploce.



144. zīm.

75.§ Apolonija problēmas atrisinājums

1.lemma. *Ja aploces a_1, a_2 (kuru centri O_1, O_2 un rādiusi r_1, r_2) ir inversas attiecībā pret aploci x ar centru O un rādiusu r, tad O, O_1, O_2 pieder vienai taisnei un, apzīmējot $OO_1 = d_1$, $OO_2 = d_2$, der vienlīdzības $d_2 = r^2\cdot(d_1:(d_1^2-r_1^2))$* ***(60)****, $r_2 = r^2\cdot(r_1:(d_1^2-r_1^2))$* ***(61)***

Pierādījums. Pēc ***(55)***, ***(56)*** un *138. zīmējuma* ir

$$d_2 = d_1\cdot(r^2:OT^2) = r^2\cdot(d_1:(d_1^2 - r_1^2)),\ r_2 = r_1\cdot(d_2:d_1) = r^2\cdot(r_1:(d_1^2-r_1^2))$$

2.lemma. *Eksistē tāda aploce x, ka, izvēloties tās jebkuru punktu par inversijas centru, var noteikt inversijas rādiusu tā, ka šī inversija divas dotās aploces a_1, a_2 transformē par aplocēm ar iepriekš dotiem rādiusiem r'_1, r'_2.*

Pierādījums. Doto apločų centrus un rādiusus apzīmējot ar O_1, O_2, r_1, r_2, inversijas centru un rādiusu apzīmējot ar O, r un liekot

$$OO_1 = d_1,\ OO_2 = d_2, \text{pēc } \textbf{\textit{(61)}} \text{ der formulas } r'_1 = r^2\cdot(r_1:(d_1^2 - r_1^2)),\ r'_2 = r^2\cdot(r_2:(d_2^2 - r_2^2))\ \textbf{\textit{(62)}},$$

$$\text{no kurienes } (d_2^2 - r_2^2):(d_1^2 - r_1^2) = (r_2\cdot r'_1):(r_1\cdot r'_2) = c^2\ \textbf{\textit{(63)}}$$

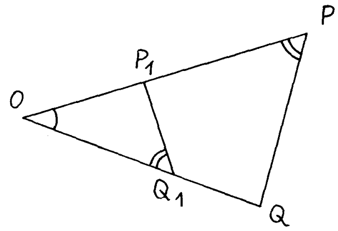
(c - zināma konstante). Tā kā $(d_2^2 - r_2^2)$ ir no punkta O pret aploci a_2 vilktās pieskares kvadrāts un $(d_1^2-r_1^2)$ ir no O pret a_1 vilktās pieskares kvadrāts, no ***(63)*** seko, ka minēto pieskaru attiecība = c. Pēc 65.§ tādu punktu O ģeometriskā vieta ir kāda aploce x, kas koaksiāla ar a_1, a_2. Izvēloties x fiksētu punktu O, zinām $d_1 = OO_1$ un pēc ***(62)*** pirmās formulas varam noteikt inversijas rādiusu r.

No šejienes seko ***teorēma.*** *Var noteikt tādu inversiju, kas trīs dotās aploces a_1, a_2, a_3 transformē par aplocēm ar dotu rādiusu r.*

Inversijas centru noteic kā divu apločų x, y krustpunktu, kur x ir to inversiju centru ģeometriskā vieta, kas aploces a_1, a_2 transformē par aplocēm ar rādiusu r, un y ir atbilstošā ģeometriskā vieta aplocēm a_2, a_3. (Jānoskaidro, vai x un y šķeļas - A.A.)

Lietojot iepriekšējo teorēmu un ievērojot, ka inversija saglabā pieskaršanos (72.§)). Plikers (J.Plücker) deva sekojošo Apolonija problēmas atrisināšanas metodi. Noteic inversiju τ, kas dotās aploces a_1, a_2, a_3 transformē par aplocēm a'_1, a'_2, a'_3 ar rādiusiem r, un konstruē aploci c, kas tām pieskaras (tam nolūkam velk aploci caur a'_1, a'_2, a'_3 centriem un tās rādiusu par r pamazina vai palielina). Izdarot inversiju vēlreiz, a'_1, a'_2, a'_3 pāriet atpakaļ par dotajām aplocēm a_1, a_2, a_3 un c transformējas par aploci, kas tām pieskaras.

76.§ . Ptolomeja teorēma



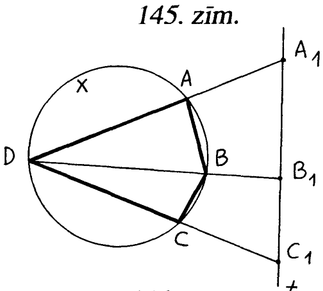
145. zīm.

<u>**Lemma.**</u> *Ja punkti P, P_1 un Q, Q_1 ir inversi attiecībā uz aploci a ar centru O un rādiusu r, tad $P_1Q_1=r^2\cdot(PQ:(OP\cdot OQ))$* ***(64)***

<u>**Pierādījums.**</u> Pēc ***(54)*** ir $OP\cdot OP_1 = OQ\cdot OQ_1$ jeb $OP:OQ = OQ_1:OP_1$. Tādēļ *145. zīmējumā* trijstūri QOP, P_1OQ_1 ir līdzīgi un seko proporcija $P_1Q_1:PQ = OP_1:OQ$, no kurienes un ***(54)***

$$P_1Q_1 = (OP_1:OQ)\cdot PQ = (OP_1\cdot OP):(OP\cdot OQ)\cdot PQ = r^2\cdot(PQ:(OP\cdot OQ)).$$

<u>***Teorēma.***</u> *Aplocē x ievilkta četrstūra ABCD diagonāļu reizinājums vienlīdzīgs četrstūra pretējo malu reizinājumu summai.*



146. zīm.

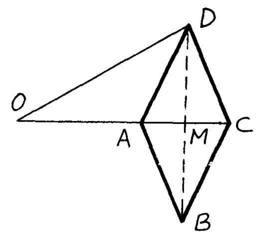
<u>**Pierādījums.**</u> Izdarot inversiju ar centru D un patvaļīgu rādiusu r, aploce x pāriet par taisni t, un A, B, C pāriet par t punktiem A_1, B_1, C_1, pie kam *(146.zīm.)* $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. No šejienes un ***(64)***

$$AC:(DA\cdot DC) = AB:(DA\cdot DB) + BC:(DB\cdot DC)$$

$$\text{jeb } AC\cdot DB = AB\cdot DC + BC\cdot DA$$

77. § Poseljē inversors

<u>***(A.Peaucellier, 1864) teorēma.***</u> *Ja stars OAC griežas ap nekustīgu virsotni O tā, ka 147.zīmējumā četrstūris ABCD veido rombu ar pastāvīga garuma malu un pastāvīgu OD, tad A un C aprakstītās figūras ir inversas attiecībā uz centru O.*



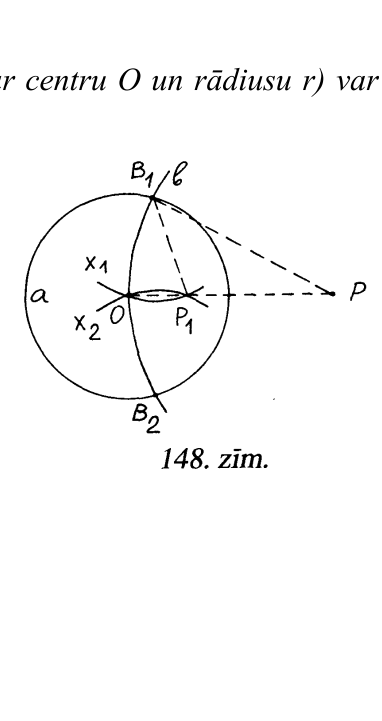
147. zīm.

<u>**Pierādījums.**</u> Ievērojam, ka romba diagonāles ir perpendikulāras. Ja M ir to krustpunkts, tad $OA\cdot OC = (OM - AM)(OM + AM) = OM^2 - AM^2 =$
$= OD^2 - DM^2 - AM^2 = OD^2 - (DM^2 + AM^2) = OD^2 - AD^2 = \text{const}.$

<u>***Sekas.***</u> *Ja, pastāvot iepriekšējās teorēmas nosacījumiem, punkts A apraksta aploci ar centru O_1 un rādiusu $r = O_1O$, tad pēc 71.§ 1.teorēmas punkts C apraksta taisni. Izlietojot šo rezultātu, var pagatavot mehānismu, kas taisnlīniju kustību pārvērš apļveidīgā vai otrādi.*

78.§ Maskeroni cirkuļa konstrukcijas

<u>***1.lemma.***</u> *Punkta P inverso punktu P_1 (attiecībā uz aploci a ar centru O un rādiusu r) var konstruēt, lietojot tikai cirkuli*

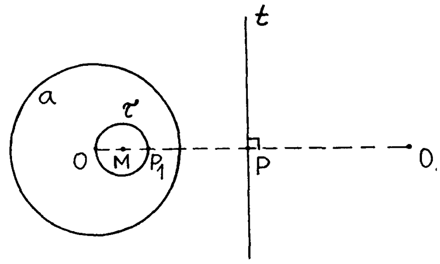


148. zīm.

<u>**Pierādījums.**</u> Ja P attālums līdz O ir ≥ r/2, tad velk aploci b ar centru P un rādiusu OP, noteic b un a krustpunktus B_1, B_2 un velk aploces x_1, x_2, kuru centri ir B_1, B_2 un rādiusi = r. Tad loku x_1, x_2 krustpunkts P_1 ir P inversais punkts, jo *148.zīmējumā* POB_1 un B_1OP_1 ir vienādsānu trijstūri ar kopīgu leņķi pie pamata, kādēļ tie ir līdzīgi un ar malu proporciju $OP:r = r:OP_1$ pierāda ***(54)***. Gadījumu ar $OP<r/2$ apskatīsim pēc 4.lemmas. Pagaidām lietosim tikai tādas inversijas, kam šis nosacījums der.

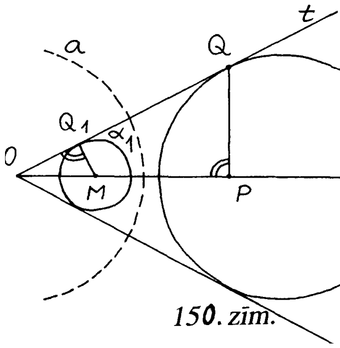
<u>***2.lemma.***</u> *Dotas taisnes t un dotas aploces inversās figūras var konstruēt, lietojot tikai cirkuli.*

Pierādījums. **1)** Ja *149.zīmējumā* M ir taisnei t inversās aploces τ centrs (inversijas aploce a ar centru O un rādiusu r) un O_1 ir O simetriskais punkts attiecībā pret t un P, P_1 ir t un τ krustpunkti ar taisni OO_1, tad $r^2 = OP \cdot OP_1 = 0{,}5 \cdot OO_1 \cdot 2OM = OO_1 \cdot OM$, kādēļ M ir O_1 inversais punkts un to ar cirkuli var konstruēt.



149. zīm.

2) Pieņemam, ka *150.zīmējumā* aploces α, α_1 ir inversas attiecībā pret aploci a ar centru O un rādiusu r un Q, Q_1 ir to kopīgās pieskares Ot pieskaršanās punkti; punktā Q_1 pret Ot celts perpendikuls iet caur α_1 centru M. Konstruējot $QP \perp OM$, no līdzīgiem trijstūriem OQ_1M, OPQ izteic $OM{:}OQ_1 = OQ{:}OP$, no kurienes $OM \cdot OP = OQ_1 \cdot OQ = r^2$ (jo Q, Q_1 ir inversi punkti). Salīdzinot ar *136.zīmējumu,* redzam, ka punkti P un O ir inversi attiecībā uz aploci α , kādēļ P ar cirkuli var konstruēt. Pēc tam ar cirkuli konstruē M kā P inverso punktu attiecībā uz a, konstruē α_1 patvaļīgu punktu A_1 kā α patvaļīga punkta inverso un, zinot M, A_1, velk α_1.

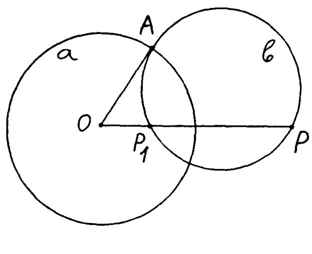


150. zīm.

3.1emma. *Inversija simetriskus punktus (69.§) transformē par simetriskiem.*

Pierādījums. Ja *151. zīmējumā* P un P_1ir simetriski punkti attiecībā pret aploci a ar centru O un rādiusu r, tad katra aploce b, kas iet caur P, P_1, ir ortogonāla a, jo, ar A apzīmējot punktu, kurā vilkta b pieskare ir a rādiuss, un ievērojot, ka $OA^2 = OP \cdot OP_1 = r^2$, seko OA = r, kādēļ A ir arī a punkts.

Apgrieztā kārtā, ja aploces a, b ir ortogonālas, tad to krustpunktā A vilkta b pieskare iet caur a centru O un, ja b iet caur P, bet stars OP krusto b punktā P_2, tad $r^2 = OA^2 = OP \cdot OP_2$, kādēļ punkti P, P_2 ir simetriski pret a.

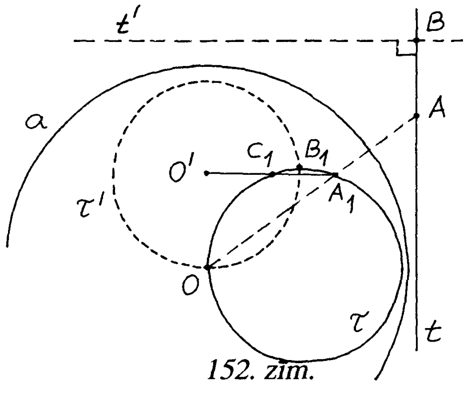


151. zīm.

Izdarot inversiju pret jebkuru aploci α, pēc 71.§ , 72.§ a pāriet par aploci a' un visu to apločų b saime, kas iet caur simetriskajiem (attiecībā uz a) punktiem P, P_1 transformējas par tādu apločų b' saimi, kas iet caur transformētajiem punktiem P', P'_1 un ir ortogonālas a'. Tādēļ punkti P', P_1' ir simetriski pret a'.

4.1emma. *Jebkuriem dotiem punktiem A, B ar cirkuli var konstruēt tiem kolineāru punktu C tā, ka BC = AB.*

Pierādījums. Ar t apzīmējot taisni AB, ar t' tai perpendikulāru taisni caur B un izvēloties piemērotu inversijas aploci a (kuras rādiuss samērā ar AB liels un kas novietota tā, lai t, t' maz atšķirtos no pieskarēm: sal. *152.zīm.),* pēc 1. un 2. lemmas ar cirkuli konstruē aploces τ, τ', kas inversas t, t', konstruē A, B inversos punktus A_1, B_1 (B_1 ir τ, τ' krustpunkts), konstruē A_1 simetrisko punktu C_1 attiecībā pret τ' un konstruē C_1 inverso punktu attiecībā pret a. Līdz ar taisnēm t, t' pēc 72.§ arī aploces τ, τ' ir ortogonālas, kādēļ C_1 pieder aplocei τ (sal. iepriekšējās lemmas pierādījumu). Tādēļ C_1 inversais punkts C pieder taisnei t un pēc 3.lemmas BC = AB.



152. zīm.

[Ar cirkuli var arī konstruēt nogriežņa n - daļu. Ja X ir AB punkts ar $AX = 1/n \cdot AB$ un AP ir nogrieznis, kuru dabū, tikko apskatītā kārtā n reizes atliekot nogriezni AB, tad $AX \cdot AP = 1/n \cdot AB \cdot nAB = AB^2$, kādēļ X var konstruēt ar cirkuli kā punkta P inverso attiecībā uz centru A un rādiusu AB.]

1.lemmas otrais gadījums. Lai ar cirkuli konstruētu P inverso punktu P_1, kad OP < r/2 (inversijas centrs O, rādiuss r), tad, izvēloties pietiekoši lielu dabisko skaitli n, pēc 4.1emmas ar cirkuli konstruē punktu Q tā, lai $OQ = n \cdot OP > r/2$, konstruē Q inverso punktu Q_1 un konstruē $OP_1 = n \cdot OQ_1$.

Tad $OP \cdot OP_1 = 1/n \cdot OQ \cdot n \cdot OQ_1 = OQ \cdot OQ_1 = r^2$, kādēļ P_1 ir P inversais punkts.

Maskeroni teorēma. *Katru konstrukciju, kuru var izpildīt ar cirkuli un lineālu, var izpildīt, lietojot tikai cirkuli vien (L.Mascheroni - La geometria del compasso, 1797).*

Pierādījums. Ja ar cirkuli un lineālu konstruētais punkts A ir dabūts kā divu taišņu krustpunkts vai taisnes un aploces krustpunkts, tad A inversais punkts A_1 (attiecībā uz piemērotu inversijas aploci a) rodas kā divu aploču krustpunkts un, vēlreiz izdarot inversiju pret a, pēc 1.lemmas arī dabū A kā divu aploču krustpunktu.

[Konstrukciju metodes vispārīgi plašāk apskatītas Vīnes ģimnāzijas skolotāja A.Adlera 1906.§ . iznākušajā grāmatā, kuras krievu tulkojums - **Теория геометрических построений** - izdots 1940.g.]

LITERATŪRA

Darbu uzrakstījis **E.Fogels,** izlietojot prof. **E.Lejnieka** 1932.g. LU lasīto lekciju klausītājas Biķes piezīmes (rokrakstā 187 1pp.), tās papildinot pēc

1. А. Ефремов - Новая геометрия треугольника (1902)
2. С. И. Зетель - Новая геометрия треугольника (1940)
3. А. Адлер - Теория геометрических построений (1940)
4. M.Simon - Über die Entwicklung der Elementar - Geometrie in 19.Jahrhundert (Jahresber. der Deutschen Math.Ver.,1.Ergānzungsband 1906)
5. Fr.Kliem - Appollonins (Berlin 1927)
6. F.Cajori - A History of Mathematics (New York 1919)