LATVIJAS UNIVERSITĀTE

FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE

MATEMĀTIKAS NODAĻA

UZVARAS STRATĒĢIJAS PROM ŅEMŠANAS SPĒLĒS

DIPLOMDARBS

Autors: **Ilze Zviedre**

Stud. apl.nr.: iz07027

Darba vadītāja: *doc. Dr. math.* Dace Bonka

RĪGA 2012

ANOTĀCIJA

Diplomdarbā “Uzvaras stratēģijas prom ņemšanas spēlēs” trīs daļu ietvaros tiek aplūkota teorija par matemātiskajām spēlēm, apskatīti dažādi prom ņemšanas uzdevumi, kā arī pētītas to uzvaras stratēģijas.

Pirmajā daļā tiek dots ieskats matemātisko spēļu teorijā, noskaidrots, kas ir spēļu summa, uzvaras stratēģija, kā arī NIM spēles.

Otrajā daļā tiek apskatīts prom ņemšanas spēļu pamatprocess, noskaidrots, kas ir kaudzīšu spēles, atņemšanas spēles, Mark-t spēles, kā arī aplūkots autores ieviests jēdziens – dalīšanas spēles.

Darba trešajā daļā tiek aplūkots uzdevums, kurš bija iekļauts olimpiādē *Baltic Way 2011*, nedaudz izmainot tā sākuma nosacījumus, kā arī tiek piedāvāti vairāki prom ņemšanas spēļu uzdevumi ar risinājumiem, kas var tikt izmantoti skolās – dažādojot matemātikas mācību stundas, kā arī pulciņa nodarbībām.

Atslēgvārdi: matemātiskās spēles, prom ņemšanas spēles, NIM, objektīvās spēles, uzvaras stratēģija, Mark-t spēles, Spreiga – Grandi vērtība

ABSTRACT

In the three parts of the diploma paper „Winning strategies in the take-away games" theory of mathematical games is discussed as well as a number of take-away problems and their winning strategies are inspected.

An insight into the theory of mathematical games, covering a sum of games, a winning strategy and NIM games is provided in the first part.

The basics of the take-away games are discussed in the second part, introducing heap-games, take-away games, Mark-t games as well as a new concept introduced by author – division games.

In the third part a problem from the competition *Baltic Way 2011* is analysed with slightly altered starting conditions. Besides a number of take-away problems with solutions are provided suitable for use at school either in lessons or extra-curriculum activities.

Keywords: mathematical games, take-away games, NIM, objective games, winning strategy, Mark-t games, Sprague – Grundy value

SATURS

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

Pozīcija – stāvoklis pirms spēlētāja gājiena.

N**-pozīcija** – pozīcija, kurā eksistē uzvaras stratēģija spēlētājam, kuram šobrīd ir gājiens.

P**-pozīcija** – pozīcija, kurā eksistē uzvaras stratēģija spēlētājam, kuram šobrīd nav gājiens.

NIM vērtība – skaitlis, kas raksturo pozīciju objektīvā prom ņemšanas spēlē ar ekvivalentas NIM kaudzītes izmēru.

NIM rinda – secīgām spēles pozīcijām atbilstošās NIM vērtības.

Atņemšanas spēles – spēles, kurās kaudzītes izmērs tiek samazināts, izmantojot atņemšanas operāciju.

Prom ņemšanas spēles – spēles, kurās kaudzītes izmērs tiek izmainīts, izmantojot dažādas operācijas.

Iespējamie iznākumi – rezultāti, kas rodas pēc gājiena veikšanas.

Dopija skaitļi – skaitļi, kam skaitīšanas sistēmā t beigās ir nepāra skaits nuļļu.

G – kāda prom ņemšanas spēle.

$\overset{*}{+}$ – NIM vērtību summēšanas operators.

$g(n)$ – pozīcijas n NIM vērtība (saukta arī par Spreiga – Grandi vērtību).

$\ldots^* b \ldots$ – perioda sākuma apzīmējums rindā.

$S(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_l)$ – atņemšanas spēle.

$\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_l\}$ – mazinātāju kopa atņemšanas spēlē.

$D(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_l)$ – dalīšanas spēle.

$\lfloor n \rfloor$ – operators, kurš noapaļo skaitli n uz leju līdz tuvākajam veselajam skaitlim.

$R_t(n)$ – skaitļa n pieraksts t skaitīšanas sistēmā.

$\langle k \rangle$ – cipars skaitļa $R_t(n)$ pierakstā.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – veselo nenegatīvo skaitļu kopa.

IEVADS

Spēle ir strukturēta aktivitāte, kurai raksturīgi konkrēti noteikumi un mērķis. Spēle var būt gan izklaide, gan arī mācīšanās līdzeklis.

Mūsdienu izglītības mērķi pedagogam liek izvēlēties aktīvu izziņas procesu veicinošas metodes, kuras paralēli dažādu prasmju un iemaņu attīstīšanai var paaugstināt arī skolēnu mācīšanās motivāciju, jo skolotājs var iemācīt tikai to skolēnu, kurš vēlas mācīties. Bērniem patīk spēles, tādēļ skolēniem lielāku interesi izraisa tieši spēļu uzdevumi. Ar spēļu palīdzību skolotājs stundā var ieviest izklaides un radošuma elementus, kas noteikti attīsta izziņas interesi. Tajā pašā laikā matemātisko spēļu uzdevumi ir ļoti saturiski un jēgpilni. Skolēniem parasti grūtības sagādā tieši risinājuma veidošana. Matemātisko spēļu uzdevumos ir nepieciešams vispirms skaidri formulēt stratēģiju un pēc tam pierādīt, ka tā tiešām noved pie uzvaras. Matemātiskās spēles ir ļoti noderīgas matemātiskās valodas, kā arī skaidras sapratnes par uzdevumu risinājumu izvedumiem attīstībā. Matemātikas mācību stundām var noderēt vienkāršākās spēles. Grūtākas matemātiskās spēles paredzētas spējīgāko skolēnu gatavošanai olimpiādēm, matemātikas pulciņiem un ārpusstundu nodarbībām ar talantīgākajiem audzēkņiem.

Šajā darbā ir tiek aplūkotas matemātiskās spēles, kuras spēlē divi spēlētāji, pamīšus veicot gājienus. Faktoloģiskais materiāls par matemātiskajām spēlēm galvenokārt aprakstīts literatūras avotos [1] un [2].

Diplomdarbā aplūkotas prom ņemšanas spēles.
Diplomdarba mērķis ir izpētīt uzvaras stratēģijas prom ņemšanas spēlēs un apzināt šādu spēļu vietu skolas matemātikas kursā.
Darba uzdevumi:

1) iepazīties ar literatūru par matemātiskajām spēlēm;
2) izveidot aprakstu latviešu valodā matemātisko spēļu teorijai, kas tiek izmantota prom ņemšanas spēļu uzdevumu risināšanā;
3) analizēt starptautiskajā matemātikas olimpiādē *Baltic Way 2011* iekļauto Mark-t klases uzdevumu, izmantojot zinātniskajā periodikā publicētos pētījumus;
4) apkopot prom ņemšanas spēļu uzdevumus, izveidot tiem risinājumus, piedāvāt iespējamo pielietojumu skolā.

Diplomdarbs “Uzvaras stratēģijas prom ņemšanas spēlēs” sastāv no trīs nodaļām.

Pirmajā nodaļā tiek dots ieskats matemātisko spēļu teorijā, noskaidrots, kas ir spēļu summa, uzvaras stratēģija, kā arī NIM spēles. Tiek analizēti arī tādi jēdzieni, kā mex likums, NIM summa un Spreiga – Grandi vērtība.

Otrajā nodaļā tiek apskatīts prom ņemšanas spēļu pamatprocess, noskaidrots, kas ir kaudzīšu spēles, atņemšanas spēles, Mark-t spēles, kā arī aplūkots autores ieviests jēdziens – dalīšanas spēles.

Darba trešajā nodaļā tiek aplūkots starptautiskās matemātikas olimpiādes *Baltic Way 2011* uzdevums, nedaudz izmainot tā sākuma nosacījumus, kā arī tiek piedāvāti vairāki prom ņemšanas spēļu uzdevumi ar risinājumiem, kas var tikt izmantoti skolās – dažādojot matemātikas mācību stundas un fakultatīvās nodarbības.

1. IESKATS MATEMĀTISKO SPĒĻU TEORIJĀ

1.1. Kas ir matemātiskā spēle?

Darbā tiks apskatītas matemātiskās spēles. Tās spēlē divi spēlētāji, un gala rezultāts nekad nevar būt neizšķirts. Šajās spēlēs ir vairākas pozīcijas, ieskaitot sākuma un beigu pozīciju. Pozīcija ir situācija pirms spēlētāja gājiena.

Matemātiskās spēles var iedalīt divās grupās – *objektīvās spēles* un *partizānu spēles*. Objektīvās spēles ir tādas, kur abi spēlētāji veic vienāda veida gājienus, turpretim partizānu spēles – kur spēlētājiem ir atšķirīgi atļautie gājieni. Šajā darbā tiks aplūkotas objektīvas spēles.
Darbā apskatītās matemātiskās spēles atbilst šādiem nosacījumiem [1, 3]:

1. Ir divi spēlētāji – I un II.
2. Spēlē ir vairākas (bet ne bezgalīgi daudz) pozīcijas un viena noteikta *sākuma pozīcija*.
3. Ir viennozīmīgi definēti noteikumi, kas nosaka gājienus, ar kuriem abi spēlētāji var pārvietoties no pozīcijas uz tās *iespējamo iznākumu*.
4. Spēlētāji visas spēles laikā veic gājienus pārmaiņus.
5. Spēle beidzas tad, kad vairs nevar izdarīt gājienu. *Normālā spēlē* uzvar tas, kurš veic pēdējo gājienu, un zaudē tas, kurš vairs nevar izdarīt gājienu. *Apgrieztā spēlē* (*misère play*) zaudē tas, kurš veic pēdējo gājienu, savukārt uzvar tas, kurš veic pirmspēdējo gājienu, jeb pēc pēdējā gājiena vairs nevar izdarīt gājienu.
6. Spēles noslēgumā rezultāts nevar būt neizšķirts, jo noteikumi ir izvēlēti tā, lai spēle vienmēr beigtos, respektīvi, kāds no spēlētājiem nokļūtu *beigu pozīcijā*, vairs nevarot izdarīt gājienu. Spēle beidzas pēc galīga gājienu skaita.
7. Spēle notiek atklāti, nav slēptu gājienu.
8. Nav gadījuma rakstura gājienu, piemēram, kauliņu mešana vai kāršu jaukšana.
9. Pamatproblēma: kas uzvar – tas, kurš spēli sāk (I spēlētājs), vai viņa pretinieks (II spēlētājs)? Un kāda ir uzvaras stratēģija? [4]

Kādu gājienu var saukt par "labu"?

Gājienu sauksim par "labu", ja ar tā palīdzību var uzvarēt spēli, bet par "sliktu", ja nevar. Spēles analīze ir pietiekama, ja tiek atrasts vismaz viens labs gājiens vai arī tiek pierādīts, ka tādi neeksistē.

1.2. Uzvaras stratēģija

Saprotams, ka spēlē, kas apmierina iepriekš minētos deviņus nosacījumus, kādam no abiem spēlētājiem eksistē noteikta uzvaras stratēģija, pieņemot, ka spēli sāk I spēlētājs. Pierādīsim to šādi [1]:

Vispirms pieņemsim, ka I spēlētājam pozīcijā G viens no iespējamiem iznākumiem ir G^I, no kura I spēlētājam ir uzvaras stratēģija, ja nākamo gājienu veic II spēlētājs. Tādējādi I spēlētājam ir uzvaras stratēģija pozīcijā G – viņš veic gājienu uz G^I un turpina spēlēt saskaņā ar stratēģiju pozīcijai G^I.

Ja šāda iespējamā iznākuma I spēlētājam nav, tad iespējams, ka visiem I spēlētāja iespējamiem iznākumiem II spēlētājam ir uzvaras stratēģija, pieņemot, ka viņš sāk gājienu jebkurā no tiem. Šajā situācijā II spēlētājam ir uzvaras stratēģija visā spēlē – viņam jāgaida līdz I spēlētājs veiks savu gājienu uz kādu pozīciju G^I un jāturpina spēlēt saskaņā ar savu uzvaras stratēģiju no pozīcijas G^I.

Ja nevienam spēlētājam nav uzvaras stratēģijas no pozīcijas G, pieņemot, ka sāk I spēlētājs, tad noteikti eksistē tāda pozīcija G^I, no kuras nevienam spēlētājam nav uzvaras pozīcija, ja gājienu veic II spēlētājs. Tas savukārt nozīmē, ka eksistē pozīcija $G^{I,II}$, uz kuru var pārvietoties II spēlētājs, taču no kuras atkal nevienam spēlētājam nav uzvaras pozīcijas. Šādā veidā varam iegūt bezgalīgu virkni $G \to G^I \to G^{I,II} \to G^{I,II,I} \to \ldots$ ar atļautiem gājieniem no pozīcijas G. Tas ir pretrunā ar spēles nosacījumu 6.punktu (nodaļā 1.1.), kas nosaka, ka spēle vienmēr beidzas ar kāda spēlētāja uzvaru.

1.3. Spēļu summa

Atjautīgi spēlētāji var spēlēt jebkuru divu spēļu, piemēram, G un H summu. Sauksim spēles G un H par apvienojuma $G + H$ komponentēm. $G + H$ spēlē šādā veidā – spēlētāji pārmaiņus veic gājienus, katrā gājiena reizē izvēloties vienu no komponentēm G vai H un veicot gājienu, kas ir atļauts šajā spēlē. Pēc tam gājiens pāriet otram spēlētājam, kurš arī izvēlas vienu no komponentēm G vai H, un veic gājienu pēc tās noteikumiem. Nav nekādu ierobežojumu, kuru no komponentēm spēlētājam vajadzētu izvēlēties, kā vien tas, vai viņš šajā komponentē var izdarīt gājienu. Sava komponentes izvēle nav jāsaista ar pretinieka izvēli, ja vien šāda nav spēlētāja izvēlētā stratēģija [1]. Piemēram, var izveidot spēļu summu no šaha un dambretes (att. 1.1.), šajā gadījumā spēlētājs, kuram ir gājiens, izvēlas vienu no abiem galdiņiem un veic gājienu ar kādu no atbilstošajiem kauliņiem, pēc tam gājienu veic pretinieks.

Att. 1.1.: **Spēļu summas piemērs**

1.4. NIM spēles

Šīs nodaļas (1.4.) teorija balstīta uz materiāliem [1, 2, 4]. Spēli NIM spēlē ar objektiem, piemēram, sērkociņiem, konfektēm, žetoniem u.c., kuri ir izvietoti divās vai vairāk kaudzītēs. Objektu skaits katrā kaudzītē var būt atšķirīgs. Katrā gājienā spēlētājs drīkst paņemt vienu vai vairākus objektus no kādas kaudzītes. Uzvar spēlētājs, kurš paņem pēdējo objektu. Spēlei NIM ir galvenā loma visu objektīvo spēļu teorijā. R. P. Spreigs (*Roland Percival Sprague*) un P. M. Grandi (*Patrick Michael Grundy*) neatkarīgi viens no otra pierādīja, ka NIM spēle viennozīmīgi satur visu objektīvo spēļu saskaitīšanas teoriju.

1.4.1. NIM summa I

Lai noskaidrotu, kuram spēlētājam ir uzvaras stratēģija NIM spēlē, izveido NIM summu. Definēsim skaitli $*A$ kā tādu, kura zīme (pozitīvs vai negatīvs) nav definēta, to varam izvēlēties pēc vajadzības. Pieņemsim, ka mūsu spēlē ir divas kaudzītes, kurās objektu skaits attiecīgi ir A un B. Lai noskaidrotu, kuram spēlētājam ir uzvaras stratēģija, konstruējam summu

$$g = *A + *B. \tag{1.1}$$

Ja summa ir precīzi 0, tad uzvaras pozīcija ir II spēlētājam, citos gadījumos – I spēlētājam. Piemēram, spēlē, kur ir trīs kaudzītes, kurās attiecīgi ir 3, 4 un 5 žetoni, uzvar I spēlētājs, bet, ja sākuma trijnieks ir $2, 5, 7$, tad uzvar II spēlētājs:

$$g = *3 + *4 + *5 \sim *7 + *5 = *2 \neq *0,$$

$$g = *2 + *5 + *7 \sim *7 + *7 = *0.$$

Detalizētāka NIM summas aprēķināšana tiks aplūkota nodaļā 1.4.5.

NIM spēle, kurā ir vairākas kaudzītes, ir ekvivalenta vienas kaudzītes spēlei ar g (NIM summa) elementiem (ja vienīgajā kaudzītē nav neviena elementa, tad I spēlētājs ir zaudējis, jo nevar izdarīt pirmo gājienu).

1.4.2. Pokera NIM spēle

Pokera NIM spēli spēlē tāpat kā parasto NIM spēli, bet spēlētājam papildus tiek dota iespēja ne tikai ņemt prom, bet arī likt klāt iepriekšējos gājienos paša noņemtos objektus. Šajā spēlē uzvaras stratēģija ir tam pašam spēlētājam, kuram parastajā NIM spēlē (nosakāma ar NIM summas palīdzību), jo spēlētājam, kuram nav uzvaras stratēģijas, pievienojot objektus kādai no kaudzītēm, mēģinot iegūt uzvaras stratēģiju, pretinieks šos objektus var paņemt nost, atjaunojot iepriekšējo situāciju un saglabājot uzvaras stratēģiju. Tā kā iepriekš noņemto objektu skaits ir galīgs, tad arī šādu gājienu skaits ir ierobežots, un tie var tikai paildzināt spēli, bet ne izmainīt tās iznākumu. Ja objektus ņemam nost, tad tos saucam par parastiem gājieniem, bet, ja objektus liekam klāt, tad par – papildināšanas gājieniem.

1.4.3. Mex likums un viltus NIM kaudzītes

Par viltus NIM spēli sauksim tādu, kurā nav atļauts izveidot kaudzītes ar kādu noteiktu objektu skaitu, pie tam atļauta gan objektu ņemšana nost, gan kaudzīšu papildināšana.

Kā piemēru aplūkosim **1. spēli**, kurā kādas kaudzītes izmērs pēc gājiena drīkst būt $*0, *1, *4, *7, *8$. Var uzskatīt, ka šī kaudzīte ir ekvivalenta tādai, kurā ir divi objekti, kurā var veikt parastos (atņemšanas) gājienus, kaudzītes izmērus samazinot līdz $*0$ vai $*1$ vai papildināšanas gājienus ($*4, *7, *8$). Kā noskaidrots iepriekš, papildināšanas gājieni nekādas būtiskas izmaiņas uzvaras stratēģijā nesniedz, tāpēc, analizējot uzvaras stratēģijas, var uzskatīt, ka tā ir parasta NIM kaudzīte ar diviem elementiem. Vispārīgā gadījumā, ja no kādas pozīcijas ir atļauti gājieni uz pozīcijām $*A, *B, *C$, ..., tad var teikt, ka šī kaudzīte ir ekvivalenta parastai NIM kaudzītei $*M$, kur M – mazākais veselais skaitlis, kurš nepieder skaitļu kopai $\{A, B, C, \dots\}$.

Varam definēt funkciju mex:

$$\text{Ja } S \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \text{ tad } mex(S) = \min(\mathbb{N} \setminus S) \tag{1.2}$$

Tātad $M = mex(A, B, C, \dots)$.

Funkcija mex atbilst loģiskajam operatoram *XOR* (izslēdzošais "vai").

1.4.4. Spreiga-Grandi teorija objektīvām spēlēm

Izmantojot iepriekšējo rezultātu, var pierādīt, ka jebkuru objektīvu spēli var uzskatīt par viltus NIM kaudzīti. Aplūkosim objektīvu spēli G, kuru veido spēļu $A, B, C, \dots$ summa:

$$G = A + B + C + \dots,$$

kur $A, B, C, \ldots$ – vienkāršākas objektīvās spēles, par kurām jau ir zināms, ka tās ir ekvivalentas NIM kaudzītēm $*A, *B, *C, \ldots$ Šādā gadījumā var uzskatīt, ka G arī ir NIM kaudzīte $*G = mex(A, B, C, ...)$. Esam noformulējuši **viltus NIM kaudzīšu principu**:

Princips 1 (Viltus NIM kaudzītes) *Katra objektīva spēle patiesībā ir tikai viltus NIM kaudzīte (t.i., NIM kaudzīte ar dažām pozīcijām pievienotiem atgriezeniskiem gājieniem).* Mex *likums ļauj noskaidrot spēles* G *kaudzītes izmēru kā mazāko iespējamo skaitli, kas neatbilst nevienam no spēles* G *iespējamiem iznākumiem.*

Šo principu nedaudz citādākā veidā, neatkarīgi viens no otra, atklāja R. P. Spreigs 1936. gadā un P. M. Grandi 1939.gadā. Tas nozīmē, ka, mākot spēlēt NIM, mēs varam spēlēt jebkuru citu objektīvu spēli, tikai ir nepieciešama "vārdnīca" , kas iztulko dotās spēles pozīcijas uz atbilstošo NIM kaudzīšu izmēriem.

1.4.5. NIM summa II

Iepriekš tika aplūkota NIM summu skaitļiem $*A$, $*B$, bet netika viennozīmīgi pateikts, kā izvēlēties zīmi šajā summā. NIM summu var definēt ar mex likuma palīdzību.

Tabula 1.1.: **NIM summu piemēri**

$*A$	$*B$	$*A' + *B$	$*A + *B'$	$*A + *B$
$*0$	$*1$	$-$	$*0 + *0 = *0$	$*0 + *1 = *1$
$*1$	$*1$	$*0 + *1 = *1$	$*1 + *0 = *1$	$*1 + *1 = *0$
$*1$	$*2$	$*0 + *2 = *2$	$*1 + *0 = *1$ $*1 + *1 = *0$	$*1 + *2 = *3$
$*1$	$*3$	$*0 + *3 = *3$	$*1 + *0 = *1$ $*1 + *1 = *0$ $*1 + *2 = *3$	$*1 + *3 = *2$
$*1$	$*4$	$*0 + *4 = *4$	$*1 + *0 = *1$ $*1 + *1 = *0$ $*1 + *2 = *3$ $*1 + *3 = *2$	$*1 + *4 = *5$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

$*A + *B$ veido visas iespējamās pozīcijas formā $*A' + *B$ vai $*A + *B'$, kur A' ir jebkurš nenegatīvs vesels skaitlis, kas mazāks par A, un B' ir jebkurš nenegatīvs vesels skaitlis, kas mazāks par B. Summu $*A + *B$ iegūst kā:

$$*A + *B = mex(*A' + *B, *A + *B'). \tag{1.3}$$

Daži vienkārši piemēri ir apkopoti tabulā 1.1.

NIM summām ir šādas īpašības:

1. Ja $A < 2^k$ un $B < 2^k$, tad $*A + *B < *2^k$;
2. $*2^k + *A = *\left(2^k + A\right)$;
3. $*A + *A = *0$;
4. NIM summa ir vienāda vai mazāka par parasto summu, pie tam starpība ir pāra skaitlis.

1. pielikumā atrodamas NIM summas aprēķināšanas metodes, kā arī NIM saskaitīšanas tabula.

2. PROM ŅEMŠANAS SPĒLES

Angliski šo spēļu nosaukums ir "*Take – away games*". Spēles nosaukums atspoguļo spēles pamatprocesu – ir kaut kādu objektu kaudzīte vai vairākas kaudzītes, no kuras(-ām) var ņemt kādu noteiktu skaitu objektu. Pie tam prom ņemšana var notikt vairākos veidos – atņemot, dalot, atņemot un sadalot, pārliekot no vienas kaudzītes citā vai arī jebkura kombinācija no šīm darbībām.

2.1. Kaudzīšu spēles

Aplūkosim objektīvu spēli, kuru spēlē ar vairākām kaudzītēm, un kurā katrs gājiens ietekmē tikai vienu kaudzīti. Katra pozīcija šādā spēlē ir atsevišķo kaudzīšu pozīciju summa. Šādu uzdevumu var atrisināt, ja ir zināma kaudzītes ar n elementiem pozīcijas vērtība jebkuram n. Objektīvā spēlē katra šāda vērtība ir ekvivalentās (viltus) NIM kaudzītes izmērs $*M$. Vienkāršības labad šajā nodaļā zvaigznītes ("$*$") vairāk netiks rakstītas. Piemēram, aplūkojot kaudzītes ar izmēriem $0, 1, 2, 3, \ldots$, ar NIM vērtībām $*A, *B, *C, *D, \ldots$, var teikt, ka tās veido NIM rindu $ABCD\ldots$ NIM vērtībām ieviesīsim pierakstu $g(0) = A$, $g(1) = B$, $g(2) = C$, $g(3) = D, \ldots$. Izmantojot informāciju, ko satur NIM rinda, var analizēt jebkuru pozīciju kaudzīšu spēlē.

Aplūkosim spēli, ko veido kaudzītes ar izmēriem $i, j, k, \ldots$ Šādas spēles NIM vērtība ir NIM summa $g(i)\overset{*}{+}g(j)\overset{*}{+}g(k)\overset{*}{+}\ldots$, kur katru NIM vērtību $g(n)$ iegūst kā mex vērtību no n izmēru kaudzītes iespējamiem iznākumiem.

2.2. P-pozīcijas un N-pozīcijas

Pozīcija – situācija **pirms** spēlētāja gājiena.

1. Ja ir uzvaroša pozīcija, tad eksistē gājiens, ar kuru no tās var iegūt zaudējošu pozīciju.
2. Ja ir zaudējuma pozīcija, tad no tās ar jebkuru gājienu tiek iegūta uzvaroša pozīcija.

Objektīvām spēlēm var būt divi iznākumi – uzvar vai nu I ,vai II spēlētājs. Atbilstoši tiem, visas pozīcijas spēlē var klasificēt kā:

P-pozīcijas (uzvaras stratēģija ir spēlētājam, kurš veica ie**P**riekšējo gājienu);

N-pozīcijas (uzvaras stratēģija ir spēlētājam, kurš veiks **N**ākamo gājienu).

Pozīcijas, kurām NIM summa ir 0, ir P-pozīcijas, bet tās, kurām NIM summa nav 0 – N-pozīcijas. Citas vērtības objektīvā spēlē nav iespējamas. Aprēķinot NIM summu, jāņem vērā katra elementa vērtība, nevis tikai tas, vai tā ir P vai N-pozīcija. P un N-pozīciju raksturīgās īpašības:

1. Normālā spēlē visas beigu pozīcijas ir P-pozīcijas.

2. No katras N-pozīcijas ir vismaz viens gājiens līdz P-pozīcijai.

3. No katras P-pozīcijas katrs gājiens noved pie N-pozīcijas.

2.3. Atņemšanas spēles

NIM spēli varētu modificēt tā, ka vienā gājienā atļauts atņemt ne vairāk kā četrus žetonus. Tas nozīmētu, ka n-tās pozīcijas NIM vērtība ir

$$g(n) = mex(g(n-1), g(n-2), g(n-3), g(n-4)),$$

tātad NIM rinda ir:

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$g(n)=$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	...

Var redzēt, ka kaudzīte ir P-pozīcija tikai tad, ja žetonu skaits tajā būs 5 daudzkārtnis.

Vispārīgā gadījumā, ja kaudzīti var samazināt par skaitli, kas nav lielāks par k, tad NIM rinda ir :

$n=$	0	1	2	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	...
$g(n)=$	0	1	2	...	$k-1$	k	0	1	...	k	0	1	...

Viena kaudzīte veidos P-pozīciju tad, ja objektu skaits tajā būs k+1 daudzkārtnis [1].

Iepriekšējie rezultāti ir labi zināmi un viegli konstatējami, tāpēc interesantāk būtu spēlēt spēli, kuras atrisinājums nav tik acīmredzams. Piemēram, **2. spēli**, kurā kaudzītes izmēru var samazināt par $1, 4$ vai 5. Šajā gadījumā:

$$g(n) = mex\,[g(n-1), g(n-4), g(n-5)]$$

un atbilstošā NIM rinda ir:

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$g(n)=$	*0	1	0	1	2	3	2	3	*0	1	0	1	2	3	2	3	*0	1	...

Redzams, ka spēles atrisinājums ir periodisks, ar zvaigznīti (*) ir atzīmēti periodu sākumi. Tātad varam secināt, ka P-pozīcijas ir skaitļi, kas kongruenti ar 0 vai 2 pēc moduļa 8.

Piemēram, lai noskaidrotu, kuram spēlētājam ir uzvaras stratēģija **2. spēlē**, kuru spēlē ar 100 žetoniem, analizējam P un N-pozīcijas:

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
Pozīcija:	$^*P$	N	P	N	N	N	N	N	$^*P$	N	P	N	N	N	N	N	$^*P$	N	...

Virkne PNPNNNNN (ar garumu 8) atkārtojas visu laiku.

P-pozīcijas ir tās, kas, dalot ar 8, atlikumā dod 0 vai 2. Tā kā 100:8 = 12, atlikumā 4 , tātad 100 ir N-pozīcija, kas nozīmē, ka uzvaras stratēģija pastāv I spēlētājam.

Spēli varētu vēl sarežģīt, spēlējot nevis ar vienu, bet vairākām kaudzītēm. Piemēram, pamēģināsim atrast gājienus, kas atbilst uzvaras stratēģijai spēlē ar trīs kaudzītēm, kuru izmēri ir $6, 7$ un 8 un atbilstošās NIM vērtības attiecīgi $2, 3$ un 0. Uzvaras stratēģija būtu savā gājienā pārvietoties uz pozīciju ar NIM summu 0. Ir trīs iespējamie varianti ar NIM vērtībām:

- $3, 3, 0$ – pirmajā kaudzītē jāiegūst NIM vērtība 3, kas atbilst 5 objektiem $(6 - 1 = 5)$;
- $2, 2, 0$ – otrajā kaudzītē jāiegūst NIM vērtība 2, kas atbilst 6 objektiem $(7 - 1 = 6)$;
- $2, 3, 1$ – trešajā kaudzītē jāiegūst NIM vērtība 1, kas atbilst 3 objektiem $(8 - 5 = 3)$.

Vispārīgā gadījumā var izveidot atņemšanas kopu $\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_l\}$ un izveidot jeb definēt atbilstošu atņemšanas spēli $S(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_l)$. Varam teikt, ka šādā spēlē spēlētājs no pozīcijas n, veicot gājienu, var pārvietoties uz pozīcijām $n - s_1, n - s_2, n - s_3, \ldots, s_l$.

Jāpiebilst, ka šādi definētas spēles $g(n)$ vērtībai vienmēr būs spēkā ierobežojums

$$g(n) \leqslant l. \tag{2.1}$$

Šo īpašību nav grūti pierādīt, atceroties, ka $g(n)$ tiek izteikts kā

$$g(n) = mex[g(n - s_1), g(n - s_2), g(n - s_3), \ldots, g(n - s_l)],$$

saskaņā ar mex definīciju (1.2), tās vērtība nevar pārsniegt argumentu skaitu.

No aplūkojamās **2. spēles** $S(1, 4, 5)$ NIM rindas ir redzams, ka vērtības $g(n)$ nekad nesakrīt ar vērtībām $g(n - 3)$. Tas nozīmē, ka, pievienojot skaitli "3" atņemšanas kopai, NIM vērtību rinda netiktu izmainīta, jo, saskaņā ar mex definīciju (1.2), mex argumentam pievienojot elementu, kas nav vienāds ar attiecīgo mex vērtību $mex(S)$, $mex(S)$ netiek izmainīta. Tātad spēlēm $S(1, 4, 5)$ un $S(1, 3, 4, 5)$ ir vienādas NIM rindas.

Vispārīgā gadījumā, ja spēles $S(s1, s2, s3, \ldots, s_l)$ NIM rindai katram n ir spēkā nevienādība $g(n) \neq g(n - s')$, tad šī spēle ir ekvivalenta spēlei $S(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k, s')$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(n) \neq g(n - s'),\ s' \notin \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k\}$$

$$g(n) = mex\{g(n - s_1), g(n - s_2), g(n - s_3), \ldots, g(n - s_k)\} =$$

$$= mex\{g(n - s_1), g(n - s_2), g(n - s_3), \ldots, g(n - s_l), g(n - s')\},$$

saskaņā ar mex definīciju (1.2).

Dažādu atņemšanas spēļu NIM rindas ir apkopotas **2. pielikumā**.

2.4. Dalīšanas spēles

Mazliet citādāka NIM spēles modifikācija ir tāda, kurā spēlētājam savā gājienā ir atļauts žetonu skaitu kaudzītē samazināt, veicot dalīšanu ar kādu veselu nenegatīvu skaitli un noapaļojot rezultātu uz leju. Aplūkosim vienkāršu piemēru, kurā atļauts veikt dalīšanu ar skaitli "2", rezultātu noapaļojot uz leju. Uzrakstīsim NIM rindu:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc} n= & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \dots \\ g(n)= & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \end{array}.$$

Redzams, ka $g(n)$ ir tikai 0 vai 1 un mainās pie visām n vērtībām, kuras ir izsakāmas kā $n = 2^k$ $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$, turklāt pie nepāra pakāpēm $g\left(n = 2^{2k+1}\right)$ mainās uz 0, bet pie pāra pakāpēm $g\left(n = 2^{2k}\right)$ – uz 1.

Šos secinājumu varam viegli vispārināt uz spēli, kurā dalīšana veicama ar patvaļīgu skaitli d un vienīgais atļautais gājiens no pozīcijas n ir $\lfloor n/d \rfloor$. Šādas spēles NIM vērtības var pierakstīt, kā

$$g(n) = \begin{cases} 0, & d^{2k+1} \leqslant n < d^{2k} \\ 1, & d^{2k} \leqslant n < d^{2k+1} \end{cases}. \tag{2.2}$$

Protams, ka šāda "spēle" nav atkarīga no spēlētāju gājienu izvēles, jo ir tikai viens atļauts gājiens.

Paplašinot atļauto gājienu skaitu tā, ka gājienā var veikt dalīšanu (un noapaļošanu uz leju) ar kādu no skaitļiem kopā $\{d_1, d_2, d_3, \dots\}$, var definēt spēli $D(d_1, d_2, d_3, \dots)$. Aplūkosim vienkāršāko no šādām spēlēm $D(2, 3)$ (**3. spēle**), uzrakstot tās NIM rindu:

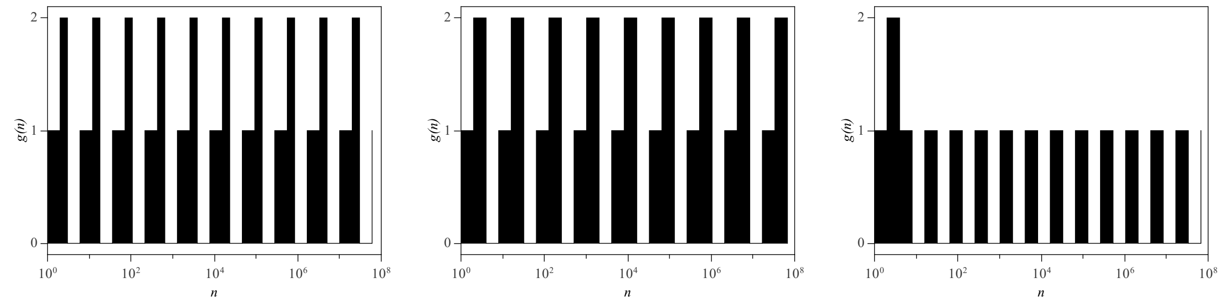
$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc} n= & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 11 & 12 & \dots & 17 & 18 & \dots & 35 & 36 & \dots & 71 & 72 & \dots \\ g(n)= & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots \end{array}.$$

Vispārīgā formā spēles $D(2, 3)$ NIM vērtības var uzrakstīt:

$$g(n) = \begin{cases} 0, & 2^k \cdot 3^{k+1} \leqslant n < 2^{k+1} \cdot 3^{k+1} \\ 1, & 2^k \cdot 3^k \leqslant n < 2^{k+1} \cdot 3^k \\ 2, & 2^{k+1} \cdot 3^k \leqslant n < 2^k \cdot 3^{k+1} \end{cases}.$$

Vispārīgā gadījumā spēles $D(d_1, d_2)$ atrisinājumam saglabājas vērtību maiņa pie $n = (d_1)^k \cdot (d_2)^l$, ar $|k - l| \leqslant 1$, pašas $g(n)$ vērtības gan mainās katrai spēlei pēc atšķirīgiem likumiem. Lai gan pie mazām n vērtībām periodiskums var neizpildīties, atbilstošās $g(n)$ vērtības periodiski mainās attiecībā pret $\ln(n)$.

Vērtības $g(n)$ attēlojot grafiski (att. 2.1.), dalīšanas spēļu logaritmiskais periodiskums ir labi redzams. Spēlēs, kur $d_2 = (d_1)^{2k+1}$, pēc periodiskuma iestāšanās, $g(n)$ mainās tikai starp vērtībām 0 un 1, to labi ilustrē attēls 2.1. (c) un vairāki citi attēli **3. pielikumā**.



(a) $D(2,3)$ *(b)* $D(2,4)$ *(c)* $D(2,8)$

Att. 2.1.: **Dalīšanas spēļu $D(2,3), D(2,4), D(2,8)$ $g(n)$ vērtības (uz horizontālās ass ir izmantota logaritmiskā skala).**

NIM rindu struktūra spēlēm ar vairāk kā 2 dalītājiem ir sarežģītāka un šajā darbā netiek apskatīta. Vairāku dalīšanas spēļu NIM rindas ir apkopotas **3. pielikumā**.

Jāpiebilst, ka autorei pieejamajos literatūras avotos neparādās dalīšanas spēļu jēdziens.

2.5. Mark un Mark-t spēles

2.5.1. Mark spēle

Par objektīvu Mark spēli tiek saukta matemātiskā spēle, ko spēlē veselos nenegatīvos skaitļos. Mark spēli sāk ar skaitli n un atļautie gājieni ir $n-1$ un $\lfloor n/2 \rfloor$. Normālā spēlē zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar izdarīt gājienu [5]. Šī spēle ir atņemšanas spēles $S(1)$ un dalīšanas spēles $D(2)$ summa:

$$\text{Mark} = S(1) + D(2). \tag{2.3}$$

Kā parādīja Fraenkel [5], tad šādas spēles P- un N-pozīciju analīzi ir ērti veikt nevis izmantojot iepriekš aplūkoto NIM summu, bet gan konstruējot skaitļu rindas:

$$A = \cup_{n \geqslant 1} a_n;\ a_n = mex\{a_i, b_i, 0 \leqslant i < n\}\ (n \geqslant 0), \tag{2.4}$$

$$B = \cup_{n \geqslant 1} b_n;\ b_n = 2 \cdot a_n\ (n \geqslant 0). \tag{2.5}$$

Abu rindu pirmie locekļi ir šādi:

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\ldots$
$a_n=$	1	3	4	5	7	9	11	12	13	15	16	17	19	20	21	23	25	27	28	29	$\ldots$.
$b_n=$	2	6	8	10	14	18	22	24	26	30	32	34	38	40	42	46	50	54	56	58	$\ldots$

Abas rindas ir klasificētas "Tiešsaites veselo skaitļu rindu enciklopēdijā" kā $A003159$ (A) un $A036554$ (B) [6].

Nav grūti pierādīt, ka abu rindu apvienojums veido visu veselo nenegatīvo skaitļu kopu $A \cup B = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, bet to šķēlums veido tukšu kopu $A \cap B = \emptyset$.

Tā kā a_n ir izteikts ar mex funkciju no visiem iepriekšējiem abu rindu elementiem, nav neviena nenegatīva skaitļa, kurš nebūtu iekļauts apvienojumā. Pieņemsim, ka pastāv $a_n = b_m$ kaut kādiem $m, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Ja $n > m$, tad a_n ir mex no kopas, kas satur elementu $b_m = a_n$, kas ir pretrunā ar mex definīciju (1.2); ja $n \leqslant m$, tad $b_m = 2 \cdot a_m \geqslant 2 \cdot a_n = 2 \cdot b_m$, kas var izpildīties tikai pie $m = 0$, nonākot pretrunā ar (2.5). □

Esam noskaidrojuši, ka rindas A un B satur visus veselos nenegatīvos skaitļus, pie tam, katrs skaitlis, izņemot "0" tajās parādās tieši vienu reizi. Saskaņā ar [5], skaitļi a_n veido Mark spēles N-pozīcijas, bet skaitļi b_n – P-pozīcijas.

Pierādījuma pamatā ir N- un P- pozīciju īpašības: saskaņā ar (2.5), katrs gājiens no pozīcijas $n \in B$ noved pie pozīcijas $n' \in A$. Rinda B satur tikai pāra skaitļus, atņemot "1", vienmēr tiek iegūts nepāra skaitlis, kas tātad pieder rindai A, bet, veicot dalīšanu, tiek iegūta vērtība $a_n = b_n/2$. Analoģiskas īpašības esam definējuši P- jeb zaudējuma pozīcijai nodaļā 2.2. □

Ja a_n ir nepāra skaitlis, atrodoties pozīcijā $a_n \in A$, tad $\lfloor a_n/2 \rfloor = (a_n - 1)/2$, un vai nu $a_n - 1 \in B$, vai arī $(a_n - 1)/2 \in B$, jo pēc B definīcijas (2.5), skaitļi $a_n - 1$ un $(a_n - 1)/2$ vienlaikus nevar piederēt pie A. Savukārt, ja a_n ir pāra, tad $a_n/2 \in B$, pēc (2.5). Tātad no katras pozīcijas a_n pastāv gājiens ar kuru var pāriet uz pozīciju b_m, šādu īpašību nodaļā 2.2. definējām N-pozīcijām. □

Bez šīm īpašībām Fraenkel [5] parādīja, ka visas P-pozīcijas jeb rindas B skaitļi ir t.s. *dopija* skaitļi – tādi skaitļi, kurus pierakstot binārajā skaitīšanas sistēmā, tie noslēdzas ar nepāra skaitu nuļļu:

Tabula 2.1.: **Dopija skaitļi binārajā skaitīšanas sistēmā**

Decimālais pieraksts	Binārais pieraksts
2	10
6	110
8	1000
10	1010
14	1110
18	10010
22	10110
...	...

Mark spēlē $g(n) \in \{0, 1, 2\}$, jo katrai pozīcijai ir ne vairāk kā trīs iespējamie iznākumi.

Viens no galvenajiem Fraenkel [5] secinājumiem bija tāds, ka Mark spēlē

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ja } n \text{ binārajā pierakstā beigās ir nepāra skaits nuļļu} \\ 1, & \text{ja } n \text{ binārajā pierakstā ir nepāra skaits vieninieku un beigās ir pāra skaits nuļļu} \\ 2, & \text{ja } n \text{ binārajā pierakstā ir pāra skaits vieninieku un beigās ir pāra skaits nuļļu.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Šis rezultāts ļauj ne tikai analizēt Mark spēli, bet arī tādas spēļu summas, kurās Mark ir kāda no komponentēm.

Mark spēles piemērs ir **19. spēle**.

2.5.2. Mark-t spēle

Mark spēle var tikt vispārināta, iegūstot Mark-t spēļu grupu, kuru raksturo vesels skaitlis $t \geqslant 2$. Spēlē Mark-t spēlētājs vienā gājienā var pārvietoties no n uz $n-1, n-2, n-3, \dots, n-(t-1)$ vai $\lfloor n/t \rfloor$. Respektīvi, spēle Mark ir Mark-t speciālgadījums, kur $t = 2$ [7].

Guo [7] piedāvātā vispārīgās Mark-t spēles analīze ir līdzīga Mark jeb Mark-2 [5] spēles analīzei:

- spēles pozīcijas tiek analizētas, tās pierakstot t skaitīšanas sistēmā kā $R_t(n)$;
- P-pozīcijas veido $dopija$ skaitļi;
- $g(n) \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$;
- $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, t-2\},\ g(n) = k$, ja $R_t(n)$ beidzas ar nepāra skaitu cipariem $\langle k \rangle$;
- $g(n)$ vērtība mainās pārmaiņus starp $t-1$ un t visiem tādiem $R_t(n)$, kas neatbilst iepriekšējā punkta nosacījumiem;
- ir izveidots rekursīvs algoritms NIM vērtības $g(n) = f[g(n-1)]$ aprēķināšanai.

Šis rezultāts ļauj ne tikai analizēt Mark-t spēli, bet arī tādas spēļu summas, kurās Mark-t ir kāda no komponentēm.

Mark-t spēles piemērs ir **4. spēle**.

3. PROM ŅEMŠANAS SPĒLES UZDEVUMOS

Šajā nodaļā tiks aplūkoti dažādi prom ņemšanas spēļu uzdevumi. Nodaļa sākta ar paaugstinātas grūtības uzdevumu un šī uzdevuma vispārinājumu. Tālāk ir aplūkoti uzdevumi, kurus var izmantot skolā gan stundās, gan fakultatīvās nodarbībās.

3.1. Spēle 2012^{2012}

Šajā nodaļā analizēsim uzdevumu, kuram analogs bija iekļauts olimpiādē *Baltic Way 2011*.

> **4. spēle.** 2012^{2012}.
> *Ir dots skaitlis* 2012^{2012}. *Viena gājiena laikā atļauts atņemt veselu skaitli no* 1 *līdz* 2011 *ieskaitot, vai dalīt ar* 2012 *un rezultātu noapaļot uz leju. Spēlētājs, kurš iegūst nepozitīvu veselu skaitli, uzvar. Kuram spēlētājam ir uzvaras stratēģija* [8]*?*

Aplūkosim uzdevuma risinājumu no beigām. Varam viegli izdarīt šādus secinājumus:

A ir skaidrs, ka spēlētājs, kura *pozīcija* (skaitlis pirms spēlētāja gājiena) pieder kopai $\{1, 2, \ldots, 2011\}$, spēlē uzvarēs, šīs ir N-pozīcijas;

B spēlētājs, kura pozīcija ir 2012, zaudēs, jo jebkurš atļautais gājiens noved pie iznākuma kopā $\{1, 2, \ldots, 2011\}$, kas ir uzvaras pozīcijas pretiniekam, tātad 2012 ir P-pozīcija;

C $\{2013, 2014, \ldots, 4023\}$ ir N-pozīcijas, jo, no tām atņemot atbilstošu skaitli, var izveidot zaudētu pozīciju pretiniekam (2012);

D 4024 savukārt ir P-pozīcija, jo tās iespējamie iznākumi $\{2, 2013, 2014, \ldots 4023\}$ ir N-pozīcijas.

Redzams, ka pozīcijās, kuras ir tuvas skaitlim 2012 un mazākas par 2012^2, var viegli analizēt P- un N-pozīcijas, pie tam pozīcijas ir izvietotas periodiski. Nav grūti izsekot, ka P-pozīcijas ir $n \cdot 2012$, kur $n < 2012$. Pie $n = 2012$ šis periodiskums apstājas, skaitlis $2012 \cdot 2012$ nav P-, bet gan N-pozīcija, jo, šo skaitli dalot ar 2012, iegūst 2012, kas ir P-pozīcija (B punkts). Tieši tāpat N-pozīcijas ir visi skaitļi kopā $\{2012^2, 2012^2 + 1, \ldots, 2012^2 + 2011\}$, jo, visus tos dalot ar 2012 un apaļojot uz leju, iegūst P-pozīciju 2012. Tātad varam izdarīt secinājumu, ka P- un N-pozīciju izvietojums šajā spēlē ir *aperiodisks*.

Lai tālākā analīze būtu labāk pārskatāma, pāriesim uz skaitļu pierakstu 2012 skaitīšanas sistēmā, nevis ikdienā ierastajā decimālajā skaitīšanas sistēmā. Šo skaitļu sistēmu veido cipari $\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle 2011\rangle$. Piemēram, varam rakstīt

$$90540 = 45 \cdot 2012 = \langle 45\rangle\langle 0\rangle,$$

$$90769 = 45 \cdot 2012 + 229 = \langle 45\rangle\langle 229\rangle.$$

Turpmākajā analīzē apzīmē $\langle k\rangle \neq \langle 0\rangle, \langle l\rangle \neq \langle 0\rangle, \langle m\rangle \neq \langle 0\rangle, \langle n\rangle \neq \langle 0\rangle$.

Tabula 3.1.: **P- un N-pozīciju apkopojums spēles "2012" beigu posmam. Skaitļi pierakstīti bāzē 2012, $\langle k\rangle$ $\langle l\rangle, \langle m\rangle, \langle n\rangle \neq \langle 0\rangle$.**

Nr. p. k.	Skaitlis(-ļi)	Pozīcija	Pāreja uz
1.	$\langle k\rangle$	N	
2.	$\langle 1\rangle\langle 0\rangle$	P	1.
3.	$\langle k\rangle\langle l\rangle$	N	2. vai 4.
4.	$\langle k\rangle\langle 0\rangle$	P	1. vai 3.
5.	$\langle k\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle$ un $\langle k\rangle\langle 0\rangle\langle l\rangle$	N	4.
6.	$\langle k\rangle\langle 1\rangle\langle 0\rangle$	P	3. vai 5.
7.	$\langle k\rangle\langle 1\rangle\langle l\rangle$	N	6.
8.	$\langle k\rangle\langle l\rangle\langle 0\rangle$	P	7. vai 9.
9.	$\langle k\rangle\langle l\rangle\langle m\rangle$	N	6. vai 8.
10.	$\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle$	P	5. vai 9.
11.	$\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle\langle k\rangle$	N	10.
12.	$\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 1\rangle\langle 0\rangle$	P	5. vai 11.
13.	$\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle k\rangle\langle l\rangle$	N	12. vai 14.
14.	$\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle k\rangle\langle 0\rangle$	P	5., 11. vai 13.
15.	$\langle k\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle$	P	5., 9. vai 17.
16.	$\langle k\rangle\langle l\rangle\langle m\rangle\langle 0\rangle$	P	9. vai 17.
17.	$\langle k\rangle\langle l\rangle\langle m\rangle\langle n\rangle$	N	17.
...			

Jaunajā skaitīšanas sistēmā, aplūkojot iepriekšējās analīzes rezultātus, P-pozīcijas ir $\{\langle 1\rangle\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\langle 0\rangle, \ldots, \langle 2011\rangle\langle 0\rangle\} = \{\langle k\rangle\langle 0\rangle\}$, savukārt skaitļi $\{\langle k\rangle\langle 1\rangle, \langle k\rangle\langle 2\rangle, \ldots, \langle k\rangle\langle 2011\rangle\}$ un $\{\langle k\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle, \langle k\rangle\langle 0\rangle\langle 1\rangle, \ldots, \langle k\rangle\langle 0\rangle\langle 2011\rangle\}$ ir N-pozīcijas, jo no tiem ar vienu gājienu var izveidot P-pozīciju. Kopā ar pirmajiem decimālajā skaitīšanas sistēmā izdarītajiem spriedumiem šīs pozīcijas ierakstām 1. līdz 5. rindiņā tabulā 3.1..

Aplūkosim skaitļus $\langle k\rangle\langle 1\rangle\langle 0\rangle$, šie skaitļi ir P-pozīcijas, jo jebkurš atļautais gājiens no tiem izveido vispārinātajā tabulas 3.1. 3. vai 5. rindiņā atzīmēto N-pozīciju. Savukārt skaitļi $\langle k\rangle\langle 1\rangle\langle m\rangle$ ir N-pozīcija, jo no tiem ar vienu gājienu iespējams izveidot tikko aprakstītās P-pozīcijas. Šos secinājumus var vispārināt, aizstājot $\langle 1\rangle$ ar $\langle l\rangle$, tātad $\langle k\rangle\langle l\rangle\langle 0\rangle$ ir P-pozīcijas, bet $\langle k\rangle\langle l\rangle\langle m\rangle$ – N-pozīcijas (6. – 9. rindiņa tabulā 3.1.).

Analīzi turpinām ar četru ciparu skaitļiem 2012 skaitīšanas sistēmā, mazākais no tiem - $\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle$ viennozīmīgi ir P-pozīcija, jo jebkurš atļautais gājiens no tā izveidos N-pozīciju ($\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle$ vai $\langle k\rangle\langle l\rangle\langle m\rangle$) (H). Skaitļi $\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 0\rangle\langle k\rangle$ savukārt veido P-pozīcijas.

Vispārinot tabulā 3.1. apkopotos rezultātus, redzam, ka P-pozīcijas ir tikai tie skaitļi, kuri, uzrakstīti 2012 skaitīšanas sistēmā, beidzas ar nepāra skaitu nullēm. Spēles sākuma pozīciju 2012^{2012} skaitīšanas sistēmā 2012 veido cipars $\langle 1\rangle$ un 2012 nulles, līdz ar to tā ir N-pozīcija, un uzvaras stratēģija ir pirmajam spēlētājam.

3.2. Prom ņemšanas spēļu uzdevumi un risinājumi

> **5. spēle.** *Vienkārša prom ņemšanas spēle.*
> *Uz galda stāv* 21 *žetonu kaudzīte, no kuras jāņem* 1 *līdz* 3 *žetoni: vismaz* 1*, bet ne vairāk kā* 3*. Uzvar spēlētājs, kurš paņem pēdējo žetonu (uzvar tas, kurš pēdējais var izdarīt gājienu).*

Šādas spēles analīze tiek veikta no beigām uz sākumu. Šo metodi sauc par atgriezenisko indukciju. Ja beigās pirms spēlētāja gājiena ir atlikuši 1, 2 vai 3 žetoni, tad tā ir uzvaras pozīcija, jo spēlētājs var paņemt tos un uzvarēt. Ja uz galda ir atlikuši 4 žetoni, tad tā ir zaudētāja pozīcija, jo tā nodrošina otra spēlētāja uzvaru – vienalga cik žetonu spēlētājs paņems, uz galda vēl paliks $1-3$ žetoni. Ja uz galda ir atlikuši $5, 6$ vai 7 žetoni – uzvaras pozīcija, jo varam paņemt tik žetonu, lai nākamajam spēlētājam paliktu 4. Ja uz galda ir atlikuši 8 žetoni – zaudējuma pozīcija. Ja ir atlikuši $9, 10, 11$ žetoni – uzvaras pozīcija. Redzam, ka mūsu mērķis ir pēc mūsu gājiena atstāt uz galda $4, 8, 12, 16$ ... žetonus. Šīs spēles gadījumā, kur sākumā ir 21 žetons, tad redzams, ka uzvaras stratēģija ir I spēlētājam, paņemot no galda 1 žetonu un atstājot II spēlētājam zaudējuma pozīciju.

Šī spēle pieder klasei $S(1, 2, 3)$ ar žetonu skaitu $n = 21$, tās $g(n)$ vērtības, pēc kurām var noteikt P un N-pozīcijas jebkuram žetonu skaitam n, ir atrodamas **2. pielikumā**.

> **6. spēle.** *Apgriezta vienkāršā prom ņemšanas spēle.*
> *Uz galda stāv 21 žetonu kaudzīte, no kuras jāņem 1 vai 2, vai 3 žetoni. Zaudē spēlētājs, kurš paņem pēdējo žetonu.*

Šī spēle ir analoga normālai spēlei ar 20 žetoniem, jo spēlētājs, kurš savā gājienā paņem 20. žetonu, ir uzvarējis. Pēc iepriekšējā uzdevuma analīzes, šādā spēlē P-pozīcijas būtu skaitļa "4" dalāmie. Arī skaitlis "20" ir skaitļa "4" dalāmais, tāpēc uzvaras stratēģija ir II spēlētājam. Savukārt apgrieztajā spēlē ar 21 žetonu P-pozīcijas pārbīdās uz skaitļiem, kas ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 4 (dalot ar 4, dod atlikumā 1). Skaitlis "21" atbilst šim nosacījumam, līdz ar to ir P-pozīcija, un uzvaras stratēģija ir II spēlētājam.

Šī spēle pieder klasei $S(1,2,3)$ ar žetonu skaitu $n = 20$, tās $g(n)$ vērtības, pēc kurām var noteikt P un N-pozīcijas jebkuram žetonu skaitam n, ir atrodamas **2. pielikumā**.

> **7. spēle.** *Spēle "31".*
> *No kāršu kavas izvēlas dūzi,* $2, 3, 4, 5$ *un* 6 *no visiem četriem mastiem. Kārtis ir uzliktas uz galda atklātā veidā un spēlētāji pārmaiņus apgriež pa vienai kārtij, saskaitot apgriezto kāršu vērtību summu (dūža vērtība ir* 1*). Zaudē spēlētājs, kura gājiena rezultātā summa pārsniedz* 31 [3].

Šī spēle ir līdzīga prom ņemšanas spēlei ar 31 žetonu un atņemšanas kopu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Uzrakstīsim NIM rindu prom ņemšanas spēlei $g(n)$ un spēlei, kurā veic saskaitīšanu $g(n')$:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\dots$	25	26	27	28	29	30	31
$n' =$	31	30	29	28	27	26	25	24	23	$\dots$	6	5	4	3	2	1	0
$g =$	0	1	2	3	4	5	6	0	1	$\dots$	4	5	6	0	1	2	3

Saskaņā ar g vērtībām, uzvaras stratēģija ir I spēlētājam, jo $g(n' = 0) = 3$. Tomēr jāņem vērā, ka aplūkotajā spēlē ir ierobežots gājienu skaits, tāpēc pirmajā gājienā, I spēlētājam pārvietojoties uz pozīciju $n' = 3$, viņš uzvaras stratēģiju atdod II spēlētājam. Tad I spēlētāja rīcībā paliek vairs tikai trīs "3", ar kuriem atbildēt uz četriem potenciālajiem pretinieka gājieniem ar "4", tādēļ loģisks I spēlētāja pirmais gājiens būtu ar kārti "2", uz kuru II spēlētājs var atbildēt vai nu izvēloties kārti "1" (tādējādi mēģinot pārvietoties pa pozīcijām $g(n') = 0$) vai kādu citu kārti. Pirmajā gadījumā I spēlētājam būtu visu laiku jāizvēlas "6", piedāvājot II spēlētājam turpināt izvēlēties "1", kuri beigsies ātrāk kā "6". Otrajā gadījumā I spēlētājam būtu jāpārvietojas uz tuvāko pozīciju, kur $g(n') = 0$, šādu stratēģiju saglabājot arī visos nākamajos gājienos.

8. spēle. *Iztukšot un dalīt.*

Dotas divas kastes. Sākumā vienā no tām ir m žetoni, otrā n žetoni. Šādu pozīciju apzīmē ar (m, n), kur $m > 0$ un $n > 0$. Spēlētāji pārmaiņus veic gājienus. Vienā gājienā vienu no kastēm iztukšo, bet otras kastes saturu sadala pa abām divām kastēm tā, lai katrā būtu vismaz 1 žetons. Spēle beidzas pozīcijā $(1, 1)$. Uzvar spēlētājs, kurš veic pēdējo gājienu [3].

Analizēsim spēli, atrodot g vērtības spēles pozīcijām, sākot no beigām.

$g(1, 1) = 0$, jo tā ir beigu pozīcija;

$g(1, 2) = mex[g(1, 1) = 0] = 1$;

$g(1, 3) = mex[g(1, 2) = 1] = 0$;

$g(1, 4) = mex[g(2, 2) = 1, g(1, 3) = 0] = 2$;

...

Pozīcijām $(m < 7, n < 7)$ g vērtības ir apkopotas tabulā:

Tabula 3.2.: **Spēles "Iztukšot un dalīt" NIM vērtības**

n \ m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	...
1	0	1	0	2	0	1	
2	1	1	2	2	1	1	
3	0	2	0	2	0	3	
4	2	2	2	2	3	3	
5	0	1	0	3	0	1	
6	1	1	3	3	1	1	
...							

Redzams, ka P-pozīciju ($g = 0$) izvietojums ir simetrisks, tās atrodas vietās, kur gan m, gan n ir nepāra skaitļi, no šīm pozīcijām attiecīgi pastāv uzvaras stratēģija II spēlētājam, bet no visām pārējām – I spēlētājam. Uzvarošie gājieni no N-pozīcijām ir tādi, kuros netiek iztukšota kastīte ar nepāra skaitu žetonu (ja abas ir pāra, tad ir vienalga, kuru no abām iztukšot) un tie tiek pārdalīti tā, lai abās kastītēs būtu nepāra skaits žetonu un būtu izveidota P-pozīcija.

9. spēle. *1000 un 6.*

Kaudzē atrodas 1000 sērkociņi. Divi dalībnieki pēc kārtas izdara gājienus. Katrā gājienā no kaudzes var paņemt no 1 līdz 5 sērkociņiem; kā arī ne vairāk kā 10 reizes visas spēles *laikā ir atļauts veikt īpašo gājienu – paņemt* 6 *sērkociņus. Piemēram,* 7 *īpašos gājienus var būt veicis pirmais spēlētājs un* 3 *– otrais, tad īpašie gājieni vairāk nav atļauti. Uzvar tas spēlētājs, kurš paņem pēdējo sērkociņu. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija* [9]*?*

Spēli analizēsim no beigām, aplūkojot NIM rindas, atkarībā no atlikušajā īpašo gājienu skaita (r).

Ja $r = 0$, tad

$$\begin{array}{rccccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots \\ g(n) = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & \dots \end{array}.$$

Ja $r = 1$, tad

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots \\ g(n) = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & \dots \end{array}.$$

Ja $r = 2$, tad

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots & 19 & 20 & \dots \\ g(n) = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & \dots & 5 & 0 & \dots \end{array}.$$

Ja $r = 3$, tad

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & \dots \\ g(n) = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}.$$

...

Ja $r = 10$, tad

$$\begin{array}{rccccccccccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 68 & 69 & 70 & 71 & 72 & 73 & 74 & 75 & 76 & \dots & 1000 \\ g(n) = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & \dots & 0 \end{array}.$$

Pie lielām n vērtībām ($n > 7r$) vērtība $g(n)$ ir periodiska ar periodu 6 un attiecībā pret virkni, kurai $r' = r - 1$, tā ir nobīdīta par vienu pozīciju uz labo pusi. Kādam no spēlētājiem, izmantojot īpašo gājienu, notiek pārvietošanās uz virkni $r' = r - 1$.

Savukārt mazām n vērtībām($n \leqslant 7r$) spēle reducējas uz parasto atņemšanas spēli (2.3. nodaļa) ar atņemšanas kopu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kurai P-pozīcijas ir tās, kuras var izteikt formā $n = 7k$. Šai spēlei sākumā $r = 10, n = 1000$, kam atbilst $g(n) = 0$, kas ir P-pozīcija, tātad uzvaras stratēģija ir II spēlētājam, kuram savos gājienos jāpārvietojas uz pozīcijām, kuras var izteikt formā $n = 7r + 6k$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis, jo tām $g(n) = 0$.

10. spēle. 25 *un* 36.

Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 25 *un* 36*. Vienā gājienā atļauts uzrakstīt vēl vienu naturālu skaitli, kurš vēl nav uzrakstīts un ir kaut kādu divu uz tāfeles uzrakstītu skaitļu starpība. Zaudē tas, kurš vairs nevar izdarīt gājienu* [10].

Šī ir spēle – "joks". Uzvarētājs tajā nav atkarīgs no tā, kādus gājienus veic spēlētāji, jo spēlē ir ierobežots kopējo gājienu skaits, kuri visi agrāk vai vēlāk tiek izmantoti. Spēle būtībā ir Eiklīda algoritms, jo spēles procesā tiek uzrakstīts lielākais kopīgais dalītājs sākuma skaitļiem, attiecīgi tiek uzrakstīti arī visi šī skaitļa daudzkārtņi, kas nepārsniedz lielāko no sākotnējiem skaitļiem, respektīvi, nepārsniedz skaitli 36. Mūsu gadījumā lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tādēļ uz tāfeles tiks uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz 36. Tādā veidā mūsu spēlē būs 34 gājieni (jo divi skaitļi bija uzrakstīti jau sākumā). Tātad šajā spēlē vienmēr uzvarēs II spēlētājs, jo ir pāra skaits kopējo gājienu.

> **11. spēle.** 60 *un tā dalītāji.*
> *Spēli sāk ar skaitli* 60*, un vienā gājienā atļauts no esošā skaitļa atņemt jebkuru tā dalītāju, kurš nav vienāds ar esošo skaitli (ja vien esošais skaitlis nav "1"). Zaudē tas spēlētājs, kurš iegūst nulli* [10].

Šajā spēlē uzvar tas, kurš pēc sava gājiena atstāj pretiniekam skaitli 1.

Spēles uzvaras pozīcija (skaitlis pirms spēlētāja gājiena) ir pāra skaitlis. No pāra skaitļa vienmēr ir iespējams iegūt nepāra skaitli(piem., atņemot 1), tādējādi piespiežot pretinieku nākamajā gājienā atkal iegūt pāra skaitli.

Jebkuram nepāra skaitlim visi dalītāji arī ir nepāra skaitļi, savukārt no nepāra skaitļa, atņemot citu nepāra skaitli, vienmēr iegūst pāra skaitli. Tātad šajā spēlē uzvarēs tas, kurš sāks pirmais un ar savu gājienu visu laiku konstruēs nepāra skaitli.

Sastādot spēles NIM rindu, iegūst analoģisku rezultātu. NIM rindu izveidosim, sākot ar skaiti "1", jo ir viennozīmīgi skaidrs, ka tā ir P-pozīcija un $g(1) = 0$:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & \dots \\ g(n) = & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array}.$$

> **12. spēle.** *No* 1 *līdz* 1000.
> *Spēli sāk ar skaitli* 1*. Vienā gājienā atļauts esošo skaitli pareizināt ar jebkuru skaitli no* 2 *līdz* 9*. Uzvar spēlētājs, kurš iegūst skaitli, kas lielāks par* 1000 [10].

Šajā uzdevumā uzvaras pozīciju varam noteikt, ja aplūkojam uzdevumu no beigām.

Sākam ar to, ka N-pozīcijas noteikti būs veselie skaitļi intervālā no 112 līdz 1000 (jo $1000 : 9 < 112$), bet P-pozīcijas ir tādas, no kurām spēlētājs gājienā ir spiests pārvietoties uz N-pozīciju, respektīvi, $\{56, 57, \dots, 111\}$ ($112 : 2 = 56$). Līdz ar to N-pozīcijas ir arī $\{7, 8, \dots, 55\}$ ($56 : 9 < 7$), kas nozīmē, ka uzvarēt var I spēlētājs, pirmajā gājienā veicot reizināšanu ar $4, 5$ vai 6. II spēlētājs ir spiests savā pirmajā gājienā izveidot vērtību $\{8, 9, 10, \dots, 54\}$ jeb N-pozīciju pirms I spēlētāja otrā gājiena.

> **13. spēle.** *No* 2 *līdz* 1000.
> *Spēli sāk ar skaitli* 2. *Vienā gājienā atļauts pieskaitīt jebkuru naturālu skaitli, kas mazāks par esošo skaitli. Uzvar spēlētājs, kurš iegūst* 1000 [10].

Uzvaras pozīcija ir jebkurš skaitlis no $\{501, 502, \dots, 999$. Lai piespiestu pretinieku tādu savā gājienā izveidot, viņš jānostāda zaudējuma (P-) pozīcijā, proti, 500, kuru savukārt var iegūt no skaitļiem $\{251, 252, \dots, 499\}$, kam atbilst P-pozīcija 250. Redzam, ka P-pozīcijas veido ģeometrisko progresiju ar kvocientu $\frac{1}{2}$ (ja nepieciešams, apaļo uz leju). Iegūstam P-pozīcijas – $\{3, 7, 15, 31, 62, 125, 250, 500\}$. Redzams, ka I spēlētājs pirmajā gājienā (un arī katrā nākamajā) var izveidot P-pozīciju II spēlētājam, tādējādi I spēlētājam ir uzvaras stratēģija.

> **14. spēle.** *S(*2^k*).*
> *Spēli sāk ar skaitli* 1000. *Katrā gājienā atņem naturālu skaitli, kurš nav lielāks par esošo skaitli un ir skaitļa* 2 *pakāpe* ($1 = 2^0$). *Uzvar spēlētājs, kurš iegūst* 0 [10].

Šī ir atņemšanas spēle $S(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)$. **2. pielikumā**, redzams, ka spēles $S(1, 2)$ NIM rindu ir atļauts papildināt ar visiem skaitļiem, kas nedalās ar trīs. Tātad var secināt, ka uzdevumā aplūkotajai spēlei ir tāda pati NIM rinda, kā spēlei $S(1, 2)$:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \dots \\ g(n) = & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & \dots \end{array}.$$

Redzam, ka P-pozīcijas ir tādas, kurās n ir skaitļa "3" dalāmais ($n = 3k$), bet N-pozīcijas – visas pārējās. Tā kā 1000 nav skaitļa "3" dalāmais, tad tā ir N-pozīcija, no kuras uzvaras stratēģija ir I spēlētājam, katrā savā gājienā izveidojot kādu skaitļa "3" dalāmo, piemēram, pirmajā gājienā 999.

> **15. spēle.** 1234.
> *Uz tāfeles ir uzrakstīts skaitlis* 1234. *Vienā gājienā no skaitļa tiek atņemts kāds pašu skaitli veidojošs cipars, kurš nav nulle. Uzvar spēlētājs, kurš savā gājienā iegūst nulli* [10].

Analizējam spēli no beigām. Uzvaras jeb N-pozīcijas ir visi viencipara skaitļi. Zaudējuma jeb P-pozīcija ir skaitlis 10, jo, veicot atļautu gājienu, no tā var iegūt tikai N-pozīciju (skaitli 9). Naturālie skaitļi $\{11, 12, \dots, 19\}$ ir N-pozīcijas, jo no tiem ar vienu gājienu var iegūt P-pozīciju – skaitli 10.

Šo spriedumu varam vispārināt, par P-pozīcijām saucot visus skaitļus, kas beidzas ar 0, bet par N-pozīcijām – visus pārējos (kas nebeidzas ar 0). Ir acīmredzams, ka no katras izvēlētās P-pozīcijas jebkurš atļautais gājiens noved pie N-pozīcijas, savukārt N-pozīcijā eksistē tāds gājiens, lai iegūtu P-pozīciju. Tātad spēles sākuma pozīcija ir N-pozīcija, un uzvaras stratēģija ir I spēlētājam.

> **16. spēle.** *Kaudzītes ar pārlikšanu.*
>
> *Uz galda stāv divas konfekšu kaudzītes – pirmajā 22 konfektes, otrajā – 23. Gājienā drīkst vai nu apēst divas konfektes no vienas kaudzītes, vai arī pārlikt vienu konfekti no pirmās kaudzītes otrajā (bet ne no otrās – pirmajā!). Zaudē spēlētājs, kurš vairs nevar veikt gājienu* [10].

Kopā spēlē notiks tieši 22 prom ņemšanas gājieni jeb M (līdz no $22 + 23 = 45$ atliks 1 konfekte). Pārlikšanas gājienu skaits jeb L var būt $\{0, 1, \dots, 22\}$. Kopējais gājienu skaits $K = M + L$. Ja K ir pāra skaitlis, tad uzvar II spēlētājs, bet, ja K ir nepāra – tad uzvar I spēlētājs. Tā kā M noteikti ir pāra skaitlis, tad K paritāti nosaka L jeb pārlikšanas reižu skaits. Ņemot vērā to, ka pirmajā kaudzītē sākotnēji ir pāra skaits konfekšu, II spēlētājs uz katru I spēlētāja pārlikšanas gājienu var atbildēt ar pārlikšanas gājienu, bet uz prom ņemšanas gājienu – ar prom ņemšanas gājienu, nodrošinot, ka L ir pāra skaitlis. Tātad šajā spēlē uzvaras stratēģija ir II spēlētājam.

> **17. spēle.** *Kāpēc dalīt ar 9.*
>
> *Pirmais spēlētājs uzraksta uz tāfeles vienu no cipariem $6, 7, 8, 9$. Katrā nākamajā gājienā kāds no šiem cipariem tiek pierakstīts pie esošā skaitļa. Spēle beidzas pēc*
>
> *a) 10. gājiena;*
>
> *b) 12. gājiena.*
>
> *Vai I spēlētājs var panākt, lai iegūtais skaitlis nedalītos ar 9* [10]*?*

Kā ierasts, analizēsim spēli no beigām, aplūkosim tās beigu pozīcijas, kurās I spēlētājs zaudē, t. i., beigu pozīcijas, kuras ir skaitļa “9” dalāmais un kuras saucam par P-pozīcijām. Tā kā svarīga ir iegūtā skaitļa dalāmība ar “9”, tad analizēsim un par pozīcijām sauksim nevis spēlētāju uzrakstīto skaitli, bet gan tā ciparu summu. Analīzē ņemsim vērā, ka $1., 3., 5., \ldots, 9.$ gājienu izdara I spēlētājs, bet $2., 4., \ldots, 10.$ gājienu – II spēlētājs.

a) beigu pozīcija var būt veselie skaitļi robežās no $6 \cdot 10 = 60$ līdz $9 \cdot 10 = 90$. Šajā intervālā P-pozīcijas ir $63, 72, 81, 90$. Lai spēles beigās iegūtu kādu no šīm pozīcijām, II spēlētājam pirms $10.$ gājiena jāsaņem pozīcija kādā no intervāliem $[\{54, 55, 56, 57\}, \{63, 64, 65, 66\}, \{72, 73, 74, 76\}, \{81, 82, 83, 84\}]$ – šīm pozīcijām pieskaitot kādu no “atļautajiem” skaitļiem, var iegūt $63, 72, 81$ vai 90. Lai pirmais spēlētājs, būtu spiests $9.$ gājienā izveidot pozīciju kādā no šiem intervāliem, viņam pirms šī gājiena jāsaņem kāda no pozīcijām $\{48, 57, 66, 75\}$. Šīm pozīcijām pieskaitot jebkuru no “atļautajiem” skaitļiem, tiek iegūta vērtība kādā no augstāk minētajiem intervāliem. Redzam, ka minētie intervāli pirms $10.$ gājiena atbilst N-pozīciju definīcijai, bet pozīcijas pirms $9.$ gājiena – P pozīcijām Tādējādi turpinot P-pozīciju analīzi, rezultātus varam attēlot šādās II spēlētāja uzvaras stratēģijas rindās:

Gājiens: $10.$ $9.$ $8.$ $7.$ $\ldots$ $2.$ $1.$

$$63 \leftarrow \left\{\begin{matrix}54\\55\\56\\57\end{matrix}\right\} \leftarrow 48 \leftarrow \left\{\begin{matrix}39\\40\\41\\42\end{matrix}\right\} \leftarrow 33 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix}-6\\-5\\-4\\-3\end{matrix}\right\} \leftarrow -12;$$

$$72 \leftarrow \left\{\begin{matrix}63\\64\\64\\66\end{matrix}\right\} \leftarrow 57 \leftarrow \left\{\begin{matrix}48\\49\\50\\51\end{matrix}\right\} \leftarrow 42 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}\right\} \leftarrow -3;$$

$$81 \leftarrow \left\{\begin{matrix}72\\73\\74\\75\end{matrix}\right\} \leftarrow 66 \leftarrow \left\{\begin{matrix}57\\58\\59\\60\end{matrix}\right\} \leftarrow 51 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix}12\\13\\14\\15\end{matrix}\right\} \leftarrow 6;$$

$$90 \leftarrow \left\{\begin{matrix}81\\82\\83\\84\end{matrix}\right\} \leftarrow 75 \leftarrow \left\{\begin{matrix}66\\67\\68\\69\end{matrix}\right\} \leftarrow 60 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix}21\\22\\23\\24\end{matrix}\right\} \leftarrow 15.$$

Redzam, ka P-pozīcijas spēlē ir izvietotas periodiski, ar periodu – 15, un 10 gājienu spēlē II spēlētājam būtu uzvaras stratēģija no sākuma pozīcijām $-12, -3, 6$ vai 15. Spēle tiek sākta no pozīcijas 0, līdz ar to uzvaras stratēģija ir I spēlētājam, kurš 1. gājienā nedrīkst izvēlēties skaitli "6", kas spēli novestu otrajā no augstāk uzrakstītajām II spēlētāja uzvaras stratēģijas rindā.

b) Varam izmantot analoģisku analīzi kā *a)* punktā: analizējam P-pozīcijas pēc 12. gājiena, meklējot skaitļa "9" dalāmos intervālā no $6 \cdot 12 = 72$ līdz $9 \cdot 12 = 108$ un uzrakstām II spēlētāja uzvaras stratēģijas rindas, lai spēle beigtos kādā no šim pozīcijām:

Gājiens: $12.\quad 11.\quad 10.\quad 9.\quad \ldots\quad 2.\quad 1.$

$$72 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 63 \\ 64 \\ 64 \\ 66 \end{matrix}\right\} \leftarrow 57 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 48 \\ 49 \\ 50 \\ 51 \end{matrix}\right\} \leftarrow 42 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix} -12 \\ -11 \\ -10 \\ -9 \end{matrix}\right\} \leftarrow -18;$$

$$81 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 72 \\ 73 \\ 74 \\ 75 \end{matrix}\right\} \leftarrow 66 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 57 \\ 58 \\ 59 \\ 60 \end{matrix}\right\} \leftarrow 51 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right\} \leftarrow -9;$$

$$90 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 81 \\ 82 \\ 83 \\ 84 \end{matrix}\right\} \leftarrow 75 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 66 \\ 67 \\ 68 \\ 69 \end{matrix}\right\} \leftarrow 60 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}\right\} \leftarrow 0;$$

$$99 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 90 \\ 91 \\ 92 \\ 93 \end{matrix}\right\} \leftarrow 84 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 75 \\ 76 \\ 77 \\ 78 \end{matrix}\right\} \leftarrow 69 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}\right\} \leftarrow 9;$$

$$108 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 99 \\ 100 \\ 101 \\ 102 \end{matrix}\right\} \leftarrow 93 \leftarrow \left\{\begin{matrix} 84 \\ 85 \\ 86 \\ 87 \end{matrix}\right\} \leftarrow 78 \leftarrow \cdots \leftarrow \left\{\begin{matrix} 24 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{matrix}\right\} \leftarrow 18.$$

Šīs spēles analīze (trešā II spēlētāja uzvaras stratēģijas rinda) rāda, ka no dotās sākuma pozīcijas "0", pastāv uzvaras stratēģija II spēlētājam.

18. spēle. *1001 sērkociņš.*

Kaudzītē ir 1001 *sērkociņš. Vienā gājienā atļauts no tās paņemt* p^n *sērkociņus, kur* p *– jebkurš pirmskaitlis, bet* $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. *Uzvar spēlētājs, kurš paņem pēdējo sērkociņu.*

Sāksim uzdevuma analīzi no beigām. Skaitļi $1, 2, 3, 4 (= 2^2), 5$ ir N-pozīcijas, bet skaitlis "6" – P-pozīcija, jo jebkurš atļautais gājiens novedīs pie iepriekšminētajām N-pozīcijām. Skaitļi $7, 8, \ldots, 11$ ir N-pozīcijas, jo no tām ar vienu gājienu ir iespējams izveidot P-pozīciju – skaitli "6". Skaitlis "12" ir P-pozīcija, jo no tā visi atļautie gājieni veido N-pozīcijas. Varam vispārināt, ka P-pozīcijas ir visi skaitļa 6 daudzkārtņi, jo no tiem nav iespējams pārvietoties uz citu skaitļa "6" dalāmo. Visi pārējie skaitļi ir N-pozīcijas, jo no tiem vienmēr ar atļautu gājienu var izveidot P-pozīciju (skaitļa "6" daudzkārtni), agrāk vai vēlāk iegūstot skaitli $1 \cdot 6$, kas, kā iepriekš parādīts, ir P-pozīcija. Tā kā 1001 nedalās ar 6, līdz ar to ir arī N-pozīcija, tad uzvaras stratēģija ir I spēlētājam.

Veiksim šī uzdevuma analīzi, izmantojot NIM rindu:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\ldots$	1001
$g(n) =$	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	$\ldots$	5

Redzams, ka Spreiga – Grandi funkcijas vērtība $g(n)$ ir periodiska ar periodu 6. Tā pieņem vērtību "0", ja $n = k \cdot 6$, kur k – jebkurš vesels nenegatīvs skaitlis. Var viegli atrast, ka $g(1001) = 5$, tātad tā ir N-pozīcija un uzvaras stratēģija ir I spēlētājam. Šī spēle ir analoģiska spēlei $S\{1, 2, 3, 4, 5\}$, kurai atņemšanas kopu ir atļauts papildināt ar visiem skaitļiem, kas nedalās ar seši (**2. pielikums**), kādu, protams, starp pirmskaitļiem un tā pakāpēm nav.

19. spēle. *Mark.*

Spēli sāk no kāda vesela skaitļa n*, katrā gājienā ir atļauts no tā atņemt* 1 *vai arī izdalīt ar* 2*, rezultātu noapaļojot uz leju. Uzvar spēlētājs, kurš iegūst* 0*. Kuram spēlētājam ir uzvaras stratēģija, ja*

a) $n = 24$*;*

b) $n = 516$*;*

c) $n = 2^{2k+1}$*?*

a) Spēlei ar $n = 24$ varam uzrakstīt NIM rindu, izmantojot mex:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$g(n) =$	0	1	0	2	1	2	0	1	0	2	0	1	2	1	0	2	1	2	0	1	2	1	0	2	0

Redzam, ka $g(24) = 0$, uzvaras stratēģija ir II spēlētājam.

Šī spēle pieder pie Mark-2 spēlēm (2.5. nodaļa), kurās P- un N-pozīcijas var noskaidrot, uzrakstot pozīciju binārajā sistēmā, ja skaitlim binārajā sistēmā beigās ir nepāra skaits nuļļu (dopija skaitļi), tad tā ir P-pozīcija, citādi – N-pozīcija. Uzrakstot 24 binārajā sistēmā:

$$R_2(24) = 11000,$$

iegūstam skaitli ar trim nullēm beigās, kas ir P-pozīcija, un uzvaras stratēģija ir II spēlētājam.

b) Situācijā, kad $n = 516$, izmantojam bināro pierakstu:

$$R_2(516) = 1000000100,$$

iegūstam skaitli ar divām nullēm beigās, kam atbilst N-pozīcija, un uzvaras stratēģija ir I spēlētājam.

c) Situācijā, kad $n = 2^{2k+1}$, izmantojam bināro pierakstu:

$$R_2\left(2^{2k+1}\right) = 1\underbrace{000\ldots0}_{2k+1},$$

iegūstam skaitli ar nepāra skaitu nuļļu $(2k+1)$, kam atbilst P-pozīcija, un uzvaras stratēģija ir II spēlētājam.

3.3. Prom ņemšanas spēļu pielietojums skolā

Pirmkārt, matemātiskās spēles var izmantot kā bērniem aizraujošu metodi dažādu matemātisko darbību apgūšanai, piemēram, spēlējot **11. spēli** (60 un tā dalītāji) vai kādu tās modifikāciju ar citādāku sākuma pozīciju, skolēni var iemācīties atrast dažādu skaitļu dalītājus, bet **18. spēle** (1001 sērkociņš) māca atpazīt pirmskaitļus. Pielietojot spēles mācību stundā, tās nebūt nav nepieciešams pakļaut detalizētai uzvaras stratēģiju analīzei, tās gluži vienkārši ir netradicionāli aprēķinu uzdevumi.

Autores piedāvātais spēļu pielietojums skolā ir apkopots tabulā 3.3.

Mācību procesu skolā veido ne tikai mācību stundas, kurās ar dažādām metodēm tiek apgūts mācību programmas saturs. Liela nozīme, rosinot skolēnu interesi par mācību priekšmetu, ir t. s. "svētku" stundām, piemēram, stundām semestra noslēgumā, kad skolēni ir saņēmuši gala vērtējumu, un matemātiskās spēles ir viens no veidiem, kā padarīt šīs stundas gan interesantas, gan arī izglītojošas. Šajās stundās var veltīt laiku arī spēļu stratēģiju skaidrošanai, tomēr galvenais, lai spēles varētu izspēlēt līdz galam relatīvi īsā laikā.

Tabula 3.3.: **Prom ņemšanas spēļu pielietojums skolā**

Spēle	Spēles nosaukums	Mācību stunda		“Svētku” stunda		Matemātikas pulciņi	Gatavojoties olimpiādei		ZPD
		Pamatskola	Vidusskola	Pamatskola	Vidusskola	Pamatskola	Pamatskola	Vidusskola	
1. spēle	Kaudzīšu spēle							X	
2. spēle	Atņemšanas spēle			X		X		X	
3. spēle	Dalīšanas spēle		X					X	
4. spēle	2012^{2012}							X	X
5. spēle	Vienkārša prom ņemšanas spēle	X		X	X	X			
6. spēle	Apgriezta 5. spēle			X	X	X			
7. spēle	Spēle “31”			X	X	X		X	
8. spēle	Iztukšot un dalīt						X	X	
9. spēle	1000 un 6							X	X
10. spēle	25 un 36	X		X		X	X		
11. spēle	60 un tā dalītāji	X	X		X	X	X		
12. spēle	No 1 līdz 1000	X		X	X	X	X	X	
13. spēle	No 2 līdz 1000	X	X		X	X	X	X	
14. spēle	$S(2^k)$		X			X	X	X	
15. spēle	1234			X	X	X	X	X	
16. spēle	Kaudzītes ar pārlikšanu					X	X	X	
17. spēle	Kāpēc dalīt ar 9							X	X
18. spēle	1001 sērkociņš				X	X		X	X
19. spēle	Mark						X	X	X

Būtisks ir arī matemātisko spēļu pielietojums fakultatīvajās nodarbībās – matemātikas pulciņos un sagatavojot spējīgākos skolēnus dalībai olimpiādes. Šīs nodarbības ir piemērotas padziļinātai spēļu analīzei, te var izmantot spēles, kuras reālā laikā nav iespējams izspēlēt, kā arī spēļu vispārinājumus.

Zinātniski pētnieciskajam darbam (ZPD) arī būtu piemērots spēļu vispārinājumu apskats. Šādā darbā skolēna uzdevums varētu būt patstāvīgi iegūt vispārīgas spēles formulējumu, kā sākuma nosacījumu izmantojot kādu konkrētu spēli. Tālākajā darba gaitā būtu jāveic vispārinātās spēles P- un N-pozīciju, kā arī tām atbilstošo NIM vērtību analīze, aprakstot to periodiskās īpašības.

NOBEIGUMS

Diplomdarbā tika pētītas uzvaras stratēģijas prom ņemšanas spēlēs.

Darba uzdevumi ir izpildīti:

1. Ir izpētīta literatūra par matemātiskajām spēlēm.
2. Tika veikta matemātisko spēļu teorētiskā apraksta izveidošana latviešu valodā. Teorijas aprakstā ietilpst: NIM summas aplūkošana, Spreiga – Grandi teorija par uzvaras stratēģijām, P- un N-pozīciju aprakstīšana, atņemšanas spēļu aplūkošana u.c. teorijas izklāsts, kas nepieciešams prom ņemšanas spēļu uzdevumu risināšanā.
3. Aprakstot Mark-t spēli, kā vienkāršāku spēļu summu, autore ir ieviesusi jēdzienu dalīšanas spēles, noteikusi tās NIM rindas periodiskumu dalīšanas spēlei ar diviem dalītājiem, izveidojusi NIM rindas 15 vienkāršām dalīšanas spēlēm.
4. Tika veikta *Baltic Way 2011* olimpiādes uzdevuma 2011^{2011}, aktualizējot to uz 2012^{2012}, detalizēta analīze. Izpētīti zinātniskie raksti [5, 7] par uzvaras stratēģijām Mark un Mark-t spēlēs, balstoties uz tiem, izveidota apakšnodaļa par šīm spēlēm.
5. Apkopoti prom ņemšanas spēļu uzdevumi, izveidoti detalizēti to risinājumi. Piedāvāts šo prom ņemšanas spēļu uzdevumu pielietojums skolā mācību un "svētku" stundās, zinātniski pētnieciskajos darbos un fakultatīvajās nodarbībās.

Diplomdarbs sniedz matemātikas skolotājiem un spējīgākajiem skolēniem iespēju iepazīties ar prom ņemšanas spēļu uzvaras stratēģijām. Darbā aplūkotie spēļu uzdevumi var tikt izmantoti gan matemātikas mācību stundās kāda konkrēta temata apguves laikā, gan matemātikas pulciņos, gan gatavojoties matemātikas olimpiādēm. Dažas spēles vispārinot var izmantot arī kā analizējamās problēmas skolēnu zinātniski pētnieciskajos darbos.

Diplomdarba attīstības virzieni varētu būt:

- padziļināta dalīšanas spēļu analīze,
- matemātisko spēļu aprobēšana skolā dažādās klašu grupās,
- prom ņemšanas spēļu klāsta papildināšana,
- partizānu spēļu analīze.

LITERATŪRAS SARAKSTS

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays, Vol. 1*. Wellesley, MA: A K Peters, 2nd ed., 2001.

[2] J. H. Conway, *On Numbers and Games*. London: Academic Press, 1979.

[3] T. S. Ferguson, *Game Theory. Part I: Impartial Combinatorial Games.* Mathematics Department, UCLA. Pieejams tiešsaistē: http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf (10. 03. 2012.).

[4] I. Kudapa, *Matemātiskās spēles*, maģistra darbs, Latvijas Universitāte, 1995.

[5] A. S. Fraenkel, "Aperiodic Subtraction Games," *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. **18**, no. 2, pp. 1–12, 2011.

[6] N. Sloane, *The Online Encyclopedia of Integer Sequences*. Pieejams tiešsaistē: http://oeis.org/ (12. 05. 2012.)

[7] A. Guo, "Winning strategies for aperiodic subtraction games," *Theoretical Computer Science*, vol. **421**, pp. 70–73, Mar. 2012.

[8] *Baltic Way 2011 problems*. Pieejams tiešsaistē: http://www.balticway-2011.de/wp-content/uploads/2011/11/PSlist.pdf (10. 03. 2012.).

[9] *Baltic Way 2010 problems*. Pieejams tiešsaistē: http://www.stae.is/bw10/sites/stae.is.bw10/files/bw10en.pdf (10. 03. 2012.).

[10] С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин, *Ленинградские математические кружки*. Kupob: ACA, 1994.

PIELIKUMI

1. pielikums. NIM summas iegūšana

NIM summu ērtākai aprēķināšanai var izmantot īpašības, ka:

1. $*2^k + *A = *(2^k + A)$, kā arī $*2^k + *2^m = *(2^k + 2^m)$;
2. $*A + *A = *0$.

Varam izmantot šīs divas pamatīpašības, lai atrastu NIM summu jebkurai ciparu kombinācijai, uzrakstot katru no cipariem kā skaitļa “2” pakāpju summu un nosvītrojot vienādo pakāpju pārus. Piemēram:

$$5\overset{*}{+}3 = (4+1)\overset{*}{+}(2+1) = 4\overset{*}{+}1\overset{*}{+}2\overset{*}{+}1 = 4\overset{*}{+}2 = 4+2 = 6$$

$$11\overset{*}{+}22\overset{*}{+}33 = (8+2+1)\overset{*}{+}(16+4+2)\overset{*}{+}(32+1) = 8+16+4+32 = 60.$$

To var pierakstīt arī šādi:

$$*5 + *3 = *6 \text{ un } *11 + *22 + *33 = *60.$$

Vienlīdz labi var izmantot abus pieraksta veidus:

$$*9 + *25 + *49 = (*8 + *1) + (*16 + *8 + *1) + (*32 + *16 + *1) = *32 + *1 = *33.$$

Var redzēt, ka NIM summa ir mazāka vai vienāda ar parasto summu un starpība ir pāra skaitlis.

	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
5=	1	0	1
3=	0	1	1
6=	1	1	0

	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
11=	0	0	1	0	1	1
22=	0	1	0	1	1	0
33=	1	0	0	0	0	1
60=	1	1	1	1	0	0

	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
9=	0	0	1	0	0	1
10=	0	1	1	0	0	1
49=	1	1	0	0	0	1
33=	1	0	0	0	0	1

Tabula P.1.: **NIM saskaitīšanas tabula**

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

2. pielikums. Atņemšanas spēļu NIM rindas

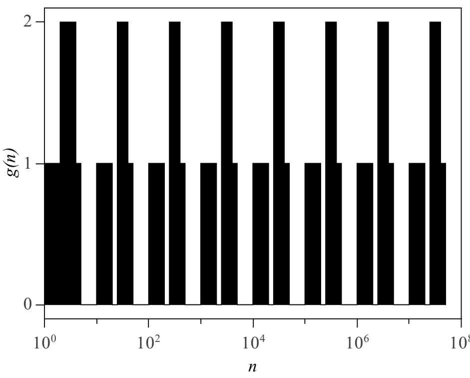
Tabula P.2.: **Atņemšanas spēļu $S(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_l)$ NIM rindas**

Atņemšanas kopa	(iespējamie papildus elementi)	NIM rinda	Atkārtošanās periods
1	(3 5 7 9 11 ...)	*01*01*01*...	2
2	(6 10 14 18 ...)	*0011*0011*...	4
1 2	(4 5 7 8 10 11 ...)	*012*012*...	3
3	(9 15 21 27 ...)	*000111*000111*...	6
2 3	(7 8 12 13 17 18 ...)	*00112*00112*...	5
1 2 3	(5 6 7 9 10 11 13 ...)	*0123*0123*...	4
4	(12 20 28 36 ...)	*00001111*00001111*...	8
1 4	(6 9 11 14 16 19 ...)	*01012*01012*...	5
2 4	(3 8 9 10 14 15 16 ...)	*001122*001122*...	6
3 4	(10 11 17 18 24 25 ...)	*0001112*0001112*...	7
1 3 4	(6 8 10 11 13 15 17 ...)	*0101232*0101232*...	7
1 2 3 4	(6 7 8 9 11 12 13 14 ...)	*01234*01234*...	5
5	(15 25 35 45 ...)	*0000011111*0000011111*...	10
2 5	(9 12 16 19 23 26 ...)	*0011021*0011021*...	7
3 5	(4 11 12 13 19 20 21 ...)	*00011122*00011122*...	8
2 3 5	(4 9 10 11 12 16 17 18 19 ...)	*0011223*0011223*...	7
4 5	(13 14 22 23 31 32 40 ...)	*000011112*000011112*...	9
1 4 5	(3 7 9 11 12 13 15 17 19 ...)	*01012323*01012323*...	8
2 4 5	(3 9 10 11 12 16 17 18 19 ...)	*0011223*0011223*...	7
1 2 3 4 5	(7 8 9 10 11 13 14 15 16 ...)	*012345*012345*...	6

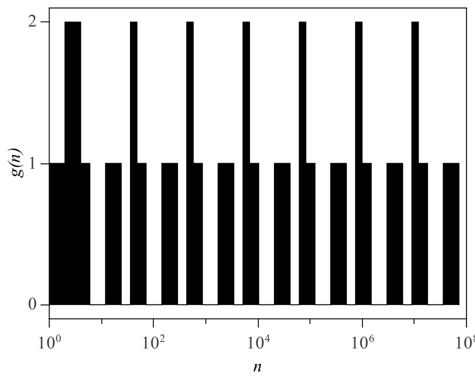
Atņemšanas kopa	(iespējamie papildus elementi)	NIM rinda	Atkārtošanās periods
6	(18 30 42 54 ...)	*000000111111*0000001111*...	12
1 6	(8 13 15 20 22 27 29 ...)	*0101012*0101012*...	7
1 2 6	(5 8 9 12 13 15 16 19 20 ...)	*0120123*0120123*...	7
3 6	(4 5 12 13 14 15 21 22 23 ...)	*000111222*000111222*...	9
1 3 6	(8 10 12 15 17 19 21 24 ...)	*010101232*010101232*...	9
2 3 6	(7 11 12 15 16 20 21 24 ...)	*001120312*001120312*..	9
4 6	(5 14 15 16 24 25 26 34 ...)	*0000111122*0000111122*...	10
2 4 6	(3 5 10 11 12 13 14 18 19 ...)	*00112233*00112233*...	8
1 2 4 6	(7 9 10 12 14 15 17 18 20...)	*01201234*01201234*...	8
5 6	(16 17 27 28 38 39 49 50 ...)	*00000111112*00000111112*...	11
1 5 6	(3 8 10 12 14 16 17 19 21 ...)	*01010123232*01010123232*...	11
2 5 6	(9 13 16 20 24 27 28 ...)	*00110213021*00110213021*...	11
2 3 5 6	(4 10 11 12 13 14 18 19 ...)	*00112233*00112233*...	8
1 4 5 6	(3 8 10 12 13 14 15 17 19 ...)	*010123234*010123234*...	9
1 2 4 5 6	(8 9 11 12 14 15 16 18 19 ...)	*0120123453*0120123453*...	10
1 2 3 4 5 6	(8 9 10 11 12 13 15 16 17 ...)	*0123456*0123456*...	7
7	(21 35 49 63...)	*00000001111111*00000001...	14
2 7	(11 16 20 25 29 34...)	*001100112*001100112*...	9
3 7	(13 17 23 27 33 37...)	*0001110221*0001110221*...	10
4 7	(5 6 15 16 17 18 26 27 28...)	*00001111222*00001111222*...	11
1 4 7	(9 12 15 17 20 23 25 28 ...)	*01012012*01012012*...	8
2 4 7	(10 13 16 19 25 28 31 ...)	00112203*102*102*102*...	3
3 4 7	(5 6 13 14 15 16 17 23 24 ...)	*0001112223*0001112223*...	10
1 3 4 7	(5 9 11 12 13 15 17 19 20 ...)	*01012323*01012323*...	8
2 3 4 7	(8 9 13 14 15 18 19 20 24 ...)	*00112203142*00112203142*...	11
5 7	(6 17 18 19 29 30 31 41 ...)	*000001111122*00000111111...	12
2 5 7	(11 15 17 20 24 27 29 33 ...)	*0011021322031001122332*...	22
3 5 7	(4 6 13 14 15 16 17 23 24 ...)	*0001112223*0001112223*...	10
2 3 5 7	(4 6 11 12 13 14 15 16 20 ...)	*001122334*001122334*...	9
2 4 5 7	(3 6 11 12 13 14 15 16 20 ...)	*001122334*001122334*...	9
6 7	(19 20 32 33 45 46 58 ...)	*0000001111112*000000111...	13
1 6 7	(3 5 9 11 13 15 17 18 19 ...)	*010101232323*0101012323...	12
2 6 7	(11 15 19 20 24 28 32 33 ...)	*0011001120312*001100112...	13
1 2 6 7	(4 9 10 12 14 15 17 18 20 ...)	*01201234*01201234*...	8

Atņemšanas kopa	(iespējamie papildus elementi)	NIM rinda	Atkārtošanās periods
3 6 7	(4 5 13 14 15 16 17 23 24 ...)	*0001112223*0001112223*...	10
1 4 6 7	(9 12 14 17 19 20 22 25 ...)	*0101201232012*010120123...	13
2 4 6 7	(3 5 11 12 13 14 15 16 20 ...)	*001122334*001122334*...	9
1 3 4 6 7	(5 9 11 13 14 15 16 17 19 ...)	*0101232345*0101232345*...	10
2 5 6 7	(10 14 17 18 19 22 26 29 ...)	*001102132233*0011021322...	12
1 2 5 6 7	(4 9 10 12 13 15 16 17 18 ...)	*01201234534*01201234534*...	11
1 4 5 6 7	(3 9 11 13 14 15 16 17 19 ...)	*0101232345*0101232345*...	10
1 2 3 4 5 6 7	(9 10 11 12 13 14 15 17 ...)	*01234567*01234567*...	8

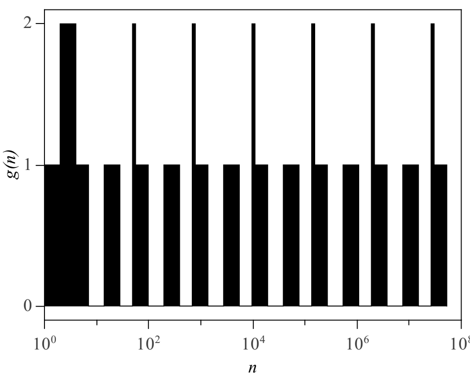
3. pielikums. Dalīšanas spēļu NIM rindas



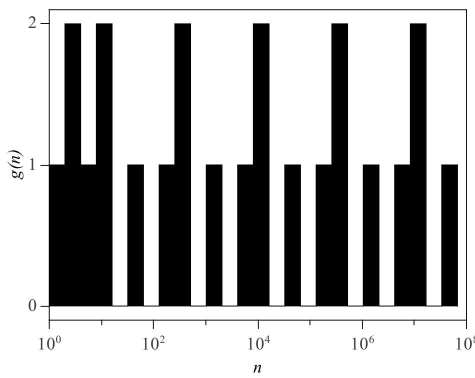
(a) $D(2,5)$



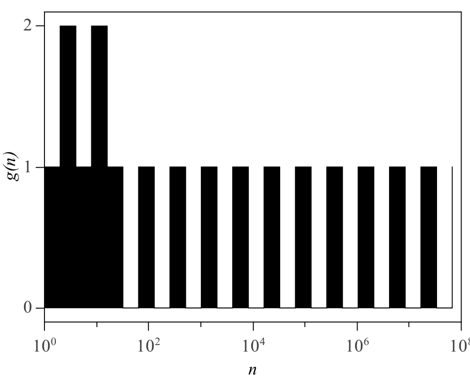
(b) $D(2,6)$



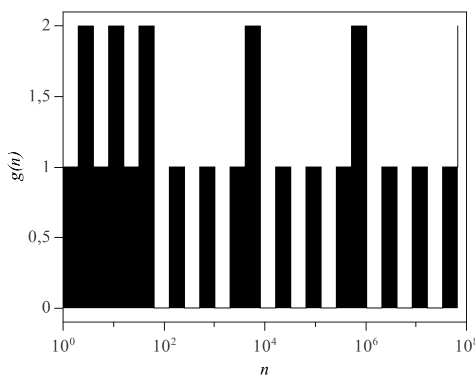
(c) $D(2,7)$



(d) $D(2,16)$

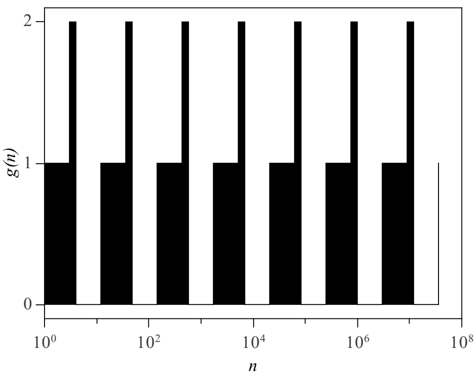


(e) $D(2,32)$

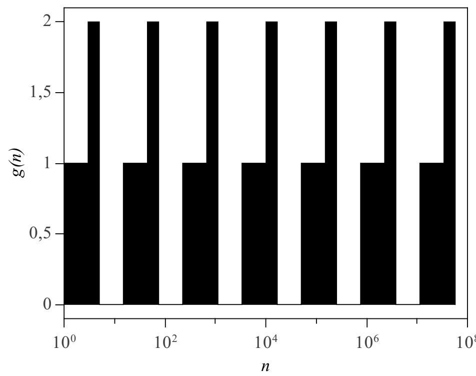


(f) $D(2,64)$

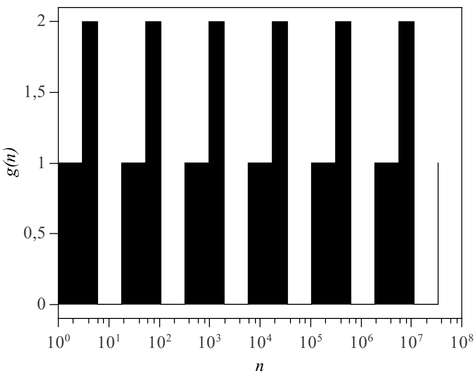
Att. P.1.: **Dalīšanas spēļu** $D(2,d)$ $g(n)$ **vērtības.**



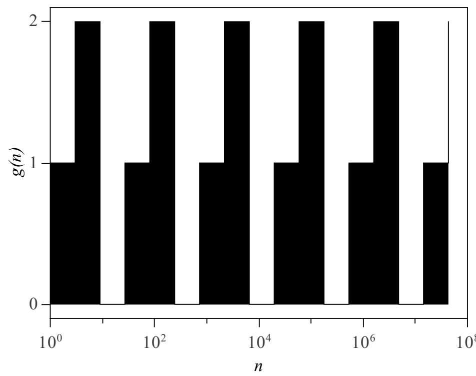
(a) $D(3,4)$



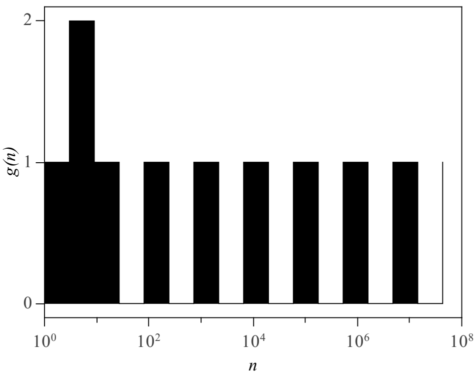
(b) $D(3,5)$



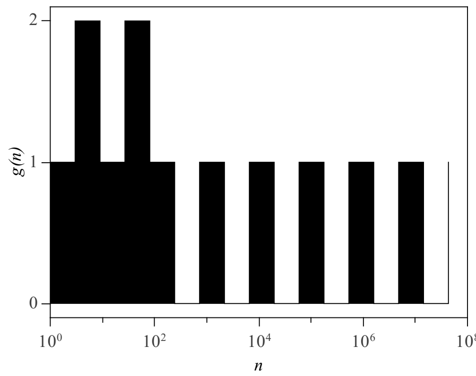
(c) $D(3,6)$



(d) $D(3,9)$



(e) $D(3,27)$



(f) $D(3,243)$

Att. P.2.: **Dalīšanas spēļu $D(3,d)$ $g(n)$ vērtības.**

Tabula P.3.: **Dalīšanas spēļu $D(2,d)$ $g(n)$ vērtību maiņas pozīcijas**

$D(2,4)$		$D(2,5)$		$D(2,6)$		$D(2,7)$		$D(2,8)$		$D(2,16)$		$D(2,32)$		$D(2,64)$	
n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	0	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
8	1	5	0	6	0	7	0	8	0	8	2	8	2	8	2
16	2	10	1	12	1	14	1	16	1	16	0	16	1	16	1
32	0	20	0	24	0	28	0	32	0	32	1	32	0	32	2
64	1	25	2	36	2	49	2	64	1	64	0	64	1	64	0
128	2	40	1	48	1	56	1	128	0	128	1	128	0	128	1
256	0	50	0	72	0	98	0	256	1	256	2	256	1	256	0
512	1	100	1	144	1	196	1	512	0	512	0	512	0	512	1
1 024	2	200	0	288	0	392	0	1 024	1	1 024	1	1 024	1	1 024	0
2 048	0	250	2	432	2	686	2	2 048	0	2 048	0	2 048	0	2 048	1
4 096	1	400	1	576	1	784	1	4 096	1	4 096	1	4 096	1	4 096	2
8 192	2	500	0	864	0	1 372	0	8 192	0	8 192	2	8 192	0	8 192	0
16 384	0	1 000	1	1 728	1	2 744	1	16 384	1	16 384	0	16 384	1	16 384	1
...		...		...		...		...		...		...		...	

Tabula P.4.: **Dalīšanas spēļu $D(3,d)$ $g(n)$ vērtību maiņas pozīcijas**

$D(3,4)$		$D(3,5)$		$D(3,6)$		$D(3,9)$		$D(3,27)$		$D(3,243)$	
n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$	n	$g(n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
4	0	5	0	6	0	9	0	9	1	9	1
12	1	15	1	18	1	27	1	27	0	27	2
36	2	45	2	54	2	81	2	81	1	81	1
48	0	75	0	108	0	243	0	243	0	243	0
144	1	225	1	324	1	729	1	729	1	729	1
432	2	675	2	972	2	2 187	2	2 187	0	2 187	0
576	0	1 125	0	1 944	0	6 561	0	6 561	1	6 561	1
1 728	1	3 375	1	5 832	1	19 683	1	19 683	0	19 683	0
5 184	2	10 125	2	17 496	2	59 049	2	59 049	1	59 049	1
6 912	0	16 875	0	34 992	0	177 147	0	177 147	0	177 147	0
20 736	1	50 625	1	104 976	1	531 441	1	531 441	1	531 441	1
62 208	2	151 875	2	314 928	2	1 594 323	2	1 594 323	0	1 594 323	0
82 944	0	253 125	0	629 856	0	4 782 969	0	4 782 969	1	4 782 969	1
...		...		...		...		...		...	

DOKUMENTĀRĀ LAPA

Diplomdarbs "Uzvaras stratēģijas prom ņemšanas spēlēs" ir izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti, un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autore: Ilze Zviedre

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: *doc. Dr. math.* Dace Bonka

Recenzente: studiju metodiķe *Mag. paed.* Aira Kumerdanka

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā _____._____.2012.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____._____.2012., protokola Nr.: ______________________

Vērtējums: ______________________

Komisijas sekretāre: lektore Baiba Āboltiņa