Andris Cibulis

PENTAMINO

II daļa

IEVADS

Katrā lietā jācenšas saskatīt to,
ko neviens vēl nav saskatījis.
G. Lihtenbergs

Vēl nebija pabeigts darbs pie manuskripta PENTAMINO pirmās daļas, kad no žurnāla *The American Mathematical Monthly* uzzināju par 1991. gadā iznākušās D. Martina grāmatas [17] eksistenci. Nezinot tās saturu, ilgi nevarēju izšķirties par otrās daļas rakstīšanu: ja nu mans darbs būs viņa darba "apakškopa", ja nu par neatrisinātiem uzdevumiem es būšu pasludinājis tādus, kuri tur jau ir atrisināti. Tad negaidīti šo grāmatu man uzdāvināja Agnis Andžāns, par ko viņam esmu īpaši pateicīgs. Noskaidroju, ka nodaļā *Pentamino* ir iekļauti tikai 30 uzdevumi, turklāt gandrīz visi klasiski, un ka galvenais D. Martina grāmatas saturs ir veltīts problēmām par plaknes pārklāšanas dažādām iespējām ar tā vai cita tipa polimino.

Grāmata tapa ilgā un nogurdinošā darbā, kuru par laimi paātrināja jau 1. daļā minētais Guntis Radziņš. Nav grūti iedomāties, cik nabagāks kļūtu grāmatas saturs, ja no tā izslēgtu skaitliskos rezultātus, ko viņš ieguva ar datora palīdzību . Tagad informāciju par polimino var atrast *Internetā*, piemēram, pēc literatūras saraksta beigās dotajām adresēm.

Polimino problemātika ir īpaši saistoša kombinatoriskās ģeometrijas daļa, kas bagāta ar dažāda līmeņa neatrisinātām problēmām. Daudzas no tām ir piemērotas skolēnu pētnieciskajā darbā. Neatrisinātām problēmām šajā darbā ir atvēlēta vesela nodaļa.

Par sadarbību atsevišķu polimino lauciņu izkopšanā pateicos prof. Endijam Liu no Albertas universitātes Edmontonā (Kanāda).

SATURS

APZĪMĒJUMI

p-figūra – figūra, kuru iespējams salikt no dažādiem pentamino;

p-salikums – salikums no pentamino;

$\Rightarrow$ – izriet, seko, tad;

$\subset$ – iekļaušanas zīme;

$\in$ – piederības zīme;

$X \in (m \times n)$ – taisnstūra m x n salikums satur pentamino X;

r(i,j), (i,j) – apskatāmās figūras (polimino) i-ās rindiņas j-ā rūtiņa. Tur, kur nerodas pārpratumi, lietots vēl īsāks apzīmējums – ij;

$r(i,j) \subset X$ – rūtiņa (i,j) ir pārklāta ar X;

$X \supset r(i,j)$ – ar pentamino X pārklāj (ir pārklāta) r(i,j);

$G \ni (X, Y)$ – figūras G salikums satur pentamino X un Y;

r*(i,j), (i,j)* – ar “ *” iezīmētā rūtiņa pieļaujamā veidā nav pārklājama;

A* – nav piemērotas vietas, kur pieļaujamā veidā novietot figūru A;

r-rūtiņa – apskatāmās figūras robežrūtiņa;

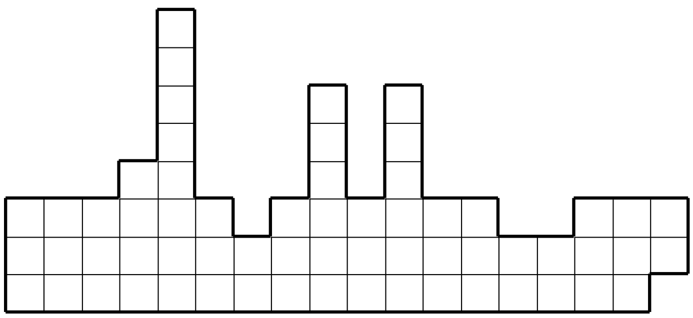
r-pentamino – pentamino, kas parklāj vismaz vienu apskatāmās figūras robežrūtiņu.

Citi nepieciešamie apzīmējumi un paskaidrojumi doti vielas izklāsta gaitā.

4. nodaļa
NESALIEKAMĀS FIGŪRAS

Jau iepriekšējā nodaļā ir minēti dažu nesaliekamu (t.i., nesaliekamu no pentamino) figūru piemēri, kā arī uzrādīti atsevišķi pierādījumos noderīgi paņēmieni. Vēl citi paņēmieni ir doti šajā nodaļā. Kombinējot, apvienojot vairākus paņēmienus, nereti izdodas ne tikai būtiski saīsināt jau zināmos nesaliekamības pierādījumus, bet dažkārt atrisināt arī kādu no "neatrisinātām" problēmām.

Kuras no 165.-171. zīm. parādītajām figūrām nav saliekamas no pentamino? Kā to noteikt? Diemžēl nav atrasta efektīva metode, ar kuras palīdzību varētu ātri noskaidrot, ka tā vai cita figūra nav p-saliekama. Ļoti ticams, ka tāda universāla metode nemaz neeksistē. Atgādināsim, ka p-saliekamu figūru laukums nepārsniedz 60 un noteikti dalās ar 5. No visām figūrām, kuras attēlotas 165.-171. zīm., šī īpašība nepiemīt tikai "kuģim", sk. 165. zīm. "Kuģis"sastāv no 62 rūtiņām, un tātad tas nav saliekams. Šāds "neizdevies" kuģis ir atrodams kādā matemātiskajai rotaļlietai *pentamino* pievienotajā ar nesaliekamajām figūrām bagātīgajā pielikumā, par kuru jau ir minēts 1. nodaļas sākumā.



165. zīm.

Uzrādīsim vēl vienu ļoti īsu "kuģa" nesaliekamības pierādījumu. Garākais "kuģa" skurstenis jānoklāj ar pentamino I. Taču tad divu īsāko "skursteņu" noklāšanai vajadzētu divus pentamino L.

Bieži citēts nesaliekamas figūras piemērs ir parādīts 166. zīm. Kaut gan te situācija nav tik primitīva kā gadījumā ar figūru "kuģis", tomēr eksistē pavisam īss un jau par klasisku kļuvis šīs figūras nesaliekamības pierādījums. Lai figūru varētu salikt no pentamino, ir nepieciešams noklāt 22 tās robežrūtiņas. Turpmāk lietosim arī īsāku pierakstu **r-rūtiņas**. Saskaitīsim, cik r-rūtiņu pieļaujams pārklāt ar katru pentamino. Maksimālās šo skaitļu vērtības m(·) ir:

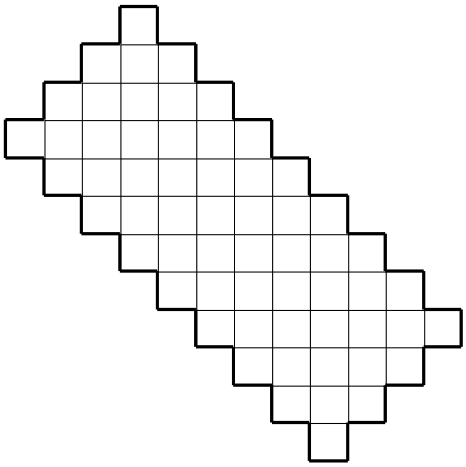
$$m(F) = m(W) = m(X) = 3,$$

$$m(N) = m(P) = m(Y) = 2,$$

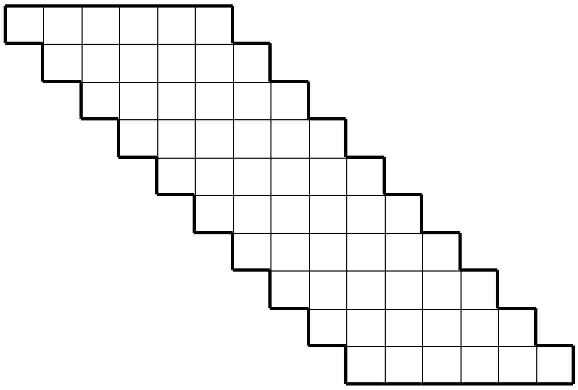
$$m(I) = m(L) = m(T) = m(U) = m(V) = m(Z) = 1.$$

Tātad nav iespējams pārklāt vairāk kā 3·3+3·2+6·1=21 r-rūtiņu.

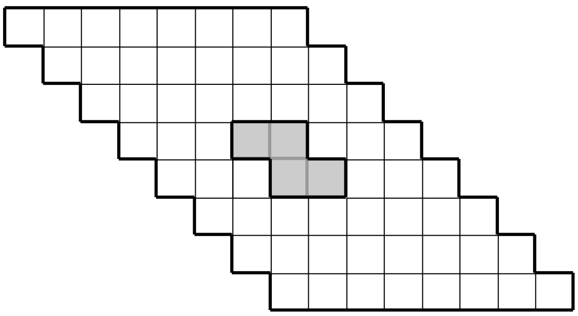
Ideja – aplūkot robežrūtiņu noklāšanas iespējas – rod pielietojumus arī citos sarežģītākos gadījumos.



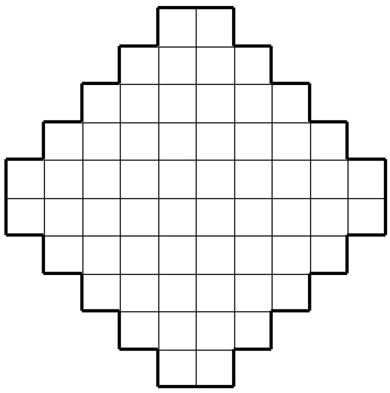
166. zīm.



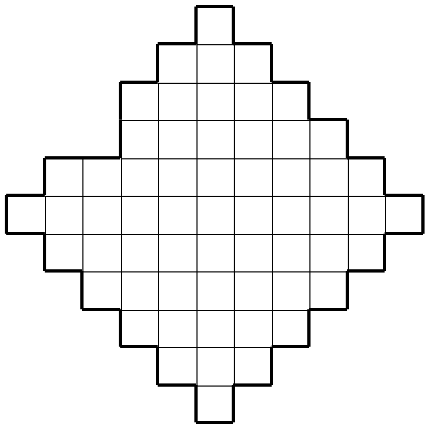
167. zīm.



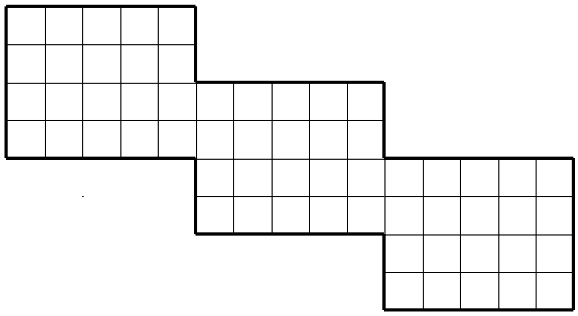
168. zīm.



169. zīm.



170. zīm.



171. zīm.

4.1. uzdevums. Atrast īsu 167. zīm. attēlotās figūras p-nesaliekamības pierādījumu.

Uzdevums par 168. zīm. parādītās figūras salikšanu kādreiz tika uzskatīts par neatrisinātu [1].

4.2. uzdevums. Noskaidrojiet, vai 168. zīm. attēlotā figūra ir vai nav saliekama!

Figūras, kuras redzamas 169.-170. zīm., nav saliekamas. Samērā nesen ir atrasts ***īss*** nesaliekamības pierādījums pirmajai no šīm figūrām. Turpretim otrā– nesimetriskā –figūra ir viena no tām, kurai nav zināms īss nesaliekamības pierādījums.

Pēdējai figūrai, sk. 171. zīm., eksistē tikai divi salikumi. Atrodiet tos!

4.1. Nesaliekami taisnstūru pāri

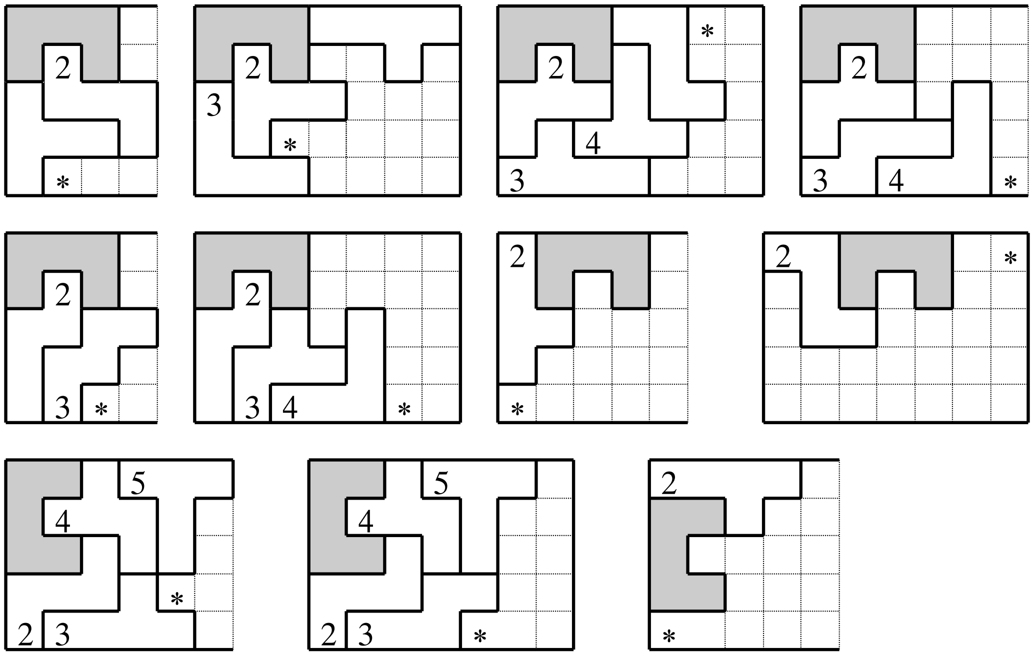
Daži šādi taisnstūru pāri, turklāt ar nesaliekamības pierādījumiem, jau ir uzrādīti 3. nodaļā. Viens no skaistākajiem uzdevumiem par divu taisnstūru salikšanu – 3.56. uzdevums ir izveidots, pateicoties iepriekš iegūtajiem rezultātiem par vairāku citu taisnstūru pāru nesaliekamību.

4.3. uzdevums. Pierādīt, ka taisnstūru pāris (2×10, 3×5) nav saliekams.

4.4. uzdevums. Atrast īsu taisnstūru pāra (2×10, 4×5) nesaliekamības pierādījumu.

4.5. uzdevums. Atrast īsu taisnstūru pāra (2×10, 5×5) nesaliekamības pierādījumu.

Pierādīsim. ka nav saliekami arī taisnstūru pāri (2×10, 5×6) un (2×10, 5×7). Viegli pārliecināties, ka ar pentamino U nav pieļaujams noklāt vairāk nekā divas taisnstūra 5×7 (vai 5×6) robežrūtiņas, sk. 172. zīm.



172. zīm.

Te ar "*"atzīmētas rūtiņas, kuras pieļaujamā veidā nav aizpildāmas ar atlikušajiem pentamino.

Saskaitīsim, cik taisnstūra r-rūtiņu var pārklāt atsevišķi pentamino. Šo skaitļu maksimālās vērtības ir:

$$m(V) = 5,\ m(Y) = 4,\ m(T) = m(N) = 3,$$
$$m(W) = m(Z) = m(F) = 2,\ m(X) = 1. \qquad (4.1)$$

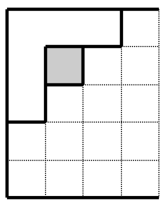
Tā kā pentamino N un Y taisnstūra 5×7 (vai 5×6) pārklāšanā nav izmantojami vienlaicīgi (sk., piemēram, 4.4. uzdevuma risinājumu), tad 20 taisnstūra 5×7 r-rūtiņas jāpārklāj ar septiņiem pentamino tā, ka katrs no tiem pārklāj attiecīgi 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2 r-rūtiņas. Savukārt taisnstūra 5×6 asoņpadsmit r-rūtiņas būtu jānoklāj ar sešiem pentamino tā, lai katrs no tiem pārklātu attiecīgi 5, 4, 3, 2, 2, 2 r-rūtiņas. Tas nozīmē, ka piecas taisnstūra 5×7 (vai 5×6) r-rūtiņas jāpārklāj ar V, četras ar Y un tātad N vairs nedrīkst izmantot. Tagad atliek tikai ievērot, ka iesvītroto rūtiņu, sk. 173. zīm., nav iespējams pārklāt ar pentamino X, W, Z, T, U, F vai Y tā, lai vienlaicīgi tiktu pārklātas vismaz divas r-rūtiņas.

Tagad sniegsim taisnstūru 2×10 un 5×8 vienlaicīgas nesaliekamības pierādījumu, kas ir vēl īsāks nekā 3. nodaļā dotais. Tas balstās uz r-rūtiņu pārklāšanas iespēju analīzi.

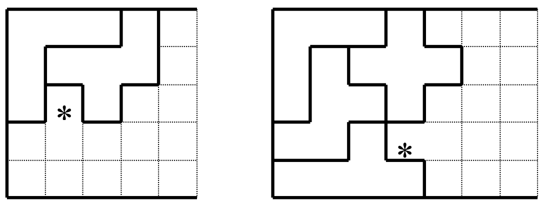
Atcerēsimies, ka taisnstūri 2×10 var salikt tikai no (I, P, L, N) vai (I, P, L, Y), tāpēc taisnstūra 5×8 salikšanā jāizmanto F, T, U, V, X, W, Z un viens no pentamino N vai Y. Tātad taisnstūra 5×8 divdesmit divu robežrūtiņu pārklāšanā ir minimāla – vienas rūtiņas – rezerve, jo astoņu skaitļu $m(\cdot)$ summa, sk. (4.1), nevar būt lielāka par $5+4+4+3+2+2+2+1=23$. Turklāt šī "rezerve" ir tikai tad, ja izmanto pentamino Y. Tas nozīmē, ka pārklājot taisnstūri 5×8 ar (V, U, N, T, F, Z, W, X), visi šie astoņi pentamino robežrūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli. No 173. zīm. skaidrs, ka to neizdosies izdarīt, jau pārklājot iesvītroto rūtiņu. Tātad atliek aplūkot tikai iespēju, kad taisnstūri 5×8 pārklāj ar (V, U, Y, T, F, Z, W, X) un ievēro prasību:

septiņi pentamino robežrūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli,
bet viens – gandrīz maksimāli.

Tā kā pentamino V nav izmantojams gandrīz maksimāli, t.i., ar šo pentamino nav iespējams pārklāt tieši 4 taisnstūra robežrūtiņas, tad pietiek analizēt r22 pārklāšanas iespējas. Šo rūtiņu saskaņā ar augstāk minēto prasību pieļaujams pārklāt tikai ar Z vai F. Pirmā iespēja tūlīt atkrīt, jo pēc r22 pārklāšanas ar Z (vienlaicīgi pārklājot taisnstūra vienu robežrūtiņu) vairs pieļaujamā veidā nevarētu pārklāt r33. Gadījuma, kad taisnstūra 5×8 rūtiņa 22 tiek pārklāta ar F, analīze ir atspoguļota 174. zīm. Rūtiņa, kas atzīmēta ar "*", pieļaujamā veidā nav pārklājama.



173. zīm.



174. zīm.

Taisnstūru 3×10 un 5×6 nesaliekamība.

Saskaņā ar S. Golombu [1], nav atrasts pietiekoši vienkāršs šā taisnstūru pāra nesaliekamības pierādījums. Te piedāvāto desmit uzdevumu 4.6.–4.15. risinājumi kopumā dod taisnstūru 3×10 un 5×6 vienlaicīgas nesaliekamības pierādījumu. Atzīmēsim, ka katrs atsevišķs uzdevums ir visai vienkāršs un ka šie uzdevumi ir savstarpēji cieši saistīti. Pirmie četri uzdevumi attiecas uz gadījumu, kad pentamino X tiek izmantots taisnstūra 3×10 pārklājumā. Īsāk to pieraksta tā: $X\in(3\times10)$.

Ja taisnstūra 3×10 pārklājums satur X, tad tas satur arī U, bet nesatur ne W, ne F, sk. 3.22. uzdevumu. Šis fakts būs noderīgs zemāk doto uzdevumu risināšanā.

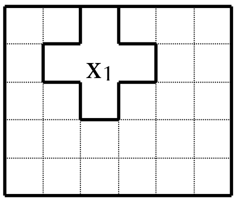
4.6. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 3×10 salikumus, kuri satur X, bet nesatur P.

4.7. uzdevums. Pierādīt taisnstūru pāra $(3\times10, 5\times6)$ nesaliekamību, ja $X\in(3\times10)$, bet $P\in(5\times6)$.

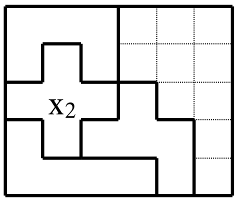
4.8. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 5×6 salikumus, kuri satur W un F, bet nesatur ne U, ne P.

4.9. uzdevums. Pierādīt taisnstūru pāra $(3\times10, 5\times6)$ nesaliekamību, ja $X\in(3\times10)$.

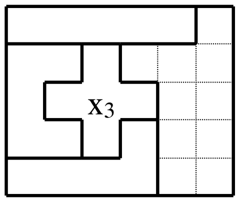
Nākamie uzdevumi attiecas uz otru iespēju: $X\in(5\times6)$. Taisnstūra un pentamino simetrijas dēļ pietiek analizēt trīs gadījumus, kad $X_C\supset x_i$, $i=1,2,3$, t.i., kad pentamino X centrālais kvadrāts noklāj rūtiņu x_i, sk. 175.-177. zīm.



175. zīm.



176. zīm.



177. zīm.

4.10. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 5×6 salikumus, kuri satur X un W.

4.11. uzdevums. Pierādīt taisnstūru pāra $(5\times6, 3\times10)$ nesaliekamību, ja $X,W\in(5\times6)$.

4.12. uzdevums. Pierādīt apgalvojumu: ja $W\in(3\times10)$, $U\in(5\times6)$, tad $F\in(5\times6)$, bet $P\in(3\times10)$.

4.13. uzdevums. Pierādīt taisnstūru pāra $(5\times6, 3\times10)$ nesaliekamību, ja $X_C\supset x_1$, sk. 175. zīm.

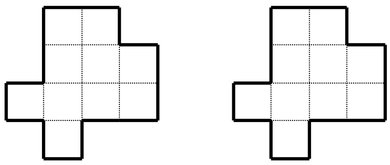
4.14. uzdevums. Pierādīt taisnstūru pāra $(5\times6, 3\times10)$ nesaliekamību, ja $X_C\supset x_2$.

4.15. uzdevums. Pierādīt taisnstūru pāra $(5\times6, 3\times10)$ nesaliekamību, ja $X_C\supset x_3$.

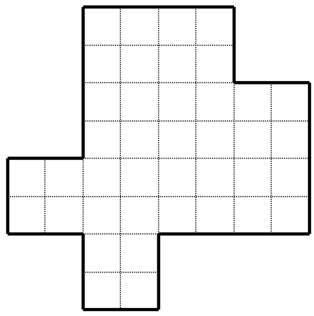
4.2. fff^2 problēma simetriskām figūrām

Problēma: vai eksistē simetriska figūra, kuru vienlaicīgi ar tās kopiju un dubultotu izmēru kopiju var salikt no pentamino? Skaidrs, ka šādai figūrai, ja tā vispār eksistē, jābūt 10-mino. 2.22. uzd. risinājumā apgalvots, ka eksistē viens vienīgs 10-mino ar šādu īpašību “fff^2”. Izmantojot simetrisko 10-mino sarakstu, sk. 40. zīm., sniegsim šī apgalvojuma pierādījumu.

Vispirms pārliecināsimies, ka nav iespējams salikt vienlaicīgi 178.-179. zīm. parādītās figūras.

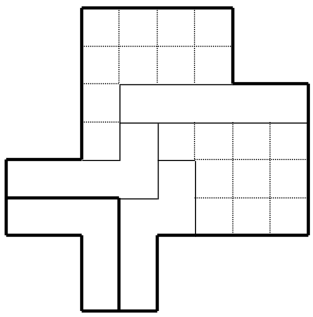


178. zīm.

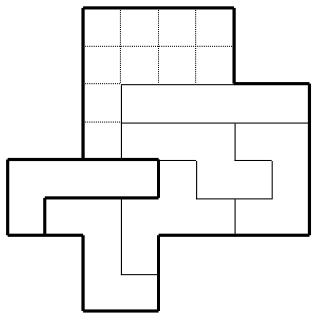


179. zīm.

Tā kā 178. zīm. redzamo 10-mino salikšanā jāizmanto (X, W) un (P, Y), tad jāpierāda 179. zīm. attēlotās figūras nesaliekamība no Z, T, V, U, F, I, N un L. Aplūkosim rūtiņas 61 noklāšanas iespējas. Pateicoties simetrijai detalizētāk jāanalizē tikai divi 180.-181. zīm. parādītie gadījumi.



180. zīm.



181. zīm.

Pēc piecu rūtiņu (r32-r36) pārklāšanas ar I (vienīgais pieļaujamais I novietošanas veids), sk. 180. zīm., vairs nav iespējams pieļaujamā veidā pārklāt r41. Rūtiņu 72 , sk. 181. zīm., pārklāsim ar F (ja to pārklātu ar N, tad dalāmības principa dēļ vairs nebūtu pieļaujamas vietas, kur novietot pentamino I), tad r67 jāpārklāj vienīgi ar U, r57 - ar N, ar I jāpārklāj r32-r36. Atlikušo daļu acīmredzami vairs nevar pārklāt ar V un T.

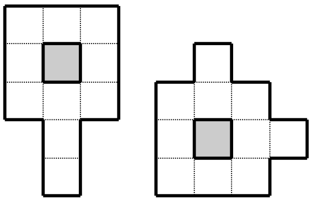
<u>4.16. uzdevums.</u> Atrast īsu pierādījumu tam, ka simetriskie 10-mino, kuri saliekami no X un V, neder par fff^2 problēmas atrisinājumu.

<u>4.17. uzdevums.</u> Atrast pierādījumu tam, ka simetriskajiem 10-mino, kuri saliekami no I un U, nepiemīt īpašība fff^2.

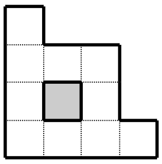
<u>4.18. uzdevums.</u> Pierādīt, ka 182. zīm. redzamajiem 10-mino nav spēkā īpašība fff^2.

<u>4.19. uzdevums.</u> Vai 183. zīm. attēlotajiem 10-mino piemīt īpašība fff^2 ?

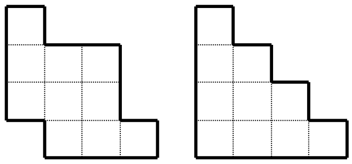
<u>4.20. uzdevums.</u> Pierādīt, ka 184. zim. redzamajiem 10-mino nepiemīt īpašība fff^2.



182. zīm.



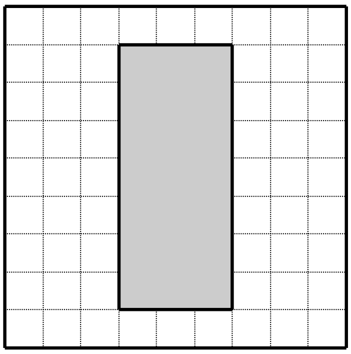
183. zīm.



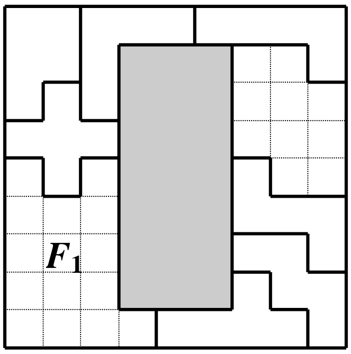
184. zīm.

4.3. Kvadrāts 9×9 ar caurumu 3×7

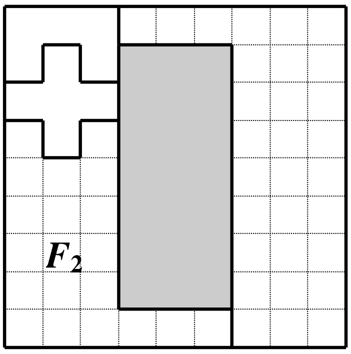
Zināms, ka 185. zīm. redzamā figūra nav p-saliekama, taču saskaņā ar S. Golombu [1] nav atrasts pietiekoši vienkāršs nesaliekamības pierādījums.



185. zīm.



186. zīm.



187. zīm.

Simetrijas dēļ pietiek analizēt trīs pentamino X novietošanas iespējas: X ⊃r31, r41 vai r51. Vispirms – kā sarežģītāko – analizēsim gadījumu X ⊃r41, sk. 186. zīm. Eksistē divi varianti kā pārklāt r31.

1) r31⊂ U (un līdz ar to r11⊂ I).

Acīmredzami, ka r51 neder pārklāt ar F, T, V, Z vai W. Ja r51 pārklātu ar P vai Y, tad vismaz viena no rūtiņām 53 vai 91 paliktu nenoklāta. Tātad r51 jāpārklāj ar L vai N.

Ja r51 $\subset$ L, tad r53$\subset$ P, r91$\subset$ Y, r95$\subset$ V un tālāk pieļaujamā veidā vairs nav noklājama r98. Savukārt, ja r51$\subset$ N (reize ar r71), tad r53$\subset$ Y, r91$\subset$ L, r95$\subset$ V, r98$\subset$ P, r16$\subset$ T un vairs nav noklājama r19.

2) r31$\subset$ P (un līdz ar to r33$\subset$ V).

Ievērosim, ka figūras F_1 , sk. 186. zīm., pieļaujams pārklāt tikai ar (L,N,Y) vai (T,N,I).

Ja F_1 pārklāts ar L, N, Y, tad r95 $\subset$ I, r16$\subset$ F (ja r16 pārklātu ar T, tad ar atlikušajiem pentamino F, U, Z vai W nevarētu pārklāt r19), r19$\subset$ U. Izveidojas taisnstūris 5×3, kuru nevar pārklāt ar T, Z un W.

Savukārt, ja F_1 pārklāts ar T, N un I, tad r95$\subset$ Y (pēc r95 pārklāšanas ar L un sekojoši r99 – ar Y, vairs nebūtu pārklājama r84), r99$\subset$ W. Tagad r16 jāpārklāj ar L, sk. 186. zīm., (pēc r16$\subset$ F un r18$\subset$ U atlikušā apgabala nepārklājamība acīmredzama), r16$\subset$ Z (vienīgā vieta, kur pieļaujams novietot Z). Skaidrs, ka atlikušais simetriskais 10-mino nav p-saliekams.

Pārējo divu gadījumu $X_C \supset$r32 vai $X_C \supset$r52 analīzi ieteicams veikt patstāvīgi, atrisinot šādus četrus vienkāršus uzdevumus.

<u>4.21. uzdevums.</u> Pierādīt, ka “caurumotais kvadrāts”, sk. 185. zīm., nav saliekams, ja pentamino P izmanto fragmenta F_2 pārklāšanā, sk. 187. zīm.

<u>4.22. uzdevums.</u> Pierādīt “caurumotā kvadrāta” nesaliekamību, ja $X_C \supset$r32, r14 $\subset$ I, r96$\subset$ L.

<u>4.23. uzdevums.</u> Pierādīt “caurumotā kvadrāta” nesaliekamību, ja $X_C \supset$r32, r14$\subset$ L, r96$\subset$ I.

<u>4.24. uzdevums.</u> Atrast ļoti īsu “caurumotā kvadrāta” nesaliekamības pierādījumu, ja $X_C \supset$r52.

4.4. Teilora konfigurācija

Tā sauc 188. zīm. attēloto figūru. To ir piedāvājis matemātiķis Herberts Teilors, kurš, tāpat kā S. Golombs, ir Dienvidkalifornijas universitātes profesors.

Teilora konfigurācijas nesaliekamības pierādījumus neatkarīgi viens no otra ir ieguvuši Dž. Fletčers un S. Ernšovs. Viņu pierādījumus zināmā mērā ir vienkāršojis S. Golombs [1, 67.-74. lpp.].

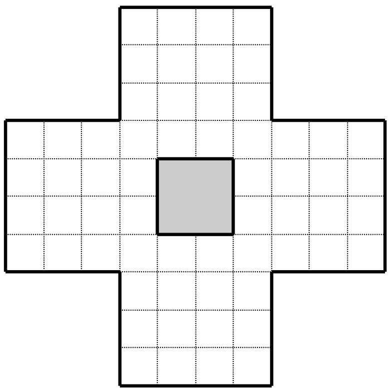
Simetrijas dēļ pietiek aplūkot tikai divas iespējas: $X_C \supset r32$ un $X_C \supset r44$. Bez tam 1. iespējas analīze triviāla: dalāmības principa dēļ nav pieļaujamas vietas priekš pentamino I.

Pēc r44 pārklāšanas ar X, sk. 188. zīm., kā nākamo ņemsim I. Simetrijas un dalāmības principa dēļ pietiek aplūkot divus gadījumus.

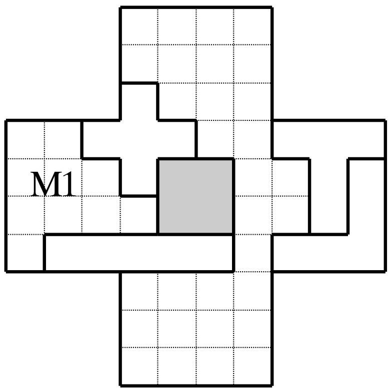
I1. Pentamino I pārklāj rūtiņas r72-r76 , sk. 189. zīm.

I2. Pentamino I pārklāj rūtiņas r75-r79 , sk. 190. zīm.

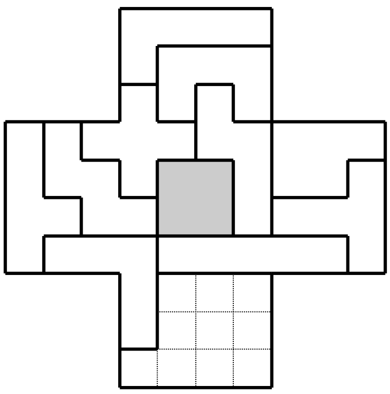
Šo gadījumu tālākajā analīzē atšķirībā no [1] lietosim citu – īsāku un vienkāršāku pārlases metodes variantu. Abos gadījumos kā trešo pentamino ņemsim T un izmantosim šādas vienkārši konstatējamas attiecīgo n-mino īpašības.



188. zīm.



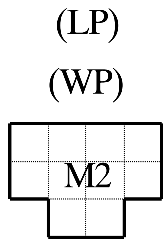
189. zīm.



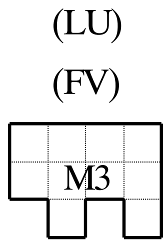
190. zīm.

(m1) 10-mino M1, sk. 189. zīm., var salikt tikai no (L, P) vai (W, Y).

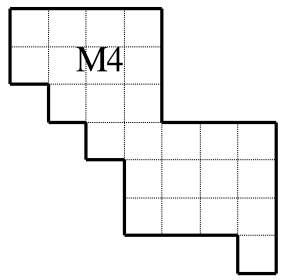
(m2) 10-mino M2, sk. 191. zīm., var salikt tikai no (L, P) vai (P, W).
(m3) 10-mino M3, sk. 192. zīm., var salikt tikai no (L, U) vai (F, V).
(m4) Ja 25-mino M4, sk. 193. zīm., pārklājums satur Z, tad tas satur P vai V, sk. 194. zīm.



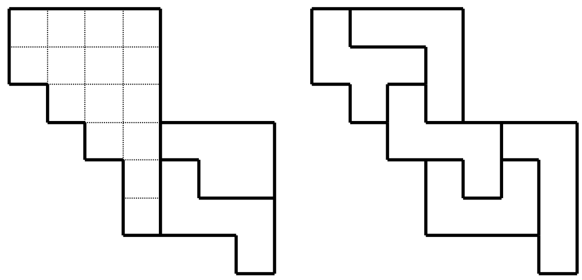
191. zīm.



192. zīm.



193. zīm.



194. zīm.

Gadījumā I1 pentaminoT pieļaujams novietot piecos stāvokļos.

I1T1. Pentamino T pārklāj r(4,8) un r(4,10) .

Pēc 10. kolonnas rūtiņu pārklāšanas ar V neviena no rūtiņas r56 , sk. 189. zīm., pārklāšanas iespējām – ar L vai W – nav tālāk realizējama, sk. (m1)-(m2). Tātad $r56 \subset F$, $M2 \ni (P,L)$, $M1 \ni (W,Y)$, $r66 \subset Z$. Skaidrs, ka atlikušo 10-mino nav iespējams pārklāt ar pentamino U un N.

I1T2. Pentamino T pārklāj r(4,10) un r(6,8) . Tad $r(7,10) \subset P$, $(W,Y) \in M1$, $r55 \subset L$, $r49 \subset V$, bet ar atlikušajiem pentamino F, N, U vai Z nav pieļaujams pārklāt r46.

I1T3. Pentamino T pārklāj r(6,6) un r(7,10) . Tad $r(4,10) \subset P$, $(W,Y) \in M1$, $r65 \subset N$, $r79 \subset V$, $M3 \ni (L,U)$, bet atlikušo 10-mino vairs nevar pārklāt ar F un Z.

I1T4. Pentamino T pārklāj r(7,8) un r(7,10) .

Tad $r68 \subset V$ un iegūstam jau izskatīto gadījumu I1T1.

I1T5. Pentamino T pārklāj r(10,2) un r(10,4) . Tad $r(10,1) \subset P$, $M1 \ni (W,Y)$.

Ja r94 pārklātu ar V, tad izveidotos nepārklājams (bez P vai V) fragments M4, sk. (m4).

Savukārt, ja $r94 \subset N$, tad $r65 \subset U$, $r(7,10) \subset L$, $r49 \subset V$ un iegūst nepārklājamu (ar Z vai F) rūtiņu 46.

Beidzot, ja $r94 \subset L$, tad $r78 \subset V$, $r(4,10) \subset F$ un iegūst pieļaujamā veidā nepāklājamu (ar N, U vai Z) rūtiņu 48.

Gadījumā I2 pietiek aplūkot tikai divas netriviālas iespējas.

I2T1. Pentamino T pārklāj r(5,8) un r(7,10).

Tad r(4,10) $\subset$ P, bet r65 $\subset$ N, sk. (m2). Tagad ar W jāpārklāj 190. zīm. parādītās rūtiņas. Pēc r41 pārklāšanas ar Y, r72 – ar V, un sekojoši, M2 pārklāšanas ar L un U iegūstam no Z un F nesaliekamu 10-mino.

I2T2. Pentamino T pārklāj r(10,1) un r(10,3).

Tad r(10,4) $\subset$ P, Z$\in$M4, un sekojoši, sk. (m4) un 194. zīm., L un V$\in$M4. Pec r91 pārklāšanas ar Y iegūstam nepārklājamu 10-mino M2.

Der atzīmēt, ka grāmatā [1] gadījuma I2 analīze veikta, ņemot par trešo figūru pentamino N un nevis T.

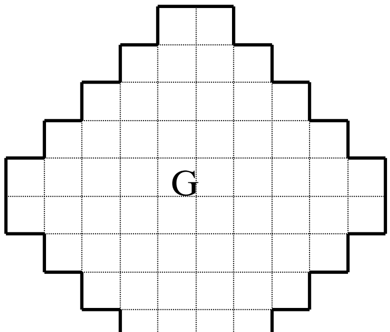
4.25. uzdevums. Cik dažādos veidos gadījumā I2, t.i., kad $X_C \supset$r44, bet r75 , r79 $\subset$ I, pieļaujams novietot:

a) pentamino N;

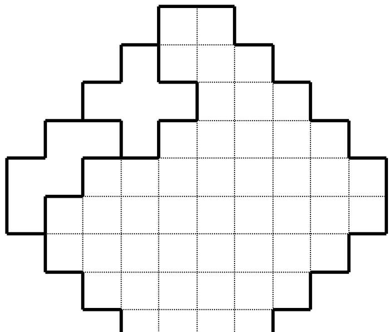
b) pentamino Z?

4.5. Kādas ievērojamas figūras nesaliekamība

Vai no pentamino var salikt 195. zīm. parādīto figūru? Šī problēma – kā neatrisināta – ir dota S. Golomba 1965. gadā iznākušajā (angļu valodā) grāmatā “Polimino”. Pēc tam laiku pa laikam šī problēma parādās dažādos izdevumos, sk., piemēram, [5, 12, 17]. Par figūras, sk. 195. zīm., nesaliekamību es pirmoreiz pārliecinājos 1985. gadā, lietojot pilnās pārlases metodi. Biju pārsteigts, ka pat pēc 25 gadiem, kopš problēma formulēta, tā joprojām tiek uzskatīta par neatrisinātu [17].



195. zīm.



196. zīm.

Saskaitīsim, cik figūras G robežrūtiņu pieļaujams pārklāt ar katru pentamino. Šo skaitļu maksimālās vērtības m(·) ir:

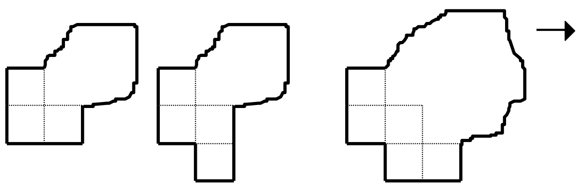
$$\begin{aligned} &m(F) = m(P) = m(W) = 3, \\ &m(L) = m(N) = m(U) = m(X) = m(Y) = 2, \qquad (4.5) \\ &m(I) = m(T) = m(V) = m(Z) = 1. \end{aligned}$$

Acīmredzami. ka iespēju 3·3+2·5+1·4=23 pārklāt 20 r-rūtiņas ir vairāk nekā pietiekoši. Tomēr figūra G nav saliekama no pentamino.

Pierādījums. Pieņemsim, ka G ir p-figūra. Tad iegūsim pretrunu, pateicoties šādiem pieciem viegli secināmiem apgalvojumiem.

A1. Pentamino X jābūt iekšējam pentamino (citiem vārdiem: ar X nedrīkst pārklāt nevienu G robežrūtiņu).

Simetrijas dēļ pietiek izanalizēt tikai vienu X novietošanas iespēju, proti, 196. zīm. parādīto. Ievērosim faktu: nevienu no 197. zīm. attēlotajiem apgabalu fragmentiem (un sekojoši, apgabalus, kuri satur tādus fragmentus) nevar pārklāt ar pentamino, neizmantojot P un W. Šis gandrīz acīmredzamais fakts ir visai noderīgs, pierādot arī daudzu citu figūru nesaliekamību.



197. zīm.

Tā kā P jāizmanto r11 pārklāšanai (atgādināsim, ka ar rij apzīmēta figūras i-rindiņas j-rūtiņa), tad r_{41} pieļaujams pārklāt tikai ar W, vienlaicīgi pārklājot r51 , sk. 196. zīm. Ne ar vienu no atlikušajiem pentamino F, I, L, N, T, U, V, Y vai Z vairs nav iespējams piemērotā veidā (minētā fakta un dalāmības principa dēļ) pārklāt r91.

A2. Pentamino F, W un V kopā pārklāj ne vairāk kā 9 robežrūtiņas.

Ar šiem pentamino nevar pārklāt vairāk kā desmit (10=3+3+2+2) r-rūtiņas, sk. (4.5). No otras puses, ja ar U pārklāj divas r-rūtiņas, teiksim r11 un r12 vienlaicīgi ar r23, sk. 195. zīm., tad r22 jāpārklāj ar F, L vai W, taču neviens no tiem r-rūtiņu pārklāšanā netiek izmantots maksimāli.

A.3. Pentamino X ir vienīgais iekšējais pentamino.

No (4.5) izriet, ka tikai I, T, V vai Z varētu būt iekšējs pentamino vienlaicīgi ar X, bet visi pārējie pentamino r-rūtiņu pārklāšanā būtu jāizmanto maksimāli, kas nav iespējams pēc A2.

A4. Katrs pentamino N, F un W pārklāj vismaz divas r-rūtiņas.

Tas izriet uzreiz no (4.3) un A1.

A5. Pentamino T jābūt iekšējam pentamino.

Simetrijas dēļ pietiek aplūkot tikai divus gadījumus.

(i) T pārklāj r21, r34 un r43.

Tad r44 jāpārklāj ar iekšēju pentamino, proti, ar X (r44 un r36 pārklāšanu ar N nepieļauj A4). Tagad, sk. A3 un A4, vairs nav piemērota veida, kā pārklāt r45 .

(ii) T pārklāj r31, r44 un r53 .

Tad r54, kā arī r55, jāpārklāj ar iekšējo pentamino X, kas nav izdarāms (r54 un r71 pārklāšanu ar W nepieļauj A4).

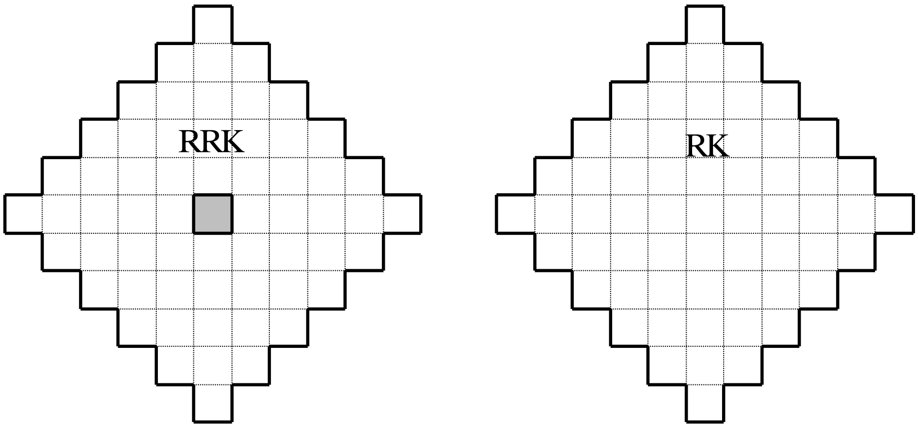
4.26. uzdevums. Cik maksimāli daudz dažādu pentamino var izvietot apgabalā G, ja katrs pentamino pārklāj tieši piecas rūtiņas?

4.27. uzdevums. Vai apgabalā G var izvietot 11 dažādus pentamino un vienu tetramino?

4.28. uzdevums. Vai apgabalā G var izvietot 11 dažādus pentamino tā, ka nenoklātās 5 rūtiņas veido pentamino?

4.6. Robinsona robotais kvadrāts

Šī figūra, ko īsāk apzīmēsim ar RRK, parādīta 198. zīm. Var uzskatīt, ka centrālā rūtiņa r66 ir pārklāta ar monomino vai arī, ka uzreiz dots caurumots 60-mino.



198. zīm.

Vienu no RRK nesaliekamības pierādījumiem ir piedāvājis pats R. Robinsons. Analoģiska rakstura pierādījumu ir atradis arī S. Ernšovs. Tā kā šie pierādījumi bijuši pārlieku gari, tad S. Golombs ir devis tikai pierādījuma shēmu [1, 74.-78.lpp.] ar piebildi: "Mēs piedāvājam lasītājam izmantot doto shēmu un mēģināt atjaunot pierādījumu visās detaļās. Ja viņš pratīs atrast īsāku procedūru, kura novedīs pie tiem pašiem secinājumiem, tad tas būs ievērojams sasniegums. Ja mēs pieļausim pārvietot melno monomino robotā kvadrāta iekšienē, tad varēs formulēt uzdevumu par atlikušo 60 lauciņu pārklāšanu ar 12 pentamino, bet arī tādu pārklājumu neviens nav atradis."

Lietojot citu pierādījuma metodiku, pat vispārīgā gadījuma analīzi var veikt īsāk, nekā tas bija izdarīts speciālajā gadījumā, kad monomino pārklāj robotā kvadrāta (RK) centrālo rūtiņu. Te ar vispārīgo gadījumu saprotam to, ka ar monomino pieļaujams pārklāt jebkuru robotā kvadrāta, sk. 198. zīm., iekšējo rūtiņu.

Saskaitīsim, cik RK robežrūtiņu pieļaujams pārklāt ar katru pentamino. Šo skaitļu maksimālās vērtības ir:

$$m(F) = m(W) = m(X) = 3,$$
$$m(N) = m(P) = m(Y) = 2, \qquad (4.6)$$
$$m(I) = m(L) = m(T) = m(U) = m(V) = m(Z) =1.$$

Tātad divdesmit r-rūtiņu pārklāšanā ir minimāla - vienas rūtiņas - rezerve (21-20 =1).

No šejienes uzreiz iegūstam, ka

- neviens no pentamino F, W, X, N, P, Y nevar būt RK iekšējs pentamino,

- RK nevar saturēt vairāk kā vienu iekšēju pentamino.

Vai RK var salikt tā, ka tas nesatur nevienu iekšēju pentamino? Pierādīsim, ka nevar. Gadījumā r66 $\not\subset$M, t.i., kad centrālā RK rūtiņa nav pārklāta ar monomino, iekšējs pentamino neizbēgami ir vajadzīgs tieši centrālās rūtiņas pārklāšanai. Gadījumā r66 $\subset$M aplūkosim četras rūtiņas {r55; r65; r67; r75}= C un parādīsim, ka vismaz viena no tām ir pārklāta ar iekšēju pentamino. Aplūkosim šo rūtiņu pārklāšanas iespējas tikai ar **r-pentamino**, t.i., ar tādiem pentamino, kuri nav iekšēji, jeb ar tādiem, kuri pārklāj vismaz vienu r-rūtiņu. Acīmredzami, ka te r-pentamino lomā nevar būt F, P, T, U, X un Y. Neder arī W, jo, pārklājot kopas C rūtiņu, tiks pārklāta lielākais viena r-rūtiņa, bet pie šādas "neracionālas" W izmantošanas vairs nebūs iespējams pārklāt pārējās 19 r-rūtiņas, sk. (4.6).

Pieņemsim, ka kopas C rūtiņa (simetrijas dēļ nav būtiski kura) ir pārklāta ar r-pentamino I. Tad dalāmības principa dēļ nevienu no pārējām trīs kopas C rūtiņām nav pieļaujams pārklāt ar r-pentamino N, L vai V. Tā kā ar r-pentamino Z var pārklāt ne vairāk kā vienu kopas C rūtiņu, esam ieguvuši:

ja I ir r-pentamino, tad <u>vismaz divas kopas C rūtiņas jānoklāj ar iekšēju pentamino.</u>

Gluži tāpat, pateicoties dalāmības principam, pasvītrotais apgalvojums būs spēkā, ja par r-pentamino ņemsim V vai Z.

Tā kā r-pentamino nevar pārklāt vairāk kā vienu kopas C rūtiņu, tad līdz ar to robotajam kvadrātam izpildās īpašības:

ja RK ir saliekams no 12 pentamino un viena iekšēja monomino, tad :

(RK1) tas satur tieši vienu iekšēju pentamino, kurš gadījumā r66 $\in$M (M-monomino) pārklāj vismaz divas kopas C rūtiņas;

(MAX) visi pentamino, izņemot tikai vienu iekšējo - I, L, T, U, V vai Z - robežrūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli. Citiem vārdiem, teiksim, ka jebkuram r-pentamino jāapmierina **maksimuma** princips.

4.29. uzdevums. Izmantojot īpašības (RK1) un (MAX), atrodiet īsu RKK nesaliekamības pierādījumu.

Turpmāk uzdevumu risinājumos, pierādījumos lietosim saīsinātu pierakstu. Hipotētisko iekšējo pentamino apzīmēsim ar H. Pagaidām mēs zinām, ka H ir viens no pentamino I, L, T, U, V vai Z. Pierakstu r*ij lietosim, lai īsāk pateiktu to, ka apskatāmās figūras i-ās rindiņas j-ā rūtiņa nav pārklājama pieļaujamā veidā. Robotā kvadrāta gadījumā pieļaujami tikai tādi izvēlētās rūtiņas pārklājumi, kuriem izpildās dalāmības un maksimuma principi, kā arī prasība, ka jāizmanto visi 12 pentamino un viens monomino. Pierādot RK nesaliekamību vispārīgajā gadījumā, turpmāk, protams, ievērosim prasību: r66$\subset$H, jo gadījums r66$\subset$M, t.i., kad RK centrālo rūtiņu pārklāj monomino, jau izskatīts. Tā kā RK pārklāšanā jāizmanto tieši viens monomino, tad te dalāmības princips nozīmēs, ka tikai viena izolēta RK fragmenta (pārklājot figūru var rasties vairāki izolēti fragmenti) laukums nedalīsies ar 5. Dalot šo laukumu ar pieci, atlikumā vienmēr iegūsim skaitli 1.

Pierādīsim RK nesaliekamību, realizējot pilnās pārlases metodi divos etapos: vispirms pārliecināmies, ka ar pentamino I nedrīkst pārklāt nevienu RK robežrūtiņu; tad pierādīsim RK nesaliekamību, ja I ir iekšējs pentamino.

Pierādījums ir ietverts vairākos savstarpēji saistītos un samērā vienkāršos uzdevumos. Reti kad izdodas atrast "skaistus", īsus figūru nesaliekamības pierādījumus. Lai saīsinātu garāku pierādījumu izklāstu, lietosim simbolisku pierakstu. Pēc neliela treniņa simboliskā pieraksta "atšifrēšana" grūtības nesagādās.

Demonstrēsim saīsināta (simboliskā) pieraksta lietošanu, risinot šādus trīs uzdevumus.

4.30. uzdevums. Atrast īsu RK nesaliekamības pierādījumu, ja rūtiņa r11 pārklāta ar I, r61 - ar X, bet r67 - ar monomino.

Aplūkosim r21 pārklāšanas iespējas. Ja r21 pārklātu ar W, tad r52 un r66 būtu jāpārklāj ar iekšēju pentamino, kas pieļaujamā veidā nav izdarāms. Jeb simboliskā perakstā:

$$r21 \subset W \Rightarrow r52^*.$$

Ja r21$\subset$Y, tad iegūstam pieļaujamā veidā nepārklājamu rūtiņu r41. (Ja r41$\subset$ P, tad šis pentamino robežrūtiņu noklāšanā nav izmantots maksimāli). Jeb saīsināti:

$$r21 \subset Y \Rightarrow r41^*.$$

Tātad r21 jāpārklāj ar P (citu iespēju vairs nav) un sekojoši r41 ar Z. Ievērosim, ka r64 jāpārklāj ar iekšeju pentamino, proti, ar U. Tad r72 jāpārklāj ar L, r91 - ar W. Līdz ar to easam ieguvuši pieļaujamā veidā nepārklājamu rūtiņu r93.

Lietojot simbolisko pierakstu, uzdevuma risinājumu var izklāstīt trīs rindiņās:

1) r21$\subset$ W $\Rightarrow$ r52*,
2) r21$\subset$ Y $\Rightarrow$ r41*,
3) r21$\subset$ P $\Rightarrow$ r41$\subset$ Z, r64$\subset$ H $\Rightarrow$ H=U, r72$\subset$ L, r91$\subset$ W $\Rightarrow$ r93*.

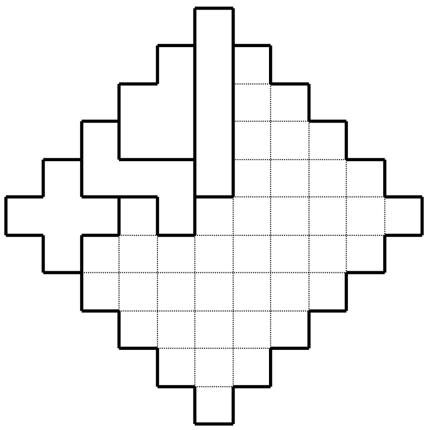
<u>4.31. uzdevums.</u> Atrast vēl īsāku risinājumu iepriekšējam uzdevumam.

Ievērosim, ka r52 pieļaujams pārklāt tikai ar Z, turklāt tā, kā redzams 199.zīm. Tad r21$\subset$ P un sk. augstāk izklāstīto pierādījumu vai uzreiz rindiņu 3). Simboliskā pierakstā pietiek ar vienu rindiņu:

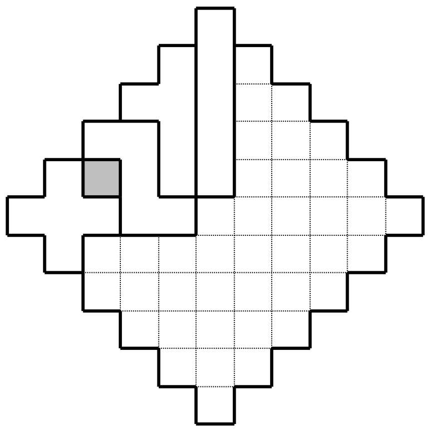
r52$\subset$ Z, r21$\subset$ P, r64$\subset$ H $\Rightarrow$ r64$\subset$ U, r72$\subset$ L, r91$\subset$ W $\Rightarrow$ r93*.

<u>4.32. uzdevums.</u> Atrast īsu RK nesaliekamības pierādījumu, ja r11$\subset$ I, r61$\subset$ X, bet r67 ir pārklāts ar r-pentamino.

Pastāv tikai divas “perspektīvas” rūtiņu r21, r41 pārklāšanas iespējas, sk. 199.-200. zīm. Rūtiņas r21 pārklāšana ar W uzreiz novestu strupceļā, jo r52 būtu jāpārklāj ar monomino, bet r53, r43 vienlaicīgi ar r66 būtu jānoklāj ar vienu iekšēju pentamino, kas pieļaujamā veidā, sk. (MAX), nav izdarāms.



199. zīm.



200. zīm.

Vai iespējams r67 pārklāt ar r-pentamino, sk. 199.-200. zīmējumus? Situācijā, kas parādīta 200. zīm., tas nav izdarāms dalāmības principa dēļ. Bet 199. zīmējumā redzamajā situācijā r67 var pārklāt vienīgi ar r-pentamino L, bez tam divos atšķirīgos veidos:

r67, r56, r59$\subset$ L vai r67, r68, r95$\subset$ L.

Tā kā abos šajos gadījumos monomino būs jāizlieto tā fragmenta pārklāšanā, kurš atradīsies pa labi no pentamino I, sk. 199. zīm., tad iegūsim pieļaujamā veidā nepārklājamu rūtiņu r72.

Uzrakstīsim uzdevuma atrisinājumu simboliskā pierakstā:

1) r21$\subset$ W $\Rightarrow$ r52$\subset$ M; r53, r43, r66$\subset$ H $\Rightarrow$ r66*;

2) r21$\subset$ Y $\Rightarrow$ r41$\subset$ Z $\Rightarrow$ r67$\not\subset$ r-pentamino;

3) r21$\subset$ P $\Rightarrow$ r41$\subset$ Z $\Rightarrow$ r67$\subset$ L $\Rightarrow$ r64$\not\subset$ M $\Rightarrow$ r72*.

4.33. uzdevums. Pierādīt RK nesaliekamību, ja r11$\subset$ I, bet r61$\subset$ X.

4.34. uzdevums. Pierādīt RK nesaliekamību, ja r11$\subset$ I.

4.35. uzdevums. Atrast īsu RK nesaliekamības pierādījumu, ja r21$\subset$ I, r(11,1) $\subset$ X, bet rūtiņa "84" pārklāta ar iekšēju pentamino.

4.36. uzdevums. Pierādīt RK nesaliekamību, ja r21$\subset$ I, r(11,1)$\subset$ X, bet rūtiņa "84"pārklāta ar r-pentamino.

4.37. uzdevums. Pierādīt RK nesaliekamību, ja r21$\subset$ I, bet r(11.1)$\subset$ X.

4.38. uzdevums. Pierādīt RK nesaliekamību, ja r21$\subset$ I, r(6,11)$\subset$ X.

4.39. uzdevums. Atrast īsu RK nesaliekamības pierādījumu, ja r21$\subset$ I, r61$\subset$ X, bet r64 ir pārklāta ar iekšēju pentamino.

4.40. uzdevums. Atrast īsu RK nesaliekamības pierādījumu, ja r21$\subset$ I, r61$\subset$ X, bet r64 ir pārklāta ar monomino.

4.41. uzdevums. Pierādīt RK nesaliekamību, ja r21$\subset$ I.

4.42. uzdevums. Atrast īsu RK nesaliekamības pierādījumu, ja r31$\subset$ I.

Kā sekas no 4.34., 4.41. un 4.42. uzdevumiem iegūstam:

(RK2) robotais kvadrāts nav saliekams no pentamino un viena vienīga monomino, ja ar pentamino I pārklāj RK robežrūtiņu.

Vēl atliek pierādīt ,ka

(RK3) robotais kvadrāts nav saliekams no pentamino un viena iekšēja monomino, ja I ir RK iekšējs pentamino.

4.43. uzdevums. Pierādīt apgalvojumu (RK3).

No apgalvojumiem (RK2) un (RK3) uzreiz iegūstam robotā kvadrāta nesaliekamību vispārīgā gadījumā iepriekš minētajā nozīmē, t.i., RK nesaliekamību no 12 dažādiem pentamino un viena iekšēja monomino.

Uzrādīsim vēl vienu īsāku RK nesaliekamības pierādījumu. Tas balstās uz pārlases metodes realizāciju, taču atšķirībā no augstāk minētās shēmas, kur prioritāte dota pentamino I, tagad kā pirmo figūru, ar kuru jāpārklāj piecas RK rūtiņas, ņemsim pentamino X. Atcerēsimies, ka pietiek izanalizēt tikai iespējas, kad centrālā RK rūtiņa - r66 - ir pārklāta ar iekšēju pentamino H, kur H$\in${I; L; T; U; V; Z},bez tam visi pentamino, izņemot vienu iekšējo, robežrūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli, sk. (RK1) un (MAX).

Pierādījums.

Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka pentamino X pārklāj r11, bet monomino pārklāj k-ās kolonnas rūtiņu, kur $k \geq 6$. Vispirms pārliecināsimies, ka rūtiņu "32"nedrīkst pārklāt ar iekšēju pentamino.

Tiešām, ja $r32 \subset H$, tad r32 un $r66 \subset L$, bet visi pārējie pentamino rūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli, sk. (MAX). Jebkura no trīs pieļaujamām r55 pārklāšanas iespējām ar I, Z vai M ātri vien noved "strupceļā":

$r55 \subset I \Rightarrow r67 \not\subset M \Rightarrow r67 \subset Z \Rightarrow r75^*$;
$r55 \subset Z \Rightarrow r67 \not\subset M \Rightarrow r67 \subset I \Rightarrow r75^*$;
$r55 \subset M \Rightarrow r44^*$.

Tātad r32 jāpārklāj ar r-pentamino. Eksistē seši pieļaujamie r32 pārklāšanas veidi ar r-pentamino

1) $r32, r31, r64 \subset L \Rightarrow r41 \subset W \Rightarrow r63^*$,
2) $r32, r31, r65 \subset L \Rightarrow r42 \subset U$ vai P:
   2U) $r42 \subset U \Rightarrow r52 \subset F$, $r72 \subset P \Rightarrow r92 \not\subset H \Rightarrow$ ($r92 \subset N$ vai V) $\Rightarrow r93 \subset M \Rightarrow r34^*$;
   2P) $r42 \subset P \Rightarrow r61 \subset Y$, ($r61 \subset W \Rightarrow r63^*$) $\Rightarrow$ $r72 \subset U \Rightarrow r82^*$.
3) $r32, r43, r31 \subset U \Rightarrow r42^*$.
4) $r32. r31, r42 \subset U \Rightarrow r43 \subset H \Rightarrow r65 \not\subset H \Rightarrow r65 \subset V \Rightarrow r51 \subset F \Rightarrow r73^*$.
5) $r32 \subset Z \Rightarrow r44 \subset H$, T, Y vai M:
   5H) $r44 \subset U \Rightarrow r65 \subset I \Rightarrow V \supset 87 \Rightarrow r34 \subset M \Rightarrow r75^*$;
   5T) $r44 \subset T \Rightarrow r47 \subset W \Rightarrow r69^*$;
   5Y) $r44 \subset Y \Rightarrow r56 \subset H \Rightarrow$ ($r56, r59 \subset L \Rightarrow r69 \subset P$, $\Rightarrow r68 \subset U \Rightarrow r42^*$) $\Rightarrow$ H=T (H=L $\Rightarrow r42 \subset P \Rightarrow$ $r61^*$)$\Rightarrow I \supset r87 \Rightarrow r93^*$;
   5M) $r44 \subset M \Rightarrow r34 \subset H$, U, L vai P:
      5MH) $r34, r66 \subset L \Rightarrow r65 \subset I \Rightarrow r75^*$;
      5MU) $r34, r45 \subset U \Rightarrow r46^*$;
      5ML) $r34, r35, r67 \subset L$ ($r34, r35, r68 \subset L \Rightarrow$ $r47 \subset W \Rightarrow r69^*$) $\Rightarrow r76 \subset H$
      ($r76, r77, r87 \subset U \Rightarrow r86^*$) $\Rightarrow$
      $r76, r66 \subset T$ vai $U \Rightarrow r78^*$;
      5MP) $r34, r47 \subset P \Rightarrow r63 \not\subset H \Rightarrow r63, r53 \subset U$
      ($r63, r81, r83 \subset V \Rightarrow r91 \subset W \Rightarrow r93^*$)$\Rightarrow$
      $r52 \subset F \Rightarrow r72 \not\subset H \Rightarrow r72, r81 \subset L \Rightarrow r73^*$
      vai $r82^*$.
6) $r32 \subset P \Rightarrow r51 \subset V$, Y, N, F vai I:
   6V) $r51 \subset V \Rightarrow r63^*$;
   6Y) $r51 \subset Y \Rightarrow r52 \subset L \Rightarrow r65^*$;

6N) r51$\subset$ N $\Rightarrow$ r54, r63$\subset$ H $\Rightarrow$ r63*;

6F) r51, r52 $\subset$ F (r51, r72$\subset$ F $\Rightarrow$ r52, r53$\subset$ H $\Rightarrow$ r52$\subset$ L $\Rightarrow$ r65*) $\Rightarrow$ r53, r54$\subset$ H $\Rightarrow$ H=T (H=U vai V $\Rightarrow$ r65*) $\Rightarrow$ r65$\subset$ V $\Rightarrow$ r73$\subset$ N vai U $\Rightarrow$ r83*;

6L) r51 $\subset$ L $\Rightarrow$ r61$\subset$ Y$\Rightarrow$ r72 $\subset$ U $\Rightarrow$r82*;

6I) r51$\subset$ I $\Rightarrow$ r44$\subset$ H, T, Y vai M:

6IH) r44$\subset$ H $\Rightarrow$ H=U $\Rightarrow$ r34$\subset$ L vai M $\Rightarrow$ r65$\subset$ Z, r61$\subset$ Y $\Rightarrow$ r75*;

6IT) r44$\subset$ T , r34$\subset$ M $\Rightarrow$ r47$\subset$ W $\Rightarrow$ r69*;

6IY) r44$\subset$ Y, r34$\subset$ M $\Rightarrow$ r57$\not\subset$ H $\Rightarrow$ r57$\subset$L, N vai V $\Rightarrow$ r69*;

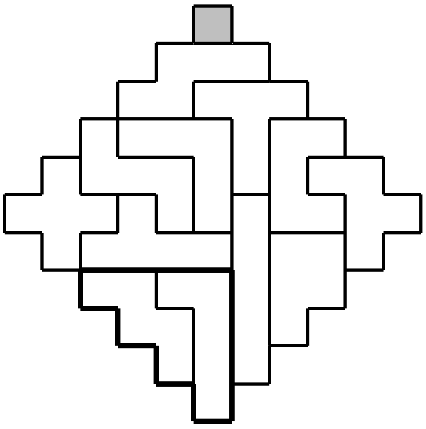
6IM) r44$\subset$ M $\Rightarrow$ r46$\subset$ Y $\Rightarrow$ (r46$\subset$ N vai W $\Rightarrow$ r34* vai r57*; r46, r34$\subset$ L $\Rightarrow$ r69*) $\Rightarrow$ r34$\subset$ L $\Rightarrow$ r63*.

Kā redzams, arī šis pierādījums ietver samērā daudzu “sazarotu”gadījumu analīzi. Būtu ļoti vēlams atrast “skaistāku” robotā kvadrāta nesaliekamības pierādījumu vispārīgajā gadījumā. Lai tādu pierādījumu atrastu, droši vien būs nepieciešams izvēlēties citu piemērotāku pierādījuma shēmu.

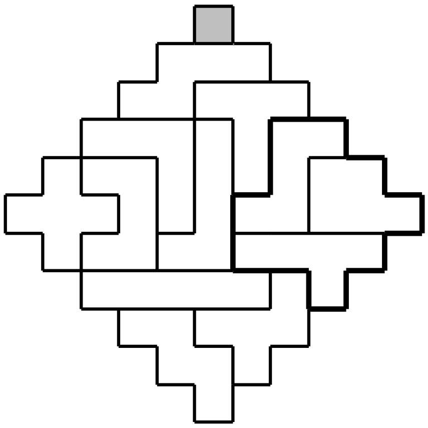
Vai RK iespējams salikt tad, ja ar monomino pārklāj robežrūtiņu? M. Gardnera grāmatā [4, 488.lpp.] dota šāda informācija:

“Var salikt roboto kvadrātu, kurā monomino (caurums) atrodas uz robežas, blakus stūrim vai stūrī. Ir atrasti sešpadsmit dažādi pēdējā tipa atrisinājumi. Tomēr pagaidām nav zināms, vai monomino var atrasties no stūra tālāk nekā viena rūtiņa.”

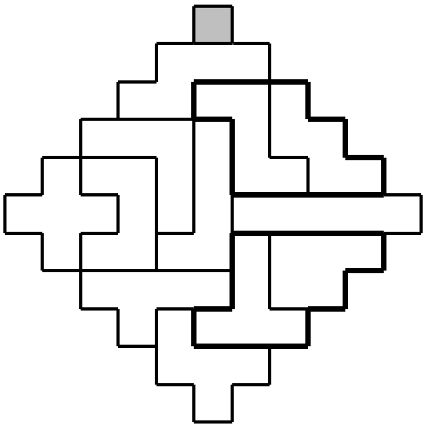
Saskaņā ar G. Radziņa sastādītās programmas rezultātiem RK var salikt tikai tad, ja ar monomino pārklāj stūra rūtiņu (r11, r61, r(6,11) vai r(11,1)) vai tai tuvāko robežrūtiņu (r21, r23, r51, r71, r59, r79, r(10,1) vai r(10,3)). Taču neapstiprinās apgalvojums par sešpadsmit dažādiem atrisinājumiem. Vārda “sešpadsmit”vietā vajadzētu būt - “desmit”. Lūk, kādi ir šie RK salikumi.



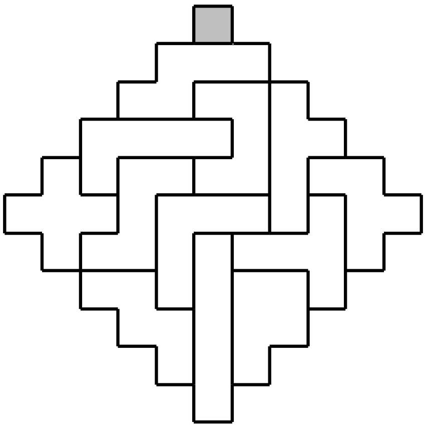
201. zīm.



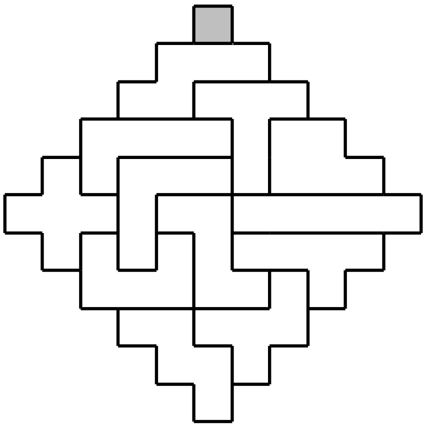
202. zīm.



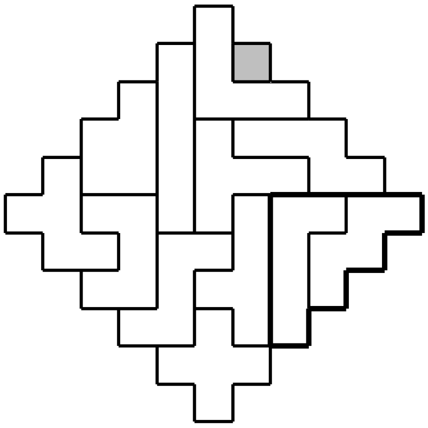
203. zīm.



204. zīm.



205. zīm.



206. zīm.

Pārējos četrus salikumus iegūst, izdarot nelielas izmaiņas ar treknu līniju izceltajos fragmentos:

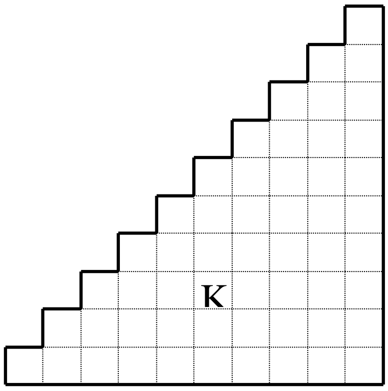
– maina L un W vietas, sk. 201. un 206. zīm.

– maina Z, P un Y vietas izceltā fragmenta ietvaros, sk.202. zīm.

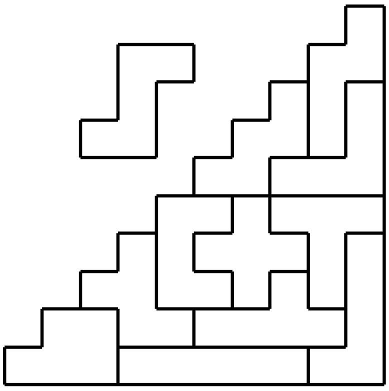
– maina vietām divus izceltos “ZW” un “TP” fragmentus, sk. 203. zīm.

4.7. Kāpnītes

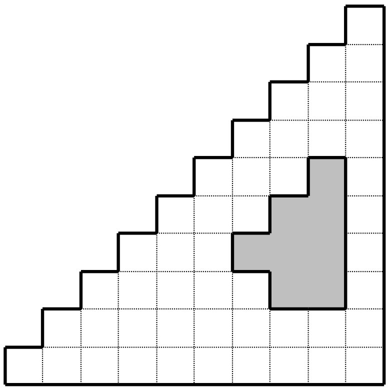
Vai 207. zīm. parādīto figūru var salikt no 11 pentamino?



207. zīm.



208. zīm.



209. zīm.

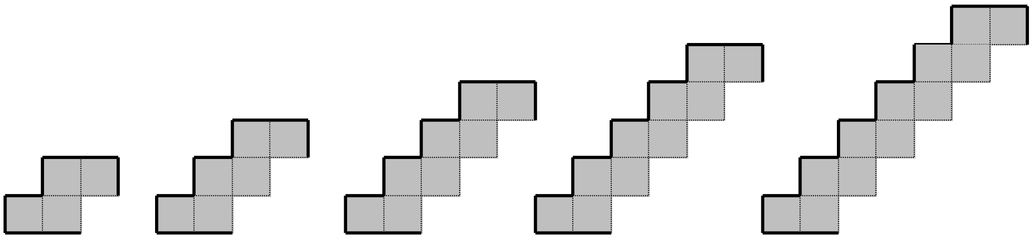
Žurnālā [18, 149.lpp.] atrodama šāda informācija: *No 11 pentamino var salikt figūru "kāpnītes". Divpadsmitais elements paliek aiz borta (viens no piemēriem parādīts zīmējumā)* [sk. 208. zīm.]. *Lasītāji ir atraduši atrisinājumus, kuros ir izslēgti pēc kārtas 10 no 12 elementiem. Vai tiešām divus atrisinājumus tā arī neizdosies atrast?*

<u>4.44. uzdevums.</u> Izvirziet hipotēzi, kurus divus pentamino nav izdevies izslēgt žurnāla [18] lasītājiem un pēc tam salīdziniet ar atbildi!

Vai lasītājiem ir pietrūcis pacietības, veiksmes, vai arī minētos divus atrisinājumus tiešām nav iespējams atrast? Ilgāku laiku vienīgais ticamais pamatojums bija saistīts ar datorpārbaudi. Divos gadījumos, kad neizmanto P vai W, ar datoru nebija atrasts neviens figūras K salikums. Pavisam nesen tomēr ir izdevies atrast šiem gadījumiem atbilstošus nesaliekamības pierādījumus.

<u>4.45. uzdevums.</u> Vai iespējams ar pentamino pārklāt K galvenās diagonāles 10 rūtiņas, ja neizmanto a) W; b) P?

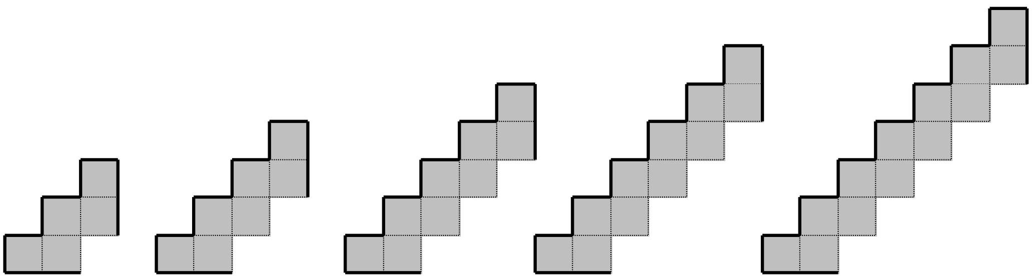
Noliedzošas atbildes gadījumā mēs uzreiz iegūtu vajadzīgo K nesaliekamības pierādījumu bez P vai W. Tomēr, un to var konstatēt visai ātri, galvenās diagonāles rūtiņas pārklāt ir iespējams. Vēl vairāk, var pārklāt vismaz sešu garāko diagonāļu rūtiņas, t.i., rūtiņas (i,j), i=1,...,10, j=1,...,6, sk. uzdevuma atrisinājumu. Tātad 4.45. uzdevumā ietvertā ideja – aplūkot galvenās diagonāles rūtiņu pārklāšanas iespējas – vismaz viena pati, nav perspektīva.



210. zīm.

Pierādot 195. zīm. redzamās figūras nesaliekamību, mēs izmantojām faktu par atsevišķu fragmentu nesaliekamību bez pentamino P un W, sk. 197. zīm. Tagad izmantosim šī rezultāta vienkāršu vispārinājumu uz fragmentiem, kuri parādīti 210.-211. zīm., proti:

(f) neviena 210.-211. zīmējumā parādītā fragmenta ietonētās rūtiņas nav pārklājamas ar pentamino, ja neizmanto ne P, ne W.



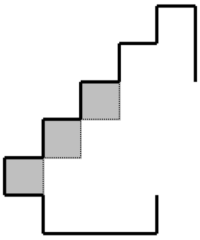
211. zīm.

Pieņemot, ka pentamino W un P nav izmantojami vienlaicīgi, no (f) uzreiz iegūstam:

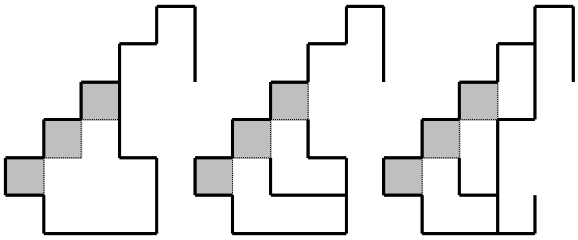
(K1) Ar pentamino X un T nedrīkst pārklāt nevienu kāpnīšu galvenās diagonāles rūtiņu;

(K2) Pentamino V vidējā rūtiņa nedrīkst pārklāt kāpnīšu divu garāko diagonāļu rūtiņas, t.i., rūtiņas r(i,j), kur i=1,...,10, bet j=1,2;

(K3) Ja neizmanto ne P, ne W, tad 212. zīm. redzamā kāpnīšu fragmenta trīs ietonētās rūtiņas jāpārklāj ar F un N vienā no 213. zīm. parādītajiem veidiem.



212. zīm.



213. zīm.

K nesaliekamību pierādīsim, analizējot vairākus gadījumus atkarībā no tā, kur novieto pentamino X. Šo analīzi būtiski saīsina īpašības (f) ievērošana. Pateicoties simetrijas un dalāmības principam, kā arī īpašībai (K1), pietiek aplūkot gadījumus, kad X centrālā rūtiņa pārklāj kādu no 208. zīm. ietonētajām astoņām rūtiņām. Vismaz piecos gadījumos (no šiem astoņiem) eksistē īsi kāpnīšu nesaliekamības pierādījumi.

4.46. uzdevums. Atrast īsu K nesaliekamības pierādījumu, ja $X \supset r55$ un ja neizmanto P vai W.

4.47. uzdevums. Atrast īsu K nesaliekamības pierādījumu, ja $X_C \supset r64$ un ja neizmanto P vai W.

4.48. uzdevums. Atrast īsu K nesaliekamības bez P vai W pierādījumu, ja $X_C \supset r74$.

4.49. uzdevums. Atrast īsu K nesaliekamības pierādījumu, ja $X \supset r66$ un ja neizmanto P vai W.

4.50. uzdevums. Atrast īsu K nesaliekamības bez P vai W pierādījumu, ja $X_C \supset r75$.

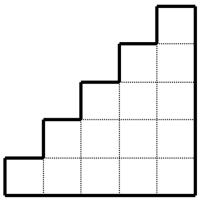
4.51. uzdevums. Pierādīt K nesaliekamību bez P vai W, ja $X \supset r77$.

4.52. uzdevums. Pierādīt K nesaliekamību bez P vai W, ja $X_C \supset r86$.

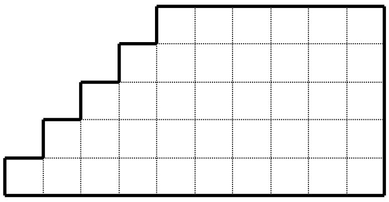
4.53. uzdevums. Pierādīt K nesaliekamību bez P vai W, ja $X \supset r88$.

Šo astoņu uzdevumu (4.46.-4.53.) atrisinājumi kopumā veido kāpnīšu nesaliekamības pierādījumu, ja neizmanto P vai W. Būtu ļoti vēlams atrast īsāku pierādījumu.

Ja neizmanto F, I, L, N, T, U, V, X, Y vai Z, tad atrast vienu kāpnīšu salikumu izdodas samērā ātri. Vēl vairāk, var atrast 10 tādus kāpnīšu salikumus, kuros netiek izmantoti attiecīgi F, I, L, N, T, U, V, X, Y vai Z, bet kuri visi sastāv no diviem vieniem un tiem pašiem 214.-215. zīm. parādītajiem fragmentiem.

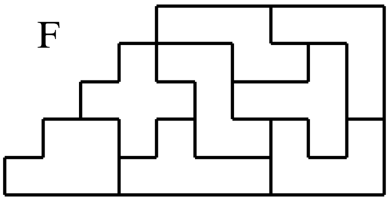


214. zīm.

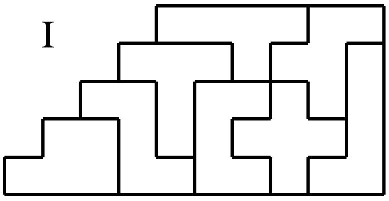


215. zīm.

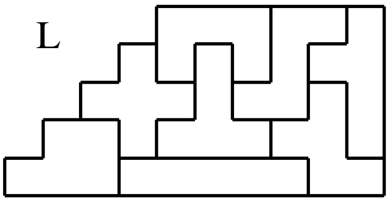
Tā kā 15-mino, sk. 214. zīm., var salikt no (W,L,I), (W,N,V) vai (W,T,Y), tad vajadzīgos desmit salikumus var iegūt, piemēram, pēc 216.-225. zīm. dotā parauga.



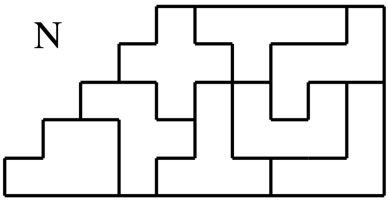
216. zīm.



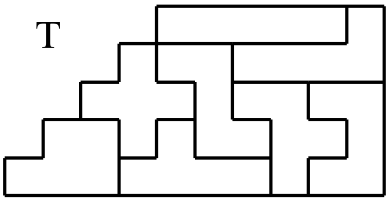
217. zīm.



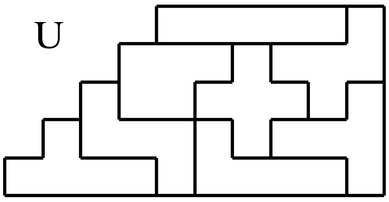
218. zīm.



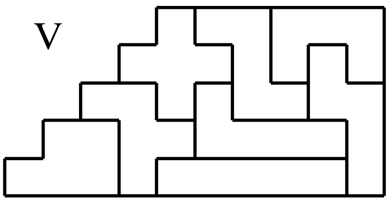
219. zīm.



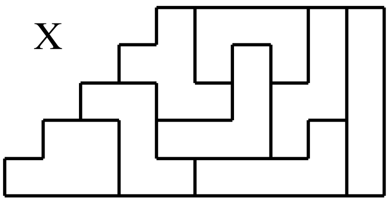
220. zīm.



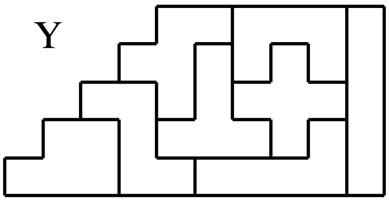
221. zīm.



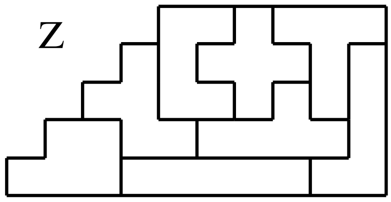
222. zīm.



223. zīm.



224. zīm.



225. zīm.

Ievērosim, ka 9 gadījumos no 10 pentamino P pārklāj vienas un tās pašas kāpnīšu rūtiņas; izņēmums ir gadījums, kad neizmanto pentamino U, sk. 221. zīm. No tā izriet, ka vismaz 9 gadījumos no 10 kāpnītes iespējams salikt tā, ka divi pentamino – P un W – atrodas vienās un tajās pašās vietās, precīzāk: $W \supset r(1,1)$, $P \supset r(10,1)$. Vai desmitajā gadījumā, t.i., kad neizmanto U, varēs atrast tādu 215. zīm. redzamā fragmenta salikumu no F, I, L, P, T, X, Y un Z, kurā apakšējās rindiņas pirmā rūtiņa ir pārklāta ar P? Nav grūti pārbaudīt, ka to izdarīt nevarēs. Vēl vairāk, var pierādīt, ka neeksistē tāds kāpnīšu salikums bez U, kuram $W \supset r(1,1)$ un $P \supset r(10,1)$.

4. tabulā atspoguļots kāpnīšu salikumu (tos ar datoru palīdzību ir ieguvis G. Radziņš) skaits, ja neizmanto atbilstošo pentamino. Visvairāk salikumu – 222 – var iegūt, ja neizmanto pentamino X.

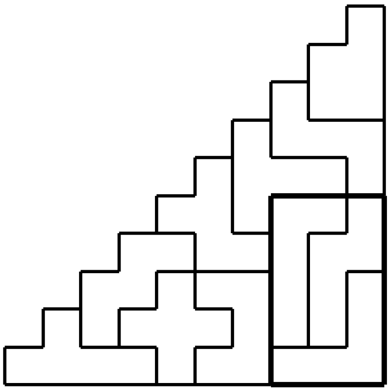
Neizmanto pentamino	Salikumu skaits
X	222
V	62
T	60
N	43
L	42
Z	37
U	35
I	27
F	26
Y	22
P	0
W	0

4. tab.

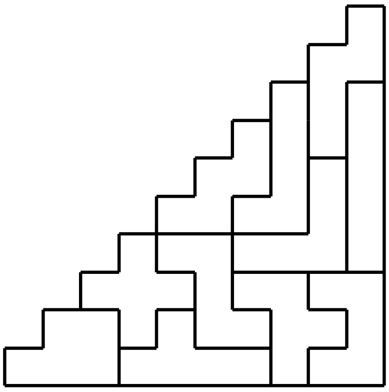
Piedāvāsim dažus uzdevumus par iespējām salikt kāpnītes tajā vai citā ziņā interesantākā veidā.

<u>4.54. uzdevums.</u> Kāpnīšu salikums var saturēt p-taisnstūri 5×3, sk. 226. zīm. Vai tas var saturēt vēl lielāku p-taisnstūri?

<u>4.55. uzdevums.</u> Vai eksistē kāpnīšu salikums, kurš sadalās divos simetriskos polimino: a) pentamino un 50-mino; b) 10-mino un 45-mino; c) 15-mino un 40-mino?



226. zīm.

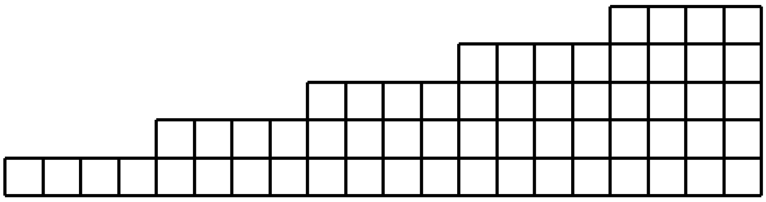


227. zīm.

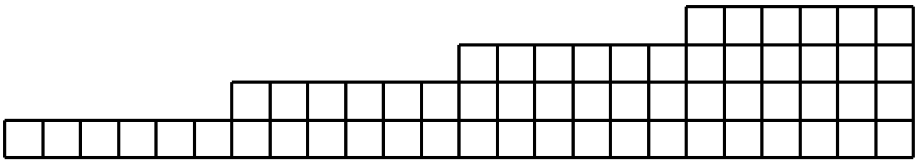
<u>4.56. uzdevums.</u> Vai eksistē tāds kāpnīšu salikums, kas sadalās trīs simetriskās sastāvdaļās, neviena no kurām nav pentamino.

<u>4.57. uzdevums.</u> Cik p-figūrās var sazāģēt kāpnītes, lietojot tikai taisnus iegriezumus? Piemēram. pēc 226. zīm. redzamās shēmas kāpnītes var sazāģēt četros fragmentos: pentamino P; taisnstūrī 5×3; 10-mino, ko veido T un Z, un 25-mino, ko veido (Y, W, X, U, F). Toties, kāpnītes sazāģējot pēc 227. zīm. dotās shēmas, var iegūt 6 fragmentus: P, (W, L), (I, V, N) un (X, Y, Z, F, U). Vai šo rezultātu vēl var uzlabot?

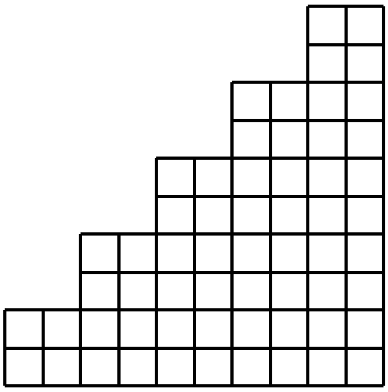
Mazāk pazīstamas ir 228.-231. zīm. redzamās kāpnes.



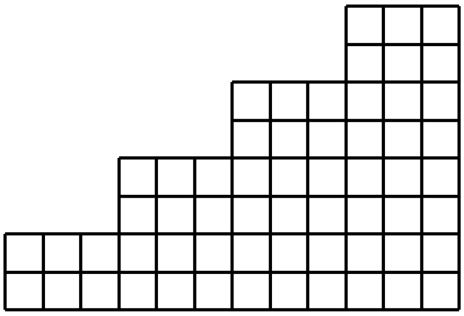
228. zīm.



229. zīm.



230. zīm.



231. zīm.

Tikai vienas kāpnes no šīm četrām ir simetriskas, sk. 230. zīm.

4.58. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, kuras no 228.-231. zīm. parādītajām kāpnēm nav p-saliekamas, un pēc tam salīdziniet ar atbildi!

4.59. uzdevums. Pierādīt 229. zīm. redzamo kāpņu nesaliekamību.

4.60. uzdevums. Vai eksistē 230. zīm. redzamo kāpņu salikums, kurš sadalās divos simetriskos polimino: a) pentamino un 55-mino; b) 10-mino un 50-mino; c) 15-mino un 45-mino; d) 20-mino un 40-mino?

4.61. uzdevums. Iepriekšējā uzdevuma atrisinājumā dotais kāpņu salikums, sk. 338. zīm., satur divus simetriskus 10-mino, tos veido (X, U) un (L, W). Vai eksistē tāds šo kāpņu salikums, kurš satur: a) trīs simetriskus 10-mino; b) astoņus simetriskus polimino?

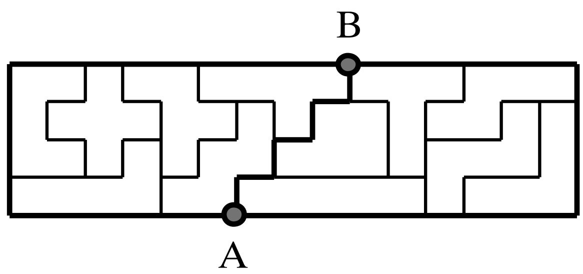
4.62. uzdevums. Atrast īsu pierādījumu, ka 230. zīm. redzamo kāpņu salikums nevar saturēt: a) p-taisnstūri 2×10; b) p-taisnstūri 5×5.

5. nodaļa
IEVĒROJAMĀKIE TAISNSTŪRU SALIKUMI

Vairākus ievērojamus taisnstūru salikumus var atrast 3. nodaļā. Piemēram, tur ir analizētas taisnstūru salikšanas iespējas divos vai trijos p-taisnstūros, minēti atsevišķi salikumi "rekordisti", kuri pēc kādas noteiktas īpašības nav pārspējami. Te galvenokārt aplūkoti uzdevumi par taisnstūru sadalīšanu **divos vienādos** polimino, vairākās simetriskās p-figūrās. Sniegtā informācija nebūt nav pilnīga. Nav izslēgts, ka centīgs lasītājs atradīs vēl kādus būtiskus papildinājumus un vairs neuzlabojamus rezultātus. Tā kā nav veikta pietiekami izsmeļoša taisnstūra 6×10 visu pārklājumu (atcerēsimies, ka to skaits ir 2339) analīze, tad šajā nodaļā nebūs uzdevumu par taisnstūra 6×10 nozīmīgākajiem salikumiem. Vairāki uzdevumi, kuros jāatrod divu vienādu taisnstūra 6×10 fragmentu salikumi, ir doti 1. pielikumā.

5.1. Taisnstūris 4×15

Ir zināms, ka taisnstūri 4×15 var sadalīt divos vienādos p-saliekamos polimino. Viena no tādām sadalīšanas iespējām parādīta 232. zīm.

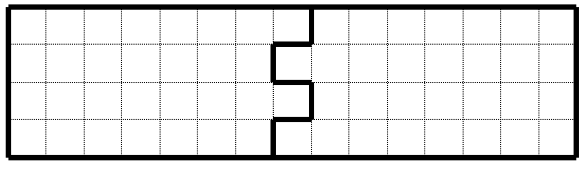


232. zīm.

Te atdalošās līnijas (šķēršļa, barjeras) AB garums ir 7 vienības.

<u>5.1. uzdevums.</u> Atrast visīsāko barjeru, kura taisnstūri 4×15 sadala divos p-saliekamos polimino.

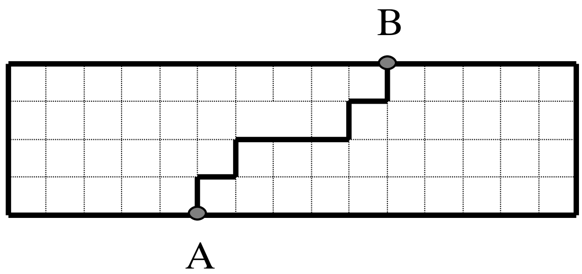
<u>5.2. uzdevums.</u> Atrast taisnstūra 4×15 salikumu ar 233. zīm. parādīto barjeru.



233. zīm.

5.3. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, kāds ir vislielākais garums līnijai, kura taisnstūra 4×15 salikumu sadala divās vienādās daļās, un pēc tam salīdziniet ar atbildi!

5.4. uzdevums. Atrast taisnstura 4×15 salikumu ar 234. zīm. parādīto barjeru.

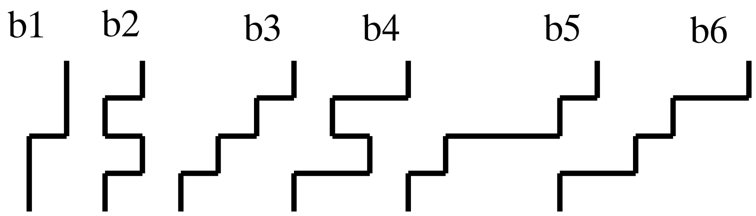


234. zīm.

5.5. uzdevums. Vai 234. zīm. redzamā barjera ir vienīgā simetriskā barjera ar fiksētiem galapunktiem A un B, kāda var izveidoties taisnstūra 4×15 p-salikumā?

5.6. uzdevums. Vai 232. zīm. redzamā barjera ir vienīgā simetriskā barjera ar fiksētiem galapunktiem A un B, kāda var izveidoties taisnstūra 4×15 p-salikumā?

Pieņemsim, ka mēs esam nolēmuši izveidot jaunu MR *pentamino* modifikāciju, kastītē 4×15 nostiprinot vienu no 235. zīm. attēlotajām barjerām tā, lai šī barjera kastīti sadalītu divās vienādās daļās. Kuru no sešām barjerām izvēlēties? Mūsu izvēlei, protams, pamatā var būt dažādi apsvērumi, kritēriji, mērķi. Piemēram, kuras barjeras gadījumā kastītes aizpildīšanas uzdevumam būs vismazāk atrisinājumu; vai pentamino sadalījums pa kastītes daļām būs nosakāms viennozīmīgi?



235. zīm.

No 232. zīm. redzams, ka barjeras b3 gadījumā pentamino sadalījums pa kastītes daļām nosakāms neviennozīmīgi, jo (U, L, X) un (N, L, Z) pārklāj vienādus fragmentus.

5.7. uzdevums. Pierādīt, ka pentamino sadalījums pa divām vienādām taisnstūra 4×15 daļām, kuras atdalītas ar barjeru b1, nav nosakāms viennozīmīgi.

5.8. uzdevums. Pierādīt 5.7. uzdevuma rezultātu, ja barjeru b1 aizstāj ar b2.

5.9. uzdevums. Vai 5.7. uzdevuma rezultāts saglabāsies, ja barjeru b1 aizstās ar b4?

Pārliecināsimies, ka atšķirībā no pirmajām četrām barjerām, b5 gadījumā pentamino sadalījums pa vienādajām kastītes daļām nosakāms viennozīmīgi, proti, viena no šīm daļām jāaizpilda ar (X, U, L, F, N, Y), bet otra ar (P, W, I, T, V, Z), sk. 5.4. uzdevuma atbildi. Pietiek izskatīt gadījumus, kad pentamino X atrodas taisnstūrī 4×15 pa kreisi no AB, sk. 234. zīm. Ievērojot dalāmības principu, jāanalizē četras iespējas.

1. X ⊃13 (tur, kur nerodas pārpratumi, rij vietā bieži vien rakstīsim “ij”). Neierobežojot vispārīgumu, var uzskatīt, ka 11⊂ U.

Ja 41⊂ I, tad 34⊂ N (34⊂ P ⇒ 14⊂ L ⇒ 18*), 14⊂ Y, 18⊂ P ⇒ 46*. Savukārt, ja 41⊂ L, tad 45⊂ W (45⊂ P ⇒ 14⊂ I, 19⊂ N, 46⊂ Y, 38⊂ T un iegūts no F, V, Z un W nesaliekams taisnstūris) 14⊂ Y, 18⊂ P ⇒ 46⊂ N ⇒ (46⊂ I ⇒ 37*) 48⊂ I (ja 48⊂ V, tad iegūtu no I, T, F un Z nesaliekamu taisnstūri) ⇒ r(3,10)⊂ F, r(3,11)⊂ T ⇒ r(4,14)*.

2. X ⊃14 ⇒ 36⊂ N ⇒ 15*.

3. X ⊃43. Neierobežojot vispārīgumu, var uzskatīt, ka 42⊂ U. Rūtiņu 11 pārklāsim ar L (11⊂ I ⇒ 44*), 44⊂ F (44⊂ W ⇒ 25*) ⇒ atlikušais fragments jāpārklāj ar Y un N. Tas nozīmē, ka esam ieguvuši tieši to pentamino sadalījumu, kurš minēts augstāk.

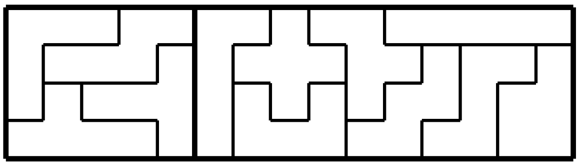
4. X ⊃45 ⇒ (15;29)⊂ (N;Y).

Ja 44⊂ F, tad iegūstam norādīto pentamino sadalījumu: viena no taisnstūra daļām ir pārklāta ar (X, U, L, F, N, Y). Savukārt gadījumos, kad 44⊂ L, P, T, Z, V vai W, taisnstūra pirmo trīs kolonnu rūtiņu pārklāšanā jāizmanto L un P ⇒ 46⊂ I ⇒ 37*. Vēl atliek iespēja, 44⊂ V, 11⊂ L, 46⊂ P. Tad katrs no pārējiem pentamino I, T, F, W un Z taisnstūra 14 robežrūtiņu pārklāšanā būtu jāizlieto maksimāli. Taču tas nav izdarāms pārklājot r39.

5.10. uzdevums. Pierādīt, ka eksistē tikai viens taisnstūra 4×15 p-salikums, kurš ar barjeru b6 sadalās divās vienādās daļās.

Tātad aplūkotā tipa MR *pentamino* izgatavotājiem, vadoties pēc atrisinājuma unitātes kritērija, vajadzētu izvēlēties barjeru b6. Saskaņā ar 5.10. uzdevuma rezultātu, šajā gadījumā viennozīmīgi nosakāms ne tikai pentamino sadalījums pa taisnstūra daļām, bet pat p-salikums. Te jāatzīmē, ka barjeras b5 gadījumā taisnstūra salikums nav nosakāms viennozīmīgi, sk. 346. zīm., no kura nekavējoties var iegūt citu salikumu, piemēram, samainot vietām L ar U. Vēl uzsvērsim, ka barjera b6 ir vienīgā, kurai ir spēkā 5.10. uzdevumā formulētais rezultāts.

Ievērību pelna 236. zīm. parādītais salikums. Tas sadalās divos mazākos taisnstūros, bez tam šajā salikumā var izdalīt **astoņus simetriskus** n-mino, kur $5<n<60$.



236. zīm.

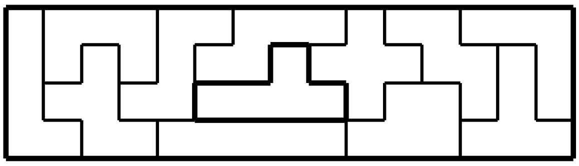
Šādus simetriskus n-mino veido (L,U), (X,U), (X,F), (L,X,U), (V,Y,N,T), (L,X,U,F,W,I,Z,P), (V,Y,N,T,L,U,F,W,I,Z,P) un (V,Y,N,T,L,X,F,W,I,Z,P). Pirmajā mirklī šķiet neticami, ka šo salikumu, kurā iespējams izdalīt 8 simetriskus n-mino ar 5<n<60, vēl varētu pārspēt.

<u>5.11. uzdevums.</u> Vai eksistē tāds taisnstūra 4×10 p-salikums, kurā var izdalīt:

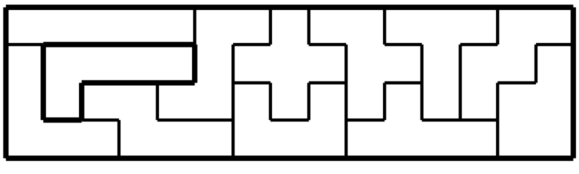
a) 10 simetriskus n-mino, kur 5<n<60;

b) 11 simetriskus n-mino, kur 5<n<60?

Kādu pentamino ir vairāk: to, kuri var būt iekšēji pentamino taisnstūra 4×10 pārklājumos, vai to, kuri – nevar? Acīm redzami, ka pentamino X, W, F, Z, T un V vienmēr pārklās vismaz vienu taisnstūra 4×10 robežrūtiņu. Analizējot taisnstūra robežrūtiņu pārklāšanas iespējas, samērā īsi var parādīt, ka neeksistē taisnstūra 4×10 pārklājums ar iekšēju pentamino I (vai U). Tas nozīmē, ka iekšējo pentamino lomā varētu būt tikai P, N, Y vai L. Pārklājums ar iekšējo pentamino P redzams, piemēram, 232. zīm., bet ar N – 348. zīm. Var atrast (tiesa, tas var prasīt ilgākus meklējumus) arī taisnstūra 4×10 pārklājumu ar iekšēju pentamino Y vai L, sk. 237.-238. zīm.



237. zīm.



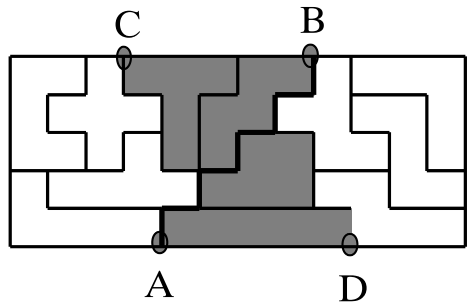
238. zīm.

Tā kā šajos zīmējumos var izdalīt simetriskus fragmentus, piemēram, (L,U) 237. zīmējumā, tad pārklājumi ar iekšēju pentamino Y vai L nav nosakāmi viennozīmīgi. Atzīmēsim, ka iekšējā pentamino L gadījumā (atšķirībā no Y) taisnstūra 4×15 salikumos pentamino L vieta nosakāma viennozīmīgi. Vēl vairāk, visus tādus salikumus var iegūt no 238. zīm. dotā pārklājuma, ja tā simetriskajos fragmentos – (X,F), (F,T) un (W,P) – maina atbilstošo pentamino atrašanās vietas. Vēl atzīmēsim, ka neviens taisnstūra 4×15 salikums nevar saturēt vairāk kā vienu iekšēju pentamino.

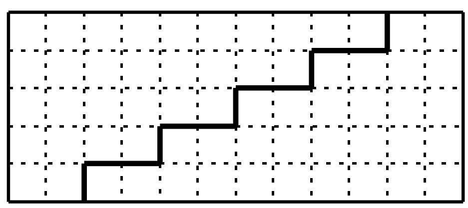
5.2. Taisnstūris 5×12

Cik ir dažādu barjeru, ar kurām taisnstūri 5×12 var sadalīt divās vienādās no pentamino saliekamās daļās? Kāds ir taisnstūra 5×12 salikums ar visgarāko atdalošo līniju? Kāda ir atdalošā līnija ar vislielāko posmu skaitu?

Viens no "visskaistākajiem" un plašāk pazīstamajiem taisnstūra 5×12 salikumiem ir tas, kurš sadalās divos vienādos taisnstūros 5×6, sk. 3. nodaļu. Skaidrs, ka šim salikumam atbilstošās barjeras (taisnes nogriežņa) garums – 5 vienības – nav samazināms. Viegli saprast, ka barjeras garums g(b) nevar būt pārskaitlis; precīzāk, pastāv sakarība g(b)=2h+1, kur h – horizontālo posmu skaits. Tā, piemēram, 239. zīm. redzamajai barjerai AB h=4, bet g=9.



239. zīm.



240. zīm.

Tieši no 239. zīm. redzams, ka pentamino sadalījums pa vienādajām taisnstūra daļām nav viennozīmīgs, jo var mainīt vietām ietonētos 10-mino. 239. zīm. attēlotais salikums ievērojams ne tikai ar to, ka atdalošā līnija AB ir monotona un ka tās visi posmi ir vienāda garuma. Šis salikums sadalās divās vienādās daļās vēl ar vienu līniju – CD.

5.12. uzdevums. Vai 239. zīm. redzamā barjera ir vienīgā barjera ar 9 posmiem, kura savieno punktus A un B un kura taisnstūri 5×12 sadala divos vienādos p-saliekamos fragmentos?

5.13. uzdevums. Vai visas barjeras, kas savieno punktus A un B un taisnstūri 5×12 sadala divos vienādos p-saliekamos fragmentos, ir ar 9 posmiem?

Zināms, ka taisnstūri 5×12, kurš ar taisnu barjeru sadalīts taisnstūros 5×6 un 5×6, varēs salikt no pentamino tikai tad, ja vienu no šiem taisnstūriem pārklāsim ar W, T, Z, I, L, Y, bet otru – ar pārējiem sešiem pentamino. Citiem vārdiem, rakstīsim, ka pentamino sadalījums (pa vienādajām taisnstūra daļām) apskatāmās barjeras gadījumā nosakāms viennozīmīgi.

5.14. uzdevums. Vai pentamino sadalījums 240. zīm. attēlotās barjeras gadījumā nosakāms viennozīmīgi?

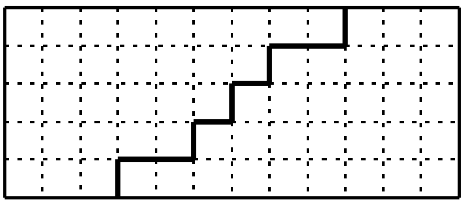
Šī uzdevuma atbildē dotais salikums ir ievērojams ar to, ka tajā var izdalīt vēl otru atdalošo līniju, kas savieno punktus C un D, sk. 354. zīm. Barjera “CD”sastāv no 15 posmiem, turklāt tā ir rekordiste garuma ziņā – 25 vienības.

5.15. uzdevums. Vai ir pareiza hipotēze, ka visgarākā barjera (25 vienības) satur arī visvairāk posmu?

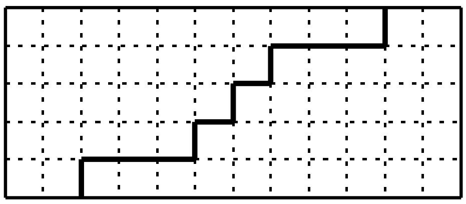
5.16. uzdevums. Atrast atdalošo līniju ar vislielāko posmu skaitu.

5.17. uzdevums. Vai pentamino sadalījums, kas atbilst barjerai ar vislielāko posmu skaitu, nosakāms viennozīmīgi?

5.18. uzdevums. Parādīt, ka taisnstūris 5×12 ir saliekams abu barjeru gadījumā, sk. 241.-242. zīm.



241. zīm.



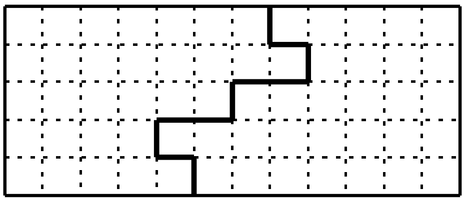
242. zīm.

Vai atbilstošie salikumi nosakāmi viennozīmīgi?

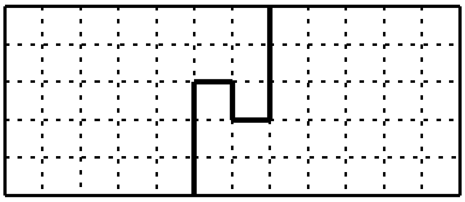
5.19. uzdevums. Vai taisnā barjera ir vienīgā, kurai pentamino sadalījums pa atbilstošajiem taisnstūra 5×12 fragmentiem nosakāms viennozīmīgi?

5.20. uzdevums. Vai eksistē barjera, kura taisnstūri sadala divās vienādās daļās un kurai atbilst tikai viens p-salikums?

5.21. uzdevums. Parādīt taisnstūra 5×12 saliekamību 243.-244. zīm. doto barjeru gadījumā.



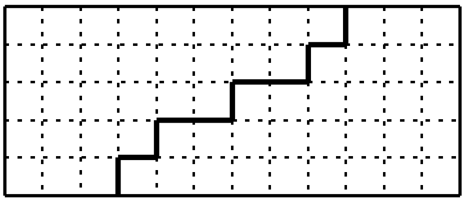
243. zīm.



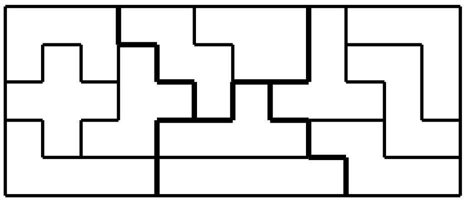
244. zīm.

Kuras barjeras “pārvarēšana” no jums prasīja lielāku pacietību?

5.22. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumu ar 245. zīm. parādīto barjeru.

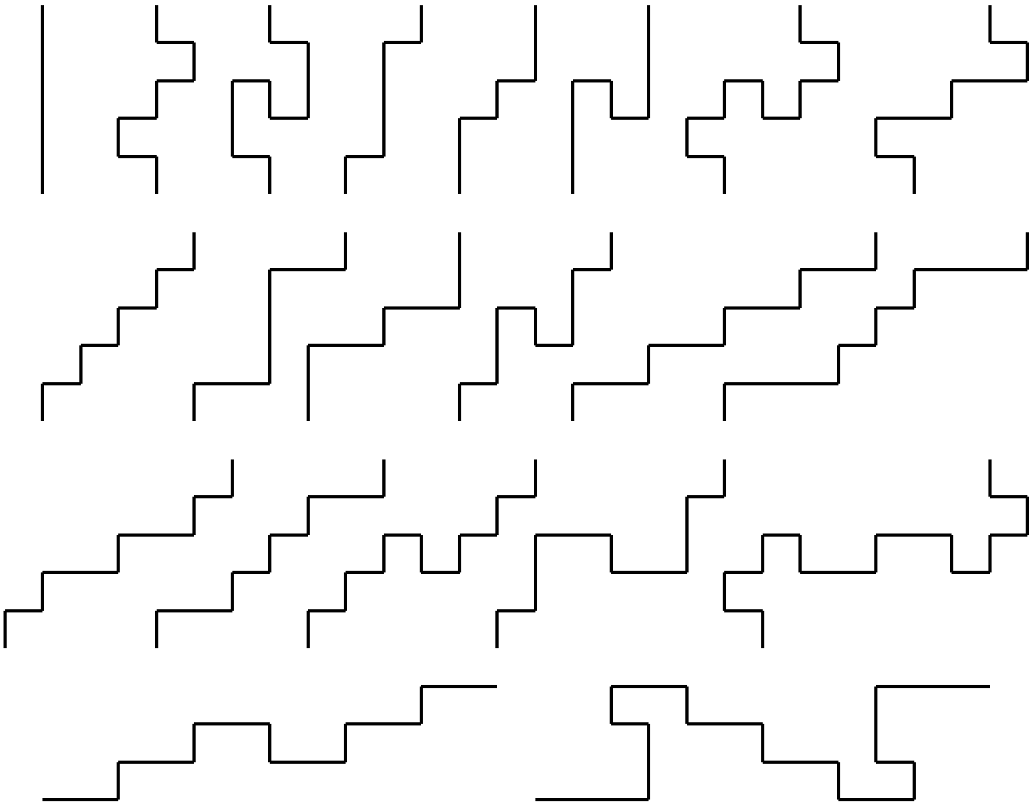


245. zīm.



246. zīm.

Sniegsim īsu kopsavilkumu par taisnstūra 5×12 sadalīšanas iespējām divās vienādās no pentamino saliekamās daļās. Šim nolūkam der 21 barjera, sk. 247. zīm.



247. zīm.

Pēdējās divas barjeras savieno taisnstūra 5×12 īsākās malas. Sešām barjerām (1., 6., 8., 14., 15. un 20.) pentamino sadalījumi nosakāmi viennozīmīgi, bet divām (15. un 20.) viennozīmīgi nosakāmi pat paši salikumi. Pieņemsim, ka kastītē 5×12 jānostiprina viena no šīm barjerām. Kuru barjeru vajadzētu izvēlēties, lai iegūtu iespējami grūtāku un "skaistāku" kastītes aizpildīšanas uzdevumu. Manuprāt, šajā ziņā piemērotākās ir 1. un 15. barjera. Dažos taisnstūra 5×12 salikumos var izdalīt vienlaicīgi divas apskatāmā tipa barjeras, sk. 239. un 357. zīm.

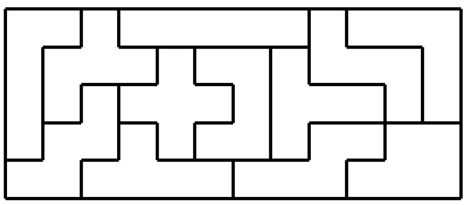
Vēl viens salikums ar divām citām atdalošajām līnijām ir parādīts 246. zīm.

5.23. uzdevums. Atrast tādu taisnstūra 5×12 salikumu, kurš sadalās divās vienādās daļās, ja zināms, ka viena no šīm daļām ir salikta no pentamino X, W, T, F, L un P.

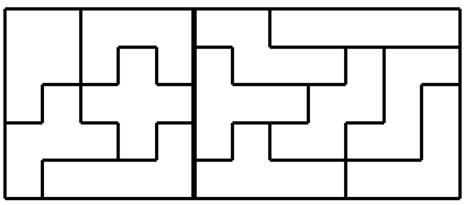
Šāda tipa uzdevumi, kur dotajam pentamino sadalījumam jāpiemeklē piemērota barjera, ir visai sarežģīti, it īpaši, ja iepriekš nav zināms pieļaujamo barjeru saraksts, sk. 247. zīm.

5.24. uzdevums. Vai dažādām barjerām, kuras taisnstūri 5×12 sadala divās vienādās daļās, vienmēr atbilst dažādi pentamino sadalījumi?

Cik simetrisku polimino var izdalīt taisnstūra 5×12 salikumos? Vai iespējams pārspēt 5.11. uzdevuma atbildē doto rezultātu? Aplūkosim 248. - 249. zīm. redzamos salikumus.



248. zīm.



249. zīm.

Pirmajā no tiem var izdalīt 10 simetriskus n-mino ar 5<n<12, proti, (X,Y), (U,T), (X,U,T), (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W), (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W,T), (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W,U), (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W,X), (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W,X,U), (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W,X,T) un (L,F,I,Z,V,P,N,Y,W,U,T).

5.25. uzdevums. Izdalīt 11 simetriskus n-mino (5<n<12) 249. zīm. parādītajā salikumā.

5.26. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumu, kurā var izdalīt trīspadsmit simetriskus n-mino, ja 5<n<12.

5.27. uzdevums. Vai eksistē taisnstūra 5×12 salikums, kurā var izdalīt četrpadsmit simetriskus n-mino, ja 5<n<12?

5.3. **Četri uzdevumi par iekšējiem pentamino**

Vai katrs pentamino var būt taisnstūra 5×12 salikuma iekšēja figūra? Cik daudz iekšēju pentamino var saturēt taisnstūra 5×12 salikums? Vienlaicīgi trīs iekšējus pentamino – X, U un T satur 248. zīm. redzamais salikums. Savukārt 249. zīm. attēlotais salikums satur citus trīs iekšējus pentamino: X, T un W. No 239. un 246. zīm. iegūstam, ka par iekšējiem pentamino var būt arī Y, P vai F.

5.28. uzdevums. Vai iespējams taisnstūra 5×12 salikums ar **četriem iekšējiem** pentamino?

5.29. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumu ar trīs iekšējiem pentamino V, N un Z.

5.30. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumu ar trīs iekšējiem pentamino L, W un T.

5.31. uzdevums. Vai eksistē taisnstūra 5×12 salikums ar iekšējo pentamino I?

Atzīmēsim, ka četri ir maksimālais iekšējo pentamino skaits, ko vispār var saturēt taisnstūra salikums, bet vispārīgajā gadījumā labākais rezultāts – polimino salikums ar sešiem iekšējiem pentamino – ir ietverts 2.31. uzdevumā.

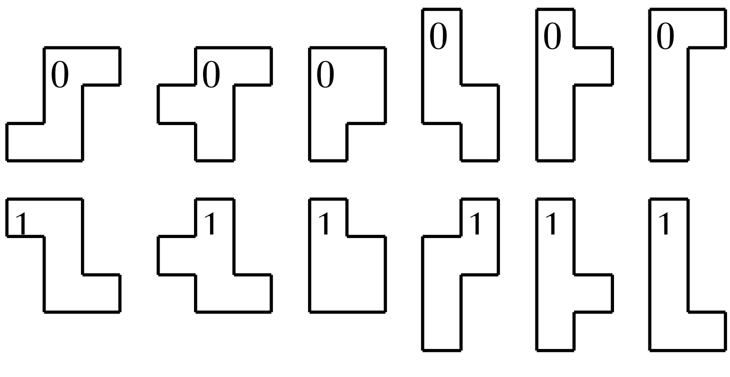
6. nodaļa
PENTAMINO AR FIKSĒTU PUSI

Risinot iepriekšējo nodaļu uzdevumus, mēs varējām izmantot jebkuru no divām pentamino "pusēm", citiem vārdiem sakot, jebkuru pentamino drīkstējām apgāzt. Turpretī šajā nodaļā pieļaujams izmantot tikai fiksēto (norādīto, uzdoto, izvēlēto) pentamino pusi. Sešiem simetriskajiem pentamino I, T, U, V, W un X, kuru abas puses ir līdzvērtīgas (tās nav atšķiramas no saviem spoguļattēliem), ierobežojums – nemainīt pentamino pusi – nav būtisks. Pārējiem sešiem pentamino F, L, N, P, Y un Z abas puses nav līdzvērtīgas – tās nesakrīt ar saviem spoguļattēliem. Ievērosim, ka arī simetriskām figūrām abas puses var nebūt līdzvērtīgas (starp pentamino tāds vienīgais ir Z). Turpmāk pentamino ar fiksētu pusi apzīmēšanai lietosim saīsinātu pierakstu **s-pentamino**.

Grāmatā [17] ir doti 30 pentamino uzdevumi. Viens no tiem attiecas uz s-pentamino: *Nometiet nejauši divpadsmit pentamino uz galda. Tad izveidojiet taisnstūri 6×10, neapgāžot nevienu no pentamino.* Tā kā taisnstūri 6×10 var salikt ļoti daudzos veidos (2339), nav pārsteidzoši, ka šim uzdevumam vienmēr eksistēs atrisinājums. Turpmāk ir aplūkoti analoģiski uzdevumi par taisnstūru 4×15 un 5×12 salikšanu no s-pentamino.

6.1. Taisnstūris 4×15

Te pierādīsim, ka taisnstūri 4×15 var salikt no jebkuriem s-pentamino. Tā kā sešiem pentamino Z, F, P, N, Y un L to puses var izvēlēties 2·2·2·2·2·2=64 veidos, tad pietiek uzrādīt 64 taisnstūra 4×15 p-salikumus, kuri izsmeļ šīs 64 iespējas. Katru s-pentamino pusi apzīmēsim ar "0"vai "1"saskaņā ar 250. zīmējumu.

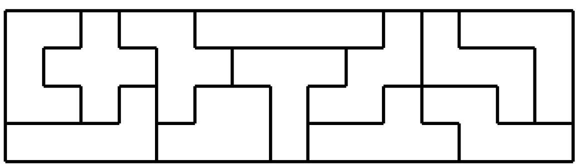


250. zīm.

Ievērojamajam taisnstūra 4×15 salikumam, sk. 236. zīm., atbilst šādas pentamino puses s(·): s(Z)=0, s(F)=1, s(P)=s(N)=s(Y)=s(L)=0 jeb īsākā pierakstā “010000”. Te un turpmāk šīs nodaļas ietvaros tiek uzskatīts, ka pentamino secība ZFPNYL ir fiksēta. Tā kā no taisnstūra p-salikuma ar s(Z)=1 var iegūt (piemēram, “apgāžot” doto salikumu) šī paša taisnstūra p-salikumu ar s(Z)=0, tad faktiski pietiek uzrādīt 32 salikumus, kuriem s(Z)=0, bet s(F), s(P), s(N), s(Y), s(L) sakrīt attiecīgi ar 0 vai 1. No 236. zīm. redzamā salikuma, ņemot vērā, ka tajā var izdalīt trīs simetriskus fragmentus: LU, FX, NYTV, uzreiz var iegūt 8 taisnstūra 4×15 salikumus, kuri raksturojas ar šādiem skaitļiem:

Z	F	P	N	Y	L
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1

6.1. uzdevums. Taisnstūra salikums, sk. 251. zīm., satur 4 simetriskus fragmentus LU, FX, NY, IT bez kopējiem pentamino. Cik salikumu ar s(Z)=0 var iegūt no šī salikuma, izdarot **elementārpārveidojumus** tā simetriskajos fragmentos (t.i., fragmentam piederošo pentamino apgāšanu).



251. zīm.

6.2. uzdevums. Atrast taisnstūra 4×15 tādu salikumu ar s(Z)=0, s(N)=0, s(Y)=1, kurš satur divus simetriskus attiecīgi ar (L,W) un (F,U,V) pārklātus fragmentus.

6.3. uzdevums. Atrast taisnstūra 4×15 tādu salikumu ar s(Z)=0, s(P)=s(N)=1, s(Y)=0, kurš satur simetriskus attiecīgi ar (L,U) un (F,X) pārklātus 10-mino.

6.4. uzdevums. Vai eksistē taisnstūra 4×15 salikums ar s(Z)=s(P)=s(N)=0, s(Y)=1, kurš satur simetriskus attiecīgi ar (L,U) un (F,X) pārklātus 10-mino?

Lasītāju ērtībai rezultātus par taisnstūra 4×15 saliekamību no pentamino ar fiksētu pusi apkoposim tabulā. Tās ailē “zīm.”dota norāde uz to zīmējumu, kurā atrodams atbilstošais salikums vai arī no kura šis salikums iegūstams ar elementāriem pārveidojumiem (ar simetrisku figūru “apgāšanu”).

Nr.	**FPNYL**	**zīm.**	**Nr.**	**FPNYL**	**zīm.**
0	00000	236	16	10000	236
1	00001	236	17	10001	236
2	00010	346	18	10010	346
3	00011	346	19	10011	346
4	00100	251	20	10100	251
5	00101	251	21	10101	251
6	00110	236	22	10110	236
7	00111	236	23	10111	236
8	01000	251	24	11000	251
9	01001	251	25	11001	251
10	01010	371	26	11010	371
11	01011	371	27	11011	371
12	01100	232	28	11100	232
13	01101	232	29	11101	232
14	01110	251	30	11110	251
15	01111	251	31	11111	251

5. tabula

Der uzsvērt, ka attiecībā uz salikumu skaitu pentamino puses nav līdzvērtīgas. Tā, piemēram, ar s-pentamino “000000” taisnstūri 4×15 var salikt desmit dažādos veidos, bet ar “001000” – deviņos. Problēma, kurām pentamino pusēm atbilst visvairāk un kurām vismazāk taisnstūra (vai kādas citas p-figūras) salikumu, cik zināms, nav pētīta.

6.2. Taisnstūris 5×12

Pierādījums, ka šo taisnstūri var salikt no katriem s-pentamino, ir ietverts septiņu zemāk piedāvāto uzdevumu atrisinājumos.

<u>6.5. uzdevums.</u> Atrast taisnstūra 5×12 salikumu ar s(Z)=s(N)=0, s(Y)=1, kurš satur trīs simetriskus 10-mino, kas sastāv attiecīgi no (F,T), (L,I) un (P,W).

<u>6.6. uzdevums.</u> Atrast taisnstūra 5×12 tādu salikumu ar “011101”, kurš satur trīs simetriskus 10-mino, kas sastāv attiecīgi no (F,X), (L,U) un (N,Y).

6.7. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 tādu salikumu ar "011001", kurš satur trīs simetriskus attiecīgi ar (F,X), (L,U) un (N,Y) pārklātus fragmentus.

6.8. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumus ar "000101" un "010101".

6.9. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumus ar "000100" un "010100".

6.10. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumus ar "000110" un "000111".

6.11. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×12 salikumus ar "010110" un "010111".

Ar datora palīdzību ir atrasti 29 taisnstūra 5×12 salikumi ar s-pentamino "000100", 20 salikumi – ar "000110" un tikai 16 – ar "010110". Turklāt starp pēdējiem 16 salikumiem nav tādu, kuros pentamino X pārklātu taisnstūra 5×12 pirmo divu kolonnu rūtiņas.

5×12 salikumu tabula ar s-pentamino

Nr.	**FPNYL**	**zīm.**	**Nr.**	**FPNYL**	**zīm.**
0	00000	372	16	10000	372
1	00001	372	17	10001	372
2	00010	372	18	10010	372
3	00011	372	19	10011	372
4	00100	375	20	10100	375
5	00101	374	21	10101	374
6	00110	376	22	10110	377
7	00111	376	23	10111	377
8	01000	373	24	11000	373
9	01001	373	25	11001	373
10	01010	371	26	11010	371
11	01011	372	27	11011	372
12	01100	366	28	11100	366
13	01101	366	29	11101	366
14	01110	373	30	11110	373
15	01111	373	31	11111	373

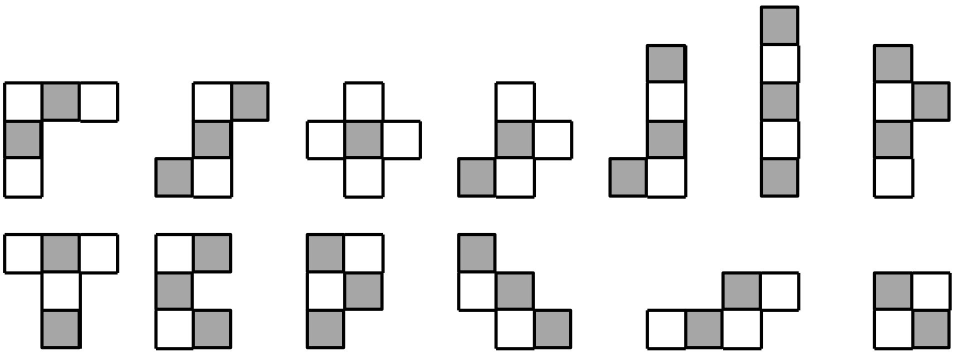
6. tabula

Atšķirībā no taisnstūra 4×15 te visas 32 iespējas ir izsmeltas ar septiņu taisnstūra 5×12 "bāzes" salikumu palīdzību. Būtu vēlams zināt, kāds ir minimālais "bāzes" salikumu skaits taisnstūrim 5×12 vai 6×10

Uzdevums par taisnstūra 6×10 salikšanu ar jebkuriem s-pentamino ir vienkāršāks. To atrisiniet patstāvīgi.

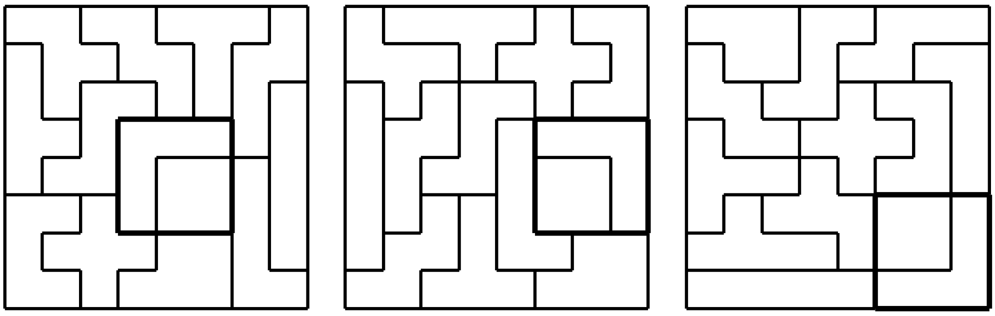
6.3. Par Djudenī uzdevumu

Henrijs Ernests Djudenī (1857.-1930.) ir sarakstījis vairākas grāmatas, sastādījis simtiem pirmšķirīgu uzdevumu. Pirmā Djudenī grāmata "Kenterberijas atjautības uzdevumi" iznāca 1907. gadā. Tajā ir atrodams beletristikas formā izklāstīts uzdevums par sasisto šaha galdiņu [19, 111.-113. lpp.]. Starp diviem prinčiem izcēlies ķīviņš, kura gaitā viens princis triecis šaha galdiņu pret sava pretinieka galvu. Gadījies tā, ka galdiņš saplīsis 13 daļās, tādās, kā parādīts 252. zīm. Redzams, ka šīs daļas nav nekas cits kā viens tetramino un 12 dažādi pentamino, turklāt ar fiksētu pusi. Tiek uzskatīts, ka Djudenī uzdevums par šaha galdiņa salikšanu no 252. zīm. parādītajām daļām ir pirmais publicētais uzdevums par pentamino (vai pat polimino).



252. zīm.

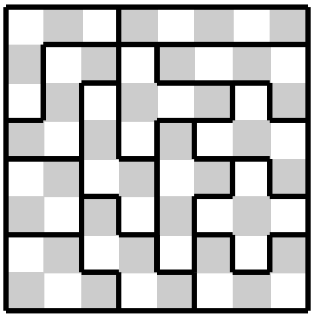
M. Gardnera grāmatā [4, 114. lpp.] dota maldinoša informācija par to, ka *Djudenī uzdevumam atrisinājums eksistē jebkuram kvadrāta izvietojumam.* Apgalvojums iegūts no 253. zīm. parādītajiem kvadrāta 8×8 trīs salikumiem (tie ievērojami ar to, ka izceltā fragmenta 3×3 ietvaros tetramino 2×2 var izvietot 4 dažādos stāvokļos, jo šaha galdiņu var griezt kā veselu un atspoguļot, tāpēc viegli redzēt, ka kvadrātiskais tetramino var atrasties jebkurā galdiņa vietā).



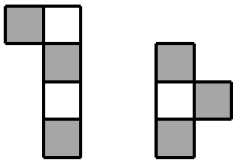
253. zīm.

Šajos salikumos nav ievērotas dotās pentamino puses. Piemēram, pentamino Z ir ņemts ar vienu un to pašu pusi (s(Z)=0) visos trijos salikumos, bet pentamino P – nē. Jau no tā vien var secināt, ka Gardners orģinālā Djudenī uzdevuma vietā ir aplūkojis citu, proti, ***neiekrāsota*** kvadrāta salikšanas uzdevumu. Vai kaut viens no 253. zīm. dotajiem salikumiem pēc attiecīgas iekrāsošanas derēs kā Djudenī uzdevuma atrisinājums? Ņemot vērā 252. zīm. doto iekrāsojumu, viegli saprast, ka nederēs. Visos trīs salikumos pentamino W un Z saskarsies ar vienādi iekrāsotām rūtiņām.

Grāmatā [19, 273. lpp.] dots šāds Djudenī uzdevuma atrisinājums, sk. 254. zīm., bet bez norādēm, vai tas ir vienīgais.



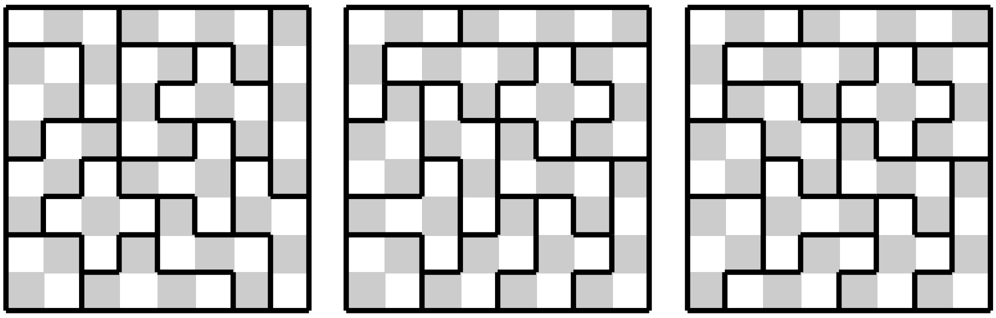
254. zīm.



255. zīm.

Sastādīt uzdevumus par šaha galdiņa salikšanu no iekrāsotiem polimino nav nemaz grūti. Pietiek atrast kādu vienu kvadrāta 8×8 pārklājumu ar neiekrāsotiem polimino un pēc tam to attiecīgi iekrāsot. Droši vien, Djudenī savu uzdevumu ir sastādījis tieši pēc šīs taktikas, nerūpējoties par atrisinājuma unitāti.

Saskaņā ar G. Radziņa sastādīto programmu eksistē 376 kvadrāta 8×8 pārklājumi ar 252. zīm. dotajiem s-polimino (neņemot vērā iekrāsojumu). Četri no tiem atbilst 252. zīm. redzamajam iekrāsojumam jeb der par Djudenī uzdevuma atrisinājumu. Viens atrisinājums jau uzrādīts 254. zīm., bet pārējie trīs – 256. zīm.



256. zīm.

Djudenī uzdevuma aprakstā, kas dots grāmatā [17, 56. lpp.], manuprāt, ir ieviesusies tehniska kļūda. Divi pentamino – L un P – tur ir tādi kā 255. zīm., bet visi pārējie – kā 252. zīm. Taču dotais atrisinājums (ar precizitāti līdz pagriešanai) sakrīt ar 254. zīm. doto salikumu.

Pastāv arī versija, ka pentamino ir iekrāsoti no abām pusēm. Tad šaha galdiņa salikšanā varētu izmantot abas pentamino puses un iegūt vēl citus Djudenī uzdevuma atrisinājumus. Kaut gan Djudenī formulējums neizslēdz šādu iespēju, maz ticams, ka pats Djudenī to būtu pieļāvis. Starp citu, daudzi Djudenī uzdevumi pieļauj neviennozīmīgu skaidrojumu. Grāmatā [20, 240. lpp.] kā attaisnojums dots šāds (šķiet, tulkotāja) viedoklis: *Ja katrā atjautības uzdevumā būtu jāatsakās no tā, kas pieļauj neviennozīmīgu skaidrojumu, tad tie pārblīvētos ar nosacījumiem. Labāk atstāt kaut ko līdz galam nepasacītu (protams, ja runa nav par olimpiādes uzdevumiem).*

Vai šaha galdiņu var salikt no 252. zīm. dotajām figūrām, ja diviem pentamino L un P maina puses, precīzāk, ja šo pentamino vietā ņem tādus kā 255. zīmējumā?

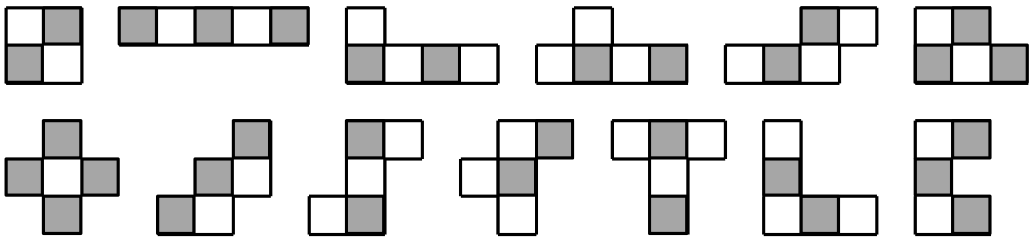
Lai gan apskatāmās figūras apmierina nepieciešamos nosacījumus – 32 rūtiņas ir iekrāsotas pēc šaha galdiņa principa – tomēr no tām (saskaņā ar datorpārbaudi) šaha galdiņš nav saliekams. Cik zināms, problēma par pietiekamo nosacījumu atrašanu nav risināta.

<u>6.12. uzdevums.</u> Vai 12 pentamino un tetramino 2×2 var iekrāsot tā, lai no tiem šaha galdiņu varētu salikt vismaz piecos veidos? Atcerēsimies, ka Djudenī uzdevumam bija 4 atrisinājumi.

<u>6.13. uzdevums.</u> Cik veidos varētu salikt šaha galdiņu no 252. zīm. redzamajām figūrām, ja mainītu pusi tikai figūrai P?

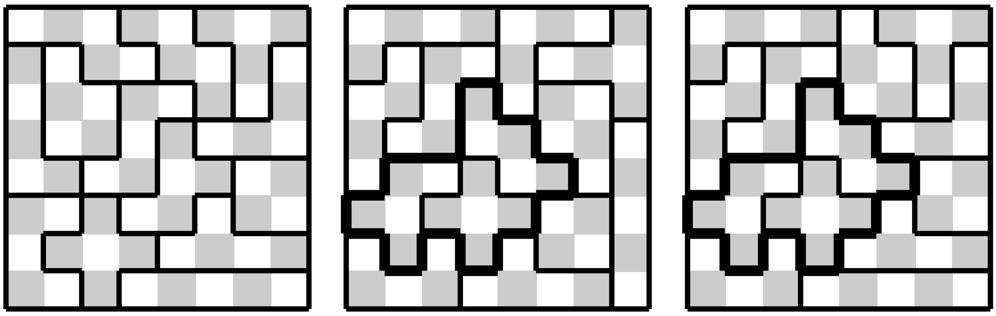
Vai Djudenī uzdevumu var uzlabot tā, ka tam būs tikai viens atrisinājums? Atbildi uz šo jautājumu var iegūt, risinot nākamo uzdevumu.

<u>6.14. uzdevums.</u> Salieciet šaha galdiņu no 257. zīm. dotajām figūrām!

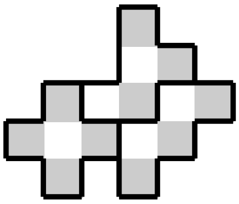


257. zīm.

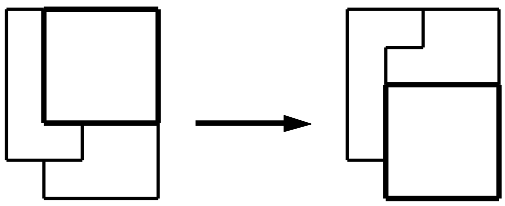
Problēma, kādu maksimālo šaha galdiņa salikumu skaitu m var iegūt, atbilstoši iekrāsojot 12 pentamino un tetramino 2×2, manuprāt, nav pētīta. Labam programmētājam tā nebūtu pārāk ciets rieksts. Papildinot 6.12. uzdevuma risinājumu ar 258. zīm. dotajiem salikumiem, iegūsim, ka $m \geq 10$, jo izceltajā fragmentā pentamino W, X un F var izvietot vēl tā, kā parādīts 259. zīm.



258. zīm.



259. zīm.



260. zīm.

<u>Piezīme</u> par klasisko uzdevumu, kurā jāpierāda, ka kvadrātu 8×8 var salikt no 12 pentamino un tetramino 2×2 neatkarīgi no tā, kuras 4 rūtiņas pārklāj tetramino. Gardnera grāmatā [4] dotie trīs salikumi (sk. 253. zīm.), uz kuriem balstās vajadzīgais pierādījums, ir "veiksmīgāki" nekā uzrādītie grāmatās [1,17]. Pēc būtības pietiek tikai ar diviem pirmajiem 253. zīm. attēlotajiem pārklājumiem, jo salikumu, kad kvadrāts 3×3 izvietots stūrī, var iegūt uzreiz no vidējā salikuma pēc 260. zīm. parādītās shēmas.

Būtu vēlams noskaidrot, kā jāiekrāso pentamino, lai no tiem varētu salikt visvairāk (vismazāk) tādu taisnstūru, kuri ir iekrāsoti pēc šaha galdiņa principa. Cik zināms, šī interesantā problēma nav analizēta. Tā varētu būt piemērota tematika nelielam pētījumam, izmantojot datoru.

Uzdevumiem par šaha galdiņa salikšanu ir veltīts speciāls krājums:
Compendium of checkerboard puzzles, by J. Slocum and J. Haubrich,
kurš pirmoreiz publicēts 1983. g. Tajā ir atrodami vairāki uzdevumi, kuros izmanto visus 12 pentamino ar fiksētu pusi. Daudzi uzdevumi ir realizēti kā matemātiskās rotļlietas, bet reti kura no tām matemātiskā satura ziņā būtu saucama par pirmšķirīgu, t.i., izstrādātu tiktāl, ka vairs nebūtu uzlabojama (piemēram, pēc atrisinājumu skaita).

7. nodaļa.
VIENĀDI PENTAMINO UZ ŠAHA GALDIŅA

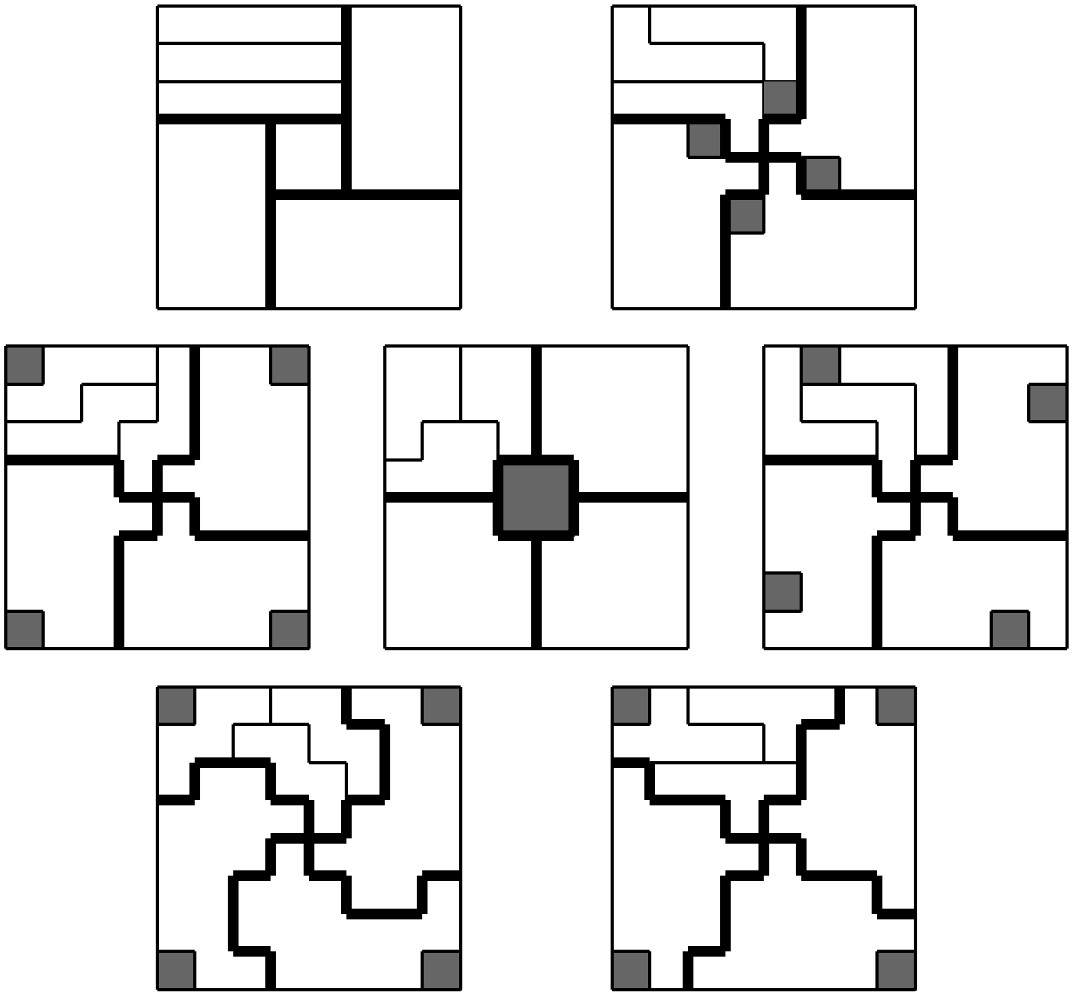
Šajā nodaļā risināsim problēmu: cik vienādu pentamino var izvietot uz šaha galdiņa? Precīzāk, katram pentamino – F, I, …, Z – noteiksim maksimālo kopiju skaitu – M(F), M(I), …, M(Z) –, kuras visas var izvietot bez pārklāšanās uz šaha galdiņa 8x8. Lai novērstu divdomības, vēl precizēsim, ka katrs pentamino pārklāj tieši piecus šaha galdiņa lauciņus.

Viegli saskatīt, ka šo problēmu var risināt no "otra gala", t.i., ņemt kvadrātu 8x8 un censties izgriezt no tā maksimāli daudz vienādu pentamino.

Ievērosim, ka jebkuram pentamino ir spēkā novērtējums M <=12, bet vai šis absolūtais rekords M=12 ir sasniedzams? Ja ir, tad kādiem pentamino? Pirms iepazīties ar turpmāko tekstu, pamēģiniet uzstādīt savus personīgos rekordus šaha galdiņa pārklāšanā.

Pentamino, kuriem M=12

Izrādās, ka pentamino "rekordistu" ir vairāk nekā puse no 12 esošajiem. Lūk, šie "rekordisti": I, L, N, P, V, W un Y! Atbilstošo konstrukciju, sk, 7.1. zīm. ,atrašana prasa zināmu atjautību un var noderēt kā konkursu vai olimpiāžu uzdevumi skolēniem.

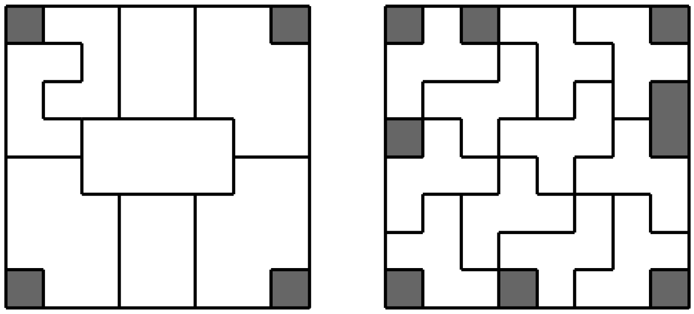


7.1. zīm.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai.
<u>7.1. uzdevums</u>. Salikt kvadrātu 8x8 no 12 pentamino L un kvadrāta 2x2.
<u>7.2. uzdevums</u>. No šaha galdiņa izgriezts “stūris” ar izmēriem 2x2. Sadalīt atlikušo daļu 12 vienādos pentamino.
<u>7.3. uzdevums</u>. Pierādīt, ka šaha galdiņu vienmēr var sagriezt 12 pentamino un vienā tetramino, neatkarīgi kādu tetramino izvēlas. (Atrodiet elegantu risinājumu, t.i., tādu 10 pentamino P izvietojumu, ka uz atlikušās šaha galdiņa daļas var izvietot vēl 2 pentamino P un vienu jebkuru tetramino.)

Pentamino, kuriem M=11

Ir tikai divi pentamino – F un U, kuru 11 kopijas, bet ne vairāk, iespējams izvietot uz šaha galdiņa, sk. 7.2. zīm. Konstrukciju ar M(U)=11 atrast izdodas samērā ātri, bet reti kuram skolēnam pietiek pacietības atrast konstrukciju ar M(F)= 11, pat tad, kad iepriekš tiek pateikts, ka tāda pastāv.



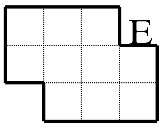
7.2. zīm.

<u>Piezīme</u>. Uzdevums par 11 pentamino F izvietošanu uz galdiņa 8x8 pazīstams ar nosaukumu *Jamamoto uzdevums*, sk žurnālu "Zinātne un Dzīve" (krievu val.), 1996, Nr.10, 41.lpp., kur tas ievietots rubrikā *Psiholoģiskais praktikums*.

<u>7.4. uzdevums</u>. Pierādīt, ka 12 pentamino U nav iespējams izvietot uz šaha galdiņa 8x8.

Uzdevumu var risināt ar pilnās pārlases metodi, taču ir krietni racionālāks risinājums. Vispirms ievērosim, ka 12 pentamino U izvietošanas uzdevumu var aizstāt ar šādu uzdevumu, kur jāizvieto *tikai* 8 figūras.

<u>7.5. uzdevums</u>. Pierādīt, ka uz šaha galdiņa 8x8 nevar izvietot četrus pentamino U un četras 7.3. zīm. parādītās figūras E.



7.3. zīm.

Savukārt šo uzdevumu aizstāsim ar trīs šādu apgalvojumu pierādīšanu.

Uz galdiņa 8x8 nav iespējams izvietot:

1) četras E un četrus taisnstūrus 2x3;

2) piecas E un divus taisnstūrus 2x3;

3) sešas E.

Pirmajā gadījumā norādīto figūru kopējais laukums ir tieši 64 rūtiņas, t.i., visām kvadrāta 8x8 rūtiņām jābūt noklātām. Ja figūru E izmantotu kvadrāta r-rūtiņu (robežrūtiņu) pārklāšanā, tad vismaz viena r-rūtiņa nebūtu pārklājama. Bet četru taisnstūru 2x3 nepietiek, lai pārklātu visas 28 kvadrāta 8x8 r-rūtiņas.

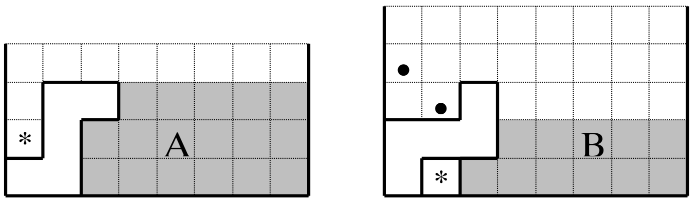
Otrajā gadījumā jāpārklāj 62 rūtiņas. Tas nozīmē, ka jāpārklāj vismaz 26 r-rūtiņas. Robežrūtiņu pārklāšanā var izmantot ne vairāk kā divas E, jo katra E dod vismaz vienu nepārklājamu r-rūtiņu. Ar divām E var pārklāt ne vairāk kā 10, bet ar diviem taisnstūriem 2x3 ne vairāk kā 8 r-rūtiņas, t.i., kopā var pārklāt lielākais tikai 18 r-rūtiņas.
Trešajā gadījumā jāpārklāj 60 rūtiņas. Tas nozīmē, ka jāpārklāj vismaz 24 no 28 kvadrāta r-rūtiņām. Robežrūtiņu pārklāšanā var izmantot ne vairāk kā četras E, jo katra E dod vismaz vienu nepārklājamu r-rūtiņu. Bet četru E nepietiek, lai pārklātu 24 kvadrāta 8x8 r-rūtiņas.
7.6. uzdevums. Pierādīt, ka uz šaha galdiņa 8x8 nav iespējams izvietot 5 figūras E (bez pārklāšanās). Ievērosim, ka no šejienes izriet apgalvojumu 2) un 3) pareizība.
7.7. uzdevums. Pierādīt, ka 12 pentamino F nevar izvietot pieļaujamā veidā uz šaha galdiņa 8x8.

Lai saīsinātu pierakstus, lietosim apzīmējumu **m(F)**, kas nozīmē **minimālo** rūtiņu skaitu, kuras paliek brīvas, pārklājot ar F aplūkojamo figūru. Tad vajadzīgais novērtējums $M(F) < 12$ ir līdzvērtīgs novērtējumam $m(F) > 4$, kurš izriet no šādiem diviem viegli pārbaudāmiem apgalvojumiem.
F1. Ja pentamino F pārklāj kvadrāta 8x8 stūra rūtiņu, tad jebkurai kvadrāta pusei 4x8, kas satur šo rūtiņu, ir spēkā novērtējums $m(F) >= 3$.
F2. Kvadrāta pusei 4x8 ar divām nepārklātām stūra rūtiņām ir spēkā novērtējums $m(F) >= 3$.

Pentamino, kuriem M=10

Ir divi pentamino, kuru 10 kopijas, bet ne vairāk, var izvietot uz šaha galdiņa 8x8. Tie ir T un Z.

Z1. Ja pentamino Z pārklāj kvadrāta 8x8 stūra rūtiņu, tad jebkurai kvadrāta pusei 4x8, kas satur šo rūtiņu, ir spēkā novērtējums $m(Z) >= 5$. Ir divi stūra rūtiņas pārklāšanas veidi, sk, 7.4. zīm.

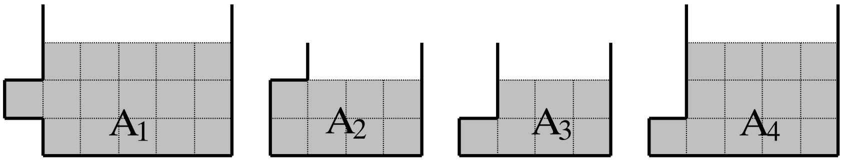


7.4. zīm.

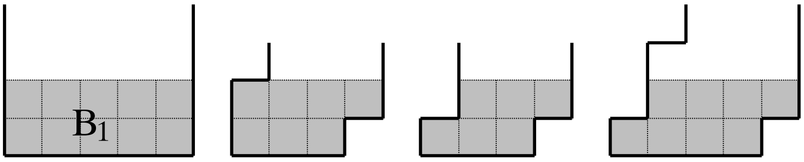
Rūtiņa, kas atzīmēta ar “*” un viena no rūtiņām, kas atzīmēta ar “.” nav pārklājama. Tāpēc pietiek pierādīt, ka apgabalos A un B nepārklāto rūtiņu skaitam ir spēkā novērtējumi

$$m(Z,A) >= 4, \quad m(Z,B) >= 3.$$

Pirmais novērtējums izriet no nevienādībām $m(Z,A_i) >=3$, $i=1,2,3,4$, sk. 7.5. zīm. Savukārt šīs nevienādības izriet no tā, ka 7.6. zīm. ietonētajos apgabalos ir spēkā $M(Z) >=2$.



7.5. zīm.

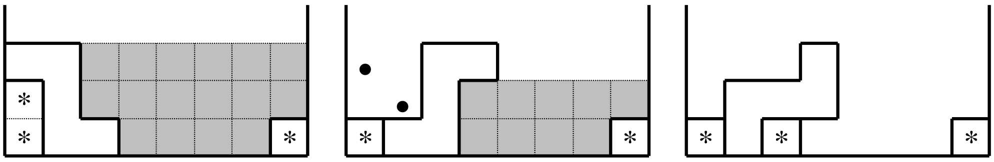


7.6. zīm.

Līdzīgi iegūst novērtējumu *ķēdīti* : $m(Z,B)>=3$, $m(Z,B_i) >=2$, kur $B_2=A_2$, sk. 7.5.- 7.6. zīm.

Z2. Ja pentamino Z pārklāj stūra rūtiņai blakus esošo rūtiņu b1 (šaha notācijā), tad kvadrāta 8x8 apakšējā pusē ir spēkā novērtējums $m(Z) >=5$.

Ņemot vērā apgalvojumu Z1, pietiek izanalizēt 7.7. zīm. parādītos gadījumus.

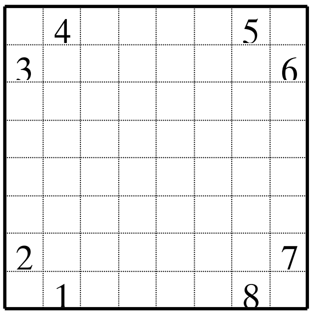


7.7. zīm.

Pārliecinieties patstāvīgi, ka ietonētajos apgabalos ir spēkā vajadzīgais novērtējums $m(Z) >=2$. Trešajā gadījumā, ja ar Z pārklātu rūtiņu g1, uzreiz iegūtu $m(Z) >=5$. Savukārt, ja g1 atstātu brīvu, tad, pārklājot pakāpeniski rūtiņas d1, f1, a2, g3 un d4, iegūtu pieļaujamā veidā nepārklājamas rūtiņas a4 un b4.

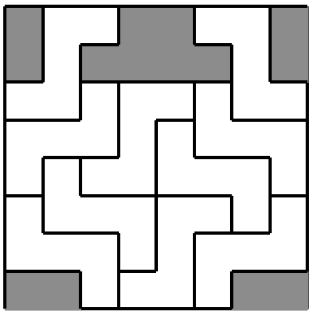
<u>Sekas</u>. $M(Z) <=10$.

Pieņemsim, ka $M(Z) >10$. (Tas nozīmē, ka $M(Z) >=11$ un līdz ar to $m(Z) <=9$.) Tad vismaz viena no rūtiņām 1,2,…,8, sk. 7.8. zīm., ir pārklāta ar Z. Noteiktības dēļ uzskatīsim, ka ar Z ir pārklāta rūtiņa 1.



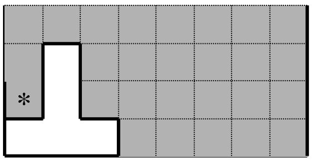
7.8. zīm.

Saskaņā ar Z2 kvadrāta apakšējā pusē ir spēkā novērtējums m(Z) >=5. Ja pentamino Z pārklātu rūtiņu 4 vai 5 , tad arī augšējā pusē būtu spēkā novērtējums m(Z) >=5. Kopā būtu nepārklātas vismaz 10 rūtiņas, kas pretrunā ar to, ka m(Z) <=9. Tātad atliek aplūkot gadījumu, kad rūtiņas 4,5 vienlaicīgi ar tām blakus esošajām rūtiņām netiek pārklātas. Turklāt, ievērojot prasību m(Z) <=9, visām pārējām kvadrāta augšējās puses 4x8 rūtiņām jābūt pārklātām, to skaita arī rūtiņām 3un 6 . Bet šo rūtiņu pārklāšana pēc Z2 dod novērtējumu m(Z) >=5 gan kreisajā, gan labajā kvadrāta pusē, kas pretrunā ar m(Z) <=9. Līdz ar to M(Z) <=10. Kā redzams no 7.9. zīm. M(Z)=10.

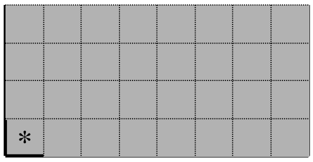


7.9. zīm.

Lai pierādītu, ka M(T)=10, vispirms iegūsim novērtējumus m(T) >=5 *puskvadrātam* 7.10.-7.11. zīm. attēlotajās situācijās.



7.10. zīm.

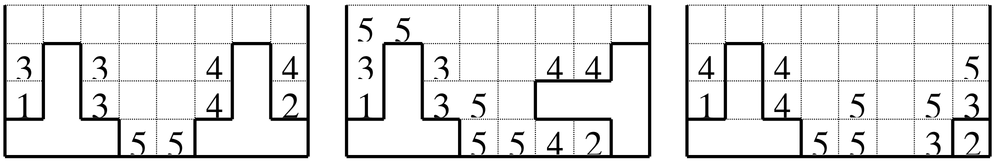


7.11. zīm.

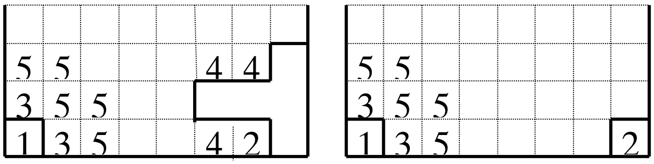
T1. Ja stūra rūtiņa ir pārklāta tā kā 7.10. zīm., tad kvadrāta 8x8 ietonētajā daļā ir spēkā novērtējums m(T) >=5.

T2. Ja stūra rūtiņa netiek pārklāta, tad kvadrāta 8x8 ietonētajā daļā ir spēkā novērtējums m(T) >=5.

Apgalvojuma T1 pareizība izriet no 7.12. zīm. dotās analīzes, jo vismaz viena no rūtiņām, kas apzīmēta ar vienu un to pašu ciparu, nav pārklājama pieļaujamā veidā ar pentamino T. Savukārt apgalvojuma T2 pareizība izriet no 7.13. zīm. un no T1.

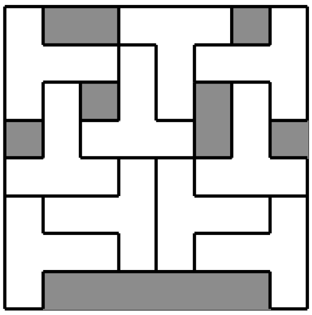


7.12. zīm.



7.13. zīm.

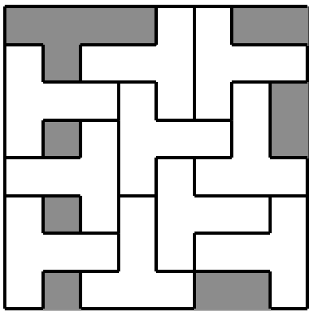
Pārliecinieties patstāvīgi, ka no T1-T2 kā vienkāršas sekas iegūstams novērtējums m(T) >=10 kvadrātam 8x8. Tātad var pārklāt ne vairāk kā 64-10=54 rūtiņas, kas nozīmē, ka M(T) <=10. Tā kā 10 pentamino T uz galdiņa 8x8 izvietot var, sk. 7.14. zīm., tad M(T)=10.



7.14. zīm.

<u>7.8. uzdevums</u>. Izvietot 10 pentamino T uz galdiņa 8x8 tā, ka vienai no galdiņa pusēm 4x8 ir spēkā novērtējums m(T) <=4.

Pirmajā brīdī var rasties iespaids, ka te dotais novērtējums ir pretrunā ar apgalvojumiem T1-T2. Viens no šī uzdevuma atrisinājumiem ir dots 7.15. zīm.



7.15. zīm.

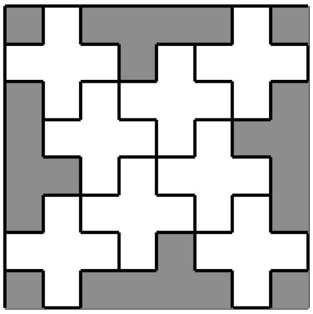
7.9. uzdevums. Vai no 10 pentamino var salikt tādu simetrisku figūru, kura izvietojama uz galdiņa 8x8? (Kā redzams no 7.9. zīm. 10 pentamino Z iespējams izvietot simetriskā veidā uz galdiņa 8x8.)

No visiem pentamino vismazāko skaitli M dod pentamino X.

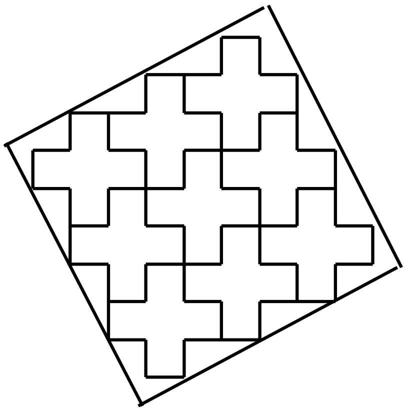
7.10. uzdevums. Pierādīt, ka M(X)=8.

Apgalvojumam ir ļoti īss pierādījums. Ievērosim, ka ar pentamino X var pārklāt lielākais divas no astoņām kvadrāta malai pieguļošajām robežrūtiņām. Tātad no 28 robežrūtiņām paliks nepārklātas vismaz 28-8=20 rūtiņas. Tā kā 9 pentamino X pārklātu 45 rūtiņas, bet 45>64-20, tad uz galdiņa 8x8 pieļaujamā veidā nevar izvietot vairāk nekā 8 pentamino X. Pentamino X izvietojums ar M(X)=8 parādīts 7.16. zīm.

Piezīme. Ja atteiktos no prasības , ka pentamino X malām jābūt attiecīgi paralēlām galdiņa 8x8 malām, tad uz tā varētu izvietot 9 pentamino X, sk. 7.17. zīm.



7.16. zīm.



7.17. zīm.

8. nodaļa.
NEATRISINĀTAS PROBLĒMAS

Tas, ko mēs zinām, ir tik niecīgs
salīdzinājumā ar to, ko nezinām.
Laplasa pēdējie vārdi.

Nepavisam nav izslēgts, ka te ir kāds
noslēpums, kuru mums arī vajadzētu atklāt.
Č. Pīrss.

Neatrisinātas problēmas ir bijušas daudzu ievērojamu matemātikas sasniegumu pamatā. Kādā žurnālā ir uzsvērts, ka faktiski veselām matemātikas disciplīnām par savu eksistenci ir jāpateicas atsevišķām problēmām, kuras "sīksti pretojušās" atrisināšanai.

Vairākas no te piedāvātajam problēmām drīzāk būtu jāsauc par nerisinātām, jo tās nav atrisinātas, manuprāt, tikai tāpēc, ka neviens ar tām nav nopietni nodarbojies. Par dažām ir priekšstats, kā tās varētu atrisināt sadarbībā ar labu programmētāju. Nav izslēgts, ka kāda no šīm problēmām varētu pietuvoties pat tam līmenim, par kuru minēts pirmajā atkāpē. Tāpat nav izslēgts, ka kāda no šīm problēmām "apkaunos" autoru, kurš iedrošinājies pasludināt par neatrisinātu citam gandrīz triviālu vai, kas vēl nepatīkamāk, jau sen atrisinātu uzdevumu. Šai sakarā es esmu pateicīgs S. Golombam, kurš grāmatā [1] ir atvēlējis vietu neatrisinātiem uzdevumiem-"saliņām", kuras spēj "atklāt" pacietīgs skolēns. Šie uzdevumi bija tieši tie, kas man radīja padziļinātu interesi par pentamino problemātiku.

Tagad visi divpadsmit Golomba uzdevumi ir atrisināti. Tie turpmāk ir apzīmēti ar G81 - G92 atbilstoši grāmatā [1] dotajai numerācijai. Pateicoties Albertas universitātes (Kanāda) profesoram E. Liu, kurš man 1994. gada janvārī atsūtīja vēstuli un sava 1986. g. uzrakstītā, bet nepublicētā raksta kopiju, es ieguvu jaunu informāciju Golomba uzdevumu risināšanas vēsturē.

G81. Viens no visilgāk neatrisinātajiem uzdevumiem. Stimuls minētajai vēstulei bija mans žurnālam *Mathematics and Informatics Quarterly* iesniegtais raksts ar 169. zīm. parādītās figūras p-nesaliekamības pierādījumu. Izrādījās, ka vienam no otra neatkarīgi atrastie apskatāmās figūras nesaliekamības pierādījumi (E. Liu [21]) un 4. nodaļā izklāstītais galvenajās līnijās sakrīt.

G82. un G83. uzdevuma atrisinājumus 1975. g. 13. marta vēstulē M. Gardneram ir uzrādījis M. Velšs (M. R. Walsh).

G84. "Neatrisināmība" konstatēta ar datoru, sk. 2. problēmu.

G85. Taisnstūru 3x5 un 5x9 salikumu 1967. g. 4. augusta vēstulē M. Gardneram ir uzrādījis R. Fērbērns (R. A. Fairbairn).

G86. Atrisinājums publicēts žurnālā [23].

G87. Taisnstūru 2x10 un 5x8 vienlaicīgas nesaliekamības pierādījumu satur raksts [24].

G88. Sk. komentārus pie 6. problēmas.

G89. un G90. uzdevuma atrisinājumus 1971.g. 9. jūlija vēstulē M. Gardneram ir uzrādījis A. Garsija (A. A. Garcia).

G91. Vajadzīgos salikumus viens no otra neatkarīgi 1986. g. ir atraduši vairāki risinātāji. Viens atrisinājums, ko E. Liu ieguvis bez datora, ir uzrādīts [21].

G92. Atrisinājums ir publicēts žurnālā [25]. Šis ir vienīgais no 12 uzdevumiem, kas neattiecas uz plaknes pentamino.

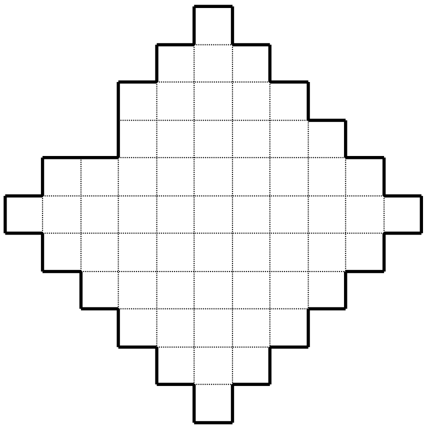
Uzdevumi, kuros jānoskaidro kādas figūras nesaliekamības iespējas žurnālā [26, 101.lpp.] raksturoti tā: *Starp pentamino uzdevumiem ir "neatrisinātu" uzdevumu grupa: uzzīmēta skaista figūra no 60 rūtiņām, taču tajā neizdodas novietot 12 pentamino elementus, bet neviens nav arī pierādījis , ka tie nerisinās.* Tā kā atbildi uz jautājumu par jebkura 60-mino p-saliekamību var samērā ātri iegūt ar datora palīdzību, tad dabiski neviens šāda tipa uzdevums nebūs atrodams starp zemāk formulētajām neatrisinātajām problēmām.

<u>1. problēma</u>. Vai eksistē efektīva metode, ar kuras palīdzību varētu "ātri" noskaidrot tās vai citas figūras p-saliekamību.

<u>2. problēma</u>. Atrast pietiekoši īsu taisnstūru 4x5 un 5x8 vienlaicīgas p-nesaliekamības pierādījumu.

S. Golomba grāmatā [1, 172. lpp.], kā arī vairākos citos vēlāk publicētos darbos, sk., piemēram, [5,12], dotais formulējums : *Salikt no pentamino taisnstūrus 4x5 un 5x8* , kā redzams ir "novecojis". 1991. g. iznākušajā grāmatā jau minēts, ka šos taisnstūrus salikt nav iespējams. Cik saprotams, šis izteikums balstās uz to, ka ar datoru nav atrasts neviens vajadzīgais salikums. Man zināmais taisnstūru pāra (4x5, 5x8) nesaliekamības pierādījums pamatojas uz pilnās pārlases metodes realizāciju. Diemžēl tas ir pārāk garš, nogurdinošs un neinteresants. Risinot šo problēmu , var noderēt informācija, ka no C(12,4) = 495 kombinācijām taisnstūra 4x5 salikšanai derīgas ir tikai 26 četru pentamino kombinācijas, sk. 2, tabulu. Tās ir : WTVP, WLYP, ZVUP, ZVLP, ZVYP, ZLYP, TVNY, TVLP, TILY, TFLY, TLYP, VUIP, VUFL, VULY, VINL, VILP, VLPY, UIFP, UINP, UIYP, UFLY, UFLP, UFYP, UNLP, UFYP un ULYP. Turklāt atsevišķus no šiem 26 gadījumiem var izskatīt ļoti ātri. Piemēram, ar kombinācijas VILP "papildinājumu" UYNTFZWX taisnstūris 5x8 nav saliekams vienkārši tāpēc, ka nav iespējams pārklāt tā 22 robežrūtiņas.

3. problēma. Atrast pietiekoši īsu 261. zīm. attēlotā 60-mino p-nesaliekamības pierādījumu.

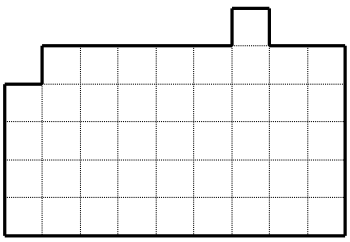


261. zīm.

4. problēma. Atrast pietiekoši īsu taisnstūra 5x10 p-nesaliekamības pierādījumu, ja neizmanto pentamino P un F.
(Visos pārējos 65 gadījumos, kad neizmanto jebkurus divus citus pentamino, taisnstūris 5x10 ir p-saliekams!)

5. problēma. Kādiem $k<12$ eksistē figūra, kuru var salikt no jebkuriem k pentamino?

Pagaidām ir zināmas trīs tādas k vērtības : 11, 10 un 9. Figūra, kuru var salikt no katriem deviņiem pentamino ir parādīta 262. zīm.



262. zīm.

Šī figūra tika atrasta sadarbībā ar G. Radziņu. "Uzbrukums" problēmai, kad $k=8$, pagaidām nav bijis sekmīgs. Maz ticams, ka šo problēmu varētu atrisināt bez skaitļošanas tehnikas. Gadījumā $k=6$ mums būtu jāpārbauda izvēlētās figūras saliekamība, vispārīgi runājot, no $C(12,6)=924$-ām sešu pentamino kombinācijām. Droši vien ne visas pentamino kombinācijas būs derīgas. Dotā problēma iekļaujas vispārīgākā : **izvēlētam k atrast figūru, kurai atbilst visvairāk derīgu pentamino kombināciju.**

6. problēma. Vai eksistē tāda figūra, kuras četras kopijas var vienlaicīgi salikt no pentamino? Citā formulējumā: *Sadaliet 12 pentamino četrās grupās katrā pa trīs elementiem. Atrodiet tādu daudzstūri ar laukumu 15 kvadrāti, kuru var salikt no katras grupas trīs elementiem. Šī uzdevuma atrisinājums nav zināms; no otras puses līdz šim neviens nav pierādījis, ka uzdevums nav atrisināms.* [4, 482. lpp.]

Ja četru kopiju vietā ņemtu trīs-, tad melējamā figūra eksistētu, sk, piemēram, 2.18. uzdevumu.

Iepriekš minētajā vēstulē E. Liu informē, ka ir saņēmis trīs risinājumus uzdevumam G88. Tie visi apliecinot, ka vēlamā konstrukcija nebūs iespējama. Tomēr vēl esot jāpārbauda garais pamatojums. Tiešām, meklējamā figūra neeksistē. Man zināmā pierādījuma, kurš balstās uz pentamino "apbūvēšanas" iespēju ar diviem citiem pentamino analīzi, izklāsts diemžēl aizņemtu pārāk daudz vietas. Šīs problēmas datoranalīze, kas veikta sadarbībā ar A. Grišuli, ir atspoguļota rakstā [27].

Trīs ar pentamino izgatavošanu saistītas problēmas

7. problēma. Kāds ir vismazākais taisnstūris, no kura var izzāģēt visus 12 pentamino, izdarot tikai taisnus iegriezumus?

Protams, te jāievēro dabiska atruna par pentamino U. To izgatavo no iepriekš izzāģēta taisnstūra 2x3, kuru apstrādā atsevišķi, teiksim, ar kaltu. Rekords, vismaz pagaidām, ir 72 laukuma vienības, sk. 2. nodaļu.

Ar šo problēmu cieši saistīta nākamā, kur jāpanāk, lai zāģēšanas procesā rastos vismazāk skaidu (atkritumu).

8. problēma. Kāds var būt visīsākais kopējais iegriezumu garums, no taisnstūra izzāģējot visus 12 pentamino?

Par šo problēmu sk. 2.97. un 2.99. uzdevumu. Interesanti būtu zināt šo divu problēmu atrisinājumus gadījumā, kad taisnstūra vietā ņem izliektu daudzstūri. Zināms, ka daudzstūra laukumu var samazināt vismaz līdz 70,5, sk. 2.101. uzdevumu.

9 problēma. Kāds ir minimālais operāciju skaits, ar kurām no taisnstūra sagataves var izlauzt visus 12 pentamino?

Pieļaujamo operāciju apraksts un daži rezultāti ir doti 2. nodaļā, sk. 2.81, 2.101. un 2.103. uzdevumu. Te iepriekš nav zināms, kāds taisnstūris būs optimālais. Ticams, ka, atrisinot šo problēmu, vienlaicīgi tiks iegūts arī 7. problēmas atrisinājums.

10. problēma. Kādu 60- mino var salikt no pentamino visvairāk veidos?

Taisnstūru klasē visvairāk veidos– 2339 var salikt taisnstūri 6x10. Bet sešstūri, ko iegūst no kvadrāta 8x8, nogriežot tā stūri 2x2 , var salikt 5027 veidos. Salikumu skaits – 5027 droši vien stipri atpaliek no maksimālā skaita. Bez tam optimālais 60-mino, manuprāt, jāmeklē starp nesimetriskām figūrām. Jaunu rekordu iegūšanā te būtiski noderētu speciāli, ļoti ātrdarbīgi algoritmi. Tiesa tādu algoritmu atrašana jau pati par sevi ir problēma. Lūk, ko raksta M. Gardners par kvadrāta 8x8 salikšanu no 12 pentamino un tetramino 2x2: *Neviens nezin, cik pavisam atrisinājumu ir šim uzdevumam, tomēr, kā liekas, to ir vairāk nekā 10000. Dana S. Skota (aspirante– matemātiķe no Prinstonas) 1958. gadā ar ESM palīdzību atrada visus atrisinājumus ar kvadrātu galdiņa centrā. Trīsarpus stundu laikā mašīna izdeva pilnu sarakstu ar 65 atrisinājumiem (atrisinājumi, kurus iegūst vienu no otra ar galdiņa pagriešanu un atspoguļošanu netiek uzskatīti par dažādiem un ietilpst šajā sarakstā kā viens atrisinājums),* [4, 114.–115. lpp.]. Pagājušajos gados ir būtiski palielinājušās ESM iespējas, kā arī notikušas izmaiņas studentu un skolēnu sagatavošanā. Tagad ar šo uzdevumu varētu tikt galā pat skolēns–prasmīgs programmētājs. Starp citu, vēl būdams students, es atradu visus 65 salikumus bez ESM. Tiesa, tikai trešajā pārbaudē, atrodot dažus pazaudētos salikumus, pārliecinājos par grāmatā nosauktā skaitļa "65" pareizību. Šī nogurdinošā aptuveni divu nedēļu ilgā pārbaude ļāva izdarīt dažus secinājumus par algoritmiem, kas noderīgi figūru salikšanas uzdevumos. Šajā grāmatā vairākkārt minētais G. Radziņš noskaidroja, ka uzdevumam par kvadrāta 8x8 salikšanu no 12 pentamino un tetramino 2x2 eksistē 16146 atrisinājumi. Atrisinājumu skaits atkarībā no tetramino 2x2 izvietojuma ir dots 7. tabulā. Tās 1. ailē norādītas ar tetramino pāpklātās kvadrāta 8x8 rūtiņas, bet 2. ailē atbilstošais salikumu skaits.

rij	Salikumu skaits
11	5027
12, 13	3207
14, 15	1288
22, 23	987
23, 34	1662
24, 35	721
33, 44	582
34, 45	768
44, 55	65
Kopā	16146

7.tab.

11. problēma. Vai katram k, 1<=k<=k_{max} , eksistē 60-mino, kuru no pentamino var salikt tieši k veidos.? Te ar k_{max} apzīmēts 10. problēmā minētais optimālās figūras salikumu skaits.

12. problēma. Kādu polimino var salikt no pentamino visvairāk veidos?

Te nav zināms pat meklējamās figūras laukums. Saskaņā ar 2. tabulu taisnstūru klasē optimālais ir taisnstūris 5x10, kura p-salikumu skaits ir 6951. Šī problēma iekļaujas nākamajā.

13. problēma. Katram k (2<=k<=12) atrast visvairāk veidos saliekamu 5k-mino.

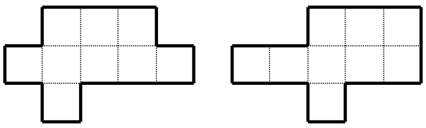
Labākie rezultāti pie k=2 un k=3 ir attiecīgi 7 un 21 salikumi, sk. 2.13. un 2.25 uzdevumu.

14. problēma. Katram k (2<=k<=12) atrast tādu figūru, kuru no vieniem un tiem pašiem k pentamino var salikt visvairāk veidos.

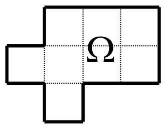
Gadījumā k=12 šī problēma sakrīt ar desmito. Problēmu sarežģī vēl tas, ka iepriekš nav zināms, tieši kādi k pentamino būtu jāizvēlas. Pārsteigumu var sagādāt pat vienkāršākais gadījums: k=2. Daudzi, pārliecinājušies, ka tik "perspektīvas" figūras kā simetriskie 10-mino nav saliekami vairāk kā vienā veidā, secina, ka "1" arī ir maksimālais salikumu skaits. Tomēr tā nav! Sk. 2.1., kā arī 2.12. un 2.29. uzdevumu. 2.1. uzdevuma atbildē doto figūru var salikt divos veidos no pentamino F un N. Atrodiet vēl vienu figūru, ko var salikt divos veidos no citiem diviem pentamino!

15. problēma. Atrast figūru ar vismazāko laukumu, ar kuru var pārklāt jebkuru pentamino.

Polimino klasē iegūtu klasisko uzdevumu [1, 34. lpp.], kuram eksistē divi 263. zīm. parādītie atrisinājumi, sk. arī 2.48.–2.50. uzd. Tomēr meklējamais universālais pārklājs nebūs polimino. Vispirms ievērosim, ka ar 264. zīm. redzamo 8-mino var pārklāt 11 pentamino. Vienīgi pentamino I nevar pārklāt ar Ω. Toties I var uzlikt uz figūras Ω tā, ka šo figūru šķēluma (kopējās daļas) laukums ir lielāks nekā 4. Par to var pārliecināties, piemēram, eksperimentējot ar pietiekami liela izmēra figūrām I un Ω. Tas nozīmē, ka eksistē universāls pārklājs ar laukumu mazāku nekā 9.



263. zīm.



264. zīm.

16. problēma. Atrast figūru ar vismazāko perimetru, ar kuru var pārklāt jebkuru pentamino.

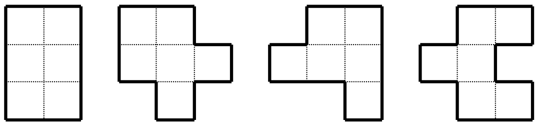
17. problēma. Atrast vienā vienīgā veidā p-saliekamu 60-mino ar vismazāko diametru. (Tā pati problēma, ja meklējamais 60-mino turklāt ir simetrisks.)

18. problēma. Atrast necaurumotu p-saliekamu 60-mino ar vismazāko diametru. (Caurumoto 60-mino klasē minimālais diametrs ir vienāds ar kvadrātsakni no 97.)

19. problēma. Kāds ir vislielākais R, ja katrs 60-mino , kas iekļaujas riņķī ar rādiusu, kurš nepārsniedz R, ir p-saliekams? Tas pats jautājums, ja 60-mino nedrīkst būt caurumots.

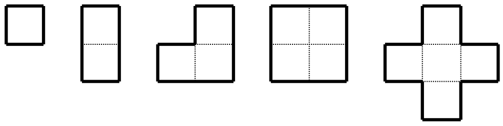
20. problēma. Kādiem skaitļiem n eksistē viens vienīgs n-mino ar minimālo diametru $d_{min}(n)$?

Neder, piemēram, n=6, sk. 265. zīm., kur parādīti četri heksamino ar vienu un to pašu minimālā diametra vērtību.



265. zīm.

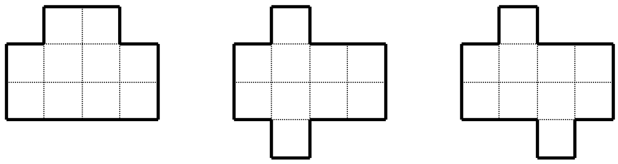
Savukārt, der pirmās piecas n vērtības. Tām atbilstošie polimino ar minimālo diametru ir redzami 266. zīm.



266. zīm.

<u>21. problēma</u>. Kādiem skaitļiem n eksistē viens vienīgs n-mino, kuru var iekļaut riņķī ar minimālo diametru?

Atšķirībā no iepriekšējās problēmas te pirmais nederīgais skaitlis ir n=10. 267. zīm. parādītos trīs 10-mino var iekļaut minimālajā riņķī, kura diametrs ir kvadrātsakne no 20.



267. zīm.

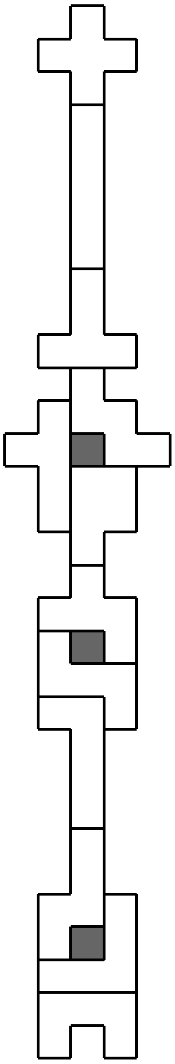
Visaugstākā simetriskā torņa problēma

<u>22. problēma</u>. Salikt no pentamino visaugstāko simetrisko torni.

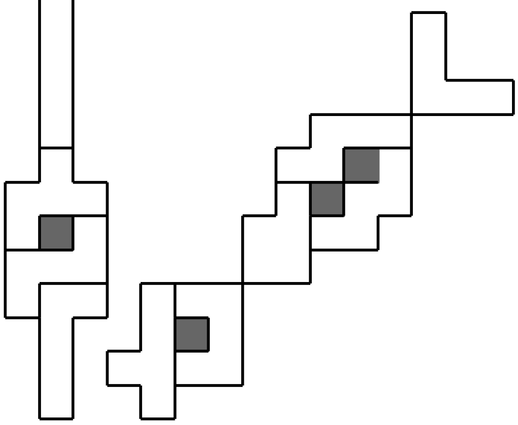
268. zīm. redzamo torni ir *uzbūvējusi* matemātikas skolotāja Vitanda Sakse no Limbažiem. Šķiet, ka torņa augstums h=32 polimino klasē nav pārspējams, bet kā to pierādīt. Vispārējā klasē torni ar augstumu h=19+10,5s=33,84..., kur ar s apzīmēta kvadrātsakne no 2, ir *uzbūvējis* Mārtiņš Opmanis no Rīgas. Viņa tornis, kas sastāv no 269. zīm. parādītajiem fragmentiem, nav stabils. Stabils tornis ar h=28+3,5s=32,94..., kurš tomēr nav polimino, ir iegūstams no 270. zīm. dotajiem blokiem.

Divos augstākajos torņos, sk. 269.–270. zīm., atsevišķi pentamino ir novietoti tā, ka to neviena mala nav paralēla torņa simetijas asij. Cik augstu torni iespējams uzbūvēt, ja šī īpašība piemīt visiem pentamino? Viens no šādas klases torņiem ar h=19s ir parādīts 271. zīm. Ja bez tam tornis ir polimino, kura simetrijas ass (taisnes nogrieznis) visā tās augstumā ir pārklāta ar pentamino, tad šādu torni sauksim par **eglīti.** Eglīte ar h=14s ir redzama 272. zīm.

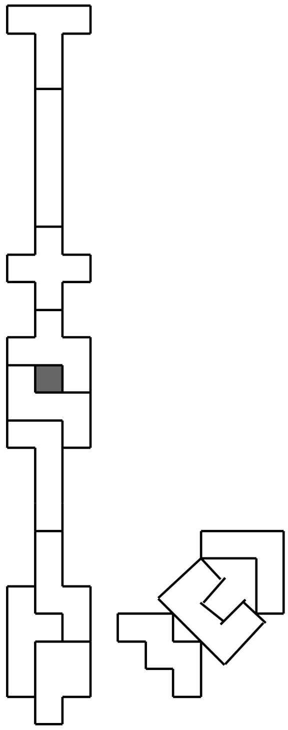
22. problēmas risināšanā ievērojamu ieguldījumu deva laikrakstā “Diena*”,* 30.09.93. izsludinātais konkurss. Vairāki dalībnieki turpināja būvēt torņus arī pēc konkursa noslēguma un, kā redzams, ļoti sekmīgi: ir iespaids, ka V. Sakses un M. Opmaņa torņi vairs nebūs pārspējami.



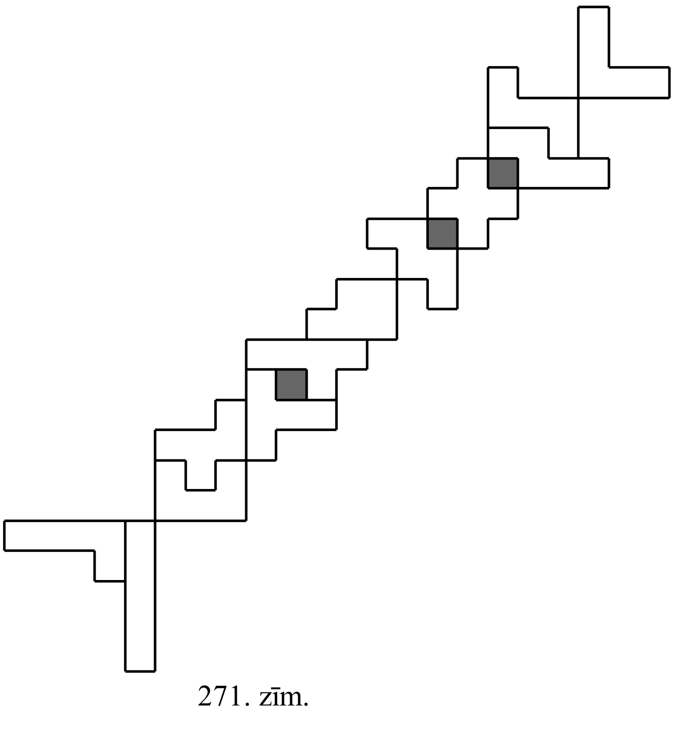
268. zīm.



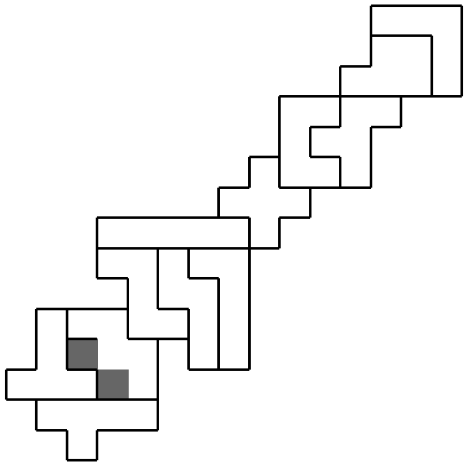
269. zīm.



270. zīm.



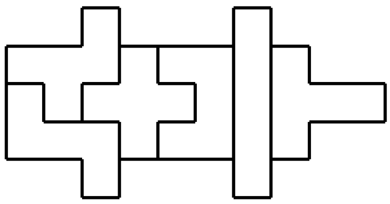
271. zīm.



272. zīm.

<u>23. problēma</u>. Cik maksimāli daudz pentamino var pievienot vienu pie otra tā, lai pievienošanās procesā veidotos tikai simetriski polimino?

273. zīm. parādīts, kā to var izdarīt ar sešiem pentamino. Vispirms ņemts simetriskais pentamino Z, kuram secīgi pievienoti F, X, U, I un T.



273. zīm.

Pirmajā acumirklī šķiet, ka 6 ir maksimums. Tomēr tā nav. Parādiet, ka prasītajā veidā vienu otram var pievienot vismaz septiņus pentamino!

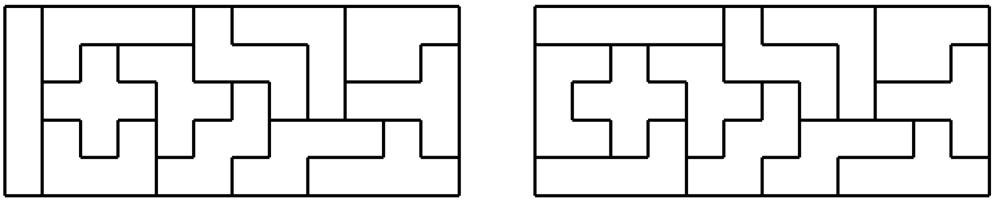
Analoģiska problēma, ja pieļaujams pievienot simetriskus no pentamino iepriekš saliktus polimino.

<u>24. problēma.</u> Atrast polimino un tādu tā p-salikumu, kurā var izdalīt visvairāk simetrisku fragmentu (polimino).

Taisnstūru klasē rekords vismaz pagaidām pieder 274. zīm. parādītajiem taisnstūra 5x12 salikumiem. Pirmajā no tiem var izdalīt 22 šādus simetriskus fragmentus:

septiņus pentamino	– I, T, U, V, W, X, Z;
piecus 10-mino	– XU, XF, XI, IL, NY;
vienu 15-mino	– ILX;
vienu 25-mino	– FZVNW;
vienu 45-mino	– LZVPNYWFU jeb (5x12) \ IXT;

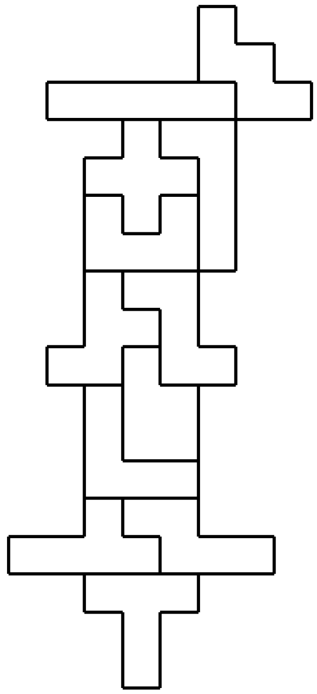
trīs 50-mino	– (5x12) \ IX, (5x12) \ IT, (5x12) \ XT;
trīs 55-mino	– (5x12) \ I, (5x12) \ X, (5x12) \ T;
vienu 60-mino	– taisnstūri 5x12.



274. zīm.

Vispārīgajā gadījumā labus rezultātus dod jau iepriekš minētie simetriskie torņi. Tā, piemēram, 268. zīm. attēlotajā tornī var izdalīt 28 simetriskus polimino.

Tikpat daudz simetrisku polimino var izdalīt 272. zīm. redzamajā eglītē. Tomēr 28 vēl stipri atpaliek no labākajiem sasniegumiem. Figūrā, sk. 275. zīm., var izdalīt 37 simetriskus polimino. Lai atvieglotu skaitīšanu, var rīkoties tā: Vispirms ievēro, ka figūra bez W un L ir simetrisks tornis, kurš sastāv no 7 simetriskiem "neatkarīgiem" fragmentiem: I, X, U, FZ, PV, YN un T. Secīgi apvienojot šos fragmentus: I, IX, IXU, IXUFZ,... utt., iegūstam 7+6+5+4+3+2+1=28 simetriskus polimino. Pārējos deviņus simetriskos polimino veido: W, WIL, WILX, LU, LI, LUX, LIX, VN un YT.



275. zīm.

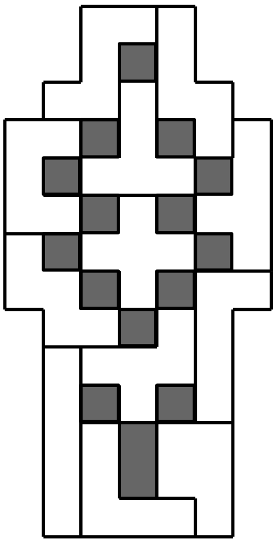
Problēmas par viscaurumainākajām figūrām

25. problēma. Salikt no pentamino viscaurumaināko polimino.

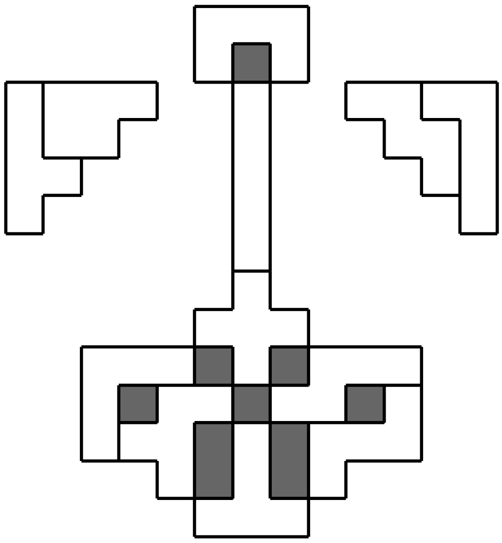
26. problēma. Kāda ir viscaurumainākā p-figūra?

Šīs problēmas nav atrisinātas arī simetriskām figūrām.

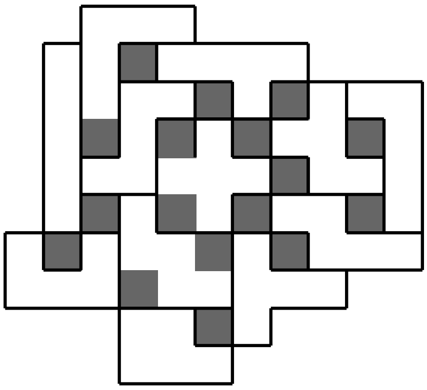
Problēmas par viscaurumainākajām figūrām tika piedāvātas laikraksta "Diena" 17.11.93. konkursam. Konkursa dalībnieku divi labākie rezultāti ir atspoguļoti 276.- 277. zīm. Simetrisko polimino ar 15 caurumiem atrada jau minētais M. Opmanis, bet 277. zīm. redzamo simetrisko figūru ar 18 caurumiem konstruēja Ēriks un viņa meita Anda Ģipšļi. Tikai divi konkursa dalībnieki bija uzrādījuši polimino ar 17 caurumiem, tādējādi atkārtojot jau agrāk zināmo rezultātu. "Skaistāks" polimino ar visiem vienādiem caurumiem ir dots 278. zīm. Vai eksistē polimino ar 18 caurumiem?



276. zīm.



277. zīm.

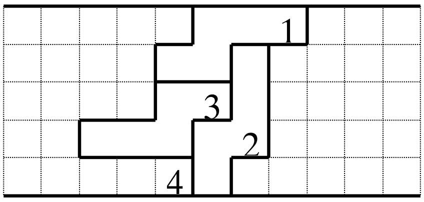


278. zīm.

Kāda ir optimālā stratēģija?

27. problēma. Spēles komplektā ietilpst rūtiņu josla J ar platumu 5 un pentamino N pietiekoši daudzos eksemplāros. Dalībnieks A norāda rūtiņu, kura dalībniekam B jāpārklāj ar pentamino N, neizejot ārpus joslas J. Pēc tam A norāda kādu citu vēl nenoklātu J rūtiņu, kuru B pārklāj ar nākamo pentamino N. Spēli turpina tik ilgi, kamēr dalībnieks B vairs nevar pārklāt norādīto rūtiņu (B zaudē) vai arī, ja B ir izlietojis visas komplektā ietilpstošās figūras N (B uzvar). Nenoskaidroti jautājumi: Cik rūtiņas un kuras vajadzētu izvēlēties, lai A iespējami ātri uzvarētu B? Kā spēlēt dalībniekam B, lai varētu pārklāt iespējami vairāk rūtiņu? Cik maksimāli daudz figūru N pieļaujams iekļaut spēles komplektā, lai, optimāli spēlējot, B vienmēr varētu uzvarēt?

Praktiskām vajadzībām joslu J var aizstāt ar taisnstūri 5xm, bez tam, spēlētājs A drīkst norādīt rūtiņas tikai fiksētā taisnstūrī 5xk, kur k<m. Saskaņā ar 2.74. uzd. atbildi dalībnieks B, prasmīgi spēlējot, vienmēr var uzvarēt pretinieku, ja k<=14. Šo spēli var izmantot arī kā nopietnu un grūti atšifrējamu datorspēli. Viens īsas partijas piemērs ilustrēts 279. zīm. Spēlētājs B nevar pārklāt jau ceturto norādīto rūtiņu.



279. zīm.

Divas problēmas par kvadrāta "pārvēršanu" pentamino

28. problēma. Zināms, ka kvadrātu iespējams sagriezt k daļās tā, lai no tām visām varētu salikt jebkuru pentamino. Der, piemēram, k=7, sk. 2.56. uzdevumu, bet kāds ir vismazākais k?

Vai kvadrāta sagriešanas veids ar vismazāko k būtu optimālais arī nākamajai problēmai?

29. problēma. Kāds ir **īsākais** iegriezumu garums, kvadrātu sagriežot daļās tā, lai no tām visām varētu salikt jebkuru pentamino?

Vairākas neatrisinātas problēmas, vai precīzāk, nerisinātas – var atrast šīs grāmatas citās nodaļās.

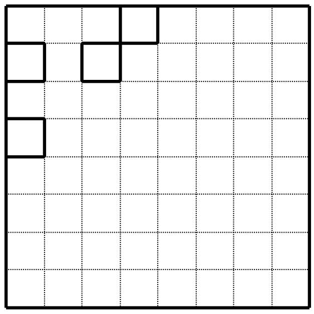
Grāmatā [17] nodaļā "Pentamino" ir formulētas trīs neatrisinātas problēmas. Vienas no tām atrisinājums ir dots 4. nodaļas 5. punktā, otrā ir klasiskā pentamino problēma par četru vienādu p-figūru atrašanu, sk. 6. problēmu, bet trešā ir šāda:

30. problēma. Veidojot kvadrātu 8x8 no divpadsmit pentamino un diviem domino, kur var novietot divus domino?

Problēma ir papildināta ar komentāru, kurā lasītājam piedāvāts padomāt arī par uzdevumu, kad divus domino aizstāj ar četriem monomino.Vispirms atzīmējot, ka ar domino norobežoto fragmentu laukumiem jādalās ar 5, D. Martins uzsver, ka tomēr variantu skaits ir tik liels, ka problēma, iespējams, jāatstāj datoram [17, 57. lpp.].

Saskaņā ar G. Radziņa veikto datorpārbaudi, kas ilga dažas stundas, divus domino drīkst novietot jebkurā netriviālā pozīcijā, t.i., tā, ka tiek ievērots dalāmības ar "5" princips. No šejienes uzreiz izriet, ka neatkarīgi no tā, kurā netriviālā pozīcijā novietosim no diviem domino sastāvošu tetramino, atlikušo kvadrāta 8x8 daļu vienmēr būs iespējams pārklāt ar 12 pentamino. Šāds fakts ir spēkā arī vienīgajam tetramino (tetramino T), kuru nevar izveidot no diviem domino. Tas tika konstatēts, izdarot atsevišķu pārbaudi. D. Martina komentārā par šo problēmu izteiktais apgalvojums, ka "tomēr eksistē neatrisinātas pozīcijas ar tetramino", manuprāt, attiecas tikai uz triviālajām pozīcijām.

Vai augstāk izklāstītajiem rezultātiem var iegūt apstiprinājumu, neizmantojot datoru? Gadījumā, kad divus domino aizvieto ar četriem monomino, eksistē vismaz viena netriviāla, neatrisināma pozīcija, sk. 280. zīm. Acīmredzami, ka r11 būtu jāpārklāj ar pentamino T, kas izolētu rūtiņu r31.



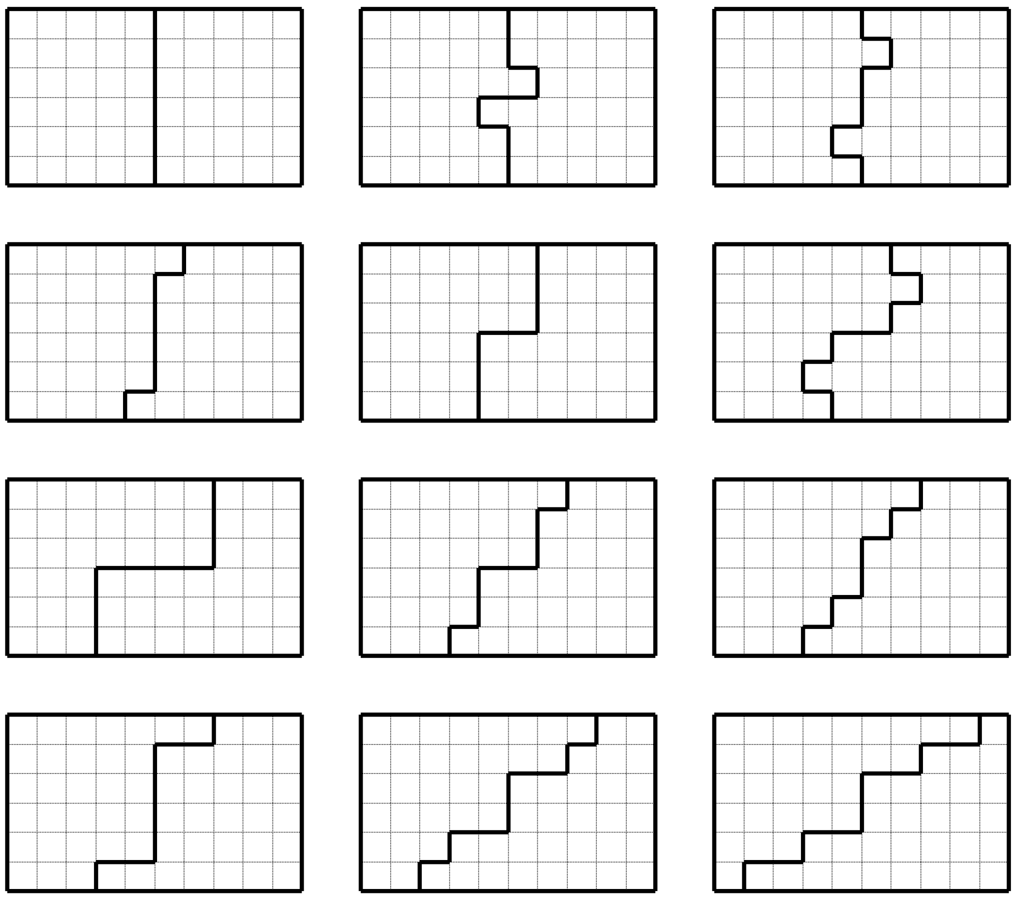
280. zīm.

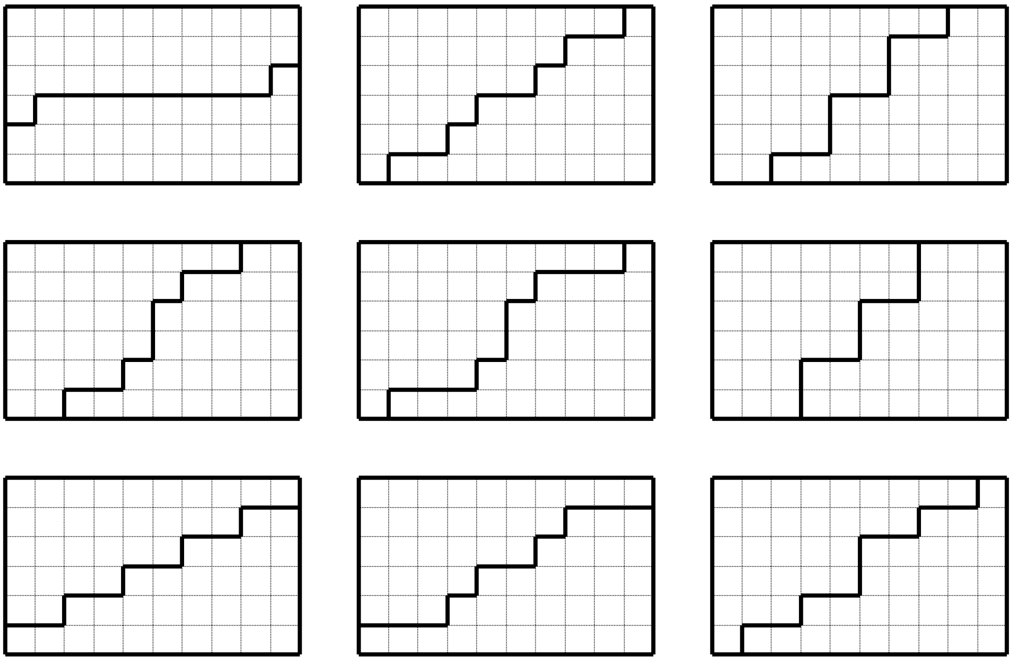
Kādas vēl netriviālas, neatrisināmas pozīcijas eksistē četru monomino gadījumā?

PIELIKUMI

1. pielikums
Taisnstūra 6x10 sadalīšana divos vienādos p-fragmentos

Aizpildiet ar 12 pentamino kastītes 6x10, kuras sadalītas divās vienādās daļās ar 281. zīm. parādītajām barjerām! Atrodiet vēl citas tādas sadalīšanas iespējas!



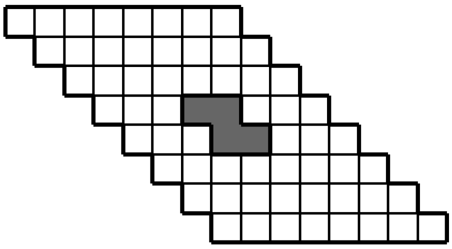


281. zīm.

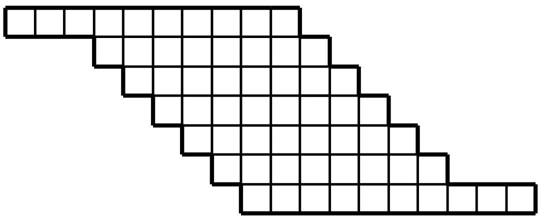
2. pielikums
Simetrisku "grūti" saliekamu figūru paraugi

Matemātiskajai rotaļlietai "pentamino" bieži vien tiek pievienots saliekamo figūru saraksts. Vairums no tajā iekļautajām figūrām ir iecerētas kā dzīvnieku vai dažādu priekšmetu attēli. Parasti prasīto figūru var salikt ļoti daudzos veidos un atrast kādu vienu tās salikumu izdodas bez īpašas piepūles. Te galvenokārt tiek piedāvātas grūtāk saliekamas figūras. Ļoti iespējams, ka kāda no tām "izsmels" jūsu pacietības rezerves. Visas figūras, sk. 282.-298. zīm., ir simetriskas, turklāt ar samērā nelielu salikumu skaitu. Vēl vairāk, divām figūrām (kurām, to noskaidrojiet patstāvīgi) eksistē tikai viens salikums. Jāuzsver, ka figūras ar vismaz divām simetrijas asīm, kurām eksistē tikai viens salikums, ir liels retums. Tāpēc, lūdzu, ziņot par katra šāda "retuma" atrašanu.

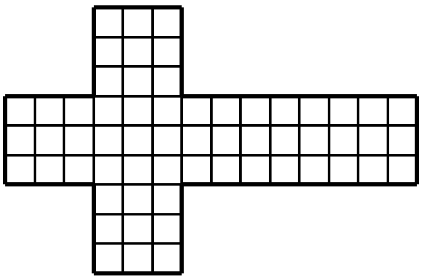
Kuras figūras, sk. 282.-298. zīm., salikšana no jums prasa visvairāk laika un kuras – vismazāk?



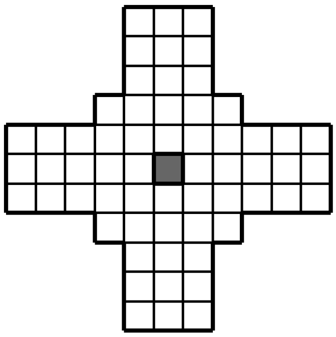
282. zīm.



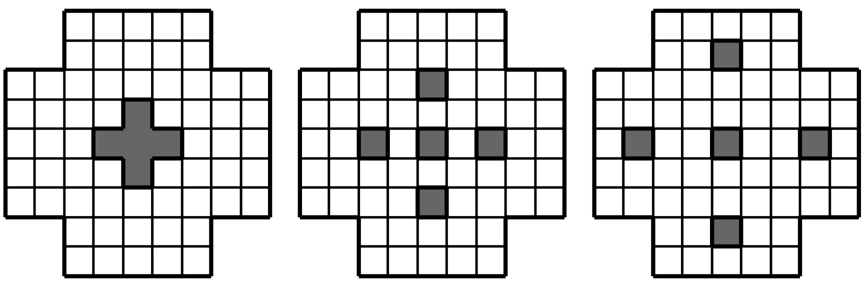
283. zīm.



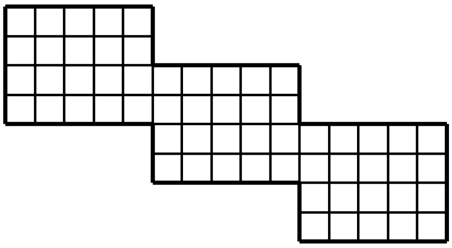
284. zīm.



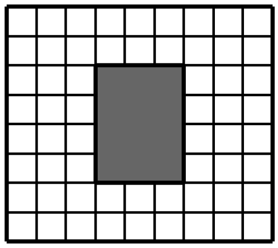
285. zīm.



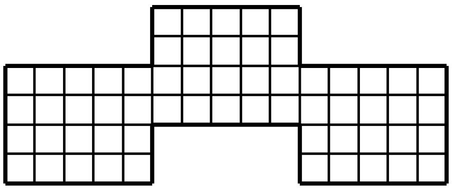
286. zīm.



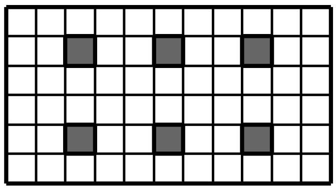
287. zīm.



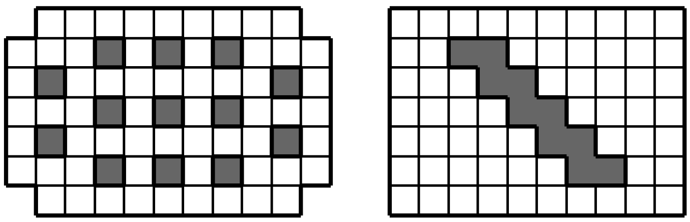
288. zīm.



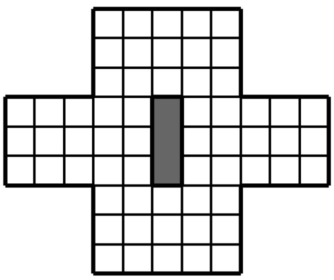
289. zīm.



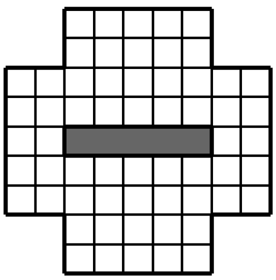
290. zīm.



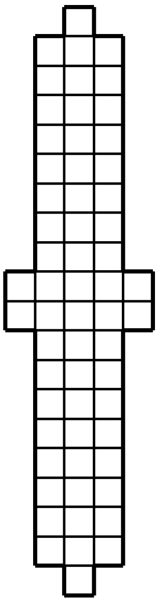
291. zīm.



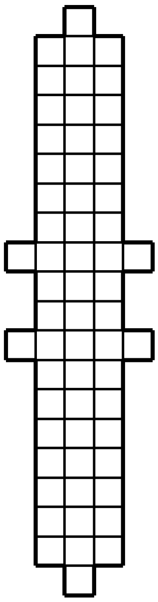
292. zīm.



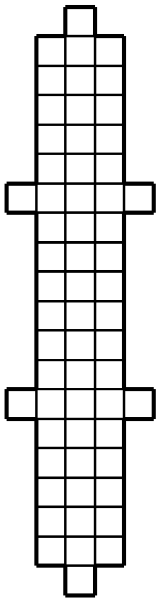
293. zīm.



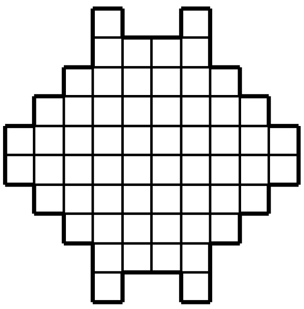
294. zīm.



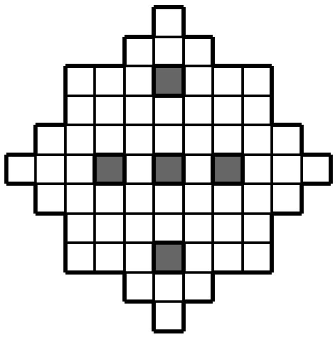
295. zīm.



296. zīm.



297. zīm.



298. zīm.

Par pirmajām četrām figūrām, sk. 282.-285. zīm., kādreiz nebija zināms, vai tās vispār ir saliekamas no pentamino [1, 176.-178. lpp.]. Šīm figūrām eksistē attiecīgi 2, 25, 21 un 14 p-salikumi.

NORĀDĪJUMI

4. nodaļa

4.1. Aplūkot robežrūtiņu pārklāšanas iespējas.
4.3. Izmantot 3.2 un 3.3 uzdevuma atbildes.
4.4. Aplūkot robežrūtiņu pārklāšanas iespējas.
4.5. Izmantot iepriekšējā uzdevuma risinājumā lietotos paņēmienus.
4.6. Ir tikai viens salikums ar prasīto īpašību.
4.7. Izmantot 4.6. uzd. risinājumu un aplūkot r-rūtiņu pārklāšanas iespējas.
4.8. Eksistē četri salikumi ar ar prasīto īpašību.
4.9. Izmantot 4.6.- 4.8. uzdevuma rezultātus.
4.10. Ir tikai viens salikums ar prasīto īpašību.
4.11. Izmantot 4.10. uzdevuma rezultātu un pentamino prioritātes principu.
4.12. Izmantot simetrijas un dalāmības principu.
4.13. Izmantot 4.11.-4.12. uzdevuma risinājumu un rūtiņu prioritātes principu.
4.14. Izmantot simetriju.
4.16.-4.17. Izmantot simetrijas un rūtiņu prioritātes principu.
4.18. Aplūkot pentamino X novietošanas iespējas.
4.19. Nepiemīt.
4.20. Vajadzīgo pierādījumu var iegūt , izdarot nelielas korekcijas iepriekšējā uzdevuma risinājumā.
4.21. Noskaidrot ar kuriem pentamino pieļaujams pārklāt r41,r43, r14, r96 un aplūkot W novietošanas iespējas.
4.22. Izmantot iepriekšējā uzdevuma rezultātu.
4.23. Izmantot iepriekšējos divus uzdevumus.
4.26. Vienpadsmit.
4.27. Var, sk. 4.28. uzdevumu.
4.33. Izmantot 4.30. un 4.32. uzdevuma rezultātu.
4.34. Izmantot iepriekšējā uzdevuma rezultātu.
4.35. Aplūkot r86 pāklāšanas iespējas ar iekšēju pentamino, ievērojot īpašību (MAX).
4.36. Aplūkot r86 pāklāšanas iespējas ar r-pentamino, ievērojot īpašību (MAX).
4.37. Izmantot 4.35. un 4.36. uzdevuma rezultātu.
4.38. Aplūkot r11 pāklāšanas iespējas, ievērojot īpašību (MAX**).**
4.40. Aplūkot r72 pāklāšanas iespējas, ievērojot īpašību (MAX).
4.41. Izmantot 4.37.-4.40. uzdevuma rezultātu.

4.43. Aplūkot, piemēram, r65 pāklāšanas iespējas ar r-pentamino, ievērojot simetrijas un maksimuma principu.
4.46. Pēc r44 pārklāšanas ar Y, r32- ar W, aplūkot r81 pāklāšanas iespējas, ievērojot (f).
4.47. Aplūkot r52 pāklāšanas iespējas, ievērojot (f).
4.48. Aplūkot r62 pāklāšanas iespējas, ievērojot (f).
4.49. Izmantojot dalāmības principu un īpašību (f), ievērot, ka r41 pārklājama tikai ar pentamino F.
4.50. Aplūkot r63 pāklāšanas iespējas, ievērojot (f).
4.51. Aplūkot r11 pāklāšanas iespējas. Izmantot (f) un rūtiņu prioritātes principu.
4.52. Aplūkot, piemēram, pentamino V novietošanas iespējas, ievērojot dalāmības principu.
4.53. Sk. iepriekšējā uzdevuma norādījumu.
4.54. Nevar.
4.55. Eksistē visos trijos gadījumos.
4.56. Eksistē.
4.57. Septiņās.
4.59. Aplūkot pentamino X novietošanas iespējas. Izmantot dalāmības, rūtiņu un pentamino prioritātes principu.
4.60. Eksistē visos četros gadījumos.
4.61. Eksistē abos gadījumos.

5. nodaļa

5.5. Nav vienīgā.
5.6. Nav vienīgā.
5.7. Izmantot 343. zīm.
5.8. Izmantot 344. zīm. Pārliecinieties, ka der, piemēram, sadalījums (L, W, P, F, T, U) (X, I, Y, N, Z, V).
5.9. Jā, pentamino sadalījums nav nosakāms viennozīmīgi.
5.10. Aplūkot pentamino X novietošanas iespējas. Izmantot dalāmības, rūtiņu un pentamino prioritātes principu.
5.11. Eksistē abos gadījumos.
5.12. Nav vienīgā.
5.13. Eksistē divas barjeras ar pieciem posmiem.
5.14. Sadalījums pie dotās barjeras nav nosakāms viennozīmīgi.
5.15. Negaidīti, bet tā tomēr nav pareiza. Iepazīties ar nākamo uzdevumu.
5.16. Maksimālais posmu skaits ir 17.
5.17. Nē. Izmantot 357. zīm.
5.18. Nevienā no gadījumiem p-salikumi nav nosakāmi viennozīmīgi.
5.19. Nav vienīgā. Aplūkot 242. zīm. redzamo barjeru.

5.20. Eksistē.
5.21. Pirmajā gadījumā r28, r45 pārklāt ar F un Y, bet otrajā gadījumā r36, r37- ar T un V.
5.23. Izmantot 11. barjeru, sk. 247. zīm.
5.24. Ne vienmēr.
5.27. Eksistē! Izmantot iepriekšējā uzdevuma atbildi.
5.28. Pastāv.
5.31. Jā, eksistē.

6. nodaļa

6.1. Divpadsmit.
6.4. Eksistē, turklāt tikai viens tāds salikums.
6.8. Meklēt salikumu, kurš satur simetrisku no F un X saliekamu fragmentu.
6.9. Sk. iepriekšējā uzdevuma norādījumu.
6.10. Meklēt tādu taisnstūra salikumu, kurš satur simetrisku, piemēram, no L un I saliekamu fragmentu.
6.11. Meklēt salikumu, kurš satur simetrisku fragmentu, ko veido L un W.
6.12. Var. Izmantot 253. zīm.
6.13. Divos. Atrodiet šos salikumus!
6.14. Tetramino novietojiet kvadrāta 8x8 stūrī.

7. nodaļa

7.9. Var. Piemēram, atstājiet brīvus šādus šaha galdiņa laucinus: a4, a5, b1, b4, b6, f3, f5, f8, g1, g8, h4 un h5.

ATRISINĀJUMI

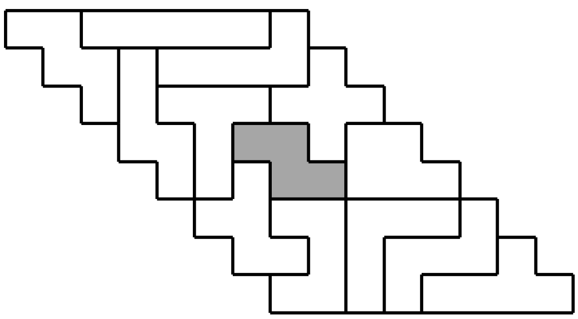
4.1. Aplūkosim ne visu, bet to 20 robežrūtiņu noklāšanas iespējas, kuru skaitā nav iekļautas apakšējā un augšējā “pakāpiena” vidējās četras rūtiņas. Tad ar visiem pentamino nevarēs pārklāt vairāk kā 19 robežrūtiņas:

F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z	
2	+1	+1	+2	+2	+1	+1	+1	+3	+2	+2	+1	<20,

kas nozīmē, ka dotā figūra nav saliekama.

167. zīmējumā attēlotā kāpņveida figūra ir iegūta no taisnstūra 6×10 (kurš sastāv no 6 rūtiņu kolonnām un 10 rūtiņu rindām), attiecīgi pārbīdot tā rindas. Vēl elementārāku nesaliekamības pierādījumu var uzrādīt tām trim kāpņveida figūrām, kuras iegūst no taisnstūriem 3×20, 4×15 un 5×12, līdzīgā veidā pārbīdot šo taisnstūru rūtiņu rindas. Atzīmēsim, ka visas četras kāpņveida figūras, kuras iegūst no taisnstūriem 3×20, 4×15, 5×12 un 6×10, pārbīdot minētajā veidā rūtiņu kolonnas, ir p-saliekamas.

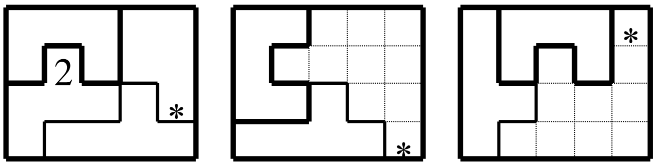
4.2. Uzdevums ir samērā sarežģīts. Figūrai eksistē tikai divi salikumi, sk. 299. zīm. Zinot vienu salikumu, otru var iegūt ļoti vienkārši: pietiek izmainīt divu pentamino N un W novietojumu. Abi salikumi ir atrodami literatūrā [5, 12], tiesa, bez norādēm, ka figūrai eksistē tikai divi salikumi.

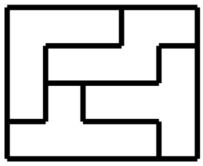


299. zīm.

4.4. Atcerēsimies, ka taisnstūri 2×10 var salikt tikai no (I, P, L, N) vai (I, P, L, Y). Tātad taisnstūra 4×5 salikšanā nedrīkst izmantot I, P un L, kā arī nedrīkst izmantot vienlaicīgi N un Y.

Ar pentamino U nav pieļaujams pārklāt vairāk nekā divas taisnstūra 4×5 robežrūtiņas, kas skaidrs no 300. zīm.

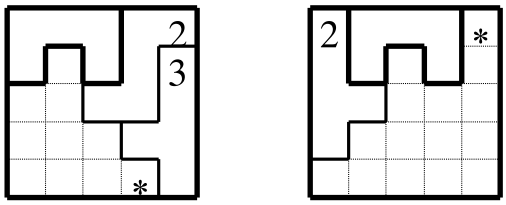




300. zīm. 301. zīm.

No šejienes un no sakarībām (4.1) izriet, ka taisnstūra 4×5 četrpadsmit r-rūtiņas jāpārklāj ar četriem pentamino tā, lai katrs no tiem pārklātu attiecīgi 5, 4, 3 un 2 r-rūtiņas. Tas nozīmē, ka piecas r_rūtiņas jāpārklāj ar V, 4 – ar Y un atbilstoši trīs – ar T. Bet tad, sk. 301. zīm., taisnstūra 4×5 pārklājums saturēs arī N.

4.5. Viegli redzams, sk. 302. zīm., ka ar pentamino U nav pieļaujams pārklāt vairāk kā trīs r-rūtiņas.



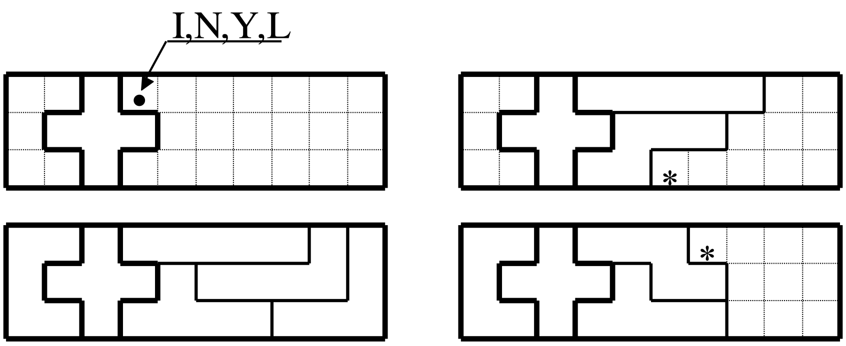
302. zīm.

No šejienes un (4.1) izriet, ka taisnstūra 5×5 sešpadsmit r-rūtiņas būtu jāpārklāj ar pieciem pentamino, pārklājot attiecīgi

$$\underset{V}{5} + \underset{Y}{4} + \underset{T}{3} + 2 + 2 = 16$$

r-rūtiņas. No 173. zīm. skaidrs, ka tas nav izdarāms.

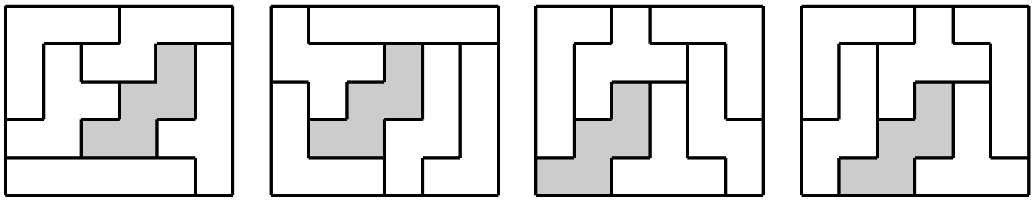
4.6. No 303. zīm. izriet, ka eksistē tikai viens tāds salikums.



303. zīm.

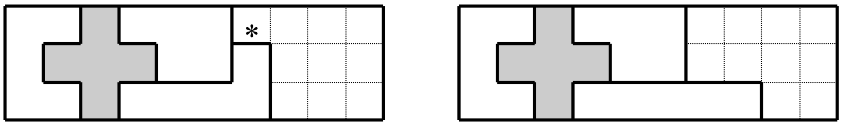
4.7. Tā kā bez P taisnstūri 3×10 var salikt, tikai izmantojot X, U, I, Y, L un V, sk. iepriekšējo uzdevumu, tad pietiek pierādīt taisnstūra 5×6 nesaliekamību no pentamino W, Z, T, F, N un P. Ar šiem pentamino nevar noklāt vairāk kā 2+2+3+2+3+4=16 taisnstūra 5×6 r-rūtiņas, bet to ir 18.

4.8. Ar vienkāršu pārlasi var iegūt, ka eksistē četri tādi salikumi, sk. 304. zīm.



304. zīm.

4.9. Saskaņā ar iepriekšējo uzdevumu risinājumiem pietiek pārbaudīt taisnstūra 3×10 nesaliekamību no (X, U, Z, P, T, Y), (X, U, Z, P, T, L), (X, U, Z, P, I, Y). Tā izriet no 305. zīm.

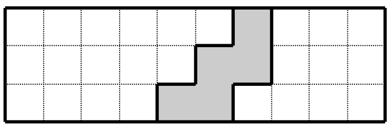


305. zīm.

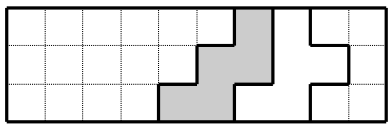
4.10. Izmantojot 175. zīm., viegli iegūstams, ka eksistē tikai viens tāds salikums; tas atbilst gadījumam $X_C \supset x1$ un kombinācijai (X, W, V, P, T, L).

4.11. Pēc iepriekšējā uzdevuma pietiek pierādīt taisnstūra (3×10) nesaliekamību no Z, U, I, F, N un Y. Aplūkosim taisnstūra 3×10 rūtiņu noklāšanas iespējas ar Z, ņemot vērā dalāmības ar “5” principu. No $Z\in(3\times10)$ izriet, ka $P\in(3\times10)$ vai $V\in(3\times10)$, bet šie pentamino jau izmantoti taisnstūra 5×6 pārklājumā.

4.12. Pateicoties simetrijai un dalāmības principam, pietiek aplūkot tikai vienu W novietošanas iespēju, sk. 306. zīm.



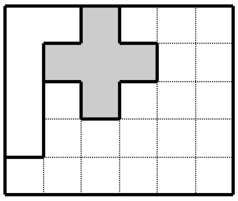
306. zīm.



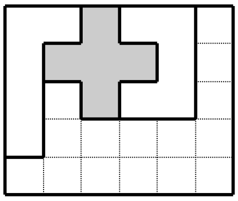
307. zīm.

Tā kā F nav pieļaujams novietot taisnstūra 3×10 daļā pa kreisi no W, tad apgalvojuma $F\in(5\times6)$ pareizība izriet tieši no 307. zīm. un no dotā nosacījuma $U\in(5\times6)$. Ja neizmanto U, tad taisnstūra 3×10 fragmentu, kurš atrodas pa labi no W, sk. 306. zīm., nav iespējams salikt bez P, sk., piemēram, 3.2. uzdevumu.

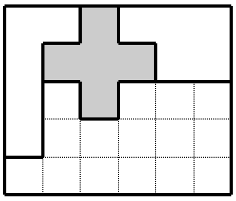
4.13. Pateicoties iepriekšējo divu uzdevumu risinājumam, pietiek izanalizēt tikai tādu taisnstūru 3×10 un 5×6 pārklājumus, kuri atbilst 306. un 308. zīmējumiem.



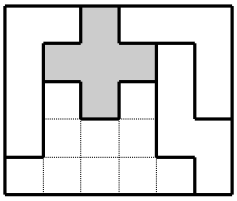
308. zīm.



309. zīm.



310. zīm.



311. zīm.

Tiešām, ja taisnstūra 5×6 rūtiņa 12 (rij – i-ās rindiņas j-ā rūtiņa) pārklāta ar U, tad $F \in (5\times 6)$, $P \in (3\times 10)$, $F \supset (34; 25; 45; 46)$, r41$\subset$ V, r56$\subset$ I, r51$\subset$ L. Tālāk atliek ievērot, ka ar pentamino Z jāpārklāj taisnstūra 3×10 rūtiņa 37, ar T – (r11, r31) $\Rightarrow$ r12*.

Parādīsim, ka neviena no četrām rūtiņas r14 noklāšanas iespējām ar U, P, T vai V nav realizējama, sk. 308. zīm.

Ja r14$\subset$ U, t.i., rūtiņa 14 ir pārklāta ar pentamino U, tad $P \in (3\times 10)$, sk., piemēram, 4.12. uzdevumu. Ja r51 pārklātu ar I, tad vairs nebūtu pentamino, ar kuru pārklāt r32. Tātad r51 jāpārklāj ar T vai F. Bet jebkurā no šiem gadījumiem atlikušo taisnstūra daļu nevarēs noklāt, ja neizmantos ne P, ne U, ne L.

Ja r14$\subset$ T, tad r15$\subset$ Y un I, $U \in (5\times 6)$. Tātad $F \in (3\times 10)$, kas ir pretrunā ar 4.12. uzdevumu.

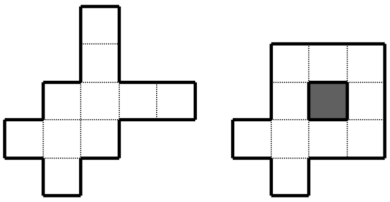
Beidzot, ja r14$\subset$ V, tad r25$\subset$ N vai F un F, $T \in (5{,}6)$, sk. 311. zīm. Iespēja I, $U \in (5\times 6)$ jau atmesta kā nederīga iepriekšējā gadījumā. Atliek pierādīt taisnstūra 3×10 nesaliekamību no pentamino W, P, I, Y, U, Z.

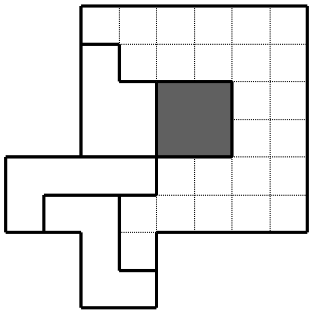
Ja r16 noklātu ar P vai ar Y, sk. 306. zīm., tad vairs nebūtu kur novietot I, Tātad r16$\subset$ I. Bet tad vairs pieļaujamā veidā nav pārklājama rūtiņa 11.

4.14. Tā kā $U \in (5\times 6)$, sk. 176. zīm., tad saskaņā ar 4.12. uzdevumu $F \in (5\times 6)$, bet $P \in (3\times 10)$. Novietosim F tā, kā parādīts 176. zīm. (vienīgā pieļaujamā vieta), tad neatkarīgi no tā – ar I vai ar Y noklātu r56 – taisnstūra 5×6 pārklāšanā vajadzētu jau aizņemto P.

4.15. Rūtiņu r11 nav pieļaujams pārklāt ar P (vai Y), jo tad arī r51 būtu jāpārklāj ar P (vai Y). Simetrijas dēļ pietiek aplūkot tikai 177. zīm. parādīto pentamino I, L, U novietošanas iespēju (ja ar I pārklātu taisnstūra 1. kolonnas rūtiņas, tad izveidotos jau iepriekšējā uzdevumā aplūkotā situācija). Tagad, pateicoties 4.12. uzdevumam, iegūstam prasīto nesaliekamību.

4.16. Eksistē tikai divi simetriski 10-mino, kurus var salikt no X, V, taču tikai viens no tiem ir saliekams vēl no diviem citiem pentamino Y un U, sk. 312. zīm. Tāpēc jāpierāda 313. zīm. parādītā 40-mino nesaliekamība no F, I, L, N, P, T, W un Z.



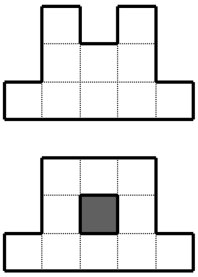


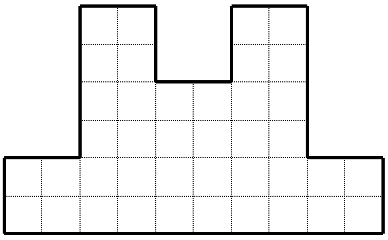
312. zīm.

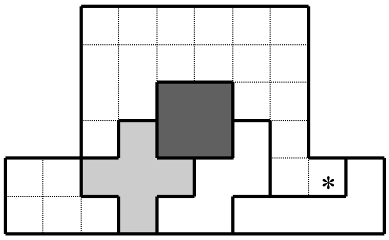
313. zīm.

Rūtiņu 61, sk. 313. zīm., nav pieļaujams pārklāt ar F, I, N, T, W. To nav pieļaujams pārklāt arī ar P, jo tad r81 būtu jāpārklāj atkal ar P. Tātad r61 (vai tai simetriskā rūtiņa 81) jānoklāj ar L vai Z. Simetrijas dēļ pietiek aplūkot 313. zīm. prasīto pentamino L un Z stāvokli. Rūtiņa 41 jāpārklāj ar P, turklāt tā, kā parādīts 313. zīm. Tālāk vairs nav “perspektīva” rūtiņas 11 pārklāšanas veida: ja to pārklātu ar I, tad pēc tam nevarētu pārklāt r22; savukārt, ja to pārklātu pieļaujamā veidā ar N, tad vairs nevarētu pārklāt r13.

4.17. Eksistē tikai divi simetriski 10-mino, kuri saliekami no (I, U) un vēl no diviem citiem pentamino, sk. 314. zīm.





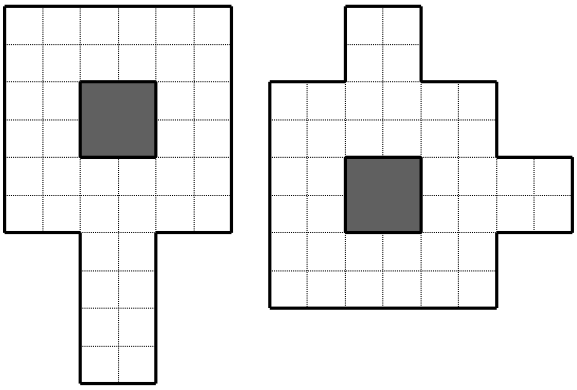


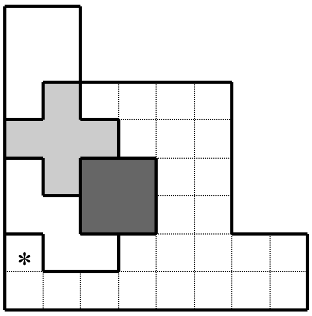
314. zīm. 315. zīm. 316. zīm.

Rūtiņu 11, sk. 315. zīm., pieļaujams pārklāt tikai ar P, L vai Z. Tas pats attiecas uz rūtiņām 41, 61 un (6,10). Tas nozīmē, ka pieļaujamā veidā nevar pārklāt pat četras 315. zīm. attēlotā 40-mino attiecīgās rūtiņas.

Pierādīsim 316. zīm. redzamā 40-mino nesaliekamību no X, W, V, F, N, L, Y, P. Ar precizitāti līdz simetrijai X pieļaujams novietot tikai tā, kā parādīts 316. zīm. Rūtiņa (6,10) jānoklāj vienīgi ar L, r65 – ar W, tālāk acīmredzami, ka nav pārklājama rūtiņa 59.

4.18. 317. zīm. redzamo 40-mino nesaliekamības pārbaude triviāla: nav pieļaujamas vietas, kur novietot pentamino X.



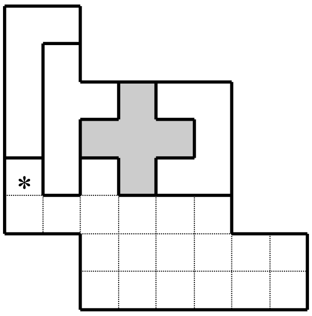


317. zīm.

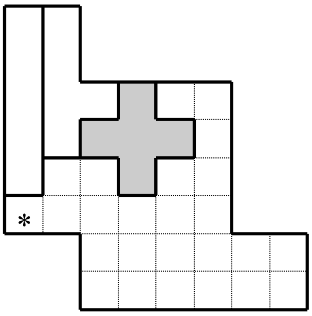
318. zīm.

Savukārt atlikušā 40-mino nesaliekamība no F, I, N, P, U, V, W un X skaidra no 318. zīm.

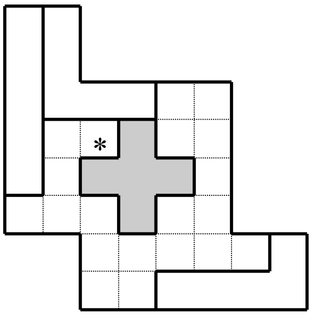
4.19. Pierādīsim, ka 319. zīm. parādīto 40-mino nevar salikt no F, I, L, U, V, W, X un Y.



319. zīm.



320. zīm.

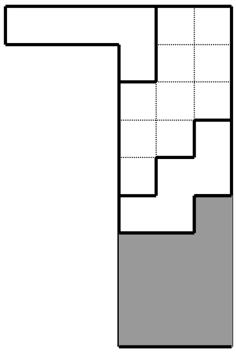
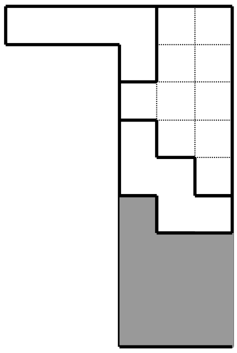
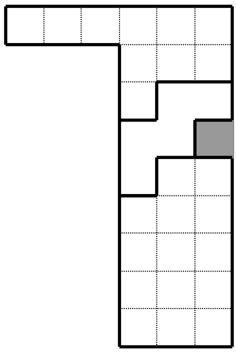
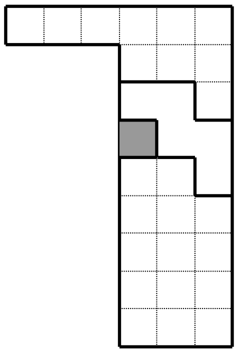


321. zīm.

Noskaidrosim, kuras rūtiņas pieļaujams pārklāt ar pentamino X centrālo rūtiņu X_C. Simetrijas un dalāmības principa dēļ pietiek aplūkot gadījumus $X_C \supset$r43, r44, r53, r54, r63. Viegli saskatīt, ka r11 un r86 pārklāšanā jāievēro prasība: viena no tām jāpārklāj ar I, otra – ar L. Pateicoties šai prasībai, uzreiz kā nederīgus var atmest gadījumus: $X_C \supset$r43, r53, r63. Pārējo divu gadījumu $X_C \supset$r44 un $X_C \supset$r54 analīze atspoguļota 319.-321. zīm.

4.21. Pie dotajiem nosacījumiem ir spēkā šādas gandrīz acīmredzamas īpašības:

1. Rūtiņas 14 un 96 jāpārklāj ar I un L.
2. Rūtiņas 41 un 43 jāpārklāj ar N un Y.
3. Pentamino W pieļaujams novietot tikai tā, kā parādīts 322.-325. zīm.

			
322. zīm.	323. zīm.	324. zīm.	325. zīm.

Tagad atliek tikai ievērot, ka ietonētie 10-mino, sk. 322.-323. zīm., nav saliekami bez U un P un ka ietonēto rūtiņu, sk. 324.-325. zīm., pārklāšanā nedrīkst izmantot I, L un P, kā arī N un Y, kuri jāizlieto r41 un r43 pārklāšanā.

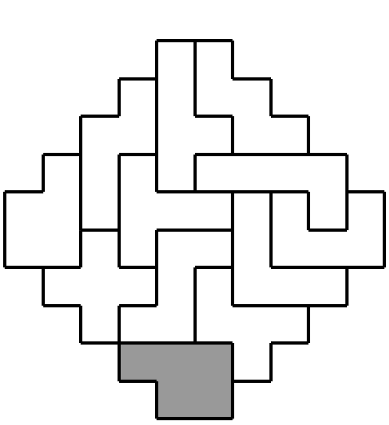
4.22. Pie dotajiem nosacījumiem fragmentu *F2,* sk. 187. zīm., pieļaujams pārklāt tikai ar (N, Y, P, L). Tātad pēc iepriekšējā uzdevuma "caurumotais kvadrāts" nebūs saliekams.

4.23. Nesaliekamība dotajā gadījumā viegli secināma no 4.21.un 4.22. uzd. risinājuma, jo 322.-325. zīm. virs W esošo 10-mino pārklāšanā nedrīkst izmantot ne P, ne Y.

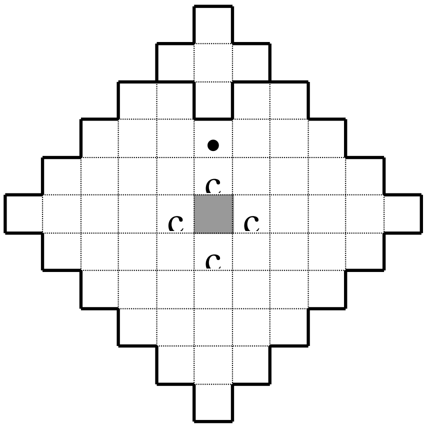
4.24. Ja $X_C \supset r52$, tad rūtiņu r13 pieļaujams pārklāt tikai ar I. Simetrijas dēļ rūtiņa r93 būtu jānoklāj arī tikai ar I.

4.25. a) četros, b) piecos.

4.26. Var, sk. 326. zīm.



326. zīm.



327. zīm.

Šķiet ļoti ticami, ka to p-nesaliekamo figūru, kuras var pārklāt ar 11 dažādiem pentamino un pieciem monomino, nesaliekamības pierādījumi būs gari un nogurdinoši. Kā redzams no figūras G (195. vai 326. zīm.) nesaliekamības pierādījuma un 326. zīm., šāds uzskats ne vienmēr atbilst patiesībai.

4.29. Ar pentamino X jāpārklāj trīs r-rūtiņas, sk. (MAX).

Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka pentamino X pārklāj trīs r-rūtiņas kā 327. zīm. Rūtiņu 44, sk. 327. zīm., nav pieļaujams pārklāt ar r-pentamino, jo tie r-rūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli. Tātad r44 jānoklāj ar iekšēju pentamino I, L, T, U, V vai Z, sk. (4.6), vienlaicīgi pārklājot vismaz divas kopas C rūtiņas, sk. (RK1), kas, kā viegli redzēt no 327. zīm., nav izdarāms.

4.33. Tā kā RK nav saliekams, ja r67 $\subset$ M vai r67$\subset$ r-pentamino, sk. 4.30. un 4.32. uzd., tad atliek izskatīt pēdējo iespēju, kad šī rūtiņa ir pārklāta ar iekšēju pentamino H.

Aplūkosim r73 pārklāšanas iespējas, zinot, ka eksistē tikai divi "perspektīvi" varianti, sk. 199.-200. zīm.

Skaidrs, ka šo rūtiņu pieļaujams pārlāt tikai ar r-pentamino U, P vai L.

73$\subset$ U $\Rightarrow$ 72$\subset$ U $\Rightarrow$ 82*.

73$\subset$ P $\Rightarrow$ 72, 91$\subset$ P $\Rightarrow$ 74*.

73$\subset$ L $\Rightarrow$ 81$\subset$ L $\Rightarrow$ 52 vai 64$\subset$ M $\Rightarrow$ 82$\subset$ U (82$\subset$ P $\Rightarrow$ 93*) $\Rightarrow$ 92$\subset$ F $\Rightarrow$ 94$\subset$ P $\Rightarrow$ 76*.

4.34. No iepriekšējā uzdevuma zināms, ka RK nav saliekams, ja r11$\subset$ I un r61$\subset$ X. Tāpēc simetrijas un (MAX) īpašības dēļ pietiek izanalizēt tikai gadījumu, kad r(11,1)$\subset$ X. Vispirms noskaidrosim, vai ar T pieļaujams pārklāt r-rūtiņu. Simetrijas un dalāmības dēļ pietiek aplūkot šādas iespējas:

T1. (41; 63)$\subset$ T.

Tad 21$\subset$ P, 51$\subset$ F $\Rightarrow$ 81$\subset$ Y (81$\subset$ Z $\Rightarrow$ 91*) $\Rightarrow$ 81, 64$\subset$ Y (81, 84$\subset$ Y $\Rightarrow$ 64*) $\Rightarrow$ 92$\subset$ H $\Rightarrow$ 92$\subset$ L $\Rightarrow$ 75*.

T2. (81; 63)$\subset$ T.

Uzreiz iegūstam: 91$\subset$ L, 92$\subset$ M $\Rightarrow$ 94*.

T3. (91; 73)$\subset$ T.

Tad 92$\subset$ M, 81$\subset$ W $\Rightarrow$ 63$\not\subset$ H $\Rightarrow$ 63*.

Tātad H=T jeb iekšējam pentamino jābūt T.

Tagad noskaidrosim, vai ar pentamino V pieļaujams pārklāt r-rūtiņu. Simetrijas un dalāmības principu dēļ jāaplūko šādi gadījumi:

V1. (51; 53; 73)$\subset$ V.

Tad 21$\subset$ W, 61$\subset$ P $\Rightarrow$ 81$\subset$ Y, 92$\subset$ M $\Rightarrow$ 43*.

V2. (71; 73; 53)$\subset$ V.

Tad (21; 61)$\subset$ (P;W), t.i., rūtiņu 21 un 61 pārklāšanā jāizmanto P un W. Tāpēc (81; 91)$\subset$ Y, 92$\subset$ M $\Rightarrow$ 61$\subset$P, 21$\subset$ W $\Rightarrow$ 43*.

V3. (91; 73; 75)$\subset$ V.

Tad 92$\subset$ M $\Rightarrow$ 83*.

Tātad V jābūt iekšējam pentamino. Tā kā nevar būt divi iekšēji pentamino, sk. (MAX), tad apgalvojums pierādīts.

4.35. Dalāmības principa dēļ eksistē tikai viens iekšējs pentamino, ar kuru pieļaujams pārklāt vienlaicīgi r66 un r84, proti, (66; 84; 76)$\subset$ U. No tā iegūstam 75$\subset$ Z $\Rightarrow$ (55; 94)$\subset$ (L; M) $\Rightarrow$ 82$\subset$ P $\Rightarrow$61*.

4.36. Pastāv vairākas iespējas, kā **r84** var pārklāt pieļaujamā veidā ar r-pentamino.

(84; 82; 91)$\subset$ L $\Rightarrow$ 92$\subset$ M $\Rightarrow$ 94$\subset$U, 87$\subset$ W (87$\subset$ V $\Rightarrow$ 66*), 69$\not\subset$ H $\Rightarrow$ 69*;

(84; 86; 95)$\subset$ L $\Rightarrow$ 94$\subset$ M $\Rightarrow$ 92*;

(84; 95)$\subset$ T $\Rightarrow$ 94$\subset$ M $\Rightarrow$ 75$\not\subset$ H $\Rightarrow$ 75$\subset$ Z $\Rightarrow$ 76*;

(84; 81)$\subset$ Y $\Rightarrow$ 92$\subset$ M $\Rightarrow$ 74*;

(84; 87)$\subset$ Y $\Rightarrow$ 94$\subset$ M $\Rightarrow$ 75$\not\subset$ H $\Rightarrow$ 75$\subset$ Z $\Rightarrow$ 76*;

(84; 91)$\subset$ Z $\Rightarrow$ 74$\subset$ Y $\Rightarrow$ (61; 31)$\subset$ (W; L).

Tagad jebkura no divām pieļaujamām r94 pārklāšanas iespējām uzreiz ved strupceļā:

94$\subset$ P $\Rightarrow$76* ; 94$\subset$ U $\Rightarrow$ 87*. (i)

74$\subset$ T $\Rightarrow$ 71$\subset$ F, 41$\subset$ Y $\Rightarrow$ no (i), ka 94$\subset$ L $\Rightarrow$ 55$\subset$ H $\Rightarrow$ L$\neq$H $\Rightarrow$ L$\supset$(94; 67), 86$\subset$ P, r(6,11)$\subset$ W $\Rightarrow$ 69*.

4.37. Pateicoties iepriekšējiem diviem uzdevumiem, atliek pārbaudīt tikai gadījumu: r84$\subset$ M. Dalāmības principa dēļ r75 nedrīkst pārklāt ar iekšēju pentamino. Eksistē tikai viens rūtiņas 75 pārklāšanas veids ar r-pentamino, proti, r75, r91$\subset$ Z. Aplūkosim r94 pārklāšanas iespējas. Divas no tām jau izskatītas iepriekšējā uzdevuma risinājumā, sk. (i).

(94; 66)$\subset$ L $\Rightarrow$ 55*;

(94; 95; 68)$\subset$ L $\Rightarrow$ 85*;

(94; 95; 67)$\subset$ L $\Rightarrow$ V $\supset$47, 59$\subset$ F $\Rightarrow$ 87*.

4.38. Rūtiņu 11 pieļaujams pārklāt ar L, N, P, W un Y. Turklāt gadījumu r11$\subset$ L; r23$\subset$ W atsevišķi var neaplūkot, jo tas iekļaujas gadījumā r11$\subset$ W; (r33; r47)$\subset$ L.

N) 11$\subset$ N $\Rightarrow$ 44$\subset$ H $\Rightarrow$ (44; 33)$\subset$ L (33$\subset$ M $\Rightarrow$ 35$\subset$ P $\Rightarrow$ 56*) $\Rightarrow$ 35$\subset$ P, 56$\subset$ M $\Rightarrow$ 68*.

P) 11$\subset$ P.

35$\subset$ Z $\Rightarrow$ 47*;

(35; 68)$\subset$ Y $\Rightarrow$ 44*;

(35; 44)$\subset$ Y $\Rightarrow$ 57$\subset$H $\Rightarrow$ (57; 66)$\subset$ L (57; 66$\subset$ U $\Rightarrow$ 67$\subset$ Z $\Rightarrow$ 75*) $\Rightarrow$31$\subset$ N (31$\subset$ W $\Rightarrow$ 61*), 51$\subset$ F $\Rightarrow$ 53$\subset$ M $\Rightarrow$ 67*.

Y) 11$\subset$ Y.

35$\subset$ Z $\Rightarrow$ 47$\subset$ L, 58$\subset$ M $\Rightarrow$ 78$\subset$ U $\Rightarrow$ 67*;

(35; 34; 67)$\subset$ L $\Rightarrow$ 47*;

(35; 47; 58)$\subset$ P (gadījums r35 un r34$\subset$ P jau izskatīts) $\Rightarrow$ 45$\subset$ H $\Rightarrow$ (34; 66)$\subset$ L, 55$\subset$ M $\Rightarrow$ 68*.

W) 11$\subset$ W.

(33; 66)$\subset$ L $\Rightarrow$ 47$\subset$ U $\Rightarrow$ 68*;

(33; 47)$\subset$ L $\Rightarrow$ 58$\subset$ M $\Rightarrow$ 57$\subset$ H $\Rightarrow$ 55; 56; 57$\subset$ U $\Rightarrow$ 67$\subset$ Z $\Rightarrow$ 75*;

33$\subset$ M $\Rightarrow$ 58$\not\subset$ H $\Rightarrow$ (58; 47; 44)$\subset$ L, (58; 47; 46$\subset$ U $\Rightarrow$ 57*) $\Rightarrow$ 57$\subset$ H $\Rightarrow$ (57; 66; 56)$\subset$ U $\Rightarrow$ 67$\subset$ Z $\Rightarrow$ 75*.

4.39. No dotajiem nosacījumiem iegūstam, ka r64 vienlaicīgi ar r66 jāpārklāj ar U, bet r31 – ar P. Pastāv divas iespējas, kā pieļaujamā veidā var pārklāt r72.

1) 72$\subset$ L $\Rightarrow$ 91$\subset$ W $\Rightarrow$ 93$\subset$ M $\Rightarrow$ r(10,3)$\subset$ Y (ja r(10,3)$\subset$ N $\Rightarrow$ 85*) $\Rightarrow$ 11$\subset$ N $\Rightarrow$ 33*;

2) 72$\subset$ M:

81$\subset$ L $\Rightarrow$ 91$\subset$ W un tālak sk. **1);**

81$\subset$ N $\Rightarrow$ 83$\subset$ L $\Rightarrow$ (55; 34; 35)$\subset$ Z, 11$\subset$ Y $\Rightarrow$ 46*

81$\subset$ W $\Rightarrow$ r83; r(11,1)$\subset$ L un tālak sk. **1);**

81$\subset$ Y $\Rightarrow$ 11*.

4.40. Pārklāsim r31 ar P un parādīsim, ka neviena no rūtiņas 72 četrām pieļaujamām pārklāšanas iespējām nav realizējama.

(72; 66)$\subset$ L $\Rightarrow$ (55; 35)$\subset$ Z $\Rightarrow$ 67*;

(72; 75; 81)$\subset$ L $\Rightarrow$ 82$\subset$ U, 92 $\subset$ F $\Rightarrow$ 94*;

(72; 81;84)$\subset$ L $\Rightarrow$ 91 $\subset$ W $\Rightarrow$ 93*;

72$\subset$ L $\Rightarrow$ 82*.

4.41. Ņemot vērā 4.37.–4.40. uzd., pietiek izanalizēt gadījumu, kad r61 ir pārklāts ar X, bet r64 ar r-pentamino. Pastāv trīs r64 pārklāšanas iespējas.

Y1. (64; 31) $\subset$ Y $\Rightarrow$ 52$\subset$ M. Parādīsim, ka neviena no šādām piecām rūtiņas 72 pārklāšanas iespējām nav realizējama.

1. (72; 66) $\subset$ L:
   81$\subset$ P $\Rightarrow$ r(10,1) $\subset$ F, 93$\subset$ U $\Rightarrow$ 76*;
   81$\subset$ W vai N$\Rightarrow$83*.
2. (72; 81; 84)$\subset$ L $\Rightarrow$91$\subset$ W$\Rightarrow$ 93*.
3. (72; 81; 75)$\subset$ L:
   82$\subset$ U $\Rightarrow$ 92$\subset$ F, 94$\subset$ P $\Rightarrow$ 76$\subset$ H $\Rightarrow$ 76*;
   82$\subset$ P $\Rightarrow$r(11,1)$\subset$ W$\Rightarrow$ 93*.
4. 72$\subset$ U$\Rightarrow$83*.
5. 22$\subset$ P$\Rightarrow$83$\not\subset$ H$\Rightarrow$83*$\subset$ N vai L $\Rightarrow$93*.

Y2. (64; 81) $\subset$ Y $\Rightarrow$ 31$\subset$ P, 72$\subset$ M un sk. 5. iespēju.

T. (64; 81) $\subset$ T $\Rightarrow$ 31$\subset$ P, 72$\subset$ M $\Rightarrow$ 91$\subset$ W $\Rightarrow$ 93*.

4.43. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka pentamino I pārklāj piecas 6. Kolonnas rūtiņas, bet monomino kādu k-ās kolonnas rūtiņu, kur k >= 6. Tā kā vairāk iekšēju pentamino nav, tad visi pārējie pentamino robežrūtiņu pārklāšanā jāizmanto maksimāli. Aplūkosim r65 pārklāšanas iespējas. Simetrijas dēļ pietiek izanalizēt šādus 7 gadījumus.

1L. (65; 31; 32)$\subset$ L $\Rightarrow$ r74 vienlaicīgi ar r72 un r73 jāpārklāj ar U $\Rightarrow$ 82*.

2L. (65; 31; 64)$\subset$ L $\Rightarrow$ 54*.

3L. (65; 51; 54)$\subset$ L:

61$\subset$ W$\Rightarrow$ 63*;

61$\subset$ P$\Rightarrow$ 64$\subset$ Y$\Rightarrow$74*;

61$\subset$ Y, 72$\subset$ U (72$\subset$ P $\Rightarrow$ 74*) $\Rightarrow$ 82*.

4V. (65; 41; 43)$\subset$ V$\Rightarrow$ 53$\subset$ N$\Rightarrow$ 63*.

5V. (65; 41; 63)$\subset$ V$\Rightarrow$ 61$\subset$ F$\Rightarrow$ 73*.

6Z. (65; 41; 42)$\subset$ Z:

6ZT. 54$\subset$ T $\Rightarrow$ 11$\subset$ F $\Rightarrow$ 51$\subset$ P$\Rightarrow$ r(10,1); r71$\subset$ (L;W) $\Rightarrow$ r(11,1) $\subset$ N, 95$\subset$ Y$\Rightarrow$ 35*;

6ZY. 54 $\subset$ Y $\Rightarrow$ r51 jāpārklāj ar F vai P.

6ZYF. 51$\subset$ F $\Rightarrow$ 63 $\subset$ (N vai T).

63 $\subset$ N $\Rightarrow$ 73$\subset$ L. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka r(11,1)$\subset$ P, bet r11$\subset$ W$\Rightarrow$ r(6,11)$\subset$ X$\Rightarrow$ 95*.

63$\subset$ T $\Rightarrow$ 82 $\subset$ (P vai L).

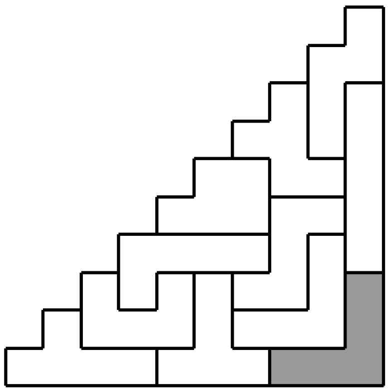
Ievērosim, ka pietiek aplūkot iespēju r82⊂P, X ⊃r(6,11). Neierobežojot vispārīgumu, uzskatīsim, ka r11⊂N, bet r(11,1) ⊂ W. Tad iegūstam pieļaujamā veidā nepārklājamu r56.

6ZYP. 51⊂ P ⇒ 71⊂(L vai W). Ievērosim, ka pietiek analizēt tikai gadījumu r71⊂ L. Ar X jāpārklāj r(6,11), bet ar F – rūtiņas (11,1) un 94 ⇒ 87*.

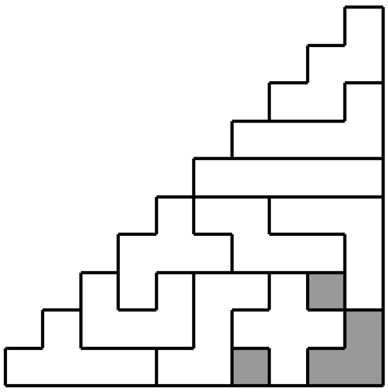
7Z. (65; 41; 52)⊂ Z ⇒ 42⊂ P (42⊂ L ⇒ T ⊃ (85,87)⇒ 67*). Ja r51 pārklātu ar Y, tad iegūtu jau augstāk izskatītā gadījuma **6Z** variantu: r54⊂ Y, r51⊂ P. Tāpēc atliek aplūkot iespēju r51 ⊂ F (r51⊂ X ⇒ 64*). Pēc r63 pārklāšanas ar U, r74 ar Y, r(6,11) ar X iegūstam, ka (r58; r78) ⊂ (M; L). Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka r58⊂ M ⇒ 78*.

4.44. Pentamino W un P.

4.45 Iespējams, turklāt vienlaicīgi pārklājot vairāku citu diagonāļu rūtiņas, sk. 328. un 329. zīm.



328. zīm.



329. zīm.

4.46. Pārklāsim r44 ar Y un r32 ar W (citu iespēju nav). Tātad P nedrīkst izmantot. Aplūkosim r81 pārklāšanas iespējas, ņemot vērā īpašību (f).

81⊂ (I vai L) ⇒ 71*;

81⊂ F ⇒ (71,94)⊂ F, r(10,1) ⊂ N, 51⊂ Z ⇒ 61

81⊂ N ⇒ 71 ⊂ N, 61 ⊂ F, r(10,1)⊂ I, 66⊂Z*.

4.47. Pārklāsim r52 (reizē ar r42 un r62) ar W, citu iespēju saskaņā ar (f) nav. Ņemot vērā, ka r21⊂ Y, bet P nav izmantojams, aplūkosim r71 pārklāšanas iespējas.

71⊂ F ⇒ r61, r84⊂ F [r81, r94⊂ F ⇒ r(10,1)⊂ N, 61⊂ Z, r(10,3)⊂ I ⇒ 66*] ⇒ r81, r91 ⊂ N, r(10,1) ⊂ L [r(10,1) ⊂ I ⇒ 93*] ⇒ r(10,5)⊂ I ⇒ 66*.

4.48. Pārklāsim r62 vienlaicīgi ar r52 un r72 ar W (tāpat kā gadījumā X ⊃r64 nav citu pieļaujamo iespēju). Ievērosim, ka r81⊂ F vai Y. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka r81⊂ F, bet r31 ⊂ Y. No tā secinām, ka r81, r71, r94⊂ F ⇒ r(10,3)⊂ I ⇒ r11⊂ L ⇒ 21*.

4.49. Eksistē tikai trīs pieļaujamas r55 pārklāšanas iespējas: ar T, Z vai I. Katrā no šiem gadījumiem iegūsim no 10 rūtiņām: 11, 21, 22, 31, 32, 33, 42, 43, 44 un 55 sastāvošu fragmentu, kurš jāpārklāj ar (T, W), (Z, P) vai (I, P). Tas nozīmē, ka vēl nenoklātajā daļā nedrīkst izmantot ne W, ne P. Tā kā r41 nav pieļaujams pārklāt ar Y, sk. (f), tad atliek tikai iespēja r41⊂ F, bet r61⊂ U (r61, r73 ⊂ N ⇒ 71*). Tagad kāpnīšu nesaliekamība izriet no tā, ka nav piemērotas vietas, kur novietot pentamino V, sk. (f).

4.50. Ņemot vērā (f), rūtiņu 63 pieļaujams pārklāt tikai ar F, N vai P:

(63;41;42)⊂ F ⇒ 31⊂ U, 11⊂ Y ⇒ 55*;

(63;61;72)⊂ F ⇒71⊂ U, 91⊂ Y ⇒ 66⊂ I vai N (ievērot dalāmības principu) ⇒ 97*;

(63;61;71)⊂ N ⇒ 81, 73⊂ L, 91⊂ Y ⇒ 92*;

(63;41;32)⊂ N ⇒ V*;

(63;61;51)⊂ P ⇒ 41⊂ F, 54⊂ F, 11⊂ N, 33⊂ L, 77⊂ Y ⇒ r(10,1)⊂ I ⇒ 11*.

4.51. Analizēsim r11 pārklāšanas iespējas.

11⊂ W ⇒ 33⊂ Y. Ja 33⊂ L ⇒ 66*, jo pēc r66 pārklāšanas ar U izveidotos bez W un P nesaliekams fragments, sk. (f). Ja 43⊂ Y, tad iegūtu pieļaujamā veidā nepārklājamu rūtiņu 54, atkal sk. (f). Tātad 54⊂ Y, 43⊂ N ⇒ 53⊂ L (53⊂ F ⇒ 61*) ⇒ r(10,1) ⊂ I ⇒ 91*.

11⊂ P ⇒ 31⊂ F vai Y.

31⊂ Y ⇒ 66⊂ L ⇒ 64; 51⊂ F ⇒ 61; 73⊂ N ⇒ r*(10,1);

31⊂ F ⇒ 52⊂ F, 66⊂ T, 64⊂ Y ⇒ 81⊂ N ⇒ 91⊂ N [r71,r73⊂ N ⇒ 74⊂ Z ⇒ r*(10,1)] ⇒ 93⊂ L ⇒ 71⊂ V ⇒ 74*.

11⊂ N ⇒ 33⊂ Y ⇒ 31⊂ W, L vai P. Tā kā pirmie divi gadījumi reducējami uz jau apskatīto iespēju 11⊂ W, tad r31 pārklāsim ar P. Ievērojot (f) un to, ka W tagad nav izmantojams, iegūstam r64, r51⊂ F ⇒ 61*.

11⊂ Y ⇒ 66⊂ N ,L, U vai F. Tā kā pirmie trīs gadījumi reducējami uz jau izskatītajiem, tad r66 pārklāsim ar F un attiecīgi r32 – ar W. Ievērojot (f) un to, ka P tagad nav izmantojams, iegūstam 64*.

Beidzot atliek ievērot, ka pēdējā iespēja 11⊂ L iekļaujas pirmajā – 11⊂ W.

4.52.Aplūkosim pentamino V novietošanas iespējas, ievērojot simetrijas un dalāmības principu, kā arī īpašību (K2). Pietiek analizēt šādus 8 gadījumus.

1) $V \supset (41;63;65) \Rightarrow 88 \subset P$, ko nepieļauj īpašība (f).

2) $V \supset (42;64;66) \Rightarrow 21 \subset Y \Rightarrow 41 \subset P$, W vai L:

$41 \subset P \Rightarrow 74$ un $61 \subset F \Rightarrow 71^*$;

$41 \subset W \Rightarrow 63 \subset L$ $(63 \subset F \Rightarrow 71^*) \Rightarrow 77 \subset U$, $r(10,10) \subset N \Rightarrow 81^*$;

$41 \subset L \Rightarrow 76 \subset U$, $r(10,10) \subset I \Rightarrow T \supset r(10,3), r(10,5) \Rightarrow 51^*$.

3) $V \supset (41;43;65) \Rightarrow 11 \subset W \Rightarrow 33$.

4) $V \supset (52;54;77) \Rightarrow 55 \subset I$, $98 \subset Y \Rightarrow r11, r41 \subset (W; L) \Rightarrow r(10,1) \subset N \Rightarrow r^*(10,3)$.

5) $V \supset (53;55;77) \Rightarrow r11$ vai $r41 \subset$ (W vai P) $\Rightarrow 88^*$.

6) $V \supset (33;53;55) \Rightarrow (r11, r51) \subset (W; N) \Rightarrow T^*$.

7) $V \supset (43;63;65) \Rightarrow 76 \subset L$ $(76 \subset U \Rightarrow 66^*) \Rightarrow 44 \subset L$, $11 \subset P \Rightarrow 31^*$.

8) $V \supset (44;64;66) \Rightarrow 11 \subset P$, $31 \subset F$, 51 un $53 \subset N \Rightarrow 63 \subset L$, $76 \subset U$, $r(10,10) \subset I$, $r(10,1) \subset Y \Rightarrow 96^*$.

4.53. Aplūkosim pentamino V novietošanas iespējas, ievērojot (f), (K2), kā arī dalāmības principu. Zemāk piedāvātais pierādījums sastāv no 18 gadījumu analīzes. Kaut gan katra atsevišķa gadījuma analīze ir īsa, nav jādomā,ka neeksistē kāds cits īsāks risinājums.

1) $V \supset (71;93;95) \Rightarrow 81 \subset W$, $r(10,3) \subset I$, $98 \subset U \Rightarrow 61 \subset F$ vai N $\Rightarrow 96 \subset Z \Rightarrow (61;51;41) \subset (F; N) \Rightarrow 11 \subset Y \Rightarrow 77^*$.

2) $V \supset (73;95;97)$. Nesaliekamība uzreiz izriet no (f), jo dalāmības principa dēļ r61 r71 nedrīkst pārklāt ar vienu un to pašu pentamino

3) $V \supset (73;75;95) \Rightarrow 85^*$.

4) $V \supset (41;43;65) \Rightarrow 77 \subset I$, $11 \subset W \Rightarrow 53 \subset U \Rightarrow 99 \subset L \Rightarrow 63 \subset F \Rightarrow 71^*$.

5) $V \supset (51;53;75) \Rightarrow 41 \subset F$
$(41 \subset W \Rightarrow 11 \subset I \Rightarrow 77 \subset N, r(10,1) \subset Y, 61 \subset U, 71 \subset F \Rightarrow 93^*)$
$\Rightarrow 77 \subset Y$, $11 \subset P$, $I \supset r(10,1)$ $(I \supset r(10,1) \Rightarrow 91 \subset N, 81 \subset L \Rightarrow 71^*) \Rightarrow 91 \subset L$ $(91 \subset N \Rightarrow 71^*) \Rightarrow 81 \subset N \Rightarrow 61^*$.

6) $V \supset (61;63;85) \Rightarrow 75 \subset U$, $99 \subset L \Rightarrow 71 \subset N$
$(71 \subset F \Rightarrow 73^*) \Rightarrow 97 \subset T \Rightarrow 83^*$.

7) $V \supset (71;73;95) \Rightarrow 99 \subset U$, $96 \subset L \Rightarrow r^*(10,1)$.

8) $V \supset (82;84) \Rightarrow 91 \subset Y$, $r(10,7) \subset L \Rightarrow 71 \subset W$ vai N
$(71 \subset P \Rightarrow T \supset 77 \Rightarrow 11^*) \Rightarrow 73 \subset L$ $(73 \subset Z \Rightarrow r(10,1) \subset I, 11 \subset N \Rightarrow 33^*) \Rightarrow T \supset 33 \Rightarrow 11 \subset W \Rightarrow 77^*$.

9) $V \supset (83;853;96) \Rightarrow 99 \subset U \Rightarrow (72; 71; 82) \subset$ F vai $W \Rightarrow 95^*$.

10) V $\supset$ (33;53;55) $\Rightarrow$ 43$\subset$ N, 31$\subset$W $\Rightarrow$ 77$\subset$ U, 99$\subset$ L, 61$\subset$ F$\Rightarrow$ 63*.

11) V $\supset$ (43;63;65) $\Rightarrow$ 77$\subset$ I, 11$\subset$ W $\Rightarrow$ 41*.

12) V $\supset$ (53;73;75) $\Rightarrow$ (52; 61)$\subset$ P $\Rightarrow$ nesaliekamība pēc (f).

13) V $\supset$ (63;83;85) $\Rightarrow$ (62; 71)$\subset$ P $\Rightarrow$ nesaliekamība pēc (f).

14) V$\supset$ (73;93;95) $\Rightarrow$ 83$\subset$ N, 71$\subset$ W, r(10,1)$\subset$ I, 99$\subset$ U, r(10,6)$\subset$ L $\Rightarrow$ 11$\subset$ Y $\Rightarrow$ 77*.

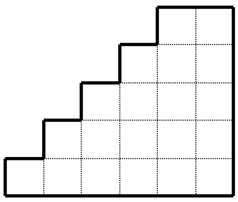
15) V $\supset$ (74;94;9655) $\Rightarrow$ 99$\subset$ U $\Rightarrow$ T $\supset$ 33 $\Rightarrow$ 11$\subset$ W $\Rightarrow$ 77*.

16) V $\supset$ (r83; r(10,3)) $\Rightarrow$ 93$\subset$ N, 81$\subset$ W $\Rightarrow$ 11$\subset$ I (11$\subset$ Y $\Rightarrow$ Z $\supset$31 $\Rightarrow$ 77$\subset$ U $\Rightarrow$ 42*) $\Rightarrow$ 21$\subset$ Y, 41$\subset$ F, 62$\subset$ T $\Rightarrow$85*.

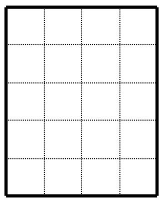
17) V $\supset$ (r84; r(10,4)) $\Rightarrow$ r(10,1)$\subset$ P, 81$\subset$ F $\Rightarrow$ 83$\subset$ N $\Rightarrow$ I $\supset$11 $\Rightarrow$ 21$\subset$ Y $\Rightarrow$ 41*.

18) V $\supset$ (r85; r(10,5)) $\Rightarrow$ 99$\subset$ U $\Rightarrow$ I $\supset$(33;35) (I $\supset$(51;55) $\Rightarrow$ 77*) $\Rightarrow$ T $\supset$(62; 84), Z $\supset$ 77 $\Rightarrow$ 63$\subset$ F, 21$\subset$ Y $\Rightarrow$ 95$\subset$ N (95$\subset$ L $\Rightarrow$ 71*) $\Rightarrow$ 61$\subset$ P $\Rightarrow$ 81*.

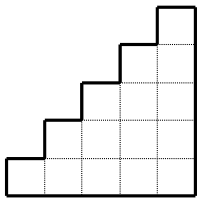
4.54. Pierādīsim, ka kāpnīšu salikums nevar saturēt taisnstūrus 5x4, 5x5 un 5x6. Tas nozīmēs, ka 5x3 ir lielākais taisnstūris, ko var saturēt K salikums. Vispirms noskaidrosim, vai no pentamino var salikt vienlaicīgi trīs 330.–332. zīm. redzamos fragmentus.



330. zīm.



331. zīm.



332. zīm.

Skaidrs, ka neviena šī fragmenta p-salikums nevar saturēt pentamino X, tāpēc tie jāveido no pārējiem 11 pentamino. Ievērosim, ka:
(i1) gan pirmā, gan trešā fragmenta salikšanā jāizmanto P vai W, sk. (f), un līdz ar to:
(i2) taisnstūra 5x4 pārklājums nedrīkst saturēt ne P, ne W;
(i3) ja pirmā fragmenta salikums satur Z, tad tas satur arī Y;
(i4) trešo fragmentu var salikt tikai no PYI , PZY, WLI, WTY vai WVN.

Viegli pārbaudāms, ka ar pentamino U jāpārklāj taisnstūra 5x4 rūtiņas, pretējā gadījumā nebūtu saliekami pat divi fragmenti. Izmantojot (i2), ar tiešu pārbaudi iegūstam, ka taisnstūri 5x4 pieļaujams salikt tikai no UFLV, UFLY vai UVLY. No tā un (i3), (i4) izriet, ka pentamino Y, un tātad arī Z, jāizmanto pēdējo divu fragmentu salikšanā. Tas nozīmē, ka tie jāsaliek no PZY un UFLV. Pēc elementāras pārbaudes konstatējam, ka 1.fragments nav saliekams no atlikušajiem četriem pentamino TWIN.

Pieņemsim, ka kāpnītes satur taisnstūri 5x6. Acīmredzami, ka lielāku taisnstūri kāpnītes saturēt nevar. Tad divu ārpus šī taisnstūra esošo kāpnīšu fragmenta salikšanā jāizmanto (PY; WLI), (PY; WVN), (WL; PYI) vai (WL; PZY). Tas nozīmē, ka taisnstūra 5x6 salikšanā nedrīkst izmantot P, Y, W, kā arī nedrīkst izmantot (L,V) vai (L, N).
No tā, izdarot nelielu pārbaudi, konstatējam, ka taisnstūra 5x6 salikums nedrīkst saturēt pentamino X. Šis rezultāts izriet arī no 3.7. uzdevuma. Tātad jāpārbauda taisnstūra 5x6 saliekamība no FNTUVZ, FILTUZ, FNTUVZ un FINTUV. Izmantojot pārlases metodi, iegūstam, ka nevienā no šiem četriem gadījumiem taisnstūris 5x6 nav saliekams.

Savukārt gadījumā, kad kāpnītes satur taisnstūri 5x5, var uzskatīt, ka šis taisnstūris pārklāj rūtiņu (10,10).

Tad divu vienādu fragmentu, sk. 331. zīm., salikšanā saskaņā ar (i4) jāizmanto (PYI; WVN) vai (PZY; WLI), vai (PZY; WVN). Viegli redzēt, ka "aiz borta" jāatstāj pentamino X, bet taisnstūra 5x6 salikšanā jāizmanto TUFLZ vai TUFNV, vai TUFIL. Simetrijas dēļ pietiek izanalizēt piecas iespējas, kā ar pentamino T pieļaujams pārklāt taisnstūra 5x5 rūtiņas.

$T \supset (11;13) \Rightarrow U \supset 14 \Rightarrow 24 \subset Z \Rightarrow 44^*$;

$T \supset (12;14) \Rightarrow U \supset (32;34) \Rightarrow 11^*$;

$T \supset (21;23) \Rightarrow U \supset (24;25) \Rightarrow 34^*$;

$T \supset (22;24) \Rightarrow U \supset (11$ vai $14) \Rightarrow 41^*$ vai 45^*;

$T \supset (32;34) \Rightarrow 52^*$.

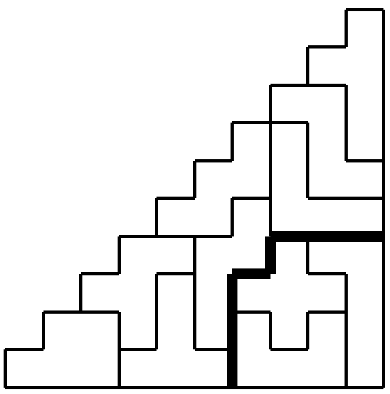
Vēl jāaplūko šādi 4 gadījumi:

1. Taisnstūris 5x4 pārklāj r51 un r98. Tad r55$\subset$ I $\Rightarrow$ r*(10,10).
2. Taisnstūris 5x4 pārklāj r52 un r99. Tad r(10,10)$\subset$ I $\Rightarrow$ (r11; r41)$\subset$ (P, Y), jo, saskaņā ar augstāk izklāstīto, pentamino L ir jāizmanto taisnstūra 5x4 salikšanā. simetrijas dēļ var uzskatīt, ka r51$\subset$ N, bet r(10,1)$\subset$ W $\Rightarrow$ r*71.
3. Taisnstūris 5x4 pārklāj r61 un r(10,8). Tad (10,9); (10,10); 76$\subset$ L $\Rightarrow$ 99$\subset$ I $\Rightarrow$ 65$\subset$ F, 51$\subset$ W, 11$\subset$ P$\Rightarrow$71*
4. Gadījums, kad taisnstūris 5x4 pārklāj r62 un r(10,9), pēc r(10,10) pārklāšanas reducējas uz jau aplūkoto gadījumu.

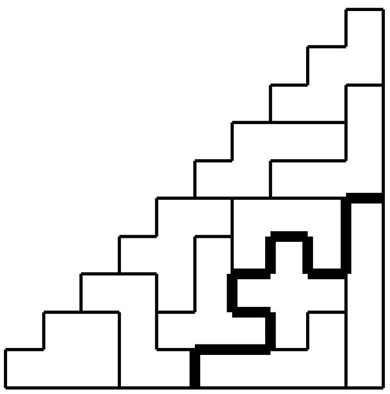
4.55. Gadījumos a) un b) vajadzīgos kāpnīšu salikumus var iegūt attiecīgi no 219. un 223. zīm.(sk. arī 226. zīm.), kur simetriskā pentamino lomā ir V, bet 10-mino lomā tas kāpnīšu fragments, ko pārklāj I un L. Gadījumā c) divi vajadzīgie salikumi parādīti 333.–334. zīm.

4.56. Sk. 335. zīm.

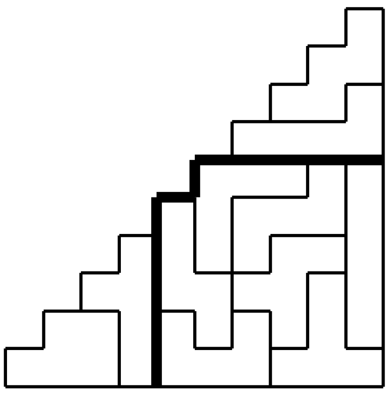
4.57. Kāpnītes var “sazāģēt” septiņās p-figūrās: P, Y, I, (N,T), L, (V,Z) un (W, F, U), sk. 336. zīm.



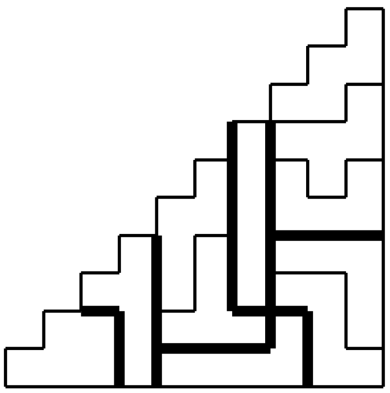
333. zīm.



334. zīm.



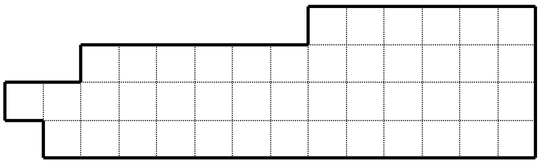
335. zīm.



336. zīm.

4.58. Nav saliekamas 229. zīm redzamās kāpnes. 228. zīm. parādītajām kāpnēm eksistē tikai trīs salikumi. Atrodiet tos patstāvīgi! Atrast pa vienam 230.–231. zīm. redzamo kāpņu salikumam izdodas samērā ātri.

4.59. Ievērosim, ka pietiek pierādīt 336. zīm. redzamās figūras nesaliekamību no F, L, P, T, U, V, W, X un Z.



337. zīm.

Aplūkosim pentamino X novietošanas iespējas.

X $\supset$11$\Rightarrow$ Z $\supset$ 22 [Z$\supset$ 12 $\Rightarrow$ r*(3,10)] $\Rightarrow$ Z $\supset$ 42 (Z $\supset$ 21 $\Rightarrow$ 31$\subset$ P, 23$\subset$ U $\Rightarrow$ 36*) $\Rightarrow$ (35; 38)$\subset$ (W; P) vai (L; P) $\Rightarrow$ 48$\subset$ L, 29$\subset$ U $\Rightarrow$ r*(4,13).

X $\supset$13$\Rightarrow$ r*(4,11).

X $\supset$14$\Rightarrow$ r(4,13)$\subset$ L, r(3,13)$\subset$ U $\Rightarrow$ V $\supset$(25; 46)
(V $\supset$24; 45 $\Rightarrow$ V $\supset$22 $\Rightarrow$ 31$\subset$ F, 42$\subset$ P $\Rightarrow$ 46$\subset$ T $\Rightarrow$ 13*) $\Rightarrow$
(13; 38)$\subset$ (P; Z) vai (T; P) $\Rightarrow$ 31$\subset$ F $\Rightarrow$24*.

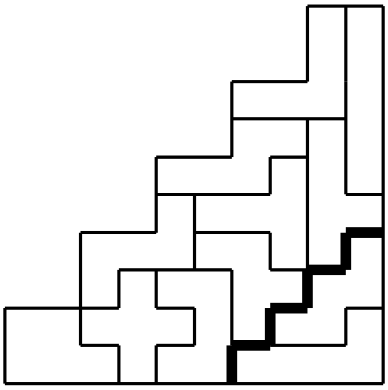
X $\supset$48 $\Rightarrow$ 26$\subset$ U, L vai P $\Rightarrow$ P atrodas pa kreisi no X, jo pretējā gadījumā 26$\subset$ U, 31$\subset$ F un izveidojas bez P nepārklājams 10-mino.
$\Rightarrow$ W $\supset$11 $\Rightarrow$ 49$\subset$ V [49$\subset$ L $\Rightarrow$ r*(4,13)] $\Rightarrow$ 13$\subset$ L $\Rightarrow$ r*(2,11).

X $\supset$49$\Rightarrow$ 12$\subset$ W $\Rightarrow$ 48$\subset$ V [48 $\subset$ L, 37$\subset$ U $\Rightarrow$ Z $\supset$ 44, 13$\subset$ P $\Rightarrow$ r*(4,13)] $\Rightarrow$ 31$\subset$ F [31$\subset$ P $\Rightarrow$ 21$\subset$ F, 23$\subset$ U $\Rightarrow$13$\subset$ L $\Rightarrow$ r*(4,13)] $\Rightarrow$ 35$\subset$ P $\Rightarrow$ Z $\supset$42 $\Rightarrow$ T $\supset$ r(4,10) $\Rightarrow$ r*(4,13).

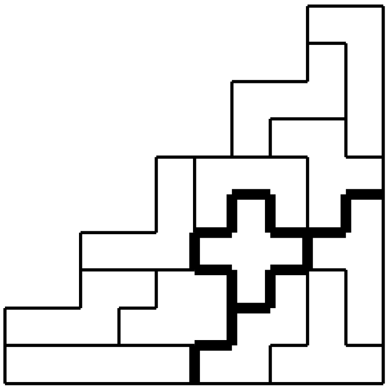
X $\supset$ r(4,10) $\Rightarrow$ 14*.

X $\supset$ r(4,11) $\Rightarrow$ 16$\subset$ L, r(2,11)$\subset$ U $\Rightarrow$ V $\supset$ (25; 46) [V $\supset$(24; 45) $\Rightarrow$ 31$\subset$ F, 42$\subset$ P, r(4,10) $\subset$ T $\Rightarrow$ 46*] $\Rightarrow$ r(4,10) $\subset$ F, 12$\subset$ W, 31$\subset$ P $\Rightarrow$ 35*.

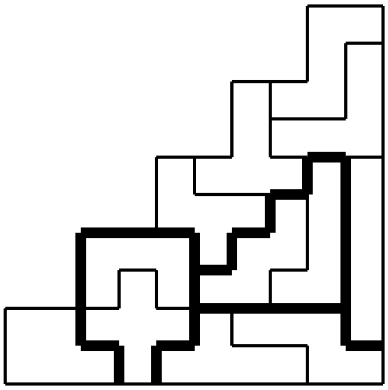
4.60. Gadījumā b) vajadzīgais salikums parādīts 338. zīm., bet pārējos trīs gadījumos atbilde redzama 339. zīm. Eksistē arī citi salikumi, kuri sadalās prasītā veida simetriskās sastāvdaļās.



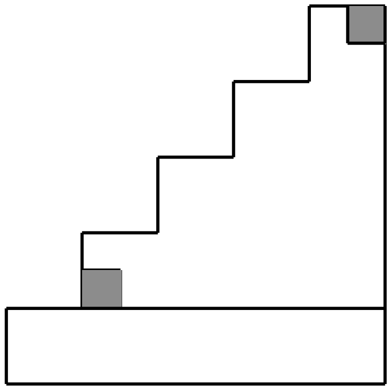
338. zīm.



339. zīm.



340. zīm.



341. zīm.

LITERATŪRA

1. Golombs S. *Polimino.* - M., 1975, 208 lpp. (kr. val.)
2. Bols U., Kokseters G. *Saistošā matemātika un esejas*. - M., 1986, 172 lpp. (kr. val.)
3. *Matemātiskais dārziņš*. - M., 1983, 494 lpp. (kr. val.)
4. Gardners M. *Matemātiskās spēles un izklaide* - M., 1971, 510 lpp. (kr. val.)
5. Hardy R. *Gry W Figury*. Warszawa, 1983, 116 c.
6. Lindgrēns G. *Saistoši sagriešanas uzdevumi*. - M., 1977, 256 lpp. (kr. val.)
7. Močalovs L.P. *Matemātiskās spēles*. - M., 1980, 126 lpp. (kr. val.)
8. Golomb S. *Tiling with polyominoes*, J. Combin. Theory 1, No.2 (1966), 280-296.
9. Golomb S. *Polyominoes which tile rectangles*, J. Combin. Theory, Series A51 (1989), 117-124.
10. Dahlke K.A. *The Y-hexomino has order 92*, J. Combin. Theory, Series A51 (1989), 125-126.
11. Andžāns A., Andžāne D. *Izdales materiāls matemātikā darbam ar spējīgākajiem 5.-9. klašu skolēniem*, IV daļa, Rīga, 1992, 66 lpp.
12. Muceniece I. *Algoritmiskie uzdevumi ar polimino*. "Zvaigžņotā debess", 1986./87. Ziema, 40-48.
13. "Kvants", 1977, Nr. 6 (kr. val.).
14. "Kvants", 1977, Nr. 2 (kr. val.).
15. "Zinātne un dzīve", 1968, Nr. 1 (kr. val.).
16. "Zinātne un dzīve", 1967, Nr. 4 (kr. val.).
17. Martin G. E. *Polyominoes. A guide to puzzles and problems in tiling.*- The Math Assoc. of America, 1991, 184 p.
18. "Zinātne un dzīve", 1988, Nr. 6 (kr. val.).
19. Djudenī H. *Kenterberijas matemātiskās spēles.- M., Mir,*1979, 352 lpp. (kr. val.)
20. Djudenī H. *520 atjautības, pacietības un domu spēles.*- Rīga, "Zvaigzne", 1979, 328 lpp. (kr. val.)
21. Liu A. *Golombs twelwe pentomino problems* (nepublicēts raksts)
22. Cibulis A. *A remarkable figure which can not be formed by pentominoes,* Mathematics and Informatics Quarterly, 1993, v3, n4, p. 137-139.
23. Bouwkamp C.J. *simultaneous 4 by 5 and 4 by 10 pentomino rectangles,* J. of Recreational Mathematics, 1970, 3, p.125.
24. Liu A. *Pentomino problems,* J. of Recreational Mathematics, 1982, 15, p.8-12.

25. Verbakel J. M. M. *The F- pentacube problem,* J. of Recreational Mathematics, 1972, 5, p. 20-21.
26. “Zinātne un dzīve”, 1993, Nr. 3 (kr. val.).
27. Cibulis A. and Grishulis A. *Triplicated polyominoes and Golomb’s problem 88,* Mathematics and Informatics Quarterly, 1996, v6, n4, p. 195-198.

Dažas adreses *Internetā*

http://mathworld.wolfram.com/
http://www.mathpuzzle.com/
http://www.gamepuzzle.com/
http://www.math.brown.edu/~reid/Polyomino/index.html