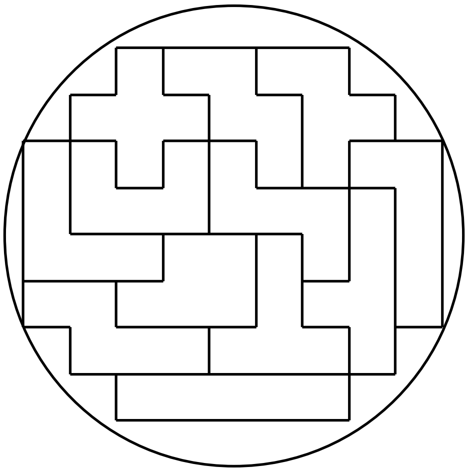
A. Cibulis

PENTAMINO

I DAĻA



Latvijas Universitāte
Rīga 1998

SATURS

Priekšvārds

Mēriet sava prāta lielumu pēc ēnas, ko tas met.

R. Braunings

Šī grāmata veltīta pentamino problemātikai. Solomons Golombs savas grāmatas [1] priekšvārdā rakstīja: "Vienā no ziņojumiem, kuru 1953. gadā nolasīju Harvardas matemātiskajā klubā, es neuzmanīgi "atklāju" polimino un no tā laika esmu nolemts nemitīgi rūpēties par tā eksistenci, papildināšanu un attīstīšanu, jo pār mani gāzās tiešām neizsīkstoša jautājumu, uzdevumu, atrisinājumu plūsma. Raksta ļaudis no visām zemes malām, visu sabiedrības slāņu pārstāvji - no vadošo universitāšu padomju priekšsēdētājiem līdz skolniekiem un pat ... ieslodzītajiem. Visus interesē polimino."

Daudziem šķiet (starp tiem atrodas pat matemātiķi), ka par pentamino jau zināms viss. Kādreiz līdzīgs priekšstats man bija izveidojies par matemātiku kopumā. Vidusskolu beidzot, mans redzesloks bija tik aprobežots, ka tagad tā šaurība saistās ar cilvēku, par kuru tautā mēdz teikt "tik izdēdējis, ka nemet ēnu". Toreiz nezināju, ka matemātikā eksistē arī atklātas (neatrisinātas) problēmas. Krietni vēlāk sāku apzināties, ka starp atklātajām problēmām var atrast arī tādas "saliņas", kuras pieejamas pat skolēniem. Atsevišķi skolēni vēlāk, jādomā, ar dziļu pateicību atcerētos savus skolotājus, kuri pirmie būtu informējuši viņus ne tikai par šādu "saliņu" pastāvēšanu, bet arī ieinteresējuši meklēt un atklāt ceļus uz kādu no tām.

No vienas puses, ar ļoti sarežģītām matemātiskām problēmām, kas saistītas ar polimino tematiku, nodarbojas visaugstākās kvalifikācijas speciālisti. No otras puses, vienkāršākie polimino spēles varianti labi noder pat pirmskolas vecuma bērnu trenēšanā, kā arī viņu spēju noteikšanā. Polimino tematika ir piemērota fakultatīvām nodarbībām skolā, patstāvīgiem skolnieku pētījumiem, konkursu un olimpiāžu uzdevumu sastādītājiem. To var izmantot kā sava veida piedevu skolas programmām matemātikā. Kā zināms, labs matemātisks uzdevums var sagādāt prieku, radīt aktīvu interesi par matemātiku, var arī būt kā stimuls dzīves ceļa izvēlē. Tāpat zināms, ka "skaistākie" vai kādā atsevišķā aspektā piemērotākie uzdevumi "pārceļo" no vienas grāmatas uz otru. Šajā grāmatā jūs, protams, sastapsiet vairākus uzdevumus "ieceļotājus". Daži no tiem, piemērojoties vietējiem apstākļiem, būs mainījuši savu veidolu, citi - atstājuši pēcnācējus. Tomēr ceru, ka ikviens lasītājs atradīs vismaz vienu jaunu uzdevumu, kurš, viņaprāt, būs ne mazāk skaists kā minētie uzdevumi. Jaunā materiāla deva, ko šeit sastapsiet, būs lielāka nekā tas parasti raksturīgs attiecīga tipa literatūrai. Te atradīsiet atbildes gandrīz uz visiem pentamino uzdevumiem, kuri S. Golomba grāmatā iekļauti neatrisināto uzdevumu sarakstā. Varēsiet arī iepazīties ar dažiem figūru nesaliekamības pierādījumiem, kuri ir vienkāršāki un īsāki nekā S. Golomba grāmatā [1] dotie. Vairums skaitlisko rezultātu ir iegūti ar datora palīdzību. Par tiem es esmu īpaši pateicīgs G. Radziņam, kurš izveidoja programmu pentamino uzdevumu analīzei un pats arī veica piedāvāto uzdevumu realizāciju uz datora. Jāatzīmē, ka daudzi uzdevumi sastādīti, analizējot ar datoru iegūto informāciju. Neapšaubāmi, dators var būt labs palīgs, taču tā loma uzdevumu risināšanā nereti tiek pārspīlēta.

Te Jūs atradīsiet daudzveidīga satura un dažādas grūtību pakāpes uzdevumus: no vienkāršiem līdz tādiem, kurus vēl neviens nav atrisinājis. Daži no pēdējiem, jādomā, ir neatrisināti tikai tāpēc, ka neviens ar tiem nav nopietni nodarbojies. Taču, mēģinot iekarot kādu no neatrisinātajām problēmām, nevajadzētu sevišķi balstīties uz "labu" laimi, jo, kā teicis B. Paskāls: *"Nejaušus atklājumus izdara tikai sagatavoti prāti."*

Vairumam uzdevumu doti norādījumi un atrisinājumi. Ja jūs samērā ilgi nevarat atrisināt uzdevumu, jūtat, ka vajadzīga tikai kāda uzvedinoša doma, un easat pietiekoši gudrs, lai saprastu, ka priekšlaicīga ieskatīšanās atbildē nav labākais veids, kā attīstīt prātu, tad norādījumi ir domāti tieši jums.

Ievērojot angļu rakstnieka Fagē atziņu, ka *"Grāmatas, kuras nav izpelnījušās lēnu lasīšanu, vispār nav pelnījušas, ka tās lasa"*, ceru, ka šī grāmata nebūs izlasāma un apgūstama ātri, bez piepūles, bez rakstāmpiederumiem un pentamino komplekta.

Izsaku pateicību A. Andžānam, kurš ir laipni sniedzis ne tikai konsultācijas un matemātisku informāciju, bet arī rosinājis un atbalstījis mani grāmatas tapšanas procesā.

Autors

1. nodaļa.
KAS IR PENTAMINO?

Pentamimo spēle diemžēl nav nemaz tik pazīstama un populāra, kā to mēdz aprakstīt literatūrā. No vienas puses, var atrast ne mazumu tādu cilvēku, kuri par pentamino vispār nav neko dzirdējuši. No otras puses, gadās sastapt dažādas pašpārliecinātības pakāpes "zinātājus', saskaņā ar kuru viedokli pentamino jau ir noiets etaps (vismaz viņiem). Zināmu priekšstatu par pentamino var iegūt no instrukcijām, pamācībām vai pielikumiem, ko matemātiskajai rotaļlietai - pentamino pievieno tās ražotāji. Turpmāk vārdiem matemātiskā rotaļlieta lietosim arī sinonīmu MR.

Ikdienā ar "pentamino" nereti saprot spēli, kuras komplektā ietilpst 1. zīm. parādītās figūras un ar kurām jāveic "salikšanas" uzdevumi. MR - pentamino laiku par laikam dažādos noformējumos un - pievērsiet uzmanību! - pat ar dažādiem nosaukumiem parādās pārdošanā. Risinātājam jāsaliek spēles pielikumā norādītās figūras. Nav izslēgts, ka jūsu pūles salikt kādu no šīm figūrām jau iepriekš nolemtas neveiksmei. Kāpēc? Pavisam vienkārši, var gadīties, ka figūra ir nesaliekama. Pielikumā, kurš pievienots kādai 1987. g. ražotai MR - pentamino, nesaliekamo figūru ir apmēram 15%. Nav jādomā, ka te vainojami tikai pielikuma veidotāji, drīzāk "brāķis" ir radies nolaidības dēļ. Metodes vai paņēmienus, kā pierādīt, ka figūra nav saliekama no pentamino, atradīsiet grāmatas 2. daļā. Tālākajā tekstā atradīsiet arī norādījumus, padomus, kā nopirkto MR - pentamino var uzlabot, modificēt, pilnveidot, sarežģīt.

Kam ir domāta pentamino spēle? Minētajās pamācībās rakstīts, ka:

- spēle PENTAMINO domāta vidējo un vecāko klašu skolēniem;
- spēle "Polimino" ir paredzēta bērniem no astoņiem līdz četrpadsmit gadiem;
- spēle "Siluets-1" paredzēta skolas vecuma bērniem no 7 līdz 15 gadiem.

Te pentamino apzīmēšanai pēdējās divās pamācībās lietoti ne tik piemēroti nosaukumi. Protams, nav jāpiekrīt šādiem vecuma ierobežojumiem. Ironiski izsakoties, nodarboties ar pentamino nav kaitīgi nevienā vecumā.

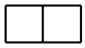
Ar polimino, kas ir vispārīgāks jēdziens nekā pentamino, nesaraujami ir saistīts amerikāņu zintnieka Solomona Golomba vārds. Kaut gan S. Golombs ir augsta līmeņa speciālists vairākās matemātikas nozarēs, plašu popularitāti viņš ieguva tieši ar polimino. 1953. gadā, būdams vēl Harvardas universitātes matemātikas nodaļas aspirants, viņš nolasīja referātu par polimino. Uzskata, ka ar šo referātu un tam sekojošo publikāciju "Šaha galdiņi un polimino" arī aizsākās polimino vēsture.

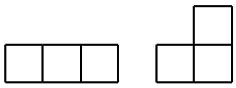
Tiesa, atsevišķi polimino tipa uzdevumi bija zināmi arī agrāk. Pirmā publicētā (1907.) uzdevuma par pentamino autors ir izcilais atjautības uzdevumu un spēļu izgudrotājs - anglis H. Djudenī. Šim uzdevumam grāmatas 2. daļā ir veltīts atsevišķs punkts.

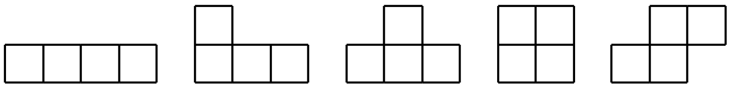
1.1. Pentamino definīcija

Vai šādu norādījumu:

1-mino (tetramino) 

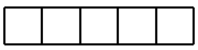
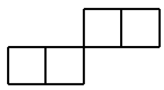
2-mino (domino) 

3-mino (trimino) 

4-mino (tetramino) 

jums pietiek, lai definētu n-mino vai vispārīgāku jēdzienu polimino?

Vai der definīcija: "Polimino ir figūras, kas sastāv no vienības kvadrātiņiem, pie tam katram kvadrātiņam blakus atrodas vēl viens vienības kvadrātiņš, ar kuru tam ir kopēja mala. Jā figūra sastāv no n vienības kvadrātiņiem, to sauc par n-mino"?

Pirmkārt, te nav precizēts, ka runa ir par plaknes figūrām. Otrkārt, šāda definīcija pieļauj figūras, kuras sastāv no vairākām savstarpēji nesaistītām daļām. Piemēram, figūra, kas iegūta no taisnstūra  , izņemot tam vidējo rūtiņu, sastāv no četriem vienības kvadrātiem un atbilst šādas definīcijas prasībām. Taču tā nav iekļauta visu dažādo tetramino kopā. Kā precizēt definīciju? Gluži vienkārši - kāds iesauksies - jāpieprasa, lai figūra būtu sakarīga. Matemātikā tas nozīmē, ka jebkurus divus figūras punktus var savienot ar ceļu (nepārtrauktu līniju), kurš neiziet ārpus dotās figūras. Izrādās, ka ar šo papildinājumu arī vēl nepietiek, jo figūra  ir sakarīga, bet nav tetramino. Beidzot, vēl varētu pieprasīt, ka ceļš, kas savieno divus figūras punktus, nedrīkst iet caur vienības kvadrātiņu virsotni. Nu, tagad gan viss nepieciešamais ir ievērots. Jā, bet vai nevar uzrādīt "labāku" definīciju? Var.

Taču vispirms vairākas vecāko klašu skolēnu (Latvijas matemātikas olimpiāžu uzvarētāju vai Mazās matemātikas universitātes dalībnieku) dotās definīcijas:

- Figūru komplekts, kurā viena detaļa sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiņiem, kuri savienoti savā starpā;

- Spēle, kas sastāv no vairākām figūrām. Figūras sastāv no 5 kvadrātveida vienībām, ar kurām var veidot dažādas ģeometriskas figūras;

- Figūru komplekts, kurā ir figūras, kas sastāv no 5 vienības kvadrātiņiem, kuri salikti kopā dažādās kombinācijās;

Figūriņu komplets, kurā katra figūriņa sastāv no piecām vienībām, kas izvietotas dažādos stāvokļos. Neviena figūriņa nav vienāda ar otru;

- Visu iespējamo plaknes figūriņu, kas sastāv no pieciem, ar malām savstarpēji savienotiem kvadrātiņiem, komplektu sauc par pentamino;

- Pentamino ir figūra, kuru veido 5 kvadrāti, pie kam katram ir vismaz viena kopīga mala ar citu. Visi ir savstarpēji savienoti;

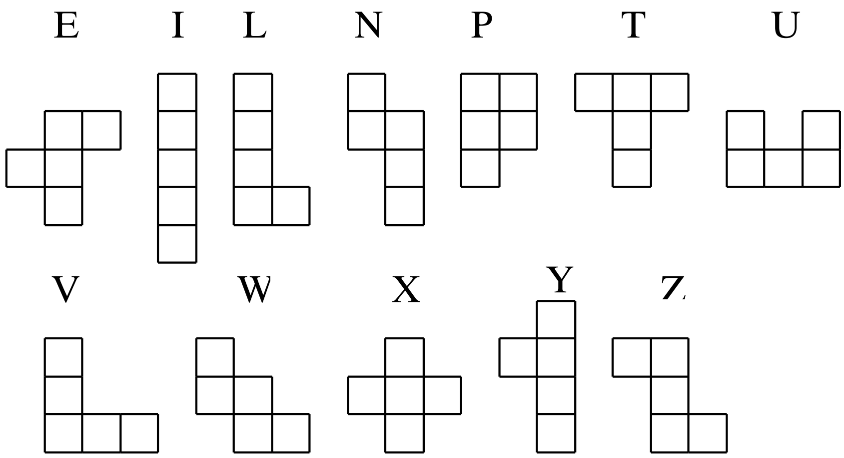
- Par pentamino sauc figūru, kas sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem un visus kvadrātus var apstaigāt no kvadrātu centriem perpendikulāri šķeļot kvadrāta malu;

Pentamino ir visas tās figūras, kas sastāv no 5 savstarpēji saistītiem kvadrātiem. Tas ir, katram kvadrātam ir vismaz 1 kvadrāts, ar kuru tam ir kopēja mala (protams plaknē).

Katrai no šīm "definīcijām" atrodiet matemātiska rakstura trūkumus.

Tagad divas nevainojamas pentamino definīcijas.

1. definīcija. Par **pentamino s**auc jebkuru no šādām divpadsmit figūrām



1. zīm.

Turklāt pentamino netiek uzskatīti par dažādiem, ja tie iegūstami viens no otra ar pagriešanu vai "apgāšanu" (spoguļattēlošanu).

Lai saīsinātu pierakstus, mēs bieži lietosim pentamino apzīmēšanai burtus F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y un Z, sk. 1. zīmējumu..

2. definīcija. Par **pentamino** sauc plaknes figūru, kas iegūstama no tetramino, pievienojot tam vienības kvadrātiņu tā, lai tam būtu kopēja vismaz viena mala ar kādu no tetramino kvadrātiem.

Pirmā definīcija ir uzskatāmāka, ērtāka praktiskajām vajadzībām. Toties otrajā definīcijā iekļautais tā saucamais rekurences princips dod paņēmienu, kā definēt n-mino, ja zināms, kas ir (n-1)-mino.

3. definīcija. Par **polimino** sauc plaknes figūru, kuru var iegūt, ja vienības kvadrātam pievieno citus vienības kvadrātus tā, lai katram nākamajam pievienotajam kvadrātam būtu kopēja mala ar kādu no iepriekš izmantotajiem vienības kvadrātiem. Ja polimino sastāv tieši no n vienības kvadrātiem, to sauc par **n-mino**.

Tātad zinātājs uz nodaļas virsraksta jautājumu varētu atbildēt ļoti īsi: pentamino ir n-mino speciāls gadījums, kad n=5.

Kā jēdzienus "n-mino", "polimino" definē matemātiskajās enciklopēdijās? Ar izbrīnu konstatēju, ka nevienā no man zināmajām (vismaz līdz šim) matemātiskajām enciklopēdijām vai matemātisko terminu skaidrojošām vārdnīcām šie jēdzieni nav iekļauti.

1.2. Par n-mino skaitu p_n

Mums jau zināms, ka eksistē tikai viens monomino, tikai viens domino, divi trimino, pieci tetramino un divpadsmit pentamino jeb $p_1=1$, $p_2=1$, $p_3=2$, $p_4=5$, $p_5=12$. Kādi būs nākamie skaitļi?

1.1. uzdevums. Ievērosim, ka

$$p_n = 2p_{n-1}+n-3, \quad n=2, 3, 4, 5.$$

Vai šī vienkāršā sakarība izpildīsies arī visiem nākamajiem n?

Ja izpildītos, tad visu dažādo 6-mino jeb heksamino skaitam vajadzētu būt vienādam ar $2\cdot12+3=27$.

1.2. uzdevums. Uzzīmējiet visus heksamino!

S. Golomba grāmatā [1, 119.lpp.] dotas pirmās p_n vērtības, taču pēdējā no tām p_{10} jau ir "novecojusi". Te jāatzīmē, ka jau nākamajā savas grāmatas lappusē autors norāda uz domstarpībām, kas saistītas ar šo skaitli. Grāmatā [2, 123.lpp.] dotas jau pirmās sešpadsmit p_n vērtības. Cik zināms, pagaidām visvairāk p_n vērtību ir izskaitļojis D. Redelmeijers [3, 316.lpp.]. Lūk, kādi ir šie skaitļi:

n	p_n	n	p_n
1	1	13	238591
2	1	14	901971
3	2	15	3426576
4	5	16	13079255
5	12	17	50107909
6	35	18	192622052
7	108	19	742624232
8	369	20	2870671950
9	1285	21	11123060678

10	4655	22	43191857688
11	17073	23	168047007728
12	63600	24	654999700403

1.tabula

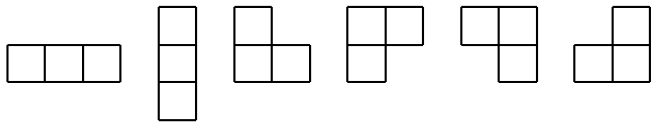
Nevienam nav izdevies atrast piemērotu formulu, ar kuras palīdzību varētu pārbaudīt šos un, teiksim, aprēķināt vēl dažus nākamos skaitļus. Ir izteikts arī viedoklis, ka tāda formula (efektīvs algoritms) nemaz neeksistē. Kā tādā gadījumā tiek aprēķināti šie skaitļi un vai tiem var ticēt? Viegli iedomāties, ka šo skaitļu noteikšanā tiek izmantoti datori. Taču sastādīt piemērotu programmu, kuru realizējot uz datora, varētu aprēķināt p_n vērtības, nebūt nav vienkāršs un skolēna līmenim atbilstošs darbs. Skaitļiem, kas iegūti ar datora palīdzību, "saprāta robežās" gan jātic, gan par tiem jāšaubās. Lai mūsu šaubas mazina tas, ka šo skaitļu aprēķināšanas darbā ir iesaistīti matemātiķi, un vēl jo vairāk tas, ka vienu un to pašu rezultātu neatkarīgi viens no otra iegūst vairāki cilvēki.

Tālāk tiek dots samērā garš, bet intriģējošs D.Klarnera citāts, kā arī viņa apsvērumi par to, cik sarežģītas un ar datoriem "neizzināmas" problēmas, kas saistītas ar n-mino skaitu p_n, var rasties matemātikā.

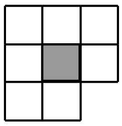
"Kad mums neizdodas atrast atslēgu grūtam uzdevumam, nereti ir derīgi mēģināt atrisināt vienkāršāku (ar to saistītu) uzdevumu. Savā disertācijā es pierādīju, ka $(t_n)^{1/n}$ *pie* $n \to \infty$ *tiecas uz kādu robežu* θ. *Eksistē visai interesanta hipotēze, saskaņā ar kuru attiecību* p_2/p_1, p_3/p_2, *... virkne aug, t.i.,*

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} < \frac{p_{n+1}}{p_n} \quad \textit{pie } n=2, 3, \ldots .$$

Ja šī hipotēze pareiza, tad attiecību virkne p_{n+1}/p_n , $n=1, 2, \ldots$ *augot tiecas uz robežu, kas vienāda ar Klarnera konstanti* θ. *Katra no šīm attiecībām varētu kalpot par* θ *apakšējo robežu. Tai skaitā,* $p_{24}/p_{23} < \theta$, *t.i.,* $3{,}8977\ldots < \theta$, *kas pārspēj konkurējošo novērtējumu no apakšas* $3{,}72\ldots < \theta$. *Saprotams, par šo uzlabojumu mēs būsim tiesīgi runāt tikai pēc tam, kad būs pierādīta hipotēze"* - raksta D.Klarners [3, 314-315. lpp.]. Paskaidrosim, ka te ar t_n apzīmēts visu tā saucamo translācijas tipa n-mino skaits. Tā, piemēram, $p_3=2$, bet $t_3=6$, sk. 2. zīm., $t_4=19$.



2. zīm.



3. zīm.

Zināms, ka 3,72 < θ< 4,65. Kā uzsver pats Klarners, robeža θ ir zināmā mērā iluzors lielums: neviens no θ decimālpieraksta cipariem līdz šim nav zināms. Iespējams, ka neeksistē labs algoritms θ aprēķināšanā, ka, izņemot divus - trīs pirmos ciparus, visi pārējie θ decimālpieraksta cipari ir "neizzināmi", t.i., nav izskaitļojami vairāku cilvēku paaudžu dzīves laikā.

Vēl atzīmēšu, ka nedaudz informācijas, tai skaitā maldinošas, par Klarnera konstanti var atrast plašāk pazīstamajā literatūrā [2, 123.-124.lpp.].

Dažiem droši vien radīsies jautājums: vai 1. tabulā uzrādītās p_n vērtības attiecas arī uz "šaubīgajām" figūrām ar caurumiem (piemēram, uz figūru, kuru iegūst, ja kvadrātam 3×3 izņem centrālo rūtiņu)? Šāds jautājums vēl neradās heksamino gadījumā. Mazākais n, kuram eksistē n-mino ar "caurumu", ir 7. Eksistē viens vienīgs 7-mino ar šo īpašību, sk. 3. zīm.

Lai kaut vai daļēji izjustu ar n-mino pārskaitīšanu saistītās grūtības un pie reizes atbildētu uz jautājumu par "šaubīgajām" figūrām, risiniet uzdevumu.

1.3. uzdevums. Uzzīmējiet visus dažādos 7-mino jeb heptamino. (Sk. 3.definīciju.)

Labs rezultāts, ja to varat izdarīt dažu stundu laikā.

2. nodaļa
PROFESORA PENTAMINO UZDEVUMI

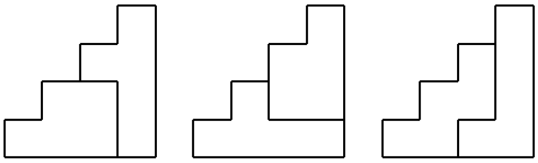
Katrs uzdevums, ko es atrisināju,
kļuva man par paraugu, kurš vēlāk
kalpoja citu uzdevumu risināšanā.
R.Dekarts

Lai atrisinātu šīs nodaļas uzdevumus, nav vajadzīgas speciālas zināšanas matemātikā, kuras pārsniegtu vispārizglītojošās skolas mācību programmu ietvarus. Taču tas nebūt nenozīmē, ka tie jums nesagādās " galvassāpes", ka jebkuru no tiem varēsiet atrisināt dažu stundu laikā. Uzdevumi kopumā nav vienveidīgi ne pēc satura, ne pēc formas, Vairums no tiem ir oriģināli. Daži uzdevumi būs pavisam vienkārši. Citi, šķiet, būs pārāk "cieti rieksti" arī daudz pieredzējušiem un matemātikas olimpiādēs rūdītiem risinātājiem, Te tiek domāti tie uzdevumi, kuru risināšanā vajag pacietību, neatlaidību, darba spējas, bet tik lielā mērā, kādā vairumam no mums šīs īpašības nepiemīt. Ja arī kādu uzdevumu neizdodas atrisināt pēc jūsu ieskatiem pārmērīgi ilgi, vēl nesteidzieties noniecināt savas spējas; ļoti iespējams, ka šo uzdevumu nevarēja atrisināt arī S.Golombs. Lai nu kā, nav vēlams ieskatīties atbildēs, pirms neesat iepazinušies ar norādījumiem.

Vairāki uzdevumi ir ļoti tuvu tai robežai, aiz kuras sākas ***nezināmais***. Turklāt, dažus no tiem vispārinot, ātri vien var nonākt pie neatrisinātām problēmām, kuras tālu pārsniedz pentamino tematiku un ir svarīgas vairākās citās matemātikas nozarēs.

Šajā un arī turpmākajās nodaļās precizitātes un īsāku pierakstu dēļ dažkārt lietoti apzīmējumi p-figūra, p-salikums,... un tml.

Figūru sauc par ***p-saliekamu***, ja tā ir saliekama no pentamino un neviens no tiem nav izmantots vairākkārt. p-saliekamu figūru sauc par ***p-figūru***. Trīs vienas un tās pašas figūras p-salikumi ir parādīti 4. zīm.



4. zīm.

Taču pirmie divi salikumi ir iegūstami viens no otra, piemēram, ar spoguļattēlošanu.

Divus ***p-salikumus neuzskata par dažādiem***, ja tie iegūstami viens no otra ar pagriešanu vai spoguļattēlošanu (jeb "apgāšanu").

Turpmāk, ja nebūs īpašu atrunu, ar vārdiem "atrast visus salikumus", "salikt k-veidos", "var salikt no pentamino" utt. tiks domāti dažādi p-salikumi.

Uzdevumi nav neatkarīgi viens no otra, tāpēc ieteicams tos risināt numuru pieaugšanas secībā.

2.1. No profesora Pentamino figūru kolekcijas

Atšķirībā no daudziem citiem profesors Pentamino kolekcionē p-figūras. Viņš nav optimists, kurš tic, ka var savākt visas p-figūras. Pirmkārt, viņš nemaz nezin, cik vispār ir p-figūru. Otrkārt, viņam nav ne tik daudz materiālu, ne arī vietas. Figūras taču būtu no kaut kā jāizgatavo un kaut kur jāizvieto. Treškārt, viņš nenodzīvotu tik ilgi, kamēr izgatavotu visas p-figūras.

Līdzīgi kā "Sēņu rekordistu" izstādē, kur ir savāktas vissmagākā, visaugstākā, visindīgākā, vissarkanākā,... sēnes, tā profesora Pentamino kolekcijā visvērtīgākie eksponāti ir tās figūras, kas tai vai citā aspektā ir visievērojamākās (vismaz uz doto laika brīdi).

2.1. uzdevums. Vai eksistē figūra, kuru var salikt divos veidos no vieniem un tiem pašiem diviem pentamino?

2.2. uzdevums. Atrast trīs pentamino un divpadsmit simetriskus 10-mino, tādus, ka katru no tiem var salikt ar kādiem diviem no izvēlētajiem (atrastajiem) trim pentamino.

2.3. uzdevums. Vai eksistē simetrisks 10-mino, kuru no pentamino var salikt

a) tieši trīs veidos;

b) četros veidos?

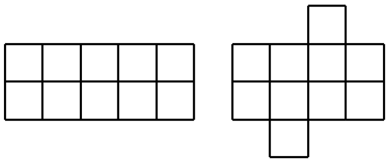
2.4. uzdevums. Vai eksistē divi pentamino, no kuriem var salikt tieši trīs simetriskus polimino?

2.5. uzdevums. Pentamino pāri sauksim par ***veiksmīgu***, ja no tā var salikt simetrisku 10-mino. Cik veiksmīgu pāru var izveidot no šādiem pieciem pentamino I, L, U, V un Z?

Un tagad pāriesim pie grūtāka uzdevuma, kurš ir svarīgs vairākiem citiem uzdevumiem.

2.6. uzdevums. Atrast visus simetriskos p-saliekamos 10-mino.

Atgādināšu, ka neder, piemēram, 5. zīm. parādītās figūras, jo to salikšanā būtu jāizmanto divas reizes viens un tas pats pentamino.



5. zīm.

2.7. uzdevums. Atrast piecus pentamino, no kuriem var izveidot visvairāk veiksmīgo pāru, sk. 2.5. uzdevumu.

2.8. uzdevums. Kādu pentamino pāru - veiksmīgo vai neveiksmīgo - ir vairāk, sk. 2.5. uzdevumu?

2.9. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, kurš pentamino visbiežāk un kurš visretāk atkārtosies starp veiksmīgajiem pentamino pāriem un tad pārbaudiet to.

2.10. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, kurš pentamino visbiežāk un kurš visretāk atkārtosies starp simetrisko 10-mino visiem salikumiem, un tad pārbaudiet to.

2.11. uzdevums. Vai eksistē figūra, kuru no vieniem un tiem pašiem trim pentamino var salikt trīs veidos?

2.12. uzdevums. Vai profesora Pentamino kolekcijā ir figūra, kuru var salikt četros veidos no vieniem un tiem pašiem trim pentamino? Ja tādas figūras eksistē, tad tās, protams, būs atrodamas viņa kolekcijā.

2.13. uzdevums. Profesora Pentamino kolekcijā ir 10-mino, kuru no pentamino var salikt vismaz četros veidos. Viens no šādiem polimino - simetriskais 10-mino - jums jau ir zināms, sk. 2.3. uzdevumu. Uzrādiet vēl vismaz divus šādus 10-mino!

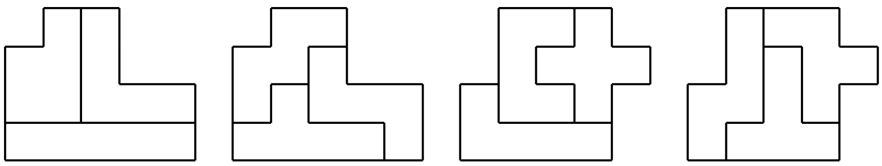
2.14. uzdevums. 2.3. uzdevuma atbildē dotajam 10-mino eksistē 4 salikumi. Tajos visos kopā tiek izmantoti 6 atšķirīgi pentamino. Vai eksistē 10-mino ar vēl lielāku salikumu skaitu, kuri visi tiek iegūti, izmantojot tikai 6 pentamino?

2.15. uzdevums. Taisnstūra 2×5 vienu rūtiņu (vienības kvadrātu) pārvietojiet uz citu vietu un iegūstiet figūru, kuras trīs kopijas var salikt no pentamino vienlaicīgi.

2.16. uzdevums. Vai eksistē četros veidos p-saliekams 10-mino, kura trīs kopijas var vienlaicīgi salikt no pentamino?

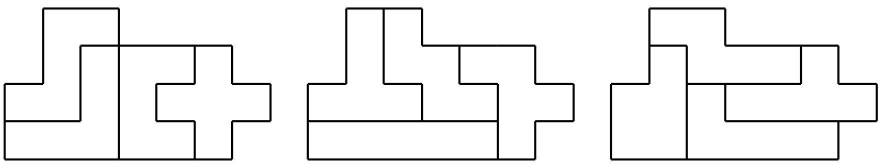
Kaut gan 2.13. uzd. atbildē dotā figūra ir saliekama ***septiņos*** veidos, tā tomēr neder kā šī uzdevuma atrisinājums.

2.17. uzdevums. Var atrast divus 15-mino [5], sk. 6. zīm., kuri vienlaicīgi ar to kopijām ir saliekami no pentamino. Vai eksistē citi divi 15-mino, no kuriem vismaz viens ir simetrisks un kuriem piemīt šī īpašība?



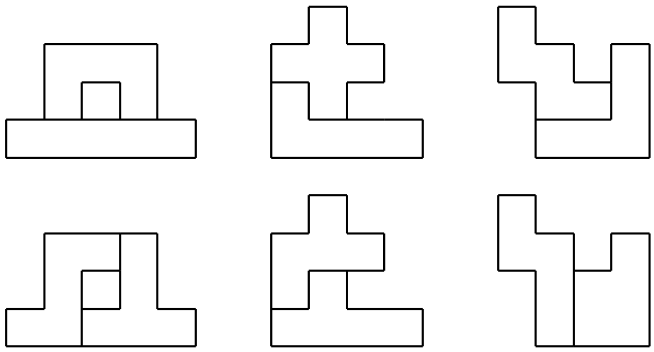
6. zīm.

2.18. uzdevums. Izmantojot visus pentamino, var salikt 3 vienādus 12-stūrus, sk. 7. zīm. Vai no visiem pentamino var salikt trīs vienādus 10-stūrus?



7. zīm.

2.19. uzdevums. 8. zīmējuma augšējā rindā parādītas trīs figūras, kuras vienlaicīgi ar to kopijām var salikt no pentamino. Tikai viena no šīm figūrām ir simetriska, turklāt tā ir "caurumota". Uzlabot šo rezultātu, t.i., atrast trīs figūras ar te vajadzīgo īpašību, no kurām vismaz divas ir simetriskas.

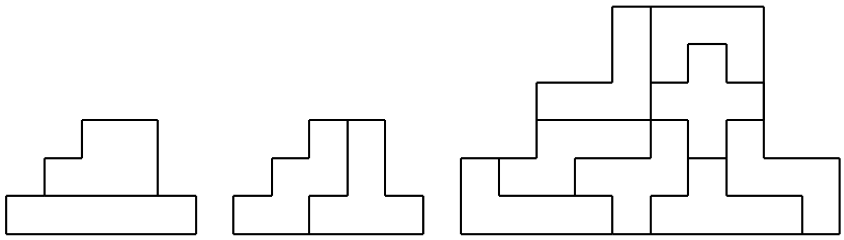


8. zīm.

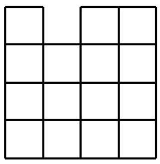
2.20. uzdevums. Vai profesora Pentamino kolekcijā ir trīs simetriskas figūras, kuras vienlaicīgi ar to kopijām var salikt no pentamino?

2.21. uzdevums. Vai profesora Pentamino kolekcijā ir tāds figūru pāris, kura trīs kopijas var vienlaicīgi salikt no pentamino? (Uzdevums ir līdzvērtīgs šādam: vai pentamino var sadalīt divās grupās tā, lai no katras grupas pentamino varētu salikt trīs vienādas figūras?)

2.22. uzdevums. 9. zīm. parādītajam 10-mino piemīt īpašība: šo 10-mino vienlaicīgi ar tā kopiju un dubultotu izmēru kopiju var salikt no pentamino. Cik simetrisku figūru ar šo īpašību ir profesora Pentamino kolekcijā?



9. zīm.



10. zīm.

Figūras, kuras parādītas 7.-9. zīmējumos, ir atrodamas M.Gardnera grāmatā [4].

2.23. uzdevums. Profesora Pentamino kolekcijā ir n-stūris ar iespējami mazāko malu skaitu, kuram izpildās iepriekšējā uzdevumā formulētā īpašība. Kāds ir šis n-stūris?

2.24. uzdevums. Cik 6-stūru, kuriem izpildās 2.22. uzdevumā formulētā īpašība, ir profesora pentamino kolekcijā?

2.25. uzdevums. Vai eksistē 15-mino, kuru no pentamino var salikt vēl vairāk veidos nekā 10. zīm. parādīto figūru?

2.26. uzdevums. Atrast četrus pentamino, no kuriem taisnstūri 4×5 var salikt piecos veidos.

2.27. uzdevums. Atrast figūru, kuru no pentamino L, P, V un W var salikt 6 veidos.

2.28. uzdevums. Taisnstūra 4×5vienu rūtiņu pārvietojiet uz citu vietu, lai tā iegūtā figūra būtu saliekama no vieniem un tiem pašiem četriem pentamino 7 veidos.

2.29. uzdevums. Vai eksistē figūra, kuru no vieniem un tiem pašiem četriem pentamino var salikt 8 veidos?

2.30. uzdevums. Vai eksistē centrāli simetriska figūra, kuru no visiem 12 pentamino var salikt tikai vienā veidā?

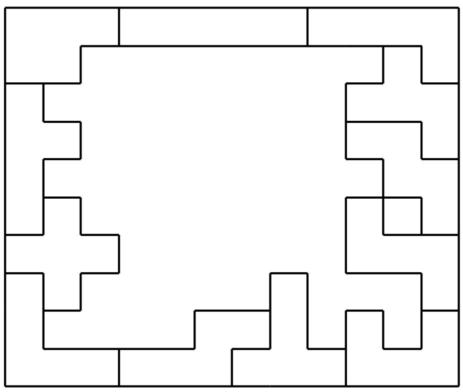
2.31. uzdevums. Atrast figūru bez tukšumiem, kuras p-salikumā ir seši iekšēji pentamino.

Figūras p-salikumā ietilpstošo pentamino sauc par ***iekšēju***, ja tam nav neviena kopīga punkta ar figūras robežu.

2.32. uzdevums. Vai profesora Pentamino kolekcijā ir p-figūra ar 7 iekšējiem pentamino?

2.33. uzdevums. Ievērojis, ka profesoram Pentamino ir daudz kastīšu, mazdēls teica: "Lūdzu, uzdāvini man šo." Paskatījies profesors atbildēja: "Tik lielu gan nē. Taču es tev uzdāvināšu tādu taisnstūrveida kastīti, kurā var izvietot pentamino tā, ka kastītes malas viscaur robežojas (saskaras) ar pentamino. Ja tu izvēlēsies vislielāko (pēc laukuma) šādu kastīti, tā būs tava kopā ar visiem tajā attiecīgi izvietotajiem pentamino un vēl vāciņu."

Samērā ātri mazdēls atrada, kā var noklāt taisnstūra 10×12 malas, sk. 11. zīm. Ievērojis, ka katrs pentamino taisnstūra malu noklāšanā ir izmantots maksimāli, mazdēls izvēlējās kastīti ar laukumu 120. Vai viņš nekļūdījās?

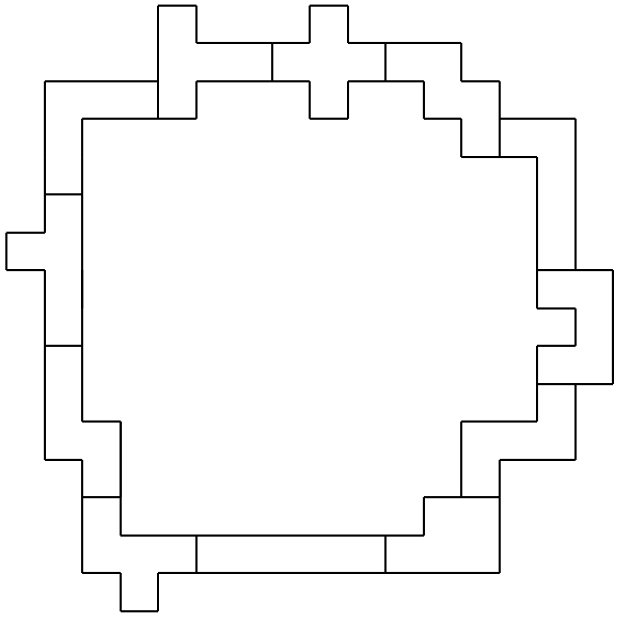


11. zīm.

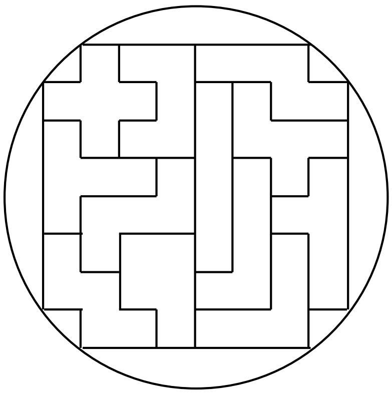
2.34. uzdevums. Profesors Pentamino piedāvāja mazdēlam vēl vienu iespēju nopelnīt kastīti. Tikai tagad atšķirībā no iepriekšējā uzdevuma mazdēlam jāievēro papildnosacījums - nenoklātajai kastītes daļai noteikti jābūt taisnstūrim. Cik lielu kastīti tagad var nopelnīt mazdēls?

<u>2.35. uzdevums.</u> Vai ir pareizs apgalvojums: ja taisnstūra laukums ir lielāks nekā 121, tad tā malas nav iespējams noklāt ar pentamino, neizejot ārpus šī taisnstūra?

<u>2.36. uzdevums.</u> Ar pentamino var noklāt tādu 60-mino, kura "caurums" ir 126 vienības (rūtiņas), sk. 12. zīm. Vai eksistē 60-mino, kuru var noklāt ar pentamino arī tad, ja tā caurums ir a) 127; b) 128 vienības?



12. zīm.



13. zīm.

<u>2.37. uzdevums.</u> Atrast p-saliekamu 60-mino ar maksimāli lielu taisnstūrveida caurumu.

<u>2.38. uzdevums.</u> Vai eksistē n-mino, kura visas robežrūtiņas var vienlaicīgi noklāt ar pentamino, ja a) n=220; b) n=221?

<u>2.39. uzdevums.</u> Riņķī ar diametru 10 var izvietot 60 vienības kvadrātus, turklāt tā, ka tos visus var noklāt ar pentamino, sk. 13. zīm.

Vai dotajā riņķī var izvietot

a) 61 vienības kvadrātu;

b) 12 pentamino un vienu monomino?

2.40. uzdevums. Atrast riņķi ar vismazāko diametru d_{min}, kurā var izvietot visus 12 pentamino (protams, bez pārklāšanās).

No iepriekšējā uzdevuma atrisinājuma ir zināms, ka $d_{min} \le \sqrt{98}$. Uzdevumu var formulēt arī tā: atrast 60-mino, kuru var izvietot riņķī ar vismazāko diametru.Daži lasītāji, šķiet, varētu iebilst, ka te vēl aizmirsta prasība, proti, meklējamam 60-mino taču jābūt p-saliekamam. Izrādās, ka te šī prasība nav nepieciešama, jo eksistē viens vienīgs 60-mino, kuru var izvietot riņķī ar diametru d_{min} un tas, kā viegli noskaidrot, ir p-saliekams. Būtu ļoti interesanti zināt, līdz kādam skaitlim d_p var palielināt riņķa diametru d_{min}, lai vēl aizvien saglabātos īpašība: katrs 60-mino, kuru var izvietot riņķī ar diametru d_p ,ir p-saliekams. Te paveras plašs problēmu lauks patstāvīgiem pētījumiem.

Vēl uzsvēršu, ka 2.40.uzd. atrisinājumu var izmantot, lai iegūtu, manuprāt, jaunu un saturīgu matemātisko rotaļlietu, kur (atšķirībā no pārdošanā sastopamajām MR - pentamino) ***iepriekš nav zināms, kāda figūra jāveido***, lai visus pentamino varētu salikt dotajā riņķveida kastītē. Taču nesteidzieties izgatavot šo MR, pirms neesat iepazinušies ar dažiem padomiem, sk. 2.40.uzd. atrisinājumu! Pamēģiniet uzminēt, kādas te varētu būt lamatas, ja vēl vajadzīgs kāds īpašs padoms.

2.2. Uzdevumi par atsevišķu pentamino īpašībām

Vispirms divas definīcijas.

Par figūras ***diametru*** sauc vislielāko attālumu starp šīs figūras punktiem. Bieži vien ar diametru saprot visgarāko nogriezni, kurš savieno divus figūras punktus.

Par ***apvilktu riņķi*** ap kādu figūru sauc vismazāko riņķi, kurš satur šo figūru.

2.41. uzdevums. Vai jebkuru pentamino ar diametru d var izvietot tāda paša diametra riņķī?

2.42. uzdevums. Vai diviem pentamino ar vienādiem diametriem apvilkto riņķu diametri arī būs vienādi?

2.43. uzdevums. Cik ir tādu pentamino, kuru diametrs sakrīt ar ap šo pašu pentamino apvilktā riņķa diametru?

2.44. uzdevums. Cik dažādas vērtības var pieņemt

a) pentamino diametri;

b) ap pentamino apvilkto riņķu diametri?

2.45. uzdevums. Jebkuru no pentamino F, P, T, U, V, W, X un Z var izgatavot no kvadrāta 3×3. Vai kādu pentamino var izgatavot arī no mazāka kvadrāta? Ja var, tad atrast visus šādus pentamino. Lai novērstu domstarpības, ko nozīmē "izgatavot", uzdevumu formulēsim vēl tā: atrast tos pentamino, kurus var pārklāt ar kvadrātu. Bez tam kvadrāta malas garumam jābūt mazākam nekā 3.

2.46. uzdevums. Vai pentamino L var pārklāt ar kvadrātu, kura malas garums ir mazāks nekā 4?

2.47. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, kuru no pentamino L, N vai Y var izvietot mazākā kvadrātā, un pārbaudiet to!

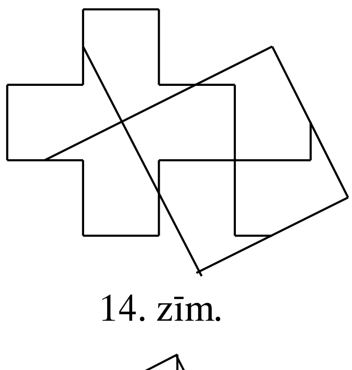
2.48. uzdevums. Vai eksistē 9-mino, ar kuru var pārklāt jebkuru pentamino?

2.49. uzdevums. Vai profesora Pentamino kolekcijā ir 8-mino, ar kuru var pārklāt jebkuru pentamino?

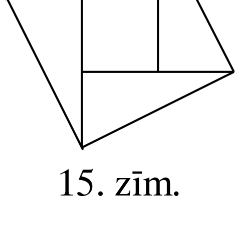
2.50. uzdevums. Pentamino I, X, un V var pārklāt ar piemērotu 8-mino. Vai eksistē trīs pentamino, kurus tomēr nevar pārklāt ne ar kādu 8-mino?

Jau sen ir izvirzīta un atrisināta problēma: kā daudzstūri sagriezt daļās tā, lai no tām varētu salikt jebkuru citu vienlielu (t.i., tāda paša laukuma) daudzstūri. Taču reti kuru apmierina tikai paša fakta zināšana, ka vienlielus daudzstūrus var "pārvērst" vienu otrā jeb sadalīt attiecīgi vienādos gabalos. Gribas zināt vairāk. Vai doto daudzstūri var sagriezt labākā veidā (tai vai citā ziņā)? Piemēram, pēc iespējas mazāk gabalos, izlietojot minimālu taisnu griezienu skaitu. Diemžēl te mūsu zināšanas stipri atpaliek no vēlamā. Tikai atsevišķos gadījumos ir zināmi stingri matemātiski pierādījumi.

14. zīm. parādīts klasisks paņēmiens, kā grieķu krustu var "pārvērst" par vienlielu kvadrātu, sk., piemēram, saistošās matemātikas sērijā iznākušo H.Lindgrēna grāmatu [6, 63.lpp.]. Zīmīgi, ka šo grāmatu sarakstījis necils patentu biroja kalpotājs no Austrālijas, bet nevis profesionāls matemātiķis.



14. zīm.



15. zīm.

Otrs klasisks kvadrāta sagriešanas paņēmiens parādīts 15. zīmējumā. To var izmantot ne tikai, lai saliktu divus kvadrātus -1×1 un 2×2, bet arī, lai saliktu gandrīz visus pentamino. Tiešām, vispirms no taisnleņķa trijstūriem saliek divus taisnstūrus 1×2, pēc tam no tiem un no kvadrāta 1×1 kā sastāvdaļām veido pentamino. Vienīgais pentamino, ko neizdosies izveidot no 15. zīm. parādītajām piecām kvadrāta sastāvdaļām, ir X. Līdz ar to, izmantojot augstāk minētos kvadrāta sagriešanas paņēmienus, esam ieguvuši, ka jebkuru pentamino var sagriezt ne vairāk kā piecās daļās tā, lai no šīm daļām varētu salikt vienlielu kvadrātu. Šo vienkārši konstatējamo faktu un tikai vienu uzdevumu par pentamino sagriešanu var atrast skaitļu rēbusu, polimino uzdevumu, uzdevumu par sagriešanu, matemātisko rotaļlietu u.c. kolekcionāra L.Močalova grāmatā [7].

2.51. uzdevums. Pierādīt, ka 14. zīm. parādītais pentamino X sagriešanas paņēmiens ar diviem taisniem griezieniem nav vienīgais, kā pentamino X var sadalīt 4 daļās tā, lai no tām varētu salikt vienlielu kvadrātu. Citiem vārdiem, uzrādiet būtiski atšķirīgu paņēmienu ar norādītajām īpašībām.

2.52. uzdevums. Vai pentamino var sagriezt 4 daļās tā, lai no tām varētu salikt vienlielu kvadrātu?

2.53. uzdevums. Vai eksistē pentamino, kuru var sagriezt trīs daļās tā, lai no tām varētu salikt vienlielu kvadrātu?

2.54. uzdevums. Atrast trīs pentamino, kurus var sagriezt trīs daļās tā, lai no tām varētu salikt ar pentamino vienlielu kvadrātu.

2.55. uzdevums. Pierādīt, ka jebkuru pentamino var sagriezt ne vairāk kā četrās daļās tā, ka no tām var salikt ar pentamino vienlielu kvadrātu.

2.56. uzdevums. Vai kvadrātu ar laukumu piecas vienības var sagriezt septiņās daļās tā, lai no šīm daļām varētu salikt jebkuru pentamino?

2.57. uzdevums. Profesors Pentamino saka savam mazdēlam, kurš ir ļoti kārs uz šokolādi:

- Redzi, te ir divpadsmit no rūtiņu papīra izgrieztas figūras (tās, protams, ir pentamino). Izvēlies vienu no tām un tad sagriez to gabalos tā, lai no visiem šiem gabaliem varētu salikt kvadrātu.
- Ja es to izdarīšu, vai tu man atdosi visu lielo šokolādi?
- Nu, tas būtu pārāk daudz. Bet neraizējies, es tev apsolu dot tādu šokolādes gabalu, kurš pēc laukuma sakritīs ar vienu no tiem gabaliem, kādos tu būsi sagriezis izvēlēto figūru. Protams tu pats norādīsi, kurš gabals tavuprāt ir vislielākais.

Kuru no 12 pentamino jūs ieteiktu izvēlēties mazdēlam?

2.58. uzdevums. Mazdēlam atkal jāizvēlas viens no pentamino un tas "jāpārvērš" par vienlielu kvadrātu. Taču tagad atšķirībā no iepiekšējā uzdevuma daļu skaits nedrīkst pārsniegt 4. Vai mazdēls var iegūt vairāk nekā trīs piektdaļas šokolādes, ja šokolādes tāfelītes laukums ir vienāds ar papīra figūras (sk. 2.57. uzd.) laukumu?

Viena no samērā universālām metodēm, ko lieto matemātikā, ir uzdevuma pārformulēšana citos terminos, aizstāšana ar savādāku pēc formas, bet pēc satura līdzvērtīgu vai pat vispārīgāku uzdevumu. Nav grūti saprast, ka 2.57. uzdevums pēc būtības ir improvizācija par nopietnu vispārīgākos gadījumos neatrisinātu matemātisku problēmu - kā izvietot dotās figūras, lai to šķēluma (kopējās daļas) laukums būtu maksimāls. Un tā

2.59. uzdevums. Vai ir pareizs apgalvojums, ka jebkura pentamino un ar to vienliela kvadrāta K šķēluma laukums nepārsniedz

a) 4,23;

b) 4,29?

Saistībā ar šo uzdevumu var piedāvāt vairākas tēmas patstāvīgiem pētījumiem. Piemēram, cik dažādas vērtības var pieņemt pentamino un K šķēlumu maksimālie laukumi? Atcerēsimies, ka pentamino diametri varēja pieņemt tikai 6, bet ap pentamino apvilkto riņķu diametri - 8 dažādas vērtības, sk. 2.44. uzdevumu.

2.60. uzdevums. Profesors Pentamino saņēma dāvanu: 12 vienādus īpaši cieta un vērtīga materiāla kvadrātus; 12 ļoti tievas stieplītes un elektrotīklā ieslēdzamu rāmīti, kas kopā ar tajā nostiprinātu un sakarsētu stieplīti kalpo kā griezējinstruments; speciālu līmi un šādu instrukciju.

- Izgatavot pilnu pentamino komplektu.
- No jebkura viena sazāģēta kvadrāta visiem gabaliem, tos attiecīgi salīmējot, jāizgatavo viens pentamino.
- Katra stieplīte paredzēta tikai viena kvadrāta sazāģēšanai. Turklāt kopējais iegriezumu garums, ko var izdarīt ar jebkuru vienu stieplīti, ir ne vairāk kā 6 garuma vienības.

Zinot iepriekšējo uzdevumu atrisinājumus, profesors Pentamino bez grūtībām izgatavoja 10 pentamino. Pēc tam izgatavoja arī vienpadsmito pentamino, bet tad konstatēja, ka, izmantojot pēdējo atlikušo stieplīti, neprot vajadzīgajā veidā sazāģēt pēdējo kvadrātu.

Kādu pentamino profesors neprot izgatavot? Vai jūs mācētu izgatavot visus pentamino, ievērojot uzdevuma noteikumus?

2.61. uzdevums. Profesors Pentamino pamodās nakts vidū un iepriecināts steidzās pie rakstāmgalda. Sapnī viņš bija atradis pierādījumu savai hipotēzei: jebkuru pentamino var sazāģēt gabalos tā, ka no šiem gabaliem var salikt vienlielu kvadrātu K, bez tam zāģa noietais ceļš jebkura viena pentamino sazāģēšanas procesā nepārsniedz pusi no kvadrāta K perimetra, t.i., nepārsniedz skaitli $2\sqrt{5}$. Profesors, nosēdējis līdz rītam pie saviem papīriem, diemžēl, tā arī nespēja atjaunot sapnī redzēto pierādījumu. Palīdziet profesoram noskaidrot, vai viņa hipotēze ir vai nav pareiza!

Viegli nojaust, kādas problēmas risināšanai profesors Pentamino bija iecerējis izmantot šo hipotēzi, sk. 2.60. uzdevumu.

2.62. uzdevums. Pierādiet, ka profesora Pentamino hipotēze, sk. 2.61. uzd., tomēr ir pareiza!

2.3. Uzdevumi ar vienādiem polimino

Vai jebkurš pentamino derīgs parketam? Vai ar jebkuru pentamino var noklāt plakni? Izvērstāk šie jautājumi nozīmē: vai ar vienu un to pašu pentamino, ņemot to pēc vajadzības daudzos eksemplāros, var pārklāt jebkuru plaknes apgabalu? Ja nav īpašas atrunas, tad, noklājot prasīto figūru (piemēram, joslu, taisnstūri), ***nedrīkst "iziet ārpus" šīs figūras***. Tetramino gadījumā atbilde ir gandrīz vai acīmredzama: ar katru tetramino var noklāt joslu ar platumu 2 un tātad arī visu plakni.

2.63. uzdevums. Atrast visus pentamino, ar kuriem var noklāt joslu ar platumu 2.

2.64. uzdevums. Kādu pentamino vairāk: to, ar kuriem var noklāt joslu ar platumu 2, vai to, ar kuriem var noklāt joslu ar platumu 5?

2.65. uzdevums. Vai eksistē pentamino, ar kuru nevar noklāt nevienu joslu?

2.66. uzdevums. Kādu pentamino vairāk: to, ar kuriem var noklāt kādu joslu, vai to, ar kuriem nevar noklāt nevienu joslu?

2.67. uzdevums. Atrast visus pentamino, ar kuriem var noklāt joslu ar platumu 5.

2.68. uzdevums. Pierādīt, ka jebkurš pentamino ir derīgs plaknes parketam.

2.69. uzdevums. Vai jebkurš heksamino ir derīgs plaknes parketam?

2.70. uzdevums. Uzrādīt kaut vienu "necaurumotu" plaknes parketam nederīgu n-mino ar $n<10$.

2.71. uzdevums. Profesoram Pentamino ir vairākas istabas, kuru grīdas (pēc formas taisnstūri) ir noklātas ar pentamino - parketu. Kāds lielākais istabu skaits varētu būt profesoram, ja nekādu divu istabu grīdas nav noklātas ar vieniem un tiem pašiem pentamino?

2.72. uzdevums. Profesoram Pentamino ir šokolādes tāfelīte taisnstūra 3×20 formā. To cenšas iegūt viņa mazdēls.

- Labi, - saka profesors, nolikdams viņa priekšā 11 kārbiņas - katrā no šīm kārbiņām atrodas vairākas savā starpā vienādas figūras, tādas, kā redzamas attēlā uz kārbiņas vāciņa. Izvēlies vienu kārbiņu! Izber no tās figūras! Tad uzliec tās uz šokolādes tāfelītes tā, lai katras figūras

(figūras, protams, ir pentamino!) katra rūtiņa precīzi noklātu tieši vienu šokolādes kvadrātiņu!

- Un visi šokolādes gabaliņi būs mani, - pārtrauc mazdēls.

- Ne gluži, bet tikai tie, kas kopumā veidos vienu veselu taisnstūri.

Vēlreiz pārlaidis skatu uz visām kārbiņām, mazdēls iebilst:

- Tu, skopuli, te taču nav kārbiņas ar taisno figūru!

- Nu, bet tu arī esi labs. Gandrīz vai par tīru velti gribi saņemt uzreiz visu tāfelīti. Par tavu neapvaldīto iekāri tevi nāksies drusciņ sodīt. Proti, ja tu neizvēlēsies pareizo kārbiņu, ar kuras figūrām var noklāt vislielāko rūtiņu taisnstūri, tad es tev nolauzīšu tikai ceturto daļu šokolādes.

Mazdēls izvēlējās kārbiņu ar pentamino P un ātri noklāja taisnstūri 2×20. Un tomēr pārsteidzās: saņēma šokolādes ceturto daļu - gabalu ar izmēriem 3×5.

Kuru kārbiņu vajadzēja izvēlēties, lai iegūtu visvairāk šokolādes?

2.73. uzdevums. Pēc stundas mazdēls, pārvarējis sarūgtinājumu, atkal klāt pie profesora Pentamino:

- Tev vēl palika šokolāde. Tāpēc, lūdzu, vēl kādu, bet vienkāršāku uzdevumu.

- Labi. Te tavā priekšā ir atlikušais šokolādes gabals ar izmēriem 3×15. Izvēlies uz tā divus no šādiem četriem taisnstūriem: 3×5, 3×4, 3×3 un 3×2. Un izvēlies divas no iepriekšējām 10 kārbiņām, starp kurām, kā pats redzi, vairs nav tās, ko vajadzēja izvēlēties iepriekšējā uzdevumā. Vienu izvēlēto taisnstūri noklāj ar vienas izvēlētās kārbiņas figūrām, otru taisnstūri - ar otrās. Ja to izdarīsi, tad abi noklātie šokolādes taisnstūri būs tavi. Protams, figūras nedrīkst pārklāties un iziet ārpus šokolādes ietvariem. Atkal, tāpat kā iepriekš, ja izvēle nebūs vislabākā, saņemsi šokolādes gabalu ar izmēriem 3×5.

- Vairs negribu pārsteigties. Atļauj man paeksperimentēt.

Šoreiz mazdēls nekļūdījās un saņēma ... . Noskaidrojiet, cik šokolādes kvadrātiņus viņš saņēma!

2.74. uzdevums. Mazdēls kārtējo reizi ciemos pie profesora Pentamino:

- Vai tev vēl ir šokolāde?

- Jā, bez tam dažādu izmēru.

- Nu, tad es piesakos uzreiz uz vislielāko.

- Labi, bet tev, kā jau tu pats zini, būs jāpapūlas. Tu nopelnīsi, lūk, no šīs šokolādes tik lielu taisnstūri, cik lielu spēsi noklāt ar šīm tev jau pazīstamām figūrām N. Ar katru figūru (pentamino N) tev jānoklāj tieši pieci šokolādes kvadrātiņi.

- Kāpēc tu man nepiedāvā garāku šokolādi? Tad es varētu izvērsties un noklāt uz tās garāku taisnstūri.

- Nezinu, kā tu, bet es gan nevarētu. Lai mums nebūtu domstarpību, vēl atgādināšu, ka noklājamā taisnstūra platumam jāsakrīt ar šokolādes platumu (piecu rūtiņu).

- Ja jau uz garākās šokolādes, kā tu saki, nevarēs salikt lielāku taisnstūri, tad šokolādes galus es varu neizmantot. Tāpēc varbūt uzreiz nolauzīsim un apēdīsim šos liekos šokolādes galus.

- Ja nolauzīsi kaut vai vismazāko galu - taisnstūri ar izmēriem 1×5, tad uz atlikušās šokolādes vairs nevarēs noklāt tik lielu taisnstūri, kā tas iespējams pašreiz.

Kādu maksimālo šokolādes daudzumu var nopelnīt mazdēls? Cik "gara" bija šokolāde?

<u>2.75. uzdevums.</u> Profesors Pentamino saka mazdēlam:

- Tā kā iepriekšējā uzdevumā tu palaidi garām izdevību nopelnīt vairāk, piedāvāju tev jaunu iespēju. Redzi, te vēl ir vairākas dažādu izmēru šokolādes tāfelītes. Taču nevienai no tām nav vairāk kā sešdesmit kvadrātiņu. Jebkuru šokolādes tāfelīti, ko tu noklāsi ar figūrām Y, atdošu tev. (Kā parasti, katra pentamino Y rūtiņa noklāj tieši vienu šokolādes kvadrātiņu).

Kādu laiku neveiksmīgi darbojies, mazdēls saka:

- Es ieiešu druscin atpūsties blakus istabā.

- Lūdzu.

Profesoram par izbrīnu, nepagāja ne minūte, kad ienāca mazdēls un paziņoja:

- Es izvēlos, lūk, šo šokolādi, -

kuru arī tūlīt noklāja.

Kādu izmēru šokolādi izvēlējās mazdēls?

Kā jūs izskaidrotu, kāpēc viņš tik neparasti ātri atrada pareizo izmēru šokolādi un turklāt to bez domāšanas nokāja?

<u>2.76. uzdevums.</u> Cik maksimāli daudz pentamino Y var izvietot katrā no kastītēm: 3×20, 4×15, 5×12 un 6×10?

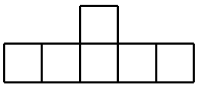
<u>2.77. uzdevums.</u> Profesors Pentamino saka mazdēlam:

- Redzi, te ir četras kastītes, pēc formas taisnstūri, ar izmēriem: 3×20, 4×15, 5×12 un 6×10. Izvēlies divas kastītes un aizpildi tās ar figūrām N. Atlikušās divas aizpildīšu es. Uzvarēs tas, kurš noklās lielāku laukumu, skaitot kopā pa abām kastītēm. Protams, ar katru pentamino jānoklāj tieši pieci kastītes pamatā iezīmētie vienības kvadrātiņi.

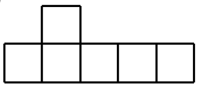
Vai mazdēls var uzvarēt?

<u>2.78. uzdevums.</u> Vai ir pareiza hipotēze: nevienu taisnstūri nav iespējams noklāt ar vienādiem "ne-taisnstūra" polimino nepāru skaitā? Nosacījums "ne-taisnstūra" ir būtisks. Piemēram, ar trīs pentamino I var salikt taisnstūri 3×5.

<u>2.79. uzdevums.</u> Vai eksistē taisnstūris, kuru var noklāt ar vienādiem heksamino:

a)  ;

16. zīm.

b)  ?

17. zīm.

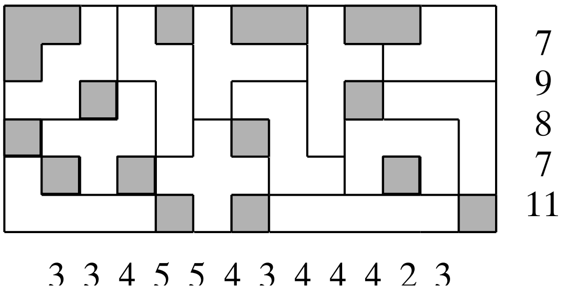
2.4. Ar pentamino izgatavošanu saistīti uzdevumi

Matemātiskās rotaļlietas nav tās preces, kuras plašā izvēlē un bieži būtu sastopamas pārdošanā. Par laimi daudzas no tām, to skaitā MR-pentamino, var vienkārši izgatavot "mājas apstākļos". Matemātikas un darbmācības skolotāji varētu iesaistīt piemērotu MR izgatavošanā skolēnus, turklāt zināmu jaunrades darbu uzticot pašiem skolēniem, piemēram, liekot viņiem pašiem izdomāt shēmu, pēc kuras no dotā plastmasas (metāla, finiera vai presētā kartona u.c,) gabala varētu izzāģēt visus pentamino. Vai - vēl vairāk, atrast iespējami mazu taisnstūri, no kura var izzāģēt visus pentamino, izdarot tikai taisnus iegriezumus. Kā zāģēt, lai zāģis "notrulinātos" vismazāk jeb, citiem vārdiem, lai izdarīto iegriezumu kopējais garums būtu visīsākais? Kaut gan izsmeļošas atbildes uz daudzām ar pentamino izgatavošanu saistītām problēmām nav zināmas, tomēr šķiet, ka daži šīs iedaļas uzdevumos ietvertie rezultāti vairs nebūs uzlabojami.

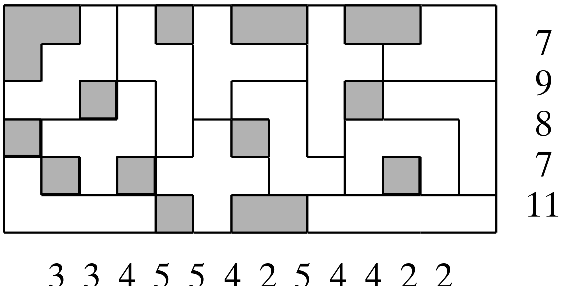
S.Golomba grāmatā [1, 26.lpp.] ir parādīts, sk. 18. zīm., kā no taisnstūra 6×13 var izzāģet visus pentamino, izdarot tikai taisnus iegriezumus. Te un turpmāk pieļaujami tikai taisni iegriezumi un attiecībā uz vārdiem "var izzāģēt visus pentamino" jāievēro šāda dabiska atruna par pentamino U izzāģēšanu. To izgatavo no iepriekš izzāģēta taisnstūra 2×3, kuru apstrādā atsevišķi, teiksim, ar kaltu vai citu speciālu zāģi.

Pentamino saskaņā ar 18. zīm. parādīto shēmu var izzāģēt, piemēram, šādā secībā: I, P, (V, U), Y, W, (L, F), N, X, Z un T. Iekavās iekļauti tie pentamino, kurus iegūst no lielāka iepriekš izzāģēta fragmenta.

Uzdevumi ir savstarpēji cieši saistīti, tos ieteicams risināt dotajā secībā.



18. zīm.



19. zīm.

2.80. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, ko nozīmē 18.-19. zīm. blakus taisnstūru malām pierakstītie skaitļi, un pēc tam salīdziniet ar atbildi!

2.81. uzdevums. Kādas rūpnīcas cehā MR-pentamino ražo no speciālām sagatavēm - plastmasas taisnstūriem ar izmēriem 6×13. Uz šīm sagatavēm, līdzīgi kā tas mēdz būt ar šokolādes tāfelītēm, ir ieveidoti vienības kvadrātiņi. No vienas sagataves, to pieļaujamā veidā salaužot gabalos, iegūst visus pentamino. Sagatavē vai no tās iegūtajos fragmentos pieļaujami trīs tipu lauzumi jeb operācijas:

1) operācija - "taisne" (lauzums pa taisnu līniju);

2) operācija - "stūris' (lauzums pa līniju, kuru veido divi savstarpēji perpendikulāri stari ar kopēju sākumpunktu);

3) operācija - "dubultstūris" (lauzums pa līniju, kuru veido trīs vienības kvadrāta malas). Turklāt šo operāciju drīkst izmantot tikai viena pentamino - proti, U - izgatavošanai.

Cehā pentamino "izlaušanu" no dotās sagataves veic pēc 19. zīm. parādītās shēmas, kuras vienīgā atšķirība no 18. zīm. dotās ir pentamino I nobīde. Taču šāda nobīde pentamino ražotājiem ļauj ietaupīt vienu "laušanas" operāciju.

Saskaitīsim, cik pavisam (iespējami maz) operāciju vajag, lai iegūtu visus pentamino: W-4, P-2, I-1, (V, U)-4, Y-2, (L, F)-5, N-2, X-4, Z-1, T-1, tātad, kopā 26 operācijas.

Pie profesora Pentamino ieradās ceha pārstāvis ar jautājumu: vai var samazināt operāciju skaitu? Iepazinies ar parādīto shēmu, sk. 19. zīm., profesors ātri vien piedāvāja racionalizācijas priekšlikumu: "Samainīsim vietām, lūk, šos divus pentamino, pēc tam mainīsim vietas šiem četriem, un sākotnējo 26 operāciju vietā mums pietiks tikai ar 23 operācijām."

Atrodiet, kā tas izdarāms!

Augstāk minētā jautājuma iedvesmots, profesors Pentamino aizrāvās ar pentamino izgatavošanas uzdevumu sastādīšanu un risināšanu.

2.82. uzdevums. Kadus trīs pentamino var "izlauzt" no sagataves 4×4 ?

2.83. uzdevums. Vai no sagataves ar izmēriem 3×7 var "izlauzt" četrus pentamino?

2.84. uzdevums. Pierādīt, ka no sagataves ar izmēriem 7×11 var "izlauzt" visus pentamino.

2.85. uzdevums. Vai ir pareiza hipotēze: taisnstūra sagatavei ar mazāku laukumu vienmēr atbilst mazāks "izlaušanas" operāciju skaits? Citā pierakstā, ko lieto "nopietnākās" grāmatās, šo hipotēzi var formulēt precīzāk:

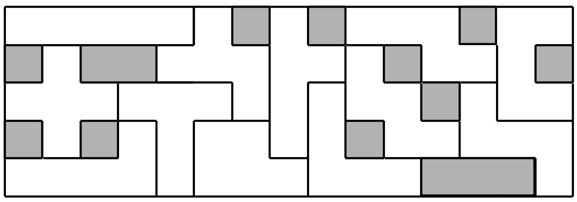
$$\text{lauk.}S_1<\text{lauk.}S_2\overset{?}{\Rightarrow} o(S_1)<o(S_2),$$

kur ar $o(S_i)$, $i=1,2$, apzīmēts mazākais operāciju skaits, kāds vajadzīgs, lai izlauztu visus pentamino saskaņā ar shēmu S_i (ar s*hēmu* te saprot taisnstūri, uz kura ir norādīts pentamino izvietojums).

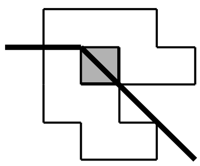
2.86. uzdevums. Parādīt, ka no taisnstūra sagataves ar laukumu 76 var "izlauzt" visus pentamino.

2.87. uzdevums. Parādīt, ka no sagataves 5×8 var "izlauzt" pentamino N, T, U, W, Y un Z.

2.88. uzdevums. No taisnstūra 5×15 var izzāģēt visus pentamino, sk. 20.-21. zīm.,



20. zīm.



21. zīm.

taču pēc šīs shēmas pentamino W un N nav iegūstami ar "izlaušanas" operāciju palīdzību. Pierādiet, ka no sagataves 5×15 tomēr iespējams "izlauzt" visus pentamino.

S.Golomba grāmatā [1, 166.lpp.] atzīmēts, ka kāda lasītāja no Londonas ir atradusi, kā no katra taisnstūra 4×19 un 5×15 var izzāģēt visus pentamino. Diemžēl tur netiek precizēts, vai visi iegriezumi iet pa rūtiņu līnijām jeb vai visi pentamino būtu iegūstami arī ar "izlaušanas" operācijām.

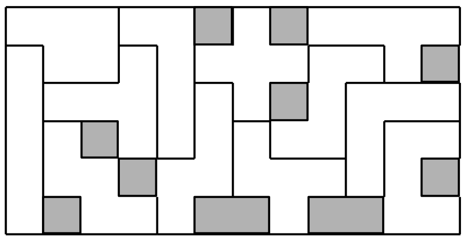
2.89. uzdevums. Pierādīt, ka eksistē taisnstūris ar vienas malas garumu 4 un laukumu mazāku nekā 76, no kura var izzāģēt visus pentamino.

2.90. uzdevums. Parādīt, ka var uzlabot iepriekšējā uzdevuma (sk. risinājumu) rezultātu - $4(16+2\sqrt{2})$. Vai var panākt, ka meklējamā taisnstūra ar vienas malas garumu 4 laukums būs mazāks nekā 75?

2.91. uzdevums. Parādīt, ka no sagataves 6×6 var "izlauzt" pentamino F, L, N, U, V un W.

2.92. uzdevums. Pierādīt, ka no sagataves 6×9 var "izlauzt" pentamino F, I, N, P, T, V, X, Y un Z.

2.93. uzdevums. No taisnstūra 6×12 var izzāģēt visus pentamino, sk. 22. zīm., taču pēc šīs shēmas pentamino T un W nav "izlaužami". Parādīt, ka no sagataves 6×12 tomēr var "izlauzt" visus pentamino.



22. zīm.

2.94. uzdevums. Vai no divām vienādām sagatavēm - katras izmēri 6×6 - var "izlauzt" visus pentamino?

2.95. uzdevums. Vai no sagataves 4×19 visus pentamino var "izlauzt" tikai ar 23 operācijām?

2.96. uzdevums. Vai katrai pentamino izlaušanas shēmai ir pareizs apgalvojums: "Vismaz vienu no rūtiņām, ar kurām saskaras pentamino X, nav iespējams izmantot lietderīgi, t.i., vismaz viena šāda rūtiņa nepiederēs nevienam no "izlauztajiem" pentamino?

2.97. uzdevums. Vai ir pareiza hipotēze: shēmai ar mazāku laukumu vienmēr atbilst īsāks zāģa noietais ceļš, kāds vajadzīgs, lai izzāģētu visus pentamino? (sk. 2.85. uzd.)

2.98. uzdevums. Vai ir pareiza hipotēze:

$$o(S_1) < o(S_2) \Rightarrow z(S_1) < z(S_2) \;?$$

Te ar $z(S_i)$, $i=1,2$, apzīmēts īsākais zāģa noietais ceļš jeb iegriezumu garums, kāds vajadzīgs, lai saskaņā ar shēmu S_i izzāģētu visus pentamino.

2.99. uzdevums. No taisnstūra 6×12 var izzāģēt visus pentamino tā, ka zāģa noietais ceļš ir 77 vienības (sk., piemēram, 2.93. uzd. atrisinājumu). Vai tiesa, ka, izzāģējot 12 pentamino no lielāka (pēc laukuma) taisnstūra, zāģa noietais ceļš vienmēr būs vismaz 77?

2.100. uzdevums. Vai eksistē 7-stūris ar laukumu, kas mazāks nekā 71, no kura var izzāģēt visus pentamino?

2.101. uzdevums. Parādīt, ka eksistē 7-stūris, no kura var izzāģēt visus pentamino, bet kura perimetrs ir vēl mazāks nekā 2.100. uzd. atbildē dotajam.

2.102. uzdevums. Sapnī profesors Pentamino redzēja, ka viņš no taisnstūra sagataves visus pentamino izlauza tikai ar 22 operācijām, taču atmodies vairs nespēja atjaunot šo ievērojamo shēmu. Palīdziet profesoram noskaidrot, vai sapnī redzēto var īstenot!

2.103. uzdevums. Profesoram Pentamino piezvanīja jau pazīstamais ceha pārstāvis (sk. 2.81. uzd.): "Mums ir sagataves 8×9, no kurām mēs vēlamies izgatavot pentamino, diemžēl nevienam no mums nav skaidrs, kā to izdarīt. Es gandrīz vai esmu pārliecināts, ka no sagataves 8×9 vispār nevar izlauzt visus pentamino. Vai jūs varētu palīdzēt atrisināt šo mums tik svarīgo problēmu?" Tā kā profesors Pentamino ar šādu problēmu jau bija nodarbojies, viņš, par pārsteigumu ceha pārstāvim, uzreiz deva atbildi. Kādu? Vai tādu, ka no sagataves 8×9 nav iespējams izlauzt visus pentamino, vai arī, ka to var izdarīt?

2.104. uzdevums. Vai eksistē sešstūris ar laukumu < 71, no kura var izzāģēt visus pentamino?

2.105. uzdevums. Parādīt, ka eksistē daudzstūris, no kura var izzāģēt visus pentamino, bet kura perimetrs ir vēl mazāks nekā 120. zīm. parādītajam 7-stūrim.

3.nodaļa
NO PENTAMINO SALIEKAMI TAISNSTŪRI

Cik vispār ir no pentamino saliekamu taisnstūru? Cik dažādos veidos katru no tiem var salikt? Vai no pentamino vienlaicīgi var salikt vairākus taisnstūrus un tieši kādus? Atbildes uz šiem un vairākiem citiem jautājumiem ir dotas šajā nodaļā, to skaitā uz visiem uzdevumiem par p-taisnstūriem, kuri S. Golomba grāmatā [1] ir iekļauti neatrisināto sarakstā.

Latvijā ar pentamino saistītos pārskaitīšanas uzdevumus ar datora palīdzību ir risinājis G. Radziņš. Cik ilgā laikā dators "spēj atrast" visus uzdotās figūras p-salikumus? Tas ir būtiski atkarīgs no uzdotās figūras un, protams, no programmas (algoritma), pēc kuras dators veic visu salikumu meklēšanu. Piemēram, taisnstūra 3×20 visu salikumu atrašana var ilgt ne vairāk kā minūti, toties taisnstūra 6×10 - vairākas stundas. Lai izveidotu programmu, kuru realizējot uz datora, varētu samērā ātri atrast jebkuras uzdotās figūras visus p-salikumus, nepieciešama laba sagatavotība programmēšanā un izkopta tā saucamā "algoritmiskā domāšana". Pateicoties G. Radziņam, mums ir iespēja iepazīties ar nodaļas beigās doto tabulu, kā arī uzzināt vairākus citus literatūrā līdz šim neminētus ar p-salikumiem saistītus skaitļus. Elektronisko skaitļotāju pielietošana polimino uzdevumu risināšanā aizsākās aptuveni pirms 40 gadiem. Cik zināms, pirmais visu atrisinājumu katalogu uzdevumam par taisnstūrveida kastītes aizpildīšanu ar 12 pentamino sastādīja Č. Dž. Baukemps. Diemžēl mums nav pieejami ne šis, ne arī citi vēlāk viņa sastādītie katalogi. Nav arī ziņu, cik pilnīgu informāciju tie satur.

Zināms, ka ar pieciem tetramino nevar salikt nevienu taisnstūri ar laukumu 20, ar 35 heksamino - nevienu taisnstūri ar laukumu 210. Toties, izmantojot pentamino komplektu, var salikt jebkuru no taisnstūriem 3×20, 4×15, 5×12, 6×10. Lūk, šī ir viena no svarīgām MR-pentamino priekšrocībām salīdzinājumā ar citām polimino tipa spēlēm.

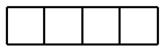
Kādreiz vidējo klašu skolēniem (matemātikas nometnes dalībniekiem) piedāvāju atrisināt pazīstamu uzdevumu, taču citā, pievilcīgākā formulējumā: "Pirmais, kurš piecu minūšu laikā no visiem pieciem tetramino saliks taisnstūri, saņems 100 rubļus."

Interesanti, ka nevienam no skolēniem piecu minūšu vēl nepietika, lai rastos aizdomas (vismaz tādas netika izpaustas atklāti), ka taisnstūri varbūt vispār nevar salikt. Jau pēc 2-3 minūtēm uz prēmiju pieteicās divi pretendenti, taču abiem taisnstūra salikumā kāds no tetramino bija izmantots vairākkārt.

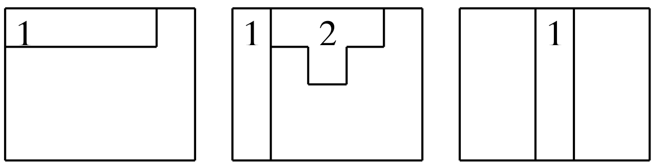
<u>3.1. uzdevums.</u> Pierādiet, ka no pieciem dažādiem tetramino taisnstūri salikt nav iespējams.

Nereti vienu un to pašu uzdevumu var atrisināt ar vairākiem būtiski atšķirīgiem paņēmieniem. Kaut gan nav universāla paņēmiena, metodes, ar kuru palīdzību varētu atrisināt jebkuru uzdevumu, tomēr reizēm izdodas atrast pietiekoši vispārīgas metodes. Viena no tādām, ar kuras palīdzību var risināt daudzus jo daudzus noteikta tipa pentamino uzdevumus (un, protams, ne tikai tos, kas saistīti ar pentamino) ir pilnās pārlases metode. Šo metodi sarežģītāku uzdevumu risināšanā lieto tad, kad nav zināmi citi efektīvāki, ērtāki utt. paņēmieni, jo tās realizācija var būt saistīta ar tik lielā pakāpē ilgstošu, nogurdinošu un samērā vienveidīgu darbu, pacietību un izturību, kādā vairumam no mums šīs īpašības nepiemīt. Tieši šī iemesla dēļ un nevis tāpēc, ka nebūtu zināma risināšanas metode, vairāki uzdevumi ilgu laiku paliek neatrisināti. "Lai iemācītos peldēt, jālien ūdenī", līdzīgi, lai iemācītos pielietot pilnās pārlases metodi, jāvingrinās, jārisina piemēroti uzdevumi. Prasmīgi pielietojot šo metodi, dažkārt izdodas uzlabot, vienkāršot jau zināmos risinājumus vai pat atrisināt kādu nolīdz šim neatrisinātajām problēmām. Ko nozīmē "prasmīgi" - tas, protams, nav precīzi aprakstāms, uz katru konkrētu uzdevumu te var attiekties savi asprātīgi paņēmieni, kas neder citiem, kaut arī līdzīga tipa uzdevumiem.

Ilustrēsim pilnās pārlases metodi, vispirms risinot 3.1. uzdevumu. (Šim vienkāršajam uzdevumam eksistē arī cits, elegantāks risinājums.)

Kuru no pieciem tetramino taisnstūra salikšanas procesā izvēlēties kā pirmo? Kad ar pirmo izvēlēto figūru ir noklāta atbilstoša taisnstūra daļa, kuru figūru izvēlēties kā otro, pēc tam trešo utt.? Piemēram, taisnstūra 2×10 gadījumā kā pirmo figūru izdevīgi ņemt T-tetramino, jo neatkarīgi no šīs figūras novietojuma taisnstūris 2×10 sadalās izolētās daļās, kuru laukumi nedalās ar 4, un tātad nav saliekami no tetramino. Savukārt taisnstūra 4×5 gadījumā izdevīgāk iesākt ar figūru  .

Ievērojot taisnstūra simetriju, pietiek aplūkot šādus trīs gadījumus:



23. zīm.

Kā nākamo figūru 1.gadījumā varētu ņemt kvadrātu 2×2, bet pārējos - jau minēto T-tetramino. Bez tam, atkal ievērojot simetriju, 2. gadījumā pietiek aplūkot tikai 23. zīm. redzamo otrās figūras novietojumu. Pabeidziet patstāvīgi vēl atlikušo pārbaudi!

Vai no 3.1. uzdevuma risinājuma var saskatīt kādus principus, kuri varētu atvieglināt, vienkāršot, saīsināt pilnās pārlases metodes realizāciju arī citu uzdevumu risināšanā? Jā, var. Te izdalīsim trīs principus: <u>figūras prioritātes</u> (ar kuru figūru iesākt noklāšanu, kuru ņemt kā nākamo?) simetrijas un dalāmības principus. Pentamino gadījumā dalāmības princips nozīmē, ka jebkura izolētā fragmenta, kāds rodas, doto figūru noklājot ar pentamino, laukumam jādalās ar 5. Kā nākamo vingrinājumu šīs metodes apgūšanā var ieteikt 3.14. uzdevuma risinājumu. No tā var saskatīt vēl vienu - rūtiņas (vienības kvadrāta) prioritātes - principu (ar kuru rūtiņu iesākt noklāšanu, kuru ņemt kā nākamo?).

Kā jau minēts, 3.1. uzdevumam eksistē cits, krietni elegantāks risinājums, kuru turklāt var izmantot, lai pierādītu, ka ar heksamino komplekta figūrām nevar salikt nevienu no taisnstūriem 3×70, 5×42, 6×35, 7×30, 10×21 un 14×15. Šis risinājums balstās uz ideju, ko bieži izmanto olimpiāžu uzdevumu sastādītāji. Atrodiet šo risinājumu!

Pasaulslavenais M. Gardners kādreiz nopietni domāja piedāvāt 1000 dolāru prēmiju tam, kurš no 35 heksamino (protams, ja tie visi dažādi) saliks kaut vai vienu no šiem sešiem taisnstūriem. Taču "apžēlojies", paredzot, cik daudz veltīgi iztērēta laika tas prasīs prēmijas kārotājiem.

3.1. Cik ir dažādu p-taisnstūru?

Atbildi uz šo jautājumu var atrast, izmantojot nodaļas beigās doto tabulu, kurā ir uzrādīts ne tikai visu attiecīgā taisnstūra p-salikumu skaits, bet arī visu to pentamino kombināciju skaits, kurām atbilst vismaz viens taisnstūra p-salikums. Pats par sevi uzdevums - noteikt visu p-taisnstūru skaitu - nav ne sarežģīts, ne arī īpaši interesants vai pamācošs. Ļoti elementāri pierādīt, ka pieci taisnstūri 2×5k, k=1, 3, 4, 5, 6, nav p-saliekami, turpretī pārējiem 18 taisnstūriem pietiek atrast kaut kādu vienu p-salikumu. Tālāk katram no šiem 18 p-taisnstūriem ir veltīts kāds uzdevums.

3.2. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 2×10 salikumus un pierādīt, ka 2×10 ir vienīgais p-taisnstūris ar platumu 2.

3.3. uzdevums. Atarst visus taisnstūra 3×5 salikumus.

3.4. uzdevums. Atrast 4 pentamino, no kuriem taisnstūri 4×5 var salikt 5 veidos.

3.5. uzdevums. Izvirziet hipotēzi, no kuriem 5 pentamino taisnstūri 5×5 var salikt visvairāk veidos, un pēc tam salīdziniet ar atbildi.

3.6. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 5×5 salikumus no iepriekšējā uzdevuma atbildē dotajiem pentamino.

3.7. uzdevums. Atarast visus taisnstūra 5×6 salikumus, kuri satur X, bet nesatur P.

3.8. uzdevums. Atrast pentamino, no kuriem taisnstūri 5×7 var salikt tikai vienā veidā.

3.9. uzdevums. Atrast vismaz vienu taisnstūra 5×8 salikumu, ja netiek izmantoti pentamino X, U, L un P.

3.10. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 5×9 salikumus, ja neizmanto pentamino Z, F un P.

3.11. uzdevums. Vai taisnstūri 5×10 var salikt no pentamino, neizmantojot P un Y?

3.12. uzdevums. Vai taisnstūri 5×10 var salikt no jebkuriem desmit pentamino?

3.13. uzdevums. Vai taisnstūri 5×11 var salikt no jebkuriem vienpadsmit pentamino?

3.14. uzdevums. Vai ir pareizs apgalvojums: ja no pieciem pentamino var salikt taisnstūri 3×10, tad no šiem pašiem pentamino var salikt arī taisnstūri 5×6?

3.15. uzdevums. Atrast 9 pentamino, no kuriem var salikt ne tikai taisnstūri 3×15, bet arī taisnstūri 5×9.

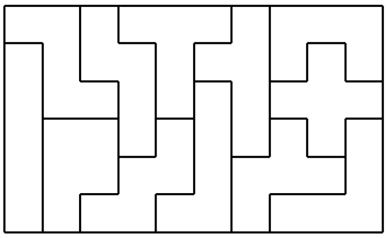
3.16. uzdevums. Vai no 8 pentamino X, W, T, V, I, Y, U un P var salikt taisnstūri a) 4×10; b) 5×8?

3.17. uzdevums. Zināms, ka taisnstūri 3×20 no pentamino var salikt tikai divos veidos. Atrodiet abus šos p-salikumus!

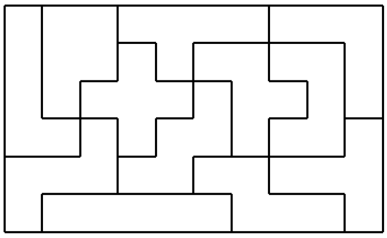
3.18. uzdevums. Vai ir pareizs apgalvojums, ka jebkurā taisnstūra 4×15 salikumā pentamino Y saskaras ar taisnstūra 4×15 malu?

3.19. uzdevums. Vai eksistē tāds taisnstūra 5×12 salikums, ka pentamino I nesaskaras ar taisnstūra 5×12 malu?

3.20. uzdevums. 24.-25. zīm. parādītie taisnstūra 6×10 salikumi ir sevišķi ievērojami - katrs ar savu noteiktu īpašību. Neviens cits salikums nepārspēj uzrādīto pēc attiecīgās īpašības. Izdariet minējumu, kādas ir šīs divas vienkārši formulējamas īpašības, un pēc tam salīdziniet ar atbildi.



24. zīm.



25. zīm.

3.21. uzdevums. Vai 24.-25. zīm. parādītie salikumi ir vienīgie, kuriem attiecīgi piemīt 3.20. uzdevuma atbildē norādītās īpašības?

3.2. Divu taisnstūru vienlaicīga salikšana

Matemātiskās rataļlietas - pentamino, kas kādreiz ir ražotas sērijveidā, gandrīz vienmēr ir bijušas kastītes 6×10 veidā (cerēsim, ka nākotnē stāvoklis uzlabosies un tiks ražotas daudzas gan vienkāršākas, gan sarežģītākas ar polimino saistītas MR). Tā kā kastītē 6×10 visus pentamino var izvietot ļoti daudzos - 2339 veidos (Grāmatā [4, 484.lpp.] dotais taisnstūra 6×10 p-salikumu skaits nav pareizs, kas izskaidrojams ar drukas kļūdu) - un atrast vienu no tiem izdodas samērā ātri pat iesācējiem, tad uzdevumu (aizpildīt kastīti 6×10) vēlams sarežģīt. Protams, MR - pentamino var ražot arī citu kastīšu - 5×12, 4×10, 3×20 - veidā, tā uzdevumu "aizpildīt kastīti" - padarot interesantāku. No minēto četru kastīšu aizpildīšanas uzdevumiem vispamācošākais un vissarežģītākais attiecas uz "visneglītāko" kastīti 3×20.

Bieži vien nopirkto MR - pentamino iespējams ļoti vienkārši pārveidot par jaunu, saturīgāku, sarežģītāku MR. Piemēram, kastīti var sadalīt daļās ar barjeru palīdzību. Kā barjera var kalpot kastītē iemontēta plāksnīte. Tik niecīgas izmaiņas kā plāksnītes nostiprināšana jau gatavā kastītē - un jūsu priekšā cita MR. Taču nesteigsimies ar jaunu MR "ražošanu", pirms tās nav izpētītas teorētiski. Var gadīties, ka modificētajai MR vispār nebūs atrisinājuma vai arī, ka to tāpat būs ļoti daudz. Var nokļūt arī smieklīgā situācijā, kad "uzlabotās" MR vienīgā atrisinājuma atrašana būs tik vienkārša, ka citiem par šo MR jau pēc dažām minūtēm zudīs jebkāda interese.

Vispirms noskaidrosim, kurus no taisnstūriem 3×20, 4×15, 5×12 un 6×10 var sadalīt divos p-taisnstūros un kā tas izdarāms.

Taisnstūris 3×20

Zināms, ka šo taisnstūri nav iespējams sadalīt divos p-taisnstūros, taču saskaņā ar [1, 173.ipp.] nav atrasts pietiekoši vienkāršs šī fakta pierādījums. Ne tikai vienkāršu, bet arī īsu pierādījumu var iegūt, balstoties uz šādiem apgalvojumiem:

A1. Ja taisnstūra 3×10 p-salikums satur X, tad tas noteikti satur U, bet nesatur ne W, ne F.

A2. Ja taisnstūra 3×10 p-salikums satur W un F, tad tas satur arī U.

A3. Ja taisnstūra 3×15 p-salikums satur X un W, tad tas satur arī U, bet nesatur F.

A4. Ja taisnstūra 3×5 p-salikums satur F, tad tas satur arī U.

No pirmajiem diviem apgalvojumiem izriet, ka taisnstūris 3×20 nav sadalāms divos p-taisnstūros 3×10. Tā kā taisnstūris 3×5 nav saliekams, ja izmanto pentamino X vai W, tad no pēdējiem diviem apgalvojumiem A3-A4 izriet, ka taisnstūris 3×20 nav sadalāms divos p-taisnstūros 3×5 un 3×15. Tātad taisnstūris 3×20 nav sadalāms divos p-taisnstūros. No šejienes uzreiz iegūstam:

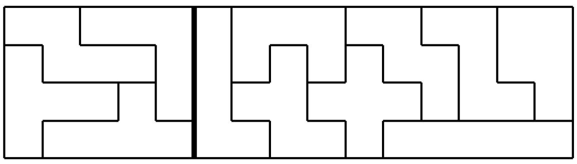
A5. Ar pentamino V jānoklāj "stūra"rūtiņa jeb 5 taisnstūra 3×20 robežrūtiņas, pretējā gadījumā taisnstūris 3×20 nebūs saliekams.

3.22. uzdevums. Pierādiet apgalvojumus A1-A4!

Taisnstūris 4×15

Skaidrs, ka šo taisnstūri nav iespējams sadalīt divos p-taisnstūros, kuriem īsākās malas garums ir 2, sk. arī 3.2. uzdevumu. Tomēr vēl atliek iespēja ņemt taisnstūrus 4×5 un 4×10. Uzdevums par šo divu taisnstūru vienlaicīgu salikšanu S. Golomba grāmatā [1] iekļauts neatrisināto sarakstā.

No 368 taisnstūra 4×15 p-salikumiem 48 ir tādi, kuros taisnstūris 4×15 sadalās divos norādītajos taisnstūros. Lūk, viens no 48 salikumiem, kurš ir atrodams [12]:



26. zīm.

Gandrīz desmit gadus agrāk divi salikumi ir doti [13]. Viens no tiem atšķiras no 26. zīm. parādītā tikai ar to, ka p-taisnstūris 4×5 pagriezts par 180^{o}.

Jebkurā no minētajiem 48 salikumiem mazākais taisnstūris satur pentamino N, T, V un Y. Tas nozīmē, ka pentamino sadalījums pa taisnstūriem 4×5 un 4×10 nosakāms viennozīmīgi. Tieši te - vienīgā pareizā pentamino sadalījuma atrašanā - arī slēpjas galvenās grūtības.

Vienkārši aprēķināt, ka izvēlēties 4 pentamino no 12 var 495 veidos. Pirmajā acumirklī šķiet, ka tik daudzu variantu analīzi nevarēs veikt bez datora. Taču tāds iespaids ir maldīgs. Pirmkārt, bez īpašām grūtībām var noskaidrot, ka tikai 26 kombinācijas no šīm 495 būs tādas, kurām atbilst vismaz viens taisnstūra 4×5 salikums.

Piemēram, kombinācijai (X, P, Y, L) neatbilst neviens taisnstūra 4×5 salikums, vēl vairāk, nevienā 4 pentamino kombinācijā nav pieļaujams iekļaut X. Otrkārt, prasmīgi izvēloties pierādījuma shēmu, nav pat jāizskata visas 26 minētās kombinācijas, lai secinātu, ka taisnstūris

4×5 jānoklāj tikai ar pentamino N, T, V un Y. Kā daži tādas pierādījuma shēmas fragmenti var kalpot 3.25.-3.27. uzdevumi.

3.23. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 4×10 salikumus, ja neizmanto pentamino N, T, V un Y.

3.24. uzdevums. Zināms, ka taisnstūri 4×5 no pentamino N,T,V un Y var salikt tikai vienā veidā, bet taisnstūri 4×10 no pārējiem astoņiem pentamino piecos veidos (sk. 3.23. uzd.). Izskaidrojiet, kāpēc taisnstūrim 4×15 eksistē tieši 48 salikumi, kuri sadalās divos p-taisnstūros.!

3.25. uzdevums. Atrast visas četru pentamino kombinācijas, kuras satur W un no kuras elementiem var salikt taisnstūri 4×5.

3.26. uzdevums. Atrast visas četru pentamino kombinācijas, kuras satur Z un no kuras elementiem var salikt taisnstūri 4×5.

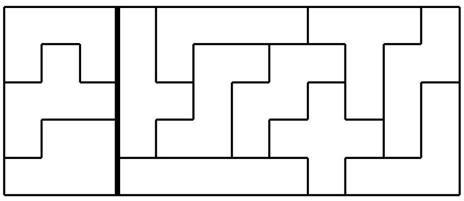
3.27. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 4×10 salikumus, ja tajos ir izmantoti pentamino X, W, Z, bet nav izmantots pentamino P.

Taisnstūris 5×12

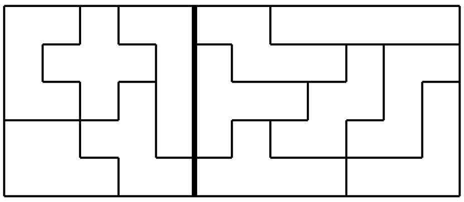
Nevienu citu taisnstūri nav iespējams sadalīt divos p-taisnstūros tik daudz veidos kā taisnstūri 5×12.

3.28. uzdevums. Salikt no pentamino taisnstūri 5×11, neizmantojot pentamino I.

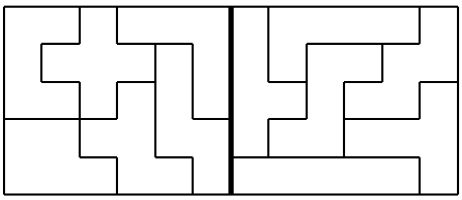
Atrisinot šo uzdevumu, uzreiz iegūstam, ka taisnstūri 5×12 var sadalīt divos p-taisnstūros 1×5 un 5×11. Citas interesantākās šādas sadalīšanas iespējas parādītas 27.-29. zīmējumos.



27. zīm.



28. zīm.



29. zīm.

Uzdevums par divu taisnstūru 3×5 un 5×9 vienlaicīgu salikšanu no pentamino, kas S. Golomba grāmatā [1] iekļauts neatrisināto sarakstā, nebūt nav sarežģītāks par analoģisku uzdevumu diviem taisnstūriem 5×6. Izvēlēties 3, 4, 5 vai 6 pentamino no 12 var attiecīgi 220, 495, 792 un 924 veidos. Vairums no šīm pentamino izvēlēm (kombinācijām) nedos nevienu atbilstošā taisnstūra p-salikumu, izsakoties īsāk, tās būs nederīgas. Derīgo kombināciju (viena taisnstūra salikšanai)skaits attiecīgi ir (sk. 2.tabulu) 7, 26, 45 un 172. Vienkāršākajā gadījumā, kad jāsaliek taisnstūris 3×5, eksistē tikai 7 derīgās kombinācijas un katrai no tām atbilst tikai viens taisnstūra 3×5 salikums, sk. 3.3. uzdevumu.

No visiem taisnstūra 5×12 salikumiem
224 sadalās taisnstūros 1×5 un 5×11,
8 sadalās taisnstūros 3×5 un 5×9,
12 sadalās taisnstūros 5×5 un 5×7,
16 sadalās taisnstūros 5×6 un 5×6.

Tāpat kā taisnstūriem 4×5 un 4×10 arī te visos trijos gadījumos (sk. 27.-29. zīm.) <u>pentamino sadalījums pa taisnstūriem nosakāms viennozīmīgi.</u>

Uzdevuma par divu taisnstūru 3×5 un 5×9 vienlaicīgu salikšanu no pentamino atrisinājums ir atrodams vairākos literatūras avotos, sk., piemēram, [5, 12, 14]. Jāuzsver, ka vienu no publicētajiem atrisinājumiem [14] ir atradis 8. klases skolnieks S.Razborovs no Maskavas.

<u>3.29. uzdevums.</u> Atrast visus taisnstūra 5×9 salikumus, neizmantojot pentamino F, U un P.

<u>3.30. uzdevums.</u> Atrast visus taisnstūra 5×5 salikumus no pentamino X, U, F, L, P un visus taisnstūra 5×7 salikumus no pārējiem septiņiem pentamino.

<u>3.31. uzdevums.</u> Atrast visus taisnstūra 5×6 salikumus no pentamino: a) X, U, F, N, V, P; b) I, L, T, W, Y, Z.

Vēl bez atbildes palicis uzdevums par divu taisnstūru 4×5 un 5×8 vienlaicīgu salikšanu no pentamino, kurš arī ir iekļauts neatrisināto uzdevumu sarakstā [1]. Daudzu pūles salikt šos divus taisnstūrus jau iepriekš ir bijušas nolemtas neveiksmei. Taisnstūris 5×12 nav sadalāms divos p-taisnstūros 4×5 un 5×8. To var pierādīt ar pilnās pārlases metodi, diemžēl, pierādījums (vismaz man zināmais) nav tik īss, lai to šeit varētu izklāstīt. Šai sakarā var minēt arī cita rakstura argumentu: starp visiem ar datoru atrastajiem taisnstūra 5×12 salikumiem nav neviena ar šeit vajadzīgo īpašību.

<u>Taisnstūris 6×10</u>

Iepriekš noskaidrojām, ka taisnstūri 3×20 nevar sadalīt divos p-taisnstūros, tātad taisnstūri 6×10 nevar sadalīt divos p-taisnstūros 3×10.

3.32. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 4×10 salikumus, kuri satur pentamino W, bet nesatur I, L un P.

3.33. uzdevums. Pierādīt, ka taisnstūris 6×10 nav sadalāms divos p-taisnstūros 2×10 un 4×10.

Tātad vienīgā iespēja, kā taisnstūri 6×10 sadalīt divos p-taisnstūros, ir: ņemt divus taisnstūrus 5×6, kuru salikums jau dots 29. zīmējumā.

Nostiprinot kastītē 6×10 taisnu plāksnīti, kura kastīti sadala divos vienādos nodalījumos (5×6), iegūsim lielisku parastās MR-pentamino modifikāciju. Tāpat visai sareģītas MR iegūsim, ja taisnas plāksnītes saskaņā ar 26.-28. zīm. nostiprināsim kastītēs 4×15 un 5×12.

No diviem taisnstūriem ar laukumu summu 60 vēl nav analizēti šādi pāri (3×10, 5×6) un (2×10, 5×8). Uzdevumam salikt no pentamino vienlaicīgi divus taisnstūrus 3×10 un 5×6 saskaņā ar S. Golombu [1] nav atrasts pietiekoši vienkāršs šo taisnstūru nesaliekamības pierādījums. Savādi, ka būtiski vieglāks uzdevums par vienlaicīgu taisnstūru 2×10 un 5×8 salikšanu ir pieskaitīts pie neatrisinātiem [1], [12].

Sniegsim vienkāršu pierādījumu, ka taisnstūri 2×10 un 5×8 vienlaicīgi nav saliekami.

Tā kā taisnstūri 2×10 var salikt tikai no (I, P, L, N) vai (I, P, L, Y), sk. 3.2. uzd., tad taisnstūra 5×8 salikšanā nedrīkst izmantot I, P, L, bet jāizmanto X, W, Z, F, V, T, U un viens no pentamino N vai Y.

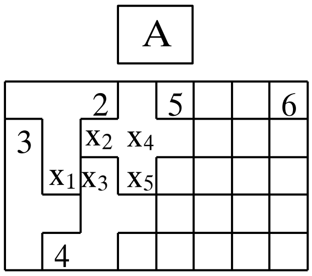
Ievērojot simetriju, pietiek analizēt piecus pentamino X stāvokļus, kad X centrālais vienības kvadrāts x_c noklāj rūtiņu x_i , sk. 30. zīm., īsāk to pieraksta tā: $x_c = x_i$, $i=1,...,5$.

Pirmajos divos gadījumos, kad $x_c = x_1$ vai $x_c = x_2$, acīmredzams, ka bez pentamino L vai P taisnstūri 5×8 salikt nevarēs.

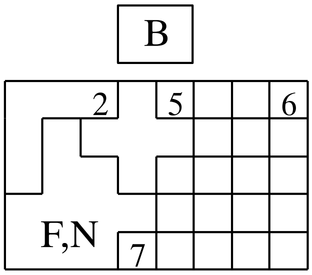
Trešajā gadījumā, kad $x_c = x_3$, pirmās kolonnas pirmā rūtiņa būtu jānoklāj ar Y (vienīgais pieļaujamais pentamino). Simetrijas dēļ tieši tāpat šīs kolonnas pēdējā rūtiņa būtu jānoklāj ar jau aizņemto Y.

Ceturtajā sarežģītākajā gadījumā, kad $x_c = x_4$, jāaplūko divi varianti A un B, sk. 30.-31. zīm., atkarībā no tā, ar kuru pentamino noklāj 2. rūtiņu.

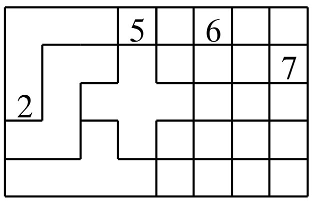
Varianta A tālākā analīze skaidra: neatkarīgi no tā, ar kuru pentamino W, Z, V vai U noklāsim 5, rūtiņu, vairs nebūs iespējams noklāt 6. rūtiņu (bez L, P, I un N).



30. zīm.



31. zīm.



32. zīm.

Variantā B spriedumi līdzīgi: neatkarīgi no tā, ar kuru pentamino W, Z vai U noklāj 5. rūtiņu, vairs pieļaujamā veidā nevarēs noklāt 6. rūtiņu. Ja 5. rūtiņu noklātu ar T, tad vairs ne ar vienu no atlikušajiem pentamino W, Z un U nevarētu noklāt 7. rūtiņu. Savukārt, ja 5. rūtiņu noklātu ar Y, tad taisnstūra 5×8 noklāšanā būtu izmantoti N un Y, kas nav pieļaujams.

Pēdējā gadījumā, kad $x_c = x_5$, 2. rūtiņa jānoklāj ar pentamino V. Gandrīz acīmredzami, ka 2. rūtiņu nav pieļaujams noklāt ar pentamino F, N, T, U, W, Y un Z, jo nedrīkst izmantot pentamino I, L un P. Ievērojot simetriju, pietiek aplūkot 32. zīm. parādīto pirmo četru pentamino izvietojumu. No četriem atlikušajiem pentamino F, T, U un W tikai viens ir derīgs 5. rūtiņas noklāšanā, proti, 5. rūtiņa jānoklāj ar W, pēc tam 6. - ar T, bet 7. būtu jānoklāj ar L, kas netiek pieļauts. Līdz ar to pasvītrotais apgalvojums ir pierādīts.

Apkopojot augstāk izklāstīto, formulēsim šādu ievērojamu rezultātu par p-taisnstūriem.

A6. <u>Jebkuriem diviem no visiem pentamino vienlaicīgi saliktiem taisnstūriem sakrīt vismaz vienas malas garumi.</u>

Šis apgalvojums, vispārīgi runājot, nav spēkā, ja netiek izmantoti visi pentamino.

Divu taisnstūru vienlaicīga salikšana, ja neizmanto visus pentamino

Vienkārši pierādīt, ka jebkuru taisnstūru pāri (5×1, $5\times i$), $i=3,\dots,10$, var salikt no pentamino. Šim nolūkam pietiek atrast kaut kādu vienu taisnstūra $5\times i$, $i=3,\dots10$, salikumu, kurš nesatur pentamino I. Zemāk piedāvātajos uzdevumos par divu taisnstūru salikšanu uzmanība galvenokārt tiek pievērsta interesentākajiem salikumiem, tai vai citā ziņā ievērojamākajām pentamino kombinācijām.

Uzdevumu par vienlaicīgu taisnstūru salikšanu formulējumos vārds "vienlaicīgi" parasti tiek izlaists.

3.34. uzdevums Cik pavisam ir tādu taisnstūra 4×5 salikumu, kuri sadalās divos p-taisnstūros?

3.35. uzdevums. Atrast piecu pentamino tādu kombināciju, kura satur I, bet nesatur P, lai no šīs kombinācijas elementiem taisnstūri 5×5 varētu salikt maksimāli daudzos veidos.

3.36. uzdevums. Vai eksistē tāds taisnstūra 5×6 salikums, kurš nesatur ne P, ne L, bet kurš tomēr sadalās divos p-taisnstūros.

3.37. uzdevums. Neizmantojot pentamino P un L, salikt taisnstūri 5×7 tā, ka tas sadalās divos p-taisnstūros.

3.38. uzdevums. Vai taisnstūri 5×8, neizmantojot pentamino P un L, var salikt tā, ka tas sadalās divos p-taisnstūros?

3.39. uzdevums. Salikt taisnstūri 5×8, neizmantojot pentamino F, N, P un I.

3.40. uzdevums. Vai eksistē tāds taisnstūra 5×8 salikums, kurš nesatur pentamino P, L un I, bet satur X?

Risinot šos uzdevumus, var ievērot, ka taisnstūru salikumus izdotos atrast krietni vien ātrāk, ja drīkstētu izmantot pentamino P. Lielum lielais vairums no taisnstūru salikumiem biežāk nekā jebkuru citu satur tieši šo pentamino.

3.41. uzdevums. Vai taisnstūri 5×9 var salikt no pentamino, ja neizmanto P, V un I?

3.42. uzdevums. Vai taisnstūri 5×10 var salikt no pentamino, ja neizmanto P un I?

3.43. uzdevums. Vai eksitē tāds taisnstūra 5×12 salikums, kurā pentamino I saskaras tikai ar T un P?

Nākamā uzdevumu grupa veltīta taisnstūru pāriem (5×3, $5\times i$), $i=3,\dots8$.

3.44. uzdevums. Atrast sešus pentamino, no kuriem var salikt divus vienādus taisnstūrus. Cik veidos tādus sešus pentamino var izvēlēties?

3.45. uzdevums. Salikt taisnstūrus 5×3 un 5×4 no pentamino L, P, T, V, U, Y un Z.

3.46. uzdevums. Salikt taisnstūrus 5×3 un 5×5 no pentamino F, L, N, P, T, U, V un Y.

3.47. uzdevums. Vai var salikt taisnstūrus 5×3 un 5×6, neizmantojot pentamino P?

3.48. uzdevums. Vai var salikt taisnstūrus 5×3 un 5×7, neizmantojot pentamino I?

3.49. uzdevums. Vai var salikt taisnstūrus 5×3 un 5×8, neizmantojot pentamino Z?

Nākamie četri uzdevumi veltīti taisnstūru pāriem (5×4, 5×i), i=4,...,7.

3.50. uzdevums. Salikt divus vienādus taisnstūrus 5×4, neizmantojot pentamino L.

3.51. uzdevums. Salikt taisnstūrus 5×4 un 5×5, neizmantojot pentamino L.

3.52. uzdevums. Vai var salikt taisnstūrus 5×4 un 5×6, ja neizmanto pentamino P?

3.53. uzdevums. Salikt taisnstūrus 5×4 un 5×7. Vai visos šo taisnstūru salikumos netiek izmantots viens un tas pats pentamino?

Vēl divi uzdevumi par taisnstūriem (5×5, 5×i), i=5,6.

3.54. uzdevums. Atrast taisnstūra 5×10 tādu salikumu, kurš satur pentamino X un kurs sadalās divos vienādos taisnstūros.

3.55. uzdevums. Vai var salikt taisnstūrus 5×5 un 5×6, neizmantojot pentamino Z?

Iepazīstoties ar šiem uzdevumiem, nav grūti ievērot, ka taisnstūrus (5×5, 5×i), i=1, 4, 5, 6, 7, var salikt tā, ka visos piecos gadījumos taisnstūru 5×5 salikumi būs vieni un tie paši, sk. 27. zīm. Savukārt taisnstūrus (5×4, 5×i) var salikt tā, ka sešos gadījumos, i=1, 3, 4, 5, 6, 7, taisnstūru 5×4 salikumi būs vieni un tie paši. Tie jāveido no pentamino I, N, P un U. Beidzot, taisnstūrus (5×3, 5×i) var salikt tā, ka septiņos gadījumos, i=1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, taisnstūru 5×3 salikumi būs vieni un tie paši.

Aplūkosim vēl neminētos taisnstūru pārus.

3.56. uzdevums. No pentamino salikti divi taisnstūri. Viens no taisnstūriem ir 2×10. Kāds ir otrais taisnstūris?

3.57. uzdevums. Zināms, ka bez pentamino F, P un U var salikt taisnstūri 5×9, sk. 27. zīm. Vai bez šiem pentamino var salikt arī taisnstūri a) 3×10; b) 4×10?

3.58. uzdevums. Salikt no pentamino taisnstūru pāri (3×10, 4×5). Vai pentamino sadalījums pa šiem taisnstūriem nosakāms viennozīmīgi?

3.59. uzdevums. Salikt no pentamino taisnstūru pāri (3×10, 5×5). Vai pentamino sadalījums pa šiem taisnstūriem nosakāms viennozīmīgi?

3.60. uzdevums. Cik (iespējami maz) pentamino jāizvēlas, lai no taisnstūriem varētu salikt jebkuru no šādiem taisnstūru pāriem (1×5, 3×10), (1×5, 3×15), (1×5, 4×10)?

Apkoposim rezultātus par taisnstūru pāru salikšanu. No pentamino var salikt šādus 33 taisnstūru pārus:

(5×1, 5×i), i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11;
(5×3, 5×i), i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
(5×4, 5×i), i = 4, 5, 6, 7;
(5×5, 5×i), i = 5, 6, 7;
(5×6, 5×6),
(10×2, 10×3),
(10×3, 5×i), i = 1, 3, 4, 5;
(10×4, 5×i), i = 1, 3, 4;
(15×3, 5×1).

Neviens cits taisnstūru pāris no pentamino nav saliekams.

3.3. Trīs taisnstūru vienlaicīga salikšana

Vai no visiem pentamino var salikt trīs taisnstūrus? Vai starp taisnstūru 4×15, 5×12 un 6×10 salikumiem ir tādi, kuri sadalās trīs taisnstūros? Kādi ir tie trīs taisnstūri, kurus var salikt no pentamino? Tādi ir svarīgākie jautājumi, uz kuriem dotas atbildes šajā iedaļā.

3.61. uzdevums. Parādīt, ka no pentamino var salikt trīs taisnstūrus (5×1, 5×3, 5×i), i = 3, 4, 5, 6, 7.

3.62. uzdevums. Vai iepriekšējam uzdevumam eksistē tāds atrisinājums, ka visos piecos gadījumos vidējais taisnstūris 5×3 ir saliekams vienā un tajā pašā veidā?

3.63. uzdevums. Parādīt, ka taisnstūrus (5×1, 5×4, 5×i), i = 4, 5, 6, var salikt tā, ka visos trijos gadījumos vidējais taisnstūris būs salikts vienā un tajā pašā veidā.

3.64. uzdevums. Vai no pentamino var salikt vienlaicīgi trīs vienādus taisnstūrus?

Nākamais uzdevums būs noderīgs 3.66. uzdevuma risināšanā.

3.65. uzdevums. Atrast visus taisnstūra 5×4 salikumus, ja neizmanto pentamino L un P.

3.66. uzdevums. Pierādīt, ka no pentamino nevar salikt taisnstūrus (5×3, 5×3, 5×4).

<u>3.67. uzdevums.</u> Atrast visus taisnstūra 5×5 salikumus, ja neizmanto pentamino L un P.

<u>3.68. uzdevums.</u> Pierādīt, ka no pentamino nevar salikt taisnstūrus (5×3, 5×3, 5×5).

<u>3.69. uzdevums.</u> Izmantojot iepriekš minētos rezultātus par divu taisnstūru vienlaicīgu salikšanu, paskaidrojiet, kāpēc nav saliekami taisnstūri (5×1, 5×3, 5×8), (5×1, 5×3, 10×4), (5×1, 5×4, 5×7), (5×1, 5×5, 5×6), (5×1, 10×3, 5×5).

Formulēsim šādus ievērojamus rezultātus par trīs taisnstūru vienlaicīgu salikšanu.

A7. <u>Trīs taisnstūrus vienlaicīgi salikt iespējams tikai tad, ja neizmanto visus pentamino.</u>

A8. <u>Jebkuriem no pentamino vienlaicīgi saliktiem trim taisnstūriem sakrīt vismaz vienas malas garumi.</u>

A9. <u>Ja no pentamino vienlaicīgi ir salikti trīs taisnstūri, tad viens no taisnstūriem ir taisnstūris 5×1.</u>

No apgalvojuma A9 uzreiz izriet, ka no pentamino nav iespējams vienlaicīgi salikt vairāk nekā trīs taisnstūrus. Tātad 3 ir lielākais taisnstūru skaits, kurus vienlaicīgi var salikt no pentamino.

Daži pierādījumi par citu taisnstūru nesaliekamību būs doti grāmatas 2. daļā.

Šo nodaļu beigsim ar tabulu. Trešās kolonnas "Derīgo pentamino kombināciju skaits" skaitļi norāda, cik dažādos veidos var izvēlēties k pentamino no 12 dotajiem tā, lai no tiem varētu salikt atbilstošo taisnstūri ar laukumu 5k. Ceturtās kolonnas skaitļi norāda, cik dažādos veidos no pentamino ir saliekams attiecīgais taisnstūris. No tabulas redzams, ka visvairāk veidos ir saliekams taisnstūris 5×10.

Pentamino skaits k	Taisnstūru izmēri	Derīgo pentamino kombināciju skaits	Salikšanas variantu skaits
1	1×5	1	1
2	2×5	0	0
3	3×5	7	7
4	2×10	2	2
4	4×5	26	50
5	5×5	45	107
6	2×15	0	0
6	3×10	75	145
6	5×6	172	541
7	5×7	245	1396
8	2×20	0	0
8	4×10	224	2085
8	5×8	261	3408

9	3×15	39	201
9	5×9	175	5902
10	2×25	0	0
10	5×10	65	6951
11	5×11	12	4103
12	2×30	0	0
12	3×20	1	2
12	4×15	1	368
12	5×12	1	1010
12	6×10	1	2339

2. tabula

NORĀDĪJUMI

1. nodaļa

1.1. Neizpildīsies. Risiniet nākamo uzdevumu!

1.2. Uzdevums ir samērā vienkāršs. Tomēr, ja neizdodas atrast visus 35 heksamino, tad iepazīstieties ar dažiem pārskaitīšanas paņēmieniem, kuri minēti nākamā uzdevuma norādījumos, un izvēlieties sev piemērotāko.

1.3. Eksistē vairāki paņēmieni, kā var atrast visus heptamino. Viens no tiem: balstoties uz n-mino definīciju, vispirms atrast visus 35 heksamino un tad, izejot no tiem, konstruēt visus dažādos heptamino. Otrs - vispirms konstruēt tos heptamino, kurus var izvietot taisnstūros 1×k, 2×k, tad tos, kurus var izvietot taisnstūrī 3×k, utt., kur k - patvaļīgs naturāls skaitlis. Trešais - heptamino sadalīt 6 grupās G_i pēc garākā taisnstūra 1×i, ko tie satur. Nodaļā "Atbildes un atrisinājumi" aplūkots tieši šis paņēmiens. Pārliecinieties, ka katra no grupām G_2 ,..., G_7 satur attiecīgi 1, 41, 43, 19, 3, 1 heptamino! To, savukārt, būs vienkāršāk izdarīt, ja grupas G_3 , G_4 , G_5 sadalīsiet apakšgrupās.

2.nodaļa

2.1. Profesora Pentamino kolekcijā ir tikai divi šādi 10-mino. Atrodiet tos!

2.2. Ņemiet simetriskos pentamino I, T un U. Ar katriem diviem pentamino (I, T), (I, U) un (T, U) izveidojiet četrus simetriskus 10-mino.

2.3. Eksistē tikai gadījumā b).

2.4. Eksistē.

2.5. Četrus.

2.6. Ja esat atraduši 48 figūras, tad salīdziniet tās ar atbildē dotajām.

2.7. Atrodiet 5 pentamino, no kuriem var izveidot 9 veiksmīgus pārus!

2.8. Izmantot 40. zīm.
2.11. Eksistē.
2.12. Ir. Lai atrastu šādu figūru, izmantojiet 2.1. uzdevuma atbildi.
2.14. Eksistē. Atrodiet šo 10-mino patstāvīgi!
2.16. Eksistē.
2.17. Eksistē.
2.18. Jā, var.
2.19. Viens no paņēmieniem, kā meklēt vajadzīgās figūras, ir norādīts 2.20. uzdevuma risinājumā.
2.20. Nav.
2.21. Nav.
2.22. Tikai viena.
2.23. Jāatrod piemērots 6-stūris.
2.24. Divi.
2.25. Eksistē.
2.26. L, P, V un W.
2.27. Izmantot 4. un 37. zīm. attēlotos 10-mino kā meklējamās figūras sastāvdaļas.
2.29. Eksistē. Izmantot divus vienādus simetriskus 10-mino kā meklējamās figūras sastāvdaļas.
2.30. Eksistē.
2.32. Nav.
2.33. Mazdēls kļūdījās.
2.34. Mazdēls var nopelnīt kastīti ar laukumu 88.
2.35. Nav pareizs.
2.36. Abos gadījumos atbilde ir apstiprinoša.
2.37. Var atrast 60-mino ar caurumu 9×10.
2.38. Sk. 2.36. uzdevuma norādījumu.
2.39. Parādiet, ka dotajā riņķī var izvietot 12 pentamino un vienu monomino.
2.40. Sk. zīm. uz grāmatas vāka (titullapu).
2.41. Nē.
2.42. Ne vienmēr.
2.43. Tikai diviem pentamino apvilkto riņu diametri nesakrīt ar šo pentamino diametriem. Atrodiet šos pentamino!
2.44. Izmantojiet 2.42. uzdevuma risinājumu. Lai atrisinātu uzdevumu, nebūt nav jāzina konkrētās diametru skaitliskās vērtības.
2.45. Eksistē tikai viens pentamino, kuru var izgatavot no kvadrāta ar malas garumu, mazāku nekā 3. Atrodiet īsu šī apgalvojuma pierādījumu!
2.46. Var.

2.48. Eksistē. Šī un 2.49. uzdevuma atrisinājumus var atrast M. Gardnera grāmatā [4].

2.49. Nav.

2.50. Eksistē.

2.52. Var.

2.53. Eksistē.

2.56. Var. Izmantojiet 15. zīm. parādīto kvadrāta sagriešanas paņēmienu.

2.57. Pentamino X.

2.58. Var.

2.59. Nevienā no gadījumiem apgalvojums nav pareizs.

2.60. Profesors neprata izgatavot pentamino N.

2.61. Sk. nākamo uzdevumu.

2.63. Atrast piecus pentamino.

2.64. To, ar kuriem var noklāt joslu ar platumu 5.

2.65. Eksistē.

2.66. To, ar kuriem var noklāt kādu joslu.

2.67. To skaits ir 7.

2.69. Jā. Izmantot 2.68. uzdevuma risinājumā lietoto paņēmienu ar "kāpņveida joslām".

2.71. Varētu būt, lielākais, četras istabas.

2.72. Vajadzēja izvēlēties kārbiņu ar pentamino L.

2.73. 24.

2.74. Izmantot 2.67. uzdevuma risinājumu.

2.75. Atcerieties 2.71. uzdevumu, sk. arī 2.64. uzdevuma risinājumu.

2.76. Kastītē 3×20 var izvietot 10, pārējās - 11 pentamino Y.

2.77. Var.

2.78. Hipotēze nav pareiza. To var atspēkot pat ar trimino.

2.79. Pirmajā gadījumā ļoti vienkārši pierādīt, ka tāds taisnstūris neeksistē. Turpretī otrajā - ļoti grūti atrast vajadzigo taisnstūri un tā noklāšanas veidu, pat tad, ja iepriekš zināms, ka tāds taisnstūris eksistē.

2.81. Mainīt vietām F ar W un samainīt pentamino I, P, U un V atrašanās vietas.

2.83. Var. Noskaidrojiet, kurus!

2.84. Izmantot iepriekšējā uzdevuma atbildi.

2.85. Šāda hipotēze ne vienmēr būs pareiza. Izmantot iepriekšējo uzdevumu atbildēs dotās pentamino "izlaušanas" shēmas.

2.89. Izmantot 2.86. uzdevuma atbildi.

2.90. Jā, var.

2.93. Izmantot 2.92. uzdevuma atbildi.

2.94. Var. Izmantot 2.91. uzdevuma atbildi.

2.95. Var. Izmantot 2.90. uzdevuma atbildi.

2.96. Uzrādīt tādu pentamino "izlaušanas" shēmu, kurai apgalvojums nav pareizs.

2.97. Šāda hipotēze ne vienmēr būs pareiza.

2.98. Arī šī hipotēze nav pareiza. Pietiek pārbaudīt iepriekšējo uzdevumu atbildēs dotās pentamino izlaušanas shēmas.

2.99. Atrast pretpiemēru.

2.100. Eksistē.

2.101. Meklējamo 7-stūri var iegūt no kvadrāta 9×9, tam attiecīgi nogriežot stūrus.

2.102. Var! Risiniet nākamo uzdevumu!

2.103. Vai no sagataves 8×9 var izlauzt visus pentamino? Nezinot atbildi uz šo jautājumu, izlaušanas shēmas meklējumos man pagāja apmēram 4 dienas, kamēr konstatēju, ka var. Zinot šo atbildi, patstāvīgi atrodiet atbilstošu shēmu īsākā laikā!

2.104. Eksistē. Izmantojiet iepriekšējā uzdevuma atbildi.

3.nodaļa

3.1. Iekrāsojiet taisnstūri pēc šaha galdiņa principa un saskaitiet, cik iekrāsotu un cik "neiekrāsotu" (baltu) rūtiņu var noklāt ar katru no tetramino.

3.2. Eksistē tikai divi salikumi.

3.3. Eksistē septiņi salikumi.

3.4. P, L, W un Y.

3.6. To skaits būs 10.

3.7. Var atrast 8 salikumus.

3.8. Der, piemēram, X, V, U, N, L, Y un P.

3.10. Eksistē tikai viens meklējamais salikums.

3.11. Var.

3.12. Atrodiet desmit pentamino, no kuriem nevar salikt taisnstūri 5×10!

3.13. Var.

3.14. Nav pareizs.

3.15. Der, piemēram, T, V, U, I, F, N, L, Y un P.

3.16. Var abos gadījumos.

3.17. Atrodiet vienu salikumu, otru varēs vienkārši iegūt no šī jau atrastā.

3.18. Nav pareizs.

3.19. Eksistē.

3.21. Nav vienīgie. Ievērojiet, kā no 25. zīm. parādītā salikuma var iegūt citus salikumus ar 4 "īpašiem" krustpunktiem. Grūtāk saskatīt, kā varētu izmantot 24. zīm. attēloto salikumu vēl viena līdzīga salikuma iegūšanā.

3.22. Izmantojot simetrijas un dalāmības (ar 5) principus.

3.23. Eksistē 5 salikumi.
3.25. Eksistē tikai divas kombinācijas.
3.26. Eksistē četras kombinācijas.
3.27. Var izmantot pilnās pārlases metodi. Atrodiet divus salikumus!
3.30. Katram taisnstūrim eksistē tikai viens p-salikums, sk. 28. zīmējumu.
3.32. Izmantot taisnstūra un pentamino W simetriju, kā arī dalāmības un rūtiņu prioritātes principus.
3.33. Izmantot 3.2. un 3.32. uzdevumu risinājumus.
3.35. Meklējamā kombinācija dos 6 taisnstūra 5×5 salikumus jeb 3 taisnstūra 4×5 salikumus, kuri nesatur pentamino I.
3.36. Eksistē.
3.37. Ievērot, ka neder taisnstūru pāris (3×5, 4×5), sk. 3.3. uzdevumu, tāpēc meklēt tādu taisnstūra 5×6 salikumu, kurš nesatur I, P un L.
3.38. Eksistē. Meklēt taisnstūra 5×7 salikumu, kurš nesatur I, P un L.
3.40. Izmantot taisnstūru 2×10 un 5×8 vienlaicīgas p-nesaliekamības pierādījumu.
3.41. Var.
3.42. Var.
3.43. Meklēt tādu salikumu, kurš sadalās divos taisnstūros.
3.47. Var.
3.48. Var. Taisnstūri 5×3 salikt no pentamino L, N un V.
3.49. Var. Taisnstūri 5×3 salikt no pentamino L, T un Y.
3.51. Var.
3.52. Var. Taisnstūri 5×4 salikt no pentamino L, N. V un Z.
3.53. Taisnstūri 5×4 salikt no pentamino L, N, V un Z.
3.54. Izmantot jau zināmo taisnstūra 5×12 salikumu, kurš sadalās divos taisnstūros 5×5 un 5×7.
3.55. Var.
3.56. Otrs taisnstūris ir 3×10.
3.57. Var abos gadījumos.
3.58. Taisnstūri 5×4 salikt no pentamino F, L, U un V.
3.59. Taisnstūri 3×10 salikt no pentamino I, N, T, V, Y un Z.
3.60. Desmit.
3.61. Sk. 3.44.-3.48. uzdevumu atbildes.
3.62, Jā, eksistē.
3.63. Taisnstūris 5×4 jāsaliek no pentamino L, N, V un Z. Pārējos var salikt attiecīgi no (F, P, U, Y), (F, P, U, Y, T), (F, P, U, Y, T, X), sk. 158. zīm.

3.64. Nevar.

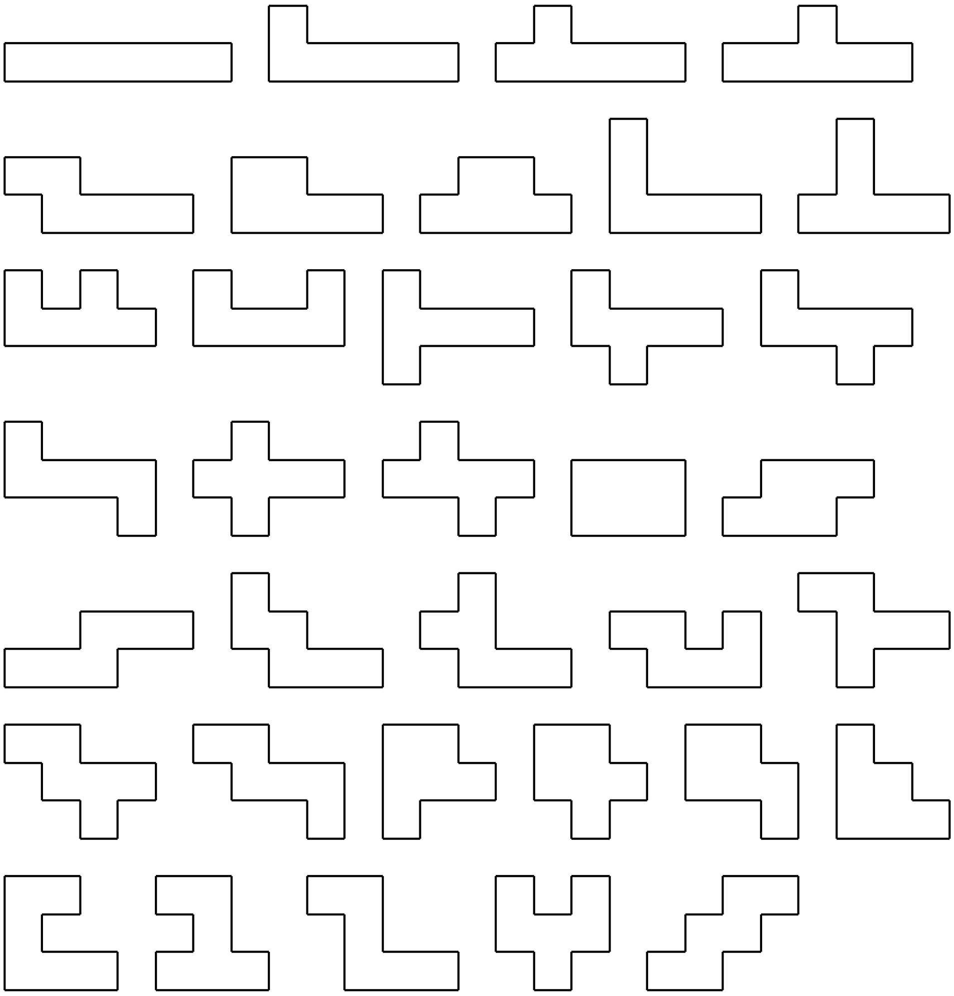
3.67. Atrodiet trīs salikumus!

3.68. Izmantot 3.67. uzdevuma atbildi un atsaukties uz 3.66. uzdevuma risinājumu.

ATBILDES UN ATRISINĀJUMI

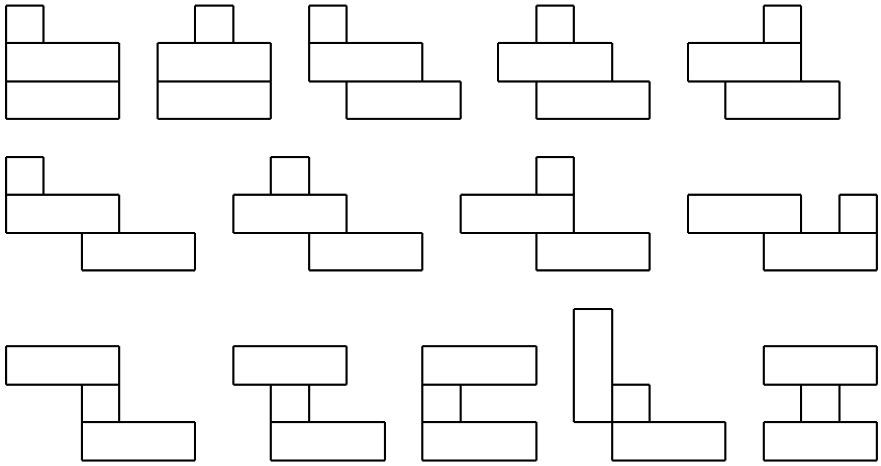
1. nodaļa

1.2. Visi 35 heksamino parādīti 33. zīmējumā.



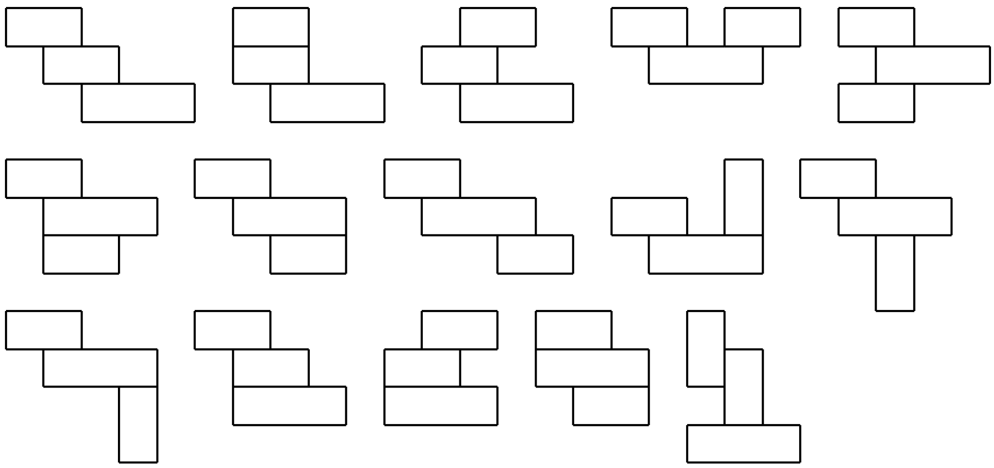
33. zīm.

1.3. Dosim paņēmienu, kā var atrast visus grupās G_3, G_4, G_5 (sk. norādījumus) ietilpstošos heptamino. Grupu G_3 sadalīsim trīs apakšgrupās. Pirmajā apakšgrupā iekļausim visus tos heptamino, kuri satur trīs taisnstūrus: 1×3, 1×3 un 1×1 (un, protams, tos, kuri nesatur lielākus rūtiņu taisnstūrus kā 1×3). Pavisam ir 14 šāda veida heptamino, sk. 34. zīm.



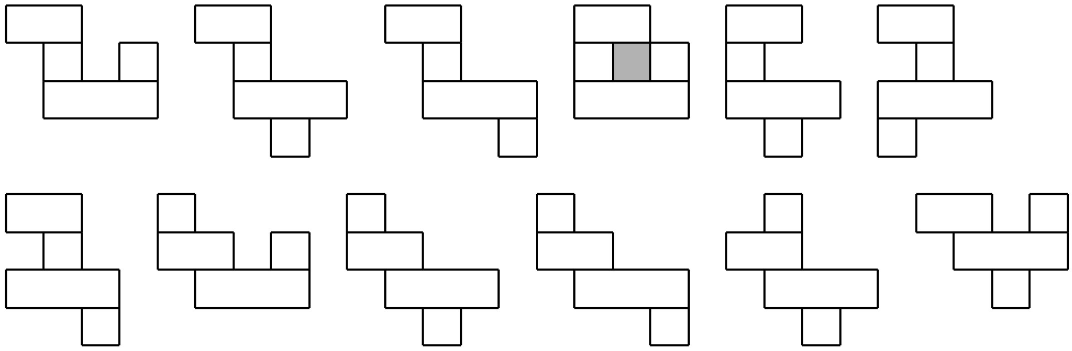
34. zīm.

Otrajā apakšgrupā iekļausim visus tos grupas G_3 heptamino, kuri satur taisnstūrus 1×3, 1×2, 1×2 un kuri vēl nav iekļauti 1. apakšgrupā. Pavisam ir 15 šādi heptamino:



35. zīm.

Beidzot trešajā apakšgrupā iekļausim visus tos grupas G_3 heptamino, kuri vēl nav iekļauti pirmajās divās apakšgrupās. Šīs apakšgrupas heptamino sastāv no taisnstūriem 1×3, 1×2 un diviem taisnstūriem 1×1,un tie ir parādīti 36. zīm.



36. zīm.

Tātad grupa G_3 satur 14+15+12=41 heptamino.

Līdzīgā veidā var iegūt, ka grupas G_4 un G_5 satur attiecīgi 43 un 19 heptamino. Pārliecinieties par to patstāvīgi un pabeidziet risinājumu! Tas būs labs vingrinājums.

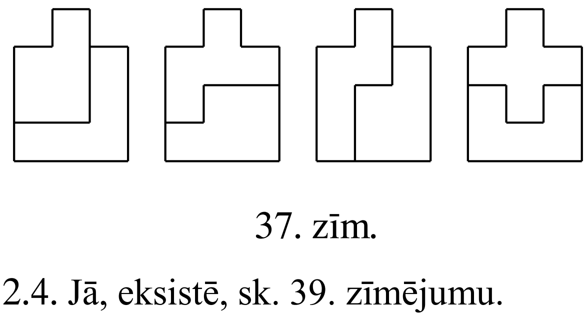
Kā redzams, "caurumotais" heptamino ir ieskaitīts visu dažādo 100 heptamino (sk. norādījumu) skaitā. Starp citu, jautājums - vai, nosakot skaitu p_n , jāņem vērā arī "caurumotās" figūras? - var rasties tikai neuzmanīgiem lasītājiem, jo n-mino definīcija neizslēdz šādas figūras.

2. nodaļa

2.1. Divas šādas figūras (jeb viena un tā paša 10-mino divi stāvokļi) parādītas 38. zīmējumā.

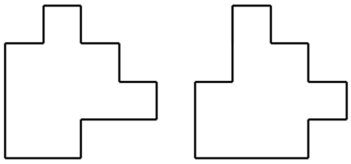
Ievērosim, ka šīs figūras ir viena otras spoguļattēls. Katru no tām var salikt divos veidos, izmantojot pentamino F un N. Pārējās divas figūras ar vajadzīgo īpašību atrodiet patstāvīgi.

2.3. Gadījumā b) tāds 10-mino eksistē, sk. 37. zīmējumu. Lai pierādītu, ka gadījumā a) tāds 10-mino neeksistē, var izmantot 2.6. uzdevuma atbildi.

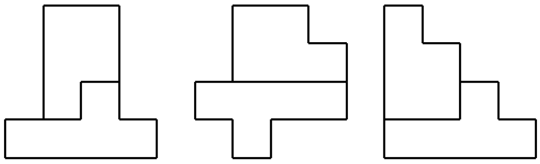


37. zīm.

2.4. Jā, eksistē, sk. 39. zīmējumu.



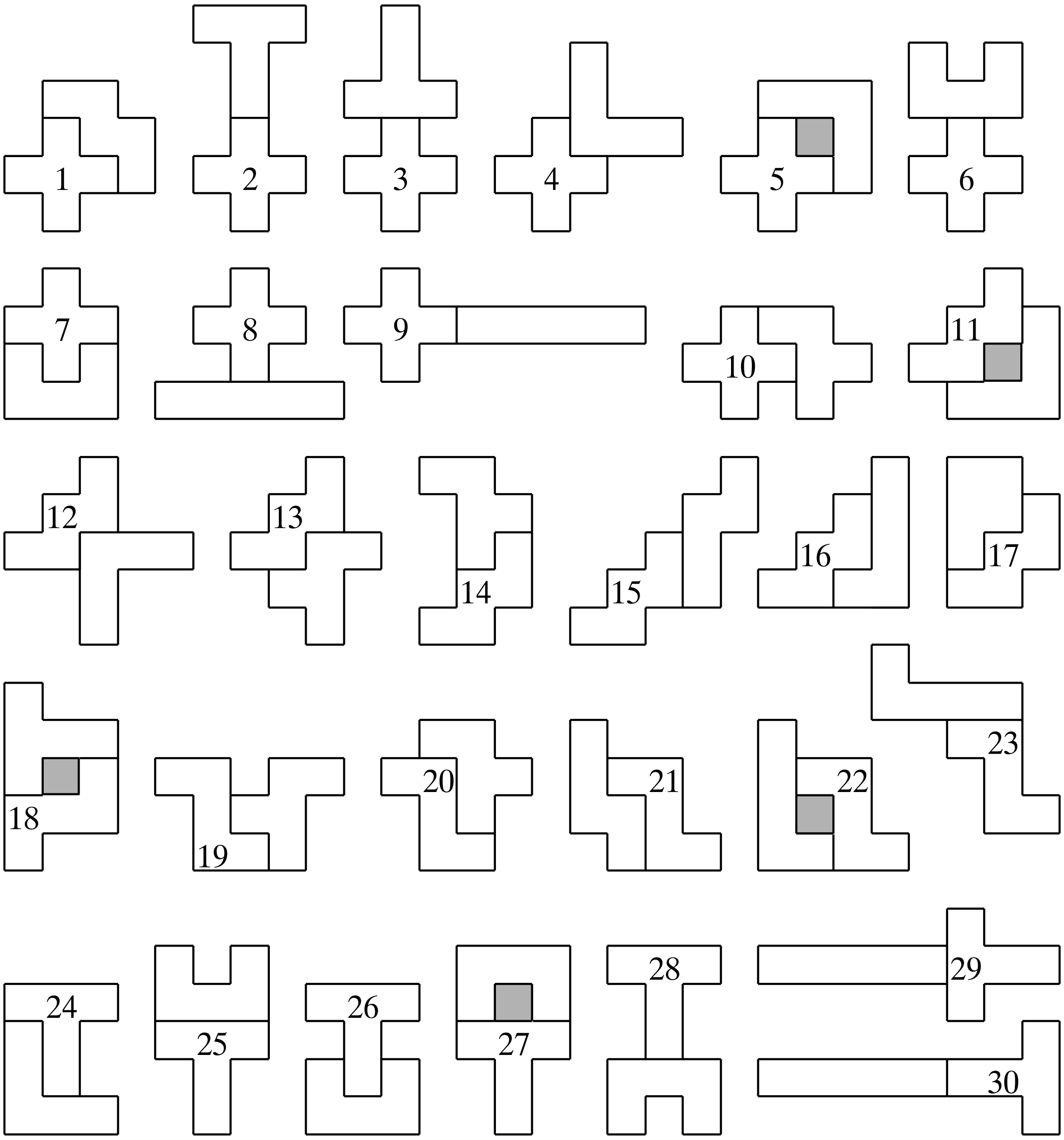
38. zīm.



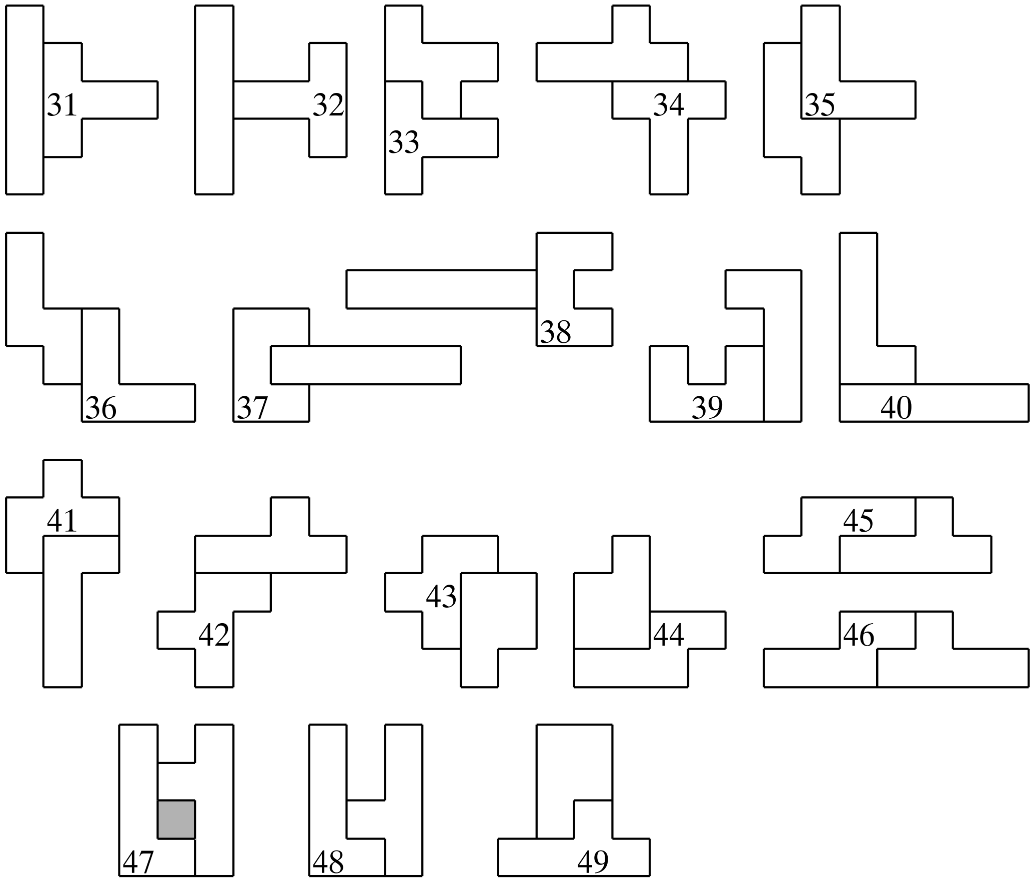
39. zīm.

2.5. Var izveidot 4 veiksmīgus pārus (I, L), (I, U), (L, U), (L, Z), sk. 40. zīmējumu.

2.6. Visi simetriskie p-saliekamie 10-mino parādīti 40. zīm.



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30



40. zīm.

2.7. No pentamino F, N, P, T, Y var izveidot 9 veiksmīgus pārus: (F,N), (F,P), (F,T), (F,Y), (N,P), (N,Y), (P,T), (P,Y) un (T,Y), sk. 40. zīmējumu. Zinot veiksmīgo pāru sarakstu, (sk. 2.8. uzd. risinājumu), viegli pierādīt, ka šis rezultāts nav uzlabojams.

2.8. Izmantojot 40. zīm., sastādīsim veiksmīgo pāru sarakstu. Vispirms ievērosim, ka ne visu 10-mino salikumi nosakāmi viennozīmīgi. Piemēram, 10-mino ar 1. numuru vēl var salikt no Y un P, sk. arī 37. zīm. Lūk, kādi ir veiksmīgie pāri:

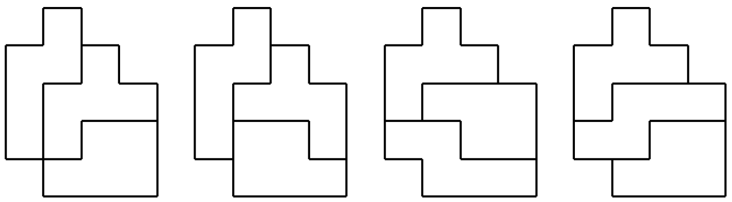
(X, W), (X, T), (X, V), (X, U), (X, I), (X, F);
(W, V), (W, F), (W, N), (W, L), (W, P);
(Z, T), (Z, F), (Z, N), (Z, L);
(T, V), (T, U), (T, I), (T, F), (T, Y), (T, P);
(V, N), (V, P);
(U, I), (U, L), (U, Y);
(I, L);
(F, N), (F, Y), (F, L), (F, P);
(N, Y), (N, P);
(L, Y), (L, P);
(Y, P).

Ir iegūti 36 veiksmīgie pāri. Tā kā izvēlēties 2 elementus no 12 var 66 kombinācijās, tad veiksmīgo pāru tomēr ir vairāk.

2.9. Visbiežāk atkārtojas pentamino T - 8 reizes, bet visretāk pentamino Z - tikai 4 reizes. Negaidīti, ka simetriskā figūra Z izrādās "sliktāka" par jebkuru no pieciem nesimetriskajiem pentamino F, L, N, P un Y, (sk. jau sastādīto veiksmīgo pāru sarakstu).

2.10. Atkal visbiežāk atkārtojas pentamino T - 16 salikumos, bet visretāk pentamino Z - tikai 6 salikumos.

2.12. Viena no šādām figūrām un tās 4 salikumi parādīti 41. zīmējumā.

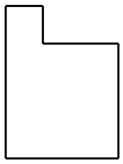


41. zīm.

Kā otra der šīs figūras spoguļattēls. Atrodiet patstāvīgi vēl divas figūras ar šeit interesējošo īpašību.

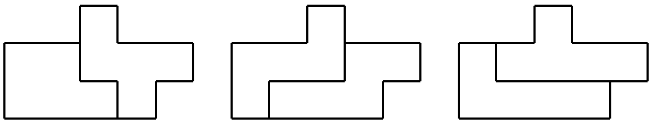
2.13. Figūru, sk. 42. zīm., var salikt septiņos (!) dažādos veidos: (F,U), (L,P), (P,V), (T,P), (Z,P), (Y,P) un (Y,U).

Vēl vienu 10-mino atrodiet patstāvīgi vai ielūkojieties 2.16. uzd. atbildē.



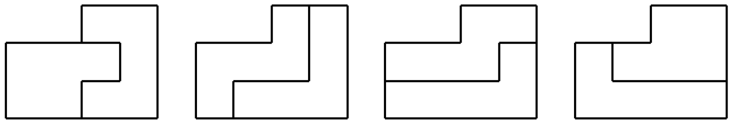
42. zīm.

2.15. Sk. 43. zīmējumu:



43. zīm.

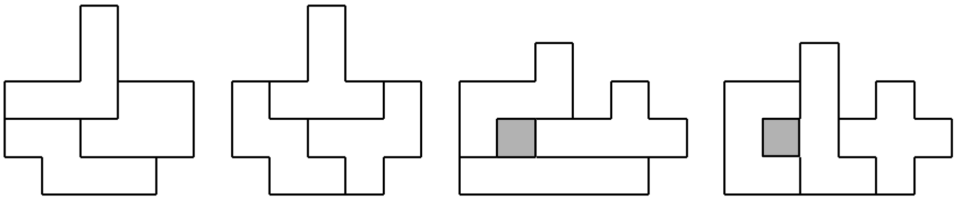
2.16. Sk. 44. zīmējumu.



44. zīm.

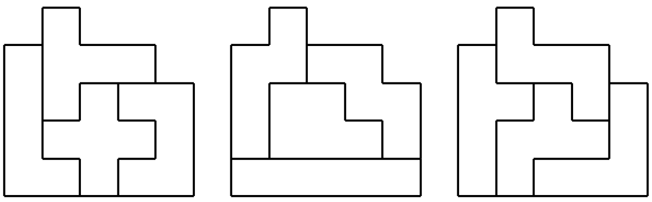
Atrodiet vēl citu atrisinājumu!

2.17. Sk. 45. zīmējumu:



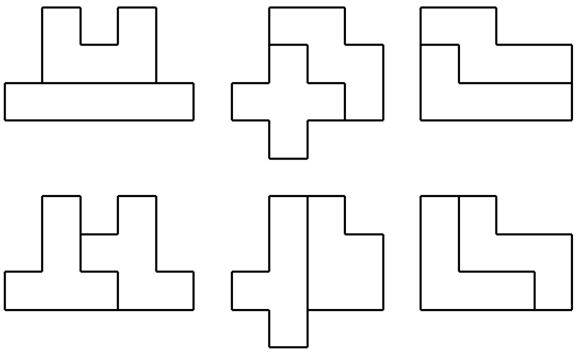
45. zīm.

2.18. Viens no atrisinājumiem ir redzams 46. zīmējumā.



46. zīm.

2.19. Der, piemēram, atrisinājums:



47. zīm.

2.20. Pieņemsim, ka tādas trīs figūras eksistē, Tad, kā to viegli noskaidrot, visām figūrām jābūt 10-mino. No simetriskajiem 10-mino izdalīsim tos, sk. 40. zīm., kuriem piemīt īpašība: 10-mino vienlaicīgi ar tā kopiju ir saliekami no pentamino. Eksistē desmit šādi 10-mino, un tie ir saliekami attiecīgi no pentamino pāriem:

1. (I, U) - (T, F)

2. (I, U) - (T, Z)
3. (X, U) - (P, N vai F, vai V), sk. 37. zīm.
4. (X, V) - (U, Y)
5. (X, W) - (Y, P)
6. (T, U) - (V, N)
7. (T, P) - (Z, N)
8. (T, Y) - (L, Z)
9. (V, W) - (N, F)
10. (W, L) - (Y, P).

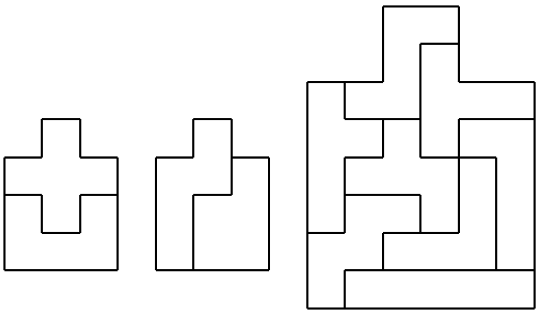
Tālāk pārbaudīsim, vai var atrast trīs tādas rindiņas (no 10 uzrakstītajām), ka neviens no pentamino tajās neatkārtojas. Izvēlēsimies 1. rindiņu un atradīsim tai saderīgās (minētajā nozīmē) rindiņas. Tādas ir tikai 5. un 10. rindiņa. Diemžēl šīs rindiņas satur vairākus kopējus pentamino: W, Y un P. Tas nozīmē, ka, izvēloties 1. rindiņu, vairs nevarēsim piemeklēt pārējās ar vajadzīgo īpašību un tātad nevarēsim atrst trīs vajadzīgās simetriskās figūras. Taču šī izvēle - 1. un 5. rindiņa - dod divas simetriskas figūras, turklāt no šajās rindiņās neizmantotajiem pentamino L, N, V un Z var vienlaicīgi salikt divas vienādas figūras. Citiem vārdiem, minētā izvēle dod vienu 2.19. uzd. atrisinājumu, sk. šī uzdevuma atbildi. Ar šo paņēmienu - izvēlēties divas piemērotas rindiņas no 10 norādītajām - var iegūt vēl citus 2.19. uzd. atrisinājumus, bez tam ar divām simetriskām figūrām.

Ar 2. rindiņu saderīgas ir 5., 9. un 10. rindiņa. Taču pēdējām trijām ir kopējs pentamino W.

Ar 3. rindiņu saderīga ir tikai 8. rindiņa.

Tikpat vienkārša pārējo rindiņu analīze dod, ka nav triju savstarpēji saderīgu rindiņu jeb tādu, kurās kopā būtu iekļauti visi 12 pentamino. Līdz ar to esam pierādījuši, ka neeksistē tādas trīs simetriskas figūras, kuras vienlaicīgi ar to kopijām varētu salikt no 12 pentamino.

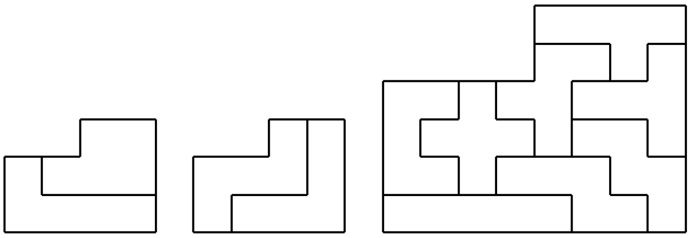
2.22. Izmantojot simetrisko 10-mino sarakstu, sk. 40. zīm., nav grūti pārbaudīt, ka prasītā īpašība izpildās tikai 48. zīm. redzamajam 10-mino.



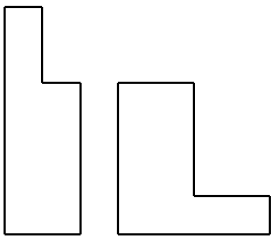
48. zīm.

Bez te parādītā salikuma eksistē vēl 7 citi: lielāko figūru var salikt 3 veidos, ja neizmanto pentamino X, U, F, P, un 4 veidos, ja neizmanto X, U, V, un P.

2.23. Viegli ievērot, ka šis n-stūris nevar būt ne 4-stūris, ne 5-stūris. Tātad n≥6. No 49. zīm. redzams, ka te vajadzīgais 6-stūris tiešām eksistē.



49. zīm.

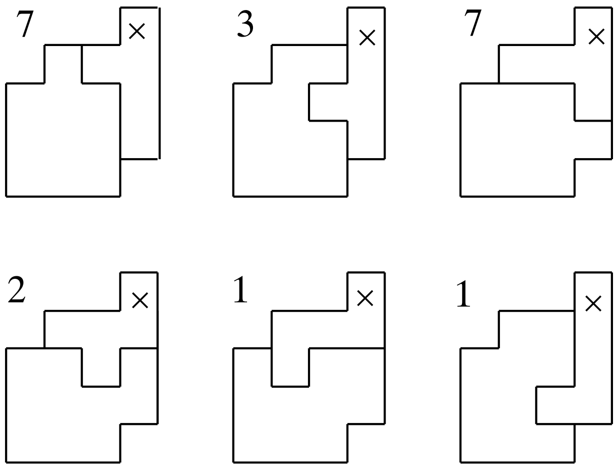


50. zīm.

Tāpat kā iepriekšējā uzdevumā eksistē vēl 7 citi salikumi: lielāko 6-stūri var salikt 7 veidos, ja neizmanto L, N, V un Z.

2.24. Viens no atrisinājumiem ir parādīts 49. zīmējumā. Pārliecinieties, ka der arī 42. zīmējumā redzamais 6-stūris! Elementāri pārbaudīt, ka uzdevuma noteikumiem neatbilst 50. zīm. parādītie it kā "perspektīvie" seštūri.

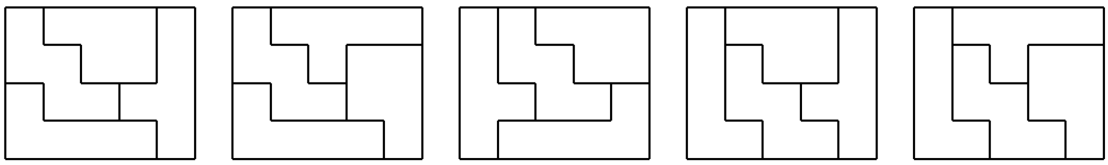
2.25. Zīmējumā parādīta figūra. kuru var salikt no pentamino 21 veidā. Virs figūras uzrakstītais skaitlis norāda, cik p-salikumu var iegūt, ja iezīmētā figūras rūtiņa ir noklāta ar norādīto pentamino.



51. zīm.

Šķiet, ka te skaitlis 21 vairs nav pārspējams.

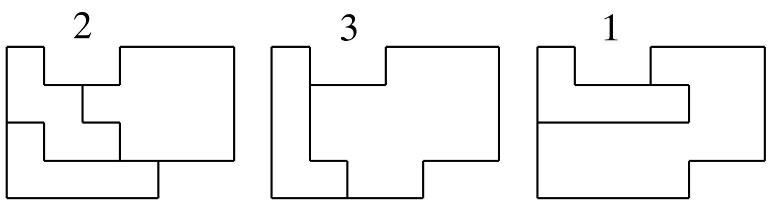
2.26. Sk. 52. zīmējumu:



52. zīm.

Jebkuriem citiem četriem pentamino taisnstūra 4×5 salikumu skaits būs mazāks. Citiem vārdiem, šis rezultāts vairs nav uzlabojams.

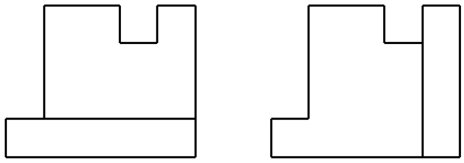
2.27. Sk. 53. zīmējumu:



53. zīm.

Paskaidrojumus sk. 2.25. uzd. atbildē.

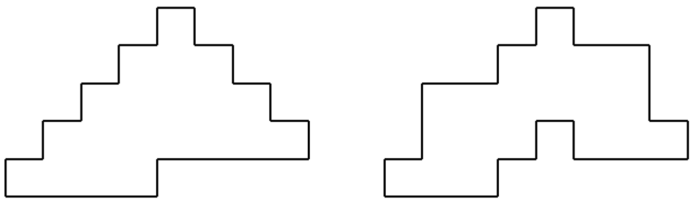
2.28. Izmanto pentamino I, L, P un W. Norādītajā figūrā, sk. 54. zīm., pentamino I pieļaujams izvietot divos stāvokļos. Katrā no tiem p-salikumu skaits ir attiecīgi 3 un 4.



54. zīm.

2.29. Uzdevuma satādīšanā izmantota ideja: ņemt divus vienādus simetriskus vairākos veidos p-saliekamus 10-mino un no tiem kā no gataviem fragmentiem salikt *nesimetrisku* figūru. Šo ideju izdodas realizēt, t.i., iegūt 8 veidos saliekamas figūras, tikai tad, ja minēto fragmentu lomā izmanto 16. vai 21. simetrisko 10-mino, sk. 40. zīm.

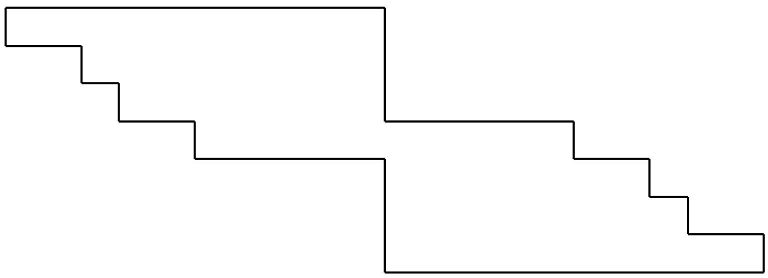
Kā uzdevuma atrisinājums der, piemēram, šādas figūras:



55. zīm.

Pirmo no tām var salikt 8 veidos no pentamino L, P, V un W, bet otro 8 veidos no N, P, T un Z.

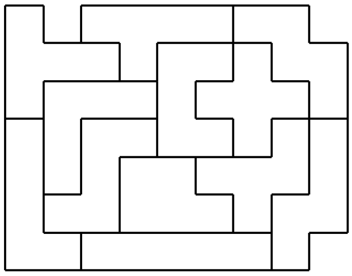
2.30. Viena no šādām figūrām parādīta 56. zīmējumā.



56. zīm.

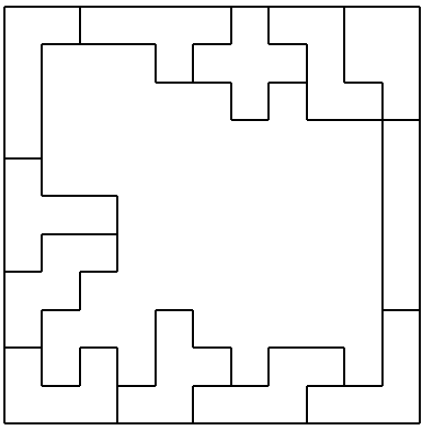
Atrodiet šīs figūras salikumu!

2.31. Sk. 57. zīmējumu.



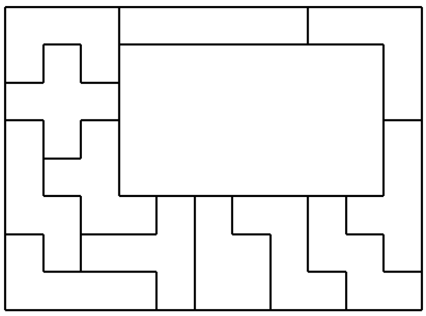
57. zīm.

2.33. Ir iespējams norobežot kastīti 11×11, sk. 58. zīm., ar laukumu 121. Viegli pierādīt, ka šis rezultāts vairs nav pārspējams.



58. zīm.

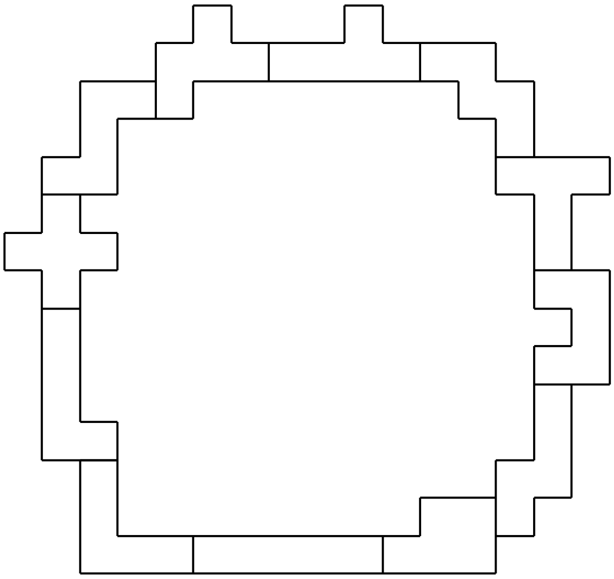
2.34. Mazdēls var nopelnīt kastīti ar laukumu 88, sk. 59. zīm.



59. zīm.

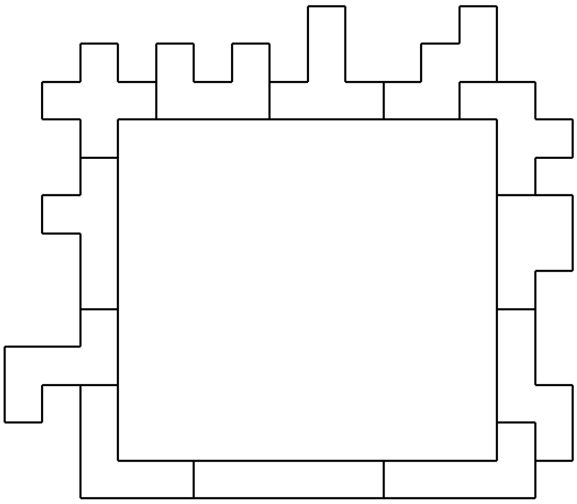
2.35. Var noklāt, piemēram, taisnstūra 11×13 malas. Šim nolūkam 58. zīm. pietiek izdarīt šādas izmaiņas: pentamino (Z,P,I,V) kā veselu fragmentu pabīdīt divas vienības pa labi. Tad vēl nenoklātos taisnstūra 11×13 malu nogriežņus noklāt ar pentamino X, F un N, attiecīgi tos pārvietojot.

2.36. 60. zīmējumā parādīts 60-mino ar 128 vienības lielu caurumu. Acīmredzams, ka no šī 60-mino var iegūt citu 60-mino ar 127 vienības lielu caurumu.



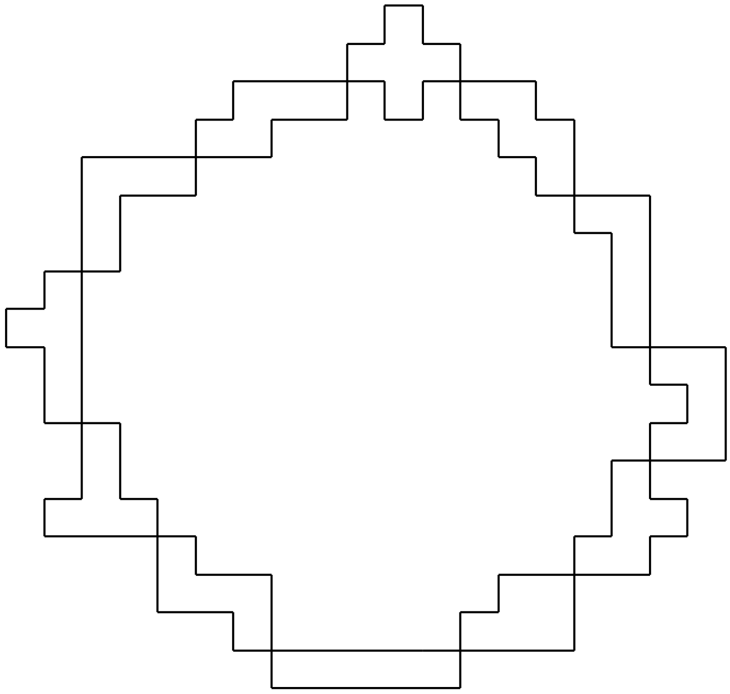
60. zīm.

2.37. Sk. 61. zīm. Patstāvīgi pierādiet (to var izdarīt visai vienkārši), ka taisnstūra laukums nevar būt lielāks.



61. zīm.

2.38. 62. zīm. parādīts 221-mino, kura visas robežrūtiņas ir noklātas ar pentamino. No 221-mino elementāri var iegt 220-mino.

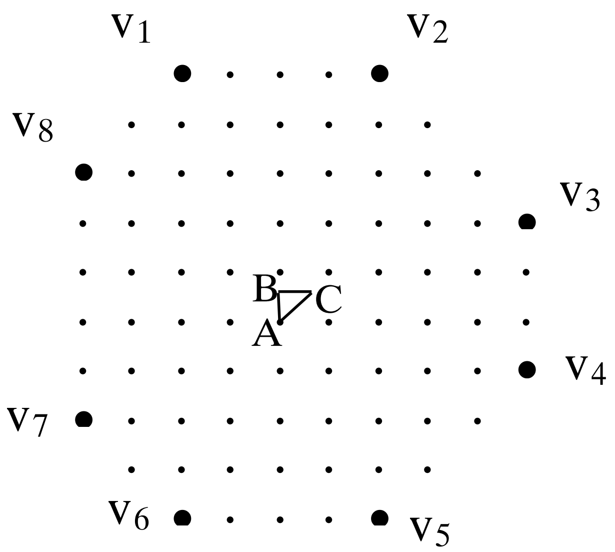


62. zīm.

2.39. Ar 12 pentamino un vienu monomino noklāsim figūru, kuru var iegūt no kvadrāta 9×9, ja tam no katra "stūra izņem" pentamino V, sk. 64. zīm. Ap šo figūru apvilktā riņķa diametrs ir $\sqrt{98} < 10$.

2.40. Uz grāmatas vāka (titullapas) ir parādīts, kā 12 pentamino var izvietot riņķī ar diametru $d_o = \sqrt{97}$. Tur redzamo 60-mino apzīmēsim ar θ. Pierādīsim, ka d_o nav samazināms, t.i., ka nevienā riņķī ar diametru $d<d_0$ nav iespējams izvietot no 12 pentamino sastāvošu 60-mino. Pierādīsim vēl vairāk, proti, ka θ ir vienīgais 60-mino, kuru var saturēt riņķis ar diametru $d \le d_o$.

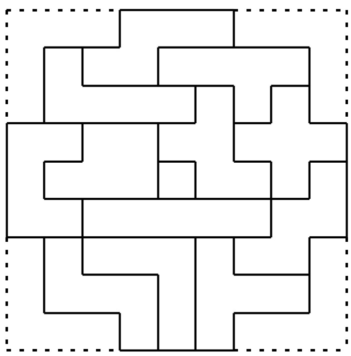
Vispirms ievērosim, ka pietiek aplūkot tikai tādus riņķus ar $d \le d_o$, kuru centrs atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūrī ABC, sk. 63. zīm., kur $AB = \frac{1}{2}$. Turpmāk šādus riņķus sauksim par pieļaujamiem. 63. zīm. ir parādītas visas tās vienības kvadrātu (rūtiņu) virsotnes, kuras var noklāt ar pieļaujamiem riņķiem.



63. zīm.

No 63. zīm. redzams, ka ar pieļaujamiem riņķiem var noklāt 63 rūtiņas. Taču mums jānoklāj vismaz 60 rūtiņas ar vienu un to pašu peļaujamo riņķi. Gandrīz acīmredzams, ka 60 rūtiņas no šīm 63 nevarēs noklāt ar tādu riņķi, ja $d<d_o$. Tiešām, nogriežņu V_1V_5, V_2V_6, V_3V_7, V_4V_8 garumi ir d_o. Tas nozīmē, ka pieļaujamais riņķis ar $d<d_o$ katram no šiem 4 nogriežņiem nenoklās vismaz vienu galapunktu. Līdz ar to vismaz 4 virsotnes un tātad vismaz 4 rūtiņas netiks noklātas, ja $d<d_o$. Bet tad tiks noklātas ne vairāk kā 63-4=59 rūtiņas. Tātad $d \geq d_o$ un $d_{min}=d_o$.

Vēl, ievērojot solīto, papildus pierādīsim, ka θ ir vienīgais 60-mino, ko var saturēt riņķis ar $d=d_o$. Tā kā nogriežņu V_3V_7 un V_4V_8 viduspunkti atrodas ārpus trijstūra ABC, tad vismaz viens katra šī nogriežņa galapunkts nav noklājams ar pieļaujamo riņķi. Vēl vismaz divas nenoklājamas virsotnes iegūtu gadījumā, ja pieļaujamā riņķa centrs neatrastos punktā B (nogriežņu V_1V_5 un V_2V_6 garumi ir d_o un to viduspunkti sakrīt ar punktu B). Tas nozīmē, ka šādā gadījumā nevarētu noklāt 60 rūtiņas. Savukārt gadījumā, kad pieļaujamā riņķa centrs atrodas punktā B, netiek noklātas tās rūtiņas, kuru malas atrodas uz nogriežņa V_3V_4. Atliek tieši 60 rūtiņas, kuras var noklāt ar pieļaujamo riņķi un kuras kopā veido jau minēto 60-mino θ.



64. zīm.

Jāatzīmē, ka, atšķirībā no 64. zīm. dotās figūras, līdz šim nav gadījies redzēt, ka tik ievērojama figūra kā θ tiktu piedāvāta kā uzdevums par salikšanu no pentamino. Tiesa, atrast kaut kādu vienu figūras θ salikumu izdodas visai ātri. Ar datora palīdzību ir noskaidrots, ka šai figūrai eksistē 1577 salikumi.

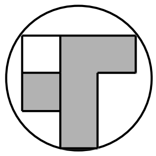
Tagad par minētajām lamatām, kādās var "iekrist" MR ražotāji. Pieņemsim, ka pēc zīmējuma uz grāmatas vāka mēs esam izgatavojuši MR un paši pārbaudījuši, ka "apaļajā" kastītē visi pentamino pieguļ cieši viens otram un ka figūra θ pieskaras riņķa līnijai. Tad šo MR dosim citiem ar lūgumu - salikt visus pentamino (bez pārklāšanās) kastītē. Ļoti iespējams, ka mēs drīz vien saņemsim atpakaļ pareizi aizpildītu kastīti, bet - mums par pārsteigumu - ne tā, kā bijām iecerējuši. Var gadīties, ka pentamino būs izvietoti tādas figūras veidā, kā tas redzams 64. zīm. (vai pat 13. zīm.).

Viegli saprast, kāpēc tā var notikt. Mēs neesam pietiekoši precīzi izgatavojuši MR. Tomēr te ar padomu - izgatavojiet precīzāk! - gandrīz nekas nebūs līdzēts. Ja ņemsim, piemēram, vienības kvadrātu 1 cm × 1 cm, tad pat vissmalkākajam meistaram neizdosie izgatavot MR tā, lai vienīgais 60-mino, kuru var izvietot izgatavotajā "apaļajā" kastītē, būtu tikai figūra θ. Aprēķini gaužām vienkārši: diametru garumi $\sqrt{97}$ cm=9,84... cm un $\sqrt{98}$ cm=9,89... tik maz atšķiras viens no otra, ka reāli izgatavotajās MR šo atšķirību risinātājs nejutīs. Otrs padoms - ņemt lielāku izmēru figūras - te arī ir maznoderīgs. Kuram gan patiks darboties ar milzīgām, teiksim, 5 m^2 lielām figūrām!

Ērtu un praktiskām vajadzībām piemērotu MR, kuras kastītē nevarēs izvietot citus 60-mino kā vienīgi θ, varēsim iegūt, ja riņķveida kastītē nostiprināsim (piemēram, ielīmēsim) atbilstoša lieluma riņķa segmentu. Var ielīmēt arī vairākus segmentus, bet tas MR padarīs vienkāršāku un mazāk interesantu. Risinātājam var piedāvāt arī tādu uzdevumu: apaļajā kastītē līdz ar 12 pentamino izvietot vēl piemērota lieluma riņķa segmentu. Pastāv arī vairākas citas iespējas, kā iegūt kvalitatīvas MR, kuras saistītas ar te aplūkoto uzdevumu.

2.42. Eksistē viens vienīgs tādu pentamino pāris, kuriem diametri sakrīt, bet ap tiem apvilkto riņķu diametri atšķiras. Šis pāris sastāv no pentamino F un T.

To, ka ap šiem pentamino apvilkto riņķu diametri $d(R_F)$ un $d(R_T)$ nesakrīt, var pierādīt, vispirms atrodot šo diametru izteiksmes un pēc tam tās salīdzinot pēc lieluma. Tas skolēniem būtu pamācošs vingrinājums par apvilktiem riņķiem. Taču eksistē pavisam īss ģeometriska rakstura risinājums, kuru var attiecināt uz senajā Grieķijā izplatīto pierādījumu veidu - SKATIES! Risinājuma būtība ir saprotama no zīmējuma. Atliek tikai ievērot, ka ap pentamino T apvilkto riņķi var pabīdīt tā, ka pentamino F atradīsies stingri šī riņķa iekšienē. Tas nozīmē, ka $d(R_F) < d(R_T)$.



65. zīm.

2.43. Desmit. Sk. arī 2.42. uzd. risinājumu.

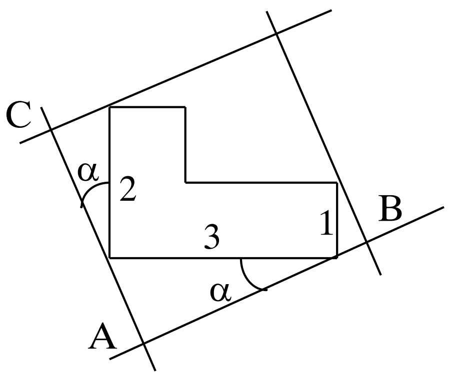
2.44. Pentamino diametri var pieņemt 6 dažādas vērtības:

$d(X) < d(F) = d(P) = d(T) = d(U) < d(Y) < d(V) = d(W) =$
$= d(Z) < d(L) = d(N) < d(I),$

bet ap pentamino apvilkto riņķu diametri - 8 dažādas vērtības:
$d(R_X) < d(R_P) = d(R_U) < d(R_F) < d(R_T) < d(R_Y) < d(R_V) = d(R_W) =$
$= d(R_Z) < d(R_L) = d(R_N) < d(R_I)$.

2.45. Pentamino X var pārklāt ar kvadrātu, kura malas garums ir $2\sqrt{2} < 3$. Var pierādīt, ka jebkura cita pentamino pārklāšanā būs vajadzīgs kvadrāts ar malas garumu ne mazāku kā 3 vienības. Apstiprinājumu šī fakta pareizībai var iegūt eksperimentā: vienīgais pentamino, kuru izdodas izvietot kvadrātā 3 × 3 tā, lai tas nepieskartos kvadrāta malām, ir X. Taču eksperiments vēl nav matemātisks pierādījums. Tā kā jebkura pentamino I, L, N, V, W, Y, Z diametrs $\geq \sqrt{18}$, bet kvadrāta ar malas garumu 3 diametrs ir tieši $\sqrt{18}$, tad skaidrs, ka nevienu no šiem pentamino nevarēs izvietot mazākā kvadrātā. Diemžēl, šis arguments nav derīgs atlikušo pentamino F, P, T un U gadījumā. Tomēr arī tagad var atrast pietiekoši īsu un pamācošu pierādījumu, kurš turklāt ir pielietojams uzreiz visiem te nosauktajiem četriem pentamino.

Pieņemsim, ka 66. zīm. parādīto tetramino var izvietot kvadrātā ar malas garumu a < 3. Tad eksistēs divas joslas, kuru platums ir mazāks nekā 3 un kuru kopējā daļa būs meklējamais kvadrāts.



66. zīm.

Citos terminos: eksistē leņķis α, $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, tāds, ka vienlaicīgi izpildīsies divas nevienādības

$$\begin{cases} 2\cos\alpha + 3\sin\alpha < 3 \\ 3\cos\alpha + \sin\alpha < 3. \end{cases}$$

Parādīsim, ka šī sistēma ir nesaderīga. No tā uzreiz izriet, ka mūsu pieņēmums "a < 3" nav bijis pareizs.

Apzīmēsim $t = \sin\alpha$. Tad no šīm nevienādībām izriet

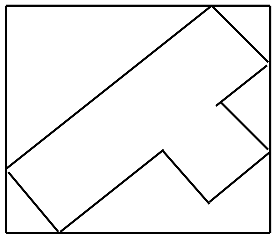
$$\begin{cases} 4(1-t^2) < 9(1-2t+t^2) \\ 9(1-t^2) < 9-6t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 13t^2 - 18t + 5 \\ 0 < 10t^2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(13t-5) > 0 \\ 2t(5t-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13t < 5 \text{ (jo } t < 1) \\ 5t > 3 \text{ (jo } t > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 65t < 25 \\ 65t > 39. \end{cases}$$

Iegūta pretruna!

Tagad atliek tikai ievērot, ka pentamino F, P, T un U satur kā fragmentu 66. zīm. redzamo tetramino.

2.47. Pentamino Y var izvietot kvadrātā ar diametru 5, sk. 67. zīm., bet pentamino L vai N izvietošanai būtu vajadzīgs lielāks kvadrāts. Var pierādīt, ka kvadrāts ar diametru 5 ir mazākais kvadrāts, kurā vēl var izvietot pentamino Y.



67. zīm.

Pierādījuma shēma:

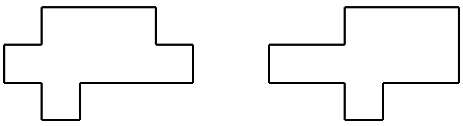
- vispirms atrod mazāko kvadrātu, kurā var izvietot taisnstūri 1×4;
- parāda, ka atrastajā kvadrātā var izvietot pentamino Y.

Lai atrastu mazākos kvadrātus, ar kuriem var pārklāt attiecīgi pentamino L vai N, var izmantot iepriekšējā uzdevuma risinājumā aprakstīto paņēmienu. Tā, piemēram, uzdevumu "atrast vismazāko kvadrātu, ar kuru var pārklāt pentamino L" var reducēt uz šādu skolas kursā netradicionālu uzdevumu.

Atrast vismazāko a (a būs meklējamā kvadrāta malas garums), kuram vēl eksistē atrisinājums α, $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, nevienādību sistēmai

$$\begin{cases} 2\cos\alpha + 4\sin\alpha \le a \\ 4\cos\alpha + \sin\alpha \le a. \end{cases}$$

2.48. Divi šādi 9-mino parādīti 68. zīmējumā.

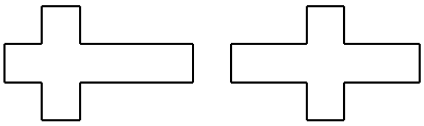


68. zīm.

Pierādiet, ka citu atšķirīgu 9-mino ar prasīto īpašību vairs nav.

2.49. Pieņemsim, ka esat pierādījuši iepriekšējā teikumā izteikto apgalvojumu. Tad atliek tikai pārliecināties, ka nevienam no 9-mino, sk. 68. zīm., nav pieļaujams izņemt nevienu no rūtiņām. To, ka ar 8-mino nevarēs pārklāt visus pentamino, var pierādīt arī savādāk un īsāk, sk. 2.50. uzdevumu.

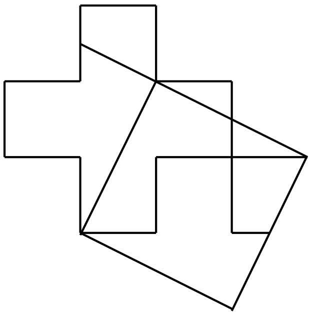
2.50. Var ņemt, piemēram, pentamino I, X un W. Ievērosim, ka pietiek aplūkot tikai tos gadījumus, kad pentamino I un X ir trīs kopējas rūtiņas, sk. 69. zīm.



69. zīm.

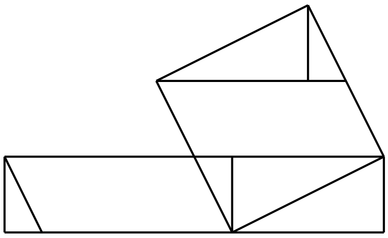
Redzams, ka nevienu no šīm figūrām nevar papildināt līdz 8-mino tā, lai ar iegūto 8-mino varētu pārklāt pentamino W.

2.51. Sk. 70. zīmējumu.



70. zīm.

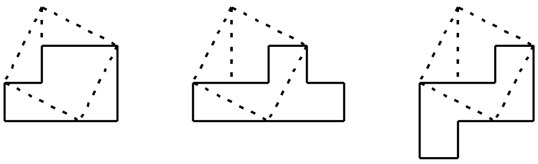
2.52. Sk. 71. zīmējumu.



71. zīm.

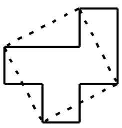
2.53. Der, piemēram, pentamino P. Sk. nākamo uzdevumu.

2.54. Atrisinājums parādīts 72. zīm.

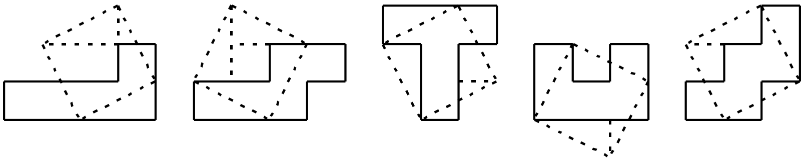


72. zīm.

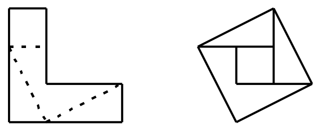
2.55. Kā sagriežami pentamino F, L, N, T, U, W un V, parādīts 73.-75. zīmējumos.



73. zīm.



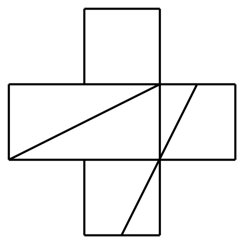
74. zīm.



75. zīm.

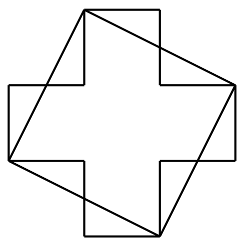
Pārējie pentamino jau aplūkoti iepriekšējos uzdevumos.

2.56. Vispirms kvadrātu sagriežam tā, kā parādīts 15. zīmējumā. Vienīgais pentamino, ko nevar salikt no šīm piecām daļām, ir pentamino X. Lai varētu salikt arī šo pentamino, divus taisnleņķa trijstūrus sadalām sīkāk: katru ar viduslīniju - divās daļās. No iegūtajiem 7 gabaliem viegli salikt pentamino X, sk. 76. zīmējumu.



76. zīm.

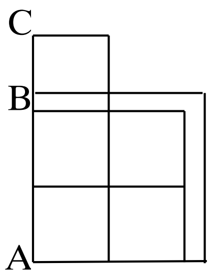
2.57. Mazdēls izvēlējās pentamino X un sagrieza to 5 gabalos. No 77. zīm. redzams, ka lielākais gabals ir tieši četras vienības liels jeb četras piektdaļas no sākotnējā pentamino X laukuma. 2.59. uzd. aplūkots jautājums, vai šo rezultātu var uzlabot.



77. zīm.

2.58. Izvēloties pentamino F un to sagriežot tā, kā parādīts 73. zīm., mazdēls var iegūt 3,5 vienības lielu laukumu.

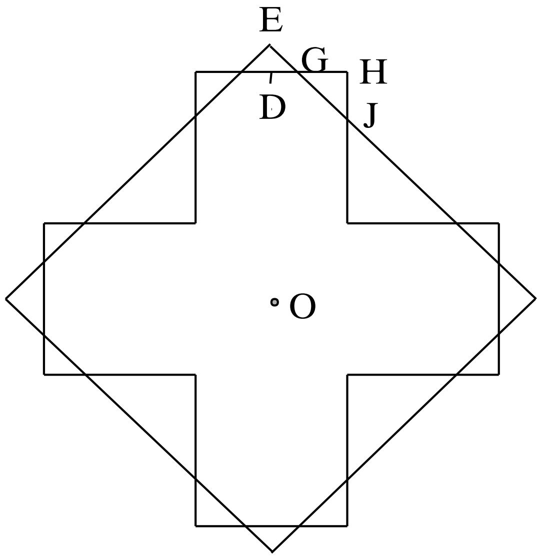
2.59. Viegli ievērot, ka pentamino P un ar to vienliela kvadrāta K šķēluma laukums $S(P \cap K)$ var pārsniegt 4, sk. 78. zīmējumu.



78. zīm.

Tā kā AC=3, AB=$\sqrt{5}$, tad BC=3-$\sqrt{5}$, un sekojoši $S(P\cap K)=5-(3-\sqrt{5})*1=2+\sqrt{5}=4,236...$
Tātad apgalvojums vismaz gadījumā a) nav pareizs.

Nedaudz sarežģītāk ir atrast pentamino X un kvadrāta K šķēluma laukumu $S(X\cap K)$, ja K virsotnes atrodas uz pentamino X simetrijas asīm, sk. 79. zīmējumu.

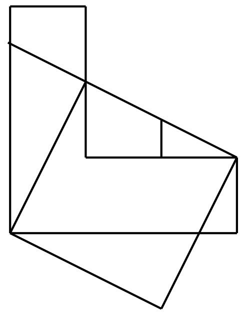


79. zīm.

$OE=\sqrt{2,5}$; $DG=ED=\sqrt{2,5}-1,5$; $2GH=1-2DG=4-\sqrt{10}$

$S(X\cap K)=5-8S_{\Delta GHJ}$ $5-(2GH)^2=8\sqrt{10}-21=4,298...$

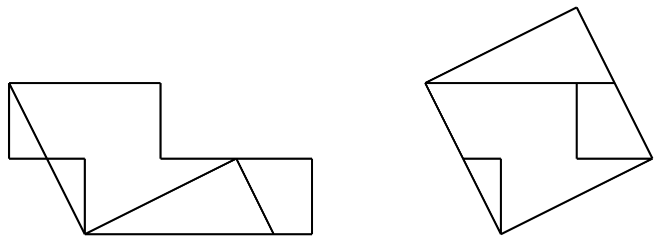
2.60. No 2.52.-2.55. uzdevumiem atbildēs dotajiem zīmējumiem redzams, ka desmit pentamino X, I, P, Y, Z, F, L, T, U un W izgatavošanai pietiek iegriezumu, kuru kopējais garums nepārsniedz 6 vienības, bet pentamino P izgatavošanai - pat par vienu vienību mazāk. Pentamino V var iegūt, ja kvadrātu sazāģē, piemēram, tā, kā parādīts 80. zīm. Atlikušais pentamino N ir vienīgais, ko no kvadrāta neprot iegūt profesors Pentamino. Viņam nepietiek 6 vienības garu iegriezumu.



80. zīm.

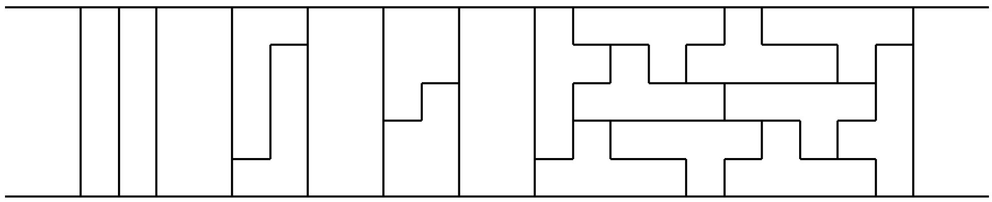
2.61. Tāpat kā iepriekšējā uzdevumā profesors nespēj tikt galā ar pentamino N.

2.62. Lūk, kā sadalāms gabalos pentamino N, sk. 81. zīmējumu. Kopējais iegriezumu garums ir tieši $2\sqrt{5}$. Savukārt, lai kvadrātu "pārvērstu" par pentamino N, pietiek izdarīt tikai 6 vienības garus (par visiem kopā) iegriezumus, kas tik ļoti bija vajadzīgs 2.50. uzdevumā.

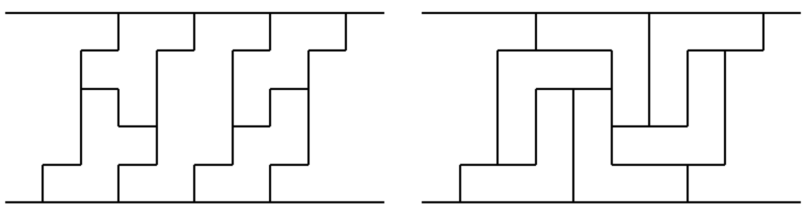


81. zīm.

2.64. Joslu ar platumu 5 var noklāt ar pentamino I, L, P, Y (82. zīm.) un F, W, V (83. zīm.), bet joslu ar platumu 2 var noklāt tikai ar pieciem pentamino I, L, N, P, Y.



82. zīm.

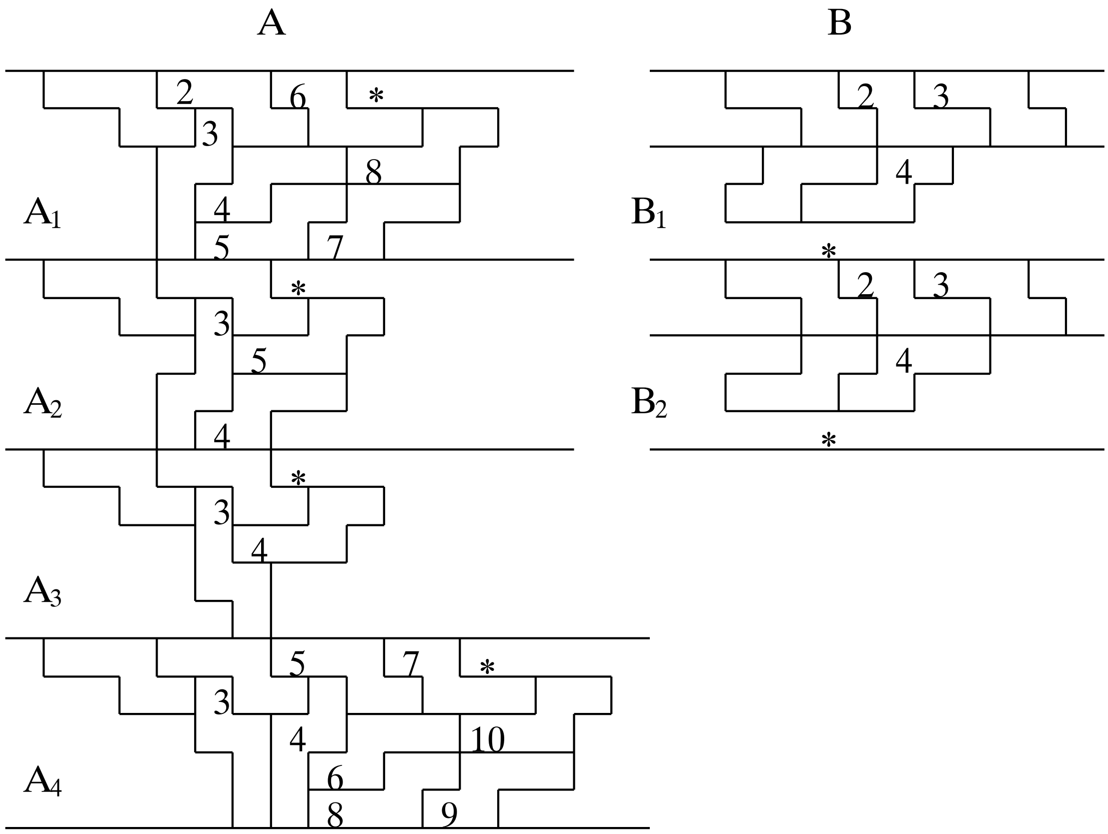


83. zīm.

2.65. Nevienu joslu nevar noklāt, piemēram, ar pentamino X. Sk. arī 2.67. uzdevuma risinājumu.

2.66. Vairāk ir to pentamino, ar kuriem var noklāt joslu. Tādu ir vismaz 7, sk. 2.64. uzd. atrisinājumu.

2.67. Ar pentamino X, U, Z, T un N nevar noklāt joslu ar platumu 5. Ar visiem pārējiem, kā jau iepriekš noskaidrots, to izdarīt var. Gluži vienkārši to var pamatot figūrām X, U, Z un T. Sarežģītāka analīze jāveic pentamino N gadījumā, kuru aplūkosim detalizētāk.

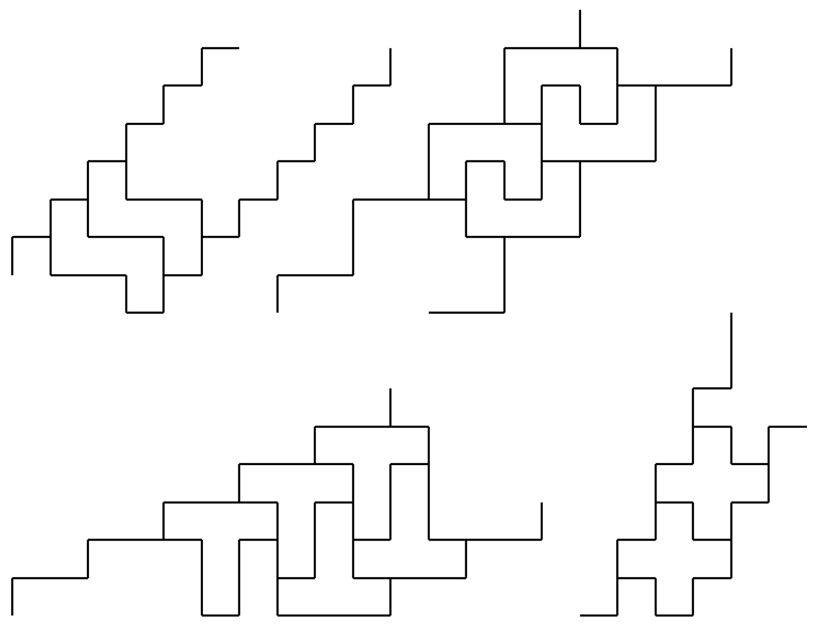


84. zīm.

Vispirms pierādīsim, ka ar N nav pieļaujams noklāt uzreiz trīs joslas robežrūtiņas. Ja ar N ir noklātas trīs robežrūtiņas, sk. 84. zīm., tad 2. rūtiņu var noklāt divos atšķirīgos veidos: A un B. Variantā A trešo rūtiņu var noklāt 4 atšķirīgos veidos. Katra apakšvarianta A_1, ..., A_4 tālākā analīze, kas maksimāli "ilgi nenoved strupceļā" pie norādīto rūtiņu 4, 5, ... secīgas noklāšanas, parādīta zīmējumā. Ar ∗ atzīmēta rūtiņa, kas vairs nav noklājama.

Varianta B analīze ir vienkārša. To var veikt dažādi. Piemēram, izmantojot jau iegūto rezultātu, ka variantā A josla nav noklājama, var ievērot, ka te pietiek aplūkot joslu ar platumu 3, par kuru skaidrs, ka tā nav noklājama ar N. Pārējie varianti, kad ar pentamino N noklāj vienlaicīgi tikai divas vai arī tikai vienu joslas robežrūtiņu, reducējas uz jau apskatītajiem variantiem.

2.68. Jau noskaidrots, ka ar astoņiem pentamino var noklāt joslu, un tātad, arī visu plakni. Protams, lai noklātu plakni, tā nebūt nav jānoklāj ar joslām. Ar pentamino T, U, X un Z to nemaz arī nevarētu izdarīt. Uzdevumos, kas saistīti ar plaknes noklāšanu, bieži vien ir lietderīgi plakni sadalīt vienādās daļās ar "kāpņveida joslām". Kāpņveida joslas, saglabā šādu svarīgu parastu joslu īpašību: tās ir iegūstamas viena no otras ar paralēlu pārnesi. Pateicoties šai īpašībai, pietiek atrast tikai vienu kāpņveida joslu un parādīt, ka to var noklāt ar dotajām figūrām, mūsu gadījumā attiecīgi ar pentamino T, U, X un Z.



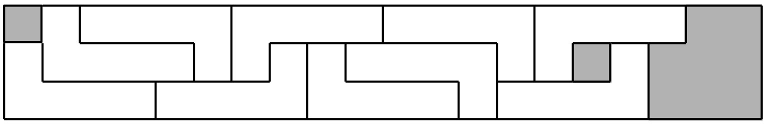
85. zīm.

Ievērosim, ka 85. zīm. parādīto pirmo kāpņveida joslu var noklāt ne tikai ar Z, bet vēl ar astoņiem (!) pentamino: I, L, N, P, Y, V, F un W. Tādējādi ar 85. zīm. pietiek, lai pamatotu, ka jebkurš pentamino ir derīgs plaknes noklāšanai.

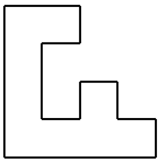
2.70. Der, piemēram, 87. zīm. redzamais 9-mino. Var pierādīt, ka nedrīkst atmest nevienu no šī 9-mino rūtiņām. Citiem vārdiem, tā iegūtie 8-mino būtu derīgi plaknes parketam.

2.71. Eksistē tikai četri pentamino: I, L, P un Y, kas derīgi taisnstūru noklāšanā, sk. 82. zīm., tātad profesoram Pentamino varētu būt ne vairāk kā 4 istabas.

2.72. Jāizvēlas kārbiņa ar pentamino L. Ar tiem var noklāt taisnstūri 3×14, kas atbilst 42 šokolādes kvadrātiņiem, sk. 86. zīmējumu.



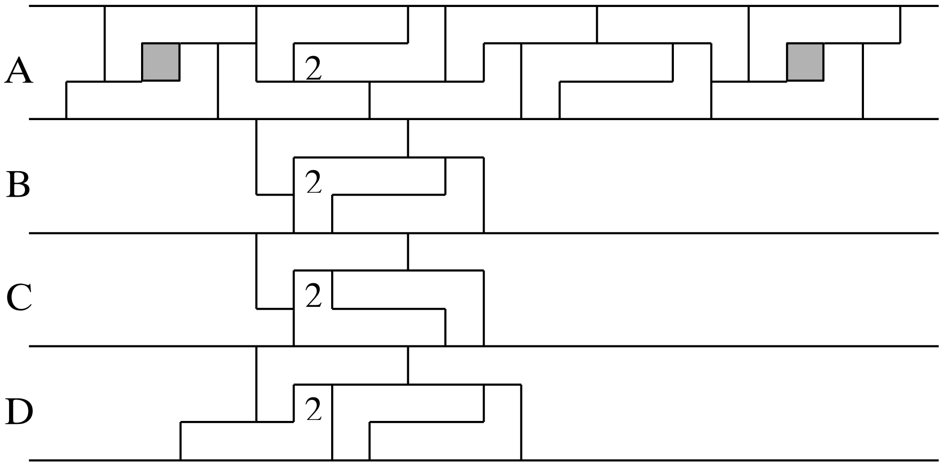
86. zīm.



87. zīm.

Vai nevar noklāt vēl lielāku taisnstūri? Pavisam vienkārši var pierādīt, ka to nevar izdarīt ne ar vienu no pentamino F, N, P, T, U, V, W, X, Y un Z. Vēl vairāk, ne ar vienu no šiem pentamino nevar noklāt pat taisnstūri 3×5, protams, neizejot ārpus joslas ar platumu 3 (sk. nākamo uzdevumu). Izvērstāk aplūkosim sarežģītāko gadījumu, kad tiek izmantots pentamino L.

Pieņemsim, ka joslā ar platumu 3 var noklāt taisnstūri 3×15. Tad vismaz vienam pentamino L jānoklāj 4 joslas robežrūtiņas. Tagad 2. rūtiņu, sk. 88. zīm., pieļaujams noklāt vienā no četriem variantiem A, B, C, D.



88. zīm.

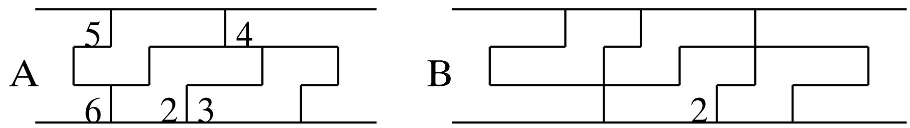
Variantus B, C, D atsevišķi var neizskatīt, jo tie reducējas uz variantu A: katrā no tiem izveidojas taisnstūris 2×5, kurš atbilst tieši pirmajam (A) variantam. Tā analīze (ar precizitāti līdz dažām nebūtiskām izmaiņām) atspoguļota zīmējumā. Ja nebūtu ierobežojumu uz taisnstūra garumu, tad, kā redzams, varētu noklāt taisnstūri 3×16.

2.73. Pierādīsim, ka (neatkarīgi no tā, kuru no 10 kārbiņām izvēlas) lielākais taisnstūris, ko izdosies noklāt, ir 3×4. Pieņemsim, ka var noklāt taisnstūri 3×5.

Vispirms analizēsim gadījumu, kad izvēlēta kārbiņa ar figūrām N. Jāaplūko divas iespējas.

N1) Eksistē pentamino N, kurš noklāj taisnstūra 3×5 trīs robežrūtiņas.

Tad šī taisnstūra 2. rūtiņu, sk. 89. zīmējumu, pieļaujams noklāt kādā no diviem variantiem A, B.

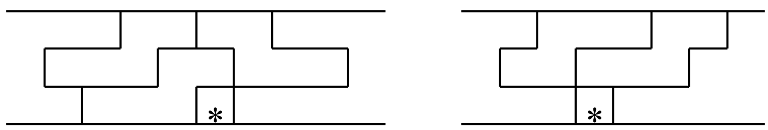


89. zīm.

Variantā A vairs nav noklājama 4. rūtiņa, tāpat nav noklājama vienlaicīgi 5. un 6. rūtiņa. Tas nozīmē, ka variantā A lielākais taisnstūris, ko var noklāt, ir 3×3. Taču variantā B lielākais taisnstūris, ko varēs noklāt, ir 3×4.

N2) Neviena no figūrām N nenoklāj vairāk kā divas taisnstūra 3×5 robežrūtiņas.

Tad eksistē divas figūras N, katra no kurām noklāj pa divām taisnstūra 3×5 robežrūtiņām, turklāt tā, kā parādīts 90. zīmējumā.



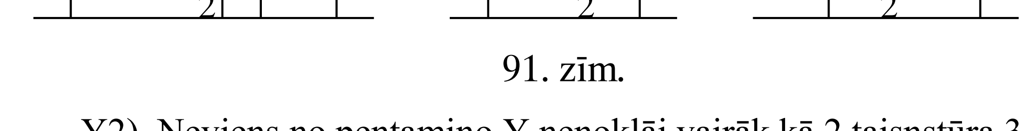
90. zīm.

Ar * atzīmētās rūtiņas vairs nav noklājamas. Redzams, ka, izvēloties iespēju N2, nevarētu noklāt pat taisnstūri 3×4.

Tagad aplūkosim gadījumu, kad izvēlēta kārbiņa ar figūrām Y. Jāanalizē divas iespējas.

Y1) Eksistē pentamino Y, kurš noklāj trīs taisnstūra 3×5 robežrūtiņas.

Tad šī taisnstūra 2. rūtiņu pieļaujams noklāt kādā no 91. zīm. parādītajiem trīs variantiem A, B, C. Viegli redzēt, ka katrā no šiem variantiem var noklāt taisnstūri 3×4, bet ne 3×5.



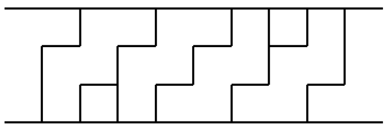
91. zīm.

Y2) Neviens no pentamino Y nenoklāj vairāk kā 2 taisnstūra 3×5 rūtiņas.

Tad eksistē pentamino Y, kurš noklāj tikai vienu taisnstūra 3×5 pirmās rindiņas rūtiņu, bez tam tai jābūt tieši vidējai rūtiņai.

Gluži tāpat iegūstam, ka eksistē pentamino Y, kurš noklāj tikai vienu - vidējo - taisnstūra 3×5 trešās rindiņas rūtiņu. Iegūta pretruna, jo neviens pentamino nedrīkst iziet ārpus joslas ar platumu 3.

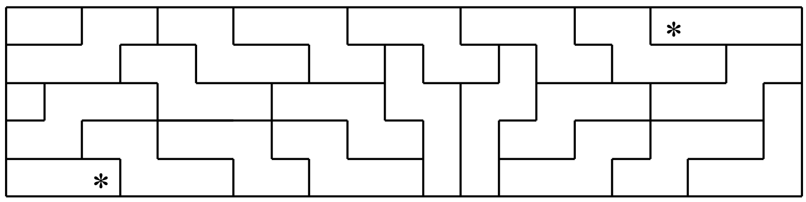
Pārējo astoņu pentamino gadījumā vēl vienkāršak pierādīt, ka nevarēs noklāt taisnstūri 3×5. Labāko rezultātu - taisnstūri 3×4 - te varēs iegūt tikai ar pentamino W, sk. 92. zīm.



92. zīm.

Ievērosim, ka šokolādes izmēri 3×15 nepieļauj vienlaicīgi izveidot divus taisnstūrus 3×4, ja izmanto N un Y vai N un W. Tātad atliek ņemt Y un W, kas ir vienīgā pareizā izvēle. Ar šiem pentamino mazdēls var noklāt divus taisnstūrus 3×4 un saskaņā ar uzdevuma noteikumiem nopelnīt 24 šokolādes kvadrātiņus.

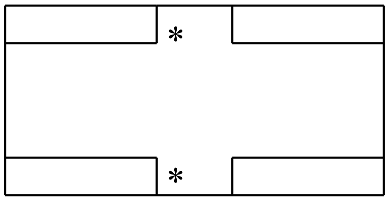
2.74. Mazdēls var nopelnīt 70 šokolādes kvadrātiņus. Šokolādes garums bija 21. Pentamino N izvietojums (sk. 93. zīm.) iegūts no 2.67. uzdevuma risinājuma, sk. apakšvariantu A_4 (84. zīm.).



93. zīm.

2.75. Ievērosim, ka pietiek aplūkot tikai tādus taisnstūrus, kuru laukumi dalās ar 5 un kuru īsākās malas garums nepārsniedz 6.

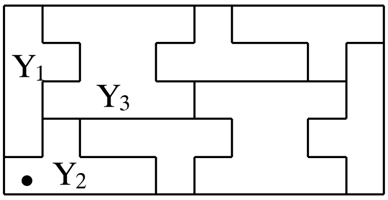
Gadījumos, kad taisnstūra īsākās malas garums nepārsniedz 4, ļoti vienkārši var pierādīt, ka ar figūrām Y nevarēs noklāt nevienu taisnstūri. Pierādiet to! Tāpat vienkārši pierādīt, ka ar figūrām Y nav noklājams taisnstūris 6×10. Te pierādījums balstās uz šādu gandrīz acīmredzamu īpašību: jebkuru stūra rūtiņu pieļaujams noklāt tikai ar horizontāli izvietotu pentamino Y (taisnstūrim 1×4, ko satur pentamino Y, jābūt izvietotam horizontāli). Tagad atliek tikai ievērot, ka abas iezīmētās rūtiņas, sk. 94. zīm., būtu jānoklāj ar vertikāli izvietotiem Y, ko nepieļauj taisnstūra izmēri.



94. zīm.

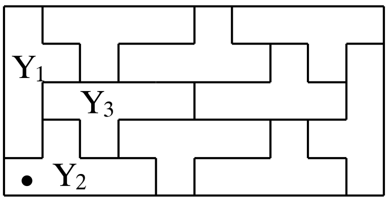
Ar šādiem spriedumiem gadījumā, ja taisnstūra īsākās malas garums ir 5, izlīdzēties neizdosies. Kāpēc? Kā jau parādīts 2.64. uzdevuma risinājumā (sk. 82. zīm.) ar figūrām Y var noklāt taisnstūri 5×10. Pierādīsim, ka taisnstūris 5×10 ir vienīgais, kura laukums ≤ 60 un kuru var noklāt ar Y. Aplūkosim taisnstūri, kurš sastāv no piecām rūtiņu rindiņām un n (n≤12) rūtiņu kolonnām. Pirmās kolonnas rūtiņas pieļaujams noklāt tikai ar vienu horizontāli un vienu vertikāli izvietotu pentamino Y. Neierobežojot vispārīgumu, uzskatīsim, ka "vertikālais" Y noklāj 1. rūtiņu, turklāt tā, kā parādīts 95. zīm. (ja šis pentamino noklātu nevis otro, bet trešo 2. kolonnas rūtiņu, tad vairs nevarētu ar Y noklāt pārējās 2. kolonnas rūtiņas).

A



95. zīm.

B



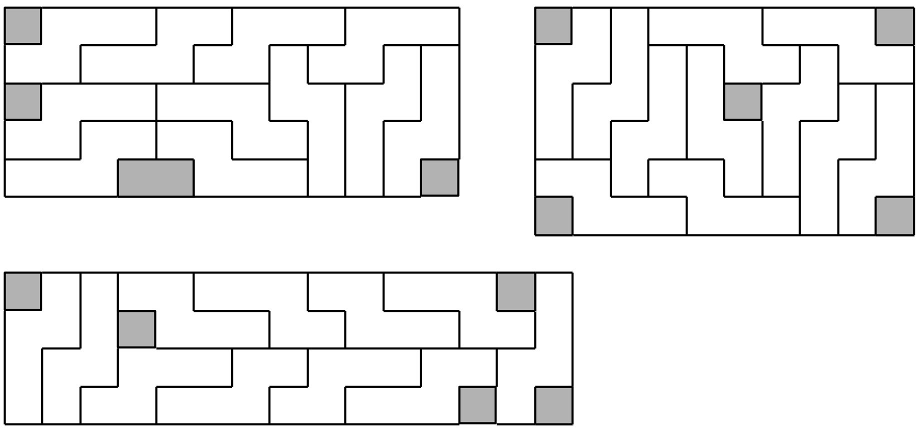
96. zīm.

Pēc tam, kad ir novietots pirmais pentamino Y_1, otrā pentamino Y_2 "stāvoklis" nosakāms viennozīmīgi, sk. 95. zīm., citiem vārdiem, ja ar Y_2 noklātu iezīmēto rūtiņu savādāk, tad vairs nevarētu noklāt pārējās 2. kolonnas rūtiņas. Talāk, atkarībā no tā, vai trešā figūra Y_3 noklāj vai nenoklāj kādu ceturtās rindiņas rūtiņu, iespējami divi varianti A, B. Tajos abos var noklāt taisnstūri 5×10, bet ne mazāku. Tāpat nevienā no šiem variantiem, kā viegli saprotams no zīmējumiem, nevar noklāt taisnstūrus 5×11 vai 5×12.

Atbilde uz uzdevuma pēdējo jautājumu. Mazdēls iegāja "atpūsties" tajā profesora Pentamino istabā, kuras grīda bija noklāta ar Y-parketu, sk. 2.71. uzd., un noskatījās, kā var noklāt taisnstūri 5×10.

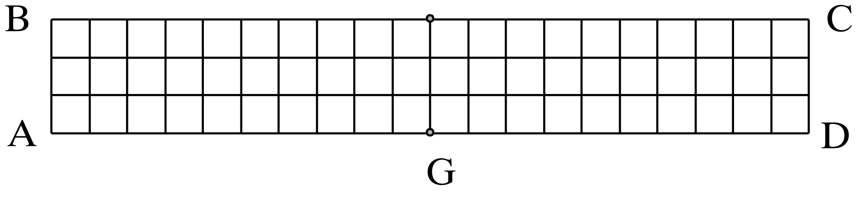
2.76. Kastītē 3×20 var izvietot lielākais 10, bet pārējās kastītēs - 11 pentamino Y. Tas, ka šajās kastītēs nav iespējams izvietot 12 pentamino Y, jau pierādīts 2.75. uzdevuma risinājumā, bet fakts, ka kastītē 3×20 nevar izvietot 11 pentamino Y, jāpārbauda atsevišķi. Izdariet šo vienkāršo parbaudi patstāvīgi vai arī, ja tas jums tomēr neizdodas, iepazīstieties ar nākamajā uzdevumā izmantotajiem spriedumiem līdzīgā situācijā ar pentamino N.

2.77. Ar figūrām N nevar noklāt nevienu taisnstūri (neizejot ārpus noklājamā taisnstūra). Vēl vairāk, nevar noklāt pat vienu taisnstūra robežrūtiņu rindiņu (vai kolonnu), kas ir gandrīz vai acīmredzams fakts. No šejienes uzreiz izriet, ka taisnstūrī ar laukumu 60 nevarēs izvietot vairāk kā 11 pentamino N. Trijos taisnstūros šo rezultātu var sasniegt, sk. 97. zīm., bet ceturtajā - 3×20 - var izvietot ne vairāk kā 10 pentamino N. Taču te atrast izvietojumu ar maksimālo pentamino skaitu - 10 atšķirībā no 97. zīm. redzamajiem taisnstūriem izdodas ļoti ātri.



97. zīm.

Pieņemsim, ka taisnstūrī ABEG, sk. 98. zīm., kur BE=10, paliks nenoklātas ne vairāk kā divas rūtiņas.



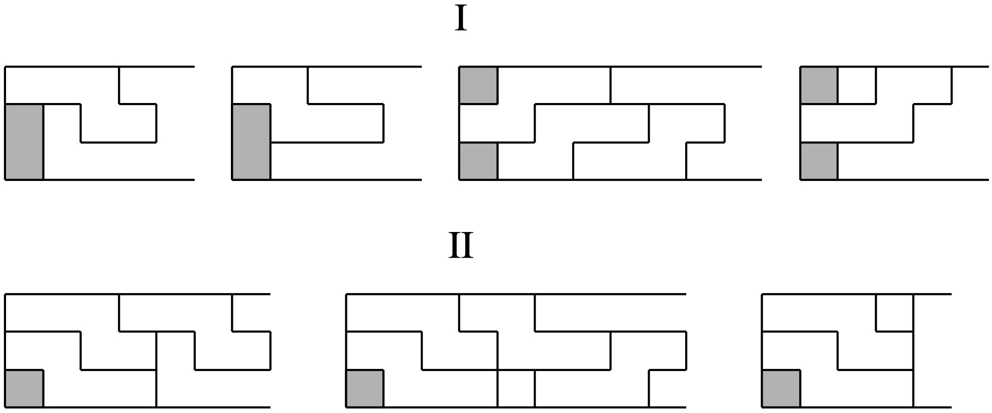
98. zīm.

Tad iespējami tikai divi pirmās kolonnas rūtiņu noklāšanas varianti:

I. Tiek noklāta tikai viena šīs kolonnas rūtiņa.

II. Tiek noklātas divas šīs kolonnas rūtiņas.

Abu šo variantu analīze atspoguļota 99. zīmējumā:

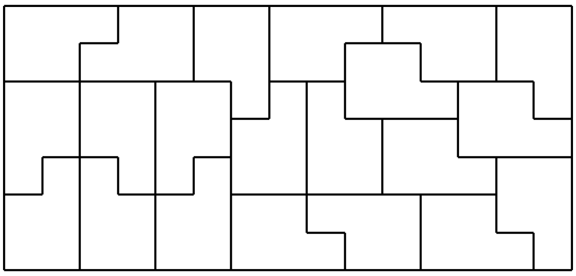


99. zīm.

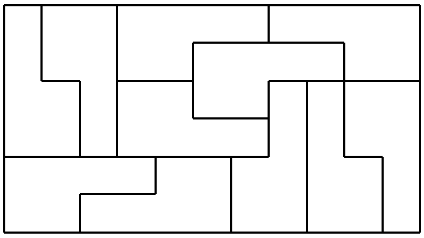
Redzams, ka meklētais figūru izvietojums nemaz neeksistē. Tas nozīmē, ka katrā no taisnstūriem ABEG un ECDG (abi taisnstūri ir līdzvērtīgi noklāšanas iespēju ziņā) paliks nenoklātas vismaz 3 rūtiņas un kopā pa abiem taisnstūriem - vismaz 6 rūtiņas. Tātad 11 figūras nebūs izvietojamas, jo 11 figūras noklātu 55 rūtiņas.

Atbilde. Mazdēls var uzvarēt, ja kastīti 3×20 atstāj profesoram Pentamino un ja izvēlētajās kastītēs izvieto katrā pa 11 pentamino N.

2.78. Divi pretpiemēri - viens ar pentamino, otrs ar heksamino ir parādīti 100.-101. zīmējumā. Uzrādiet vēl vienkāršāku pretpiemēru ar trimino. 101. zīmējumā dots taisnstūra sadalījums 11 vienādos polimino. Nav zināms, vai šo rezultātu var uzlabot, uzrādot taisnstūri un to sadalot vēl mazākā skaitā vienādos polimino, kuri nav taisnstūri.

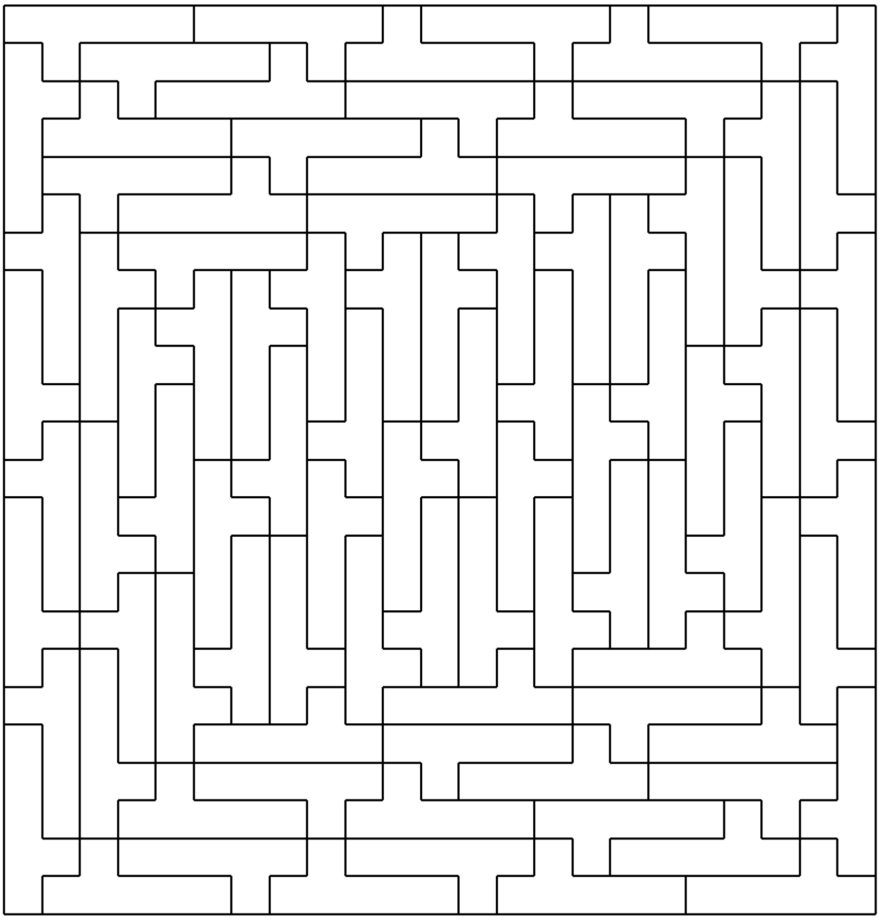


100. zīm.



101. zīm.

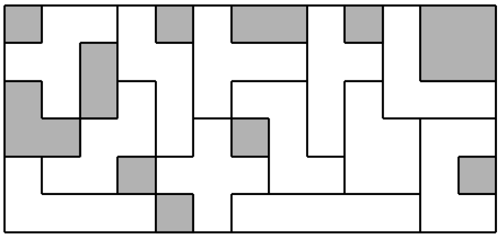
2.79. Pirmajā gadījumā pietiek ievērot, ka ar dotajiem heksamino nevar aizpildīt pat kvadrātu 2×2, kura virsotne sakrīt ar taisnstūra virsotni. Daudz sarežģītāks ir otrs gadījums. Jautājumu, vai ar "Y-heksamino" var aizpildīt taisnstūri, 1966.g. izvirzīja S. Golombs [8]. Šī problēma joprojām kā neatrisināta tiek piedāvāta 1987.g. publicēšanai iesniegtajā rakstā [9]. Interesanti, ka tajā pašā 1987.g. tā paša žurnāla, sk. [9], redakcijai tiek iesniegts atrisinājums [10]. Kā atzīmē pats autors - K. Dalke - 102. zīm. parādītais atrisinājums tika atrasts ar mikrokompjūteru pēc trīs dienu ilgas skaitļošanas, bez tam taisnstūris 23×24 ir vismazākais, kuru tā var aizpildīt. Ne mazāk interesanti, ka šo pašu atrisinājumu, turklāt neizmantojot datoru, ir atradis A. Andžāns [11, 54.lpp.]. Žurnālā The Mathematical Intelligencer,1996.v.18 minēts (sk 41.lpp.), ka šo salikumu vēl agrāk -1985 gadā- atradis T. Marlovs.



102. zīm.

2.80. Skaitļi norāda, cik vienības garus iegriezumus attiecīgi pa horizontālām un vertikālām līnijām pietiek izdarīt, lai varētu no dotā taisnstūra izzāģēt visus pentamino. Kopējais iegriezumu garums, kas atrodams kā šo skaitļu summa, būs atbilstoši 86 un 85. Lai novērstu domstarpības, jāatzīmē, ka te (un turpmāk) ieskaitīts arī vienu vienību garš iegriezums, kurš vajadzīgs, lai no taisnstūra 2×3 izgatavotu pentamino U, bet kuru saskaņā ar pieņēmumu nevar izdarīt ar parastu zāģi. Kopējo iegriezumu garumu var atrast arī ar citiem, ne tik ērtiem paņēmieniem.

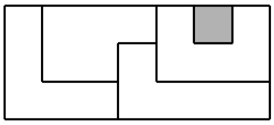
2.81. Profesors Pentamino piedāvāja 103. zīm. redzamo shēmu. Operāciju skaits, kas vajadzīgs, lai "izlauztu" pentamino, ir: F-4, (W, L)-4, N-2, U-2, V-2, I-1, P-1, Y-2, X-3, Z-1, T-1. Tātad kopā 23 operācijas.



103. zīm.

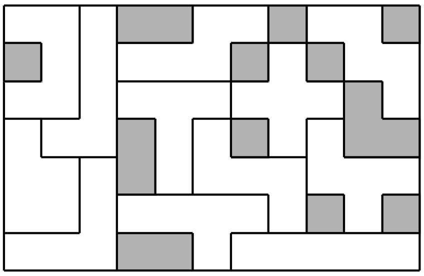
2.82. U, V un L vai P, V un L.

2.83. No dotās sagataves var izlauzt pentamino U, L, P un V, sk. 104. zīm.



104. zīm.

2.84. Viena no iespējām parādīta 105. zimējumā.



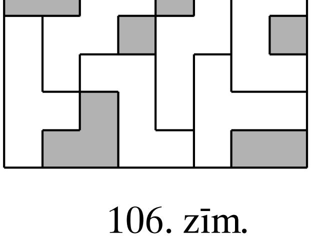
105. zīm.

2.85. Saskaitīsim, cik operāciju vajadzīgs, lai iegūtu visus pentamino pēc 105. zīm. dotās shēmas: U-2, L-2, (P, V)-1, N-3, I-1, Y-2, F-4, W-4, X-3, Z-1, T-1, kas kopā dod 24 operācijas.

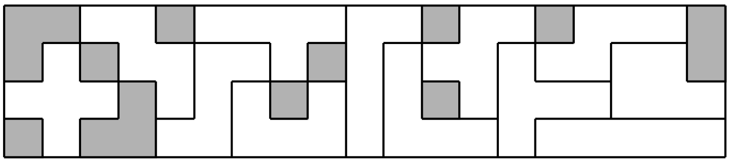
Turpretī no lielāka taisnstūra 6×13 pēc 103. zīm. dotās shēmas visi pentamino iegūstami ar 23 operācijām. Tātad mazākam taisnstūrim ne vienmēr atbilst arī mazāks "izlaušanas" operāciju skaits.

2.86. Viena no iespējamām "izlaušanas" shēmām parādīta 107. zīmējumā. Kopējais "izlaušanas" operāciju skaits ir 24: X-5, W-4, I-1, P-2, N-2, T-1, F-3, V-1, L-1, U-2, Z-1, Y-1.

2.87. To var izdarīt, piemēram, pēc 106. zīm. redzamās shēmas.

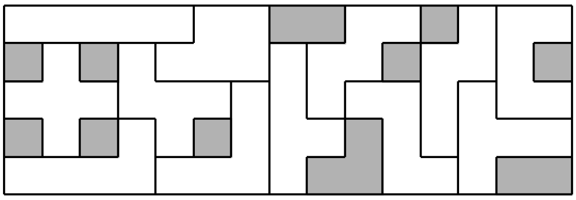


106. zīm.

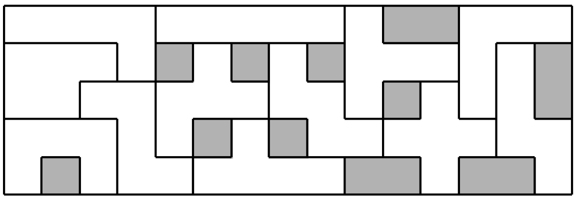


107. zīm.

2.88. No sagataves 5×15, sk. 108. zīm. , visus pentamino var "izlauzt" ar 23 operācijām: I-1, X-5, L-1, P-2, V-1, F-1, U-2, T-2, N-2, Z-2, W-3, Y-1, bet, lai izzāģētu visus pentamino, pietiek ar 79 vienības gariem iegriezumiem.



108. zīm.

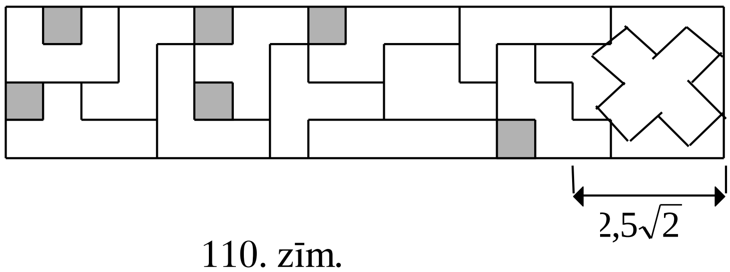


109. zīm.

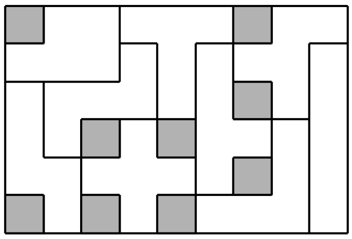
Tikpat gari iegriezumi, bet vairāk operāciju - 24 atbilst 109. zīm. parādītajai shēmai, kura ņemta no grāmatas [5, 42.lpp.]. Atzīmēsim, ka šī ir vienīgā pentamino izlaušanas (vai izzāģēšanas) shēma, kura atrodama šajā grāmatā, turklāt tā ar precizitāti līdz pagriešanai par 180° sakrīt ar 1968.g. publicēto shēmu, sk. [15, 85.-86.lpp.].

2.89. Izmantojot 107. zīm. doto shēmu, ļoti vienkārši var iegūt "īsāku" taisnstūri. Pietiek izmainīt tikai pentamino X stāvokli, un mēs dabūsim taisnstūri ar laukumu $4(16+2\sqrt{2})<76$, jo pentamino X var izzāģēt no kvadrāta ar malas garumu $2\sqrt{2}$.

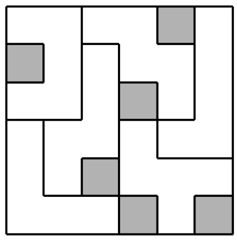
2.90. 110. zīmējumā parādīta shēma, kā no taisnstūra ar izmēriem $4\times(15+2{,}5\sqrt{2})$ var izzāģēt visus pentamino. Šī taisnstūra laukums ir $60+10\sqrt{2}=74{,}14...$.



110. zīm.



111. zīm.

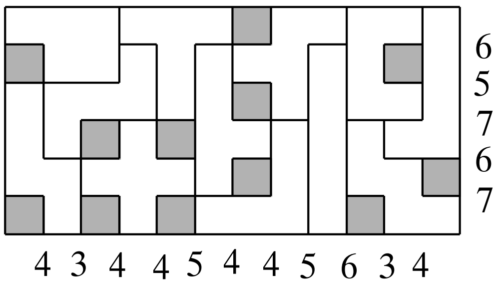


112. zīm.

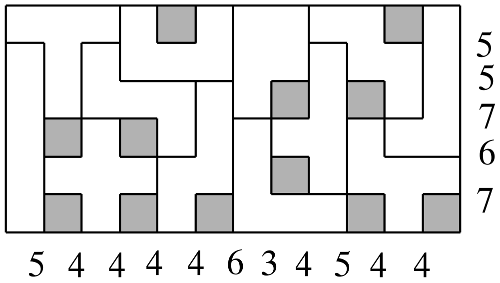
2.91. To var izdarīt, piemēram, tā kā parādīts 112. zīmējumā.

2.92. Sk. 111. zīmējumu.

2.93. Pēc 113. zīm. dotās shēmas visus pentamino var "izlauzt" ar 23 operācijām: U-3, L-1, W-2, I-1, F-3, (V, Y)-3, X-5, P-2, T-1, Z-1, N-1.



113. zīm.

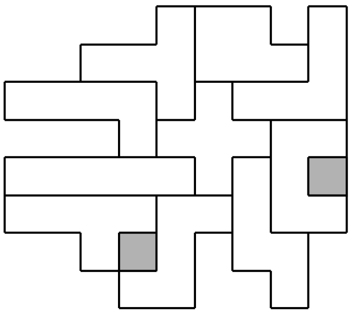


114. zīm.

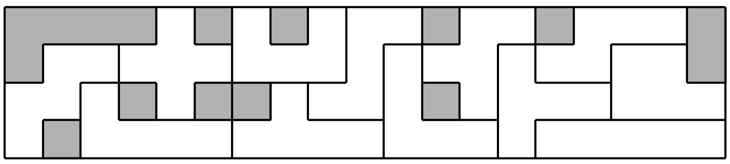
2.94. Visus pentamino var izlauzt, sk. 114. zīm., ar 23 operācijām: I-1, X-5, U-3, T-1, Z-1, N-1, P-2, (V, Y)-3, W-3, L-1, F-2.

Uzdevumu 2.90., 2.93., 2.94. formulējumos vai to risinājumos dotie zīmējumi ir aizgūti no 1986.g. 7.marta avīzes "Padomju Jaunatne". Tajā kā atbildes uz konkursa uzdevumu par visu pentamino izzāģēšanu no iespējami maza taisnstūra ir publicēti pieci zīmējumi. Četri no tiem attiecas uz taisnstūra 6×12 sazāģēšanu. Pateicoties avīzē izsludinātajam konkursam, žūrijai, kura veiksmīgi izvēlējusies neizpētītu problēmu, un konkursa dalībnieku pūliņiem, ir iegūts, šķiet, vairs nepārspējams rezultāts -72 laukuma vienības. Minētajā avīzē kā konkursa dalībniece, kura sasniegusi šo rekordrezultātu, nosaukta Inta Aizkalniete no Adulienas (Gulbenes raj.).

2.95. Pentamino iegūsim pēc 116. zīm. parādītās shēmas. Tad operāciju skaits būs tieši 23: I-1, P-2, N-2, T-1, F-3, V-1, U-3, Z-1, Y-1, X-5, L-1, W-2.



115. zīm.



116. zīm.

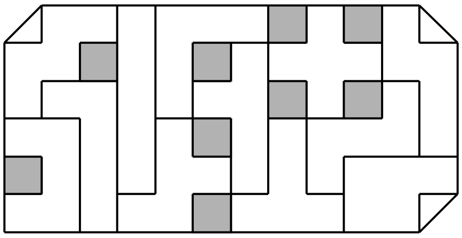
2.96. Uzsvērsim, ka visām iepriekš lietotajām pentamino "izlaušanas" shēmām šis apgalvojums izpildās. Bez tam pat tik mazā taisnstūrī kā 6×12, sk. 113.-114. zīm., no 12 "nelietderīgajām" rūtiņām četras saskaras ar pentamino X. Tomēr eksistē shēmas, sk. 115. zīm., kurām šis "ticamais" apgalvojums nav spēkā. Vēl vairāk, katra kvadrāta 5×5 (kurš satur pentamino X) rūtiņa pieder kādam pentamino. Te vispirms jānolauž fragments ar Y un Z, tad varēs "izlauzt" I utt.

2.97. Lai no taisnstūra 6×13, sk. 103. zīm., izzāģētu visus pentamino, pietiek ar 81 vienību gariem iegriezumiem, toties pentamino izzāģējot no mazāka taisnstūra 7×11 saskaņā ar 105. zīm. parādīto shēmu vajag vairāk - 83 vienības garus iegriezumus.

2.98. 103. zīm. parādītajai shēmai atbilst 23 "izlaušanas" operācijas un 81 vienību gari iegriezumi, bet 107. zīm. parādītajai shēmai šie skaitļi attiecīgi ir 24 un 77.

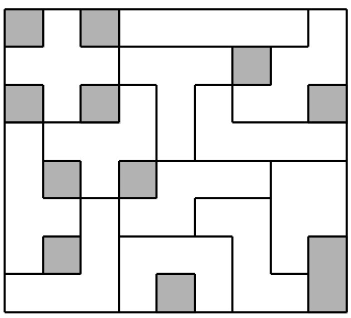
2.99. Pēc 116. zīm. dotās shēmas visus 12 pentamino var izzāģēt ar 76 vienības gariem iegriezumiem.

2.100. 117. zīm. parādītā 7-stūra, no kura var izzāģēt (vai arī "izlauzt") visus pentamino, laukums ir 70,5 vienības. Viegli pamanīt, ka atrisinājums iegūts no 113. zīm.

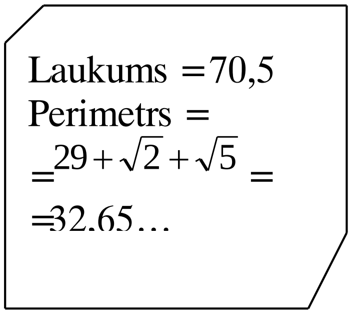


117. zīm.

2.101. Septiņstūra (sk. 117. zīm.) perimetrs ir $30+3\sqrt{2}>34$, bet 120. zīm. parādītā septiņstūra perimetrs ir $23+\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{17}=32,96...$. Visi pentamino (sk. 120. zīm.) ir "izlaužami" šādā secībā: N, I, (T, L, U), (P, Y, Z), W, X, V, F.

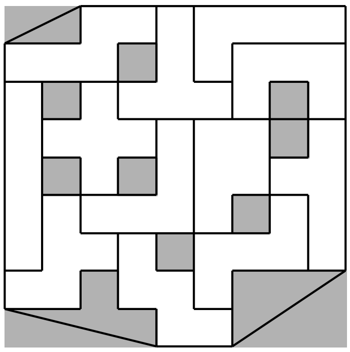


118. zīm.



119. zīm.

2.103. Lūk, kāda varētu būt meklējamā shēma: sk. 118. zīm. Šai shēmai atbilst 77 vienības gari iegriezumi un 22 "izlaušanas" operācijas: X-5, I-1, W-3, U-3, P-2, Z-1, N-1, L-1, T-1, F-2, V-1, Y-1. Šī shēma kopā ar 116. zīm. attēloto shēmu der kā vēl viens pretpiemērs 2.98. uzdevuma hipotēzei.

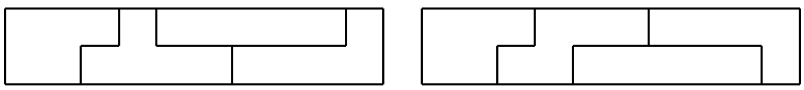


120. zīm.

2.105. Tādu daudzstūri elementāri iegūt no 118. zīm. redzamās shēmas, sk. 119. zīm.

3. nodaļa

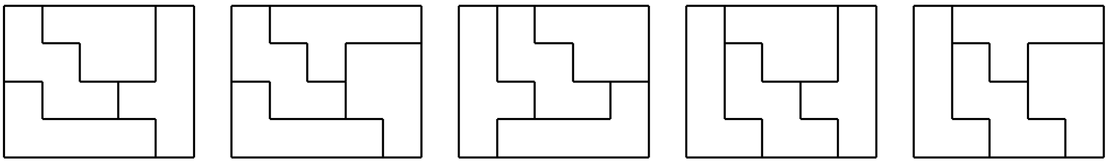
3.2. Ievērosim, ka doto taisnstūru noklāšanā var derēt tikai pieci pentamino I, L, N, P un Y, tātad taisnstūra laukums nedrīkst pārsniegt 25. Tā kā taisnstūris 2×5 nav p-saliekams, tad 2×10 tiešām ir vienīgais p-taisnstūris ar vienas malas garumu 2. Vienkārši pierādīt, ka eksistē tikai divi šī taisnstūra p-salikumi.



121. zīm.

3.3. Visus septiņus p-salikumus iegūst no šādām pentamino kombinācijām: (T, L, Y), (V, U, P), (V, N, L), (V, L, P), (U, F, P), (U, N, P), (U, Y, P).

3.4. Var pierādīt, ka tikai kombinācija (L, P, W, Y) dod piecus salikumus,sk.122.zīm.

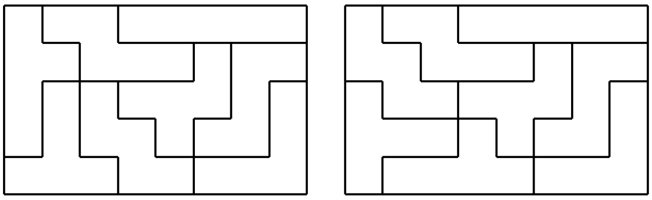


122. zīm.

3.5. I, L, P, W un Y.

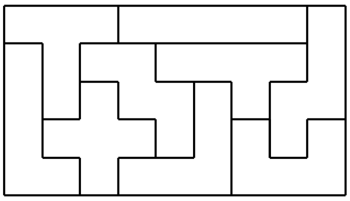
3.7. Visus 8 salikumus iegūst no kombinācijām (X, L, U, I, V, F), (X, L, U, I, V, N), (X, L, U, I, T, Y) un (X, L, T, F, V, N) attiecīgi skaitā 1, 2, 2 un 3.

3.9. Eksistē tikai divi 123. zīm. parādītie salikumi.



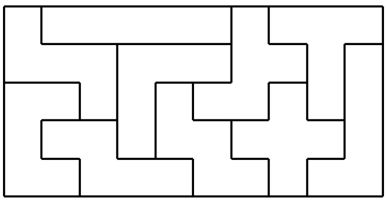
123. zīm.

3.10. Sk. 124. zīm.



124. zīm.

3.11. Sk. 125. zīm.



125. zīm.

3.12. Uzdevumam nav zināms "pietiekoši" īss atrisinājums un tas var kalpot kā piemērota problēma skolēnu pētnieciskajam darbam. Izvēlēties 10 pentamino no 12 var 66 veidos. Izrādās, ka <u>tikai vienā</u> gadījumā (no šiem 66), proti, ja neizmanto F un P, taisnstūri salikt nevarēs. Pieņemsim, ka jūs esat nolēmis aplūkot visas 66 kombinācijas. Tad būtu interesanti zināt, kas jums sagādās lielākas pūles: pierādīt, ka bez F un P taisnstūri 5×10 salikt nav iespējams, vai viena kaut kāda salikuma atrašana pārējos 65 gadījumos.

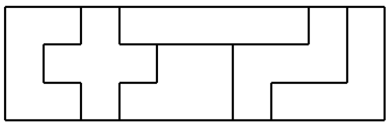
3.13. 3. tabulā ir atspoguļoti ar datoru aprēķinātie rezultāti, kuri norāda, cik p-salikumu vispār var iegūt, ja taisnstūra 5×11 salikšanā neizmanto norādīto pentamino.

Taisnstūra 5×11 salikumu skaits

X	1615	V	233	Y	129
W	646	U	185	I	112
Z	477	N	179	L	61
T	292	F	158	P	16

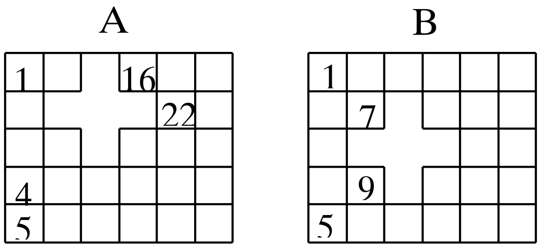
3. tabula.

3.14. Ar pentamino X, U, I, P, Z un V var salikt taisnstūri 3×10, sk. 126. zīm., bet nevar salikt taisnstūri 5×6.



126. zīm.

Ievērojot taisnstūra simetriju, pietiek aplūkot tikai divus pentamino X novietojuma variantus A un B, sk. 127. zīm.

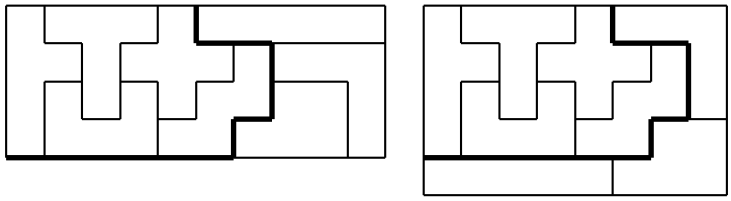


127. zīm.

A. Viennozīmīgi nosakāma pentamino U vieta, sk. 127. zīm., bet ceturto rūtiņu pieļaujams noklāt tikai ar P (ja to noklātu ar I, tad vairs nevarētu noklāt 5. rūtiņu). Tālāk pēc 16. rūtiņas noklāšanas ar V vairs nevar noklāt 22. rūtiņu ne ar vienu no vēl neizmantotajiem pentamino I vai Z.

B. Pirmo rūtiņu pieļaujams noklāt ar I vai P. Tā kā 5. rūtiņa ir "līdzvērtīga" 1. rūtiņai, tad viena no tām (nav būtiski, tieši kura) jānoklāj ar I. Ja ar I noklātu 1. un 5. rūtiņu, tad, pēc 7. rūtiņas noklāšanas ar U, vairs nevarētu noklāt 9. rūtiņu. Savukārt, ja ar I noklātu 1. (bet ne 5.) rūtiņu, tad pēc 7. rūtiņas noklāšanas ar U vairs nebūtu ar ko noklāt 5. rūtiņu, jo I jau ir izmantots.

3.16. Dotā pentamino kombinācija ir īpaša: gan taisnstūri 4×10, gan 5×8 ar šīs kombinācijas pentamino var salikt vienā vienīgā veidā, sk. 128. zīmējumu.

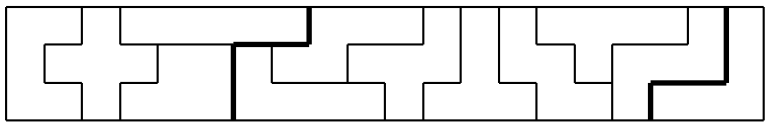


128. zīm.

Ievērosim, ka šie salikumi atšķiras tikai ar trīs pentamino savādāku novietojumu.

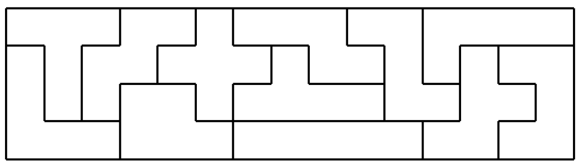
3.17. Viens taisnstūra 3×20 salikums parādīts 129. zīmējumā. Tā kā šajā salikumā izceltais fragments ir simetrisks, tad, to pagriežot par 180°, iegūstam otru taisnstūra salikumu.

Grāmatā [2,122.lpp] nepareizi apgalvots, ka taisnstūra 3×20 salikšanas uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums, turpretī "nesalīdzināmi" sareģītākam uzdevumam par taisnstūra 6×10 salikumu atrašanu dots pareizs atrisinājumu skaits -2339.



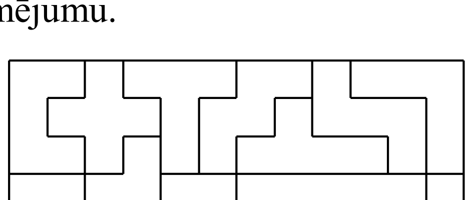
129. zīm.

3.18. Viens no salikumiem, kas atspēko apgalvojumu, parādīts 130. zīmējumā.



130. zīm.

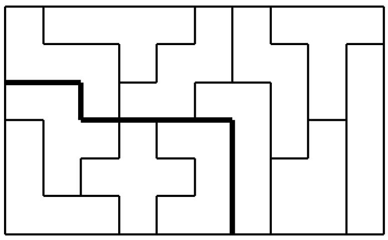
3.19. Eksistē viens vienīgs salikums ar prasīto īpašību, sk. 131. zīmējumu.



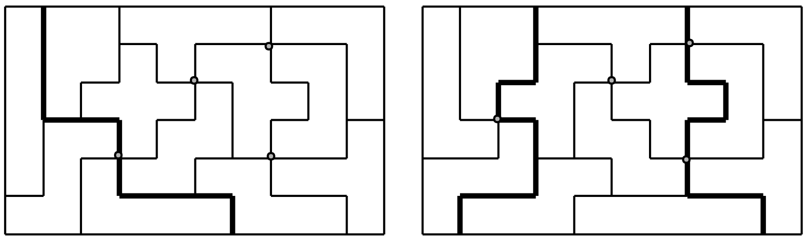
131. zīm.

3.20. Pirmais salikums ievērojams ar to, ka nav neviena iekšēja pentamino jeb, ka visi pentamino saskaras ar taisnstūra 6×10 malām. Acīmredzams, ka pēc šādas īpašības neviens salikums nevar pārspēt doto. Otrais salikums ir ievērojams ar 4 tādiem krustpunktiem (+), kuros saskaras četri pentamino. Nevienā taisnstūra 6×10 salikumā nevar būt vairāk kā 4 šādi krustpunkti. Abi šie salikumi ir atrodami grāmatā [5].

3.21. Ir noskaidrots, ka bez jau dotā salikuma, sk. 24. zīm., eksistē vēl tikai salikums, kurā visi pentamino saskaras ar taisnstūra malu. Šo salikumu nav grūti atrast, ja fragmentu, ko veido četri pentamino: X, U, F un V, kā vienu veselu pārvieto uz taisnstūra citu vietu, sk. 132. zīmējumu. Viegli saprast, kā no 25. zīm. redzamā salikuma iegūstami vairāki citi salikumi ar te vajadzīgo īpašību. Pietiek ievērot, ka šis salikums satur 133. zīm. parādītos simetriskos fragmentus.



132. zīm.



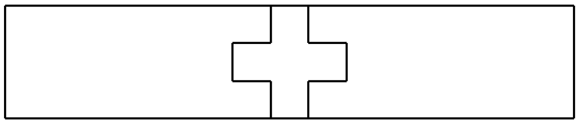
133. zīm.

3.22. Vispirms pierādīsim apgalvojumu A3. Pietiek analizēt tikai divus pentamino X stāvokļus, sk. 134.-135. zīm.

A

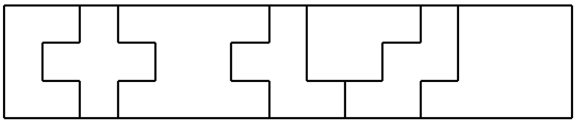
134. zīm.

B

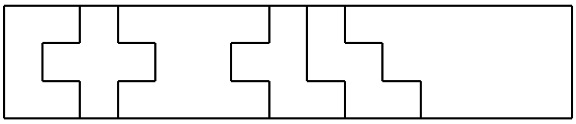


135. zīm.

Tālāk aplūkosim pentamino W izvietošanas iespējas vēl nenoklātajos taisnstūra fragmentos (daļās). Pietiek aplūkot tikai šādus divus W stāvokļus, sk. 136.-137. zīm.



136. zīm.

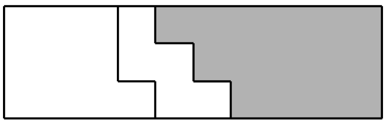


137. zīm.

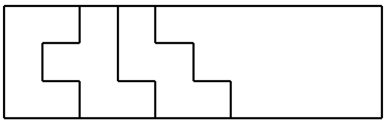
Tas ir skaidrs no simetrijas un no tā, ka, izvietojot pentamino W vēl nenoklātajā fragmentā (sk. variantu B), nav iespējams ievērot "dalāmības ar 5 principu". Nevienā no vēl nenoklātajām taisnstūra daļām, sk. 136. zīm., nav pieļaujams novietot pentamino F: vai nu tiktu pārkāpts dalāmības princips, vai arī acīmredzami vajadzētu divus vienādus pentamino.

Apgalvojuma A1 pierādījums ir vēl vienkāršāks. Bez tam A1 atsevišķi var nepierādīt, pietiek atsaukties uz A3 pierādījumu.

Lai pierādītu apgalvojumu A2, taisnstūra un pentamino W simetrijas dēļ pietiek aplūkot tikai vienu, piemēram, 138. zīm. redzamo W stāvokli. Tā kā pentamino F nav pieļaujams novietot iesvītrotajā daļā, tad atliek tikai 139. zīm. parādītā iespēja. Tātad taisnstūris 3×10 noteikti saturēs pentamino U.



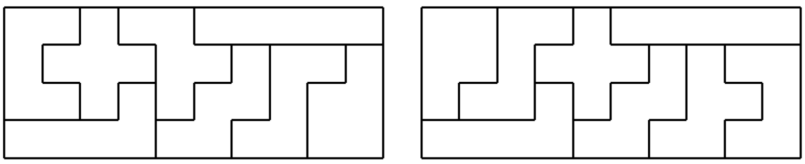
138. zīm.



139. zīm.

Apgalvojumu A4 var uzskatīt par acīmredzamu, sk. arī 3.3. uzdevuma atbildi.

3.23. 140. zīmējumā parādīti divi salikumi



140. zīm.

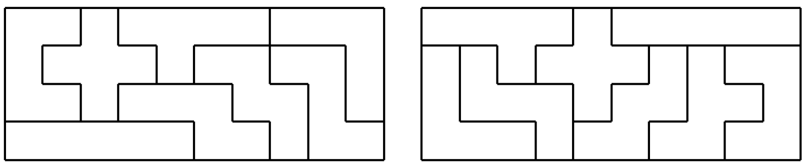
Pārējās trīs salikumus iegūst no pirmā, ievērojot, ka var mainīt vietām pentamino U ar L un X ar F.

3.24. Ievērojot taisnstūra 4×15 un pentamino X simetriju, pietiek aplūkot tikai 6 pentamino X stāvokļus, kad X centrālā rūtiņa noklāj 3., 4., 5., 6., 7., vai 8. taisnstūra otrās rindiņas rūtiņu. Katram no šiem X stāvokļiem atbilstošais p-salikumu skaits attiecīgi būs: 8, 0, 12, 12, 0 un 16, kas kopā dod tieši 48. Šie skaitļi vienkārši aprēķināmi, izmantojot iepriekšējo uzdevumu risinājumus. Paskaidrosim, kāpēc 6. stāvoklim atbilst vairāk salikumu nekā pirmajam. Tas tāpēc, ka, novietojot pentamino X sestajā stāvoklī, taisnstūris 4×5 var būt izvietots pa kreisi vai pa labi no pentamino X; katrā no šiem gadījumiem ir 2*4=8 salikumi. Kāpēc te taisnstūra 4×10 atbilstošais salikumu skaits -2 tiek reizināts ar 4? Gluži vienkārši tāpēc, ka pentamino N, T, V un Y taisnstūra 4×15 daļā 4×5 var izvietot 4 dažādos veidos.

3.25. (W, P, L, Y) un (W, P, T, V).

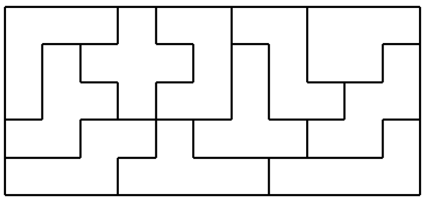
3.26. (Z, P, L, Y), (Z, P, L, V), (Z, P, U, V) un (Z, N, L, V).

3.27. Eksistē tikai divi šādi salikumi



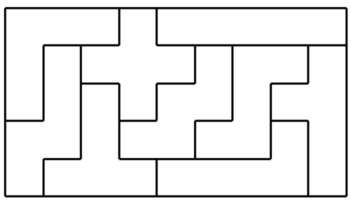
141. zīm.

3.28. Sk. 142. zīmējumu.



142. zīm.

3.29. Eksistē tikai viens 143. zīm. parādītais salikums.

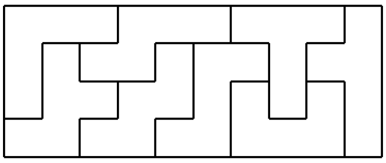


143. zīm.

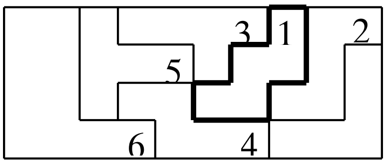
3.31. Gadījumā a) eksistē divi p-salikumi. Turklāt tos var iegūt vienu no otra, izmantojot divu pentamino - F un N - stāvokļus, sk. 29. zīm. Der atzīmēt, ka šajos taisnstūra 5×6 salikumos var saskatīt vienu no 2.1. uzdevuma atrisinājumiem. Gadījumā b) eksistē tikai viens p-salikums, sk. to pašu zīmējumu.

Žurnālā [16] uzdevuma par divu taisnstūra 5×6 salikšanu atrisinājums papildināts ar nepārdomātu komentāru "*Uzrādītais atrisinājums, cik mums zināms, ir vienīgais iespējamais. Neticami? Būsim priecīgi publicēt atspēkojumu. Taču atcerieties, ka ne "pagriešanas", ne "apgāšanas" netiek uzskatītas par citiem atrisinājumiem.*"

3.32. Eksistē viens vienīgs salikums, sk. 144. zīm.



144. zīm.



145. zīm.

Realizējot pilnās pārlases metodi, te pietiek aplūkot tikai vienu (no četrām) pentamino W orientāciju, piemēram, tādu, kā redzams 144.-145. zīmējumā No vairākiem pieļaujamiem W stāvokļiem detalizētāk analizēsim 145. zīm. parādīto W stāvokli (novietojumu).

2. rūtiņu pieļaujams noklāt tikai ar Z, jo pentamino P un L saskaņā ar uzdevuma noteikumiem nav izmantojami. Tad 3. rūtiņu pieļaujams noklāt tikai ar Y (ja to noklātu ar N, tad acīmredzami būtu jāizmanto vēl viens pentamino V). Tālāk viennozīmīgi nosakām pentamino, ar kuriem jānoklāj 4. un pēc tam 5. rūtiņa, sk. 145. zīm. Tā kā ar atlikušajiem pentamino X, F un U nav noklājama 6. rūtiņa, tad taisnstūris 4×10 pie apskatāmā W stāvokļa nav noklājams. Vienkārši izskatāmi arī pārējie W stāvokļi.

3.33. Zināms, ka taisnstūri 2×10 var salikt no pentamino I, P, L, Y vai arī no I, P, L un N, sk. 3.2. uzdevumu, tātad taisnstūra 4×10 salikumā jāizmanto pentamino W un X. Pēc iepriekšējā uzdevuma eksistē tikai viens taisnstūra 4×10 salikums, kurš satur W, bet nesatur I, P un L. Tā kā šis salikums nesatur X, sk. 144. zīm., tad taisnstūri 2×10 un 4×10 vienlaicīgi nav saliekami.

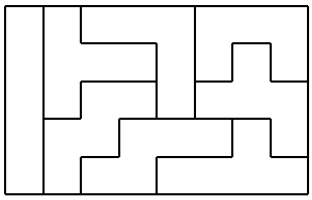
3.34. Tādu salikumu ir 14. No katra taisnstūra 3×5 salikuma var iegūt divus te vajadzīgos taisnstūra 4×5 salikumus, sk. 3.3. uzdevuma atrisinājumu.

3.35. No pentamino I, U, F, L un Y taisnstūri 5×5 var salikt 6 veidos. Neviena cita minētā tipa piecu pentamino kombinācija nedos tik daudz salikumu.

3.36. Eksistē viena vienīga pentamino kombinācija (I, F, N, T, V,Y), kurai atbilst vajadzīgais taisnstūra 5×6 salikums.

3.37. Meklējamo salikumu vienkārši iegūt, piemēram, no pentamino W, Z, T, U, N, Y un I.

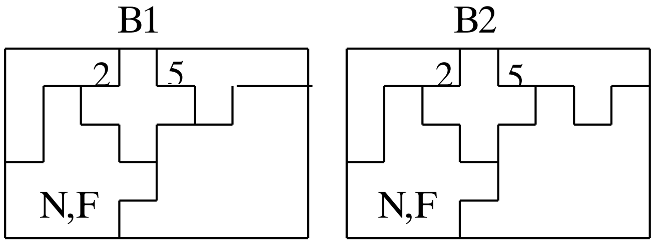
3.38. Viens no šādiem salikumiem parādīts 146. zīmējumā. Var pierādīt, ka 146. zīm. redzamie pentamino ir vienīgie, no kuriem taisnstūri 5×8 var salikt tā, ka tas sadalās divos p-taisnstūros.



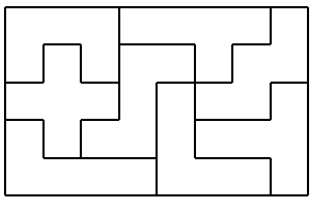
146. zīm.

3.39. Sk. 148. zīm.

3.40. Neeksistē. Tas izriet no taisnstūru 2×10 un 5×8 vienlaicīgas p-nesaliekamības pierādījuma. Vienīgā vieta, kur jāprecizē šis pierādījums, attiecas uz variantu B, sk. 147. zīm., jo tagad 5.rūtiņu vēl pieļaujams noklāt ar pentamino Y. Viegli redzēt, ka pēc 5. rūtiņas noklāšanas ar Y, sk. 147. zīm., nevienā no variantiem B1, B2 atlikušais apgabals vairs nav noklājams, izmantojot pentamino T, U, W vai Z.



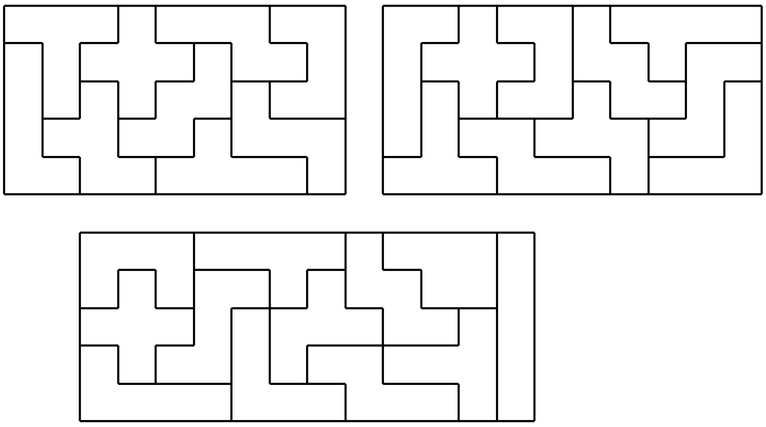
147. zīm.



148. zīm.

Atzīmēsim, ka prasību "satur pentamino X" uzdevuma formulējumā var atmest: tik un tā bez pentamino P, L un I taisnstūri 5×8 salikt nevarēs. Tiesa, pierādījums kļūs garāks.

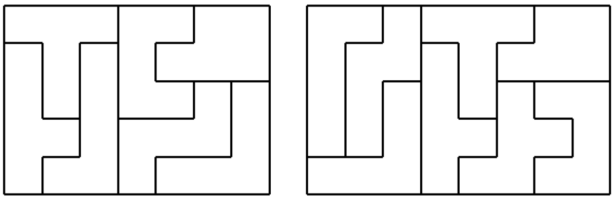
3.41.-3.43. Visos trijos uzdevumos eksistē attiecīgi viens vienīgs salikums, sk. 149. zīm., kas dod apstiprinošu atbildi uz izvirzītajiem jautājumiem.



149. zīm.

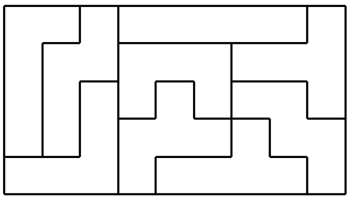
3.44. To var izdarīt 5 šādos veidos, sk. 3.3. uzd., (T, L, Y; V, U, P), (T, L, Y; U, F, P), (T, L, Y; U, N, P), (V, N, L; U, F, P) un (V, N, L; U, Y, P).

3.45.-3.46. Sk. 150. zīm.



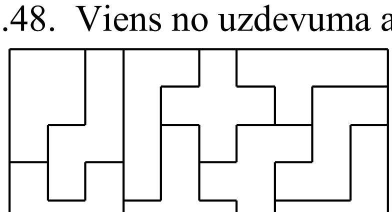
150. zīm.

3.47. Jāizvēlas šādi 9 pentamino: (L, N, V; W, T, U, I, F, Y), atbilstošais salikums parādīts 151.zīm. Var pierādīt, ka šī ir vienīgā pareizā 8 pentamino izvēle.



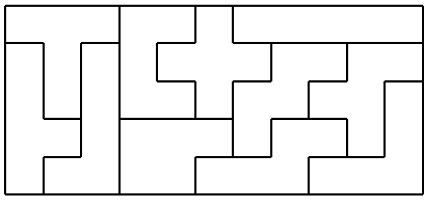
151. zīm.

3.48. Viens no uzdevuma atrisinājumiem parādīts 152. zīm.



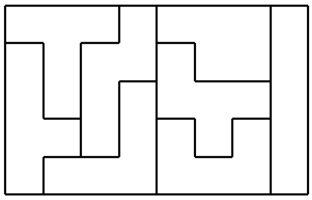
152. zīm.

3.49. Eksistē viens vienīgs pentamino sadalījums pa taisnstūriem, kurš dod apstiprinošu atbildi uz formulēto jautājumu, sk. 153. zīm. Uzsvērsim, ka šis apgalvojums izpildās tikai tad, ja neizmanto pentamino Z.



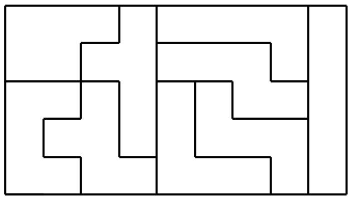
153. zīm.

3.50. Tikai viens pentamino sadalījums pa taisnstūriem (N, T, V, Y) un (F, I, P, U) dod vajadzīgo salikumu , sk. 154. zīm.



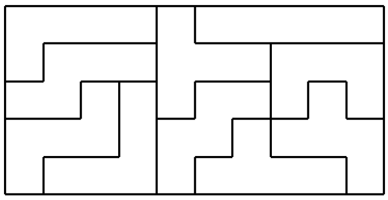
154. zīm.

3.51. Tikai viens pentamino sadalījums pa taisnstūriem (F, P, U, Y) un (I, L, N, V, Z) dod vajadzīgo salikumu, sk. 155. zīm.



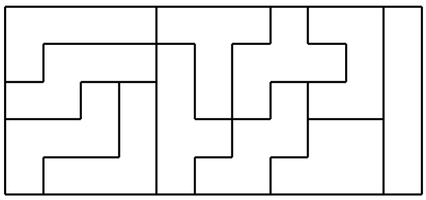
155. zīm.

3.52. Tikai viens pentamino sadalījums pa taisnstūriem (L, N, V, Z) un (F, I, T, U, W, Y) dod apstiprinošu atbildi uz formulēto jautājumu, sk. 156.zīm.

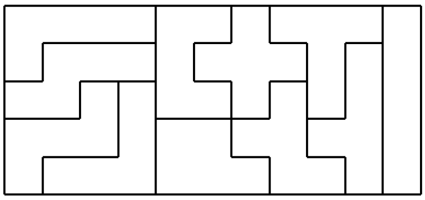


156. zīm.

3.53. Var pierādīt, ka taisnstūrus 5×4 un 5×7 iespējams salikt tikai tad, ja neizmanto pentamino X vai W. Divi salikumi attiecīgi bez pentamino X vai W parādīti 157., 158. zīm.



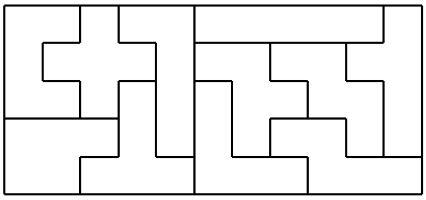
157. zīm.



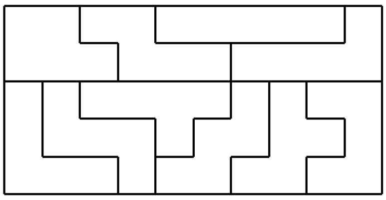
158. zīm.

3.54. Tikai viens pentamino sadalījums pa taisnstūriem, sk. 158. zīm., dod vajadzīgo salikumu.

3.55. Sk. atbildi uz 3.49. uzdevumu un 159. zīm.



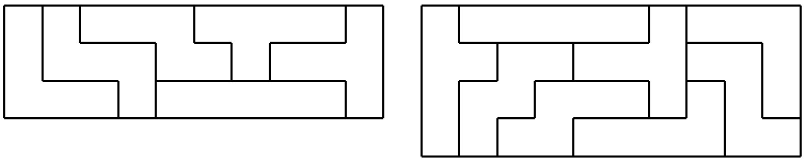
159. zīm.



160. zīm.

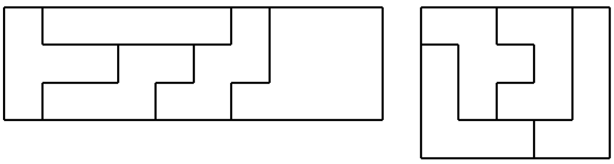
3.56. Šķiet neticami, taču izrādās, ka otrais taisnstūris nosakāms viennozīmīgi! Turklāt viennozīmīgi nosakāms ne tikai pentamino sadalījums pa taisnstūriem (2×10, 3×10), bet arī katra šī taisnstūra salikums, sk. 159. zīm.

3.57. Abos gadījumos attiecīgi 6 un 7 pentamino kombinācijas un tām atbilstošie taisnstūru salikumi nosakāmi viennozīmīgi, sk. 161. zīm.



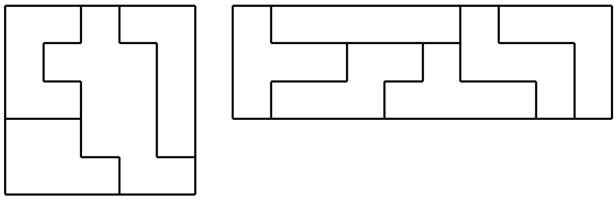
161. zīm.

3.58. Pentamino sadalījums pa taisnstūriem nav nosakāms viennozīmīgi. Neaizpildīto apgabalu, sk. 162. zīm., var noklāt ar P un Z vai ar P un Y.



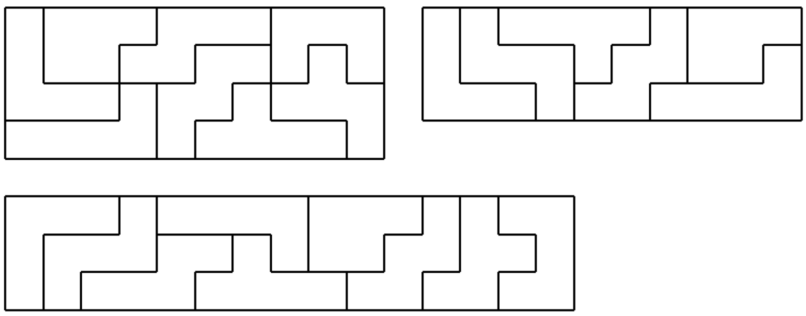
162. zīm.

3.59. Pentamino sadalījums pa taisnstūriem nav nosakāms viennozīmīgi. Neaizpildīto taisnstūra 5×5 apgabalu, sk. 163. zīm., var noklāt ar F un X vai ar F un W.



163. zīm.

3.60. Piemēram, pietiek ar 10 pentamino : F, L, N, P, U, V, W, Y, Z un I, sk. 164. zīm. Acīmredzams, ka 10 ir mazākais skaits.



164. zīm.

3.62. Vidējo taisnstūri 5×3 saliek no pentamino U, N un P, bet pārējos attiecīgi no (T, L, Y), (T, F, L, Y), (W, T, V, L, Y), (Z, T, V, F, L, Y) un (X, Z, T, V, F, L, Y), sk. 152. zīm.

3.64. No 3.3. uzdevuma risinājuma uzreiz izriet, ka nav iespējams vienlaicīgi salikt trīs vienādus taisnstūrus 5×3. Pavisam vienkārši var pamatot, ka nevarēs salikt arī trīs taisnstūrus 5×4. Pietiek ievērot, ka šo trīs taisnstūru salikšanā jāizmanto visi pentamino. No otras puses, taisnstūra 5×4 salikums nevar saturēt pentamino X. Te var spriest arī savādāk: kā iepriekš zināmu faktu izmantot to, ka taisnstūris 5×12 nav sadalāms divos p-taisnstūros 5×4 un 5×8.

3.65. Negaidīti, ka eksistē tikai viens taisnstūra 5×4 salikums. Tas satur pentamino N, T, V un Y.

3.66. Ja no pentamino ir salikts taisnstūru pāris (5×3, 5×3), tad to salikšanā ir izmantoti pentamino L un P, sk. 3.3. uzdevuma risinājumu. Tagad saskaņā ar iepriekšējo uzdevumu pentamino N, T, V un Y jāizmanto taisnstūra 5×4 salikšanā. Tā kā no septiņām kombinācijām, kas derīgas taisnstūra 5×3 salikšanā, tikai viena (U, F, P), sk. atkal 3.3. uzdevuma risinājumu, nesatur nevienu no pentamino N, T, V un Y, tad skaidrs, ka trīs taisnstūrus (5×3, 5×3, 5×4) salikt nevarēs.

3.67. Eksistē trīs salikumi. Divus no tiem dod kombinācija (T, V, I, N, Y) un vienu - (T, V, F, N, Y).

3.69. Pieņemsim, ka var salikt, piemēram, trīs taisnstūrus (5×1, 5×5, 5×6). Tad varētu salikt taisnstūru pāri (5×6, 5×6), kura salikums atšķiras no 29. zīm. dotā, bet tas ir pretrunā ar iepriekš minēto rezultātu, ka pentamino sadalījums pa taisnstūriem 5×6 un 5×6 nosakāms viennozīmīgi. Līdzīgi var spriest pārējo trīs taisnstūru gadījumā.

LITERATŪRA

1. Golombs S. *Polimino.* - M., 1975, 208 lpp. (kr. val.)
2. Bols U., Kokseters G. *Saistošā matemātika un esejas*. - M., 1986, 172 lpp. (kr. val.)
3. *Matemātiskais dārziņš*. - M., 1983, 494 lpp. (kr. val.)
4. Gardners M. *Matemātiskās spēles un izklaide* - M., 1971, 510 lpp. (kr. val.)
5. Hardy R. *Gry W Figury*. Warszawa, 1983, 116 c.
6. Lindgrēns G. *Saistoši sagriešanas uzdevumi*. - M., 1977, 256 lpp. (kr. val.)
7. Močalovs L.P. *Matemātiskās spēles*. - M., 1980, 126 lpp. (kr. val.)
8. Golomb S. *Tiling with polyominoes*, J. Combin. Theory 1, No.2 (1966), 280-296.
9. Golomb S. *Polyominoes which tile rectangles*, J. Combin. Theory, Series A51 (1989), 117-124.
10. Dahlke K.A. *The Y-hexomino has order 92*, J. Combin. Theory, Series A51 (1989), 125-126.
11. Andžāns A., Andžāne D. *Izdales materiāls matemātikā darbam ar spējīgākajiem 5.-9. klašu skolēniem*, IV daļa, Rīga, 1992, 66 lpp.
12. Muceniece I. *Algoritmiskie uzdevumi ar polimino*. "Zvaigžņotā debess", 1986./87. Ziema, 40-48.
13. "Kvants", 1977, Nr. 6 (kr. val.)
14. "Kvants", 1977, Nr. 2 (kr. val.)
15. "Zinātne un dzīve", 1968, Nr. 1 (kr. val.)
16. "Zinātne un dzīve", 1967, Nr. 4 (kr. val.)