Anita Ločmele; Inese Palma; Līga Ramāna; Agnis Andžāns; Tomass Larfeldts

Nevienādību pierādīšanas metodes

Eksperimentāls mācību līdzeklis

Atļāvusi lietot Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrija

1997

Saturs

IEVADS

Nevienādību pierādīšana ir viena no skolas matemātikas kursa integrējošām sastāvdaļām. Nevienādību pierādīšanas uzdevumi sastopami gan algebrā, gan ģeometrijā, gan trigonometrijā, gan skaitļu teorijā, gan matemātiskajā analizē. Tos nepieciešams risināt kā izlaiduma eksāmenos un iestājpārbaudījumos, tā arī dažādās matemātikas olimpiādēs un konkursos.

Galveno vietu starp nevienādībām ieņem t. s. algebriskās nevienādības. Metodes, kuras lieto šo nevienādību pierādījumos, caurvij arī nevienādību pierādīšanas paņēmienus citās nozarēs. Algebriskās nevienādības tiek lietotas arī vienādojumu un to sistēmu analīzē, ekstrēmu uzdevumu risināšanā, dažādu matemātiskās analīzes faktu pierādīšanā (piem., skaitlis *e)* u. c. Tāpēc iepazīšanās ar nevienādību pierādīšanas metodēm ir lietderīga no faktu materiāla apguves viedokļa.

Nevienādību pierādīšanā tiek izmantotas daudzas vispārīgas metodes: matemātiskā indukcija, vidējās vērtības metode, ekstremālā elementa metode, figūru pētīšana, dažādas interpretācijas. Iepazīšanās ar tām ievērojami paaugstina skolēna vispārīgo matemātisko kultūru. Šai sakarā ar nevienādību pierādīšanas metodēm ieteicams iepazīties pēc iespējas plaši.

Latviešu valodā nevienādību pierādīšanai veltītās literatūras saraksts ir pārāk īss. Svešvalodās publicēts ievērojami vairāk darbu. Šī literatūra šobrīd Latvijā nav plaši pieejama. Līdz ar to atbilstoša mācību līdzekļa sagatavošana ir aktuāls uzdevums.

Šajā grāmatā ir apkopotas pamatmetodes, ko lieto algebrisko nevienādību pierādīšanā vidusskolas kursa apjomā. Tās ilustrētas ar raksturīgiem piemēriem. Grāmatā ievietots arī liels skaits uzdevumu patstāvīgam darbam. Daļa uzdevumu, kurus var risināt ar dažādām metodēm, ievietoti vairākās atbilstošās nodaļās.

Jāatzīmē, ka grāmata sniedz tikai nevienādības pierādīšanas metožu minimumu. To iespējams paplašināt ļoti daudzos virzienos, un šāds darbs nākotnē ir arī iecerēts.

Autori

APZĪMĒJUMI

Dažos uzdevumos tiek lietoti speciāli apzīmējumi, kuri var būt līdz šim nepazīstami.

- ***x*!!** - ja x ir naturāls skaitlis, tad x!! apzīmē visu to naturālo skaitļu reizinājumu, kuri nepārsniedz x un kuriem ir tāda pati paritāte kā skaitlim x, piemēram:

  7!! = 1·3·5·7 = 105

  6!! = 2·4·6 = 48

- $\sum_{i=1}^{n} a_i$ - visu skaitļu a_i summa, sākot ar a_1, un beidzot ar a_n.

  Piemērs: $\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

  Ja ir jāsaskaita visi skaitļi a_i, tad bieži vien lieto vienkāršotu apzīmējumu $\sum a_i$

- $\prod_{i=1}^{n} a_i$ - šāds apzīmējums norāda, ka attiecīgie skaitļi a_i, ir jāreizina.

  Piemērs: $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$

  Ja ir jāsareizina visi skaitļi a_i, tad lieto vienkāršotu apzīmējumu $\prod a_i$

1. EKVIVALENTO PĀRVEIDOJUMU LIETOŠANA

Bieži nevienādības pierāda, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Tādējādi iegūst nevienādību, kuras pareizība ir acīm redzama vai viegli noskaidrojama ar elementāru spriedumu palīdzību.

1.1 PILNO KVADRĀTU IZDALĪŠANA

Viens no ekvivalento pārveidojumu veidiem ir pilno kvadrātu izdalīšana.

1.piemērs Pierādīt, ka attiecība uz jebkuriem reāliem skaitļiem *x* un *y* ir spēkā nevienādība $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0.$

Risinājums. Izpildot nevienādības kreisās puses pārveidojumus, tiek izdalīti pilnie kvadrāti:

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 = (x^2 + 2xy + y^2) + 2y^2 + 2x + 6y + 3 =$$

$$= (x + y)^2 + 2(x + y) + 2y^2 + 4y + 3 = [(x + y)^2 + 2(x + y) + 1] + 2y^2 + 4y + 2 =$$

$$= [(x + y) + 1]^2 + 2(y^2 + 2y + 1) = [(x + y) + 1]^2 + 2(y + 1)^2.$$

Pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta ar nevienādību $(x + y + 1)^2 + 2(y + 1)^2 \geq 0.$

Šī nevienādība ir acīmredzama.

2.piemērs Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem *a, b* un *c* ir spēkā nevienādība

$$abc(a + b + c) \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

Risinājums. Veicam ekvivalentos pārveidojumus:

$$2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \leq 2a^4 + 2b^4 + 2c^4,$$

$$2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \leq 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + a^2b^2 - a^2b^2 + b^2c^2 - b^2c^2 + c^2a^2 - c^2a^2.$$

Visus nevienādības locekļus pārnesam uz labo pusi:

$$0 \leq (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) + (a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2),$$

$$0 \leq ((a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2) + ((a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2).$$

Iegūtā nevienādība ir acīm redzami pareiza.

3.piemērs Pierādīt, ka $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, ja $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0.$

Risinājums. Apzīmējam $a_1 = x^3, a_2 = y^3, a_3 = z^3.$

Nevienādību var pārrakstīt šādi: $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz.$

Ir pietiekami, ja pierādām, ka $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$

Pēc Bezū teorēmas $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ dalās ar $x + y + z$. Izdalot iegūstam

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) =$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\left[\left(x^2 - 2xy + y^2\right) + \left(y^2 - 2yz + z^2\right) + \left(z^2 - 2xy + x^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right].$$

Taču iegūtā izteiksme acīm redzami ir lielāka vai vienāda ar nulli.

Uzdevumi

Pierādīt nevienādības (l. - 20.).

1. $a^2+b^2+c^2+\dfrac{3}{4}\ge a+b+c$.

2. $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2$.

3. $a(a-b)\ge b(a-b)$.

4. $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$, ja $a+b\ge 0$.

5. $2x^4+1\ge 2x^3+x^2$.

6. $\dfrac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, ja $a>0$ un $b>0$.

7. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$, ja $a>0$ un $b>0$.

8. $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

9. $\dfrac{a_1+a_2}{2}\le\sqrt{a_1a_2}$.

10. $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}\ge\dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

11. $\sqrt{1+\alpha}\le 1+\dfrac{\alpha}{2}$, ja $\alpha>-1$.

12. $(a^2-b^2)(a^4-b^4)\le(a^3-b^3)^2$.

13. $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ge(a^3+b^3)^2$.

14. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$, ja $ab>0$.

15. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le -2$, ja $ab<0$.

16. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\ge 9$, ja x un y ir pozitīvi skaitļi, kuriem $x+y=1$.

17. $(a^2-b^2)^2\ge 4ab(a-b)^2$.

18. $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$.

19. $x^2+y^2+z^2\ge 1$, ja $xy+yz+zx=1$.

20. $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{1987}x_{1988}+x_{1988}x_1\le x_1^2+x_2^2+\ldots x_{1988}^2$.

21. Pierādīt, ka jebkuriem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kas ietilpst intervālā [0;1], ir spēkā sakarība

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\ge 4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

22. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir tādi skaitļi, ka $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$. Pierādīt, ka ir spēkā sakarība

$$S=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n\le 0,$$

kur summā S ietilpst visi iespējamie reizinājumi $a_i a_j$, $i \neq j$.

Pierādīt nevienādības (23. - 30.).

23. $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geq 0.$

24. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$

25. $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1).$

26. $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2$, ja $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

27. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc.$

28. $\frac{(a+b)xy}{ay+bx} < \frac{ax+by}{a+b}$, ja a>0, b>0 un ay+bx>0 ,x $\neq$ y.

29. $-\frac{1}{2} \leq$ **ab+bc+ca** $\leq$ **1,** ja $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ un a, b, c ir reāli skaitļi.

30. $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$

1.2. NEVIENĀDĪBAS VIENAS PUSES VAI ABU PUŠU SADALĪŠANA REIZINĀTĀJOS

1.2.1. Dažreiz nevienādību izdodas pierādīt, veicot visu nevienādības locekļu pārnešanu uz vienu pusi un iegūto izteiksmi sadalot reizinātājos. Turklāt šiem reizinātājiem jābūt tādiem, lai par tiem skaidri varētu pateikt, vai tie ir pozitīvi vai negatīvi.

__4.piemērs__ Zināms, ka $n > 1$. Pierādīt, ka $x+\frac{1}{nx} > 1+\frac{1}{n}$, ja $x > 1$ vai $0 < x < \frac{1}{n}$.

Risinājums. Apskatīsim abu nevienādības pušu starpību:

$$x+\frac{1}{nx}-1-\frac{1}{n}=(x-1)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1}{x}(x-1)\left(x-\frac{1}{n}\right).$$

Ja $n > 1$ un $x > 1$, tad $x - 1 > 0$ un $x-\frac{1}{n} > 0$,

bet tas nozīmē, ka $\frac{1}{x}(x-1)\left(x-\frac{1}{n}\right) > 0.$

Ja $x<\frac{1}{n}$ un $n > 1$, tad $x - 1 < 0$ un $x-\frac{1}{n} < 0$, tātad $\frac{1}{x}(x-1)\left(x-\frac{1}{n}\right) > 0$.

Tas arī bija jāpierāda.

__5.piemērs__ Pierādīt, ka naturāliem skaitļiem m *un* n attiecība uz, kuriem ir spēkā $m-n \geq 1$, un pozitīvam skaitlim r atbilst nevienādība $1 + r^{n-1} \geq r^m + r^{n-m-1}$.

Risinājums. Veiksim šādus pārveidojumus:

$$1 + r^{n-1} - r^m - r^{n-m-1} \geq 0$$

$$(1 - r^m) - r^{n-m-1}(1 - r^m) \geq 0$$

$$(1 - r^m)(1 - r^{n-m-1}) \geq 0$$

Ja 0<r<1, tad reizinātāji $(1 - r^n)$ un $(1 - r^{n-m-1})$ ir pozitīvi, ja $r > 1$, tad reizinātāji $(1 - r^m)$ un $(1 - r^{n-m-1})$ ir negatīvi, bet tas nozīmē, ka nevienādība

$$(1 - r^m)(1 - r^{n-m-1}) \geq 0$$

ir spēkā. Ja $r = 1$, ir spēkā vienādība.

6.piemērs Vairāku pozitīvu skaitļu summa ir vienāda ar to kvadrātu summu. Kas lielāks - kubu summa vai ceturto pakāpju summa?

Risinājums. Nosakām izteiksmes $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^4 - a_i^3\right)$ zīmi un apskatām starpību

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^4 - a_i^3\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - a_i\right), \text{ kur } \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - a_i\right) = 0,$$

$$\sum_{i-1}^{n}\left(a_i^4 - a_i^3\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^4 - a_i^3 - a_i^2 + a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(a_i^2(a_i - 1) - (a_i - 1)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1)\left(a_i^2 - 1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + 1)(a_i - 1)^2$$

Acīm redzami, ka šī summa ir pozitīva. Tātad ceturto pakāpju summa ir lielāka par kubu summu.

1.2.2. Ja pierādāmā izteiksme ir simetriska, tad var izdarīt pieņēmumu par mainīgo lielumu secību. Tas, noskaidrojot reizinātāju zīmes, bieži vien ir ļoti būtiski.

7.piemērs Pierādīt, ka pozitīviem a, b un c ir spēkā

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c).$$

Risinājums. Pierādāmā nevienādība ir simetriska attiecībā pret a, b un c. Varam pieņemt, ka $a \geq b \geq c > 0$. Tad

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - a^2c - ac^2 \geq 0,$$

$$(a^3 + a^2b - a^2c) + (-2a^2b - 2ab^2 + 2abc) + (b^2a + b^3 - b^2c) + (cab - c^2a - c^2b + c^3) \geq 0,$$

$$a^2(a + b - c) - 2ab(a + b - c) + b^2(a + b - c) + c(ab - ca - cb + c^2) \geq 0,$$

$$(a + b - c)(a^2 - 2ab + b^2) + c(a(b - c) - c(b - c)) \geq 0,$$

$$(a + b - c)(a - b)^2 + c(b - c)(a - c) \geq 0.$$

Pamatojoties uz pieņēmumu $a \geq b \geq c > 0$, var pārliecināties, ka visi reizinātāji šai nevienādībā ir nenegatīvi, bet tas nozīmē, ka nevienādība ir pareiza.

Uzdevumi

Pierādīt nevienādības (31. - 37.).

31. $k(n-k+1) \geq n$, ja $1 \leq k \leq n$.

32. $ab + 1 < a + b$, ja $a > 1$, $b < 1$.

33. $2x^3 > x + 1$, ja $x > 1$ un $2x^3 < x + 1$, ja $x < 1$.

34. $x^3 + y^3 \leq y^3\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} + x^3\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$, ja x un y ir pozitīvi skaitļi.

35. $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ja $x > y > 0$.

36. $a^k + \frac{1}{a^k} \geq a^{k-i} + \frac{1}{a^{k-1}}$, kur a > 0 un i, *k* ir veseli skaitļi, piemēram, $0 \leq i \leq k$.

37. $\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 1,\ x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

38. Pierādīt, ka patvaļīga trijstūra malu garumi atbilst nevienādībai

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$$

39. Divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir l, bet šo skaitļu summa ir lielāka par apgriezto lielumu summu. Pierādīt, ka tieši viens no šiem skaitļiem ir lielāks par l.

40. Pozitīvi skaitļi *x, y,* z atbilst nevienādībai

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}$$

Pierādīt, ka skaitļi x, y un z ir kāda trijstūra malu garumi.

41. Pierādīt, ka $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) < 0$, **ja** $a > b > c$.

42. Pierādīt, ka $a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + c^2b + b^2a$, ja $a > b > c$ vai $c > a > b$ vai $b > c > a$, un $a^2b + b^2c + c^2a < a^2c + c^2b + b^2a$, *ja* $a<b<c$ *vai* $c<a<b$ *vai* $b<c<a$.

43. Skaitļi *A, B* un C ir lielāki par 0 un mazāki par 1, K ir vislielākais no tiem. Pierādīt, ka

$$1-(1-A)(1-B)(1-C)>K.$$

44. Pierādīt, ka visiem pozitīviem α, ja 0 < α < p, ir spēkā nevienādība

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha > 0.$$

45. Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem *a, b, c* ir spēkā

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

1.3. CITI EKVIVALENTIE PĀRVEIDOJUMI

1.3.1. Var gadīties, ka ekvivalento pārveidojumu rezultātā tiek iegūta nevienādība, kas automātiski izriet no uzdevuma nosacījumiem vai arī no nevienādību pamatīpašībām.

<u>**8.piemērs**</u> Pierādīt, ka $\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{2ab-b^2} \geq a$, ja $a > b \geq 0$.

Risinājums. Nevienādību pārrakstām šādi: $\sqrt{2ab-b^2} \geq a - \sqrt{a^2-b^2}$.

Varam to kāpināt kvadrāta, jo $a - \sqrt{a^2-b^2} \geq 0$ un $\sqrt{2ab-b^2} \geq 0$.

Iegūstam $2ab - b^2 \geq 2a^2 - b^2 - 2a\sqrt{a^2-b^2}$ vai $\sqrt{a^2-b^2} \geq a - b$.

Kāpinām kvadrāta, jo $\sqrt{a^2-b^2} > 0$ un $a - b > 0$.

Iegūstam $a^2 - b^2 \geq (a-b)^2$ vai $a + b \geq a - b$.

Tas ir acīm redzami pareizi.

<u>**9.piemērs**</u> Pierādīt, ka $(a^p - b^p)(a^q + b^q) > (a^q - b^q)(a^p + b^p)$, ja a > b > 0 un p > q.

Risinājums. Pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta ar nevienādībām

$$a^{p+q} + a^pb^q - a^qb^p - b^{p+q} > a^{p+q} + a^qb^p - a^pb^q - b^{p+q},$$

$$a^pb^q - a^qb^p > a^qb^p - a^pb^q,$$

$$a^pb^q > a^qb^p.$$

Izdalot abas nevienādības puses ar b^{p+q}, iegūstam $\left(\frac{a}{b}\right)^p > \left(\frac{a}{b}\right)^q$.

Šī nevienādība ir spēkā, jo $\frac{a}{b} > 1$ un $p > q$.

10.piemērs Pierādīt, ka

$$n-1<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}<n.$$

Ievērojam, ka

$$\frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}}=\frac{(2k-1)\left(\sqrt{k^2+1}-\sqrt{(k-1)^2+1}\right)}{k^2+1-(k-1)^2-1}=\sqrt{k^2+1}-\sqrt{(k-1)^2+1}.$$

Izmantojot šo vienādību pierādāmās nevienādības vidējai izteiksmei, iegūstam

$$n-1<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n^2+1}-\sqrt{(n-1)^2+1}=\sqrt{n^2+1}-1.$$

Acīm redzami, ka $n-1<\sqrt{n^2+1}-1<n.$

1.3.2. Reizēm nevienādību izdodas pierādīt, lietojot ekvivalentus pārveidojumus nevienādībai, kas izriet no uzdevuma nosacījumiem. Šo pārveidojumu rezultātā iegūst pierādāmo nevienādību.

11.piemērs Pierādīt, ka aritmētiska daļa pēc skaitītāja un saucēja palielināšanas par vienu un to pašu pozitīvo skaitli palielinās, ja daļa ir īsta, un samazinās, ja daļa ir neīsta.

Risinājums. Jāpierāda, ka $\frac{a+k}{b+k}>\frac{a}{b}$.

Ja $\frac{a}{b}$ ir īsta aritmētiska daļa, kur $a > 0$, $b > 0$ un $b > a$, tad nevienādību $b > a$ reizinot ar k $(k > 0)$ un pieskaitot pie tās ab, iegūstam $ab+bk>ab+ak$ vai $b(a + k) > a(b + k)$. Dalot ar $b(b + k)$, iegūstam $\frac{a+k}{b+k}>\frac{a}{b}$.

Ja $\frac{a}{b}$ ir neīstā aritmētiska daļa, pierādījumu veic analogi.

1.3.3. Dažreiz mainīgā vērtību apgabalu ir ērti sadalīt intervālos.

12.piemērs Pierādīt nevienādību $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$

Risinājums. Šķirosim trīs gadījumus:

ja $x \le 0$, tad katrs nevienādības loceklis ir nenegatīvs un tāpēc

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1\ge 1>0;$$

ja $0<x<1$, tad

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=(1-x)+x^4(1-x^5)+x^{12}>0;$$

ja $x\ge 1$, tad

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=(x^8+1)(x^4-x)+1>0.$$

Līdz ar to nevienādība ir pierādīta.

Uzdevumi

Pierādīt nevienādības (46. - 48.).

46. $n! \geq 2^{n-1}$ naturālam n.

47. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! < (n+1)!$.

48. $\sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$,ja a>b>0 un n> 1.

49. Kas lielāks — $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ vai $\frac{x^2-y^2}{x-y}$, ja x un y ir pozitīvi skaitļi?

50. Pozitīvi a, b, c. A, B, C atbilst nosacījumam $a+A=b+B=c+C=k$. Pierādīt, ka

$$aB+bC+cA < k^2.$$

Pierādīt nevienādības (51. - 61.).

51. $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$, ja $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ un b, d ir pozitīvi skaitļi.

52. $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$, ja $a \geq 0$, $b \geq 0$.

53. $(a^2 - b^2) \geq (a-b)^4$, ja $ab \geq 0$ un $(a^2 - b^2) \leq (a-b)^4$, ja $ab \leq 0$.

54. $\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}$, ja $a > b > 0$.

55. $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} < 2^{a+b+c+1} + 1$, ja $a, b, c > 0$.

56. $\frac{a+bk}{b} \leq \frac{c+dk}{d}$, ja $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

57. $\frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}$, ja $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

58. $a < \frac{a+b}{2} < b$, ja $a < b$.

59. $(ac + bd) \leq 1$, ja $a^2 + b^2 = 1$ un $c^2 + d^2 = 1$.

60. $-3 \leq \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} \leq 3$ visām iespējamām x vērtībām.

61. $y = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-5)^2} \geq 4$.

2. NEVIENĀDĪBAS PASTIPRINĀŠANAS METODE

Bieži vien vispārīgāku apgalvojumu ir vieglāk pierādīt nekā konkrētu. Tā var būta arī nevienādību pierādīšana. Metodes būtība ir šāda: lai pierādītu, ka A < *B*, atrod tādu lielumu C, kas ir lielāks par A - A < *C*, un pierāda, ka *C* ≤ *B*. Ja tas izdodas, tad nevienādība ir pierādīta.

2.1. CITU NEVIENĀDĪBU IZMANTOŠANA NEVIENĀDĪBAS PASTIPRINĀŠANAS METODĒ

Lieluma *C* atrašanai var būt dažādas pieejas. Viena no tām ir citu nevienādību izmantošana.

2.1.1. Reizēm ir pietiekami, ja izmanto kādu acīm redzami pareizu vai arī no dotajiem faktiem izrietošu nevienādību.

1.piemērs Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru $x > \sqrt{2}$ un $y > \sqrt{2}$ ir spēkā nevienādība

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2.$$

Risinājums. Ievērojam, ka

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = \frac{x^5 + y^5}{x + y}.$$

Tā kā $x > \sqrt{2}$ un $y > \sqrt{2}$, secinām, ka $\frac{x^5 + y^5}{x + y} > \frac{2(x^3 + y^3)}{x + y}$.

Taču $\frac{2(x^3 + y^3)}{x + y} = 2(x^2 - xy + y^2) \geq x^2 + y^2$, un tas nozīmē, ka nevienādība ir pierādīta.

Šajā gadījumā $C = \frac{2(x^3 + y^3)}{x + y}$.

2.piemērs Pozitīvi skaitļi *a, b, c* apmierina nevienādības $a \geq b \geq c$ *un* $a+b+c \leq 1$.

Pierādīt, ka $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

Risinājums. Izmantojam doto nevienādību $a + b + c \leq 1$.

Kāpinot nevienādības abas puses kvadrātā, iegūstam

$$1^2 \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

bet, ņemot vērā, ka $a \geq b \geq c$,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2 = a^2 + 3b^2 + 5c^2.$$

Tas arī bija jāpierāda.

2.1.2. Bieži tiek lietotas arī klasiskās nevienādības.

3.piemērs Pierādīt, ka attiecībā uz visām pozitīvajām *x* vērtībām ir spēkā nevienādība

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

Risinājums. Izmantojot nevienādības kreisajai pusei sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam nevienādību

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}\left(\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}\right)}.$$

Taču

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}\left(\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}\right)} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}},$$

kur iepriekš minētā sakarībā tiek izmantota skaitļa 2 pakāpei. No pēdējām divām nevienādībām izriet pierādāmā.

4.piemērs Pierādīt, ka

$$2(a^2 + b^2) + c^2 + d^2 \geq 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}\right),$$

ja $ab \geq 0$ un $cd \geq 0$.

Risinājums. Pēc sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko ir spēkā nevienādība

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = 4\sqrt{abcd}.$$

Saskaitot šo nevienādību ar acīm redzamu nevienādību $a^2 + b^2 \geq 2ab$, iegūstam

$$2a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab + 4\sqrt{abcd}$$

un tālāk

$$2\left(a^2+b^2\right)+c^2+d^2 \ge 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}\right).$$

Uzdevumi

1. Doti pozitīvi skaitļi a, *b, c* un *d,* kuriem $a\ge b\ge c\ge d$ *un* $a+b+c+d\le 1$. Pierādīt, ka

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2\le 1.$$

2. Doti pozitīvi skaitļi *a, b, c* un *d,* kuriem $a\le b\le c\le d$ *un* $a+b+c+d\ge 1$. Pierādīt, ka

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2\ge 1.$$

3. Reāli skaitļi *A, B* un C ietilpst intervālā [0; l]. Pierādīt, ka

$$\frac{A}{1+BC}+\frac{B}{1+AC}+\frac{C}{1+AB}\le 2.$$

4. Pierādīt, ka *n* pozitīviem skaitļiem (tādiem, kuru reizinājums ir vienāds ar l) kvadrātu summa ir lielāka vai vienāda ar *n.*

5. Skaitļi *a, b, c un d* ir tādi, ka to reizinājums ir vienāds ar l. Pierādīt, ka

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd>10.$$

6. Zināms, ka $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$. Pierādīt, ka

$$a^3+b^3+c^3\ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}.$$

7. Pierādīt, ka attiecībā uz naturāliem m un n ir spēkā nevienādība

$$\sqrt[m+n]{m^n n^m}\le\frac{m+n}{2}.$$

8. Pierādīt, ka jebkuriem reāliem pozitīviem *a* un *b* ir spēkā nevienādība $a^a+b^b>ab.$

9. Pierādīt, ka $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c).$

10. Pierādīt, ka $\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\ge\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}$.

11. Skaitļi $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1$ un c_2 apmierina nevienādības $a_1a_2>0,\ a_1c_1\ge b_1^2$ un $a_2c_2\ge b_2^2.$ Pierādīt, ka $(a_1+a_2)(c_1+c_2)\ge(b_1+b_2)^2.$

12. Pierādīt, ka šauram leņķim α ir spēkā nevienādība

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5.$$

13. Pierādīt, ka attiecībā uz skaitļiem *a* un *b,* kas ir atšķirīgi no 0, ir spēkā nevienādība

$$(a+b)^{100}<2^{100}(a^{100}+b^{100}).$$

14. Pierādīt, ka attiecībā uz pozitīviem $a_1, a_2, \dots a_{2k},$ kas nav mazāki par l, ir spēkā nevienādība

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\dots+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2}\ge k\sqrt{2}.$$

15. Doti tādi leņķi α un β, ka $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ un $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta}\ge 9.$$

16. α un β ir dažādi šauri leņķi, bet *k* - naturāls skaitlis. Pierādīt, ka

$$\left|\frac{\cos k\alpha\cdot\cos\beta-\cos k\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta}\right|\le k^2-1.$$

2.2. IZTEIKSMES NOVĒRTĒŠANA UN AIZVIETOŠANA

Piemēros ir parādīts, kā nevienādības pastiprināšanas metode kāda izteiksme tiek novērtēta un aizvietota ar citu izteiksmi, kura par iepriekšējo ir vai nu lielāka, vai arī mazāka. Parasti tiek novērtēts katrs summas vai reizinājuma loceklis vai arī locekļu grupas.

5.piemērs Pierādīt, ka attiecībā uz visiem veseliem $n > 1$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1.$$

Risinājums. Ja aizvietojam izteiksmes visus locekļus, izņemot pirmo, ar vismazāko no tiem — $\frac{1}{n^2}$ (tiek aizvietoti n^2-n saskaitāmie), iegūstam

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1.$$

Tas arī bija jāpierāda.

6.piemērs Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru naturālu skaitli n, kas ir lielāks par 2, ir spēkā nevienādība $(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)^2>n^n$.

Risinājums. Apskatīsim reizinājumus

$$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ ...,\ (n-1)\cdot 2,\ n\cdot 1.$$

Katrs no reizinājumiem, sākot ar otro un beidzot ar priekšpēdējo, ir lielāki par pirmo un pēdējo reizinājumu. Ja $n - k > 1$, tad

$$(k+1)(n-k)=k(n-k)+(n-k)>k\cdot 1+(n-k)=n.$$

No šejienes izriet, ka visu izrakstīto reizinājumu reizinājums Ja $n > 2$, ir lielāks par n^n. Tas arī bija jāpierāda.

7.piemērs Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Risinājums. Tā kā visi nevienādības locekļi ir pozitīvi, tad nevienādība ir ekvivalenta ar

$$\frac{1}{4n}\leq\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}<\frac{1}{2n}.$$

Pierādām katru nevienādību atsevišķi:

a) $$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\geq\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2-1}{(2n)^2}=$$

$$=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{4^2}\cdot\frac{(5-1)(5+1)}{6^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-2)(2n)}{(2n)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{6\cdot 6}\cdot...\cdot\frac{(2n-2)(2n)}{2n\cdot 2n}=\frac{1}{4n};$$

b) $$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}<\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1}=$$

$$=\frac{1^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}.$$

Nevienādība ir pierādīta.

8.piemērs Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4},$$

ja $n\in N$.

Risinājums. Ievērojam, ka

$$\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4k^2+4k+1}<\frac{1}{4k^2+4k}=\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+4}.$$

Ievietojot šajā nevienādībā $k = 1,2,..., n$, iegūstam

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4\cdot 1}-\frac{1}{4\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4(n+1)}=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n+4}<\frac{1}{4}.$$
Tas arī bija jāpierāda.

Uzdevumi

17. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru pozitīvu veselu skaitli n ir spēkā nevienādība
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$
18. Pierādīt, ka attiecībā uz veselu skaitli $n > 1$ ir spēkā nevienādība
$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n<n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$
19. Pierādīt, ka attiecībā uz pozitīviem a un b ir spēkā nevienādība
$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$
20. Pierādīt, ka attiecībā uz pozitīviem a, b un c ir spēkā nevienādība
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{3}{a+b+c}.$$
21. Reāli skaitļi x *un* y atbilst nosacījumiem $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Pierādīt, ka
$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\le 1.$$

Pierādīt nevienādības (22. - 26.).

22. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<3.$

23. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$

24. $\sqrt{n}<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}<\sqrt{2n}.$

25. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$

26. $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\ge\sqrt{n}.$

27. Dots, ka x_1 , x_2,..., x_n ir dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki par 1. Pierādīt, ka
$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{3}{4}.$$
28. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru veselu $n > 1$ ir spēkā nevienādība
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}.$$
29. Pierādīt, ka summa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ pietiekami lieliem n ir lielāka par jebkuru iepriekš dotu skaitli N.

30. Pierādīt, ka attiecībā uz visiem $a, b, c\in[0,1]$ ir spēkā
$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1.$$
31. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru skaitli n
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

32. Dilstoša pozitīvu skaitļu virkne x_n ir tāda, ka attiecībā uz jebkuru naturālu skaitli n

$$x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n}\le 1.$$

Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru naturālu n

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}\le 3.$$

33. Pierādīt, ka attiecībā uz skaitļiem a_i un b_i, kuriem $a_1<a_2<\ldots<a_n$ un $b_1<b_2<\ldots<b_n$ $(n \ge 2)$, ir spēkā nevienādība

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)<n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n).$$

2.3. SASKAITĀMO VAI REIZINĀMO SKAITA MAINĪŠANA

Reizēm vēlamo efektu var sasniegt, summā vai reizinājumā pievienojot vai atmetot kādu locekli.

__**9.piemērs**__ Dots, ka $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ *un* $\alpha, \beta, \gamma>0$. Pierādīt, ka

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Risinājums. Veicam šādus pārveidojumus:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]\le$$

$$\le\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Pārveidojumu beigu daļā būtiski ir izmantots tas, ka izteiksmes vērtība, atmetot nenegatīvu mazinātāju, palielinās.

__**10.piemērs**__ Doti atšķirīgu naturālu skaitļu kvadrāti $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$. Pierādīt, ka

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)>\frac{1}{2}.$$

Risinājums. Ja vislielākais no naturāliem skaitļiem ir m, tad

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)\ge\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m^2}\right),$$

jo šīs nevienādības labajā pusē ir pievienoti reizinātāji, kas ir mazāki par 1. Izskaitļosim šīs nevienādības labās puses vērtību:

$$\frac{(1\cdot 3)(2\cdot 4)(3\cdot 5)\ldots((m-1)(m+1))}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot m^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(m-1)^2 m(m+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot m^2}=\frac{m+1}{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2}.$$

Līdz ar to nevienādība ir pierādīta.

Uzdevumi

34. Vai eksistē tāds *x*, ka vienlaikus ir spēkā nevienādības

$$0<\sin x<0{,}1 \text{ un } \sin 3x>\frac{1}{3}?$$

35. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir spēkā

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

36. Pierādīt, ka

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\geq\frac{1}{3}, \text{ ja } x, y\geq 0 \text{ un } x+y=0{,}5.$$

37. Pierādīt, ka

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\geq\frac{1}{3}, \text{ ja } x, y, z\geq 0 \text{ un } x+y+z=0{,}5.$$

38. Pierādīt, ka

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\frac{1-x_3}{1+x_3}\cdot\frac{1-x_4}{1+x_4}\geq\frac{1}{3}, \text{ ja } x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0 \text{ un } x_1+x_2+x_3+x_4=0{,}5.$$

39. Doti 100 tādi skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, kuru summa ir vienāda ar 1 un kuriem $k\,|x_{k+1}-x_k|<\frac{1}{50}$.

40. Pierādīt, ka no šiem 100 skaitļiem var izvēlēties 50 skaitļus tā, lai to summa atšķirtos no 0,5 ne vairāk kā par 0,01.

3. MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODES IZMANTOŠANA

Dažas nevienādības var tikt pierādītas ar matemātiskās indukcijas metodes palīdzību.

3.1. INDUKCIJAS METODE NEVIENĀDĪBAS PIERĀDĪŠANAI

Aplūkosim raksturīgākos piemērus, kuros indukcijas metode tiek izmantota pierādāmajai nevienādībai vai arī nevienādībai, kas ir ekvivalenta pierādāmajai.

1.piemērs Pierādīt, ka attiecībā uz veselu $n\geq 2$ un $|x|<1$ ir spēkā nevienādība

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

Risinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi. Ja $n=2$, tad nevienādība ir acīm redzami pareiza. Ja pieņem, ka nevienādība ir spēkā attiecībā uz kādu *n*, tad

$$(1-x)^{n+1}+(1+x)^{n+1}\leq$$

$$\leq((1-x)^n+(1+x)^n)((1-x)+(1+x))<2^n\cdot 2=2^{n+1}.$$

Tas nozīmē, ka nevienādība ir spēkā visiem *n*.

2.piemērs Pozitīvu skaitļu virkne $a_1, a_2, \dots$ atbilst nevienādībai $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$, $n \in N$.

Pierādīt, ka attiecībā uz katru ne N ir spēkā $a_n < \frac{1}{n}$.

Risinājums. Ja $n=l$, tad $a_1^2 \le a_1 - a_2 < a_1$ vai $a_1 < 1$, turklāt

$$a_2 \le a_1 - a_1^2 = \frac{1}{4} - \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

t. i., $a_n < \frac{1}{n}$, ja $n = 2$.

Pieņemsim, ka nevienādība ir spēkā attiecībā uz kādu $n \ge 2$. Pierādīsim, ka nevienādība ir spēkā attiecībā uz $n + 1$. Tā kā funkcijai $f(x) = x - x^2$ ir augoša intervālā [0; 0,5] un $a_n < \frac{1}{n}$, tad

$$a_{n+1} \le f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

3.piemērs Pierādīt, ka $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, ja n ir naturāls skaitlis, kas lielāks par 2.

Risinājums. Abas nevienādības puses kāpinām pakāpē $n(n + l)$ un iegūstam evienādību

$$(n + 1)^n < n^{n+1},$$

kas ir ekvivalenta ar pierādāmo nevienādību. Savukārt šo nevienādību aizstāsim ar

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$$

vai

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Otro nevienādību nav grūti pierādīt ar matemātiskās indukcijas metodi. Ja $n = 3$, tad nevienādība ir acīm redzama, jo

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3.$$

Pieņemsim, ka attiecībā uz kaut kādu skaitli n ir spēkā $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$
Tad

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) <$$

$$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n + \frac{n}{n+1} < n+1.$$

Tātad ir spēkā nevienādība

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n,$$

bet tas nozīmē, ka ir spēkā arī tai ekvivalentā nevienādība

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

attiecībā uz jebkuru naturālu $n > 2$.

Nākamajā piemērā ir izmantota pavisam cita indukcijas shēma nekā iepriekšējos piemēros.

4.piemērs Funkcija f(x) atbilst sakarībai

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad (1)$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja x=y. Pierādīt, ka

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}, \qquad (2)$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Risinājums. Ja n = l, tad (2) ir acīm redzama; ja n = 2, tad (2) izriet no (l).

A. Pieņemsim, ka (2) ir pareiza, ja $n = k$, tas ir, pieņemsim, ka

$$f\left(\frac{t_1+t_2+...+t_k}{t}\right) \geq \frac{f(t_1)+f(t_2)+...+f(t_k)}{t}, \qquad (3)$$

un vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $t_1 = t_2 = ... = t_n$.

Pierādīsim (2), ja $n = 2k$. Tiešām

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}+...+x_{2k}}{2k}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1+...+x_k}{k}+\frac{x_{k+1}+...+x_{2k}}{k}}{2}\right) \geq$$

$$\geq \left(f\left(\frac{x_1+...+x_k}{k}\right)+f\left(\frac{x_{k+1}+...+x_{2k}}{k}\right)\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k}+\frac{f(x_{k+1})+...+f(x_{2k})}{k}\right) =$$

$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)+f(x_{k+1})+...+f(x_{2k})}{2k}.$$

Pārveidojumos ir izmantota (2) pareizība: $n = 2$ un $n = k$. Turklāt abu nevienādības zīmju ≥ vietā vienādība pastāv tad un tikai tad, ja

$$\frac{x_1+...+x_k}{k} = \frac{x_{k+1}+...+x_{2k}}{k} \text{ un } x_1 = ... = x_k,\ x_{k+1} = ... = x_{2k},$$

t. i., tad un tikai tad, ja x_1, = ... = x_{2k}. No punktiem A un B izriet, ka (2) ir pareiza, ja n=l, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^k, ... Tomēr bez skaitļa 2 pakāpēm ir arī daudzas citas n vērtības. Tām (2) pareizību pierāda ar "indukciju uz leju".

C. Pieņemsim, ka (2) ir pareiza, ja $n = k$, t. i., ka ir pareiza (3). Pierādīsim, ka (2) ir pareiza arī tad, ja $n = k$ -1, t. i., ka

$$f\left(\frac{x_1+...+x_{k-1}}{k-1}\right) \geq \frac{f(x_1)+...+f(x_{k-1})}{k-1}, \qquad (4)$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1 =... = x_{k-1}$. Pēc pieņēmuma nevienādība (3) patiešām ir pareiza visām $t_1, t_2, ..., t_k$ vērtībām, tātad arī tad, ja

$$t_1 = x_1, ..., t_{k-1} = x_{k-1},\ t_k = \frac{t_1+...+t_{k-1}}{k-1}$$

Ievietojot šīs vērtības nevienādība (3), iegūstam

$$f\left(\frac{x_1+...+x_{k-1}+\frac{x_1+...+x_{k-1}}{k-1}}{k}\right) \geq \frac{f(x_1)+...+f(x_{k-1})+f\left(\frac{x_1+...+x_{k-1}}{k-1}\right)}{k},$$

vai

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k-1}}{k-1}\right) \geq \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_{k-1})+f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k-1}}{k-1}\right)}{k},$$

kas ir ekvivalenta ar (4), turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja

$$x_1=\ldots=x_{k-1}=\frac{x_1+\ldots+x_{k-1}}{k-1}.$$

To arī vajadzēja pierādīt. Punkti A, B, C pierāda (2).

Uzdevumi

33. Pierādīt, ka attiecībā uz veselu skaitli $n > 4$ ir spēkā nevienādība $2^n > n^2$.

34. Pierādīt Bernulli nevienādību $(1+a)^n \geq 1+an$, ja $a > -1$.

35. Pierādīt, ka $\sin(x_1+\ldots+x_n) \leq \sin x_1 + \ldots + \sin x_n$, Ja $0 < x_1+\ldots+x_n < \pi$ un $0 < x_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

36. Pierādīt, ka $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} > 1$.

37. Pierādīt, ka katram veselam $n > 6$ ir spēkā nevienādība

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

38. Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem a_k un b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ir spēkā nevienādība

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{a_k+b_k} \leq \frac{AB}{A+B}, \text{ kur } A=\sum_{k=1}^{n} a_k,\ B=\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

39. Pierādīt, ka

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

ja $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ un $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0{,}5$.

40. Zināms, ka $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir pozitīvu skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutācija. Pierādīt, ka

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

41. Pierādīt, ka

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geq 0{,}5.$$

ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir nenegatīvi skaitļi, kuriem $x_1+x_2+\ldots+x_n \leq 0{,}5$.

3.2. INDUKCIJAS METODES APVIENOŠANA AR NEVIENĀDĪBAS PASTIPRINĀŠANAS METODI

Ne jau vienmēr, darbojoties pēc iepriekšējos piemēros parādītajām shēmām, izdodas pierādīt prasīto nevienādību. Rodas nepieciešamība mainīt pierādījumā izmantoto metodi. Ļoti bieži vēlamo efektu var sasniegt, apvienojot matemātiskās indukcijas un nevienādības pastiprināšanas metodes. Apskatīsim piemērus, kur šīs metodes ir apvienotas.

5.piemērs Dots, ka $x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{2}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Pierādīt, ka

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geq 0{,}5.$$

Risinājums. Pierādīsim ar matemātisko indukciju vispārīgāku nevienādību:

Ja $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$,

tad $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\geq 1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

Ja n=l, tad l - $x_1 \geq$ l - x_1, ir patiesa nevienādība. Pieņemsim, ka

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k)\geq 1-(x_1+x_2+\ldots+x_k), \qquad (1)$$

un pierādīsim

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k)(1-x_{k+1})\geq 1-(x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}).$$

Tiešām no (l) izriet, ka

$$\begin{aligned}&(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k)(1-x_{k+1})\geq\\ &\geq(1-(x_1+x_2+\ldots+x_k))(1-x_{k+1})=\\ &=1-(x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1})+x_{k+1}(x_1+\ldots+x_k)>\\ &>1-(x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}).\end{aligned}$$

Tas arī bija jāpierāda.

6.piemērs Pierādīt, ka attiecībā uz katru naturālu skaitli *n* ir spēkā

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3.$$

Risinājums. Mēs pierādīsim vairāk, nekā prasīts, proti, to, ka attiecībā uz jebkuru skaitli $m\geq 2$ ir spēkā nevienādība

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<m+1.$$

Ja $m = n$, ir skaidrs, ka $\sqrt{n}<n+1$.

Ja $m < n$, pieņemsim, ka

$$\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}<m+2.$$

Reizinot ar m un velkot kvadrātsakni, iegūstam

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}}<\sqrt{m(m+2)}<m+1.$$

Tas arī bija jāpierāda.

Tātad

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}<3.$$

7.piemērs Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}<\frac{1}{4}.$$

Risinājums. Šo nevienādību nevar pierādīt ar tādu pašu metodi, kāda lietota citu līdzīgu piemēru risināšanā, jo nevienādības kreisā puse ir monotoni augošā, bet labā puse ir konstanta. Nevienādības pierādījumā izmantosim vienādību

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

kuru viegli var pierādīt ar matemātisko indukciju. Acīm redzami, ka

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}<\frac{1}{4}.$$

Uzdevumi

10. Pierādīt, ka katram veselam pozitīvām *n* ir spēkā nevienādība

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

11. Pierādīt, ka

$$\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)<\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n,$$

ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir leņķi, kas ietilpst intervālā *[O; π]*, un *n* ir patvaļīgs naturāls skaitlis, kuram $n > 1$.

12. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

4. MATEMĀTISKĀS ANALĪZES METOŽU IZMANTOŠANA

4.1. FUNKCIJU ATVASINĀJUMI NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Matemātiskās analīzes metodes nevienādību pierādīšana bieži balstās uz funkciju atvasinājumiem un ar tiem saistītām īpašībām.

4.1.1. Vairākos gadījumos ir pilnīgi pietiekami tikai noskaidrot kādas funkcijas augšanas un dilšanas intervālus, lai pierādāmā nevienādība kļūtu acīm redzama. Parasti šai nolūkā tiek izmantots funkcijas pirmās kārtas atvasinājums.

1.piemērs Pierādīt, ka $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\mathrm{tg}\beta}{\beta}$, ja $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Risinājums. Apskatīsim funkciju $f(\alpha)=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}$. Tās atvasinājums

$$f'(\alpha)=\frac{x-\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot x^2}$$

ir lielāks par nulli, ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, jo šajā intervālā $x > \sin x$. Tātad funkcija *f* ir augoša šajā intervālā, un līdz ar to pierādāmā nevienādība

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\mathrm{tg}\beta}{\beta}$$

kļūst acīm redzami pareiza.

2.piemērs Dots, ka $0<x_1<x_2<1$. Pierādīt, ka

$$x_1-x_2>2\sqrt{1-x_2}-2\sqrt{1-x_1}.$$

Risinājums. Ievērojam, ka dotā nevienādība ir ekvivalenta ar nevienādību

$$x_1+2\sqrt{1-x_1}>x_2+2\sqrt{1-x_2}. \quad (1)$$

Aplūkojam funkciju $f(x)=x+2\sqrt{1-x}$ apgabala]0; 1[. Ja pierādīsim, ka *f(x)* šajā apgabalā ir monotoni dilstoša, tad nevienādība $f(x_1)>f(x_2)$ būs ekvivalenta ar (l). Tātad jāpierāda, *ka f '(x) < 0.* Tiešām

$$f'(x)=1+\frac{2}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}<0.$$

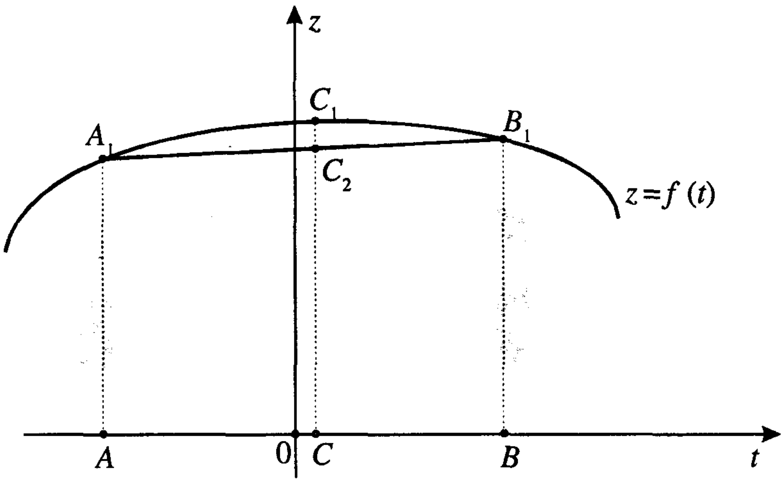
Nākamais piemērs tiks plaši izmantots 5. nodaļā.

3.piemērs Ja funkcijai z = *f(t)* kādā intervālā eksistē otrās kārtas atvasinājums un šajā intervālā *f '' (t) < O,* tad visiem *x* un v, kas ietilpst šajā intervālā,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad (1)$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja x = y.

Ja x = y, tad (l) pastāv vienādība.
Pieņemsim, ka x < y. Atzīmēsim Dekarta koordinātu plaknē *Otz* punktus *A* (*x*;0), *B* (y; 0), $C(\frac{x+y}{2};0)$, $A_1(x;f(x))$, $B_1(y;f(y))$, $C_1(\frac{x+y}{2};f(\frac{x+y}{2}))$. (sk. zīm .)



Ja aplūkojama intervālā *f ''(t)* < 0, tad šajā intervālā *f '(t)* ir monotoni dilstoša funkcija. Bet *f '(t)* ir funkcijas *z=f(t)* grafika pieskares virziena koeficients punktā *(t; f (t)).* Tātad šīs pieskares veidotais leņķis ar *Ot* ass pozitīvo virzienu samazinās, *t* augot, t. i., pieskare griežas pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Ģeometriski ir acīm redzams, ka tad funkcijas z *=f(t)* grafiks vaļējā intervālā *]AB[* atrodas virs hordas $[A_1B_1]$.

Apzīmēsim $C_2=[A_1B_1]\cap[CC_1]$. Tā ka grafiks atrodas virs hordas, tad

$$|CC_1|>|CC_2|.$$

Tā kā AA_1B_1B ir trapece, tad $|CC_2|$ — tās viduslīnija, tātad

$$|CC_2|=\frac{|AA_1|+|BB_1|}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

bet

$$|CC_1|=f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Tāpēc no $|CC_1|>|CC_2|$. izriet (l).
Pierādījumā izmantots tas, *ka f (t) > 0 (ja f(x)* < O, tad $|AA_1|=-f(x)$ utt.). Līdzīgā veidā var pierādīt (l) pārējos gadījumos.

4.1.2. Nevienādību pierādīšanā izmanto arī to, ka funkcijas, kurām eksistē atvasinājums visā definīcijas apgabalā, savu maksimumu vai minimumu var sasniegt tikai punktos, kuros to atvasinājums ir 0, vai arī definīcijas apgabala robežpunktos.

4.piemērs Pierādīt, ka $e^x\ge x+1$.

Risinājums. Aplūkosim funkciju $f(x)=e^x-x-1$. Tās atvasinājums ir $f'(x)=e^x-1$. Ja *x<0, tad f* '(x)<0; ja x=0, tad *f* '(x)=0, ja x>0, tad *f* '(x)>0. Tātad punktā x=0 funkcijai *f(x)* ir minimums, tāpēc katram *x* ir spēkā

$$f(x)\ge f(0)=0,\ e^x-x-1\ge 0 \text{ vai } e^x\ge x+1.$$

Tas arī bija jāpierāda.

Uzdevumi

1. Pierādīt, ka attiecībā uz leņķiem *α* un *β*, kuriem $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, ir spēkā nevienādības

a) $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$,

b) $\alpha-\operatorname{tg}\alpha<\beta-\operatorname{tg}\beta$.

2. Pierādīt, ka leņķiem α un β, kuriem $0<\alpha<\beta\le\frac{\pi}{2}$, ir spēkā nevienādība $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$.

3. Zināms, ka $0\le a\le 1$ un $0\le x\le\pi$. Pierādīt, ka

$$(2a-1)\sin x+(1-a)\sin(1-a)x\ge 0.$$

4. Pierādīt, ka $\frac{m-n}{m}<\ln\frac{m}{n}<\frac{m-n}{n}$, ja $0<n<m$.

5. Pierādīt, ka visiem veseliem $k\ge 1$ un reāliem x ir spēkā nevienādība

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^j\frac{x^j}{j!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}\ge 0.$$

6. Skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ietilpst intervālā [a; b], kur $0<a<b$. Pierādīt nevienādību

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\le\frac{(a+b)^2}{4ab}\cdot n^2.$$

4.2. INTEGRĀĻI NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Parādīsim arī dažus integrāļu izmantošanas piemērus.

5.piemērs Pierādīt, ka fiksētiem $a_1, a_2, \ldots, a_{31}$ un mainīgajam x summa

$$\cos 32x+a_{31}\cos 31x+\ldots+a_2\cos 2x+a_1\cos x$$

pieņem kā pozitīvas, tā arī negatīvas vērtības.

Risinājums. Apzīmēsim doto funkciju ar $f(x)$. Tad $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0.$ Tātad, ja funkcija pieņem pozitīvas vērtības, tad tā pieņem arī negatīvas vērtības (no f nepārtrauktības). Atliek parādīt, ka nav $f(x)\equiv 0$.

6.piemērs Pierādīt, ka $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

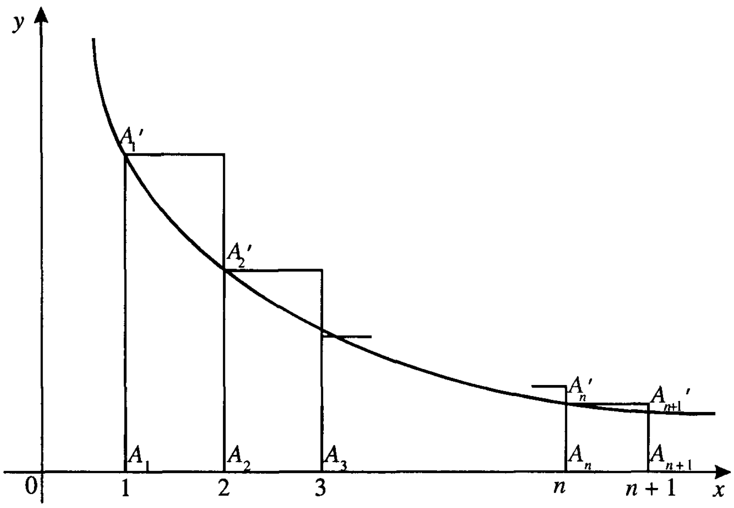
Risinājums. Aplūkosim funkciju $y=\frac{1}{x}$ apgabalā no x = 1 līdz $x=n+1$(sk. zīm.).
Acīm redzami

$$|A_1A_1'|=1,\ |A_2A_2'|=\frac{1}{2},\ |A_3A_3'|=\frac{1}{3},\ \ldots|A_nA_n'|=\frac{1}{n}.$$

Konstruējam taisnstūri, kā parādīts zīmējumā. Viegli saskatīt, ka konstruēto taisnstūru laukumi ir $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}$.

Taču taisnstūru laukumu summa ir lielāka par laukumu, kas atrodas zem $y=\frac{1}{x}$ grafika robežās no x = 1 līdz x = n + 1, bet šis laukums ir $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$.
Tātad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{n+1}=\ln(n+1).$$



Uzdevumi

Pierādīt nevienādības (7. - 10.)

7. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1).$

8. $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$, ja $x>0$.

9. $\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, jebkuram veselam n.

10. $x_2^{\frac{1}{n}}-x_1^{\frac{1}{n}}\le(x_2-\alpha)^{\frac{1}{n}}-(x_1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$, ja $0\le\alpha\le x_1\le x_2$, ja n ir vesels pozitīvs skaitlis.

5. NODAĻA. NEVIENĀDĪBAS, KURU PIERĀDĪJUMOS IZMANTO CITAS NEVIENĀDĪBAS. VIENKĀRŠĀKIE GADĪJUMI.

Šī paragrāfa metodes nav būtiski nodalāms no citos paragrāfos minētajām un parasti tiek lietotas kopā ar citām metodēm. (Sk. 2.nod. 4 piemēru vai 3. nod. 2. piemēru.) Tomēr visos šajos gadījumos nevienādības pierādīšanas pamatideja slēpjas citur, un citas nevienādības izmantošana ir tikai palīglīdzeklis. Šajā paragrāfā mēs aplūkosim piemērus, kuros citas - piemērotas nevienādības izmantošana ir risinājuma būtiskākā daļa.

Pievērsīsimies diviem tipiskākajiem gadījumiem.

5.1. VAIRĀKU NEVIENĀDĪBU SASKAITĪŠANA VAI REIZINĀŠANA

Šī metode balstās uz vairāku nevienādību saskaitīšanu vai reizināšanu pēc šādiem likumiem:

ja $a<b$ un $c<d$, tad $a+c<b+d$;

ja $0<a<b$ un $0<c<d$, tad $0<ac<bd$.

Atšķirties var vienīgi šo saskaitāmo vai reizināmo nevienādību izvēle.

5.1.1. Visbiežāk par saskaitāmajām vai reizināmajām nevienādībām izvēlas no dotajiem faktiem izrietošas vai arī citas acīm redzamas nevienādības.

1.piemērs. Pierādīt nevienādību

$$a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+ac+bc),$$

ja a, b, c ir patvaļīga trijstūra malu garumi.

Risinājums. Tā kā $a>|b-c|$, $b>|a-c|$, $c>|a-b|$, tad no dotā izriet, ka

$$a^2>(b-c)^2=b^2-2bc+c^2,$$
$$b^2>(a-c)^2=a^2-2ac+c^2,$$
$$c^2>(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam pierādāmo nevienādību.

2.piemērs. Pierādīt, ka attiecībā uz visiem A, B, C>0 ir spēkā

$$2^{A+B}+2^{B+C}+2^{C+A}<2^{A+B+C}+1.$$

Risinājums. Ir pietiekami, ja saskaita četras acīm redzamas nevienādības:

$$(2^A-1)(2^B-1)(2^C-1)>0,$$
$$(2^A-1)(2^B-1)(2^C+1)>0,$$
$$(2^A-1)(2^B+1)(2^C-1)>0,$$
$$(2^A+1)(2^B-1)(2^C-1)>0.$$

3.piemērs. Doti pozitīvi skaitļi a, b, c un d. Pierādīt, ka starp nevienādībām

$$a+b<c+d, \qquad (1)$$
$$(a+b)(c+d)<ab+cd, \qquad (2)$$
$$(a+b)cd<ab(c+d) \qquad (3)$$

kaut viena ir nepareiza.

Risinājums. Sareizinot nevienādības (1) un (2), iegūstam

$$(a+d)^2<ab+cd, \text{ bet } (a+b)^2 \ge 4ab.$$

Tātad

$$ab+cd \ge 4ab, \text{ tas ir, } cd \ge 3ab.$$

Sareizinot (2) un (3), iegūstam

$$ab(ab+cd)>(a+b)^2cd \ge 4abcd,$$

no kurienes

$$ab+cd>4cd, \text{ tas ir } ab>3cd.$$

Vienlaikus jābūt $ab>3cd$ un $cd>3ab$. Tā ir pretruna.

4.piemērs. Polinoms $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ atbilst šādai sakarībai: ja $|x| \le 1$, tad $|P(x)| \le 1$. Pierādīt, ka $|a| \le 8$.

Risinājums. No dotā izriet, ka arī $|P(1)| \le 1$, $|P(-1)| \le 1$, $\left|P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \le 1$, $\left|P-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \le 1$, $|P(0)| \le 1$.

Tātad

$$|a+b+c+d+e| \le 1, \qquad (1)$$
$$|a-b+c-d+e| \le 1, \qquad (2)$$
$$\left|\frac{a}{4}+\frac{b}{2\sqrt{2}}+\frac{c}{2}+\frac{d}{\sqrt{2}}+e\right| \le 1, \qquad (3)$$
$$\left|\frac{a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{2}}+\frac{c}{2}-\frac{d}{\sqrt{2}}+e\right| \le 1, \qquad (4)$$
$$|e| \le 1. \qquad (5)$$

Saskaitot (1) ar (2), iegūstam

$$|a+b+c+d+e+a-b+c-d+e| \le |a+b+c+d+e|+|a-b+c-d+e| \le 2 \qquad \text{vai}$$
$$|a+c+e| \le 1. \qquad (6)$$

Līdzīgi no (3) un (4) iegūstam

$$\left|\frac{a}{2}+c+2e\right|\leq 2. \qquad (7)$$

No (6) un (7) izriet, ka

$$\left|\frac{a}{2}+c+2e-a-c-e\right|\leq\left|\frac{a}{2}+c+2e\right|+|a+c+e|\leq 3,$$

$$\left|\frac{a}{2}-e\right|\leq 3,$$

$$|a-2e|\leq 6. \qquad (8)$$

No (5) un (8) iegūstam

$|a-2e+2e|\leq|a-2e|+|2e|\leq 8.$

Šī nevienādība ir ekvivalenta ar pierādāmo nevienādību.

5.1.2. Ja pierādāmās nevienādības viena vai abas puses sastāv no saskaitāmajiem vai reizināmajiem, kuru skaits ir n, tad vispirms pierāda kādu citu nevienādību ar parametru i. Pēc tam, šo nevienādību summējot n reizes pa dažādiem i, iegūst pierādāmo nevienādību.

5.piemērs. Pierādīt nevienādību

$$1-\frac{1}{n+1}<\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{(n+1)\sqrt{n^2+3}}+\frac{2+\sqrt{n^2+2}}{(n+2)\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n\sqrt{n^2+n+2}}<1.$$

Ar algebriskiem pārveidojumiem viegli pierādīt, ka attiecībā uz $1\leq i\leq n$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{n+1}<\frac{i+\sqrt{n^2+i}}{(n+i)\sqrt{n^2+i+2}}<\frac{1}{n}.$$

Summējot priekš i = 1, 2, ..., n, iegūstam pierādāmo nevienādību.

6.piemērs. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru naturālu n ir spēkā nevienādība

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}.$$

Risinājums. Acīm redzami, ja $n\geq k$, tad $\sqrt{n}\geq\sqrt{k}$ vai $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}\geq 1$.

No šejienes, saskaitot iepriekšējo nevienādību priekš k=1, 2, ..., n, iegūstam

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\geq n.$$

Izdalot iegūto ar $\sqrt{n}$, iegūstam pierādāmo nevienādību.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem a, b un c nevar vienlaikus būt spēkā nevienādības

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\ b(1-c)>\frac{1}{4}\ \text{un}\ c(1-a)>\frac{1}{4}.$$

2. Četru pozitīvu skaitļu a, b, c un d summa ir vienāda ar 1. Pierādīt, ka

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<6.$$

3. Doti 25 skaitļi. Jebkuru četru skaitļu summa ir pozitīva. Pierādīt, ka visu skaitļu summa arī ir pozitīva.

4. Doti 1993 skaitļi. Jebkuru četru skaitļu summa ir pozitīva. Vai visu skaitļu summa ir pozitīva?

5. Pierādīt, ka daļa $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$ atrodas starp vismazāko un vislielāko no daļām

$$\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; ...; \frac{a_n}{b_n} \quad (b_k>0,\ k=1, 2, ..., n).$$

6. Kundze nodeva bagāžas glabātavā šādas mantas: dīvānu, čemodānu, portfeli, grozu, gleznu, kārbu un nelielu suni. Dīvāns svēra tikpat kā čemodāns un portfelis kopā un tikpat kā glezna, grozs un kārba kopā. Grozs, glezna un kārba svēra vienādi, un katrs no šiem priekšmetiem bija smagāks par suni. Kad izkrāva mantas, kundze paziņoja, ka suns ir cits. Pārbaudot izrādījās, ka suns ir smagāks par dīvānu, ja pie tā pieliek portfeli vai čemodānu. Pierādīt, ka kundzes pretenzijas bija pamatotas.

7. Attiecībā uz visām x vērtībām no intervāla [0;1] ir spēkā nevienādība $|ax^2+bx+c| \le 1$. Pierādīt, ka $|a|+|b|+|c| \le 17$.

8. Vai eksistē tādi reāli skaitļi a un b, lai katram $x \in [0;2\pi]$ funkcija f(x)=ax+b apmierinātu nevienādību

$$(f(x))^2 - \cos x \cdot f(x) < \frac{1}{4}\sin^2 x\ ?$$

9. Reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ietilpst intervālā [-1;1], turklāt šo skaitļu kubu summa ir nulle. Pierādīt, ka $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ nepārsniedz $\frac{n}{3}$.

10. Pierādīt, ka attiecībā uz katru naturālu n ir spēkā nevienādība

$$|\sin 1| + |\sin 2| + ... + |\sin(3n-1)| + |\sin 3n| > \frac{8n}{5}.$$

11. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru pozitīvu a un jebkuru veselu n>1 ir spēkā nevienādība

$$\frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{a + a^2 + \ldots + a^{n-1}} \ge \frac{n+1}{n-1}$$

un vienādība pastāv tad un tikai tad, ja a=1.

12. Skaitļi a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ietilpst intervālā [-1;1]. Pierādīt nevienādību

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i a_{i+1}} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i^2}, (a_{n+1} \equiv a_i).$$

13. Dots, ka $0<x<\frac{\pi}{6}$. Pierādīt, ka visiem naturāliem n

$$\sin x + \operatorname{tg}^2 x + \sin^3 x + ... + \operatorname{tg}^{2n} x < 1{,}4.$$

5.2. JENSENA NEVIENĀDĪBAS IZMANTOŠANA

No 3.nodaļas 4.piemēra un 4.nodaļas 3.piemēra izriet nākamās teorēmas.

1.teorēma. Ja kādā intervālā funkcijai f(t) eksistē otrās kārtas atvasinājums un f "(t)<0, tad šajā intervālā

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \ge \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Analogi tiek iegūta otrā teorēma.
2.teorēma. Ja kādā intervālā funkcijai f(t) eksistē otrās kārtas atvasinājums un f ''(t)>0, tad šajā intervālā

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Šīs teorēmas sauc par Jensena nevienādībām.
Ļoti daudzas nevienādības, kuras ar citiem līdzekļiem ir grūti vai pat neiespējami pierādīt, gandrīz automātiski izriet no 1. un 2. teorēmas.
7. piemērs. Pierādīt, ka n pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}.$$

Risinājums. Aplūkojam funkciju f(x) = lnx. Acīmredzami

f '(x) = $\frac{1}{x}$, f ''(x) = - $\frac{1}{x^2}$ <0.

Tāpēc, izmantojot 1.teorēmu, iegūstam

$$\ln\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \ge \frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n} = \frac{\ln(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)}{n} = \ln\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

vai arī $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

8.piemērs. α, β, γ ir leņķi intervālā $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Turklāt α + β + γ = π. Pierādīt, ka

tg α + tg β + tg γ ≥ $3\sqrt{3}$.

Risinājums. Aplūkojam funkciju f(x) = tg x. Acīmredzami

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ un } f''(x) = \frac{2tg\, x}{cos^2 x} > 0, \text{ ja } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Tāpēc, izmantojot 2. teorēmu, iegūstam

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{3} \ge tg\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$$

vai arī $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \ge 3tg\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$

9.piemērs. Dots, ka α + β + γ = π un α, β, γ>0. Pierādīt, ka

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$$

Risinājums. Nevienādība nav tādā formā, lai varētu uzreiz izmantot kādu no teorēmām. Pārveidosim nevienādību, lai tā saturētu summu:

$$\ln\sin\frac{\alpha}{2} + \ln\sin\frac{\beta}{2} + \ln\sin\frac{\gamma}{2} \le \ln\frac{1}{8}.$$

Aplūkosim funkciju f(x)=ln sinx. Acīmredzami

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ un } f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

Pēc 1.teorēmas

$$\ln \sin \frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3} \geq \frac{1}{3}\left(\ln \sin \frac{\alpha}{2}+\ln \sin \frac{\beta}{2}+\ln \sin \frac{\gamma}{2}\right)$$

vai arī $\left(\ln \sin \frac{\alpha}{2}+\ln \sin \frac{\beta}{2}+\ln \sin \frac{\gamma}{2}\right) \leq 3 \ln \sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}=3 \ln \sin \frac{\pi}{6}=\ln \frac{1}{8}$.

Tas arī bija jāpierāda.

Uzdevumi.

14. Pierādīt, ka $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ un $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

15. Dots, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ un $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Pierādīt, ka

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta \geq 2\sqrt{2}.$$

16. Zināms, ka pozitīvu skaitļu x, y, z summa ir 3. Pierādīt, ka

$$2^x+2^y+2^z \geq 6.$$

17. $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. Pierādīt, ka $x_1^2+x_1^2+x_1^2+x_1^2 \geq \frac{1}{4}$.

18. Pierādīt, ka $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$, ja α, β, γ ir patvaļīga trijstūra leņķi.

19. Pierādīt, ka $tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$, ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ un $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

20. Dots, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ un $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Pierādīt, ka

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta \leq \frac{1}{4}.$$

6. KLASISKO NEVIENĀDĪBU LIETOJUMI NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ.

6.1. PAMATJĒDZIENI

Šajā nodaļā ir aplūkotas nevienādības, kuras var pierādīt, izmantojot dažādas sakarības starp pozitīvu skaitļu vidējiem lielumiem. Definēsim šos lielumus.

Par n pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko sauc skaitli **A**:

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Par n pozitīvu skaitļu vidējo ģeometrisko sauc skaitli **G**:

$$\boldsymbol{G}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{a}_n}.$$

Par n pozitīvu skaitļu m-tās pakāpes vidējo sauc skaitli $\mathbf{S_m}$:

$$\boldsymbol{S}_m=\left(\frac{\boldsymbol{a}_1^m+\boldsymbol{a}_2^m+\boldsymbol{a}_3^m+\ldots+\boldsymbol{a}_n^m}{\boldsymbol{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Ja m=1, tad iegūstam vidējo aritmētisko **A**, bet, ja m=2, tad iegūstam vidējo kvadrātisko **Q**.

$$Q=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Par n skaitļu vidējo harmonisko sauc skaitli **H:**

$$H=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

1.piemērs. Pierādīt, ka n pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais atrodas starp lielāko un mazāko no šiem skaitļiem.

Risinājums. Apzīmēsim ar min (a) mazāko no dotajiem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ja ievietojam šo min (a) skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vietā, tad A skaitītājs nepalielinās. Tātad

$$A\geq\frac{\min(a)+\min(a)+\ldots+\min(a)}{n}=\frac{n\cdot\min(a)}{n}=\min(a).$$

Analoģiski, liekot katra skaitļa vietā lielāko no tiem (apzīmēsim šo lielāko skaitli ar max (a)), iegūstam:

$$A\leq\frac{n\cdot\max(a)}{n}=\max(a).$$

Tātad esam ieguvuši prasīto: min (a)$\leq$A$\leq$max (a).

Viegli varam pārliecināties, ka vienādība ir spēkā tikai gadījumā, kad visi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir vienādi.

Patstāvīgai atrisināšanai ir paredzēti daži uzdevumi, kas palīdz atrast robežas citiem vidējiem lielumiem. Katrā uzdevumā prasīto iespējams pierādīt vairākos veidos.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka n pozitīvu skaitļu vidējais ģeometriskais atrodas starp lielāko un mazāko no šiem skaitļiem.
2. Pierādīt, ka tad, ja m naturāls, n pozitīvu skaitļu m-tās pakāpes vidējais atrodas starp lielāko un mazāko no šiem skaitļiem.
3. Pierādīt, ka n pozitīvu skaitļu vidējais harmoniskais atrodas starp lielāko un mazāko no šiem skaitļiem.

6.2. VIENKĀRŠĀKĀS SAKARĪBAS STARP VIDĒJO ARITMĒTISKO UN VIDĒJO ĢEOMETRISKO.

Par vienu no pamatvienībām var uzskatīt nevienādību, kas nosaka, ka jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs:

$$a^2\geq 0.$$

Ja skaitli a izsaka kā divu skaitļu starpību, tad iegūstam:

$$(x_1-x_2)^2\geq 0,$$
$$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\geq 0,$$
$$x_1^2+x_2^2\geq 2x_1x_2,$$
$$\text{un } \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\geq x_1x_2.$$

Turklāt vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $x_1=x_2$.

$$\text{Ja } x_1 = \sqrt{y_1} \text{ un } x_2 = \sqrt{y_2}\text{, tad } \frac{(\sqrt{y_1})^2 + (\sqrt{y_2})^2}{2} \geq \sqrt{y_1 y_2}$$

$$\text{un } \frac{y_1 + y_2}{2} \geq \sqrt{y_1 y_2}\text{, kur } y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Esam ieguvuši vienkāršāko sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, t.i., pierādījuši, ka divu nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko un vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja abi skaitļi ir vienādi.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka jebkuru triju nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko.
2. Pierādīt, ka jebkuru četru nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko.
3. Pierādīt, ka jebkuru astoņu nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko.
4. Pierādīt, ka jebkuru 2^m nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko.

Visos uzdevumos vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja visi skaitļi ir vienādi.

6.3. TEORĒMA PAR VIDĒJO ARITMĒTISKO UN VIDĒJO ĢEOMETRISKO

Viena no visplašāk izmantotajām teorēmām, kas attiecas uz vidējiem lielumiem, ir teorēma par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Teorēma. (Koši nevienādība) Jebkuru n nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}\ .$$

Vienādība ir spēkā vienīgi gadījumā, ka $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Sākumā apskatīsim nevienādības pierādījumu. Jautājumu par to, kad pastāv vienādība, atliksim uz vēlāku laiku.

<u>1.pierādījums</u> (Koši pierādījums).

Sākumā pierādīsim šo teorēmu ar tiešo matemātisko indukciju (indukciju augšup) visiem n $=2^k$. Pēc tam ar apgriezto indukciju (indukciju lejup) pierādīsim: ja teorēma ir spēkā attiecībā uz visiem n = 2^k, tad tā ir spēkā arī attiecībā uz jebkuru veselu pozitīvu n.

Iepriekšējā nodaļā mēs pierādījām, ka teorēma ir spēkā, ja n = 2 = 2^1, t.i., k=1.
2. uzdevumā pierādījām, ka teorēma ir spēkā, ja n=4=2^2, t.i., k=2.
3. uzdevumā pierādījām, ka teorēma ir spēkā, ja n=8=2^3, t.i., k=3.
4. uzdevumā pierādījām, ka teorēma ir spēkā, ja n=2^m, t.i., k=m.

Esam pierādījuši, ka teorēma ir spēkā attiecībā uz visiem skaitļiem, kam ir divnieka pakāpe. Atliek pierādīt, ka arī attiecībā uz pārējiem naturālajiem n šī teorēma ir spēkā. Tagad pierādīsim: ja nevienādība ir spēkā skaitlim n, tad tā ir spēkā arī skaitlim n-1. Tātad it jāpierāda: ja attiecībā uz visiem nenegatīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad (1)$$

tad attiecībā uz visiem nenegatīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}.$$

Izvēlēsimies a_n tā, lai pastāvētu sakarība

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}. \quad (2)$$

No šīs vienādības izteiksim a_n:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = \frac{n(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})}{n-1}, \quad (3)$$

$$a_n = \frac{n(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})-(n-1)(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})}{n-1},$$

$$a_n = \frac{(n-n+1)(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})}{n-1},$$

$$a_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$$

Nevienādību (1) varam pārrakstīt šādi:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}. \quad (4)$$

Kāpinot abas puses n-tajā pakāpē, iegūstam:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}. \quad (5)$$

Ja visi a_i=0, tad sākotnējā nevienādība ir pareiza automātiski. Pretējā gadījumā visu a_i vidējais aritmētiskais ir pozitīvs.

Izdalot abas nevienādības (5) puses ar $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$, iegūstam:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}.$$

No šīs nevienādības savukārt izriet:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}.$$

Tātad esam pierādījuši, ka no (1) izriet (2).
Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Apskatīsim jautājumu: vai teorēma ir spēkā arī gadījumā, kad n nav divnieka pakāpe, piemēram, ja n=29?
Pirmajā daļā esam pierādījuši, ka teorēma ir spēkā attiecībā uz jebkuru skaitli, kurš izteikts formā 2^m, arī attiecībā uz pēc patikas lieliem skaitļiem. Tāpēc varam izvēlēties dotajam skaitlim n tādu skaitli 2^m, lai $2^m>n$, konkrētajā gadījumā $2^5=32>29$. Attiecībā uz skaitli 32 teorēma ir spēkā, bet ar lejupejošo indukciju mēs pierādījām, ka arī attiecībā uz skaitli 31 šī teorēma ir spēkā. Tā, pakāpeniski pārejot no katra skaitļa uz iepriekšējo skaitli, nonākam pie prasītā n, šai gadījumā pie n=29.
2.pierādījums. Gadījumu, kad n nav divnieka pakāpe, varam apskatīt arī citādi.

Apzīmēsim ar q skaitli, kas būtu jāpieskaita pie skaitļa n, lai iegūtu divnieka pakāpi, un apzīmēsim $b = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$.

Tā kā n+q=2^m, tad saskaņā ar 1.nodaļas 4.uzdevumā pierādīto nevienādību

$$\frac{\overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}^{n} + \overbrace{b + b + \ldots + b}^{q}}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot b^q}.$$

Tā kā $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ =nb un b+b+...+b=qb, tad iepriekšējo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$\frac{nb + qb}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot b^q} \text{ jeb } b \geq \sqrt[n+q]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot b^q},$$

$$b^{n+q} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot b^q.$$

Tā kā $b = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$,

$$\text{tad } \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$\text{un } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

3.pierādījums. Pierādīsim šo teorēmu tikai ar tiešo matemātisko indukciju.
Esam jau pierādījuši teorēmu gadījumam, kad n=2.
Pieņemsim, ka nevienādība ir pareiza attiecībā uz jebkuriem n nenegatīviem skaitļiem.
Pierādīsim, ka nevienādība ir pareiza arī jebkuriem n+1 nenegatīviem skaitļiem.

Varam samainīt skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ indeksus tā, lai a_{n+1} būtu vislielākais no šiem skaitļiem (vai arī viens no lielākajiem). Drīkstam to darīt, jo šis pārveidojums nemaina vidējā aritmētiskā un vidējā ģeometriskā vērtību. Tātad $a_{n+1} \geq a_1$, $a_{n+1} \geq a_2$, ..., $a_{n+1} \geq a_n$ un

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \qquad (1)$$

Ieviesīsim jaunus apzīmējumus:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}, \qquad (2)$$

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}}{n+1},$$

$$\text{No (1) izsakām } A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}, \qquad (3)$$

Ievadnodaļā esam pierādījuši, ka n pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais atrodas starp lielāko un mazāko no šiem skaitļiem, un tāpēc $a_{n+1} \geq A_n$ jeb $a_{n+1} = A_n + \alpha$, kur $\alpha \geq 0$.

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + \alpha}{n+1} = A_n + \frac{\alpha}{n+1}.$$

Kāpinot abas (3) puses (n+1)-jā pakāpē, iegūstam

$$(A_{n+1})^{n+1} = \left(A_n + \frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1} = (A_n)^{n+1} + C_{n+1}^1 (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} + C_{n+1}^2 (A_n)^{n-1} \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Tā kā visi saskaitāmie ir nenegatīvi, tad

$$C^2_{n+1}(A_n)^{n-1}\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}\ge 0.$$

Savukārt $C^1_{n+1}=\dfrac{n+1}{1}=n+1.$

Tāpēc

$$(A_{n+1})^{n+1}\ge (A_n)^{n+1}+C^1_{n+1}(A_n)^n\frac{\alpha}{n+1}=(A_n)^{n+1}+(n+1)(A_n)^n\frac{\alpha}{n+1}=$$
$$=(A_n)^{n+1}+(A_n)^n\alpha=(A_n)^n(A_n+\alpha)=(A_n)^n a_{n+1}.$$

Tā kā pēc induktīvā pieņēmuma

$$(A_n)^n\ge a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n,$$

tad $(A_{n+1})^{n+1}\ge (A_n)^n a_{n+1}\ge a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}.$

Tāpēc $A_{n+1}\ge\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}.$

Esam pierādījuši, ka attiecībā uz jebkuru naturālu skaitli

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}\ .$$

<u>4.pierādījums.</u> Sākotnēji pierādīsim lemmu.

Lemma. Ja n pozitīvu skaitļu reizinājums ir 1, tad to summa nav mazāka par n:

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1\Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n\ \ge n.$$

<u>Pierādījums.</u> Lemmu pierādīsim ar matemātisko indukciju: n=2.

Pēc dotā $a_1\cdot a_2=1$. Tātad

$$a_1+a_2=a_1+\frac{1}{a_1}-2+2=\frac{(a_1-1)^2}{a_1}+2\ge 2.$$

Tas arī bija jāpierāda.

Pieņemsim, ka lemma ir pareiza attiecībā uz visiem $n=k\ge n$.

Pierādīsim, ka lemma ir spēkā gadījumā, kad n=k+1, t.i., ja visi skaitļi a ir pozitīvi un $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\cdot a_{k+1}=1$.

Tad $a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}\ge k+1$.

Acīmredzami, ka tad, ja ir spēkā vienādība $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\cdot a_{k+1}=1$, ir iespējami 2 gadījumi:

1) visi reizinātāji ir vienādi, tātad katrs no tiem ir vienāds ar 1, un to summa ir k+1;
2) reizinātāji ir atšķirīgi, tātad starp tiem ir gan par 1 lielāki, gan par 1 mazāki skaitļi. Pieņemsim, ka $a_1<1$, bet $a_{k+1}>1$.

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\cdot a_{k+1}=(a_1\cdot a_{k+1})a_2\cdot\ldots\cdot a_k$$

Apzīmēsim $a_1\cdot a_{k+1}=x.$

Tātad $x\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k=1.$

Tā kā kreisajā pusē ir k reizinātāji, kuru reizinājums ir 1, tad induktīvā pieņēmuma varam rakstīt: $x+a_2+\ldots+a_k\ge k$.

Bet

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}=(x+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}-x+a_1\ge$$
$$\ge k+a_{k+1}-x+a_1=(k+1)+a_{k+1}-x+a_1-1=$$
$$=(k+1)+a_{k+1}-a_1a_{k+1}+a_1-1=(k+1)+(a_{k+1}-1)(1-a_1)$$

Tā kā pēc mūsu pieņēmuma $a_1<1$, bet $a_{k+1}>1$, tad $(a_{k+1}-1)(1-a_1)>0$. Tāpēc

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}\ge(k+1)+(a_{k+1}-1)(1-a_1)>k+1.$$

Lemma ir pierādīta.

Izmantojot tikko pierādīto lemmu, varam viegli pierādīt arī teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.
Atcerēsimies, ka $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.
Izdalīsim abas puses ar G un iegūsim

$$1 = \sqrt[n]{\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{G}},$$

no kurienes izriet $\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{G} = 1$.
Tātad ir n pozitīvi skaitļi, kuru reizinājums ir 1.
Saskaņā ar lemmu

$$\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \ldots + \frac{a_n}{G} \geq n,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \cdot G,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq G,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Tas arī bija jāpierāda
5.pierādījums. Sākumā pierādīsim lemmu.

Lemma. Ja n pozitīvu mainīgo summa ir konstanta, tad to reizinājums sasniedz vislielāko vērtību gadījumā, kad reizinātāji ir vienādi.
Pierādījums.

Dots: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ = nc.

Izvēlēsimies $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ = nc, kur $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$=c
(tātad P=$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = c^n$) un $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ = nc, taču starp skaitļiem $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ir arī atšķirīgi skaitļi.

Pierādīsim, ka $P_1 = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n < P = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$.

Tā kā vismaz daži P_1 reizinātāji ir atšķirīgi, tad starp tiem var atrast tādu reizinātāju, kas ir lielāks par c, un tādu, kas ir mazāks par c.

Pieņemsim, ka z_1=c+α un z_2=c-β, kur α<0 un β>0.

Šādā gadījumā P_1= (c+α)·(c-β)·z_3·...·z_n=[c^2+c(α–β)-α·β]·z_3·...·z_n.

Aizstāsim c+α ar cun c-β ar c-β+α (abi jaunie skaitļi ir pozitīvi):

$$(c+\alpha)+(c-\beta)=c+\alpha+c-\beta = 2c - \beta + \alpha,$$

$$c + (c - \beta + \alpha)= c + c - \beta + \alpha = 2c - \beta + \alpha,$$

$$(c+\alpha)\cdot(c-\beta) = c^2 + \alpha c - c\beta - \alpha\beta = c^2+c(\alpha-\beta)-\alpha\cdot\beta,$$

$$c(c- \beta + \alpha)= c^2+c(\alpha-\beta).$$

Tā kā α un β ir pozitīvi, tad αβ>0 un c(c- β + α)>(c+α)·(c-β).

Tātad šo skaitļu summa nemainās, bet reizinājums palielinās:

$$P_2=c\cdot(c- \beta + \alpha)\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_n=[c^2+c(\alpha-\beta)]\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_n.$$

Kā redzams, P_2>P_1.

Mēs ieguvām šo nevienādību, vienu no reizinātājiem pārveidojot par c.

Ja, līdzīgi rīkojoties, par c pārveidotu nākamo reizinātāju, tad summa atkal nemainītos, bet reizinājums - palielinātos: $P_3>P_2>P_1$.

Turpinot tādā pašā veidā tālāk, mēs iegūtu arvien lielāku reizinājumu. Process apstātos tad, kad vairs neko nevarētu pārveidot, t.i., visi reizinātāji būtu vienādi. Šajā brīdī arī būtu iegūts lielākais iespējamais reizinājums $P=c^n$.

Lemma pierādīta.

Tālāk pierādīsim teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Izvēlēsimies tādu pozitīvu c, lai $a_1+a_2+\ldots+a_n = nc$.

Pēc lemmas nosacījumiem $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n \le c^n$,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^n \ge a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n.$$

No šīs nevienādības izriet, ka

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

<u>6.pierādījums.</u>

Ieviesīsim apzīmējumus:

$$A_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n},$$

$$A_{n+1} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}}{n+1},$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$

$$G_{n+1} = \sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}$$

Pārveidojumu ceļa iegūstam, ka

$$(n+1)\cdot A_{n+1}=a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}=nA_n+a_{n+1}$$

$$\text{un } (G_{n+1})^{n+1}=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}=(G_n)^n\cdot a_{n+1}.$$

Apskatīsim starpību:

$$R=(n+1)[A_{n+1}-G_{n+1}]-n(A_n-G_n) =$$

$$=(n+1)A_{n+1}-nA_n+nG_n-(n+1)G_{n+1}=$$

$$=a_{n+1}+nG_n-(n+1)\sqrt[n+1]{(G_n)^n a_{n+1}}\ .$$

Apzīmēsim $a^{n+1}=x^{n+1}$ un $G_n=y^{n+1}$

Tagad

$$R = x^{n+1}+ny^{n+1}-(n+1)y^n x =$$

$$= ny^n(y-x)-x(y^n-x^n) =$$

$$= (y-x)\left[ny^n - x\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+y^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}\right)\right]=$$

$$= (y-x)\left[\left(y^n-xy^{n-1}\right)+\left(y^n-x^2y^{n-2}\right)+\ldots+\left(y^n-x^n\right)\right]=$$

$$= (y-x)\left[y^{n-1}(y-x)+y^{n-2}\left(y^2-x^2\right)+y^{n-3}\left(y^3-x^3\right)+\ldots+\left(y^n-x^n\right)\right]=$$

$$= (y-x)\left[y^{n-1}(y-x)+y^{n-2}(y-x)(y+x)+y^{n-3}(y-x)\left(y^2-xy+x^2\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(y-x)\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+y^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}\right)\right]=$$

$$= (y-x)^2\left[y^{n-1}+y^{n-2}(y+x)+y^{n-3}\left(y^2-xy+x^2\right)+\ldots+\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}\right)\right]$$

Tā kā $(y-x)^2\ge 0$ un

$$\left(y^{n-1} + y^{n-2}(y + x) + y^{n-3}(y^2 - xy + x^2) + \ldots + (y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})\right) \geq 0,$$

tad $R \geq 0$.

Tātad $(n+1)[A_{n+1}-G_{n+1}]-n(A_n-G_n) \geq 0$, no kurienes

$$n(A_n-G_n) \leq (n+1)[A_{n+1}-G_{n+1}].$$

Tā kā šī nevienādība ir pierādīta attiecībā un jebkuru naturālu n un zināms, ka $A_2-G_2 \geq 0$, tad nevienādība $A_n \geq G_n$ ir spēkā attiecībā uz jebkuru naturālu n.

Nobeigumā pierādīsim, ka teorēmā minētajā nevienādībā vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

<u>Pietiekamais nosacījums.</u>

Ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$,

tad $A = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \dfrac{n \cdot a_1}{n} = a_1$

un $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{(a_n)^n} = a_1$.

Tātad A=G.

<u>Nepieciešamais nosacījums.</u>

Pieņemsim, ka vismaz divi skaitļi, piemēram a_1 un a_2, nav savstarpēji vienādi:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Tā kā $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, tad varam pastiprināt nevienādību, iegūstot stingru nevienādību

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} => \sqrt[n]{\left(\sqrt{a_1 a_2}\right)^2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

$$\text{jeb } \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Tātad, pieņemot, ka vismaz divi no skaitļiem nav savstarpēji vienādi, esam ieguvuši stingru nevienādību starp A un G. Līdz ar to ir pierādīts nepieciešamais nosacījums.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem a, b, c ir spēkā nevienādība $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
2. Divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir lielāks nekā to summa. Pierādīt, ka šī summa ir lielāka par 4.
3. Pierādīt: ja a, b, c ir nenegatīvi skaitļi, tad $a + b + c \geq \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$.
4. Dots: *$a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.*
   Pierādīt, ka $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$.
5. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru pozitīvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir spēkā nevienādība
   $$a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot a_4^4 \leq \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4}{10}\right)^{10}.$$
6. Dots: *$a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.*
   Pierādīt, ka $a^3+b^3+c^3 + 15abc \geq 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

7. Dots: a, b, c>0 un a + b + c = 1.
Pierādīt, ka $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le 1$.

8. Dots: $a\ge 0$.
Pierādīt, ka $\dfrac{a^3+b^6}{2}\ge 3ab^2-4$.

9. Pierādīt: ja skaitļi a, b, c ir pozitīvi, racionāli un katrs no tiem ir mazāks nekā abu pārējo summa, tad spēkā ir nevienādība

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\le 1.$$

10. Dots, ka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir nenegatīvi skaitļi, S = $a_1+a_2+\ldots+a_n$ un vismaz daži no skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nav vienādi.
Pierādīt, ka $\dfrac{S}{S-a_1}+\dfrac{S}{S-a_2}+\ldots+\dfrac{S}{S-a_n}>\dfrac{n^2}{n-1}$.

11. Dots: $ab\ge 0$ un $cd\ge 0$.
Pierādīt, ka $2(a^2+b^2)+c^2+d^2\ge 2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})$.

12. Pierādīt, ka attiecībā uz naturāliem m un n ir spēkā nevienādība
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+(n-1))<(n+n)^{n-1}$.

13. Dots, ka $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.
Pierādīt, ka $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

14. Dots, ka $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$, $d\ge 0$.
Pierādīt, ka $\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}\ge 6\sqrt[4]{abcd}$

15. Dots, ka $a\ge 0$, $b\ge 0$.
Pierādīt, ka $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$.

16. Dots, ka $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.
Pierādīt, ka $a^3+b^3+c^3\ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$..

17. Pierādīt nevienādību $a^3+b^3+c^3\ge abc(a+b+c)$.

18. Dots: $b\ge -1$, $b\ne 0$.
Pierādīt, ka $\dfrac{4b^2+b+1}{4|b|}\ge\sqrt{b+1}$.

19. Pierādīt nevienādību $\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\ge\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}$.

20. Dots: $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.
Pierādīt, ka $\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}\ge\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

21. Dots: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
Pierādīt, ka $xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}$.

22. Dots: a>0, b>0, c>0.
Pierādīt, ka $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)}{abc}\ge 3(1+\sqrt{3})$.

23. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem nenegatīviem skaitļiem a un b ir spēkā nevienādība
$\dfrac{1}{2}(a+b)^2+\dfrac{1}{4}(a+b)\ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

24. Dots, ka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir pozitīvi skaitļi $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$.

Pierādīt, ka. $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geq 2^n$.

25. Dots: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir nenegatīvi skaitļi.

Pierādīt, ka $\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_ia_{i+1}}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

26. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir spēkā nevienādība

$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$.

27. Pierādīt: ja skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veido aritmētisko progresiju, tad

$\frac{a_1+a_n}{2}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\geq\sqrt{a_1\cdot a_n}$.

28. Pierādīt: ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi, tad

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

29. Doti pozitīvi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Apzīmēsim ar A visu skaitļu a_i summu un ar $A_i=A-a_i (i=1, 2, ..., n)$.

Pierādīt, ka $\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}+\ldots+\frac{a_n}{A_n}\geq\frac{n}{n-1}$.

30. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem a, b ir spēkā nevienādība $a^ab^b\geq a^bb^a$.

31. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem a, b ir spēkā nevienādība

$\frac{a+b}{2}\geq a^{\frac{b}{a+b}}b^{\frac{a}{a+b}}$

32. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem a, b, c ir spēkā nevienādība

$a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

33. Dots: x, p, q, r ir pozitīvi racionāli skaitļi.

Pierādīt, ka $px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}\geq p+q+r$.

34. Dots: a>0, b>0, 0<p<1. Pierādīt, ka $(a+b)^p\cdot a^{1-p}<a+pb$.

35. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem naturāliem skaitļiem a, b, c ir spēkā nevienādība

$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geq a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{c}{a+b+c}}\geq\frac{a+b+c}{3}$.

36. Dots: a, b, c ir naturāli skaitļi.

Pierādīt, ka $a^ab^bc^c\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\geq\frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}$

37. Dots: x>0, n ir vesels nenegatīvs skaitlis.

Pierādīt, ka $\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\leq\frac{1}{2n+1}$.

38. Pierādīt, ka attiecībā uz naturāliem n ir spēkā nevienādība $n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

39. Pierādīt, ka attiecībā uz naturālu n ir spēkā nevienādība $2^{n-1}\cdot n!\leq n^n$.

40. Pierādīt, ka attiecībā uz naturālu n ir spēkā nevienādība $(n+1)^n\geq(2n)!!$.

41. Pierādīt, ka attiecībā uz naturālu n ir spēkā nevienādība $n^n\geq(2n-1)!!$.

42. Pierādīt, ka attiecībā uz naturāliem n ir spēkā nevienādība $(n!)^2 \le \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

43. Pierādīt, ka attiecībā uz naturāliem n ir spēkā nevienādība $(n!)^3 \le \left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]^n$.

44. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru veselu nenegatīvu skaitli n ir spēkā nevienādība

$$1+n2^{\frac{n-1}{2}} < 2^n.$$

45. Pierādīt, ka attiecībā uz naturālu skaitli n ir spēkā nevienādība $3n(3n+1)^2 > 4\sqrt[n]{(3n)!}$.

46. Pierādīt, ka attiecībā uz naturālu n ir spēkā nevienādība

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

47. Dots, ka a, b, n > 0 un n ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka

$$nab^{n-1} \le a^n + (n-1)b^n.$$

48. Kaut kādi reāli nenegatīvi skaitļi a, b, x, y atbilst nevienādībai $a^5 + b^5 \le 1$ un $x^5+y^5 \le 1$. Pierādīt, ka $a^2x^3 + b^2y^3 \le 1$.

49. Pierādīt, ka $n^n > 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

50. Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \ge n.$$

51. Pieņemsim, ka skaitļi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir kaut kāds pozitīvu skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pārgrupējums.

Pierādīt, ka $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} \ge n.$

52. Pierādīt nevienādību

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}} \le 1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n \le \left[\frac{2n+1}{3}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

53. Pierādīt nevienādību

$$1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n} \le \left[\frac{2}{n+1}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

54. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru veselu n ir spēkā nevienādība

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2n} \le n+1.$$

55. Pierādīt: ja α, β, γ, ..., δ ir racionāli pozitīvi skaitļi, x, y, z, ..., w - tikpat daudz pozitīvu skaitļu un vismaz daži no skaitļiem $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}, \ldots, \frac{w}{\delta}$ ir atšķirīgi, tad spēkā nevienādība

$$\left(\frac{x+y+z+\ldots+w}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{w}{\delta}\right)^{\delta}.$$

56. Reāli skaitļi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ietilpst intervālā [0;1].

Pierādīt, ka $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_6)(x_6-x_1) \le \frac{1}{16}$

57. Reāli skaitļi a, b, c ietilpst intervālā [0;1].

Pierādīt, ka $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \le 1$

58. Pieņemsim, ka a, b, c, d ir pozitīvi skaitļi, kuru reizinājums ir 1. Pierādīt, ka

$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\ge 10$.

59. Skaitļi a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 apmierina nevienādības

$$a_1a_2>0, a_1c_1\ge b_1^2, a_2c_2\ge b_2^2.$$

Pierādīt, ka $(a_1+a_2)(c_1+c_2)\ge(b_1+b_2)^2$.

60. Dots, ka $a_1,a_2,\dots,a_n$ ir pozitīvi skaitļi un $s=a_1+a_2+...+a_n$.

Pierādīt, ka $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\le 1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+...+\frac{s^n}{n!}$.

61. Dots, ka $a_1\ge 0$, $a_2\ge 0$, ..., $a_n\ge 0$ un $S=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n-1}$, turklāt n>1.

Pierādīt, ka $a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n\ge(n-1)^n(S-a_1)(S-a_2)...(S-a_n)$.

62. Dots, ka a, b ir atšķirīgi pozitīvi skaitļi.

Pierādīt, ka $a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+...+ab^{n-1}+b^n>(n+1)(ab)^{\frac{n}{2}}$.

63. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1,a_2,\dots,a_n$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}.$$

64. Dots, ka a, $x_1,x_2,\dots,x_n$ ir pozitīvi reāli skaitļi un $n\ge 2$.

Pierādīt, ka $\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\ge\frac{n^2}{2(x_1+x_2+...+x_n)}$.

65. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru naturālu n un jebkuram $x\ge 1$ ir spēkā nevienādība

$$x^n-1\ge n\left(x^{\frac{n+1}{2}}-x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

66. Dots, ka m, n ir pozitīvi racionāli skaitļi un x>0.

Pierādīt, ka $mx^n+\frac{n}{x^m}>m+n.$

67. Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3$ ir spēkā nevienādība

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}\ge\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}+\sqrt[3]{b_1\cdot b_2\cdot b_3}.$$

68. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem reāliem pozitīviem a un b ir spēkā nevienādība $a^a+b^b>ab$.

69. Pierādīt, ja $2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ un $2m\pi<\beta<(2m+1)\pi$ (m, n - veseli skaitļi), tad

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\ge\frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

70. Pierādīt, ka attiecībā uz visiem $-1\le x\le 1$ un $0<p<1$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{2}\left[(1+x)^p+(1-x)^p\right]\le 1+\frac{p(p-1)}{2}x^2.$$

71. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem a>1, b>1, c>1 ir spēkā nevienādība

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{c+b}+\frac{\log_a c}{a+c}\right)\ge\frac{9}{a+b+c}$$

72. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem a, b, c, d ir spēkā nevienādība

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\le\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

73. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kuru summa ir 1 ($n \geq 2$), ir spēkā nevienādība

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

74. Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $a_{n+1}=a_1$ ir spēkā nevienādība

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

75. Dots, ka a, b, c, d ir pozitīvi skaitļi un $c \cdot d=1$.
Pierādīt, ka intervālā [x,y] atrodas vismaz viens vesela skaitļa kvadrāts, ja $x=a \cdot b$ un $y=(a+c)(b+d)$.

76. Salīdzināt pēc lieluma naturālus skaitļus m un n, ja zināms, ka $(n!)^m>(m!)^n$.

77. Dots, ka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir aritmētiskās progresijas locekļi, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - ģeometriskās progresijas locekļi, turklāt $a_1=b_1$, $a_n=b_n$, un $a_i \neq b_i$, kur i = 2,3, ..., n-1.
Visi skaitļi ir pozitīvi.
Pierādīt, ka $a_i>b_i$, ja $i \in \{2, 3, ..., n-1\}$.

78. Pierādīt: ja m pozitīvu skaitļu reizinājums ir konstants skaitlis, to summa ir vismazākā gadījumā, kad visi šie skaitļi ir vienādi.

79. Atrast funkcijas $y=(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$ vislielāko vērtību, ja $-0,5<x<1$.

80. Dots, ka m, n ir racionāli pozitīvi skaitļi, x, y - pozitīvi skaitļi.
Pierādīt, ka $x^m y^n \leq \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$.
Atrast mazāko x+y vērtību, ja $x^m y^n= C$.

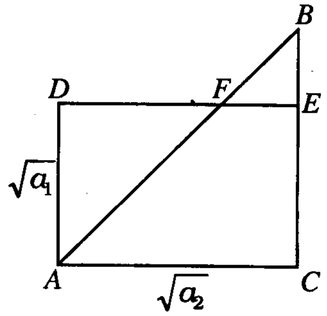
81. Atrast funkcijas $F(x, y, z) = \frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$ vismazāko vērtību, ja x>0, y>0, z>0.

6.4. DIVU KOŠĪ TEORĒMU IZMANTOŠANA ĢEOMETRIJĀ

Teorēmu par to, ka jebkuru divu nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko, ir iespējams pierādīt arī ar ģeometrijas metodēm.

1.pierādījums. Uz taisna leņķa CAD malām atliekam nogriežņus AD=$\sqrt{a_1}$ un AC=$\sqrt{a_2}$ un novelkam leņķa CAD bisektrisi AB. Pēc tam caur punktu D paralēli taisnei AC novelkam taisni DFE ($F \in AB$ un $E \in CB$, kur mala CB ir perpendikulāra pret AC). Figūra ADFBC sastāv no diviem vienādsānu taisnleņķa trijstūriem ADF un ACB. Aprēķināsim šo trijstūru laukumus: $S_{\Delta ADF} = \frac{1}{2}a_1$ un $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a_2$.

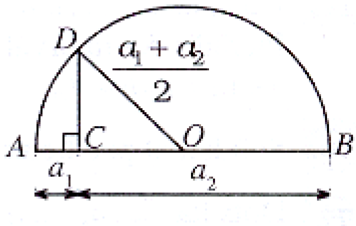
Taisnstūra ADEC laukums ir vienāds ar $\sqrt{a_1 a_2}$.



1. zīm.

Zīmējumā viegli pamanīt, ka figūras ADFBC laukums nav mazāks par taisnstūra ADEC laukumu. Tāpēc $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

2.pierādījums. Uz nogriežņa AB=a_1+a_2 konstruējam riņķa līniju ar centru O un diametru AB (2.zīm.).



2. zīm.

Pieņemsim, ka AC=a_1 un CB=a_2.
No punkta C novelkam perpendikulu, kas krusto pusriņķa līniju punktā D.
No ģeometrijas kursa ir zināms, ka

$$DC = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{a_1 a_2}\ . \qquad (1)$$

Tā kā AB=a_1+a_2, tad rādiuss $OD = \frac{a_1+a_2}{2}$.

Pēc taisnleņķa trijstūra OCD redzams, ka $DC \leq OD = \frac{a_1+a_2}{2}$ (2)

No vienādībām (1) un (2) varam secināt, ka $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$. Tas arī bija jāpierāda.

Zīmējumā varam redzēt, ka vienādība ir spēkā tajā un tikai tajā gadījumā, ja DC=OD, t.i., ja punkti O un C sakrīt, t.i., ja a_1=a_2.

Šajā nodaļā ir ievietoti vairāki ģeometrijas uzdevumi, kurus var atrisināt, izmantojot Košī teorēmu jeb teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Uzdevumi.

1. Pierādīt: ja A, B, C ir trijstūra leņķi, tad $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

2. Pierādīt: ja A, B, C ir trijstūra leņķi, tad

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 > 2\pi \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

3. Pierādīt, ka jebkurā trijstūrī ir spēkā nevienādība $p^2 \geq 27r^2$, ja p ir pusperimetrs, r - ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

4. Pierādīt, ka jebkurā trijstūrī ir spēkā nevienādība $R + r \geq \sqrt{2S}$, ja R ir apvilktās riņķa līnijas rādiuss, r - ievilktās riņķa līnijas rādiuss, S - trijstūra laukums.

5. Pierādīt, ka jebkurā trijstūrī ir spēkā nevienādība $S > 2\sqrt{Rr^3}$, ja R ir apvilktās riņķa līnijas rādiuss, r - ievilktās riņķa līnijas rādiuss, S - trijstūra laukums.

6. Pierādīt: ja a, b, c ir trijstūra malas un p - pusperimetrs, tad spēkā ir nevienādība

$$p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{4}$$

7. Pierādīt, ka no visiem taisnstūriem ar diagonāli c lielākais perimetrs un laukums ir kvadrātiem.

6.5. SAKARĪBA $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

Bieži nevienādību pierādīšanai tiek izmantota nevienādība $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.
Šo nevienādību varam viegli pierādīt.
Pārveidojot iegūstam: $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$, $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$ jeb $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}$.
Pēc teorēmas par divu skaitļu vidējo aritmētisko, balstoties uz pierādīto nevienādību.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi un a + b + c = 1, tad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

2. Pierādīt: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi.

3. Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi.
Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c}\geq\frac{49}{a+b+c}$

4. Dots, ka a, b, c, d ir pozitīvi skaitļi.
Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$.

5. Dots, ka a, b, c ir jebkuri pozitīvi skaitļi.
Pierādīt, ka $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

6. Dots, ka a>b>c ir pozitīvi skaitļi.
Pierādīt, ka $\frac{a}{b-c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a-b}\geq 9$.

7. Dots, ka $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$.
Pierādīt, ka (a + b + c)$(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc$.

8. Dots, ka x>0 un n ir vesels nenegatīvs skaitlis.
Pierādīt nevienādību $\frac{x^n}{1+x+x^2+...+x^{2n}}\leq\frac{1}{2n+1}$.

9. Pierādīt nevienādību $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$.

10. Pierādīt nevienādību $\frac{(n^2+4)^2+26-n^2}{6\sqrt{n^4+7n^2+6}}\geq 2$.

11. Pierādīt nevienādību $tgx+ctgx\geq 2$ visiem x$\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

12. Pierādīt, ka $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$, ja A, B, C ir trijstūra leņķi.

6.6. SAKARĪBA STARP VIDĒJO ARITMĒTISKO UN VIDĒJO HARMONISKO

Pierādīsim, ka n pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko saista sakarība

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

jeb

$$A \geq H.$$

Pierādījums.

2.nodaļā esam jau pierādījuši, ka n pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds ar to vidējo ģeometrisko: $A \geq G$.

Tagad pierādīsim, ka $G \geq H$.

Izmantojot Košī teorēmu, iegūstam

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}.$$

Tātad $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \quad \text{jeb} \quad G \geq H.$$

Tā kā $A \geq G$ un $G \geq H$, tad $A \geq H$.

Uzdevumi

Visos uzdevumos burti apzīmē pozitīvus skaitļus.

1. Pierādīt, ka $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{c+b} \leq \frac{a+b+c}{2}$.

2. Pierādīt, ka $\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1} a_n}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n a_1}{a_n + a_1} \leq \frac{\sum a_i}{2}$.

3. Pierādīt, ka

$$\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_3} + \ldots + \frac{a_1 a_n}{a_1 + a_n} + \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_2 a_n}{a_2 + a_n} + \ldots + \frac{a_{n-1} a_n}{a_{n-1} + a_n} \leq \frac{n-1}{4} \sum a_i .$$

4. Pierādīt, ka $\frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + \frac{a_3 + a_1}{a_3 + a_4} + \frac{a_4 + a_2}{a_4 + a_1} \geq 4$.

5. Pierādīt, ka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

6. Pierādīt, ka $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2}$.

6.7. BUNJAKOVSKA-KOŠĪ NEVIENĀDĪBA

Otra visbiežāk izmantotā klasiskā nevienādība ir Bunjakovska-Košī nevienādība: ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir patvaļīgi skaitļi, tad ir spēkā nevienādība

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2.$$

1.pierādījums.
Izmantosim matemātisko indukciju.
Ja n=1, iegūstam $x_1^2 x_1^2 \ge (x_1 y_1)^2$.
Ja n=2, tad $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2)^2$,

$$x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2 \ge x_1^2y_1^2+2x_1y_1x_2y_2+x_2^2x_2^2,$$

$$(x_1y_2)^2+(x_2y_1)^2 \ge 2x_1y_1x_2y_2,$$

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2 \ge 0.$$

Pieņemsim, ka nevienādība ir spēkā visiem $n \le k$.

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k)^2, \qquad (1)$$

Pierādīsim, ka tā ir pareiza arī, ja n=k+1, t.i.,

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k+1}^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{k+1}^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_{k+1}y_{k+1})^2. \qquad (2)$$

Ieviesīsim apzīmējums: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$=A,

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2=\mathrm{B},$$

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k=\mathrm{C}.$$

Tagad nevienādību (1) varam pārrakstīt šādi: $AB \ge C^2$, bet nevienādību (2) - šādi:

$$(A+x_{k+1}^2)(B+y_{k+1}^2) \ge (C+x_{k+1}y_{k+1})^2.$$

Atverot iekavas, iegūstam

$$AB+Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2+x_{k+1}^2y_{k+1}^2 \ge C+2Cx_{k+1}y_{k+1}+x_{k+1}^2y_{k+1}^2.$$

Tā kā AB $\ge C^2$, tad tikai jāpierāda, ka $Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2 \ge 2Cx_{k+1}y_{k+1}$. (3)

Tā kā $(|y_{k+1}|\sqrt{A}-|x_{k+1}|\sqrt{B})^2 \ge 0$,

tad $Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2 \ge 2\sqrt{AB}|x_{k+1}||y_{k+1}|$. (4)

Bet $\sqrt{AB} \ge C$, tāpēc $2\sqrt{AB}|x_{k+1}||y_{k+1}| \ge 2C|x_{k+1}||y_{k+1}| \ge 2Cx_{k+1}y_{k+1}$. (5)

No (4) un (5) varam secināt, ka $Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2 \ge 2Cx_{k+1}y_{k+1}$.
Esam pierādījuši nevienādību (3), līdz ar to arī Bunjakovska - Košī nevienādību.

2.pierādījums.
Vienādība $(ax_k+y_k)^2=a^2x_k^2+2ax_ky_k+y_k^2$ ir spēkā visiem k= 1, 2, ..., n.
Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$(ax_1+y_1)^2+(ax_2+y_2)^2+\ldots+(ax_n+y_n)^2=Aa^2+2aB+C, \qquad (1)$$

kur A= $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$,

B= $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k$,

C= $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2$=B.

Kreisā puse kā kvadrātu summa ir nenegatīva ar jebkuru a vērtību, arī ar $a=-\frac{B}{A}$.
(Ja A=0, tad $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ un nevienādība ir acīmredzama.)
Ievietojot šo a vērtību vienādībā (1), iegūstam

$$A\frac{B^2}{A^2}-2B\frac{B}{A}+C=\frac{AC-B^2}{A} \ge 0.$$

Ir acīmredzami, ka A>0, tāpēc AC-B^2.
Ievietojot A, B, C vietā sākotnējās izteiksmes, iegūstam Bunjakovska - Košī nevienādību.

3.pierādījums.

Skaitļiem a un b spēkā nevienādība $(a-b)^2 \geq 0$.

Kāpinot kvadrātā, iegūstam $a^2+b^2 \geq 2ab$,

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2.$$

Ieviesīsim šādus apzīmējumus:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

$$B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

$$\bar{a}_i = \frac{a_i}{A},\ \bar{b}_i = \frac{b_i}{B}\ \text{(i = 1, 2, ..., n).}$$

Tātad $\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 + \ldots + \bar{a}_n^2 = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{A^2} = 1,$

$$\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 + \ldots + \bar{b}_n^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{B^2} = 1.$$

Varam uzrakstīt n nevienādības:

$$\bar{a}_1\bar{b}_1 \leq \frac{1}{2}\bar{a}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{b}_1^2,$$

$$\bar{a}_2\bar{b}_2 \leq \frac{1}{2}\bar{a}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{b}_2^2,$$

....

$$\bar{a}_n\bar{b}_n \leq \frac{1}{2}\bar{a}_n^2 + \frac{1}{2}\bar{b}_n^2.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$\bar{a}_1\bar{b}_1 + \bar{a}_2\bar{b}_2 + \ldots + \bar{a}_n\bar{b}_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\frac{a_1b_1}{AB} + \frac{a_2b_2}{AB} + \ldots + \frac{a_nb_n}{AB} \leq 1,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq AB,$$

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Nevienādība pārvēršas par vienādību vienīgi gadījumā, ja

$$\bar{a}_1 - \bar{b}_1 = \bar{a}_2 - \bar{b}_2 = \ldots = \bar{a}_n - \bar{b}_n = 0$$

$$\text{jeb } \frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B}, \ldots, \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B},$$

t.i., skaitļu sistēmas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ir proporcionālas.

4.pierādījums.

Sākumā pierādīsim Lagranža vienādību:

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) -$$
$$- \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)^2 - \left(x_1y_3 + x_3y_1\right)^2 - \ldots - \left(x_1y_n + x_ny_1\right)^2 - \left(x_2y_3 + x_3y_2\right)^2 -$$
$$- \left(x_2y_4 + x_4y_2\right)^2 - \ldots - \left(x_2y_n + x_ny_2\right)^2 - \ldots - \left(x_{n-1}y_n + x_ny_{n-1}\right)^2.$$

Pierādījums.

Atverot iekavas, kreisajā pusē rodas šādi saskaitāmie:

a) $x_i^2y_i^2$ kur $1 \leq i \leq n$,

b) $2x_iy_ix_ky_k$, kur $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n$, $i \ne k$.

Savukārt labajā pusē, atverot iekavas reizinājumā
$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$, rodas saskaitāmie

c) $x_i^2 y_i^2$ kur $1 \le i \le n$,

d) $x_k^2 y_k^2$ kur $1 \le k \le n$, $i \ne k$.

Labajā pusē, atverot iekavas, locekļos, kas tiek atņemti, rodas saskaitāmie

e) $- x_i^2 y_i^2$ kur $1 \le i \le n$,

f) $2x_iy_ix_ky_k$, kur $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n$, $i \ne k$.

Labajā pusē d) un e) tipa saskaitāmie saīsinās. Ievērojot, ka a) un c) tipa saskaitāmie, kā arī b) un f) tipa saskaitāmie pa pāriem ir vienādi, iegūstam, ka kreisās puses vērtība ir vienāda ar labās puses vērtību.

Esam pierādījuši Lagranža vienādību. Ja atmetam $\left(x_i y_p + x_p y_i\right)^2$ veida saskaitāmos, iegūstam Bunjakovska - Košī nevienādību:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) \ge \left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2.$$

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem x, y, z ir spēkā nevienādība

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9$$

2. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir spēkā nevienādība

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2.$$

3. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un reālam r ir spēkā nevienādība

$$\left(p_1x_1^r + p_2x_2^r + \ldots + p_nx_n^r\right)^2 \ge (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\left(p_1x_1^{2r} + p_2x_2^{2r} + \ldots + p_nx_n^{2r}\right)$$

4. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem x_1, x_2, x_3 ir spēkā nevienādība

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 \le \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2.$$

5. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir spēkā nevienādība

$$\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2} + \ldots + \sqrt{x_ny_n} \le \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

6. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem a, b, c ir spēkā nevienādība

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

7. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem a, b, c, d ir spēkā nevienādība

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \ge \frac{2}{3}.$$

8. Dots, ka a, b, c, $d \ge 0$ un ab+bc+cd+da = 1.

Pierādīt, ka $\dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3}$.

9. Dots, ka a, b, c ir pozitīvi reāli skaitļi u abc = 1.

Pierādīt, ka $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{1}{3}$.

10. Dots, ka $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Pierādīt, ka $tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$.

11. Dots, ka a_i, b_i, c_i, d_i ir pozitīvi skaitļi (i = 1, 2, ..., n).

Pierādīt, ka
$$(a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n c_n d_n)^4 \leq$$
$$\leq (a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4)(b_1^4+b_2^4+\ldots+b_n^4)(c_1^4+c_2^4+\ldots+c_n^4)(d_1^4+d_2^4+\ldots+d_n^4)$$

12. Dots, ka a_i, b_i, c_i, d_i ir pozitīvi skaitļi (i = 1, 2, ..., n).

Pierādīt, ka
$$\sqrt[4]{a_1 b_1 c_1 d_1}+\sqrt[4]{a_2 b_2 c_2 d_2}+\ldots+\sqrt[4]{a_n b_n c_n d_n}\leq$$
$$\leq \sqrt[4]{a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4}\cdot\sqrt[4]{b_1^4+b_2^4+\ldots+b_n^4}\cdot\sqrt[4]{c_1^4+c_2^4+\ldots+c_n^4}\cdot\sqrt[4]{d_1^4+d_2^4+\ldots+d_n^4}.$$

13. Dots, ka $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir pozitīvi reāli skaitļi.

Pierādīt, ka $\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$.

14. Dots, ka $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

Pierādīt, ka eksistē tādi veseli skaitļi e_i, no kuriem visi nav nulles un kuri pēc moduļa ir mazāki par k, un ka attiecībā uz jebkuru k>1 ir spēkā nevienādība
$$\left|e_1x_1+e_2x_2+\ldots+e_nx_n\right|\leq\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

15. Dots, ka $n\in N$ un a, b ir reāli skaitļi.
$$x_0+x_1+\ldots+x_n=a \text{ un } x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=b.$$
Kādas vērtības var būt mainīgajam x_0?

16. Atrast funkcijas $y=\frac{(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ lielāko vērtību, ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir dotie skaitļi (konstantes).

17. Atrast funkcijas $y=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ lielāko un mazāko vērtību, ja $x_1^2+y_1^2+z_1^2\leq 4$ un $x_2^2+y_2^2+z_2^2\leq 9$.

6.8. KOŠĪ TEORĒMAS VISPĀRINĀJUMI UN DAŽAS KLASISKĀS NEVIENĀDĪBAS.

1.vispārinājums. Attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un jebkuriem veseliem skaitļiem $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ir spēkā nevienādība
$$a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}=\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$
Vienādība ir spēkā vienīgi gadījumā $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Pierādījums.
$$a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}=\underbrace{a_1a_1a_1\ldots a_1}_{p_1\ reizes}\cdot\underbrace{a_2a_2a_2\ldots a_2}_{p_2\ reizes}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a_na_na_n\ldots a_n}_{p_n\ reizes}.$$
Labajā pusē kopējais reizinātāju skaits ir m = $p_1+p_2+\ldots+p_n$.

Izmantojot attiecībā uz šiem m reizinātājiem teorēmu par vidējo kvadrātisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$\underbrace{a_1a_1a_1\dots a_1}_{p_1\ reizes}\cdot\underbrace{a_2a_2a_2\dots a_2}_{p_2\ reizes}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a_na_na_n\dots a_n}_{p_n\ reizes}\le$$

$$\le\frac{\overbrace{a_1+a_1+\ldots+a_1}^{p_1}+\overbrace{a_2+a_2+\ldots+a_2}^{p_2}+\ldots+\overbrace{a_n+a_n+\ldots+a_n}^{p_n}}{m}=$$

$$=\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

Tas arī bija jāpierāda.

Nosacījums, kas pārvērš nevienādību vienādībā, ir analoģisks nosacījumam teorēmā par vidējo kvadrātisko un vidējo ģeometrisko vienādību.

2.vispārinājums.

Attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $a_1,a_2,\ldots,a_n$ un jebkuriem racionāliem pozitīviem skaitļiem $\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_n}{q_n}$ ir spēkā nevienādība

$$a_1^{\frac{p_1}{q_1}}\cdot a_2^{\frac{p_2}{q_2}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\frac{p_n}{q_n}}\le\left(\frac{\frac{p_1}{q_1}a_1+\frac{p_2}{q_2}a_2+\frac{p_3}{q_3}a_3+\ldots+\frac{p_n}{q_n}a_n}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+\ldots+\frac{p_n}{q_n}}\right)^{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+\ldots+\frac{p_n}{q_n}}$$

Pierādījums.

Lai pierādītu teorēmu, vienādosim doto racionālo skaitļu saucējus. Pieņemsim, ka kopsaucējs ir q.

$\frac{p_1}{q_1}=\frac{s_1}{q},\frac{p_2}{q_2}=\frac{s_2}{q},\ldots,\frac{p_n}{q_n}=\frac{s_n}{q}$, kur $s_1,s_2,\ldots,s_n$ ir veseli pozitīvi skaitļi.

$$a_1^{\frac{p_1}{q_1}}\cdot a_2^{\frac{p_2}{q_2}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\frac{p_n}{q_n}}=a_1^{\frac{s_1}{q}}\cdot a_2^{\frac{s_2}{q}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\frac{s_n}{q}}=\left(a_1^{s_1}\cdot a_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{s_n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. vispārinājumā esam ieguvuši, ka

$$a_1^{s_1}\cdot a_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{s_n}\le\left(\frac{s_1a_1+s_2a_2+\ldots+s_na_n}{s_1+s_2+\ldots+s_n}\right)^{s_1+s_2+\ldots+s_n}$$

Kāpinot abas nevienādības puses $\left(\frac{1}{q}\right)$-jā pakāpē, iegūstam

$$a_1^{s_1}\cdot a_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{s_n}\le\left(\frac{s_1a_1+s_2a_2+\ldots+s_na_n}{s_1+s_2+\ldots+s_n}\right)^{\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{q}}=$$

$$=\left(\frac{\frac{s_1}{q}a_1+\frac{s_2}{q}a_2+\ldots+\frac{s_n}{q}a_n}{\frac{s_1}{q}+\frac{s_2}{q}+\ldots+\frac{s_n}{q}}\right)^{\frac{s_1}{q}+\frac{s_2}{q}+\ldots+\frac{s_n}{q}}$$

Lietojot iepriekšējos apzīmējumus, iegūsim meklēto nevienādību.

Piezīme.

No sākotnējās nevienādības ir iespējams iegūt arī nevienādību

$$a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{r_n}\le\left(\frac{r_1a_1+r_2a_2+\ldots+r_na_n}{r_1+r_2+\ldots+r_n}\right)^{r_1+r_2+\ldots+r_n},$$

kur $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ir jebkuri pozitīvi skaitļi.

<u>3.vispārinājums.</u> Apzīmēsim ar $P_k(a)$ vidējo aritmētisko visiem šo skaitļu reizinājumiem pa k. Kā redzams, $A(a) = P_1(a)$, $G(a) = \sqrt[n]{P_n(a)}$.

Pierādīt, ka

a) $P_k^2(a)\ge P_{k+1}(a)P_{k-1}(a)$,

b) $P_1(a)\ge\sqrt{P_2(a)}\ge\sqrt[3]{P_3(a)}\ge\ldots\ge\sqrt[n]{P_n(a)}$.

Vienādības spēkā tikai gadījumā, ja $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Pierādījums.

a) Pierādīsim šo nevienādību ar matemātisko indukciju pēc parametra n.

Ja visi a_i ir vienādi, tad vienādība ir acīmredzama.

Pieņemsim, ka starp skaitļiem a_i vismaz daži ir atšķirīgi. Tagad varam pārrakstīt doto nevienādību kā stingru nevienādību, lietojot zīmes $\ge$ vietā zīmi >.

Pievienosim dotajām izteiksmēm vēl vienu: $P_0(a) = 1$.

Ja n = 2, t.i., ir divi skaitļi, tad dotā nevienādība ir spēkā. Šajā gadījumā eksistē tikai trīs $P_k(a)$: $P_0(a) = 1$, $P_1(a)=\dfrac{a_1+a_2}{2}$, $P_2(a)=a_1\cdot a_2$.

Viegli pārbaudīt, ka $(P_1(a))^2> P_0(a)\,P_2(a) = P_2(a)$ jeb $\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^2>a_1\cdot a_2$.

Tā ir patiesība.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā patvaļīgiem n - 1 skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, un pierādīsim, ka tas ir spēkā patvaļīgiem n skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Apzīmēsim ar $s_k(a)$ visu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skaitļu reizinājumu pa k skaitļiem summu, bet ar $\overline{s_k(a)}$ - visu n-1 skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ reizinājumu pa k skaitļiem summu. Ja no $sk(a)$ iznestu visus reizinātājus, kas satur a_n, tad iegūtu vienādību $s_k(a)=\overline{s_k(a)}+a_n\overline{s_{k-1}(a)}$.

Apzīmējot ar $\overline{P_k}$ izteiksmi P_k, kas sastādīta n - 1 skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, iegūstam

$$P_k=\frac{s_k(a)}{C_n^k}=\frac{\overline{s_k(a)}}{C_n^k}+a_n\frac{\overline{s_{k-1}(a)}}{C_n^k}=\frac{\overline{s_k(a)}}{C_n^k\dfrac{n}{n-k}}+a_n\frac{\overline{s_{k-1}(a)}}{C_{n-1}^{k-1}\dfrac{n}{k}}=\frac{n-k}{n}\overline{P_k}+a_n\frac{k}{n}\overline{P_{k-1}}.$$

Apskatīsim starpību

$$p_k^2-p_{k-1}p_{k+1}=$$

$$=\left[\frac{n-k}{n}\overline{P_k}+a_n\frac{k}{n}\overline{P_{k-1}}\right]^2-\left[\frac{n-k-1}{n}\overline{P_{k+1}}+a_n\frac{k+1}{n}\overline{P_k}\right]\cdot\left[\frac{n-k+1}{n}\overline{P_{k-1}}+a_n\frac{k-1}{n}\overline{P_{k-2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{\left[(n-k)^2\overline{P_k}^2-(n-k-1)(n-k+1)\overline{P_{k+1}}\,\overline{P_{k-1}}\right]+a_n\left[2k(n-k)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}}-\right.\right.$$ (Ar

$$\left.\left.-(k-1)(n-k-1)\overline{P_{k+1}}\,\overline{P_{k-2}}-(k+1)(n-k+1)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}}\right]+a_n^2\left[k^2\overline{P_{k-1}}^2-(k-1)(k+1)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-2}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(A+a_nB+a_n^2C\right).$$

A, B un C apzīmējam izteiksmes, kas atrodas kvadrātiskajās iekavās.)

Pēc induktīvā pieņēmuma ir spēkā nevienādības

$$\overline{p_k^2} > \overline{p_{k-1}p_{k+1}},\ \overline{p_{k-1}^2} > \overline{p_{k-2}p_k}$$

Sareizinot šīs divas nevienādības, iegūstam

$$\overline{p_k\, p_{k-1}} > \overline{p_{k+1}p_{k-2}}.$$

Tāpēc izteiksmē $p_k^2 - p_{k-1}p_{k+1}$ iegūstam

$$A = (n-k)^2\overline{P_k^2} - \left[(n-k)^2 - 1\right]\overline{P_{k+1}}\,\overline{P_{k-1}} = \overline{P_k^2} + \left[(n-k)^2 - 1\right]\left[\overline{P_k^2} - \overline{P_{k+1}}\,\overline{P_{k-1}}\right] \geq \overline{P_k^2},$$

$$B = 2k(n-k)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}} - (k-1)(n-k-1)\overline{P_{k+1}}\,\overline{P_{k-2}} - (k+1)(n-k+1)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}} =$$

$$= -2\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}} + (k-1)(n-k-1)\left[\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}} - \overline{P_{k+1}}\,\overline{P_{k-2}}\right] \geq 2\overline{P_k}\,\overline{P_{k-1}},$$

$$C = k^2\,\overline{P_{k-1}^2} - (k-1)(k+1)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-2}} = k^2\,\overline{P_{k-1}^2} - (k^2-1)\overline{P_k}\,\overline{P_{k-2}} =$$

$$= \overline{P_{k-1}^2} + (k^2-1)\left[\overline{P_{k-1}^2} - \overline{P_k}\,\overline{P_{k-2}}\right] \geq \overline{P_{k-1}^2}.$$

Tātad $p_k^2 - p_{k-1}p_{k+1} \geq \overline{p_k^2} - 2a_n\,\overline{p_k\,p_{k-1}} + a_n^2\,\overline{p_{k-1}^2} = \left(\overline{p_k} - a_n\,\overline{p_{k-1}}\right)^2 \geq 0$.

Tas arī bija jāpierāda.

To, kad ir spēkā vienādība, atstājam katram izpētīt patstāvīgi.

b) Tā kā esam pieņēmuši, ka $P_0(a) = 1$, tad $(P_1(a))^2 > P_0(a)\ P_2(a) = P_2(a)$ jeb $P_1(a) > \sqrt{P_2(a)}$.

(Arī šoreiz rakstīsim zīmi >, jo vienādība ir spēkā tikai gadījumā, kad visi a_i ir vienādi.) Sareizinot nevienādības $(P_1(a))^2 > P_2(a)$ un $[(P_2(a))^2]^2 > [P_1(a)P_3(a)]^2$, iegūstam $[(P_2(a))^3 > [(P_3(a))^2$.

Tieši tāpat, sareizinot nevienādības $(P_1(a))^2 > P_2(a)$ un $[(P_2(a))^2]^2 > [P_1(a)P_3(a)]^2$, $[(P_3(a))^2]^3 > [P_2(a)P_4(a)]^3$, iegūstam $[(P_3(a))^4 > [(P_4(a))^3$.

Tātad $\sqrt[3]{P_3(a)} > \sqrt[4]{P_4(a)}$.

Analoģiski varam pierādīt prasīto nevienādību

$$\mathrm{P}_1(a) \geq \sqrt{\mathrm{P}_2(a)} \geq \sqrt[3]{\mathrm{P}_3(a)} \geq \ldots \geq \sqrt[n]{\mathrm{P}_n(a)}.$$

4.vispārinājums.

Ja $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$, $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \ldots, p_n \geq 0$ un $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \ldots + \mathrm{p}_n = 1$, tad ir spēkā nevienādība $a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n} \leq p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n$

Pierādījums.

Pierādīsim šo nevienādību, izmantojot matemātisko indukciju.

$$n = 2. \qquad a_1^{p_2} \cdot a_2^{p_2} \leq p_1a_1 + p_2a_2 \tag{1}$$

Ja $p_1=0$ vai $p_2=0$, tad nevienādība ir pareiza.

Pieņemsim, ka $p_1>0$ un $p_2>0$.

Lai pierādītu (1), ir pietiekami pierādīt, ka

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1} \leq p_1\frac{a_1}{a_2} + (1-p_1). \tag{2}$$

Aplūkosim funkciju $f(x) = p_1x - x^{p_1} + 1 - p_1,\ x \in (0;+\infty)$.

Aprēķināsim funkcijas pirmo un otro atvasinājumu:

$$f'(x) = p_1 - p_1x^{p_1-1},$$

$$f''(x) = p_1(1-p_1)x^{p_1-2} > 0.$$

Punkts x = 1 ir funkcijas lokālā minimuma punkts, un funkcijas vērtība šajā punktā ir f(1)=0. Tā kā funkcija f(x) ir nepārtraukta intervālā $(0;+\infty)$ un eksistē tikai viens lokālā minimuma punkts, tad šajā punktā tiek sasniegta vismazākā funkcijas vērtība, t.i.,:

$$p_1x - x^{p_1} + 1 - p_1 \geq 0. \tag{3}$$

Vienādība ir spēkā tikai gadījumā, kad x = 1.

Ievietojot izteiksmē (3) $x = \frac{a_1}{a_2}$, iegūstam nevienādību (2) un tālāk nevienādību (1).

Vienādība ir spēkā tikai tad, ja $\frac{a_1}{a_2} = 1$, t.i., ja $a_1 = a_2$.

(Ja $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, iegūstam jau pazīstamo nevienādību $\sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2}$.)

Esam pierādījuši: ja n = 2, tad nevienādība ir pareiza.

Pieņemsim, ka nevienādība ir spēkā, ja n = k, t.i.,

$$a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{p_k} \le p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_k a_k . \qquad (4)$$

Pierādīsim, ka nevienādība ir pareiza arī tad, ja n = k + 1:

$$a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{p_k} \cdot a_{k+1}^{p_{k+1}} \le p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_k a_k + p_{k+1} a_{k+1},$$

$$a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{p_k} \cdot a_{k+1}^{p_{k+1}} \le \left(a_1^{\frac{p_1}{p_1+p_2}} \cdot a_2^{\frac{p_2}{p_1+p_2}} \right)^{p_1+p_2} \cdot a_3^{p_3} \cdot \ldots \cdot a_k^{p_k} \cdot a_{k+1}^{p_{k+1}} .$$

Esam ieguvuši reizinājumu, kurā ir k locekļi, un saskaņā ar induktīvo pieņēmumu

$$\left(a_1^{\frac{p_1}{p_1+p_2}} \cdot a_2^{\frac{p_2}{p_1+p_2}} \right)^{p_1+p_2} \cdot a_3^{p_3} \cdot \ldots \cdot a_k^{p_k} \cdot a_{k+1}^{p_{k+1}} \le$$

$$\le (p_1 + p_2)\left(a_1^{\frac{p_1}{p_1+p_2}} + a_2^{\frac{p_2}{p_1+p_2}} \right) + p_3 a_3 + \ldots + p_k a_k + p_{k+1} a_{k+1} \le$$

$$\le (p_1 + p_2)\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} a_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} a_2 \right) + p_3 a_3 + \ldots + p_k a_k + p_{k+1} a_{k+1} =$$

$$= p_1 a_1 + \ldots + p_k a_k + p_{k+1} a_{k+1}.$$

Tātad nevienādība ir spēkā attiecībā uz jebkuriem naturāliem n.

No nevienādības (4) varam iegūt

$$p_1 \frac{1}{a_1} + p_2 \frac{1}{a_2} + \ldots + p_n \frac{1}{a_n} \ge \left(\frac{1}{a_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{1}{a_2}\right)^{p_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)^{p_n},$$

$$\text{t.i.,} \quad \frac{1}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \ldots + \frac{p_n}{a_n}} \le a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n} .$$

Esam ieguvuši

$$\frac{1}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \ldots + \frac{p_n}{a_n}} \le a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n} \le p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n . \qquad (5)$$

Tas ir vispārinājums nevienādībai starp vidējo harmonisko, vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko. Ja $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, tad iegūstam Košī nevienādību

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} .$$

5.vispārinājums. Ja $a_i > 0$, $c_i > 0$, $\sum c_i \ne 0$ (i = 1, 2, ..., n)

tad

$$c_1+c_2+\ldots+c_n \quad \frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{c_2}{a_2}+\ldots+\dfrac{c_n}{a_n}} \le \frac{c_1a_1+c_2a_2+\ldots+c_na_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}. \qquad (6)$$

Pierādījums.

Nevienādību (6) viegli var iegūt no nevienādības (5), ja $p_i=\dfrac{c_i}{c_1+c_2+\ldots+c_n}$, i=1,2,...,n

Ja $c_i>0$, tad vienādība izteiksmē (6) ir iespējama vienīgi gadījumā, kad $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

6.Čebiševa nevienādība.

Ja $a_1,a_2,\ldots,a_n$ un $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ir divas nedilstošas (vai neaugošas) skaitļu virknes, pierādīt, ka

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

Pierādījums.

Čebiševa nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\ge(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Apskatīsim starpību

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)=$$
$$=[(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n)]\ge 0.$$

Izteiksme ir lielāka par 0, jo $a_1,a_2,\ldots,a_n$ un $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ir divas nedilstošas skaitļu virknes.

Vienādība ir spēkā vienīgi gadījumā, ja $a_1=a_2=\ldots=a_n$ vai $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

7. Bernulli nevienādība. Ja $h\ge-1$, tad attiecībā uz jebkuru naturālu n ir spēkā nevienādība $(1+h)^n\ge 1+nh$.

Pierādījums.

Pierādīsim izmantojot matemātisko indukciju.

Ja n = 1, tad $(1+h)^1\ge 1+1h$.

Ja n = 2, tad $(1+h)^2\ge 1+2h+h^2\ge 1+2h$.

Pieņemsim, ka nevienādība ir spēkā, ja n = k:

$$(1+h)^k\ge 1+kh. \qquad (1)$$

Pierādīsim, ka nevienādība ir pareiza arī tad, ja n = k+1, t.i.,

$$(1+h)^{k+1}\ge 1+(k+1)h.$$

Sareizinot abas nevienādības (1) puses ar nenegatīvu skaitli 1+h, iegūstam

$$(1+h)^{k+1}\ge(1+h)(1+kh)$$

jeb $(1+h)^{k+1}\ge 1+(k+1)h+kh^2$.

Tāpēc $(1+h)^{k+1}\ge 1+(k+1)h$.

Vienādība ir spēkā tikai gadījumā, ja n = 1 vai h = 0.

8. Heldera nevienādība. Pieņemsim, ka p, q ir racionāli skaitļi, p>1, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Tad attiecībā uz jebkuriem pozitīviem skaitļiem $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ir spēkā nevienādība

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \quad x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\le(x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Pierādījums.

Vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. Ja p un q ir pozitīvi racionāli skaitļi un $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tad jebkuriem pozitīviem skaitiem x un y ir spēkā nevienādība $xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

Pierādījums.

Tā kā p un q ir pozitīvi racionāli skaitļi, tad ir iespējams atrast tādu veselu pozitīvu skaitli k, lai skaitlis $m = k\frac{p}{q}$ būtu vesels.

Apzīmēsim ar z un u šādus skaitļus:

$$z = x^{\frac{m+k}{k}} \text{ un } u = y^{\frac{m+k}{m}}. \qquad (1)$$

Pamatojoties uz nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$\sqrt[k+m]{\underbrace{zzz...z}_{k} \cdot \underbrace{uuu...u}_{m}} \le \frac{1}{m+k}\left(\underbrace{z+z+z+...+z}_{k} \cdot \underbrace{u+u+u+...+u}_{m}\right)$$

jeb $\sqrt[k+m]{z^k \cdot u^m} \le \frac{1}{k+m}(kz+mu)$. $\qquad$ (2)

Tā kā $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tad p+q=pq. Dots arī, ka $m = k\frac{p}{q}$.

Tātad $k+m = k+k\frac{p}{q} = k\frac{p+q}{q} = \frac{kpq}{q} = kp.$ $\qquad$ (3)

No (2) un (3) varam uzrakstīt

$$z^{\frac{k}{kp}} \cdot u^{\frac{m}{kp}} \le \frac{1}{kp}(kz+mu). \qquad (4)$$

Savukārt no (1) un (3) iegūstam

$$z = x^{\frac{kp}{k}} \text{ un } u = y^{\frac{kp}{m}}. \qquad (5)$$

Ievietojot z un u vērtības no (5) nevienādībā (4), iegūstam

$$xy \le \frac{1}{kp}\left(kx^p + my^{\frac{kp}{m}}\right)$$

$$\text{jeb } xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{my^{\frac{kp}{m}}}{kp}.$$

Ņemot vērā, ka $m = k\frac{p}{q}$, iegūstam

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

Tagad pierādīsim Heldera nevienādību.

Pieņemsim, ka $\left(x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = X$ un $\left(y_1^q + y_2^q + ... + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = Y$, un izdalīsim abas nevienādības puses ar XY.

Ja mēs vēl apzīmēsim $\frac{x_k}{X} = z_k$ un $\frac{y_k}{Y} = t_k$, kur k=1, 2, ..., n, tad pierādāmā nevienādība reducējas par $z_1t_1 + z_2t_2 + ... + z_nt_n \le 1$, kur $z_1^p + z_2^p + ... + z_n^p = 1$ un $t_1^q + t_2^q + ... + t_n^q = 1$. Pamatojoties uz lemmu, varam uzrakstīt n nevienādības:

$$z_1t_1 \le \frac{1}{p}z_1^p + \frac{1}{q}t_1^q,$$

$$z_2t_2 \le \frac{1}{p}z_2^p + \frac{1}{q}t_2^q,$$

....

$$z_nt_n \le \frac{1}{p}z_n^p + \frac{1}{q}t_n^q.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$z_1t_1 + z_2t_2 + ... + z_nt_n \le \frac{1}{p}\left(z_1^p + z_2^p + ... + z_n^p\right) + \frac{1}{q}\left(t_1^q + t_2^q + ... + t_n^q\right) = \frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tādējādi Heldera nevienādība ir pierādīta.

<u>Piezīme.</u>

Jāievēro, ka Bunjakovska - Košī nevienādība ir Heldera nevienādības speciālgadījums, ja p = q = 2.

<u>9.</u> Pierādīt, ka ir spēkā nevienādība $Q \ge A \ge G \ge H$, ja

Q - vidējais kvadrātiskais
A - vidējais aritmētiskais
G - vidējais ģeometriskais
H - vidējais harmoniskais

(n pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$.)

Pierādījums.

Sakarību $A \ge G \ge H$ esam jau pierādījuši iepriekš, tātad tikai jāpierāda, ka $Q \ge A$, t.i.:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

1.pierādījums.

Ja $a_1 + a_2 + ... + a_n = a,$ (1)

tad $a_1 = \frac{a}{n} + m_1,$

$$a_2 = \frac{a}{n} + m_2, \quad (2)$$

....

$$a_n = \frac{a}{n} + m_n.$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a + \left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right).$$

No (1) varam secināt, ka $m_1 + m_2 + ... + m_n = 0$.

No (2) iegūstam, ka

$$a_1^2 = \frac{a^2}{n^2} + 2\frac{am_1}{n} + m_1^2,$$

$$a_2^2 = \frac{a^2}{n^2} + 2\frac{am_2}{n} + m_2^2,$$

....

$$a_n^2 = \frac{a^2}{n^2} + 2\frac{am_n}{n} + m_n^2.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{a^2}{n} + 2\frac{a}{n}\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right) + \left(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2\right).$$

Tā kā $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, tad $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \dfrac{a^2}{n} + \left(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2\right)$

un $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \dfrac{a^2}{n}$.

Tādējādi nevienādību esam pierādījuši.

2.pierādījums.

Ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, tad ir spēkā vienādība.

Pieņemsim, ka vismaz daži a_i atšķiras savā starpā.

Apzīmēsim $M = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{M}, \alpha_2 = \frac{a_2}{M}, \ldots, \alpha_n = \frac{a_n}{M},$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Acīmredzami, ka

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2 = 1,$$

$$\left(\alpha_1 - \beta_1\right)^2 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)^2 + \ldots + \left(\alpha_n - \beta_n\right)^2 \geq 0.$$

Apzīmēsim $x = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$.

Tagad $\left(\alpha_1 - \beta_1\right)^2 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)^2 + \ldots + \left(\alpha_n - \beta_n\right)^2 = 2 - 2x \geq 0,$ tātad $x \leq 1$.

Tāpēc $\left|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n\right| \leq 1,$

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\frac{1}{M\sqrt{n}} \leq 1,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M\sqrt{n},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

3.pierādījums.

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 \ge 2a_1a_2 \\ a_1^2 + a_3^2 \ge 2a_1a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}^2 + a_n^2 \ge 2a_{n-1}a_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Saskaitot (1) un (2), iegūstam

$$n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \ge \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ge \frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2}{n} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}.$$

Tas arī bija jāpierāda.
Esam pierādījuši, ka $Q \ge A \ge G \ge H$.

Uzdevumi

1. Dots, ka α, β, χ ir pozitīvi skaitļi,
$\alpha + \beta + \chi = 1$, arī $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ir pozitīvi skaitļi.
Pierādīt, ka

$$a_1^\alpha b_1^\beta c_1^\chi + a_2^\alpha b_2^\beta c_2^\chi + \ldots + a_n^\alpha b_n^\beta c_n^\chi \le$$
$$\le \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^\alpha \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_m\right)^\beta \left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)^\chi.$$

2. Pierādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \ge 64,$$

ja x, y, z ir pozitīvi skaitļi un x+y+z=1.

3. p un q ir pozitīvi racionāli skaitļi un $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pierādīt, ka jebkuriem pozitīviem skaitļiem x un y ir spēkā nevienādība

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

4. Pierādīt, ka $\left(a_1 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^n\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \le \frac{2}{n(n+1)}\left(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right)$.

Kad spēkā vienādība?

5. Dots, ka x_1, x_2, x_3 ir pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \ge \frac{3}{2}.$$

Kad nevienādība pārvēršas par vienādību?

6. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem x_1, x_2, x_3, x_4 ir spēkā nevienādība

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} \ge 2.$$

Kad nevienādība pārvēršas par vienādību?

7. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ir spēkā nevienādība $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2} \geq \frac{5}{2}$.

Kad nevienādība pārvēršas par vienādību?

8. Pierādīt, ka attiecībā uz patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ir spēkā nevienādība $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_6}+\frac{x_5}{x_6+x_1}+\frac{x_6}{x_1+x_2} \geq 3$.

Kad nevienādība pārvēršas par vienādību?

9. Izmantojot Čebiševa nevienādību, pierādīt, ka attiecībā uz visiem naturāliem skaitļiem n ir spēkā nevienādība

$$\frac{(n-1)^2 pq + (n-1)(p+1)+1}{n} \leq (n-1)pq+1,$$

Ja p≥1, q≥1 (vai p≤1, q≤1).

10. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuru naturālu skaitli n ir spēkā nevienādība

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

11. Pierādīt, ka $(x_1^p+y_1^p)^{\frac{1}{p}} + (x_2^p+y_2^p)^{\frac{1}{p}} \geq \left[(x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p\right]^{\frac{1}{p}}$, kur p≥1.

12. Pierādīt, ka

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{1}{2}} + (b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots + (l_1^2+l_2^2+\ldots+l_n^2)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \left[(a_1+b_1+\ldots+l_1)^2 + (a_2+b_2+\ldots+l_2)^2 + \ldots + (a_n+b_n+\ldots+l_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

7. INTERPRETĀCIJU METODES NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Vairākās iepriekšējās nodaļās tika izmantota ģeometriskā interpretācija, lai pierādītu dažādas nevienādības (4. nodaļas 6. piemērs u.c.). Šajā nodaļā līdzīgas metodes aplūkosim nedaudz pilnīgāk.

7.1. DEKARTA KOORDINĀTU SISTĒMAS IZMANTOŠANA.

Viena pierādījumu grupa izmanto faktu, ka īsākais attālums starp 2 punktiem ir taisnes nogrieznis, kas tos savieno.

<u>**1.piemērs.**</u> Pierādīt nevienādību

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2} \geq 2$.

Pierādījums. Aplūkojam Dekarta koordinātu sistēmā Oxy trīs punktus A(1;0), B(-1;0) un M(x;y). No nevienādības starp trijstūra ABM malu garumiem izriet, ka

|AM|+|BM|≥|AB|.

Bet

$$|AM| = \sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

$$|BM| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

un |AB|=2.

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}\geq 4.$

2. Doti pozitīvi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$, kuri mazāki par 1. Pierādīt nevienādību

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2}\geq k\sqrt{2}.$$

7.2. VEKTORU IZMANTOŠANA NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Ļoti plaši tiek izmantota nevienādību interpretācija ar vektoru palīdzību.

2.piemērs. Doti 8 reāli skaitļi: a, b, c, d, e, f, g, h. Pierādīt, ka kaut viens no sešiem skaitļiem ac+bd, ae+df, ag+bh, ce+df, cg+dh, eg+fh ir nenegatīvs.

Pierādījums. Apskatīsim četrus vektorus: $\vec{v_1}=(a,b),\ \vec{v_2}=(c,d),\ \vec{v_3}=(e,f),\ \vec{v_4}=(g,h).$

Norādītie seši skaitļi ir vienādi ar šo vektoru pāru skalārajiem reizinājumiem $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2};\vec{v_1}\cdot\vec{v_3};\vec{v_1}\cdot\vec{v_4};\ldots;\vec{v_3}\cdot\vec{v_4}$. Tā kā viens no leņķiem starp ieviestajiem vektoriem nepārsniedz $\frac{\pi}{2}$, tad viens no reizinātājiem ir nenegatīvs.

Uzdevumi.

3. Pierādīt, ka pozitīviem a, b, c ir spēkā nevienādība

$$a+b+c\leq\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

4. Dots, ka $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ Pierādīt, ka

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geq-\frac{3}{2}.$$

5. Pierādīt, ka

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_1^2+b_1^2}\geq$$
$$\geq\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}.$$

6. Pierādīt, ka $\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}\geq\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$,

ja $a\geq 0$ un $b\geq 0$.

7.3. TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU IZMANTOŠANA

Pierādījumu var pamatot ar trigonometrisko funkciju definīcijām un sakarībām ģeometriskajās figūrās.

3.piemērs. Pierādīt, ka ir spēkā nevienādība $tg\alpha\cdot tg\beta>1$, ja $0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2}$ un $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$.

Pierādījums. Apskatām šaurleņķu trijstūri ABC.

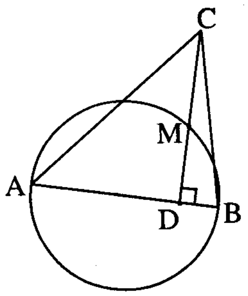
Pēc konstrukcijas

$\frac{MD}{AD}=\frac{DB}{MD}$, tātad $\frac{MD}{AD}\cdot\frac{MD}{DB}=1.$

Tā kā CD>MD, tad $\dfrac{CD}{AD}\cdot\dfrac{CD}{DB}>1$.

Ņemot vērā, ka $tgA=\dfrac{CD}{AD}$ un $tgB=\dfrac{CD}{DB}$,

iegūstam tgA·tgB>1.



4.piemērs. Pierādīt, ka attiecībā uz katru šauru leņķi α ir spēkā nevienādība

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5.$$

Pierādījums.

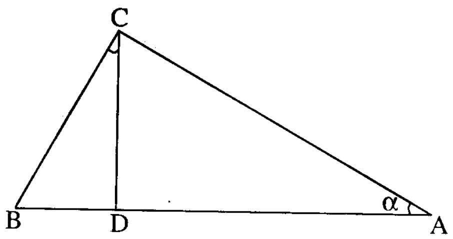
Konstruēsim taisnleņķa trijstūri ABC, kura augstums CD = 1.

Izmantojot leņķa α trigonometriskās funkcijas, izsakām trijstūra ABC katetes un hipotenūzu:

$$BC=\frac{1}{\cos\alpha};\ CA=\frac{1}{\sin\alpha};\ BA=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Uzdevuma apgalvojumu iegūstam no nevienādības a + b + c>4.

Savukārt šī nevienādība izriet no tā, ka a+b>c un c$\geq$2, jo augstums taisnleņķa trijstūrī nac lielāks par tādas riņķa līnijas rādiusu, kura uzkonstruēta uz hipotenūzas kā diametra.



Uzdevumi.

7. Pierādīt, ka $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$.

8. Doti 5 dažādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus un apzīmēt ar x un y tā, ka ir spēkā nevienādība $0<\dfrac{x-y}{1+xy}<1$.

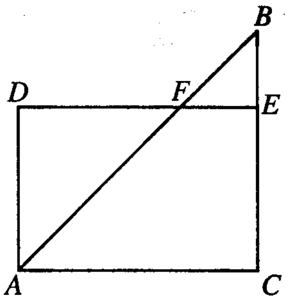
9. Pierādīt nevienādību $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$, ja a, b un c ir pozitīvi skaitļi, no kuriem katru divu skaitļu summa ir lielāka par trešo skaitli.

7.4. LAUKUMU NOVĒRTĒŠANA UN SALĪDZINĀŠANA

Aplūkosim piemērus, kuros tiek izmantotas laukumu novērtēšanas un salīdzināšanas idejas.

5.piemērs. Pierādīt nevienādību $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$.

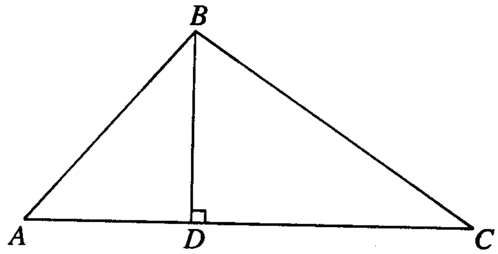
Pierādījums.



Uz taisnā leņķa CAD malām atliksim nogriežņus $AC=\sqrt{a_2}$ un $AC=\sqrt{a_1}$ un novilksim $\angle$CAD bisektrisi. Caur punktu D novilksim taisni DFE paralēli AC. Figūra ADBFC sastāv no diviem vienādsānu trijstūriem ADF un ACB. To laukumi $S_{\Delta ADF}=\frac{1}{2}a_1$ un $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a_2$. Bet $S_{ADEC}=\sqrt{a_1 a_2}$. Zīmējumā redzams, ka $S_{\Delta ADF}+S_{\Delta ACB}\geq S_{ADEC}$, tātad $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$.

<u>6.piemērs.</u> Dots, ka a>c, B>c>0. Pierādīt, ka $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$. (1)

Pierādījums.



Konstruējam trijstūri, kur AB=$\sqrt{a}$, BD = $\sqrt{c}$, BC = $\sqrt{b}$.

No šejienes $|AD|=\sqrt{|AB|^2-|BD|^2}=\sqrt{a-c}$,

$$|CD|=\sqrt{b-c}.$$

Tāpēc $S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BD|=\frac{1}{2}(\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c})\sqrt{c}.$

Savukārt $S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\angle ABC\leq\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\sqrt{ab}.$

Tātad $\frac{1}{2}(\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c})\sqrt{c}\leq\frac{1}{2}\sqrt{ab},$

bet šī nevienādība ir ekvivalenta ar (1).

Uzdevumi

10. Pierādīt, ka sinx<x<tgx un $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$, ja 0<x<$\frac{\pi}{2}$.

11. Pierādīt, ka $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}$, ja 0<n$\alpha$<$\frac{\pi}{2}$ un n ir naturāls skaitlis.

12. Pierādīt, ka α-sinα<β - sinβ, ja α un β ir šauri leņķi un α<β.

13. Pierādīt, ka tgα - α<tg β - β, ja α un β ir šauri leņķi un α<β.

14. Pierādīt, ka $\frac{tg\alpha}{\alpha} < \frac{tg\beta}{\beta}$, ja α un β ir šauri leņķi un α<β.

15. Pierādīt, ka $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta}$, ja α un β ir šauri leņķi un α<β.

7.5. VARBŪTĪBU TEORIJAS ELEMENTI NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Viena no interpretāciju metodēm ir varbūtību teorijas izmantošana.

7.piemērs. Dots, ka p, q un r ir pozitīvi skaitļi un p+q+r = 1.

Pierādīt nevienādību $(1-p^5)^5+(1-q^5)^5+(1-r^5)^5>2$.

Pierādījums. Apskatām tabulas 5x5 krāsošanu trijās krāsās: katru rūtiņu neatkarīgi no citām nokrāsojam baltu (ar varbūtību p), melnu (ar varbūtību a) vai sarkanu (ar varbūtību r). Ievērosim:

p^5 - varbūtība, ka viena fiksēta rindiņa ir pilnīgi balta,

$(1-p^5)$ - varbūtība, ka viena fiksēta rindiņa nav pilnīgi balta,

$(1-p^5)^5$ - varbūtība, ka neviena no 5 rindiņām nav pilnīgi balta,

(α) $[1-(1-p^5)^5]$ - varbūtība, ka viena no 5 rindiņām ir pilnīgi balta,

(β) $[1-(1-q^5)^5]$ - varbūtība, ka viena no 5 kolonnām ir pilnīgi melna,

(γ) $[1-(1-r^5)^5]$ - varbūtība, ka viena no rūtiņu kopām, kas tabulā aizpildītas ar vienādiem cipariem, ir pilnīgi sarkana.

Tā kā (α),(β) un (γ) ir nesavietojami notikumi, tad to varbūtību summa ir mazāka par 1 (jo var arī nerasties neviens no tiem). No šejienes izriet pierādāmā nevienādība.

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Uzdevumi.

16. Pierādīt, ka $(1-p^m)^n+(1-q^n)^m\ge 1$, ja zināms, ka p+q=1 un p>0, q>0, m, n $\in$N, m, n$\ge$2.

Tālākie uzdevumi ņemti no S.Vilciņas diplomdarba.

Pierādīt nevienādības (17. - 20.)

17. $(1-p_1^2)^2+(1-p_2^2)^2+(1-p_3^2)^2\ge 2$, ja zināms, ka $p_1+p_2+p_3=1$ un $p_1, p_2, p_3>0$.

18. $(1-p_3^2)^2\ge p_1^9+p_2^9$, ja zināms, ka $p_1+p_2+p_3=1$ un $p_1, p_2, p_3>0$.

19. $(1-p_1^5)^5+(1-p_2^5)^5\le 1+2p_3^5+p_3^9$, ja zināms, ka $p_1+p_2+p_3=1$ un $p_1, p_2, p_3>0$.

20. $p_1^6+2\le(1-p_2^3)^6+(1-p_3^4)^2+(1-p_4^4)^2$, ja zināms, ka $p_1+p_2+p_3+p_4=1$ un $p_1, p_2, p_3, p_4>0$.

8. NEVIENĀDĪBĀ IETILPSTOŠO FUNKCIJU ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Daudzas nevienādības var tikt pierādītas, izmantojot nevienādībā ietilpstošo funkciju īpašības.

8.1. SINUSA UN KOSINUSA FUNKCIJU IEROBEŽOTĪBAS IZMANTOŠANA

Nevienādību pierādīšanā reizēm tiek izmantota sinusa un kosinusa funkciju vērtību apgabala ierobežotība.

1.piemērs. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkurām x,y un z vērtībām ir spēkā nevienādība
$\sin x\cdot \cos y\cdot \sin z + \cos x \cdot \sin y \cdot \cos z \le 1$.

Pierādījums. Acīmredzami, ka

$$\sin x\cdot \cos y\cdot \sin z + \cos x \cdot \sin y \cdot \cos z \le \max(\pm\sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y),$$

kur zīmes tiek izraudzītas patvaļīgi. Savukārt

$$\max(\pm\sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y) = \max |\sin (x\pm y)| \le 1.$$

2.piemērs. Pierādīt nevienādību

$$|\cos x + \sin x| \le \sqrt{2}.$$

Pierādījums. Veiksim šādus pārveidojumus:

$$|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Ņemot vērā sinusa funkcijas ierobežotību, iegūstam

$$\sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}.$$

Uzdevumi.

1. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkurām reālām x, y, z vērtībām ir spēkā nevienādība
$$\sin x\cdot \sin y\cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \le 1.$$
2. Pierādīt, ka visiem reāliem x>0, y>0 un visiem reāliem α ir spēkā nevienādība
$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha} < x + y$$
3. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem x un y ir spēkā nevienādība
$$\sin\left(\frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{2}\right) \ge \sin(\sin x \cdot \sin y).$$
4. Pierādīt, ka $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 1$, kur $-1 \le a \le 1$, $-1 \le b \le 1$.
5. Pierādīt, ka katram šauram leņķim α ir spēkā nevienādība
$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5.$$

8.2. PAKĀPES FUNKCIJAS ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA

Pierādījumu var pamatot arī uz pakāpes funkcijas īpašībām.

3.piemērs. Zināms, ka a + b = c (a>0, b>0). Pierādīt, ka

a) $a^\alpha + b^\alpha > c^\alpha$, kur $\alpha < 1$;
b) $a^\beta + b^\beta > c^\beta$, kur $\beta > 1$.

Pierādījums. Apskatīsim skaitļus $\frac{a}{c}$ un $\frac{b}{c}$. Pēc uzdevuma nosacījuma $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$ un $\frac{a}{c}>0$, $\frac{b}{c}>0$. Ja divu skaitļu summa ir vienāda ar vienu, tad katrs no šiem skaitļiem ir mazāks par vienu. Tātad $0<\frac{a}{c}<1$ un $0<\frac{b}{c}<1$.

Ņemot vērā monotono dilšanu pakāpes funkcijai, kuras bāze ir mazāka par 1, iegūstam $\left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha}>\frac{a}{c}$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\alpha}>\frac{b}{c}$, $\left(\frac{a}{c}\right)^{\beta}>\frac{a}{c}$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\beta}>\frac{b}{c}$,

kur $\alpha<1$ un $\beta>1$. No pēdējās nevienādību virknes izriet, ka

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\alpha}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1\Leftrightarrow a^{\alpha}+b^{\alpha}>c^{\alpha}.$$

Analogi iegūstam $a^{\beta}+b^{\beta}>c^{\beta}$.

Uzdevumi

6. Pierādīt, ka pozitīviem a, b, c un d ir spēkā $a^{c+d}+b^{c+d}\geq a^{c}b^{d}+a^{d}b^{c}$.

7. Vairāku skaitļu summa ir 1. Vai šo skaitļu kvadrātu summa var būt mazāka par 0,1?

8.3. KVADRĀTTRINOMA ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA.

8.3.1. Ļoti bieži tiek izmantotas kvadrāttrinoma īpašības, no tām sevišķi plaši šāda īpašība: ja kvadrāttrinoma vērtība visiem x ir nenegatīva, tad tā diskriminantam jābūt mazākam vai vienādam ar nulli.

4.piemērs. Pierādīt Bunjakovska nevienādību

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

Pierādījums. Apskatīsim nevienādību

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2\geq 0,$$

kura ir spēkā visiem x. Kvadrāttrinoma diskriminantam jābūt mazākam par 0 vai vienādam ar 0. No tā izriet Bunjakovska nevienādība:

$$x^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)x+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\geq 0,$$

$$D=4(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2-4(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\leq 0.$$

8.3.2. Var izmantot arī divu atšķirīgu sakņu pastāvēšanu, ja kvadrāttrinoma diskriminants ir lielāks par 0.

5. piemērs. Pierādīt, ka $b^2>4ac$, ja $a^2+ab+ac<0$.

Pierādījums. Apskatīsim trinomu $f(x)=cx^2+bx+a$. Tad $f(0)=a$ un $f(1)=a+b+c$, un pēc nosacījuma tie ir dažādu zīmju skaitļi. Tātad funkcijas f grafiks krusto Ox asi divos atšķirīgos punktos. Tas nozīmē, ka trinomam f ir divas atšķirīgas saknes. No tā izriet, ka diskriminants ir lielāks par 0, tātad $b^2>4ac$.

Uzdevumi.

8. Pierādīt, ka $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$, ja a, b un c ir patvaļīga trijstūra malas.

9. Par pozitīviem skaitļiem $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ir zināms, ka $b_1^2 \le a_1c_1$ un $b_2^2 \le a_2c_2$.
Pierādīt, ka $(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 3)^2$.

10. Visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā nevienādības

$$ax^2 + 2bx + c \ge 0,$$

$$px^2 + 2qx + r \ge 0,$$

kur a, b, c, p, q, r ir reāli skaitļi. Pierādīt, ka visiem reāliem x $apx^2 + 2bqx + cr \ge 0$.

11. Doti vienādojumi $ax^2 + bx + c = 0$ un $-ax^2 + bx + c = 0$, un x_1, x_2 ir kaut kādas šo vienādojumu saknes. Pierādīt, ka atradīsies tāda sakne x_3 no vienādojuma $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0,$ ka vai nu $x_1 \le x_3 \le x_2$, vai arī $x_1 \ge x_3 \ge x_2$.

12. Pierādīt, ka reāli skaitļi a, b un c ir pozitīvi, ja tie atbilst nevienādībām
a + b + c>0, ab + bc + ca > 0, abc > 0.

9. PIERĀDĪJUMI NO PRETĒJĀ

Šī metode tiek lietota šādā formā: lai pierādītu, ka ir spēkā nevienādība A<B, pieņem, ka ir spēkā nevienādība A$\ge$B, un ar dažādu spriedumu palīdzību atrod pretrunu starp pieņēmumu un uzdevumā dotajiem faktiem vai arī no nevienādības A > B secina, ka cita nevienādība ir acīmredzami aplama.

1.piemērs. Pierādīt, ka $AC - B^2 \le 0$,
ja a, b, c, A, B, C ir reāli skaitļi, kas atbilst attiecībai $aC - 2bB + cA = 0$ un $ac - b^2 > 0$.

Pierādījums. Pierādīsim, ka vienādība $aC + cA = 2bB$ (1)
un nevienādības $ac>b^2$ un $AC>B^2$ (2)
nevar realizēties vienlaikus.
Patiešām no nevienādībām (2) izriet, ka $acAC>b^2B^2$.
Līdz ar to izteiksmi (1) var pārveidot formā $4acAC>(aC+cA)^2$
vai arī formā $0>(aC-cA)^2$,
taču šī nevienādība nav iespējama.

2.piemērs. Reāli skaitļi a, b un c ir tādi, ka $abc = -\frac{(a+b+c)}{3}$. Pierādīt, ka kaut viena skaitļa a, b, c absolūtā vērtība nepārsniedz $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pierādījums.
Skaidrs, ka skaitļi a, b, c nevar būt ar vienādu zīmi. Mēs uzskatīsim, ka a, b > 0, bet trešo skaitli apzīmēsim ar -d<0. Pieņemsim, ka a, b, d > $\frac{1}{\sqrt{3}}$,

un iegūsim $(a\sqrt{3} - 1)(b\sqrt{3} - 1)>0$.

Tātad $3ab>(a+b)\sqrt{3} - 1$

$$\text{vai } abc = -abd < -\frac{ab}{\sqrt{3}} < -\frac{a+b}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} < -\frac{a+b}{3} + \frac{d}{3} = -\frac{(a+b+c)}{3}.$$

Tas ir pretrunā ar nosacījumu.

3.piemērs. Pierādīt, ka attiecībā uz jebkuriem pozitīviem x, y, z ir spēkā nevienādība

$$\sqrt[2]{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[4]{z}}} \ge \sqrt[32]{xyz}.$$

Pierādījums.

Pieņemsim, ka šī nevienādība nav spēkā. Tad ir spēkā nevienādība $\sqrt[2]{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} < \sqrt[32]{xyz}.$

Kāpinot šo nevienādību kvadrātā, iegūstam $x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}} < \sqrt[16]{xyz}.$

no kurienes izriet, ka $x < \sqrt[16]{xyz}$ (1)

$$\text{un } \sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}} < \sqrt[16]{xyz}.$$

Savukārt, kāpinot trešajā pakāpē pēdējo nevienādību, iegūstam

$$y+\sqrt[4]{z} < \sqrt[16]{(xyz)^3}.$$

Tas nozīmē, ka $y < \sqrt[16]{(xyz)^3}$ (2)

$$\text{un } \sqrt[4]{z} < \sqrt[16]{(xyz)^3}.$$

Šo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$z < \sqrt[4]{(xyz)^3}. \qquad (3)$$

Nevienādības (1), (2) un (3) pārrakstīsim tā, lai to kreisajā pusē būtu x, y, z sešpadsmitā pakāpe, un visas trīs sareizināsim:

$$x^{16} < xyz,$$
$$y^{16} < (xyz)^3,$$
$$z^{16} < (xyz)^{12}.$$

Reizinot iegūsim $x^{16}y^{16}z^{16} < (xyz)^{16}$,

taču tas ir aplami.

<u>4.piemērs.</u> Pierādīt, ka uz nekādiem x, y, z nevar vienlaikus attiekties trīs nevienādības:

$$|x| < |y-z|,$$
$$|y| < |z-x|,$$
$$|z| < |x-y|.$$

Pierādījums.

Pieņemsim, ka visas trīs nevienādības ir spēkā vienlaikus. Pa locekļiem katru nevienādību kāpināsim kvadrātā, pārnesīsim visus nevienādības locekļus uz kreiso pusi un sadalīsim reizinātājos iegūtās kvadrātu starpības:

$$(x-y+z)(x+y-z) < 0,$$
$$(y-z+x)(y+z-x) < 0,$$
$$(z-x+y)(z+x-y) < 0.$$

Ja sareizina visas trīs nevienādības, rodas pretruna:

$$\left((x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)\right)^2 < 0$$

Uzdevumi.

1. Dots, ka $a_1=a_7=0$, $a_2>0$, $a_3>0$, $a_4>0$, $a_5>0$, $a_6>0$. Pierādīt, ka var atrast tādu i, $2 \le i \le 6$, lai $a_{i-1}+a_{i+1} \le a_i\sqrt{3}$.
2. Pierādīt, ka mazākais no skaitļiem $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ ir mazāks vai vienāds ar skaitli $0{,}5(a^2+b^2+c^2)$.
3. Doti nenegatīvi reāli skaitļi A, B un C. Pierādīt nevienādību $\max(A^2-B, B^2-C, C^2-A) \ge \max(A^2-A, B^2-B, C^2-C)$.
4. Doti nenegatīvi reāli skaitļi A, B, C un D. Pierādīt nevienādību

max(A^2-B, B^2-C, C^2-D, D^2-A)$\geq$max(A^2-A, B^2-B, C^2-C, D^2-D).

5. Pierādīt, ka attiecībā uz pozitīviem skaitļiem a, b un c, kuriem abc = 1, ir spēkā a + b + c$\geq$3.

6. Pierādīt, ka nevienādība cos x^2 + cos y^2 + cosxy < 3 ir spēkā attiecībā uz visiem reāliem skaitļiem x un y.

7. Pierādīt, ka nevienādība $\frac{1}{3} \leq \frac{tg3\alpha}{tg\alpha} \leq 3$ neatbilst nevienai α vērtībai.

8. Zināms, ka f(x) ir visur definēta funkcija, kas nav konstanta; dots, ka katram a un b $|f(a)-f(b)| \leq |a-b|^{\alpha}$.
Pierādīt, ka α < 1.

9. Pierādīt, ka nevienādību sistēmai nav atrisinājuma.

$$\begin{cases} |x| > |y - z + t| \\ |y| > |x - z + t| \\ |z| > |x - y + t| \\ |t| > |x - y + z| \end{cases}$$

10. DAŽI SKAITLISKO NEVIENĀDĪBU PĀRBAUDĪŠANAS PAŅĒMIENI.

Reizēm var rasties nepieciešamība noskaidrot, kurš no diviem vai vairākiem skaitļiem ir vislielākais, kurš vismazākais. Tālāk piemēros apskatīti daži izplatītākie skaitlisko nevienādību pārbaudīšanas paņēmieni.

10.1. SKAITĻU STARPĪBA

10.1.1. Ja ir jānoskaidro, kurš no diviem racionāliem skaitļiem $\frac{m}{n}$ un $\frac{p}{q}$ ir lielāks, tad ērti izskaitļot šo skaitļu starpību:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}.$$

Ja starpība ir lielāka par 0, tad $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$,

ja mazāka par 0, tad $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$.

10.1.2. Ja skaitļi m, n, p un q ir ļoti lieli, tad iepriekš aprakstītā metode var būt neracionāla. Ja, piemēram, jāsalīdzina skaitļi $\frac{1234567}{1234569}$ un $\frac{1234568}{1234570}$,
ērtāk ir vispirms no abiem skaitļiem atņemt skaitli 1 un attiecībā uz iegūtajiem skaitļiem $-\frac{2}{1234569}$ un $-\frac{2}{1234570}$ izmantot punktā 9.1.1. aprakstīto metodi.

Iegūstam $-\frac{2}{1234569} + \frac{2}{1234570} = \frac{-2 \cdot 1234570 + 2 \cdot 1234569}{1234569 \cdot 1234570}$, bet šis skaitlis acīmredzami ir mazāks par 0. Tātad

$$\frac{1234567}{1234569} < \frac{1234568}{1234570}.$$

Uzdevumi.

Kurš no dotajiem skaitļiem ir lielāks (1.-4.)?

1. $\frac{19941994}{19941996}$ vai $\frac{19941995}{19941997}$;

2. $\frac{19791979}{19791980}$ vai $\frac{19791980}{19791981}$;

3. $\frac{39258}{39259}$ vai $\frac{39260}{39261}$;

4. $\frac{9876543}{9876544} + \frac{5432}{5433}$ vai $\frac{9876544}{9876545} + \frac{5433}{5434}$.

10.2. TĀDU SKAITĻU SALĪDZINĀŠANA, KURI SATUR SAKNES ZĪMI

Salīdzinot skaitļus a un b, kuri satur saknes zīmi, bieži izmanto šādu metodi: pieņem, ka viens skaitlis ir lielāks par otru (piemēram, a>b), un veido tādu ekvivalentu pārveidojumu virkni, kuru rezultātā iegūst vai nu pareizu skaitlisku nevienādību (tad pieņēmums ir pareizs), vai arī nepareizu skaitlisku nevienādību (šinī gadījumā pieņēmums nav pareizs un tātad a<b).

10.2.1. Mēs bieži izmantojam vairākkārtīgu kāpināšanu. Piemēram, salīdzināsim skaitļus $\sqrt{14}$ - $\sqrt{3}$ un 2.

Pieņemsim, ka $\sqrt{14}$ - $\sqrt{3}$ <2.

Nevienādības abas puses ir pozitīvas, tātad varam kāpināt kvadrātā.

Iegūstam 14 - 2 $\sqrt{42}$ +3<4 vai 13<2 $\sqrt{42}$.

Ja atkārtoti kāpinām kvadrātā 169<168,

iegūtās skaitliskās nevienādības nepareizība ir acīmredzama, tātad $\sqrt{14}$ - $\sqrt{3}$ >2.

10.2.2. Reizēm, lai saīsinātu risinājumu, ir ērti lietot formulu

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

par kuras pareizību var pārliecināties, kāpinot abas vienādības puses kvadrātā.

Piemēram, salīdzināsim skaitļus

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} \text{ un } 0.$$

Attiecībā uz pirmā skaitļa pirmajiem diviem saskaitāmajiem izmantojot formulu, iegūstam

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right) - \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right) - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1+1-2}{\sqrt{2}} = 0.$$

No tā varam secināt, ka abi dotie skaitļi ir vienādi.

Uzdevumi

Kurš skaitlis ir lielāks (5. - 14.)?

5. $\sqrt{3}+\sqrt{4}$ vai $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

6. $\sqrt{8}+\sqrt{11}$ vai $\sqrt{5}+\sqrt{14}$.

7. $\sqrt{19}$ - $\sqrt{7}$ vai $2\sqrt{3}$.

8. $\sqrt{10}$ - $\sqrt{7}$ vai $\sqrt{2}$.

9. $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ vai $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

10. $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}$ vai $2\sqrt[3]{2}$.

11. $\sqrt{1973}+\sqrt{1975}$ vai $2\sqrt{1974}$.

12. $\sqrt{\dfrac{10^{1974}+1}{10^{1975}+1}}$ vai $\sqrt{\dfrac{10^{1975}+1}{10^{1976}+1}}$.

13. $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}-2\sqrt{2}$ vai 0.

14. $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$ vai 0.

10.3. EKVIVALENTIE PĀRVEIDOJUMI SKAITLISKO NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

Arī skaitlisku nevienādību pierādīšanā izmanto ekvivalentos pārveidojumus.

10.3.1. Diezgan bieži ekvivalento pārveidojumu ceļā iegūst acīmredzami pareizu skaitlisku nevienādību.

Piemēram, ja ir jāpierāda skaitliska nevienādība $\sqrt[3]{49}>2\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{9}$,

tad ekvivalento pārveidojumu ceļā iegūstam

$$\sqrt[3]{49}-2\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}>0,$$

$$\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}\right)^2>0.$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzama.

10.3.2. Dažreiz ekvivalento pārveidojumu ceļā iegūtā skaitliskā nevienādība ir viegli pierādāma ar kādu citu metodi.

Piemēram, pierādot nevienādību $\log_2\pi+\log_4\pi<\dfrac{5}{2}$,

veicam šādus pārveidojumus:

$$\log_2 \pi + \frac{1}{2\log_2 \pi} < \frac{5}{2},$$

$$\frac{3\log_2 \pi}{2} < \frac{5}{2},$$

$$3\log_2 \pi < 5,$$

$$\log_2 \pi^3 < \log_2 2^5,$$

$$\pi^3 < 2^5.$$

Pārveidojumu rezultātā iegūtā nevienādība $\pi^3<2^5$ izriet no nevienādību virknes $\pi^3<3{,}15^5 \cdot 3{,}15<10 \cdot 3{,}2=32=2^5$.

Uzdevumi.

Pierādīt nevienādības (15. - 20.)

15. $2\sqrt[5]{25}+2\sqrt[5]{15}+\sqrt[5]{49}>2\sqrt[5]{35}-\sqrt[5]{9}$.

16. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{49}-2\sqrt[3]{35}>2\sqrt[3]{15}-2\sqrt[3]{25}$.

17. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}>\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}$.

18. $S=\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_8 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}<4$.

19. $\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}>4$.

20. $\log_{81}576<\log_{36}192$.

Kurš skaitlis ir lielāks (21. - 24.)?

21. $15^{\log_3 10}\ vai\ 10^{\log_3 15}$.

22. $9^{\log_{15} 10}\ vai\ 10^{\log_{15} 6}$.

23. $12^{\log_4 10}\ vai\ 10^{\log_4 13}$.

24. $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 99$ vai 50^{99}.

10.4. NEVIENĀDĪBAS PASTIPRINĀŠANAS METODE SKAITLISKO NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ.

Lai salīdzinātu skaitļus a un b, atrod tādu c, attiecībā uz kuru ir spēkā vai nu a<c un c<b (tad a<b), vai arī a>c un c>b (tad a>b).

10.4.1. Reizēm, izmantojot kādu no funkciju pamatīpašībām, tiek būtiski atvieglots c atrašanas uzdevums.

1.piemērs. Salīdzināt $2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$ 100 reiže un $3^{3^{3^{\cdots^{3}}}}$ 99 reizes.

Risinājums. Tā kā $2^{2^2}<3^3$, tad $\left(2^{2^2}\right)^{2^{\cdots^{2}}}$ 98 reizes $<\left(3^3\right)^{2^{\cdots^{2}}}$ 98 reizes $<\left(3^3\right)^{3^{\cdots^{3}}}$ 98 reizes.

2.piemērs.

Salīdzināt $\log_{0,3}0{,}4$ un $\log_{0,4}0{,}3$.

Risinājums. No logaritmiskās funkcijas īpašībām izriet, ka $\log_{0,3}0{,}4<1<\log_{0,4}0{,}3$.

10.4.2. Dažreiz nevienādību pierādīšanā izmanto tuvinātos aprēķinus.

Pieņemsim, ka jāpierāda $\sin 39^{o} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tuvākā tabulās atrodamā vērtība ir $\sin 30^{o} = \frac{1}{2}$, $\sin 30^{o} < \sin 39^{o}$.

Taču, ņemot par c skaitli $\frac{1}{2}$, mēs neko nepierādīsim, jo $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Viena no metodēm, ar kurām var uzlabot šo novērtējumu, ir šāda: ar pusleņķa formulu palīdzību izskaitļo $\sin 15^{o}$, $\cos 15^{o}$, $\sin 7^{o}30'$ un $\cos 7^{o}30'$. Tālāk

$$\sin 37^{o}30' = \sin 30^{o} \cdot \cos 7^{o}30' + \sin 7^{o}30' \cdot \cos 30^{o}.$$

Ievērojot nevienādību $\sin 37^{o}30' < \sin 39^{o}$

un par c ņemot skaitli $\sin 37^{o}30'$, pierādām, ka

$$\sin 37^{o}30' > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

tātad arī nevienādību.

Uzdevumi.

Salīdzināt skaitļus (25.-34.).

25. $0{,}99999^{1{,}00001} \cdot 1{,}00001^{0{,}99999}$ un 1.

26. 48^{25} un 344^{17}.

27. 31^{11} un 17^{14}.

28. 6^{65} un 9^{56}.

29. $\log_2 3$ un $\log_3 2$.

30. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ un $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.

31. $\log_7 3$ un $\log_5 9$.

32. $\log_{10} 11$, $\log_{12} 10$, $\log_{10} 12$ un $\log_{11} 10$.

33. $\sin 100$ un $\cos 1000$.

34. $\log_2 3$ un $\log_3 5$.

35. Pierādīt nevienādību $\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}$, neizmantojot kalkulatoru, tabulas utt.

UZDEVUMU ATRISINĀJUMI UN NORĀDĪJUMI

1. EKVIVALENTO PĀRVEIDOJUMU LIETOŠANA.

1.1. Pilno kvadrātu izdalīšana.

1. Veicam šādus ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0,$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Šī nevienādība ir acīmredzama.

2. Veicam šādus pārveidojumus:

$$\frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}-2\geq 0,$$

$$\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2\geq 0,$$

$$\left(\sqrt[4]{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right)\geq 0.$$

Iegūtā nevienādība ir acīmredzama.

3. Atverot iekavas, iegūstam

$$a^2\text{-}ab\geq ba\text{-}b^2,$$
$$a^2\text{-}2ab+b^2\geq 0,$$
$$(a\text{-}b)^2\geq 0.$$

Šī nevienādība ir acīmredzami pareiza.

4. Pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta ar šādām nevienādībām:

$$(a^3\text{-}b^3)\text{-}(a^2b+ab^2)\geq 0,$$
$$a^2(a\text{-}b)\text{-}b^2(a\text{-}b)\geq 0,$$
$$(a\text{-}b)(a^2\text{-}b^2)\geq 0,$$
$$(a\text{-}b)^2(a+b)\geq 0.$$

Šī nevienādība ir pareiza, jo $a+b\geq 0$.

5. Pārnesot visus nevienādības locekļus uz kreiso pusi, iegūstam

$$2x^4+1\text{-}2x^3\text{-}x^2\geq 0,$$
$$1\text{-}x^2\text{-}2x^3(1\text{-}x)\geq 0,$$
$$(1\text{-}x)(1+x\text{-}2x^3)\geq 0,$$
$$(1\text{-}x)(1\text{-}x^3+x\text{-}x^3)\geq 0,$$
$$(1\text{-}x)^2((1+x)^2+x^2)\geq 0.$$

Nevienādība ir acīmredzama.

6. Aizstāsim šo nevienādību ar tai ekvivalentu nevienādību

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\geq 0.$$

Atverot iekavas un sagrupējot nevienādības kreisās puses saskaitāmos, iegūstam nevienādību

$$\frac{3}{8}(a+b)(a\text{-}b)^2\geq 0.$$

Tā kā a>0 un b>0, tad šī nevienādība ir acīmredzama.

7. Pārrakstīsim nevienādību šādi:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}. \qquad (1)$$

Tā kā $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0, \sqrt{ab}>0$

un $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$

tad (1) var uzrakstīt šādi:

$$\sqrt{ab}\leq a-\sqrt{ab}+b,$$

$$a+b-2\sqrt{ab}\geq 0,$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0.$$

Nevienādība ir acīmredzama.

8. Veiksim šādus ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$2ab \le a^2+b^2,$$

$$0 \le a^2-2ab+b^2,$$

$$0 \le (a-b)^2.$$

Iegūtā nevienādība ir acīmredzami pareiza.

9. Redzam, ka $\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2}{2}\ge 0.$

10. Pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta ar $(a+b)(a^3+b^3)\ge(a^2+b^2)^2$,

no kurienes $a^3b+ab^3\ge 2a^2b^2$

un $a^2+b^2\ge 2ab$.

Nevienādība ir acīmredzami pareiza.

11. Kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$1+\alpha \le \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

$$1+\alpha \le 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4},$$

$$\frac{\alpha^2}{4}\ge 0.$$

Nevienādība ir acīmredzama.

12. Pierādāmo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$(a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2)\le(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2.$$

Ja a = b, tad ir spēkā vienādība.

Ja a ≠ b, tad

$$(a-b)^2>0,$$

$$(a+b)^2(a^2+b^2)\le(a^2+ab+b^2)^2,$$

$$(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2)\le (a^2+b^2)^2+a^2b^2+2ab(a^2+b^2),$$

$$a^2b^2\ge 0.$$

Iegūtā nevienādība ir pareiza.

13. Pie abām nevienādības pusēm pieskaitot a^6+b^6, iegūstam

$$a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)\ge a^6+b^6+2a^3b^3,$$

$$a^2b^2(a^2+b^2)\ge 2a^3b^3.$$

Ja $ab\ne 0$, tad $a^2+b^2\ge ab$.

Nevienādība ir acīmredzama.

Ja ab = 0, tad spēkā ir vienādība.

14. Pierādāmo nevienādību reizinot ar ab, iegūstam acīmredzamu nevienādību:

$$a^2+b^2\ge ab.$$

15. Analogi kā 14.uzdevumā.

16. Dotā nevienādība ir ekvivalenta ar

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\ge 9,\text{ jo } 0<x<1.\text{ Tālāk}$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{2-x}{1-x}\right) \geq 9,$$
$$(x+1)(2-x) \geq 9x(1-x),$$
$$2+x-x^2 \geq 9x-9x^2,$$
$$8x^2-8x+2 \geq 0,$$
$$4x^2-4x+1 \geq 0,$$
$$(2x-1)^2 \geq 0.$$

Šī nevienādība ir acīmredzami pareiza.

17. Pārrakstām nevienādību šādā veidā:
$$(a+b)^2(a-b)^2 \geq 4ab(a-b)^2.$$
Ja a = b, tad ir spēkā vienādība.
Ja $a \neq b$, tad, nevienādību dalot ar $(a-b)^2>0$, iegūstam
$$(a+b)^2>4ab,$$
$$a^2+2ab+b^2-4ab>0,$$
$$(a-b)^2>0.$$
Nevienādība ir acīmredzama.

18. Nevienādību reizinot ar 2 un grupējot locekļus, iegūstam acīmredzamu nevienādību:
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0.$$
19. Analogi kā 18.uzdevumā.

20. Analogi kā 18.uzdevumā iegūstam nevienādību:
$$0 \leq (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+...+(x_{1988}-x_1)^2.$$
21. Apzīmēsim S = $x_1+x_2+...+x_n$. Nevienādību varam pārrakstīt šādi:
$$(S+1)^2 \geq 4S.$$
Šī nevienādība ir ekvivalenta ar
$$(S-1)^2 \geq 0.$$
Nevienādība ir acīmredzama.

22. Pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta ar $S \leq 0$, $2S \leq 0$,
$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+2S-(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \leq 0,$$
$$(a_1+a_2+...+a_n)^2-(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \leq 0.$$
Tā kā $a_1+a_2+...+a_n=0$, tad acīmredzami, ka $-(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \leq 0$.

23. Grupējot locekļus, iegūstam
$$(x^8+2x^4+1)+(x^6-2x^4+x^2) \geq 0,$$
$$(x^4-1)^2+x^2(x^2-1)^2 \geq 0.$$
Iegūtā nevienādība ir pareiza.

24. Analogi kā 18.uzdevumā.

25. Nevienādības locekļus grupējot, iegūstam ekvivalentu nevienādību:
$$(x^2-y^2)^2+(z-x)^2+(x-1)^2 \geq 0.$$
Tā ir acīmredzama.

26. Abas nevienādības puses reizinām ar abc, atveram iekavas un, grupējot locekļus, iegūstam
$$a(b^2-c^2)^2+b(c^2-a^2)^2+c(a^2-b^2)^2 \geq 0.$$
Tas ir acīmredzami.

27. Atveram iekavas un, grupējot locekļus iegūstam
$$(a-bc)^2+(b-ca)^2+(c-ab)^2 \geq 0.$$
Tas ir acīmredzami.

28. Reizinot nevienādību ar (a+b)(ay+bx)>0, iegūstam
$$(a+b)^2xy<(ax+by)(ay+bx),$$

$$xy(a^2+b^2)+2abxy<xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2),$$
$$2abxy<ab(x^2+y^2).$$

Dalot nevienādību ar $ab>0$, iegūstam $2xy<x^2+y^2$.

Tas ir acīmredzami.

29. Pierādīsim nevienādības
$$-(a^2+b^2+c^2)\le 2(ab+bc+ac)\le 2(a^2+b^2+c^2)$$
ir spēkā attiecībā uz jebkuriem reāliem a, b, c. Apskatīsim $2(ab+bc+ac)$ starpību ar abām nevienādības pusēm:
$$2(ab+bc+ac)+ (a^2+b^2+c^2) = (a + b + c)^2\ge 0$$
$$\text{un } 2(a^2+b^2+c^2)- 2(ab+bc+ac) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\ge 0.$$
No divām pēdējām nevienādībām izriet pierādāmā nevienādība.

30. Analogi kā 27. uzdevumā iegūstam
$$a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(a-b)^2\ge 0.$$

1.2. Nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos.

31. Atverot iekavas, iegūstam
$$kn - k^2 + k \ge n,$$
$$k(n - k) - (n - k)\ge 0,$$
$$(k - 1)(n - k)\ge 0.$$
Tā kā pēc nosacījuma $k\ge 1$ un $n\ge k$, tad $k - 1\ge 0$ un $n - k \ge 0$.

32. Analogi kā 31.uzdevumā iegūstam
$$(a - 1)(b - 1)<0,$$
bet pēc uzdevuma nosacījumiem $a > 1$, $a - 1 > 0$ un $b<0$, $b - 1<0$.

33. Apskatīsim abu nevienādības pušu starpību:
$$2x^3 - (x + 1) = 2(x^3 - x) + (x - 1) =$$
$$= (x - 1)(2x(x + 1) + 1) = (x - 1)(x^2 + (x + 1)^2)$$
Ja $x>1$, tad $(x - 1)(x^2 + (x + 1)^2)>0$ un $2x^3>x + 1$.

Ja $x<1$, tad $(x - 1)(x^2 + (x + 1)^2)<0$ un $2x^3<x + 1$.

34. Izdalīsim nevienādību ar x^3 un apzīmēsim $a=\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. Tad nevienādību var pārrakstīt šādi: $1 + a^9 < a^{-1} + a^{10}$.

Šī nevienādība ir ekvivalenta ar $(a^{10} - 1)(a - 1)>0$ $(a>0)$.

35. Apskatīsim starpību:
$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-\sqrt{y}=$$
$$=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}=$$
$$=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})-y(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}=$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}>0.$$
Tas nozīmē, ka
$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}>\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

36. Apskatīsim starpību:

$$a^k + \frac{1}{a^k} - \left(a^{k-i} + \frac{1}{a^{k-i}}\right) =$$
$$= (a^k - a^{k-i}) + \left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{a^{k-i}}\right) =$$
$$= a^{k-i}(a^i - 1) - \frac{1}{a^k}(a^i - 1) =$$
$$= \frac{(a^i - 1)(a^{2k-i} - 1)}{a^k}.$$

Ja $a \geq 1$, tad $a^i - 1 \geq 0$ un $a^{2k-i} - 1 \geq 0$.
Ja $a < 1$, tad $a^i - 1 < 0$ un $a^{2k-i} - 1 < 0$.
Tas nozīmē, ka

$$\frac{(a^i - 1)(a^{2k-i} - 1)}{a^k} \geq 0.$$

37. Veiksim šādus pārveidojumus:

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x,$$
$$\sin^{2n+2} x + \cos^{2n+2} x - \sin^n x \cdot \cos^{n+2} x - \cos^n x \cdot \sin^{n+2} x \geq 0,$$
$$(\sin^{n+2} x + \cos^{n+2} x)(\sin^n x - \cos^n x) \geq 0.$$

Ja $\sin x \geq \cos x$, tad abi reizinātāji ir nenegatīvi.
Ja $\sin x \leq \cos x$, tad abi reizinātāji nav pozitīvi.

38. Nevienādības kreisās puses trešo un ceturto summas locekli var pārveidot šādi:

$$c(a - b)^2 + 4abc = c(a + b)^2.$$

No katras nevienādības puses saskaitāmā atņemot attiecīgo labās puses saskaitāmo, iegūstam

$$a\left[(b-c)^2 - a^2\right] + b\left[(c-a)^2 - b^2\right] + c\left[(a+b)^2 - c^2\right] =$$
$$= a(b-c-a)(b-c+a) + b(c-a-b)(c-a+b) + c(a+b-c)(a+b+c) =$$
$$= (a+b-c)(ab - ac - a^2 - bc + ab - b^2 + ac + bc + c^2) =$$
$$= (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Visi trīs reizinātāji ir pozitīvi, jo a, b un c ir trijstūra malu garumi.

39. Izvēlēsimies skaitļus $x, y, \frac{1}{xy}$, kuri atbilst uzdevuma nosacījumiem. Ja

$$x + y + \frac{1}{xy} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy,$$

tad iegūstam $(x-1)(y-1)\left(\frac{1}{xy} - 1\right) > 0.$

No šejienes redzams, ka pozitīvam jābūt tieši vienam no reizinātājiem.

40. Kā zināms, pozitīvi skaitļi x, y, z var būt trijstūra malu garumi tikai tādā gadījumā, ja katrs no tiem ir mazāks par divu pārējo summu:

$$x<y+z,\ y<x+z,\ z<x+y.$$

Pierādāmo nevienādību var uzrakstīt šādi:

$$2(x^2+y^2-z^2)+x(y^2+z^2-x^2)+y(z^2+x^2-y^2)-2xyz>0,$$
$$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y-x^3-y^3-z^3-2xyz>0.$$

No citas puses

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=$$
$$= x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y-x^3-y^3-z^3-2xyz.$$
Šādā veidā pierādāmo nevienādību var aizstāt ar
$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)>0.$$
Tātad vai nu visi trīs reizinātāji ir pozitīvi, vai arī divi no tiem ir negatīvi un viens - pozitīvs.
Pirmajā gadījumā ir spēkā nevienādības (1), un tas arī bija jāpierāda.
Otrajā gadījumā, ja reizinātāji $y+z-x$ un $z+x-y$ ir negatīvi. Tos saskaitot iegūstam $2z<0$. Tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, un tātad 2.gadījums nav iespējams.

41. Viegli pārliecināties, ka
$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=(c-b)(a-c)(a-b).$$
Pēc nosacījuma $a>b>c$ iegūstam
$$c-b<0,\ a-c>0,\ a-b>0,$$
bet tas nozīmē, ka $(c-b)(a-c)(a-b)<0$.

42. Veicot dažus elementārus pārveidojumus, iegūstam
$$a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-c^2b-b^2a=(b-a)(c-b)(a-c).$$
Ja $a>b>c$, tad $b-a<0$, $c-b<0$ un $a-c>0$
$$\text{un } (b-a)(c-b)(a-c)>0,$$
Ja $a<b<c$, tad $b-a>0$, $c-b>0$ un $a-c<0$
$$\text{un } (b-a)(c-b)(a-c)<0.$$
Tas arī bija jāpierāda.

43. Faktiski ir jāpierāda trīs nevienādības:
$$1-(1-A)(1-B)(1-C)>A,$$
$$1-(1-A)(1-B)(1-C)>B,$$
$$1-(1-A)(1-B)(1-C)>C.$$
Pierādīsim pirmo nevienādību, jo pārējās no tās var iegūt apzīmējot. Pie nevienādības abām pusēm pieskaitot pozitīvu skaitli $1-(1-A)(1-B)(1-C)$, iegūstam
$$1-A>(1-A)(1-B)(1-C).$$
Abas nevienādības puses reizinot ar pozitīvu skaitli $\frac{1}{1-A}$, iegūstam
$$1>(1-B)(1-C).$$
Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo tās labajā pusē atrodas divu par vieninieku mazāku skaitļu reizinājums. No šīs nevienādības izriet pierādāmā nevienādība.

44. Izmantosim to, ka $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$$\text{un } \sin 3\alpha=3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha.$$
Pārveidosim nevienādības kreiso pusi:
$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha=\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\frac{\sin^3\alpha}{3}=$$
$$=\frac{\sin\alpha}{3}(3+3\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sin\alpha}{3}(2+3\cos\alpha+4\cos^2\alpha)=$$
$$=\frac{\sin\alpha}{3}[(1+\cos\alpha)^2+(1+\cos\alpha)+3\cos^2\alpha].$$
Te visi locekļi ir pozitīvi, jo $0<\alpha<180^\circ$ un funkcijas $\sin\alpha$, $1+\cos\alpha$, $\cos^2\alpha$ šinī intervālā ir pozitīvas.

45. Var uzskatīt, ka $a\geq b\geq c>0$. Apskatīsim starpību
$$3abc+b^2(b-a-c)+a^2(a-b-c)+c^2(c-a-b)=$$
$$=a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+c(c^2-bc+ab-ac)=$$
$$=(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c).$$
Šī starpība nenegatīva, jo $a+b>c$, $b\geq c$, $a\geq c$ un $c>0$.

1.3. Citi ekvivalentie pārveidojumi.

46. Uzrakstot izvērstā veidā $\underbrace{2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n}_{n-1 \text{ reizināeizi}} \geq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n-1 \text{ reizināeizi}}$

viegli ieraudzīt, ka nevienādības kreisā puse ir lielāka pa locekļiem.

47. Veiksim nevienādības kreisās puses pārveidojumus:

$$(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+...+[(n+1)-1]\cdot n! =$$
$$= 2!-1!+3!-2!+...+(n+1)!-n! =$$
$$= (n+1)! - 1.$$

Acīmredzami, ka

$$(n+1)! - 1<(n+1)!$$

48. Tā kā $a>b$, tad $a - b > 0$. Apzīmēsim $a - b = c>0$, no kurienes

$$a = b + c$$

un $\sqrt[n]{b+c} < \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$.

Abas nevienādības puses ir pozitīvas, un tās varam kāpināt n-tajā pakāpē:

$$b + c< b + c+M, \text{ kur } M > 0.$$

Tas ir acīmredzami.

49. Apskatīsim starpību

$$\frac{x^2-y^2}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{2xy}{x+y}.$$

Ņemot vērā, ka $x, y > 0$, $\dfrac{2xy}{x+y} > 0$.

Tātad $\dfrac{x^2-y^2}{x-y} > \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

50. Nevienādību $k^2 \geq aB + bC + cA$ reizinot ar k, iegūstam $k^3 \geq k(aB + bC + cA)$.

Tālāk $(a+A)(b+B)(c+C) \geq k(aB + bC + cA)$,

$$abc+ABC + k(aB + bC + cA) \geq k(aB + bC + cA),$$
$$abc+ABC \geq 0.$$

Tas ir acīmredzami.

51. Apskatīsim starpības:

$\dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0,$ jo $bc \geq ad$ un $b>0$, $d>0$.

$\dfrac{c}{d} - \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{bc-ad}{d(b+d)} \geq 0,$ jo $bc \geq ad$ un $b>0$, $d>0$.

52. Ja spēkā ir pierādāmā nevienādība, tad spēkā ir arī

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}.$$

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)},$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a},$$

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a}.$$

Tas ir acīmredzami.

53. Nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$(a-b)^2(a+b)^2 \geq (a-b)^2(a-b)^2.$$

Ja a = b, tad ir spēkā vienādība.

Ja $a \neq b$ tad, dalot nevienādību ar $(a-b)^2>0$, iegūstam

$$(a+b)^2 \geq (a-b)^2,$$
$$4ab \geq 0.$$

Tas ir acīmredzami.

Tas ir analogi nevienādībai $(a-b)^2(a+b)^2 \leq (a-b)^2(a-b)^2$.

Dalot ar $(a-b)^2>0$, iegūstam

$$(a+b)^2 \leq (a-b)^2,$$
$$4ab \leq 0.$$

Tas ir acīmredzami.

54. Pārrakstīt nevienādību šādi:

$$\frac{(a-b)(a-b)}{8a} < \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} < \frac{(a-b)(a-b)}{8b},$$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a} < (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 < \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}. \quad (1)$$

Tā kā $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 0,$

tad izdalot ar to nevienādību (1), iegūstam

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4a} < 1 < \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4b}.$$

Tā kā visi locekļi ir pozitīvi, tad varam vilkt kvadrātsakni. Iegūstam

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} < 1 < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}},$$

vai

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 1 < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Tā kā a>b>0, tad $\frac{b}{a} < 1$, $\frac{a}{b} > 1$ un $1+\sqrt{\frac{b}{a}} < 2$ un $1+\sqrt{\frac{a}{b}} > 2$.

Tas arī bija jāpierāda.

55. Apzīmējam $2^a = (1+\alpha)$, $2^b = (1+\beta)$, $2^c = (1+\gamma)$, kur $\alpha, \beta, \gamma>0$.

Nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$(1+\alpha)(1+\beta)+(1+\beta)(1+\gamma) + (1+\alpha)(1+\gamma) < 2(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$

vai $0<\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2\alpha\beta\gamma$.

Tas ir acīmredzami.

56. Veiksim šādus pārveidojumus:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d},$$

$$\frac{a}{b}+k \leq \frac{c}{d}+k,$$

$$\frac{a+bk}{b} \leq \frac{c+dk}{d}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

57. Izdarīsim šādus ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d},$$
$$\frac{a}{b} + 1 \le \frac{c}{d} + 1,$$
$$\frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}.$$

Tādējādi esam ieguvuši prasīto.

58. Tā kā a < b, tad
$$\frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$
$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{b}{2} + \frac{a}{2},$$
$$a < \frac{b+a}{2}.$$

Analogi pierādīsim otru nevienādību:
$$\frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$
$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2},$$
$$\frac{b+a}{2} < b.$$

59. Dotās nevienādības sareizināsim:
$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 = 1,$$
$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = 1.$$
Tā kā $(bc + ad)^2 \ge 0$, tad $(ac - bd)^2 \le 1$.
Tas ir $|ac+bd| \le 1$.

60. Ja x<0, tad
$$y = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} = -1-1-1 = -3.$$

Ja 0<x<1, tad $y = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} = 1-1-1 = -1.$

Ja 1<x<2, tad y = 1 + 1 - 1 = 1.

Ja x > 2, tad y = 1 + 1 + 1 = 3.

61. Varam rakstīt šādi:
$$y = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5| \ge 0.$$
Sadalīsim skaitļu asi intervālos
$$(-\infty;1];\ [1;3];\ [3;5];\ [5;+\infty)$$
un apskatīsim nevienādības kreiso pusi katrā no šiem intervāliem.

Ja $x \in (-\infty;1]$, tad
$$y=(1-x)+(3-x)+(5-x) = -3x + 9$$
un vismazākā vērtība y=6 (x=1);

ja $x \in [1;3]$, tad
$$y=(x-1)+(3-x)+(5-x) = -x + 7$$
un vismazākā vērtība y=4 (x=3);

ja $x \in [3;5]$, tad
$$y=(x-1)+(x-3)+(5-x) = x + 1$$
un vismazākā vērtība y=4 (x=3);

ja $x \in [5;+\infty)$, tad

$$y=(x-1)+(x-3)+(x-5) = 3x - 9$$

un vismazākā vērtība y=6 (x=5).

2. NEVIENĀDĪBAS PASTIPRINĀŠANAS METODE

2.1. Citu nevienādību izmantošana nevienādības pastiprināšanas metodē.

1. Analogi kā 2.nodaļas 2.piemērā.

2. Izmantosim to, ka $1 \le a+b+c+d$. Tad

$$1=1^2 \le (a+b+c+d)^2 =$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2bc+2ad+2bd+2cd \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+d^2+2b^2+2c^2+2c^2+2d^2+2d^2+2d^2 =$$
$$= a^2+3b^2+5c^2+7d^2.$$

Tas arī bija jāpierāda.

3. Pieņemsim, ka $0 \le A \le B \le C \le !$. Tā kā $0 \le (1-A)(1-B)$, tad

$$A+B \le 1+AB \le 1+2AB.$$

Tātad $A + B + C \le A + B + 1 \le 2 + 2AB = 2(1+AB)$.

Tāpēc

$$\frac{A}{1+BC}+\frac{B}{1+AC}+\frac{C}{1+AB} \le$$
$$\le \frac{A}{1+AB}+\frac{B}{1+AB}+\frac{C}{1+AB} =$$
$$= \frac{A+B+C}{1+AB} \le 2.$$

4. Izmantosim nevienādību $x^2 + y^2 \ge 2xy$.

Ja n ir pārskaitlis, tad

$$(a_1^2+a_2^2)+(a_3^2+a_4^2)+\ldots+(a_{n-1}^2+a_n^2) \ge$$
$$\ge 2(a_1a_2+\ldots+a_{n-1}a_n) \ge$$
$$\ge 2\cdot\frac{n}{2}\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} = n;$$

Ja n ir nepārskaitlis, tad

$$(a_1^2+a_2^2)+(a_3^2+a_4^2)+\ldots+(a_n^2+1) \ge$$
$$\ge 2(a_1a_2+\ldots+a_n) \ge$$
$$\ge 2\cdot\frac{n+1}{2}\sqrt[n+1]{a_1\ldots a_n\cdot 1} = n+1.$$

5. No nevienādības $x^2 + y^2 \ge 2xy$ izriet, ka

$$(a^2+b^2)+(c^2+d^2) \ge 2(ab+cd) \ge 2\sqrt{4abcd} \ge 4,$$
$$ab+cd \ge 2,$$
$$bc+ad \ge 2,$$
$$ac+bd \ge 2.$$

6. Izmantosim 3 nevienādības.

$a^2-ab+b^2 \ge ab$ reizinot ar a+b, iegūstam

$$a^3+b^3 \ge ab(a+b); \qquad (1)$$

$b^2-bc+c^2 \ge bc$ reizinot ar b+c, iegūstam

$$b^3+c^3 \geq bc(b+c); \qquad (2)$$

$c^2-ca+a^2 \geq ca$ reizinot ar c+a, iegūstam

$$c^3+a^3 \geq ca(c+a) \qquad (3)$$

Saskaitot (1), (2) un (3), iegūstam

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b + a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b,$$

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2\frac{b+c}{2}+b^2\frac{a+c}{2}+c^2\frac{a+b}{2}.$$

Tā kā

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc},$$

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac},$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

tad $a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}.$

7. Izmantojot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$\frac{m+...+m+n+...+n}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{m^n n^m},$$

kur saskaitāmais m ir n reizes un n ir m reizes. Tas ir

$$\frac{2mn}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{m^n n^m}. \qquad (1)$$

Acīmredzami, ka $(m+n)^2 \geq 4mn$ vai

$$\frac{m+n}{2} \geq \frac{2mn}{m+n}. \qquad (2)$$

No (1) un (2) izriet, ka $\frac{m+n}{2} \geq \sqrt[m+n]{m^n n^m}$.

8. Ja viens no skaitļiem a un b nav mazāks par 2, tad nevienādība ir acīmredzama, jo maksimālais no šiem skaitļu kvadrātiem nav mazāks par to reizinājumu. Ja abi skaitļi ir mazāki par 2, tad, izmantojot acīmredzamu nevienādību

$$x^x>x,\ x>0$$

iegūstam $a^a+b^b \geq a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq ab.$

Tas arī bija jāpierāda.

9. Izmantosim nevienādības

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq a^2 \cdot b^2,$$

$$\frac{b^4+c^4}{2} \geq b^2 \cdot c^2,$$

$$\frac{a^4+c^4}{2} \geq a^2 \cdot c^2.$$

Tās saskaitot, iegūstam

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2, \qquad (1)$$

bet no otras puses

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2b^2c^2} = b^2|ac| \geq ab^2c,$$

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2a^2c^2} = a^2|bc| \geq ba^2c,$$

$$\frac{b^2c^2+a^2c^2}{2} \geq \sqrt{b^2c^2a^2c^2} = c^2|ba| \geq ac^2b.$$

Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq ab^2c+a^2bc+abc^2=abc(a + b + c). \qquad (2)$$

No (1) un (2) izriet pierādāmā nevienādība.

10. Izmantosim sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2 \geq 2\sqrt{x_1^2y_2^2x_2^2y_1^2} \geq$$
$$\geq 2|x_1y_1x_2y_2| \geq 2x_1y_1x_2y_2$$

un

$$(x_1^2+x_2^2)(y_2^2+y_1^2)=$$
$$= x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_2^2x_2^2 \geq$$
$$\geq x_1^2y_1^2+y_2^2x_2^2+2x_1y_1x_2y_2 =$$
$$= (x_1y_1+x_2y_2)^2.$$

No šīs nevienādības velkot kvadrātsakni, iegūstam

$$\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_2^2+y_1^2)} \geq |x_1y_1+x_2y_2| \geq x_1y_1+x_2y_2$$

vai

$$2\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_2^2+y_1^2)} \geq 2(x_1y_1+x_2y_2),$$
$$x_1^2+x_2^2+y_2^2+y_1^2+2\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_2^2+y_1^2)} \geq$$
$$\geq x_1^2+x_2^2+y_2^2+y_1^2+2x_1y_1+2+x_2y_2,$$
$$\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+y_1^2}\right)^2 \geq (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2.$$

Iegūtā nevienādība ir ekvivalenta ar pierādāmo.

11. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka a_1, a_2, c_1, c_2 ir ar vienādu zīmi.

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=$$
$$= a_1c_1+a_1c_2+a_2c_1+a_2c_2 \geq$$
$$\geq b_1^2+b_2^2+a_1c_2+a_2c_1,$$

kur a_1c_2 un a_2c_1 nevar būt negatīvi. Tāpēc izmantosim nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$a_1c_2+a_2c_1 \geq 2\sqrt{a_1c_2a_2c_1} \geq 2|b_1|\cdot|b_2|,$$
$$(a_1+a_2)(c_1+c_2) \geq b_1^2+b_2^2+2|b_1|\cdot|b_2| =$$
$$= (|b_1|+|b_2|)^2 \geq (b_1+b_2)^2.$$

Tas arī bija jāpierāda.

12. Pierādīsim stiprāku nevienādību

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3+2\sqrt{2}.$$

Atzīmēsim, ka

$$1+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=1+\frac{2}{\sin 2\alpha} \geq 3$$

un

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=\\
&=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha)\geq\\
&\geq\frac{2\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\\
&=2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\geq 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Tātad

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\\
&=1+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq 3+2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Vienādība ir spēkā, ja $\alpha=45^{o}$.

13. Noteiktībai pieņemsim, ka $|a|\geq|b|$. Tad

$$|a+b|\leq 2|a|.$$

$$(a+b)^{100}\leq 2^{100}a^{100}\leq 2^{100}(a^{100}+b^{100}).$$

14. Izmantosim klasisko nevienādību (tā ir pierādīt ar vektoru palīdzību):
$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+...+\sqrt{x_n^2+y_n^2}\geq\sqrt{(x_1+x_2+...+x_n)^2+(y_1+y_2+...+y_n)^2}$. Šai gadījumā

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2}\geq\\
&\geq\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2k}a_i\right)^2+\left(2k-\sum_{i=1}^{2k}a_i\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2k}-k\right)^2+k^2}\geq k\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

15. Veiksim šādus pārveidojumus:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}=\\
&=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}\geq\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}=\\
&=1+tg^2\alpha+4(1+ctg^2\alpha)=\\
&=5+tg^2\alpha+4ctg^2\alpha=\\
&=5+2\left(\frac{tg^2\alpha}{2}+\frac{2}{tg^2\alpha}\right)\geq 5+2\cdot 2=9.
\end{aligned}
$$

16. Apzīmēsim $x=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $y=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Tad daļas skaitītājs ir

$$\cos k\alpha \cdot \cos\beta - \cos\beta \cdot \cos\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(k\alpha+\beta) + \cos(k\alpha-\beta) - \cos(k\beta+\alpha) - \cos(k\beta-\alpha)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(k\alpha+\beta) - \cos(k\beta+\alpha) + \cos(k\alpha-\beta) - \cos(k\beta-\alpha)\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{(k+1)(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(k-1)(\alpha-\beta)}{2} -$$
$$- \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{(k-1)(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(k-1)(\alpha-\beta)}{2} =$$
$$= -\sin(k+1)y \cdot \sin(k-1)x - \sin(k-1)y \cdot \sin(k+1)x.$$

Saucējs pārveidojas par $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -2\sin x \sin y.$

Tādējādi apskatāmā izteiksme

$$s \le \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sin(k+1)y}{\sin x}\right| \cdot \left|\frac{\sin(k-1)x}{\sin y}\right| + \left|\frac{\sin(k-1)y}{\sin y}\right| \cdot \left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\right|\right) <$$
$$< \left[(k+1)(k-1) + (k+1)(k-1)\right] = k^2 - 1.$$

(Izmantojām nevienādību |sin nt|<n|sin t| naturālam n >1 un t ≠ 0, $-\frac{\pi}{2}$<t<$\frac{\pi}{2}$; to pierāda ar matemātisko indukciju.)

2.2. Izteiksmes novērtēšana un aizvietošana

17. Katru nevienādības kreisās puses locekli aizvieto ar $\frac{1}{2n}$.

18. Nevienādības labajā pusē ir tikpat daudz reizinātāju kā kreisajā. Visi reizinātāji labajā pusē ir vienādi ar n, bet kreisajā pusē ir reizinātāji, kas mazāki par n.

19. $\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$

20. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b} > \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$

21. Ja x≥y, tad $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+x} \le \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+y} = \frac{x+y}{1+y} \le \frac{1+x}{1+y} = 1.$

22.

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n} < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$
$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

23. Apzīmējam A un veicam šādus pārveidojumus:

$$A=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<$$
$$<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}=$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}}=$$
$$=\frac{1}{A(2n+1)}<\frac{1}{A2n}<\frac{1}{An}.$$

No šejienes

$$A<\frac{1}{An},\quad A^2<\frac{1}{n},\quad A<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

24. Apzīmēsim

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n+2}=A$$

un

$$\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{5^2}{4^2}\cdot\frac{7^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n+2)^2}=A^2,$$

no kurienes

$$\frac{3^2-1}{2^2}\cdot\frac{5^2-1}{4^2}\cdot\frac{7^2-1}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2-1}{(2n+2)^2}<A^2<\frac{3^2}{2^2-1}\cdot\frac{5^2}{4^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n+2)^2-1}.$$

Izmantojot formulu $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$,

iegūstam $\frac{2\cdot4}{2^2}\cdot\frac{4\cdot6}{4^2}\cdot\frac{6\cdot8}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-2)2n}{(2n+2)^2}<A^2<\frac{3^2}{1\cdot3}\cdot\frac{5^2}{3\cdot5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n+3)(2n-1)},$

t.i.,

$$\frac{2n}{2}<A<2n-1<2n$$

vai

$$\sqrt{n}<A<\sqrt{2n},$$

no kurienes izriet pierādāmā nevienādība.

25. Pēc Ņūtona binoma formulas iegūstam

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$
$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Ja atmetam locekļus iekavās, tad mēs palielinām vienādības kreiso pusi tā, ka jebkura no iekavām kļūst mazāka par 1. Iegūstam

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Ņemot vērā, ka $2^{n-1}\le n!$,

$$2\le2!;\ 2^2\le3!;\ \ldots;\ 2^{n-1}\le n!.$$

Iegūstam

$$\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2!};\frac{1}{2^2}\ge\frac{1}{3!};\frac{1}{2^{n-1}}\ge\frac{1}{n!}.$$

Ņemot vērā pēdējās nevienādības,

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+..+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Nevienādības labajā pusē visi locekļi, sākot ar otro, ir bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas n - 1 locekļu summa, kas ir vienāda ar 1. Tātad $x_n<3$.

26. Iegūstam

$$\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}=\sqrt[n]{\frac{(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}}=\sqrt[n]{\frac{(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdot\ldots\cdot(k\cdot(n-k+1))\cdot\ldots\cdot(n\cdot1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}}.$$

Bet k(n - k + 1) = kn - k(k - 1) = kn - n - k(k - 1) = (k - 1)(n - k) + n

un jebkuram k, $1\le k\le n$ ir spēkā $k(n - k + 1)\ge n$. Izmantojot šo nevienādību katra reizinājuma locekļa aizvietošanai, iegūstam

$$\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\ge\sqrt[n]{\frac{n^n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}}=\frac{n}{\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}}.$$

No šejienes

$$\left(\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\right)^2\ge n,$$

$$\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\ge\sqrt{n}.$$

Ja n>2, tad $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\ge\sqrt{n}$.

27. Mēs varam pieņemt, ka $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$. Skaidrs, ka $x_1>1$. Tāpēc $x_1\ge2$, $x_2\ge3$, ..., $x_n\ge n+1$ un

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}\le\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<$$

$$<\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{n+1}<\frac{3}{4}.$$

28. 1) Katrs no summas locekļiem, izņemot pēdējo, ir lielāks par $\frac{1}{2n}$, bet, tā kā pavisam ir n locekļi, tad to summa ir lielāka par $n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

2) Ja $0\le k<n$, tad pierādīsim, ka

$$\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-k}\le\frac{2}{3}.$$

Patiešām

$$\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-k}=\frac{2n-k+n+k}{(n+k)(2n-k)}=\frac{3n}{2n^2+k(n-k)}\le\frac{3}{2n},$$

jo $k(n-k)\ge0$, ja $0\le k\le n$. No šejienes

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{1}{n}\le$$

$$\le\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}-\frac{1}{n}=\frac{3n+3-4}{4n}=\frac{3n-1}{4n}\le\frac{3}{4}.$$

29. Pierādīsim, ka summu $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$ var izveidot lielāku par jebkuru skaitli N. Uzskatīsim, ka N ir vesels skaitlis (skaidrs, ka to vienmēr varēs palielināt līdz veselam) un ņemsim $n = 2^{2N}$. Tad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\frac{1}{2^{2N-1}+2}+...+\frac{1}{2^{2N}-1}+\frac{1}{2^{2N}}\right)>$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}>N+1.$$

Visās iekavās visus saskaitāmos aizvietojam ar vismazāko saskaitāmo, t.i., pēdējo.

30. Ja a = b = c = 0, tad nevienādība ir spēkā. Ņemsim S = a + b + c > 0.
Tad

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)=$$
$$=\frac{a}{s}-\frac{a(1-a)}{s(b+c+1)}+\frac{b}{s}-\frac{b(1-b)}{s(a+c+1)}+\frac{c}{s}-\frac{c(1-c)}{s(a+b+1)}+(1-a)(1-b)(1-c)\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)=$$
Tā
$$=\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)-\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)-\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)-$$
$$-\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-a)(1-b)\right)\le 1.$$

kā $\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=1,$
tad

$$\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)\ge 0,$$
$$\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)\ge 0,$$
$$\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-a)(1-b)\right)\ge 0.$$

Lai pierādītu pirmo no trim pēdējām nevienādībām, ir pietiekami ievērot, ka

$$\frac{a(1-a)}{s}\ge 0, \frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)=\frac{(b+c)^2-(b+c+1)bc}{b+c+1}\ge$$
$$\ge\frac{(b+c)^2-3bc}{b+c+1}=\frac{(b-c)^2+bc}{b+c+1}\ge 0.$$

Analogi pierāda divas pēdējās nevienādības.

31. Jebkuru veselu skaitli n var uzrakstīt kā 2^k+1, kur $1<2^k$.
Uzrakstīsim summu citādi:

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^k)^2}+\frac{1}{(2^k+1)^2}+...+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}\right).$$

Tad ir acīmredzams, ka summa ir mazāka par

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{2k}}+\ldots+\frac{1}{2^{2k}}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{2^k}<2.$$

32. Apskatīsim skaitļu $\frac{x_m}{m}$ virknes nogrieznīšus:

$$k^2 \le m \le (k+1)^2-1,\ (k=1, 2, \ldots).$$

Katrs k-tais nogrieznis sastāv no $(k+1)^2-k^2=2k+1$ skaitļiem no $\frac{x_{k^2}}{k^2}$ līdz $\frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1}$.

Aizvietojot katru locekli $\frac{x_m}{m}$ k-tajā nogrieznī ar vislielāko pirmo nogriežņa skaitli $\frac{x_{k^2}}{k^2}$, iegūstam, ka šī nogriežņa skaitļu summa nav lielāka par

$$\frac{(2k+1)x_{k^2}}{k^2} \le \frac{3k x_{k^2}}{k^2} = \frac{3x_{k^2}}{k}.$$

Tālāk katram naturālam N iegūstam

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n} \le 3\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_q}{2}+\ldots+\frac{x_{q^2}}{q}\right),$$

kur q ir mazākais skaitlis, kam $q^2>n$.

33. Reizinājums $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$ sastāv no n^2 saskaitāmajiem, kurus var iedalīt 2 grupās:

a) n saskaitāmie a_ib_i, i = 1, 2, ..., n (šo summu apzīmēsim ar $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$);

b) n(n-1) saskaitāmie a_ib_k, kur i = 1, 2, ..., n, k = 1, 2, ..., n, $i \neq k$ (apzīmēsim ar $\sum_{i\neq 1}^{n} a_ib_k$).

Otrās summas saskaitāmos var sadalīt pa pāriem $a_ib_k + a_kb_i$. Attiecībā uz katru šādu pāri ir spēkā nevienādība

$$a_ib_k+a_kb_i = (a_ib_i+a_kb_k) - (a_i-a_k)(b_i - b_k)<a_ib_i + a_kb_k,$$

tāpēc summa $\sum_{i\neq 1}^{n} a_ib_k$ ir mazāka par n(n-1) reizinājumiem a_ib_i, kur i = 1, 2, ..., n un i pieņem katru vērtību tieši n - 1 reizi.

Tādējādi $\sum_{i\neq 1}^{n} a_ib_k < (n-1)(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)$

un

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)=\sum_{i\neq 1}^{n} a_ib_k+\sum_{i\neq 1}^{n} a_ib_k<$$

$$<n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n).$$

Tas arī bija jāpierāda.

2.3. Saskaitāmo vai reizināmo skaita mainīšana

34. Acīmredzami, ka

$$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cdot\cos x+\cos 2x\cdot\sin x=$$
$$=2\sin x\cdot\cos^2 x+\sin x(1-2\sin^2 x)=$$
$$=2\sin(1-\sin^2 x)+\sin x(1-2\sin^2 x)=$$
$$=3\sin x-4\sin^3 x<3\sin x<\frac{3}{10}.$$

Tātad $\sin 3x<\frac{3}{10}$ un nevar būt $\sin x>\frac{1}{3}$.

Iespējams arī ģeometrisks pierādījums, izmantojot vienības riņķa līniju.

35. Var uzrakstīt, ka $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$. Nevienādība izriet no novērtējumiem

$$\frac{2}{a_1+a_2}\le\frac{1}{a_1}$$

un

$$\frac{2k-1}{a_1+\ldots+a_{2k-1}}\le\frac{2k-1}{a_k+\ldots+a_{k-1}}\le\frac{2k-1}{k\cdot a_{2k-1}}\le\frac{2}{a_{k-1}},$$

kad

$$2\le k\le\frac{n+1}{2},$$

$$\frac{2k}{a_1+\ldots+a_{2k}}\le\frac{2k}{a_{k+1}+\ldots+a_k}\le\frac{2}{a_k}.$$

36. Veicam šādus pārveidojumus

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}=\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy}\ge\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

37. Analogi kā 36.uzdevumā.

38. Analogi kā 36.uzdevumā.

39. No sākuma ņemsim skaitļus $x_1,x_2,\ldots,x_{50}$. Ja to summa atšķiras no $\frac{1}{2}$ vairāk par $\frac{1}{100}$, tad noteiktības labad pieņemsim, ka tā ir mazāka par $\frac{1}{2}$. Tātad $x_{51}+\ldots+x_{100}$ ir lielāks par $\frac{1}{2}$. Sāksim palielināt summu, mūsu izraudzītos skaitļus aizvietojot ar citiem. Vispirms x_{50} aizvietosim ar x_{51}, pēc tam x_{51} ar x_{52}, x_{49} ar x_{50} utt. Tā kā, šādi rīkojoties, mēs nonāksim pie skaitļiem $x_{51}+\ldots+x_{100}$, tad kaut kādā brīdī izraudzīto 50 skaitļu summa kļūs lielāka par $\frac{1}{2}$. Acīmredzams, ka šinī momentā summa atšķirsies no $\frac{1}{2}$ mazāk nekā par $\frac{1}{100}$.

3. MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODES IZMANTOŠANA

3.1. Indukcijas metode nevienādības pierādīšanai

1. Tā kā $2^5>5^2$, tad attiecībā uz n = 5 nevienādība ir spēkā.
Pieņemsim, ka nevienādība $2^k>k^2$ ir spēkā attiecībā uz veselu k>4. Tad

$$2^{k+1}=2^k\cdot 2>k^2\cdot 2=k^2+k^2>k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Šādā veidā nevienādība $2^n>n^2$ ir spēkā attiecībā uz n = k+1. Pēc matemātiskās indukcijas tā ir spēkā attiecībā uz jebkuru veselu skaitli n>4. Tātad, ja k>4,

$$k^2>2k+1 \text{ vai } k(k-2)>1.$$

Tas ir spēkā attiecībā uz $k\ge 3$.

2. Ja n=1, tad acīmredzami, ka $(1+a)^1 \geq 1+ak$.
Sareizinot abas puses ar pozitīvu 1+a, iegūstam
$$(1+a)^{k+1} \geq 1+ak+a+a^{2k}.$$
Atmetot pēdējo saskaitāmo labajā nevienādības pusē, mēs to samazinām, bet tāpēc
$$(1+a)^{k+1} \geq 1+a(k+1).$$
Tas nozīmē, ka nevienādība ir spēkā attiecībā uz n=k+1.

3. Ja n=1, tad $\sin x_1 \leq \sin x_1$.
Pieņemsim, ka pareiza nevienādība
$$\sin(x_1 + x_2 + ... + x_k) \leq \sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_k.$$
tad
$$\sin(x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}) = \sin(x_1 + x_2 + ... + x_k)\cos x_{k+1} + \cos(x_1 + x_2 + ... + x_k)\sin x_{k+1} \leq$$
$$\leq (\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_k)\cos x_{k+1} + \cos(x_1 + x_2 + ... + x_k)\sin x_{k+1} \leq \quad \text{j}$$
$$\leq \sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_k + \sin x_{k+1},$$
o visi sinusi ir pozitīvi un $0<\cos x_{k+1}<1$, $\cos(x_1 + x_2 + ... + x_k) \leq 1$.
Ievērosim, ka nosacījums $0< x_1 + x_2 + ... + x_n < \pi$ nekur nav izmantots, tātad nevienādība ir spēkā arī bez tā.

4. Ja n=1, tad $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$.
Pieņemsim, ka nevienādība pareiza, ja n = k, t.i.,
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}>1, \qquad (1)$$
un pierādīsim, ka tā ir pareiza, ja n = k+1, t.i.,
$$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+...+\frac{1}{3(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)+1}>1 \qquad (2)$$
Ievērosim, ka (1) un (2) labās puses ir vienādas, bet (2) kreiso pusi var iegūt no (1) kreisās puses, pie tā pieskaitot
$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} \text{ un no tās atņemot } \frac{1}{k+1}.$$
Tātad, ja pierādītu, ka
$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}>0, \qquad (3)$$
tad, saskaitot (1) un (3), iegūtu (2). Nevienādībā (3) vienādojot saucējus, iegūstam
$$\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>0.$$
Tas arī bija jāpierāda.

5. Ja nevienādība ir spēkā attiecībā uz kādu n, lai pierādītu tās patiesumu attiecībā uz n+1, ir pietiekami pārbaudīt šādu nevienādību patiesumu:
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{2}\right)^n \geq n+1 \geq \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$
Pēc saīsināšanas ar n+1 iegūstam
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 \geq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
Šīs nevienādības izriet no
$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

Lai pabeigtu pierādījumu, ir pietiekami piebilst, ka attiecībā uz n = 6 apgalvojums ir patiess, jo

$$\left(\frac{6}{2}\right)^6 = 3^6 = 729,\ 6!=720,\ \left(\frac{6}{3}\right)^6 = 2^6 = 64.$$

6. Ja n = 2, tad

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}\le\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{a_1+b_1+a_2+b_2}$$

ir ekvivalenta ar nevienādību

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}\le\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{a_1+b_1+a_2+b_2}$$

$$[a_1b_1(a_2+b_2)+a_2b_2(a_1+b_1)](a_1+b_1+a_2+b_2)\le$$

$$\le(a_1+a_2)(b_1+b_2)(a_1+b_1)(a_2+b_2)$$

Tā pēc saīsināšanas ir acīmredzama:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2\ge 0.$$

Indukcijas pāreja ir šāda

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\le\frac{A'B'}{A'+B'}+\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}\le\frac{AB}{A+B},$$

kur

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\le\frac{A'B'}{A'+B'}+\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}\le\frac{AB}{A+B},$$

$$A'=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ B'=\sum_{k=1}^{n}b_k,\ A=\sum_{k=1}^{n+1}a_k,\ B=\sum_{k=1}^{n+1}b_k.$$

Tas arī bija jāpierāda.

7. Ja n=1, tad jārīkojas kā parasti.

Veiksim indukcijas pāreju.

Tā kā $\dfrac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\dfrac{1-x_2}{1+x_2}=\dfrac{1-x_1-x_2+x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}\ge\dfrac{1-(x_1+x_2)}{1+(x_1+x_2)}$

tad $\dfrac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\dfrac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1-x_n}{1+x_n}\ge\dfrac{1-(x_1+x_2)}{1+(x_1+x_2)}\cdot\dfrac{1-x_3}{1+x_3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1-x_n}{1+x_n}\ge\dfrac{1}{3}.$

Tātad attiecībā uz n - 1 skaitļiem x_1+x_2, x_3, x_4, ..., x_n ir izmantots indukcijas pieņēmums.

8. Ja n = 1, tad nevienādība ir spēkā.

Pieņemsim, ka nevienādība ir spēkā attiecībā uz n = k.

Pierādīsim, ka nevienādība ir spēkā arī attiecībā uz jebkuriem k+1 skaitļiem. Ja kādam i a_i un b_i sakrīt, tad pārējie b skaitā k ir a permutācija, bet tad ir spēkā, jo pie abām nevienādības pusēm ir pieskaitīts $\dfrac{a_i}{b_i}=1.$

Ja visi $\dfrac{a_i}{b_i}\ne 1$ un a_i = max a vai ja tādi ir vairāki, tad pieņemsim, ka $b_j=a_j$. Pārvietojot b_i un b_j, salīdzināsim jauno summu ar iepriekšējo ($b_i<a_i$, $b_j<a_j=a_i$ pēc pieņēmuma).

Tāpēc

$$S-S=\frac{a_i}{b_i}+\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_j}-\frac{a_j}{b_i}=(a_i-a_j)\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{b_j}\right)=(b_j-a_j)\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{a_i}\right)>0.$$

Tā kā jaunās summas S skaitītājā un saucējā i-ie a un b ir vienādi, tad pēc iepriekšējā pieņēmuma S'$\geq$k+1.
Tātad S>S'$\geq$k+1.
Tas arī bija jāpierāda.

9. Ja n=1, tad nevienādība ir spēkā, jo gadījumā, ja $x_1 \leq \frac{1}{2}$, tad $1-x_1 \geq \frac{1}{2}$.

Pieņemsim, ka nevienādība ir spēkā, ja n=k, t.i., ja skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ir nenegatīvi un $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq \frac{1}{2}$. Tad

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k) \geq \frac{1}{2}.$$

Pierādīsim, ka uzdevuma apgalvojums ir spēkā arī attiecībā uz n = k + 1, ja $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ ir nenegatīvi skaitļi un atbilst nevienādībai

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Uzrakstīsim šo nevienādību šādi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k' \leq \frac{1}{2},$$

kur $x_k' = x_k + x_{k+1}$. Tā rezultātā $x_k' \geq 0$.
Pēc indukcijas pieņēmuma

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k') =$$
$$= (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k - x_{k+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Tā kā $x_k x_{k+1} \geq 0$, tad

$$1-x_k - x_{k+1} \leq 1-x_k - x_{k+1} + x_k x_{k+1} = (1-x_k)(1-x_{k+1})$$

un tāpēc

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_k)(1-x_{k+1}) \geq (1-x_1)\ldots(1-x_k - x_{k+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Tātad nevienādība ir spēkā attiecībā uz jebkuru naturālu n.

3.2. Indukcijas metode apvienojumā ar nevienādības pastiprināšanas metodi

10. Pierādīsim, ka attiecībā uz katru veselu pozitīvu k$\leq$n ir spēkā nevienādība

$$1+\frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

Ja k = 1, tad acīmredzami, ka tas tā ir. Pieņemsim, ka attiecībā uz kādu k nevienādība ir patiesa, un pierādīsim, ka tā ir spēkā attiecībā uz k+1:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{k}{n}\right)^k \left(1+\frac{1}{n}\right) \geq$$
$$\geq \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2} > 1+\frac{k+1}{n}.$$

Ievērosim, ka te neesam izmantojuši to, ka k$\leq$n.
Tātad šī nevienādība ir spēkā attiecībā uz jebkuru pozitīvu veselu k.
Ja k$\leq$n, iegūstam

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{k}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right)<$$

$$<\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}+\frac{k+1}{n^3}+\frac{k^2}{n^3}=$$

$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3}<$$

$$<1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2},$$

jo $n(k+1)>k^2$ tad, kad $n\geq k$.

Iegūtajās nevienādībās ievietojot $k = n$, iegūstam

$$2=1+\frac{n}{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2}=3.$$

11. Pierādīsim, ka var būt daudz spēcīgāks rezultāts: ja $0^o<x_i<180^o$, $i = 1, 2, ..., n$ $(n\geq 2)$, tad

$$|\sin(x_1+x_2+...+x_n)|<\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n. \qquad (1)$$

Ja $n = 2$, nevienādība (1) ir spēkā, jo

$$|\sin(x_1+x_2)|\leq|\sin x_1|\cdot|\cos x_2|+|\cos x_1|\cdot|\sin x_2|<\sin x_1+\sin x_2.$$

Pieņemsim, ka nevienādība (1) ir spēkā attiecībā uz kādu $k\geq 2$, $0^o<x_i<180^o$, $i = 1, 2, ..., k+1$. Tad

$$|\sin(x_1+x_2+...+x_k)|<\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_k.$$

Tātad

$$|\sin(x_1+x_2+...+x_{k+1})|=$$

$$=|\sin(x_1+x_2+...+x_k)\cos x_{k+1}+\cos(x_1+x_2+...+x_k)\sin x_{k+1}|\leq$$

$$\leq|\sin(x_1+x_2+...+x_k)|\cdot|\cos x_{k+1}|+|\cos(x_1+x_2+...+x_k)|\cdot|\sin x_{k+1}|\leq$$

$$\leq|\sin(x_1+x_2+...+x_k)|+|\sin x_{k+1}|<$$

$$<\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_{k+1}.$$

Tādējādi nevienādība (1) ir spēkā attiecībā uz jebkuru $n\geq 2$. Bet tas nozīmē, ka ir spēkā arī uzdevuma apgalvojums.

12. Ar matemātiskās indukcijas metodi bez grūtībām var pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \qquad (1)$$

kas ir spēcīgāka nekā sākotnējā nevienādība.

Ja $n = 1$, tad

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{4}};$$

ja $n = 2$, tad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}<\frac{1}{\sqrt{7}}\text{ (patiešām);}$$

ja $n = k$, tad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\text{ (šo pieņemam).}$$

Pierādīsim, ka

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}+1}.$$

Šo var iegūt no iepriekšējās nevienādības, reizinot tās kreiso pusi ar $\frac{2k+1}{2k+2}$ un labo pusi ar $\sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}}$. Ja izdotos pierādīt, ka $\frac{2k+1}{2k+2}<\sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}}$,
tad viss būtu kārtībā. Patiešām

$$\frac{4k^2+4k+1}{4k^2+8k+4}<\frac{3k+1}{3k+4},$$

$$\frac{4k^2+4k+1}{4k^2+8k+4}-\frac{3k+1}{3k+4}<0,$$

$$\frac{-k}{4(k+1)^2(3k+4)}<0.$$

Tas arī bija jāpierāda.
Tātad nevienādība (1) ir spēkā attiecībā uz visiem n. No tās izriet arī pierādāmā nevienādība.

4. MATEMĀTISKĀS ANALĪZES METOŽU IZMANTOŠANA

4.1. Funkciju atvasinājumi nevienādību pierādīšanā

1. a) Apskatīsim funkciju $f(\alpha)=\alpha-\sin\alpha$. Tās atvasinājums ir $f'(\alpha)=1-\cos\alpha>0$, tātad funkcija f ir augoša intervālā $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

b) Funkcijas $f(\alpha)=\alpha-\mathrm{tg}\alpha$ atvasinājums ir $f'(\alpha)=1-\frac{1}{\cos^2\alpha}<0$.

Tas nozīmē, ka funkcija f ir dilstoša, ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. Funkciju $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ atvasinot, redzam, ka $f'(\alpha)=\frac{\cos\alpha(\alpha-tg\alpha)}{\alpha^2}<0$.
jo $\alpha<\mathrm{tg}\alpha$, ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, līdz ar to funkcija $f(\alpha)$ ir dilstoša un $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$.

3. Funkcijas $\frac{\sin x}{x}$ standartizpēte rāda, ka intervālā $(0;\pi)$ funkcija ir dilstoša. Tātad

$$\frac{\sin(1-a)x}{(1-a)x}\geq\frac{\sin x}{x}, 0\leq a<1, 0<x<\pi.$$

No šejienes izriet, ka

$$\frac{\sin(1-a)x}{\sin x}\geq 1-a\geq\frac{1-2a}{1-a}$$

un

$$(2a-1)\sin x+(1-a)\sin(1-a)x\geq 0.$$

Tas ir pierādīts, ja $a\in[0;1)$, $x\in(0;\pi)$.

Pēdējā nevienādība acīm redzami ir spēkā, ja a = 1, $x\in[0;\pi]$ un ja $a\in[0;1]$, kad x=0 un x = π.

Vienādība ir spēkā, ja $\begin{cases} 1)\ a = 0, \\ 2)\ x = 0, \\ 3)\ a = 1, x = \pi. \end{cases}$

4. Šī nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$e^{\frac{m-n}{m}} < \frac{m}{n} < e^{\frac{m-n}{n}}.$$

Nevienādībā $e^x>1+x$ (tā ir acīm redzama katram x>0.) ievietojot $x = \frac{m-n}{n}$, iegūsim

$e^{\frac{m-n}{n}} > \frac{m}{n}$.

Atliek pierādīt, ka $\frac{m}{n} > e^{\frac{m-n}{m}}$.

Apskatīsim funkciju $f(x)=xe^{1-x}$, $x\in[0;1]$. Tā kā $f'(x)=(1-x)\,e^{1-x}>0$ un f(1)=1, tad f(x)<1. Kad ievietosim $x = \frac{n}{m}$ nevienādībā f(x)<1, iegūsim vēlamo rezultātu.

5. Apzīmēsim polinomu ar $P_{2k}(x)$. Pierādīsim pastiprinātu nevienādību

$$P_{2k}(x)>0.$$

Ja x ir negatīvs vai vienāds ar 0, tad neviens $P_{2k}(x)$ loceklis nav negatīvs, bet brīvais loceklis ir vienāds ar 1. Tātad, ja $x\le 0$, $P_{2k}(x)\ge 1$.

Ja $x\ge 2k$, polinoma $P_{2k}(x)$ visus locekļus var sagrupēt tā, lai visi saskaitāmie būtu negatīvi:

$$P_{2k}(x) = 1 + \frac{k}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + ... + \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x-2k) \ge 1.$$

Intervālā [0;2k] polinoms $P_{2k}(x)$ ir nepārtraukta funkcija un tā pieņem savu vismazāko vērtību. Ja $P_{2k}(x)$ pieņem savu mazāko vērtību kāda no galapunktiem, tad šī vērtība ir lielāka par 0 pēc iepriekš pierādītā. Tātad $P_{2k}(x)$ pieņem pozitīvas vērtības arī visiem pārējiem $x\in[0;2k]$.

Ja $P_{2k}(x)$ pieņem mazāko vērtību intervāla [0;2k] iekšējā punktā x_o, tad jebkuram x no x_0 apkārtnes ir spēkā $P_{2k}(x)> P_{2k}(x_0)$. Tātad punktā x_0 polinoma $P_{2k}(x)$ atvasinājums ir 0:

$$P'_{2k}(x_0) = -1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2!} + ... + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0) = 0.$$

$$\text{Tā kā } P_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0,$$

tad polinoms $P_{2k}(x)$ ir pozitīvs uz visas ass.

Tas arī bija jāpierāda.

6. Izmantojot nevienādību $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$ patvaļīgam c>0, iegūstam:

$$P = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1} + \ldots + \frac{c}{x_n}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \frac{x_2}{c} + \frac{c}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n}\right)^2.$$

Ievērosim, ka funkcijas $f(t) = \frac{c}{t} + \frac{t}{c}$ vislielākā vērtība intervālā [a; b] ir vai nu vienā, vai arī otrā intervāla galapunktā. Izvēlēsimies c tā, lai šīs vērtības sakrist: f(a)=f(b), t.i., ņemsim c=$\sqrt{ab}$. Tad nevienādībai $a \le t \le b$ būs

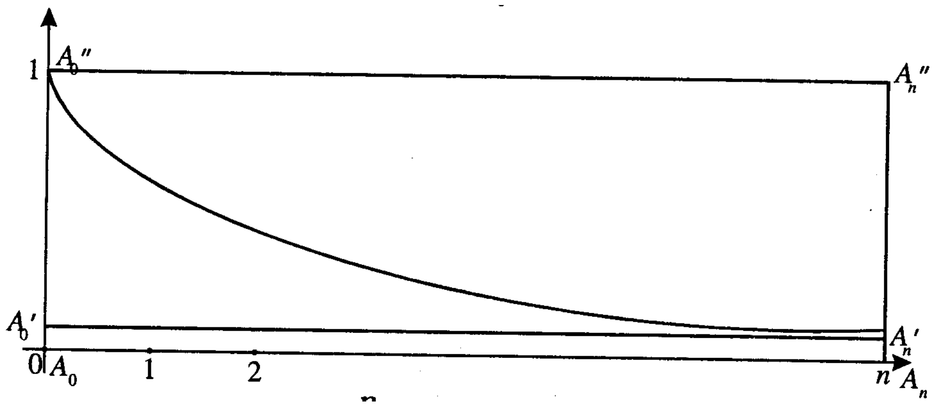
$$f(t) \le \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

$$\text{Tāpēc } P \le \frac{n^2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}{4} = \frac{n^2(a+b)^2}{4ab}.$$

4.2. Integrāļi nevienādību pierādīšanā

7. Risina līdzīgi kā 4.nodaļas 4.piemērā aprakstīto uzdevumu.

8. Apskata taisnstūrus, kuri atrodas zem funkcijas y=$\frac{1}{x}$ grafika.



Apskatām laukumus $S_{A_0A_0'A_n'A_n} = \frac{n}{n+1}$ un $S_{A_0A_0''A_n''A_n} = n.$

Acīmredzami, ka $\frac{n}{n+1} < \int_0^n \frac{dx}{x+1} < n,$

$$\int_0^n \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^n = \ln(n+1),$$

$$\frac{n}{n+1} < \ln(n+1) < n.$$

9. Līklīniju trijstūri ierobežo abscisu ass, līklīnija y = ln x un taisne x = n. Jānovērtē šā trijstūra laukums, apskatot tajā ievilkto un apvilkto trapeču summu.

10. Apskatīsim funkciju $y = x^{\frac{1}{n}}$. Tā kā tās atvasinājums, pieaugot x, dilst, funkcijas y pieaugums, kas ir atbilstošs dotajam intervālam uz x ass, dilst, intervālam pārvietojoties pa labi. Intervāls (x_1, x_2) tiek iegūts, pārbīdot intervālu (x_1-α, x_2-α) pa labi par α. Tātad

$$y(x_2) - y(x_1) =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} y'(t)dt =$$
$$= \int_{x_1-\alpha}^{x_2-\alpha} y'(t+\alpha)dt \le$$
$$\le \int_{x_1-\alpha}^{x_2-\alpha} y'(t)dt =$$
$$= y(x_2-\alpha) - y(x_1-\alpha).$$

Tas arī bija jāpierāda.

5. NEVIENĀDĪBAS, KURU PIERĀDĪJUMOS IZMANTO CITAS NEVIENĀDĪBAS. VIENKĀRŠĀKIE GADĪJUMI.

5.1. Vairāku nevienādību saskaitīšana vai reizināšana

1. Acīmredzami, ka a<1, b<1 un c<1. Pierādīsim, ka attiecībā uz katru x ir spēkā nevienādības x(1-x)$\le \frac{1}{4}$.

Tas ir acīmredzami, jo $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0.$

No šejienes var izteikt, ka

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) \le \frac{1}{64}.$$

Sareizinot uzdevuma nosacījumos dotās nevienādības, iegūstam

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}.$$

Līdz ar to ir iegūtas pretrunīgas nevienādības.

2. Katram pozitīvam x ir spēkā acīmredzama nevienādība:

$$\sqrt{4x+1} < \sqrt{4x^2+4x+1} = 2x+1.$$

Izmantojot šo nevienādību katram saskaitāmajam labajā pusē, iegūstam

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < (2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1) = 6.$$

3. Starp dotajiem skaitļiem jābūt vismaz vienam pozitīvam skaitlim. Ņemsim jebkurus četrus no šiem skaitļiem. Ja visi būtu nepozitīvi, tad arī to summa būtu nepozitīva, bet tas ir pretrunā ar nosacījumu. (Patiesībā šādā veidā tiek pierādīts daudz spēcīgāks apgalvojumus - pozitīvu skaitļu ir vismaz 22. Mūsu gadījumā būs nepieciešama tikai viena šāda skaitļa eksistence.) Izvēlamies šo pozitīvo skaitli. Atlikušos 24 sadalīsim sešos četriniekos. Visu 25 skaitļu summa ir pozitīva, jo viens skaitlis ir pozitīvs pēc izvēles un atlikušie četrinieki ir pozitīvi pēc uzdevuma nosacījuma.

4. Analogi kā 3.uzdevumā.

5. Vismazāko apzīmēsim ar m, vislielāko ar M. Varam uzrakstīt

$$m \le \frac{a_1}{b_1} \le M,$$

$$m \le \frac{a_2}{b_2} \le M,$$

$$\ldots,$$

$$m \le \frac{a_n}{b_n} \le M.$$

Tā kā $b_1>0$, $b_2>0$, ..., $b_n>0$, tad

$$mb_1 \le a_1 \le Mb_1,$$

$$mb_2 \le a_2 \le Mb_2,$$

$$\ldots,$$

$$mb_n \le a_n \le Mb_n.$$

Saskaitot un iznesot M pirms iekavām, iegūstam

$$m(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le M(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

To dalot ar $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, iegūstam meklēto.

6. Apzīmēsim priekšmetu masas ar burtiem D (dīvāns), Č (čemodāns), P (portfelis), G (grozs, glezna, kārba), bet sunīša masu ar burtu M.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$D = Č + P \quad (1),$$

$$D = 3G \quad (2),$$

$$G>M \quad (3),$$

$$M + P > D \quad (4),$$

$$M + Č > D \quad (5).$$

Saskaitot nevienādības (4) un (5) un izmantojot vienādību (1), iegūstam, ka 2M>D. No otras puses, ievietojot nevienādībā (3) vienādību (2), iegūstam D >3M. Taču šīs nevienādības ir pretrunīgas, jo tiek iegūts, ka 2M>3M, t.i., M<0.

7. Ievietojot nevienādībā vērtības $x = 0, \frac{1}{2}, 1$, iegūstam

$$|c| \le 1,$$

$$|a+2b+4c| \le 4,$$

$$|a + b + c| \le 1.$$

Ja apzīmēsim $d = a + b + c$, $e = a + 2b + 4c$, tad

$$a = 2c + 2d - e \text{ un } b = -3c - d + e.$$

Izmantojot labi pazīstamo nevienādību summas modulim, iegūstam šādas nevienādības:

$$|a| \le 2|c| + 2|d| + |e| \le 8,$$

$$|b| \le 3|c| + |d| + |e| \le 8,$$

$$|c| \le 1.$$

Saskaitot visas trīs nevienādības, iegūstam

$$|a|+|b|+|c| \le 17.$$

Tas arī bija jāpierāda.

8. Iegūstam

$$(f(x))^2 - \cos x \cdot f(x) + \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4} < 0,$$

$$\left(f(x)-\frac{1}{2}\cos x\right)^2-\frac{1}{4}<0,$$
$$\left(f(x)-\frac{1+\cos x}{2}\right)\left(f(x)+\frac{1-\cos x}{2}\right)<0,$$

t.i.,

$$-\frac{1-\cos x}{2}<f(x)<\frac{1+\cos x}{2}.$$

Ievietojot nevienādībā x = 0, x = p un x = 2p, iegūstam

$$0<b<1, \qquad (1)$$
$$-1<a\pi+b<0, \qquad (2)$$
$$0<2a\pi+b<1. \qquad (3)$$

Saskaitot (1) un (3), iegūstam

$$0<2a\pi+2b<2,$$
$$0<a\pi+b<1.$$

Tas ir pretrunā ar (2) nevienādību. Šādi reāli a un b neeksistē.

9. Ievērosim, ka attiecībā uz jebkuru $x \geq -1$ ir spēkā nevienādība

$$4x^3 - x + 1 = (x + 1)(2x - 1)^2 \geq 0.$$

Tāpēc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(4x_k^3 - 3x_k + 1\right) = -3\sum_{k=1}^{n} x_k + n \geq 0.$$

No šejienes izriet mums vajadzīgā nevienādība.

10. Ir pietiekami pierādīt nevienādību

$$|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| > \frac{8}{5}$$

visiem x.

11. Vispirms pierādīsim, ka visiem k<n ir spēkā nevienādība

$$1 - a^k - a^{n-k} + a^n \geq 0.$$

Patiešām

$$1 - a^k - a^{n-k} + a^n = (1-a^k)(1-a^{n-k}) \geq 0.$$

$1-a^k$ un $1-a^{n-k}$ ir ar vienādām zīmēm. (Turklāt vienādība tiek iegūta tikai tad, ja a=1.)
No šejienes izriet, ka

$$1+a^n \geq a^k+a^{n-k}.$$

Saskaitīsim attiecīgi nevienādības kreiso un labo pusi visiem k = 1, 2, ..., n-1 un iegūsim

$$\begin{aligned}
&(n-1)(1+a^n) \geq \\
&\geq \left(a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}\right) + \left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^3 + a^2 + a\right) = \\
&= 2\left(a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Pieskaitīsim pie abām nevienādības pusēm $(n-1)\left(a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}\right)$:

$$\begin{aligned}
&(n-1)\left(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1} + a^n\right) \geq \\
&\geq (n-1+2)\left(a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}\right) = \\
&= (n+1)\left(a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

No šejienes

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{a+a^2+\ldots+a^{n-1}} \geq \frac{n+1}{n-1}.$$

Turklāt skaidrs, ka vienādība tiek sasniegta tikai tad, ja a = 1.

12. Katram k un y no intervāla [-1;1] ir spēkā

$$\frac{2}{1+xy} \geq \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}.$$

To var pierādīt, vienādojot daļām saucējus. Jāsaskaita visas nevienādības n, kuras ir uzrakstītas šādā veidā:

$$\frac{1}{1+a_i a_{i+1}} \geq \frac{1}{1+a_i^2} + \frac{1}{1+a_{i+1}^2}.$$

13. Ja $0<x<\frac{\pi}{6}$, tad

$$\sin x < \mathrm{tg}\, x < \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin x + \mathrm{tg}^2 x + \sin^3 x + \ldots + \mathrm{tg}^{2n} x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} < \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} < 1{,}4.$$

<u>*5.2. Jensena nevienādības izmantošana*</u>

14. Ievērosim, ka funkcijas f = sin x otrais atvasinājums ir f '' = -sinx. Tāpēc f ''<0, ja $0<x<\pi$. Tālāk pēc teorēmas

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

$$\text{bet } \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Tāpēc

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

15. f = sin x, f '' = -sinx, un, $0<x<\pi$, tad f ''<0.

Tāpēc

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} \geq \frac{1}{4}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta \leq 4\sin\frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

16. Apskatām funkciju f (x) = 2^x un tās atvasinājumus

$$f'(x) = 2^x \ln 2,\ f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2^{x-1}.$$

Redzam, ka f ''(x)>0, un tāpēc

$$\frac{2^x + 2^y + 2^z}{3} \geq 2^{\frac{x+y+z}{3}},$$

$$2^x + 2^y + 2^z \geq 3\cdot 2^{\frac{x+y+z}{3}} = 3\cdot 2 = 6.$$

17. f(x) = x^2, f '(x) = 2x, f ''(x) = 2 >0, tātad

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4} \geq \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^2,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq \frac{4}{16}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 = \frac{1}{4}.$$

18. f(x) = $\cos^2$x, f '(x) = -2cosx·sinx, f "(x) = 2 > 0, in tāpēc

$$\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3} \geq \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geq 3\cos^2\frac{\pi}{2} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

19. $f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) = tg^2 x,\quad f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},\quad f''(x) = \frac{2(+\sin x)}{\cos^3 x} > 0,$ ja $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Aizvietojot ar

$$x_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2x_1,$$

$$x_2 = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = 2x_2,$$

$$x_3 = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \gamma = 2x_3,$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 2(x_1+x_2+x_3) = \pi,\quad x_1+x_2+x_3 = \frac{\pi}{3},$$

pēc 2.teorēmas iegūstam

$$\frac{tg^2x_1+tg^2x_2+tg^2x_3}{3} > tg^2\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right),$$

$$tg^2x_1+tg^2x_2+tg^2x_3 > 3tg^2\frac{\pi}{6} = 3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

20. Pārveidosim nevienādību tā, lai varētu izmantot 1. vai 2. teorēmu:

$\ln\sin\alpha+\ln\sin\beta+\ln\sin\gamma+\ln\sin\delta \leq \ln\frac{1}{4}$.

Tad

$$f(x) = \ln\sin x,\ f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

Tāpēc

$$\ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} \geq 4(\ln\sin\alpha+\ln\sin\beta+\ln\sin\gamma+\ln\sin\delta)$$

$$\ln\sin\alpha+\ln\sin\beta+\ln\sin\gamma+\ln\sin\delta \leq$$

$$\leq 4\ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} = 4\ln\sin\frac{\pi}{4} = 4\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\frac{1}{4}.$$

6. KLASISKO NEVIENĀDĪBU LIETOJUMI NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ.

6.1. Pamatjēdzieni

1. **1.pierādījums**.

$$\boldsymbol{G} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{a}_n}$$

Aizvietosim katru no skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sākumā ar mazāko no šiem skaitļiem (min(a)), pēc tam - ar lielāko (max(a)).
Iegūsim

$$G \ge \sqrt[n]{\min(a) \cdot \min(a) \cdot \ldots \cdot \min(a)} = \sqrt[n]{[\min(a)]^n} = \min(a),$$

$$G \le \sqrt[n]{[\max(a)]^n} = \max(a),$$

$$\min(a) \le G \le \max(a).$$

2.pierādījums.

Esam pierādījuši, ka $\min(a) \le G \le \max(a)$.

Tātad $\lg_{\min} a \le \dfrac{\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_n}{n} \le \lg_{\max} a.$

Tā kā logaritmiskā funkcija ir augoša, tad

$$\lg_{\min} a_i = \lg \min(a)$$

$$\text{un } \lg_{\max} a_i = \lg \max(a).$$

$$\lg \min(a) \le \frac{\lg\left(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\right)}{n} \le \lg \max(a),$$

$$\lg \min(a) \le \lg \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \lg \max(a).$$

Tā kā, palielinoties skaitļa logaritmam, arī skaitlis palielinās, tad no iepriekšējās nevienādības izriet:

$$\min(a) \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \max(a).$$

Tas arī bija jāpierāda.

2. **1.pierādījums.**

Analoģisks iepriekšējā uzdevuma 1. pierādījumam.

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m \ge n(\min(a))^m,$$

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m \le n(\max(a))^m,$$

$$(\min(a))^m \le \frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n} \le (\max(a))^m,$$

$$\min(a) \le \left(\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \le \max(a).$$

2. pierādījums.

Zinām, ka $\min(a^m) \le \dfrac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n} \le \max\left(a^m\right).$

Tā kā, palielinoties a, palielinās arī a^m, tad

$$\max\left(a^m\right) = \left(\max a\right)^m$$

$$\text{un } \min\left(a^m\right) = \left(\min a\right)^m.$$

$$\left(\min(a)\right)^m \le \frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n} \le \left(\max a\right)^m.$$

Jo lielāks b, jo lielāka arī $\sqrt[m]{b}$.

Tāpēc

$$\min(a) \le \left(\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n} \right)^{\frac{1}{m}} \le \max(a).$$

3. **1.pierādījums.**

Ja izteiksmes $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ labajā pusē skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vietā ievietosim min (a), tad iegūsim

$$H \ge \frac{n}{n \cdot \frac{1}{\min(a)}} = \min(a).$$

Analoģiski varam iegūt, ka $H \le \frac{n}{n \cdot \frac{1}{\max(a)}} = \max(a)$,

un tāpēc min(a) ≤ H ≤ max(a).

2.pierādījums.

Tā kā min (a) ≤ A ≤ max(a), tad $\min\left(\frac{1}{a}\right) \le \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \le \max\left(\frac{1}{a}\right)$.

Skaitļi a_i un $\frac{1}{a_i}$ ir apgriezti proporcionāli (palielinoties skaitlim a_i, skaitlis $\frac{1}{a_i}$ samazinās), un tāpēc $\min\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\max(a)}$ un $\max\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\min(a)}$.

Tad $\frac{1}{\max(a)} \le \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \le \frac{1}{\min(a)}$ un

$$\min(a) \le \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \max(a).$$

6.2. Vienkāršākās sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

1. Ērtības labad apzīmējot $a_1 = x^3$, $a_2 = y^3$, $a_3 = z^3$, pierādāmo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} > xyz \text{ jeb } x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz.$$

Zinām, ka

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z) + 3zy(x + y + z) - 3xyz.$ Tāt ad

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy + xz + yz) =$$
$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) =$$
$$= \frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) =$$
$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2\right] \geq 0.$$

Esam pierādījuši, ka $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$, tātad arī $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz$.

Nevienādībā ievietojot atpakaļ a_1, a_2, a_3, iegūstam $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$.

Vienādība ir spēkā tikai gadījumā, kad $a_1 = a_2 = a_3$.

2. Zināms, ka $\frac{y_1 + y_2}{2} \geq \sqrt{y_1 y_2}$.

Apzīmēsim $y_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$ un $y_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}$, kur a_1, a_2, a_3, a_4 ir jebkuri nenegatīvi skaitļi.

Tātad $\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}\right) \geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)}$,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)}. \quad (1)$$

Tā kā $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ un $\frac{a_3 + a_4}{2} \geq \sqrt{a_3 a_4}$, (2)

tad $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$. (3)

Nevienādība (1) pārvēršas vienādībā vienīgi tad, ja $\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_3 + a_4}{2}$, bet nevienādība (2) tad, ja $a_1 = a_2$ un $a_3 = a_4$. Tāpēc nevienādība (3) kļūst par vienādību vienīgi gadījumā, kad $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3. Zinām, ka $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$.

Apzīmēsim $a_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}$, $a_2 = \frac{b_3 + b_4}{2}$, $a_3 = \frac{b_5 + b_6}{2}$, $a_4 = \frac{b_7 + b_8}{2}$.

Pielietojot ieviestos apzīmējumus, iegūstam

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8}{8} \geq$$
$$\geq \sqrt[4]{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3 + b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5 + b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7 + b_8}{2}\right)}.$$

Tā kā $\frac{b_1 + b_2}{2} \geq \sqrt{b_1 b_2}$, $\frac{b_3 + b_4}{2} \geq \sqrt{b_3 b_4}$, $\frac{b_5 + b_6}{2} \geq \sqrt{b_5 b_6}$, $\frac{b_7 + b_8}{2} \geq \sqrt{b_7 b_8}$, tad $\sqrt[4]{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3 + b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5 + b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7 + b_8}{2}\right)} \geq$

$$\geq \sqrt[4]{\sqrt{b_1 b_2}\,\sqrt{b_3 b_4}\,\sqrt{b_5 b_6}\,\sqrt{b_7 b_8}} = \sqrt[8]{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8}.$$

Tāpat kā iepriekšējā uzdevumā, vienādība ir spēkā vienīgi tad, ja

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8.$$

4. Viegli pierādīt, ka $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. (1)

Tātad, ja x = a_1 un y = a_2, iegūstam $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$.

Analoģiski iegūstam, ka $a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$.

Sareizinot abas pēdējās nevienādības, iegūstam

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2.$$

Pieņemsim, ka $\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 = x^2$ un $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = y^2$, un izmantosim nevienādību (1), kāpinot to kvadrātā, t.i., $x^2 y^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^4$.

Iegūstam nevienādību

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4..$$

Turpinot šādā veidā tālāk m reizes, iegūstam

$$a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2^m} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m}. \quad (2)$$

Tas arī bija jāpierāda.

Nevienādībai (1) zīme ir spēkā, ja $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 0$, t.i., ja x = y. Vairākkārt izmantojot šo novērojumu, iegūstam, ka nevienādība (2) pārvēršas par vienādību tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2^m}$.

6.3. Teorēma par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

1. Zinām, ka

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc},$$

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}.$$

Sareizinot šīs trīs nevienādības, iegūstam

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \ge \sqrt{a^2b^2c^2} = abc.$$

Vienādība tiek iegūta vienīgi gadījumā, kad a = b = c.

2. Pieņemsim, ka x un y ir dotie skaitļi.
Zinām, ka $(a+b)^2 \ge 0$, un tāpēc $a^2+b^2 \ge 2ab$.

Ja a = $\sqrt{x}$ un b = $\sqrt{y}$, tad iegūstam $x + y \ge 2\sqrt{xy}$.

Tā kā pēc dotā xy>x + y, tad $x + y > 2\sqrt{x+y}$.

Izdalot abas nevienādības puses ar $\sqrt{x+y}$, iegūstam $\sqrt{x+y} > 2$.

Tātad x+y>4.

3. $(a+b+c) = \frac{1}{2}\left((a+b)+(b+c)+(c+a)\right) \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$

4. Pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam:

$$(a+b+c) \ge 3\sqrt[3]{abc},$$

$$(a^2+b^2+c^2) \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Sareizinot šīs izteiksmes, iegūstam

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.$$

5. Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot a_4^4 = a_1a_2a_2a_3a_3a_3a_4a_4a_4a_4 \le \left(\frac{a_1+a_2+a_2+a_3+\ldots+a_4}{10}\right)^{10} =$$

$$= \left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{10}\right)^{10}.$$

6. Pārveidosim doto nevienādību:

$$a^3+b^3+c^3+15abc \le 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2),$$

$$a^3+b^3+c^3+15abc \le 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+2(a^3+b^3+c^3),$$

$$2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+2(a^3+b^3+c^3)-(a^3+b^3+c^3) \ge 15abc,$$

$$2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+a^3+b^3+c^3 \ge 15abc.$$

Kreisajā pusē ir 15 saskaitāmie, un pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam:

$$2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+a^3+b^3+c^3 \ge$$

$$\ge 15\sqrt[15]{a^3b^3c^3a^2ba^2ba^2ca^2cb^2ab^2ab^2cb^2cc^2ac^2ac^2bc^2b}$$

jeb $2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+a^3+b^3+c^3 \ge$

$$\ge 15\sqrt[15]{a^{15}b^{15}c^{15}} = 15abc.$$

No šejienes arī izriet vajadzīgais.

7. Tā kā 1 = a + b + c, tad dotā nevienādība ir ekvivalenta šādai nevienādībai:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \le (a+b+c)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \le a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac,$$

$$\sqrt{3abc} \le ab+bc+ac,$$

$$\sqrt{3(a+b+c)abc} \le ab+bc+ac.$$

Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam:

$$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 \ge 3(a+b+c)abc,$$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 \ge 3a^2bc+3ab^2c+3abc^2.$$

Tātad atliek pierādīt, ka

$$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2 \ge a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Pamatojoties uz teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\frac{(ab)^2+(ab)^2}{2} \ge a^2bc,$$

$$\frac{(ab)^2+(bc)^2}{2} \ge ab^2c,$$

$$\frac{(bc)^2+(ac)^2}{2} \ge abc^2.$$

Saskaitot pēdējās trīs nevienādības, iegūstam meklēto nevienādību.

8. Pierādāmo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$a^3+b^6 \ge 6ab^2-8,$$

$$a^3+b^6+8 \ge 6ab^2,$$

$$a^3+b^6+8 \ge 3\sqrt[3]{(2ab^2)^3},$$

$$a^3+b^6+8 \ge 3\sqrt[3]{8a^3b^6}.$$

Pēdējā nevienādība ir spēkā, pamatojoties uz teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Vienādība ir spēkā vienīgi gadījumā, ja $a^3 = b^6 = 8$, t.i., ja a = 2, b = $\pm\sqrt{2}$.

9. Ja a, b, c ir veseli pozitīvi skaitļi, tad pierādāmās nevienādības kreisā puse ir pozitīvu reizinātāju reizinājums.

Šo reizinātāju vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{a+b+c}=1.$$

Tad nevienādības kreisā puse nav lielāka par 1^{a+b+c}, t.i., par 1.

Ja kāds no skaitļiem a, b, c nav vesels, tad, tā kā šie skaitļi ir racionāli, varam atrast kopsaucēju:

$$a=\frac{p}{m},\ b=\frac{q}{m},\ c=\frac{r}{m},\ \text{t.i., } p = am,\ q = bm,\ r = cm.$$

Ievietojot a, b, c vietā to izteiksmes, risinājums ir līdzīgs iepriekšējam.

10. No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam:

$$\frac{(S-a_1)+(S-a_2)+\ ...\ +(S-a_n)}{n} > \sqrt[n]{(S-a_1)(S-a_2)\ ...\ \cdot (S-a_n)}$$

$$\frac{(n-1)S}{n} > \sqrt[n]{(S-a_1)(S-a_2)\ ...\ \cdot (S-a_n)} \qquad (1)$$

Līdzīgi iegūstam

$$\frac{\frac{1}{(S-a_1)}+\frac{1}{(S-a_2)}+...+\frac{1}{(S-a_n)}}{n} > \sqrt[n]{\frac{1}{(S-a_1)(S-a_2)\ ...\ \cdot (S-a_n)}} \qquad (2)$$

Sareizinot izteiksmes (1) un (2), iegūstam

$$S\,\frac{n-1}{n^2}\left(\frac{1}{(S-a_1)}+\frac{1}{(S-a_2)}+...+\frac{1}{(S-a_n)}\right)>1$$

jeb

$$\frac{S}{(S-a_1)}+\frac{S}{(S-a_2)}+\ldots+\frac{S}{(S-a_n)}>\frac{n^2}{n-1}.$$

11. Saskaitot divas acīmredzamas nevienādības $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}=4\sqrt{abcd}$ un $a^2+b^2\geq 2ab$, iegūstam

$$2a^2+2b^2+c^2+d^2\geq 2ab+4\sqrt{abcd}$$

$$2(a^2+b^2)+c^2+d^2\geq 2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}).$$

Vienādība ir spēkā vienīgi gadījumā, ja a = b = c = d.

12. Pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$\sqrt[2n-1]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+(2n-1))}\leq$$

$$\leq\frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+(2n-1))}{2n-1}=$$

$$=\frac{(n+1)+(n+(2n-1))}{2(2n-1)}\cdot(2n-1)=m+n.$$

Kāpinot abas puses (2n-1)-ajā pakāpē iegūstam prasīto.

13. Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$a+b\geq 2\sqrt{ab},$$

$$b+c\geq 2\sqrt{bc},$$

$$a+c\geq 2\sqrt{ac}.$$

Saskaitot iegūstam $2(a+b+c)\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$.

14. Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq\sqrt[4]{ab},$$

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}=2\sqrt{\frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{(c+d)}{2}}\geq 2\sqrt[4]{abcd},$$

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq 2\sqrt[4]{abcd},$$

$$\sqrt{(a+d)(b+c)}\geq 2\sqrt[4]{abcd}.$$

Saskaitot iegūstam

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}\geq 6\sqrt[4]{abcd}$$

15. Zinām, ka x + y $\geq$ 2 $\sqrt{xy}$.

Apzīmēsim x = a + b un y = 2 $\sqrt{ab}$. Tad

$$a+b+2\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

un

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

16. Zinām, ka $a^2+b^2\geq 2ab$. Tātad

$a^2 - ab + b^2 \geq ab$.

Līdzīgi $b^2 - bc + c^2 \geq bc$

un $a^2 - ac + c^2 \geq ac$.

Reizinot katras nevienādības abas puses attiecīgi ar (a+b), (b+c), (a+c), iegūstam:

$$\left.\begin{aligned} a^3+b^3 &\ge ab(a+b),\\ b^3+c^3 &\ge bc(b+c),\\ a^3+c^3 &\ge ac(a+c).\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam:

$$2(a^3+b^3+c^3) \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c),$$
$$2(a^3+b^3+c^3) \ge a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b,$$
$$2(a^3+b^3+c^3) \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b),$$
$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2\frac{b+c}{2}+b^2\frac{c+a}{2}+c^2\frac{a+b}{2}. \qquad (2)$$

Tā kā $\frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc}$, $\frac{a+c}{2} \ge \sqrt{ac}$, $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, tad, pārveidojot nevienādību (2), iegūstam vajadzīgo nevienādību:

$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}.$$

Vienādība ir spēkā vienīgi tad, ja a = b = c.

17. Viegli pierādīt, ka

$$\frac{a^4+b^4}{2} \ge a^2b^2,$$
$$\frac{a^4+c^4}{2} \ge a^2c^2,$$
$$\frac{b^4+c^4}{2} \ge b^2c^2.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam:

$$a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2. \qquad (1)$$

Savukārt

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} &\ge \sqrt{a^2b^2\cdot b^2c^2} = b^2\,|ac| \ge ab^2c\\ \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2} &\ge \sqrt{a^2b^2\cdot a^2c^2} = a^2\,|bc| \ge a^2bc,\\ \frac{a^2c^2+b^2c^2}{2} &\ge \sqrt{a^2c^2\cdot b^2c^2} = c^2\,|ab| \ge abc^2.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Saskaitot nevienādības sistēmā (2), iegūstam:

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \ge ab^2c+a^2bc+abc^2$$

jeb

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \ge abc(a+b+c). \qquad (3)$$

No nevienādībām (1) un (3) iegūstam meklēto nevienādību:

$$a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c).$$

Vienādība ir spēkā, ja a = b = c.

18. Pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$x + y \ge 2\sqrt{xy}.$$

Apzīmējot $x = 4b^2$, $y = b + 1$, iegūstam:

$$4b^2 + b + 1 \ge 2\sqrt{4b^2(b+1)},$$
$$4b^2 + b + 1 \ge 4|b|\sqrt{b+1},$$
$$\frac{4b^2 + b + 1}{4|b|} \ge \sqrt{b+1}$$

19. Zinot, ka $x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \ge 2\sqrt{x_1^2 y_2^2 x_2^2 y_1^2}$, iegūstam:

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \ge 2\left|x_1 y_2 x_2 y_1\right| \ge 2x_1 y_2 x_2 y_1,$$
$$x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \ge x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 y_2 x_2 y_1,$$
$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \ge (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2,$$
$$\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \ge \left|x_1 y_1 + x_2 y_2\right| \ge x_1 y_1 + x_2 y_2,$$
$$2\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \ge 2(x_1 y_1 + x_2 y_2),$$
$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \ge x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2,$$
$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^2 \ge (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2,$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \ge \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}.$$

Viegli pamanīt, ka vienādība tiek iegūta gadījumā, kad $x_1y_2 = x_2y_1$.

20. Iepriekšējā uzdevumā pierādījām, ka

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \ge \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}. \qquad (1)$$

Pieņemot, ka $x_1=x$, $x_2 = \sqrt{a}$, $y_1 = c - x$, $y_2 = \sqrt{b}$, nevienādību (1) varam pārrakstīt šādi:

$$\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(c - x)^2 + b} \ge \sqrt{(x + c - x)^2 + \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}$$

jeb $\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(c - x)^2 + b} \ge \sqrt{c^2 + \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}$.

Vienādība ir spēkā vienīgi tad, ja $x\sqrt{b} = (c - x)\sqrt{a}$.

21. Tā kā pierādāmās nevienādības abas puses ir pozitīvas, tad to varam pārrakstīt:

$$(xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z),$$
$$x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 \ge xyz(x + y + z). \qquad (1)$$

Zinām, ka

$$\frac{x^2y^2 + x^2z^2}{2} \ge \sqrt{x^4y^2z^2} = \left|x^2yz\right| = x^2yz,$$
$$\frac{y^2z^2 + x^2y^2}{2} \ge \sqrt{x^2y^4z^2} = \left|xy^2z\right| = xy^2z,$$
$$\frac{z^2x^2 + z^2y^2}{2} \ge \sqrt{x^2y^2z^4} = \left|xyz^2\right| = xyz^2.$$

Saskaitot pēdējās trīs nevienādības, iegūstam nevienādību (1). Vienādība tiek iegūta vienīgi tad, ja $x = y = z$.

22. Zinām, ka $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Izvelkot no nevienādības abām pusēm kvadrātsakni, iegūstam:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ge \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}. \qquad (1)$$

Zinām arī, ka $ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. (2)

Savukārt $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$.

$$\text{jeb } \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \text{ (3)}$$

No (1), (2), (3) iegūstam:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)}{abc} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{abc}}.\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)}{abc} = \sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right) = 3(1+\sqrt{3}).$$

Vienādība tiek iegūta vienīgi gadījumā, kad a = b = c.

23. Doto nevienādību varam pārveidot:

$$\frac{a+b}{2}\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \geq \sqrt{ab}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right).$$

Zinām, ka $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Atliek pierādīt, ka $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{b}+\sqrt{a}$.

$$a+\frac{1}{4} \geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{a} \text{ un } b+\frac{1}{4} \geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{b}.$$

Saskaitot iegūstam:

$$a+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

24. Viegli pierādīt, ka

$$\frac{1+a_k}{2} \geq \sqrt{a_k},$$

$$1+a_k \geq 2\sqrt{a_k}.$$

Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam:

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 2\sqrt{a_1}\cdot 2\sqrt{a_2}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n\left(\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\right) = 2^n.$$

25. Apskatīsim reizinājumus a_1a_2, a_1a_3, ..., a_1a_n, a_2a_3, a_2a_4, ..., $a_{n-1}a_n$.

Šādu reizinājumu skaits ir $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ir spēkā nevienādības:

$$\sqrt{a_1a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2},\ \sqrt{a_1a_3} \leq \frac{a_1+a_3}{2}, \ldots,\ \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{a_{n-1}+a_n}{2}.$$

Saskaitot šīs nevienādības un ņemot vērā, ka a_i labajā pusē atkārtojas n - 1 reizi, iegūstam:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_ia_{i+1}}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right).$$

26. Pamatojoties uz teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}.$$

Līdz ar to

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}} = n^2.$$

Vienādība ir spēkā gadījumā, kad $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

27. Ņemot vērā to, ka skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veido aritmētisko progresiju, kā arī sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

No otras puses, ja $1 \leq k \leq n$, tad

$$a_k a_{n-k+1} = (a_1 + (k-1)d)(a_n - (k-1)d) =$$
$$= a_1 a_n + d^2(k-1)(n-k) \geq a_1 a_n.$$

Tātad $(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 = (a_1 a_n) \ldots (a_n a_1) \geq (a_1 a_n)^2$

$$\text{jeb } \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \sqrt{a_1 a_n}.$$

28. Viegli pamanīt, ka

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(a + b + c\right)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3.$$

Savukārt

$$\left(a+b+c\right) = \frac{1}{2}\left(\left(a+b\right) + \left(b+c\right) + \left(c+a\right)\right) \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)} \qquad (1)$$

un

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} =$$

$$= \frac{1}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\left(\left(b+c\right)\left(c+a\right) + \left(a+b\right)\left(b+c\right) + \left(a+b\right)\left(c+a\right)\right) \geq$$

$$\geq \frac{3}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\sqrt[3]{\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2}. \qquad (2)$$

Sareizināsim abas nevienādības (1) un (2).

Sareizinot kreisās puses, iegūsim:

$$\left(a + b + c\right)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} =$$

$$= \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} =$$

$$= \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 =$$

$$= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3.$$

Sareizinot labās puses, iegūstam:

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)} \cdot \frac{3}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)} \cdot \sqrt[3]{\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2} = \frac{9}{2}.$$

Tātad

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{9}{2}$$

jeb

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

29. Apzīmēsim kreisās puses izteiksmi ar S. Tā kā

$$\frac{a_1}{A_1}=\frac{A-A_1}{A_1}=\frac{A}{A_1}-\frac{A_1}{A_1}=\frac{A}{A_1}-1.$$

tad

$$S=\frac{A}{A_1}-1+\frac{A}{A_2}-1+\ldots+\frac{A}{A_n}-1=A\frac{A_2A_3\ldots A_n+\ldots+A_1A_2\ldots A_{n-1}}{A_1A_2\ldots A_n}-n.$$

Pamatojoties uz Košī nevienādību, iegūstam:

$$A_2A_3\ldots A_n+A_1A_3\ldots A_n+\ldots+A_1A_2\ldots A_{n-1}\geq n\sqrt[n]{(A_1A_2\ldots A_n)^{n-1}}.$$

Tātad

$$S\geq\frac{n\sqrt[n]{(A_1A_2\ldots A_n)^{n-1}}}{A_1A_2\ldots A_n}-n=\frac{nA}{\sqrt[n]{A_1A_2\ldots A_n}}-n.$$

Vēlreiz izmantojot Košī nevienādību, iegūstam:

$$\sqrt[n]{A_1A_2\ldots A_n}\leq\frac{1}{n}(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\frac{n-1}{n}A.$$

Tāpēc

$$S\geq\frac{nA}{\frac{n-1}{n}A}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}.$$

30. Apzīmēsim $X=\frac{a^ab^b}{a^bb^a}$:

lgX=a·lga+b·lgb-b·lga-a·lgb = (a - b)(lga-lgb).

Tā kā funkcija lgX ir augoša, tad (a - b)(lga-lgb)$\geq$0.

Tātad lgX$\geq$0, un tāpēc X$\geq$1.

Tāpēc arī $a^ab^b\geq a^bb^a$.

31. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Pierādīsim, ka $\sqrt{ab}\geq a^{\frac{b}{a+b}}b^{\frac{a}{a+b}}$:

$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\geq a^{\frac{b}{a+b}}b^{\frac{a}{a+b}},$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{2(a+b)}\geq\left(a^{\frac{b}{a+b}}b^{\frac{a}{a+b}}\right)^{2(a+b)},$$

$$a^{a+b}b^{a+b}\geq a^{2b}b^{2a}.$$

Izdalot šo izteiksmi ar a^bb^a, mēs iegūsim iepriekšējā uzdevumā pierādīto.

32. 30.uzdevumā esam ieguvuši:

$$a^ab^b\geq a^bb^a,$$
$$b^bc^c\geq b^cc^b,$$
$$c^ca^a\geq c^aa^c.$$

Sareizinot šīs nevienādības un iegūto rezultātu savukārt sareizinot ar $a^a b^b c^c$, iegūsim nevienādību $a^{3a} b^{3b} c^{3c} \ge a^{a+b+c} b^{a+b+c} c^{a+b+c}$, kas ir ekvivalenta meklētajai.

33. Ja p, q, r ir naturāli skaitļi, tad pierādāmās nevienādības kreisajā pusē atrodas p+q+r saskaitāmie, no kuriem p ir vienādi ar x^{q-r}, q ir vienādi ar x^{r-p} un r ir vienādi ar x^{p-q}. Šo skaitļu vidējais aritmētiskais ir $\dfrac{px^{q-r} + qx^{r-p} + rx^{p-q}}{p+q+r}$, bet vidējais ģeometriskais - $\sqrt[p+q+r]{x^{p(q-r)} \cdot x^{q(r-p)} \cdot x^{r(p-q)}} = \sqrt[p+q+r]{x^0} = 1.$ Tā kā pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko, tad $\dfrac{px^{q-r} + qx^{r-p} + rx^{p-q}}{p+q+r} \ge 1$ jeb

$px^{q-r} + qx^{r-p} + rx^{p-q} \ge p+q+r.$

Ja kāds no skaitļiem p, q, r nav vesels, tad iespējams atrast tādu skaitli k, lai kp, kq, kr būtu veseli skaitļi:

$$kpx^{q-r} + kqx^{r-p} + krx^{p-q} \ge kp + kq + kr.$$

Izdalot abas puses ar k, iegūstam nevienādību

$$px^{q-r} + qx^{r-p} + rx^{p-q} \ge p+q+r.$$

34. Pierādāmo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^p < 1 + p\cdot\frac{b}{a} \text{ jeb } (1+\mathrm{h})^{\mathrm{p}} < 1+ph \quad (h=\frac{b}{a}, 0<p<1).$$

1. Pieņemsim, ka p ir racionāls skaitlis. Tātad varam to pārrakstīt šādi:

   p = $\dfrac{m}{n}$, kur m un n ir naturāli skaitļi.

   Šajā gadījumā

$$(1+\mathrm{h})^{\mathrm{p}} = (1+\mathrm{h})^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} = \sqrt[n]{(1+\mathrm{h})^{\mathrm{m}} \cdot 1^{n-m}} =$$

$$= \sqrt[n]{\underbrace{(1+\mathrm{h})\cdot(1+\mathrm{h})\cdot\ldots\cdot(1+\mathrm{h})}_{m}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{m-n}} \le \frac{m(1+h)+n-m}{n} =$$

$$= 1 + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}h = 1+ph,$$

   t.i.,

$$(1+h)^p < 1+ph.$$

2. Pieņemsim, ka p ir iracionāls skaitlis.

   Apskatīsim tādu racionālu skaitļu $r_1, r_2, \ldots$ virkni, kuras robeža ir p, ja $0<r_k<1$ un k=1, 2, ..., n, ... Tikko esam pierādījuši, ka $(1+h)^{r_k} < 1+r_k h$, un tāpēc

$$(1+h)^p = \lim_{r_n\to p}(1+h)^{r_n} \le \lim_{r_n\to p}(1+r_n h) = 1+ph.$$

   Atliek pierādīt, ka ir spēkā stingra nevienādība $(1+h)^p < 1+ph$.

   Izvēlēsimies tādu racionālu skaitli r, lai p<r<1. Tad ir spēkā nevienādība

$$(1+h)^{\frac{p}{r}} \le 1+\frac{p}{r}h, \; jo\, 0<\frac{p}{r}<1.$$

   Tāpēc

$$(1+h)^p = \left[(1+h)^{\frac{p}{r}}\right]^r \le \left(1+\frac{p}{r}h\right)^r < 1+r\frac{p}{r}h = 1+ph, \text{ t.i., } (1+h)^p < 1+ph.$$

35. Pārveidojot dotās nevienādības un izmantojot Košī nevienādību, iegūstam:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{a^2}{a+b+c}+\frac{b^2}{a+b+c}+\frac{c^2}{a+b+c}=\frac{a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c}{a+b+c}=$$

$$=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{a}+\overbrace{b+b+\ldots+b}^{b}+\overbrace{c+c+\ldots+c}^{c}}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c}=$$

$$=a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{c}{a+b+c}} \qquad (1)$$

un

$$\frac{3}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{1}{a}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{b}+\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{c}=$$

$$=\frac{\overbrace{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}}^{a}+\overbrace{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}^{b}+\overbrace{\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}}^{c}}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{\left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c}=$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{c}{a+b+c}}}.$$

Tātad

$$a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot a^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}. \qquad (2)$$

No nevienādībām (1) un (2) iegūstam prasīto.

36. Izvēloties a skaitļus, no kuriem katrs ir vienāds ar $\frac{1}{a}$, b skaitļus, no kuriem katrs ir vienāds ar $\frac{1}{b}$, c skaitļus no kuriem katrs ir vienāds ar $\frac{1}{c}$, iegūstam

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}\right)}{a+b+c}\right]^{a+b+c} \geq \left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c,$$

t.i.,

$$\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geq \frac{1}{a^a b^b c^c},$$

$$\text{jeb } a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}. \qquad (1)$$

Tālāk, izvēloties a skaitļus, kas ir vienādi ar b+c, b skaitļus, kas ir vienādi ar a+c, c skaitļus, kas ir vienādi ar a+b, iegūstam:

$$\left[\frac{(b+c)a+(c+a)b+(a+b)c}{a+b+c}\right]^{a+b+c} \geq (b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c$$

jeb

$$\left[\frac{2(ab+ac+bc)}{a+b+c}\right]^{a+b+c} \geq (b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c,$$

jeb

$$\left[\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\right]^{a+b+c} \geq \frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}. \qquad (2)$$

Viegli var pierādīt, ka $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$. Tātad

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$$

un

$$\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} \leq \frac{a+b+c}{3}. \qquad (3)$$

No (3) un (2) izriet, ka

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geq \frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}. \qquad (4)$$

Savukārt no (1) un (4) iegūstam pierādāmo nevienādību.
Vienādība ir spēkā vienīgi tad, ja a = b = c.

37. **<u>1.pierādījums</u>**.

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1},$$

$$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{x^n} \geq \frac{2n+}{1}, \qquad (1)$$

$$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{2n+1} \geq x^n,$$

Zinām, ka

$$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{2n+1} \geq \sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\cdot\ldots\cdot x^{2n}} =$$

$$= \sqrt[2n+1]{x^{1+2+3+\ldots+2n}} = \sqrt[2n+1]{x^{\frac{(2n+1)2n}{2}}} = x^n.$$

<u>2.pierādījums</u>.
Nevienādību (1) varam pārrakstīt šādi:

$$\left(\frac{1}{x^n}+x^n\right)+\left(\frac{1}{x^n}+x^n\right)+\ldots+1+\ldots+\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)+\left(\frac{1}{x}+x\right) \geq 2n+1.$$

Šī nevienādība ir pareiza, jo

$$\frac{1}{x^k}+x^k \geq 2.$$

38.

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2},$$

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

39.

$$
\begin{aligned}
(n-1)! &= \sqrt{(n-1)!}\cdot\sqrt{(n-1)!}= \\
&= \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\cdot\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}= \\
&= \sqrt{1\cdot(n-1)}\cdot\sqrt{2\cdot(n-2)}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(n-2)\cdot 2}\cdot\sqrt{(n-1)\cdot 1}\le \\
&\le \frac{1+(n-1)}{2}\cdot\frac{2+(n-2)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)+2}{2}\cdot\frac{(n-1)+1}{2}= \\
&= \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}}_{n-1}=\frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Tātad $(n-1)!\le\dfrac{n^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Sareizinām abas puses ar n un iegūstam:

$$n!\le\frac{n^n}{2^{n-1}} \text{ jeb } 2^{n-1}\cdot n!\le n^n.$$

40. Jāpierāda, ka $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\le(n+1)^n$:

$$\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\le\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n}=\frac{(2+2n)n}{2n}=n+1.$$

Kāpinot n-tajā pakāpē, iegūstam prasīto.

41. Jāpierāda, ka $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\le n^n$:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)<\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}\right)^n=n^n.$$

42. Pārrakstām pierādāmo nevienādību:

$$\sqrt[n]{(n!)^2}\le\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2}\le\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pamatojoties uz teorēmu par n pozitīvu skaitļu vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko, iegūstam:

$$\sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2}\le\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n}.$$

Zinām, ka

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

un tāpēc

$$\sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2}\le\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

43. $\sqrt[n]{(n!)^3}\le\dfrac{n(n+1)^2}{4}$,

$$\sqrt[n]{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^3}\le\frac{n(n+1)^2}{4}.$$

Pamatojoties uz teorēmu par n pozitīvu skaitļu vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko, iegūstam:

$$\sqrt[n]{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^3}\le\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n}.$$

Zinām, ka $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

un tāpēc

$$\sqrt[n]{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

44. Zinām, ka $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$.

Apzīmēsim $a_1=2^{n-1}$, $a_2=2^{n-2}$, ..., $a_{n-1}=2$, $a_n=1$:

$$\sqrt[n]{2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot\ldots\cdot 2}<\frac{1}{n}\left(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1\right).$$

$2^{n-1},2^{n-2},\ldots,2$ ir ģeometriskās progresijas locekļi, un tāpēc

$$\sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}<\frac{1}{n}\left(2^n-1\right),$$

$$2^{\frac{(n-1)}{2}}<\frac{1}{n}\left(2^n-1\right).$$

Sareizināsim abas nevienādības puses ar n: $n\cdot 2^{\frac{(n-1)}{2}}<2^n-1$.

Tāpēc $1+n2^{\frac{n-1}{2}}<2^n$.

45. Pēc teorēmas iegūstam:

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(3n)^3}{3n}\ge\sqrt[3n]{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot(3n)^3},$$

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(3n)^3}{3n}=\frac{(3n)^2(3n+1)^2}{4}.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{3n}\cdot\frac{(3n)^2(3n+1)^2}{4}>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3n}$$

jeb

$$3n(3n+1)^2>4\sqrt[n]{(3n)!}.$$

46. Izmantojot teorēmu attiecībā uz skaitļiem $\dfrac{2}{1};\dfrac{3}{2};\ldots;\dfrac{n+1}{n}$, iegūstam:

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}},$$

$$\frac{1+\frac{1}{1}+1+\frac{1}{2}+\ldots+1+\frac{1}{n}}{n} \geq \sqrt[n]{n+1},$$

$$\frac{n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{n+1},$$

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) \leq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

47. Izmantosim teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko attiecībā uz skaitļiem

$$\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}};\underbrace{\frac{b}{a};\frac{b}{a};\ldots;\frac{b}{a}}_{n}:$$

$$\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+\frac{(n-1)b^n}{a} \geq n\sqrt[n]{\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}},$$

$$\frac{a^n+(n-1)b^n}{ab^{n-1}} \geq n,$$

$$a^n+(n-1)b^n \geq nab^{n-1}.$$

48. $a^2x^3 = \left(a^5a^5x^5x^5x^5\right)^{\frac{1}{5}} \leq \frac{1}{5}\left(a^5+a^5+x^5+x^5+x^5\right) = \frac{1}{5}\left(2a^5+3x^5\right).$

Analoģiski

$$b^2y^3 = \frac{1}{5}\left(2b^5+3y^5\right).$$

Tāpēc

$$a^2x^3+b^2y^3 \leq \frac{1}{5}\left(2\left(a^5+b^5\right)+3\left(x^5+y^5\right)\right),$$

$$a^2x^3+b^2y^3 \leq \frac{1}{5}(2+3)=1.$$

49. No teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet:

$$n=\frac{n^2}{n}=\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n} > \left(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Tāpēc $n^n > 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

50.

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}}=1$$

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

51.

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{b_n}} = 1.$$

52. Reizinājums $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n$ sastāv no viena reizinātāja 1, diviem reizinātājiem 2, ..., n reizinātājiem n. Tātad šajā reizinājumā ir $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ reizinātāji.

Aprēķināsim šo reizinātāju vidējo aritmētisko:

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)\cdot 2}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}.$$

Tā kā pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais ir lielāks par to vidējo ģeometrisko (ja šie skaitļi nav vienādi), tad

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n} < \frac{2n+1}{3}$$

un

$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n \leq \left[\frac{2n+1}{3}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Esam pierādījuši nevienādības labo pusi visiem $n\geq 2$.

Nevienādības kreisā puse ir spēkā, ja

$$\frac{1}{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n} \leq \left[\frac{2}{n+1}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}. \qquad (1)$$

Aprēķināsim nevienādības kreisās puses reizinātāju vidējo aritmētisko:

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{n}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}.$$

Tātad

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n}} < \frac{2}{n+1}.$$

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n} < \left[\frac{2}{n+1}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Līdz ar to esam pierādījuši nevienādību (1) un arī vajadzīgo nevienādību ($n\geq 2$).
Vienādība ir spēkā tikai tad, ja n=1.

53. Rīkojamies tāpat kā iepriekšējā uzdevumā.

54. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2n} = 1^{\alpha}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{1}{2^2}}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{2^3}}\cdot\ldots\cdot\left(2^n\right)^{\frac{1}{2^n}}$,

kur α ir patvaļīgs skaitlis (lai kādu to arī izvēlētos, $1^{\alpha}=1$).

Izmantosim teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$1^{\alpha}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{1}{2^2}}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{2^3}}\cdot\ldots\cdot\left(2^n\right)^{\frac{1}{2^n}}\le$$

$$\le\left(\frac{\alpha+2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+2^n\cdot\frac{1}{2^n}}{\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=\left(\frac{\alpha+n}{\alpha+1-\frac{1}{2^n}}\right)^{1-\frac{1}{2^n}+\alpha}.$$

Ja $\alpha=\frac{1}{2^n}$, tad nevienādības labā puse pārveidojas par $\frac{1}{2^n}+n$.

55. Tā kā skaitļi α, β, γ, ..., δ ir racionāli, tad varam tos pārveidot par daļskaitļiem ar kopīgu saucēju. Pieņemsim, ka $\alpha=\frac{p}{m},\ \beta=\frac{q}{m},\ \gamma=\frac{r}{m},\ldots,\delta=\frac{s}{m},$ kur p, q, r, ..., s ir veseli skaitļi.

Zinām, ka $\dfrac{\frac{px}{\alpha}+\frac{qy}{\beta}+\frac{rz}{\gamma}+\ldots+\frac{su}{\delta}}{p+q+r+\ldots+s}>\sqrt[p+q+r+\ldots+s]{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p\cdot\left(\frac{y}{\beta}\right)^q\cdot\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r\cdot\ldots\cdot\left(\frac{u}{\delta}\right)^s}$.

Tā kā $p=m\alpha, q=m\beta, r=m\gamma,\ldots,s=m\delta,$ tad iepriekšējo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$$\frac{\frac{m\alpha x}{\alpha}+\frac{m\beta x}{\beta}+\frac{m\gamma x}{\gamma}+\ldots+\frac{m\delta x}{\delta}}{m(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta)}>\sqrt[m(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta)]{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{m\alpha}\cdot\left(\frac{y}{\beta}\right)^{m\beta}\cdot\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{m\gamma}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{u}{\delta}\right)^{m\delta}}.$$

jeb

$$\frac{x+y+z+\ldots+u}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}>\sqrt[\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta]{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{u}{\delta}\right)^{\delta}}$$

un

$$\left(\frac{x+y+z+\ldots+w}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}>\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{w}{\delta}\right)^{\delta}.$$

56. Ieviesīsim šādus apzīmējumus:

$$y_1=x_1-x_2,\ y_2=x_2-x_3,\ldots,\ y_6=x_6-x_1.$$

Ja starp reizinātājiem y_i ir nepāra skaits negatīvu skaitļu vai kāda nulle, tad nevienādība ir acīmredzama.

Pieņemsim, ka tā nav.

Tā kā $y_1+y_2+\ldots+y_6=0$, tad negatīvo skaitļu skaits ir vai nu 2, vai arī 4.

Var uzskatīt, ka ir 2 negatīvi skaitļi (pretējā gadījumā jāmaina visu iekavu zīmes).

Pieņemsim, ka $y_1<0$ (citi gadījumi ir analoģiski).

Ja $y_2<0$, tad

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6\le y_3y_4y_5y_6\le\left(\frac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4}\right)^4\le\left(\frac{1}{4}\right)^4<\frac{1}{16}.$$

Ja $y_3<0$, tad

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6\le y_2y_4y_5y_6\le\left(\frac{y_2+y_4+y_5+y_6}{4}\right)^4\le\left(\frac{1}{4}\right)^4<\frac{1}{16}.$$

Analoģiski ir apskatāmi gadījumi, kad $y_5<0$ vai $y_6<0$.

Beidzot apskatīsim gadījumu, kad $y_4<0$:

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6\le(y_2y_3)(y_5y_6)\le\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)^2\left(\frac{y_5+y_6}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

57. Pieņemsim, ka a, b, c∈(0;1):

$$S=1-\left(\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\right).$$

Tā kā $1=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}$, tad

$$S=\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{a}{b+c+1}\right)+\left(\frac{b}{a+b+c}-\frac{b}{c+a+1}\right)+\left(\frac{c}{a+b+c}-\frac{c}{a+b+1}\right)=$$

$$=\frac{a(1-a)}{(a+b+c)(b+c+1)}+\frac{b(1-b)}{(a+b+c)(c+a+1)}+\frac{c(1-c)}{(a+b+c)(a+b+1)}=$$

$$=\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{a+b+c}\cdot\left(\frac{a}{(1-b)(1-c)(b+c+1)}+\frac{b}{(1-a)(1-c)(c+a+1)}+\frac{c}{(1-a)(1-b)(a+b+1)}\right).$$

Attiecībā uz saucējiem iekavās izmantosim teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$(1-b)(1-c)(b+c+1)\le\left(\frac{(1-b)+(1-c)+(b+c+1)}{3}\right)^3=1,$$

Līdzīgi rīkojoties, iegūstam, ka arī pārējie divi saucēji nav lielāki par 1.
Tāpēc

$$S\ge\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{a+b+c}\cdot(a+b+c)=(1-a)(1-b)(1-c).$$

Tas arī bija jāpierāda.
Gadījums, kad a, b vai c ir 0 vai 1, ir viegli pierādāms.

58. $x^2+y^2\ge2xy$, tāpēc

$$(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\ge2(ab+cd)\ge4\sqrt{abcd}\ge4,$$
$$ab+cd\ge2,\ bc+ad\ge2,\ ac+bd\ge2.$$

59. No uzdevuma nosacījumiem var secināt, ka skaitļiem a_1,a_2,c_1,c_2 nevar būt atšķirīgas zīmes.

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=a_1c_1+a_1c_2+a_2c_1+a_2c_2\ge b_1^2+b_2^2+a_1c_2+a_2c_1.$$

Divi pēdējie saskaitāmie nevar būt negatīvi, un tāpēc iespējams izmantot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$a_1c_2+a_2c_1\ge2\sqrt{a_1c_2a_2c_1}\ge2|b_1|\cdot|b_2|.$$

Ievietojot iegūto iepriekšējā nevienādībā, iegūstam:

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\ge b_1^2+b_2^2+2|b_1|\cdot|b_2|=(|b_1|+|b_2|)^2\ge(b_1+b_2)^2.$$

60.

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\le\left(\frac{n+a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{s}{n}\right)^n=$$

$$=1+n\left(\frac{s}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{s}{n}\right)^n$$

(pēdējo vienādību iegūstam pēc Ņūtona binoma formulas un koeficientu pie s^m aprēķinām pēc formulas

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}.$$

Ir acīmredzams, ka $(n-m)!n^m\ge n!$, un tāpēc

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}\le\frac{n!}{n!m!}=\frac{1}{m!}.$$

Esam ieguvuši prasīto.

Nevienādība pārvēršas par vienādību tikai gadījumā, kad n = 1.

61. Tā kā nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko, tad

$$\frac{(S-a_2)(S-a_3)...(S-a_n)}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{(S-a_2)(S-a_3)...(S-a_n)}$$

jeb

$$\frac{a_1}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{(S-a_2)(S-a_3)...(S-a_n)}.$$

Rīkojoties analoģiski, iegūstam:

$$\frac{a_2}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{(S-a_1)(S-a_3)...(S-a_n)},$$

$$\frac{a_3}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{(S-a_1)(S-a_2)...(S-a_n)},$$

....

$$\frac{a_n}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{(S-a_2)(S-a_3)...(S-a_{n-1})}.$$

Sareizinot šīs n nevienādības, iegūstam:

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}{(n-1)^n}\ge(S-a_2)(S-a_3)...(S-a_n)$$

jeb

$$\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{a}_2\cdot...\cdot\mathrm{a}_\mathrm{n}\ge(n-1)^n(S-a_1)(S-a_2)...(S-a_n).$$

62. Pamatojoties uz teorēmu par pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+...+ab^{n-1}+b^n>(n+1)\sqrt[n+1]{(ab)^{1+2+3+...+n}}>(n+1)(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

63. Apzīmēsim ar $a_{i_1}=\max\limits_{1\le i\le n} a_i$.

Izvēlēsimies

a_{i_2} - lielāko no saskaitāmajiem tās daļas saucējā, kuras skaitītājs ir a_{i_1},

a_{i_3} - lielāko no saskaitāmajiem tās daļas saucējā, kuras skaitītājs ir a_{i_2},

...

a_{i_k} - lielāko no saskaitāmajiem tās daļas saucējā, kuras skaitītājs ir $a_{i_{k-1}}$,

Beigās mēs iegūstam vienādību $a_{i_{r+1}}=a_{i_1}$.

Ja skaitļus 1, 2, ..., n novieto aplī, tad i_{k+1} un i_k atrodas blakus. Ja vienu vietu izlaiž, tas nozīmē, ka r$\ge\frac{n}{2}$.

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>$$

$$>\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+...+\frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}+...+\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right)=\frac{1}{2}S.$$

Pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam:

$$\frac{S}{r} \geq \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} = 1, \text{ t.i., } S \geq r.$$

Tāpēc dotā summa ir lielāka par $\frac{n}{4}$.

64. Pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam:

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq n.\sqrt[n]{\frac{a^{x_1-x_2+x_2-x_3+\ldots+x_n-x_1}}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots\cdot(x_n+x_1)}}$$

jeb

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq n.\sqrt[n]{\frac{1}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots\cdot(x_n+x_1)}}$$

Vēlreiz izmantojot teorēmu, iegūstam:

$$(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+\ldots+(x_n+x_1) \geq n\sqrt[n]{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots\cdot(x_n+x_1)}.$$

Ievietojot iepriekšējā nevienādībā, iegūstam prasīto.

65. Pārrakstīsim doto nevienādību:

$$x^n - 1 \geq n(x-1)x^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ja n = 1 vai x = 1, tad ir spēkā vienādība.
Ja x>1, tad, izdalot abas nevienādības puses ar x - 1, iegūstam:

$$\frac{x^n-1}{x-1} \geq nx^{\frac{n-1}{2}}$$

jeb

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{n} \geq x^{\frac{n-1}{2}}.$$

Pamatojoties uz sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{n} \geq \sqrt[n]{x^{n-1}\cdot x^{n-2}\cdot\ldots\cdot x\cdot 1} = \sqrt[n]{x^{\frac{n(n-1)}{2}}} = x^{\frac{n-1}{2}}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

66. Pieņemsim, ka m un n ir veseli skaitļi, bet $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - nenegatīvi skaitļi.
Zinām, ka

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+n}}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{m+n}}.$$

Pieņemsim, ka $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2 = \ldots = \mathrm{a}_\mathrm{m} = x^n$, $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+n} = \frac{1}{x^m}$.

$$mx^n + \frac{n}{x^m} \geq (m+n)\sqrt[m+n]{x^{mn}\frac{1}{x^{mn}}}.$$

jeb $mx^n + \frac{n}{x^m} \geq m+n..$

Pēc tam pieņemsim, ka m un n ir daļskaitļi - m = $\frac{p}{q}$ un n = $\frac{r}{s}$, kur p, q, r, s ir veseli pozitīvi skaitļi.

Tātad jāpierāda, ka

$$\frac{p}{q}x^{\frac{r}{s}}+\frac{r}{s}\cdot\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}\geq\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$$

jeb

$$psx^{\frac{qr}{qs}}+qr\frac{1}{x^{\frac{ps}{qs}}}\geq ps+qr.$$

Ja $x^{\frac{1}{qs}}$ apzīmēsim ar y, tad pēdējās nevienādības vietā varam rakstīt

$$psy^{qr}+qr\frac{1}{y^{ps}}\geq ps+qr.$$

Esam ieguvuši iepriekš pierādīto nevienādību (jo ps un qr ir veseli skaitļi). Tātad arī gadījumā, kad m un n ir daļskaitļi, dotā nevienādība ir pareiza.

67. Ir pietiekami pierādīt, ka

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)\geq\left(\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}+\sqrt[3]{b_1\cdot b_2\cdot b_3}\right)^3.$$

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)=a_1\cdot a_2\cdot a_3+b_1\cdot b_2\cdot b_3+\\&(a_1\cdot a_2\cdot b_3+a_1\cdot a_3\cdot b_2+a_2\cdot a_3\cdot b_1)+(a_1\cdot b_2\cdot b_3+a_2\cdot b_1\cdot b_3+a_3\cdot b_1\cdot b_2)\end{aligned}\qquad(1)$$

No otras puses

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}+\sqrt[3]{b_1\cdot b_2\cdot b_3}\right)^3=a_1\cdot a_2\cdot a_3+b_1\cdot b_2\cdot b_3+\\&+3\sqrt[3]{a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdot b_1\cdot b_2\cdot b_3}+3\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot b_1^2\cdot b_2^2\cdot b_3^2}.\end{aligned}\qquad(2)$$

No teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet:

$$\left.\begin{aligned}&a_1\cdot a_2\cdot b_3+a_1\cdot a_3\cdot b_2+a_2\cdot a_3\cdot b_1\geq 3\sqrt[3]{a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdot b_1\cdot b_2\cdot b_3},\\&a_1\cdot b_2\cdot b_3+a_2\cdot b_1\cdot b_3+a_3\cdot b_1\cdot b_2\geq 3\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot b_1^2\cdot b_2^2\cdot b_3^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Salīdzinot izteiksmes (1), (2), (3), iegūstam prasīto.

68. Ja vismaz viens no skaitļiem nav mazāks par 2, tad nevienādība ir acīmredzama, jo lielākā skaitļa kvadrāts nav mazāks par abu skaitļu reizinājumu.

Aplūkosim gadījumu, kad abi skaitļi ir mazāki par 2.

Izmantojot nevienādību $x^x\geq x$, ja $x>0$, iegūstam:

$a^a+b^b\geq a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq ab$.

69. $\sin\alpha>0$ un $\sin\beta>0$. Izmantojot teorēmu par vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko, iegūstam:

$$\sin\alpha+\sin\beta\geq 2\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

jeb

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\geq\frac{2\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}}}\geq\frac{2}{\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}}}=\frac{2}{\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right|}\geq\frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

70. Apskatīsim funkciju $f(x) = (1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2(1-p)x,$ kur $0 \le x \le 1$.
Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$f'(x) = (1-p)\left[(1+x)^{p-2} + (1-x)^{p-2} - 2\right] \ge$$
$$\ge (1-p)\left[2\sqrt{(1+x)^{p-2}(1-x)^{p-2}} - 2\right] \ge 0.$$

Tā kā funkcijas f(x) atvasinājums ir nenegatīvs un f(0) = 0, tad

$$f(x) \ge 0, \text{ ja } 0 \le x < 1.$$

Apskatīsim funkciju

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[(1+x)^{p} + (1-x)^{p}\right] - 1 - \frac{p(p-1)}{2}x^2, \text{ kur } 0 \le x \le 1.$$

$$g'(x) = \frac{p}{2}\left[(1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2(1-p)x\right] = -\frac{p}{2}f(x) \le 0.$$

Tā kā funkcijas atvasinājums nav pozitīvs un g(0) = 0, tad $g(x) \le 0$, ja $0 \le x < 1$, t.i., nevienādība ir pierādīta gadījumā, kad $0 \le x < 1$.
Gadījumu $-1 < x \le 0$ iegūst, ja sākotnējā nevienādībā x nomaina ar -x.

71. Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko un ņemot vērā, ka skaitļi $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ ir pozitīvi un to reizinājums ir vienāds ar vienu, iegūstam:

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{c+b} + \frac{\log_a c}{a+c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a}{a+b}\cdot\frac{\log_c b}{c+b}\cdot\frac{\log_a c}{a+c}} =$$
$$= \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}} \ge \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c}.$$

72. Uzskatīsim, ka skaitļi a, b, c, d (ar precizitāti līdz novietojumam) sakrīt ar skaitļiem $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$.
Aprēķināsim funkcijas $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ atvasinājumu.
No vienas puses, pēc Vjeta teorēmas iegūstam:

$$P'(x) = \left(x^4 - \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)x^3 + \left(\sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j\right)x^2 - \left(\sum_{1\le i<j<k\le 4} x_i x_j x_k\right)x + (x_1x_2x_3x_4)\right)' =$$
$$= 4x^3 - \left(3\sum_{i=1}^{4} x_i\right)x^2 + \left(2\sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j\right)x - \left(\sum_{1\le i<j<k\le 4} x_i x_j x_k\right).$$

No otras puses, pēc Rolla teorēmas iegūstam, ka atvasinājums P'(x) = 0 kaut kādā punktā $y \in (x_i; x_{i+1})$, ja $x_i < x_{i+1}$, kur $i \in [1; 2; 3]$.
Ja vienādojumam ir n saknes, tad atvasinājumam ir n - 1 sakne.
Tātad trešās pakāpes atvasinājumam ir 3 saknes - y_1, y_2, y_3. Tas atbilst nevienādībai $x_1 \le y_1 \le x_2 \le y_2 \le x_3 \le y_3 \le x_4$. Tāpēc

$$P'(x)=4(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3) =$$
$$= 4x^3 - 4(y_1 + y_2 + y_3)x^2 + 4(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)x - 4y_1y_2y_3.$$

No teorēmas par vidējiem lielumiem zinām, ka

$$\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2} \le \frac{y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3}{3}.$$

Savukārt, salīdzinot P'(x) izteiksmes, iegūstam:

$$y_1y_2y_3 = \frac{1}{4}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$
$$\frac{y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3}{3} = \frac{1}{6}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

Atgriežoties pie sākotnējiem apzīmējumiem, iegūstam prasīto.

Vienādība ir spēkā tikai gadījumā, ja $y_1y_2 = y_2y_3 = y_1y_3$, t.i., $y_1 = y_2 = y_3, x_1 = x_2 = x_3 = x_4, a = b = c = d$.

73. Apzīmēsim $b_i=2-a_i>0$ ($i=1, 2, ..., n$).

Tā kā $\sum_{i=1}^{n} b_i = 2n-1$, tad, izmantojot teorēmu par vidējiem lielumiem, iegūstam:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}+1\right) - n = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{b_i} - n = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i} - n \geq$$

$$\geq 2\frac{n}{\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot ...\cdot b_n}} - n \geq \frac{2n^2}{b_1+...+b_n} - n = \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

74. Apzīmēsim $\frac{a_i}{a_{i+1}} = b_i$ un pieņemsim, ka $b_{i+1} = 1$.

Šai gadījumā $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$. Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j\neq i} b_j \leq \sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} b_j^n\right) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i^n.$$

Tāpēc $\sum_{i=1}^{n} b_i^n \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b_i}\right)$.

75. Mums, jāpierāda, ka starp skaitļiem $\sqrt{ab}$ un $\sqrt{(a+c)(b+d)}$ var atrast vismaz vienu veselu skaitli. Tāpēc pierādīsim, ka $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+1$.

Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam līdzvērtīgu nevienādību:

$$ab + bc + ad + cd \geq ab + 2\sqrt{ab} + 1.$$

Tā kā cd=1, iegūstam:

$$bc + ad \geq 2\sqrt{ab},$$

$$bc + ad \geq 2\sqrt{abcd},$$

$$\frac{bc+ad}{2} \geq \sqrt{abcd}.$$

Šī nevienādība ir spēkā pēc teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Esam pierādījuši prasīto.

76. Vispirms pierādīsim, ka, palielinoties skaitlim, k, palielinās arī skaitļu lg n (n = 1, 2, ..., k) vidējais aritmētiskais:

$$\frac{\lg 1 + \lg 2 + ... + \lg(k+1)}{k+1} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + ... + \lg k}{k}. \qquad (1)$$

Nevienādības (1) varam pārrakstīt šādi:

$$\frac{\lg(k+1)!}{k+1} > \frac{\lg k!}{k},$$

$$\lg\left((k+1)!\right)^{\frac{1}{k+1}} > \lg\left(k!\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$\left((k+1)!\right)^{\frac{1}{k+1}} > \left(k!\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Kāpinot abas nevienādības puses pakāpē k(k+1), iegūstam:

$$\left(k!\cdot(k+1)\right)^k > \left(k!\right)^k\cdot k!,$$

$$\left(k!\right)^k\cdot(k+1)^k > \left(k!\right)^k\cdot k!,$$

$$(k+1)^k > k!. \qquad (2)$$

Zinām, ka

$$\left.\begin{aligned} k+1&>1\\ k+1&>2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ k+1&>k \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sareizinot visas nevienādības sistēmā (3), iegūstam nevienādību (2).
Tātad arī nevienādība (1) ir pareiza.

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)^m > (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m)^n,$$

$$m(\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg n) > n(\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg m),$$

$$\frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg n}{n} > \frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg m}{m}. \qquad (4)$$

Kreisajā pusē ir n skaitļu vidējais aritmētiskais, bet labajā pusē - m skaitļu vidējais aritmētiskais.

Esam pierādījuši, ka vidējais aritmētiskais $\frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg k}{k}$ palielinās, ja palielinās k.

Tāpēc no nevienādības (4) varam secināt, ka n>m.

77. Pieņemsim, ka a un b ir progresiju pirmais un pēdējais loceklis un starp tiem atrodas katras progresijas n locekļi.
Aritmētiskās progresijas k-to locekli varam aprēķināt pēc formulas

$$a_k = a+\frac{(k-1)(b-a)}{n+1} = \frac{(n-k+2)a+(k-1)b}{n+1},$$

bet ģeometriskās progresijas k-to locekli - pēc formulas

$$b_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{a^{n-k+2}\cdot b^{k-1}}.$$

Redzams, ka a_k ir n+1 skaitļu vidējais aritmētiskais, no kuriem n - k + 2 skaitļi ir vienādi ar a, bet k - 1 skaitlis ir vienāds ar b. Savukārt b_k ir šo pašu skaitļu vidējais ģeometriskais. Pamatojoties uz teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, $a_k \geq b_k$. Tas arī bija jāpierāda.

78. Pieņemsim, ka $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m = b^m$, kur b^m ir konstants lielums un b>0. Pamatojoties uz Košī nevienādību, iegūstam:

$$\sqrt[m]{b^m} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m},$$

$$b \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m},$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_m \geq bm.$$

Vienādība ir spēkā tikai gadījumā, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$.

Tātad vismazākā vērtība, t.i., bm, tiek iegūta gadījumā, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$.

79. Funkcija sastāv no astoņiem reizinātājiem. Pieci no tiem ir (1-x), viens - (1+x) un divi - (1+2x).
Izmantojot teorēmu par vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko, iegūstam:

$$\frac{5(1-x)+(1+x)+2(1+2x)}{8} \geq \sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2}.$$

$$\frac{5-5x+1+x+2+4x}{8}=\frac{8}{8}=1.$$

Tātad

$$\sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2} \leq 1,$$

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 \leq 1.$$

Nevienādības labā puse nav atkarīga no x, tāpēc vislielākā vērtība tiek iegūta gadījumā, kad visi reizinātāji ir vienādi, t.i., 1-x = 1+x = 1+2x jeb x = 0.

Funkcijas vislielākā vērtība ir y = 1, kur x = 0.

80. Ja m un n ir pozitīvi skaitļi, tad, izmantojot Košī nevienādību, varam rakstīt:

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\ldots+\frac{x}{m}}^{m}+\overbrace{\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\ldots+\frac{y}{n}}^{n}}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{\left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n},$$

$$\frac{x+y}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{\left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^m},$$

$$\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \geq \left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n.$$

Tāpēc

$$x^m y^n \leq \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n.$$

Apskatīsim gadījumu, kad m vai n ir daļskaitlis.

Vienādosim abu daļu saucējus. Ja pieņemam, ka kopsaucējs ir p, tad pm un pn ir veseli skaitļi :

$$\left(\frac{x+y}{pm+pn}\right)^{pm+pn} \geq \left(\frac{x}{pm}\right)^{pm} \cdot \left(\frac{y}{pn}\right)^{pn},$$

$$\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \geq \left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n.$$

un

$$x^m y^n \leq \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n.$$

Tātad nevienādība ir pierādīta arī gadījumā, kad m vai n ir daļskaitlis.

Ja $x^m y^n = C$, tad $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n \geq C$ un $x+y \geq (m+n)\left(\frac{C}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

Tātad vismazākā x+y vērtība ir $(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{C}{m^m n^n}}$.

Tā tiek iegūta, ja $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$.

81. Pamatojoties uz Košī nevienādību, iegūstam:

$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6} \ge \sqrt[6]{x\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{z}{3}\right)^3}.$$

(Vienādība ir spēkā gadījumā, ja $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.)

$$\frac{x+y+z}{6} \ge \sqrt[6]{\frac{xy^2z^3}{108}},$$

$$\frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \ge \frac{6^6}{108} = 432.$$

Tātad vismazākā funkcijas F vērtība ir 432.

6.4. Divu Košī teorēmu izmantošana ģeometrijā

1. Zinām, ka

$$2\sqrt{ab} \le a+b,$$
$$2\sqrt{bc} \le b+c,$$
$$2\sqrt{ac} \le a+c.$$

Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam:

$$8abc \le (a+b)(b+c)(a+c). \qquad (1)$$

Ja R ir apvilktās riņķa līnijas rādiuss, tad

$$a = 2R\sin A,$$
$$b = 2R\sin B,$$
$$c = 2R\sin C.$$

Ievietojot nevienādībā (1), iegūstam:

$$8\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \le (\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin A+\sin C)$$

jeb

$$64\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \le$$
$$\le 8\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{C+B}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}.$$

Tā kā $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$,

$$\sin\frac{C+B}{2} = \cos\frac{A}{2},$$
$$\sin\frac{A+C}{2} = \cos\frac{B}{2}$$

un šie lielumi ir pozitīvi, tad saīsinot iegūstam:

$$8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot \le \cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}.$$

Tā kā $\cos\frac{A-B}{2} \le 1$, $\cos\frac{B-C}{2} \le 1$, $\cos\frac{A-C}{2} \le 1$, tad

$$8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot \le 1 \text{ jeb } \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}.$$

2. Pamatojoties uz teorēmu par vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko, iegūstam:

$$\sin A+\sin B+\sin C \ge 3\sqrt[3]{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}.$$

Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2 \geq 9\sqrt[3]{(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)^2}.$$

Tā kā $\sin A\leq 1$, $\sin B\leq 1$ un $\sin C\leq 1$ (vienādība ir iespējama tikai vienā gadījumā), tad $(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)^2 > (\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)^3$.

Tātad

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2 \geq 9\sqrt[3]{(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)^2} >$$
$$9\sqrt[3]{(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)^3} = 9\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C.$$

Tā kā $9>2\pi$, tad

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2 > 2\pi\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C.$$

3. Pamatojoties uz Košī nevienādību, iegūstam:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$\frac{3p-(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Pēc Herona formulas $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$, un tāpēc

$$\frac{3p-2p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} = \sqrt[3]{\frac{p^2r^2}{p}} = \sqrt[3]{pr^2},$$
$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{pr^2},$$
$$\frac{p^3}{27} \geq pr^2,$$
$$p^2 \geq 27r^2.$$

4. $R=\frac{c}{2}$, ja c ir trijstūra hipotenūza,

$r=\frac{S}{p}$, ja p ir trijstūra pusperimets.

$$R+r=\frac{c}{2}+\frac{S}{p}=\frac{c}{2}+\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ac+bc+c^2+2ab}{2(a+b+c)}=\frac{c(a+b)+(a+b)^2}{2(a+b+c)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{a+b}{2}.$$

Pamatojoties uz Košī teorēmu, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}=\sqrt{2S}$, tātad $R+r\geq\sqrt{2S}$.

Vienādība ir spēkā gadījumā, ja trijstūris ir vienādsānu, t.i., a = b.

5. Jāpierāda, ka $S>2\sqrt{Rr^3}$.

Tā kā $R=\frac{abc}{4S}$ un $r=\frac{2S}{a+b+c}$, tad

$$S>2\sqrt{\frac{abc}{4S}\cdot\frac{8S^3}{(a+b+c)^3}},$$
$$S>2\sqrt{\frac{abc\cdot 2S^2}{(a+b+c)^3}},$$

$$(a+b+c)^3 > 8abc,$$
$$a+b+c > 2\sqrt[3]{abc},$$
$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}.$$

Pamatojoties uz Košī nevienādību, $\dfrac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc} > \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{abc}.$

6. Pamatojoties uz teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$(a+b)+(a+c)+(b+c) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)},$$

jeb

$$a+b+c \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}. \qquad (1)$$

Aplūkosim otru sakarību:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=$$
$$=\frac{1}{(a+b)(a+c)(b+c)}\left[(a+c)(b+c)+(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)\right] \geq$$
$$\geq \frac{3}{(a+b)(a+c)(b+c)}\sqrt[3]{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}. \qquad (2)$$

Sareizinot sakarības (1) un (2), iegūstam:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq$$
$$\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}\,\frac{3}{(a+b)(a+c)(b+c)}\sqrt[3]{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2} = \frac{9}{2}.$$

Izdalot abas nevienādības puses ar 2, iegūstam

$$\frac{(a+b+c)}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq \frac{9}{4}$$

jeb

$$p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

7. Viegli pierādīt, ka $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}.$

Tāpēc $P = 2(a+b) = 4\cdot\dfrac{a+b}{2} \leq 4\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = 2c\sqrt{2},$

kur c ir diagonāles garums.

Tātad $P \leq 2c\sqrt{2}$ un $P_{\max} = 2c\sqrt{2}.$

Pamatojoties uz teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{16},$$
$$S_{\max} = \frac{p^2}{16} = \frac{(2c\sqrt{2})^2}{16} = \frac{c^2}{2}.$$

Tātad $S_{\max}$ un $P_{\max}$ varam iegūt, ja a = b, t.i., ja taisnstūris ir kvadrāts.

6.5. Sakarība $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

1. Dots: a + b + c = 1.

Izdalot abas vienādības puses pēc kārtas ar a, b, c, iegūstam:

$$\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a},$$
$$\frac{1}{b}=\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b},$$
$$\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right). \qquad (*)$$

Bet $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ pēc iepriekš pierādītā. Analoģiski $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$.

Tātad no $(*)$ iegūstam:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3+2+2+2 \text{ jeb } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.$$

2. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 2+2+2+3=9.$

3.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c}\right)=$$
$$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{b}+4+\frac{4c}{b}+\frac{16a}{c}+\frac{16b}{c}+16=$$
$$=21+\left(\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{16b}{c}+\frac{4c}{b}\right)+\left(\frac{16a}{c}+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=21+2\left(\frac{2a}{b}+\frac{b}{2a}\right)+8\left(\frac{2b}{c}+\frac{c}{2b}\right)+4\left(\frac{4a}{c}+\frac{c}{4a}\right)\geq$$
$$\geq 21+2\cdot 2+8\cdot 2+4\cdot 2=49.$$

4.

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)=$$
$$=22+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2\left(\frac{2a}{c}+\frac{c}{2a}\right)+4\left(\frac{4a}{d}+\frac{d}{4a}\right)+2\left(\frac{2b}{c}+\frac{c}{2b}\right)+4\left(\frac{4b}{d}+\frac{d}{4b}\right)+8\left(\frac{2c}{d}+\frac{d}{2c}\right)\geq$$
$$\geq 22+2+2\cdot 2+4\cdot 2+2\cdot 2+4\cdot 2+8\cdot 2=64.$$

5. Ieviesīsim šādus apzīmējumus:

$$x = a+b;\ y = b+c;\ z=a+c.$$

Tātad

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-3\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}.$$

6. Ieviesīsim šādus apzīmējumus:

$$x = a-b;\ y = b-c;\ z= c.$$

Tātad

$$\frac{a}{b-c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a-b}=\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}+\frac{x+y+z}{x}=$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+1+1+1\geq 2+2+2+3=9.$$

7. Jāpierāda, ka $(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc.$

jeb

$$\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})(a^2+b^2+c^2)}{abc}\geq 9.$$

Pārveidosim nevienādības kreiso pusi:

$$\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})(a^2+b^2+c^2)}{abc}=\frac{a^3+ab^2+ac^2+ba^2+b^3+bc^2+ca^2+cb^2+c^3}{abc}=$$

$$=\frac{a^2}{bc}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c^2}{ab}\geq$$

$$\geq\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+2+2+2=$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6.$$

Izmantojot teorēmu par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

jeb

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq abc,$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 3.$$

Tātad

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6\geq 3+6=9$$

un

$$\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})(a^2+b^2+c^2)}{abc}\geq 9.$$

8. Jāpierāda, ka

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\leq\frac{1}{2n+1}.$$

Varam to pārrakstīt šādi:

$$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{x^n}\geq\frac{2n+1}{1},$$

$$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{x^n}=\frac{1}{x^n}+\frac{x}{x^n}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{x^n}+\frac{x^n}{x^n}+\frac{x^{n+1}}{x^n}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{x^n}+\frac{x^{2n}}{x^n}=$$

$$=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n=$$

$$=\left(\frac{1}{x^n}+x^n\right)+\left(\frac{1}{x^{n-1}}+x^{n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)+\left(\frac{1}{x}+x\right)+1\geq$$

$$\geq\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{n}+1=2n+1.$$

9. $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2\quad\left(a=\sqrt{x^2+1}, b=1\right).$

Tālākais pierādījums ir acīmredzams.

10.

$$\frac{(n^2+4)^2+26-n^2}{6\sqrt{n^4+7n^2+6}}=\frac{n^4+8n^2+16+26-n^2}{6\sqrt{n^4+7n^2+6}}=$$

$$=\frac{\left(n^4+7n^2+6\right)+36}{6\sqrt{n^4+7n^2+6}}=\frac{(n^2+1)(n^2+6)+36}{6\sqrt{n^4+7n^2+6}}=$$

$$=\frac{(n^2+1)(n^2+6)}{6\sqrt{(n^2+1)(n^2+6)}}+\frac{36}{6\sqrt{(n^2+1)(n^2+6)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(n^2+1)(n^2+6)}}{6}+\frac{6}{\sqrt{(n^2+1)(n^2+6)}}\geq 2.$$

11. Kā zināms, $ctgx=\dfrac{1}{tgx}$.

Sākotnējo nevienādību varam pārrakstīt šādi:

$tgx+\dfrac{1}{tgx}\geq 2.$

Tā kā $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, bet visiem x šai intervālā tangenss ir pozitīvs, varam izmantot nevienādību $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2.$

12. Pēc kosinusu teorēmas

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

jeb $\cos A=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)-\dfrac{a^2}{2bc}.$

Tā kā $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geq 2,$ tad $\cos A\leq 1-\dfrac{a^2}{2bc}.$

Iegūstam:

$$1-\cos A \geq \frac{a^2}{2bc},$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{2bc},$$

$$\sin^2\frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{4bc},$$

$$\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Analoģiski $\sin\frac{B}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{ac}}$,

$$\sin\frac{C}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{ab}}.$$

Sareizinot pēdējās trīs nevienādības, iegūstam:

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leq \frac{abc}{8\sqrt{a^2b^2c^2}} = \frac{1}{8}.$$

6.6. Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko

1. Tā kā $H \leq A$, tad

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$$

un

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4},$$

Analoģiski

$$\frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+c}{4},$$

$$\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}.$$

Saskaitot pēdējās trīs nevienādības, iegūstam:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c} \leq \frac{a+b}{4}+\frac{a+c}{4}+\frac{b+c}{4} =$$

$$= \frac{a+b+a+c+b+c}{4} = \frac{2a+2b+2c}{4} =$$

$$= \frac{a+b+c}{2}.$$

Tātad esam ieguvuši vajadzīgo.

2. Rīkojamies analoģiski, tikai šoreiz saskaitām nevis trīs, bet gan n nevienādības.

3. Rīkojamies kā 1.uzdevumā.

Saskaitot iegūstam

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_i + a_j}{4}.$$

Katrs a_i tiek izmantots n - 1 reizi, un tāpēc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n-1}{4}\sum a_i.$$

4.

$$\frac{a_1+a_3}{a_1+a_2}+\frac{a_2+a_4}{a_2+a_3}+\frac{a_3+a_1}{a_3+a_4}+\frac{a_4+a_2}{a_4+a_1}=$$
$$=\frac{(a_1+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)}+\frac{(a_2+a_4)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_2+a_3)(a_4+a_1)}.$$

Pirmajā uzdevumā pierādījām, ka

$$\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}.$$

Tātad

$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \text{ un } \frac{1}{ab} \le \frac{4}{(a+b)^2},$$

$$(a_1+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)\frac{1}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)} \ge$$
$$\ge \frac{4(a_1+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2} = \frac{4(a_1+a_3)}{a_1+a_2+a_3+a_4}.$$

Līdzīgi

$$(a_2+a_4)(a_1+a_2+a_3+a_4)\frac{1}{(a_2+a_3)(a_4+a_1)} \ge$$
$$\ge \frac{4(a_2+a_4)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2} = \frac{4(a_2+a_4)}{a_1+a_2+a_3+a_4}$$

Saskaitot abas nevienādības, iegūstam:

$$\frac{(a_1+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)}+\frac{(a_2+a_4)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_2+a_3)(a_4+a_1)} \ge$$
$$\ge \frac{4(a_1+a_2+a_3+a_4)}{a_1+a_2+a_3+a_4} = 4.$$

Tā kā nevienādības kreisā puse ir vienāda ar pierādāmās nevienādības kreiso pusi, tad dotā nevienādība ir pierādīta.

5.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab} \ge \frac{4}{a+b},$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac} \ge \frac{4}{a+c},$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc} \ge \frac{4}{b+c}.$$

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 2\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{b+c}\right),$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{b+c},$$

$$\frac{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{b+c}}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\frac{2}{a+b}}+\frac{1}{\frac{2}{a+c}}+\frac{1}{\frac{2}{b+c}}} = \frac{3}{\frac{a+b+a+c+b+c}{2}} = \frac{3}{a+b+c},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{b+c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

6.

$$\frac{x_i+y_i}{2} \geq \sqrt{x_i y_i},$$

$$\frac{(x_i+y_i)^2}{4} \geq x_i y_i.$$

Tā kā $A \geq H$, tad

$$\frac{\frac{1}{x_1y_1}+\frac{1}{x_2y_2}+\ldots+\frac{1}{x_ny_n}}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{\frac{1}{x_1y_1}}+\frac{1}{\frac{1}{x_2y_2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{x_ny_n}}} =$$

$$= \frac{n}{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n} \geq \frac{n}{\frac{(x_1+y_1)^2}{4}+\frac{(x_2+y_2)^2}{4}+\ldots+\frac{(x_n+y_n)^2}{4}}$$

$$\text{un } \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}.$$

<u>6.7. Bunjakovska - Košī nevienādība.</u>

1. Lai pierādītu šo nevienādību, izmantosim Bunjakovska - Košī nevienādību:

$$a_1^2 = x,\ a_2^2 = y,\ a_3^2 = z,\ b_1^2 = \frac{1}{x},\ b_2^2 = \frac{1}{y},\ b_3^2 = \frac{1}{z}.$$

Iegūstam:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq$$

$$\geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = \left(\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\,\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\,\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

2. Rīkojamies kā iepriekšējā uzdevumā:

$$a_k^2 = x_k,\ b_k^2 = \frac{1}{x_k}\ \text{(k=1, 2, ..., n).}$$

Iegūstam:

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geq$$

$$\geq\left(\sqrt{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\dots+\sqrt{x_n}\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2=n^2.$$

Vienādību iegūstam, ja $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

3. Izmantosim Bunjakovska - Košī nevienādību, kur

$$a_k=\sqrt{p_k},\ b_k=\sqrt{p_k}x_k^r\ \text{(k=1, 2, ..., n).}$$

$$(p_1x_1^r+p_2x_2^r+\dots+p_nx_n^r)^2=$$

$$=\left(\sqrt{p_1}\sqrt{p_1}x_1^r+\sqrt{p_2}\sqrt{p_2}x_2^r+\dots+\sqrt{p_n}\sqrt{p_n}x_n^r\right)^2\leq$$

$$\leq(p_1+p_2+\dots+p_n)(p_1x_1^{2r}+p_2x_2^{2r}+\dots+p_nx_n^{2r}).$$

4. Ja $a_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_2=\sqrt{\frac{1}{3}}$, $a_3=\sqrt{\frac{1}{6}}$, $b_1=\sqrt{\frac{1}{2}}x_1$, $b_2=\sqrt{\frac{1}{3}}x_2$, $b_3=\sqrt{\frac{1}{6}}x_3$, tad, izmantojot Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{6}x_3\right)^2\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{3}x_2^2+\frac{1}{6}x_3^2\right).$$

5. Dotā nevienādība ir citā formā uzrakstīta Bunjakovska - Košī nevienādība.
Ja izvēlamies $a_k^2=x_k$ un $b_k^2=y_k$ un no abām Bunjakovska - Košī nevienādības pusēm izvelkam kvadrātsakni, tad iegūstam uzdevumā minēto nevienādību.

6.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}-1+\frac{a+b+c}{a+c}-1+\frac{a+b+c}{a+b}-1=$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3.$$

Ja Bunjakovska - Košī nevienādībā

$x_1^2=a+b$, $x_2^2=b+c$, $x_3^2=c+a$, un $y_1=\frac{1}{a+b}$, $y_2=\frac{1}{b+c}$, $y_3=\frac{1}{c+a}$, tad

$$\left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq$$

$$\geq\left[\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{a+c}}{\sqrt{a+c}}\right]^2=3^2=9.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Tātad

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

7. Ja Bunjakovska - Košī nevienādībā $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2\right)$ $a_i^2 = \dfrac{x_i}{y_i}$ un $b_i^2 = x_i y_i$,

tad iegūstam:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \text{ un } \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}.$$

Ja tagad ņemam

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c, d)$$

$$\text{un } (y_1, y_2, y_3, y_4) = (b+2c+3d, c+2d+3a, d+2a+3b, a+2b+3c),$$

tad, izmantojot iepriekš pierādīto nevienādību, iegūstam:

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \ge$$

$$\ge \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}. \qquad (1)$$

No nevienādības $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \ge 0$ viegli iegūt $ab+ac+ad+bc+bd+cd \le \frac{3}{8}(a+b+c+d)^2$. (2)

Ievietojot (2) izteiksmē (1), iegūstam meklēto.

8. Apzīmēsim

$$A = b+c+d,$$
$$B = a+c+d,$$
$$C = a+b+d,$$
$$D = a+b+c.$$

Šie skaitļi ir pozitīvi.

Pēc Bunjakovska - Košī nevienādības

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge ab + bc + cd + da = 1.$$

Izmantosim nosacījumus, ka A, B, C, D ir pozitīvi un $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 1$.

Pieņemsim, ka $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$. Tad $a^3 \ge b^3 \ge c^3 \ge d^3 \ge 0$ un $\frac{1}{A} \ge \frac{1}{B} \ge \frac{1}{C} \ge \frac{1}{D} > 0$.

Izmantojot Čebiševa nevienādību un Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$\frac{a^3}{A} + \frac{b^3}{B} + \frac{c^3}{C} + \frac{d^3}{D} \ge \frac{1}{4}(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a+b+c+d)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(A+B+C+D)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) \ge \frac{1}{3}.$$

9. $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$, $z = \dfrac{1}{c}$.

Šajā gadījumā $xyz = 1$.

Iegūstam

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = S.$$

Izmantojot Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$\left[(x+y)+(z+x)+(x+y)\right]S \ge (x+y+z)^2$$

$$\text{jeb } S \ge \frac{x+y+z}{3}.$$

Kā varam secināt no teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko,

$$S \ge \frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{3}{2} \ge \sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Vienādība ir spēkā vienīgi tad, ja x = y = z = 1 jeb a = b = c = 1.

10. Tā kā $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tad

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\cdot tg\frac{\alpha}{2}=1 \qquad (1)$$

Pierādīsim to:

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\cdot tg\frac{\alpha}{2}=$$

$$=tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\alpha+\beta}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+\frac{1}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right). \qquad (2)$$

Varam izmantot formulu $tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}=tg\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\right)$.

Ievietojot (2), iegūstam (1).

Apzīmējot $tg\frac{\alpha}{2}=x, tg\frac{\beta}{2}=y, tg\frac{\gamma}{2}=z$ un izmantojot Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$1 = xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2. \qquad (3)$$

Tiešām, ja $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$, $b_1 = y$, $b_2 = z$, $b_3 = x$, tad iegūstam

$$(xy+yz+zx)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2) = (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Izvelkot kvadrātsakni no abām nevienādības pusēm, iegūstam nevienādību (3).

11. Divreiz jāizmanto Bunjakovska - Košī nevienādība - sākumā $x_i = a_i b_i$, $y_i = c_i d_i$, pēc tam $x_i = a_i^2$, $y_i = b_i^2$ un $x_i = c_i^2$, $y_i = d_i^2$:

$$(a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + \ldots + a_n b_n c_n d_n)^4 \le$$

$$\le (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2)^2 (c_1^2 d_1^2 + c_2^2 d_2^2 + \ldots + c_n^2 d_n^2)^2 \le$$

$$\le (a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + b_2^4 + \ldots + b_n^4)(c_1^4 + c_2^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + d_2^4 + \ldots + d_n^4).$$

12. Ievietojam $x_k^4 = a_k$, $y_k^4 = b_k$, $z_k^4 = c_k$, $t_k^4 = d_k$ (k = 1, 2, ..., n) un kāpinām abas nevienādības puses ceturtajā pakāpē.

Tādējādi iegūstam nevienādību, kas ir analoģiska iepriekšējā uzdevuma nevienādībai.

13. Izmantojot Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k}} \ge \frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k}}$$

un $$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1-x_k} = \sqrt{n(n-1)}.$$

Tāpēc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k}} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k} \ge$$

$$\ge \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Vēlreiz izmantojot Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \sqrt{n}.$$

Rezultātā $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \ge \sqrt{\frac{n}{n-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$.

14. Tā kā $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, tad izmantojot Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$|x_1| \cdot 1 + |x_2| \cdot 1 + ... + |x_n| \cdot 1 \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{1+1+...+1} = \sqrt{n}.$$

Tā kā $e_i \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$, tad visas $e_1x_1 + e_2x_2 + ... + e_nx_n$ veida summas pieder pie slēgtā intervāla ar garumu $(k-1)\sqrt{n}$. Šo intervālu var pārklāt ar $k^n - 1$ slēgtiem intervāliem, kuru garums ir $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{(k^n-1)}$.

Tā kā $e_1x_1 + e_2x_2 + ... + e_nx_n$ veida summu skaits ir k^n, tad vismaz divas no šīm summām pieder pie viena apakšintervāla, tātad starpība starp tām nevar pārsniegt apakšintervāla garumu.

Tāpēc eksistē $e_i \in \{0, \pm1, \pm2, ..., \pm(k-1)\}$, kam

$$|e_1x_1 + e_2x_2 + ... + e_nx_n| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{(k^n-1)}.$$

15. Izmantosim Bunjakovska - Košī nevienādību:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Ja $y_i = 1$ ($i = 1, 2, ..., n$), tad

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Tā kā $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a - x_0$ un $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = a - x_0^2$, tad $(a - x_0)^2 \le n(b - x_0^2)$

$$(n+1)x_0^2 - 2ax_0 + a^2 - nb \le 0.$$

Aprēķināsim kvadrātrinoma diskriminantu:

$$D = 4n(n+1)\left(b - \frac{a^2}{n+1}\right).$$

Ja $b < \frac{a^2}{n+1}$, tad tādas x_0 vērtības neeksistē.

Ja $b = \frac{a^2}{n+1}$, tad $x_0 = \frac{a}{n+1}$.

Ja $b > \frac{a^2}{n+1}$, tad $\frac{a - \sqrt{\frac{D}{4}}}{n+1} \le x_0 \le \frac{a + \sqrt{\frac{D}{4}}}{n+1}$.

16. Izdalot Bunjakovska - Košī nevienādības abas puses ar $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, iegūstam:

$$\frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \le \frac{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)}{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Tātad $y \le a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$.

Zinām, ka Bunjakovska - Košī nevienādība pārvēršas par vienādību, ja $x_i = a_i$. Tāpēc lielākā y vērtība ir $y = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$.

17. Pamatojoties uz Bunjakovska - Košī nevienādību, iegūstam:

$$y^2 = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

Pēc uzdevuma nosacījumiem $y^2 \le 4 \cdot 9 = 36$.

Tātad $-6 \le y \le 6$.

Tā kā Bunjakovska - Košī nevienādībā ir iespējama arī vienādība, tad

$y_{min} = -6$, $y_{max} = 6$.

6.8. Košī teorēmas vispārinājumi un dažas klasiskās nevienādības

1. Apzīmēsim $a_1 + a_2 + ... + a_n = a$,

$b_1 + b_2 + ... + b_n = b$,

$c_1 + c_2 + ... + c_n = c$

un izdalīsim doto nevienādību ar $a^\alpha b^\beta c^\gamma$.

Iegūsim dotajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību:

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta \left(\frac{c_1}{c}\right)^\gamma + ... + \left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta \left(\frac{c_n}{c}\right)^\gamma \le 1.$$

Pamatojoties uz 1.vispārinājumu, iegūstam:

$$\left(\frac{a_k}{a}\right)^\alpha \left(\frac{b_k}{b}\right)^\beta \left(\frac{c_k}{c}\right)^\gamma \le \left[\frac{\alpha\frac{a_k}{a} + \beta\frac{b_k}{b} + \gamma\frac{c_k}{c}}{\alpha + \beta + \gamma}\right]^{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha\frac{a_k}{a} + \beta\frac{b_k}{b} + \gamma\frac{c_k}{c}.$$

Pakāpeniski saskaitot šīs nevienādības visiem k = 1, 2, ..., n, iegūstam:

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_1}{b}\right)^{\beta}\left(\frac{c_1}{c}\right)^{\gamma}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_n}{b}\right)^{\beta}\left(\frac{c_n}{c}\right)^{\gamma}\le$$

$$\le\alpha\frac{a_1}{a}+\beta\frac{b_1}{b}+\gamma\frac{c_1}{c}+\ldots+\alpha\frac{a_n}{a}+\beta\frac{b_n}{b}+\gamma\frac{c_n}{c}=$$

$$=\frac{\alpha}{a}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)+\frac{\beta}{b}\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)+\frac{\gamma}{c}\left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)=$$

$$=\frac{\alpha\cdot a}{a}+\frac{\beta\cdot b}{b}+\frac{\gamma\cdot c}{c}=1.$$

2. Iepriekšējā uzdevumā ievietosim $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$, $a_1=b_1=c_1=1$, $a_2=\frac{1}{x}$, $b_2=\frac{1}{y}$, $c_2=\frac{1}{z}$.

Tātad $\left(a_1+a_2\right)^{\frac{1}{3}}\left(b_1+b_2\right)^{\frac{1}{3}}\left(c_1+c_2\right)^{\frac{1}{3}}\ge a_1^{\frac{1}{3}}\cdot b_1^{\frac{1}{3}}\cdot c_1^{\frac{1}{3}}\cdot+a_2^{\frac{1}{3}}\cdot b_2^{\frac{1}{3}}\cdot c_2^{\frac{1}{3}}$
jeb

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)}\ge1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

No teorēmas par vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko iegūstam:

$$\sqrt[3]{xyz}\ge\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}$$

jeb

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\ge3.$$

Tātad $\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)}\ge1+3=4.$

Kāpinot abas puses trešajā pakāpē, iegūstam vajadzīgo nevienādību.

3. Tā kā $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tad p + q = pq,

$$p=\frac{p+q}{q}\ \text{un}\ q=\frac{p+q}{p}.$$

Tāpēc pierādāmo nevienādību varam uzrakstīt šādi:

$$xy\le\frac{qx^{\frac{p+q}{q}}+py^{\frac{p+q}{p}}}{p+q}.$$

Ievietosim $x_1=x^{\frac{p+q}{q}}$ un $y_1=y^{\frac{p+q}{p}}$. Izmantojot 2.vispārinājumu, iegūstam:

$$xy=x_1^{\frac{q}{p+q}}y_1^{\frac{p}{p+q}}\le\left(\frac{\frac{q}{p+q}x_1+\frac{p}{p+q}y_1}{\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}}\right)^{\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}}=\frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}}+\frac{p}{p+q}y^{\frac{p+q}{p}}=$$

$$=\frac{1}{p}x^{p}+\frac{1}{q}y^{q}.$$

4. Nevienādību var viegli pierādīt, izmantojot 4. vispārinājumu.

5. Izmantosim 5.vispārinājumu.

$c_1=x_1>0,\ c_2=x_2>0,\ c_3=x_3>0,$

$$a_1=\frac{1}{x_2+x_3}>0,\ \ a_2=\frac{1}{x_1+x_3}>0,\ \ a_3=\frac{1}{x_1+x_2}>0.$$

Iegūstam:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{x_1(x_2+x_3)+x_2(x_1+x_3)+x_3(x_1+x_2)}=$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3}{2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3}=$$

$$=\frac{2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3}{4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3}=$$

$$=\frac{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1^2-2x_1x_3+x_3^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3}{4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3}=$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2+6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3}{4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3}\geq$$

$$\geq=\frac{6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3}{4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Vienādību iegūstam gadījumā, ja $x_1=x_2=x_3$.

6. Pēc tam kad ir izmantots 5,vispārinājums, izmanto šādu nevienādību:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=$$
$$=(x_1-x_3)^2+(x_4-x_2)^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+4x_2x_4+2x_3x_4$$

7. Izmanto 5. vispārinājumu un pēc tam vienādību:

$$4\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{5}(x_i-x_j)^2+10\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{5}x_ix_j.$$

8. . Izmanto 5. vispārinājumu un vienādību:

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2=$$
$$=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+(x_1-x_3+x_4-x_6)^2+(x_2-x_3+x_5-x_6)^2+$$
$$+6(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5+x_4x_6+x_5x_6+x_5x_1+x_6x_1+x_6x_2)$$

9. Pierādāmo nevienādību varam uzrakstīt šādi:

$$\frac{(n-1)p+1}{n}\cdot\frac{(n-1)q+1}{n}\leq\frac{(n-1)pq+1}{n}\qquad(1)$$

jeb $$\frac{\overbrace{p+p+...+p}^{n-1}+1}{n}\cdot\frac{\overbrace{q+q+...+q}^{n-1}+1}{n}\leq\frac{\overbrace{pq+pq+...+pq}^{n-1}+1}{n}.$$

Ja Čebiševa nevienādībā ievieto $\mathrm{a}_1=\mathrm{a}_2=...=\mathrm{a}_{\text{n-1}},\mathrm{a}_\mathrm{n}=1,$

$$\mathrm{b}_1=\mathrm{b}_2=...=\mathrm{b}_{\text{n-1}}=q,\mathrm{b}_\mathrm{n}=1,$$

tad iegūst nevienādību (1) un rezultātā arī pierādāmo nevienādību.

10. Nevienādība ir pareiza, ja

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,\ \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n}>1,$$

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n > 1,$$

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > 1. \qquad (1)$$

Pamatojoties uz Bernulli nevienādību $(1+h)^n \geq 1+nh$, iegūstam:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \geq \frac{n+2}{n+1}\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

jeb

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \geq \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$$

un

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \geq \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Esam pierādījuši nevienādību (1), tātad arī sākotnējo nevienādību.

11. Ir spēkā šādas nevienādības:

$$\left.\begin{aligned}
&(x_1^p+y_1^p)^{\frac{1}{p}}\left[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \geq \\
&\geq x_1(x_1+x_2)^{p-1}+y_1(y_1+y_2)^{p-1},\\
&(x_2^p+y_2^p)^{\frac{1}{p}}\left[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \geq \\
&\geq x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam:

$$\begin{aligned}
&\left[(x_1^p+y_1^p)^{\frac{1}{p}}+(x_2^p+y_2^p)^{\frac{1}{p}}\right]\left[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \geq \\
&\geq (x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Tā kā $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tad (p-1)q=p un $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$. (3)

Izmantojot izteiksmi (3), varam nevienādību (2) uzrakstīt šādi:

$$\begin{aligned}
&\left[(x_1^p+y_1^p)^{\frac{1}{p}}+(x_2^p+y_2^p)^{\frac{1}{p}}\right]\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \geq \\
&\geq (x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Izdalot abas nevienādības (4) puses ar $\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$, iegūstam:

$$(x_1^p+y_1^p)^{\frac{1}{p}}+(x_2^p+y_2^p)^{\frac{1}{p}} \geq \left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

12. Apzīmēsim nevienādības labo pusi ar K.

$$K^2 = (a_1+b_1+\ldots+l_1)^2 + (a_2+b_2+\ldots+l_2)^2 + \ldots + (a_n+b_n+\ldots+l_n)^2 =$$
$$= [a_1(a_1+b_1+\ldots+l_1) + a_2(a_2+b_2+\ldots+l_2) + \ldots + a_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)] +$$
$$+ [b_1(a_1+b_1+\ldots+l_1) + b_2(a_2+b_2+\ldots+l_2) + \ldots + b_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)] +$$
....
$$+ [l_1(a_1+b_1+\ldots+l_1) + l_2(a_2+b_2+\ldots+l_2) + \ldots + l_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)]$$

Izmantojot Heldera nevienādību katrai izteiksmei kvadrātiekavās (ar nosacījumu, ka p=q=2), iegūstam:

$$K^2 \le K(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{1}{2}} + K(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots + (l_1^2+l_2^2+\ldots+l_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

No šīs nevienādības varam iegūt sākotnējo nevienādību.

Tā kā pierādījums balstās uz Heldera nevienādību, tad vienādība ir iespējama vienīgi tad, ja $a_1 : b_1 : \ldots : l_1 = a_2 : b_2 : \ldots : l_2 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : l_n$.

7. INTERPRETĀCIJU METODES NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

7.1. Dekarta koordinātu sistēmas izmantošana.

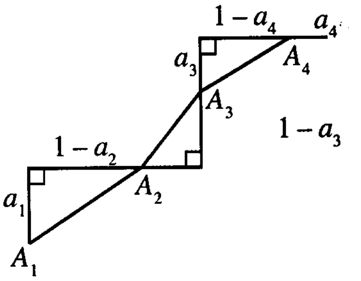
1. Jāpierāda, ka $\rho(x,1)+\rho(x,3)+\rho(x,5) \ge 4$,

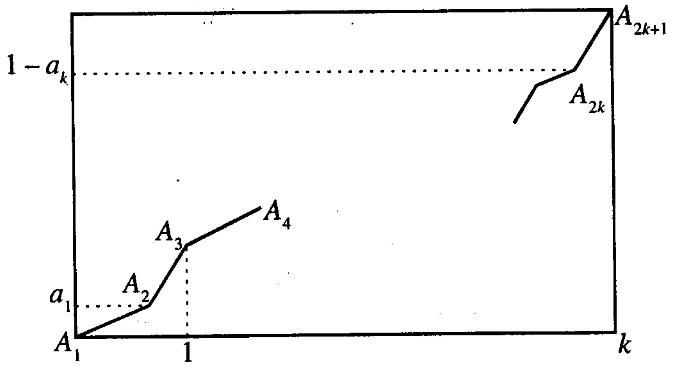
kur ar $\rho(a,b)$ apzīmēts attālums uz skaitļu ass no punkta a līdz punktam b. Taču summa $\rho(x,1)+\rho(x,5)$ nekad nav mazāka par 4. (Ja x atrodas starp 1 un 5, tad summa ir tieši vienāda ar 4, ja ārpus intervāla (1,5), tad lielāka. Tātad vienmēr

$\rho(x,1)+\rho(x,3)+\rho(x,5) \ge \rho(x,1)+\rho(x,5) \ge 4$,

2. Lauztās līnijas posmu garumi ir

$$A_1A_2 = \sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2},$$
$$A_2A_3 = \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2},$$
$$A_3A_4 = \sqrt{a_3^2 + (1-a_4)^2}, \ldots$$





Nevienādības kreisā puse ir vienāda ar lauztās līnijas $A_1A_2...A_{2k}A_{2k+1}$ garumu. Tas savukārt ir mazāks par nogriezni A_1A_{2k+1}, kas ir vienāds ar tāda kvadrāta diagonāli, kuram ir mala k. Diagonāles garums ir $k\sqrt{2}$.

7.2. Vektoru izmantošana nevienādību pierādīšanā

3. Apskatām vektorus $X=(a^2, b^2, c^2)$ un $Y=(bc,ca,ab)$. Pierādāmā nevienādība ir ekvivalenta ar nevienādību

$$a^2bc+b^2ca+c^2ab \le a^4+b^4+c^4.$$

Vektoru formā tā uzrakstāma šādi:

$$XY \le X^2.$$

Turklāt $2XY \le X^2+Y^2$, jo (1)

$$(X - Y)^2=X^2 - 2XY + Y^2 \ge 0.$$

Tātad

$$Y^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=XZ,$$

kur $Z=(b^2,c^2,a^2)$ un $2Y^2=X^2+Z^2$.
Bet $Z^2=b^4+c^4+a^4=X^2$, tāpēc

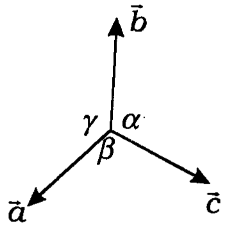
$$Y^2 \le X^2. \qquad (2)$$

No (1) un (2) iegūstam:

$$XY \le X^2.$$

4. Atliekam no viena punkta trīs vektorus $\vec a, \vec b$ un $\vec c$, starp kuriem ir leņķi a, b un g. Aplūkosim vektoru $\vec a+\vec b+\vec c$. Skaidrs, ka

$$(\vec a+\vec b+\vec c)^2 \ge 0.$$

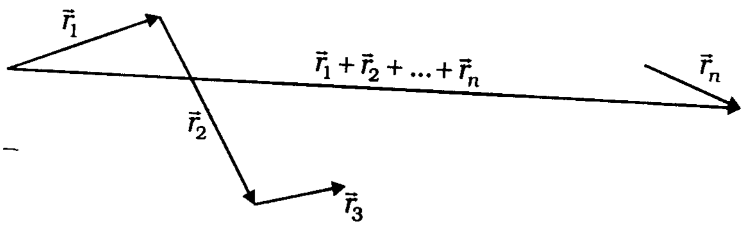


Tālāk

$$\vec a^{\,2} + \vec b^{\,2} + \vec c^{\,2} + 2\vec a\,\vec b + 2\vec a\,\vec c + 2\vec b\,\vec c \ge 0,$$
$$1 + 1 + 1 + 2\cdot1\cdot1\cdot\cos\gamma + 2\cdot1\cdot1\cdot\cos\beta + 2\cdot1\cdot1\cdot\cos\alpha \ge 0,$$
$$\cos\gamma + \cos\beta + \cos\alpha \ge -\frac{3}{2}.$$

5. Aplūkosim vektorus $\vec r_1 = (a_1, b_1), ..., \vec r_n = (a_n, b_n)$. Tā kā lauztas līnijas garums nav mazāks par taisnes nogriežņa garumu, kas savieno tās galapunktus, tad

$$|\vec r_1| + ... + |\vec r_n| \ge |\vec r_1 + ... + \vec r_n|.$$



Atliek ievērot, ka

$$|\vec r_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

$$\ldots$$

$$|\vec{r}_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$|\vec{r}_1 + \ldots + \vec{r}_n| = \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}.$$

6. Izmantosim nevienādību

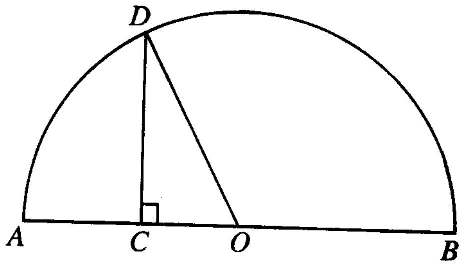
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}.$$

Apzīmēsim $x_1 = x$, $x_2 = \sqrt{a}$, $y_1 = c - x$, $y_2 = \sqrt{b}$.
Ievietojot iegūstam pierādāmo nevienādību.

7.3. Trigonometrisko funkciju izmantošana

7. Ja uz nogriežņa $AB = a_1 + a_2$ kā uz diametra uzkonstruējam pusriņķi ar centru O, tad $AC = a_1$ un $CB = a_2$. No ģeometrijas ir zināms, ka

$$DC = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{a_1 a_2}.$$



Tā kā $d = AB = a_1 + a_2$, tad rādiuss $OD = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Pēc trijstūra OCD redzams, ka $DC < OD = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

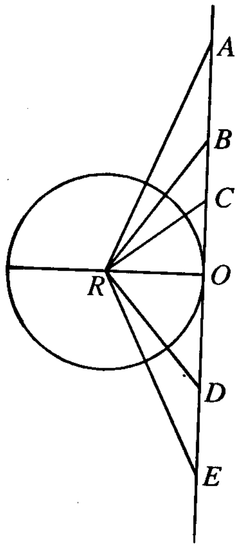
Bet $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Zīmējumā redzams, ka vienādība pastāv, ja $a_1 = a_2$.

8. Atliksim visus dotos skaitļus uz vertikālas skaitļu taisnes. Sākot no augšas, pie katra atzīmētā punkta pierakstīsim pa vienam burtam A, B, C, D, E. Nullpunktu apzīmēsim ar O. Novilksim riņķi, kura rādiuss ir viena vienība, tā, lai tas pieskartos skaitļu asij punktā O no kreisās puses. Novilktā riņķa centru apzīmēsim ar R. Savienosim punktu R ar pārējiem atzīmētajiem punktiem. Dotie skaitļi ir leņķu $\angle ORA$, $\angle ORB$, $\angle ORC$, $\angle ORD$, $\angle ORE$ tangensi.
Punkti X un Y jāizvēlas punktos A, B, C, D vai E. Tātad jāizvēlas divi no tikko izveidotajiem leņķiem tā, lai

$$X < \mathrm{tg}\angle ORX \text{ un } Y < \mathrm{tg}\angle ORY \text{ un}$$

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 1.$$



Ievērosim, ka

$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{tg\angle ORX - tg\angle ORY}{1+tg\angle ORXtg\angle ORY}=tg(\angle ORX-\angle ORY)=tg\angle YRX.$$

Jāpierāda, ka X un Y var novietot divos punktos no punktiem A, B, C, D, E tā, ka $0<tg\angle YRX<1$.

Aprēķināsim summu

$$\angle BRA + \angle CRB + \angle DRC + \angle ERD = ERA,$$

bet $0<\angle ERA<\pi$.

Tā kā visu leņķu lielumi ir pozitīvi skaitļi un šo leņķu summa ir mazāka par π, tad vismaz vienam no šiem četriem leņķiem lielums nepārsniedz $\frac{\pi}{4}$. Apzīmēsim šo leņķi ar YRX. Tā kā $0<\angle YRX<\frac{\pi}{4}$, tad $0<tg\angle YRX<1$.

9. Dotajiem nosacījumiem atbilst patvaļīga trijstūra malu garumi. Nevienādības kreisās un labās puses starpību var uzrakstīt šādi:

$$a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc.$$

Ja malu a, b, c pretleņķus apzīmē ar a, b, g un izmanto kosinusu teorēmu, tad

$$2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma - 1).$$

Ņemot vērā, ka $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, pārveidosim izteiksmi no iekavām:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma - 1 =$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Iegūtā izteiksme ir pozitīva, jo $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}$ ir šauri leņķi un to sinusi - pozitīvi.

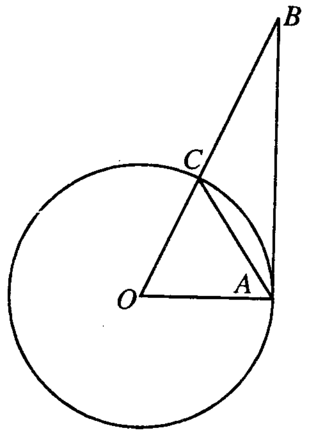
7.4.Laukumu novērtēšana un salīdzināšana.

10. Pēc zīmējuma redzams, ka

$$S_{\Delta AOC} < S_{sekt.AOC} < S_{\Delta AOB},$$

$$\frac{R^2}{2}\sin x < \frac{R^2 x}{2} < \frac{Rtgx}{2},$$

$$\sin x < x < tgx. \qquad (1)$$



Pierādīsim otru nevienādību. Dalot to ar sinx>0, iegūsim:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{tgx}{\sin x}$$

vai

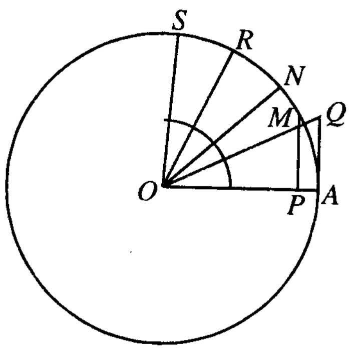
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\text{t.i., } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

11.

$$\alpha = 2S_{sekt.OAM}, \sin\alpha = 2S_{\Delta OAM},$$

$$n\alpha = 2S_{sekt.OAS}, \sin n\alpha = 2S_{\Delta OAS},$$



Acīmredzami, ka

$$\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} = \frac{S_{\Delta OAS}}{S_{sekt.OAS}} < \frac{S_{\Delta OAM} + S_{\Delta OMN} + \ldots + S_{\Delta ORS}}{S_{sekt.OAM} + S_{sekt.OMN} + \ldots + S_{sekt.ORS}} =$$

$$= \frac{nS_{\Delta OAM}}{nS_{sekt.OAM}} = \frac{S_{\Delta OAM}}{S_{sekt.OAM}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Tas arī bija jāpierāda.

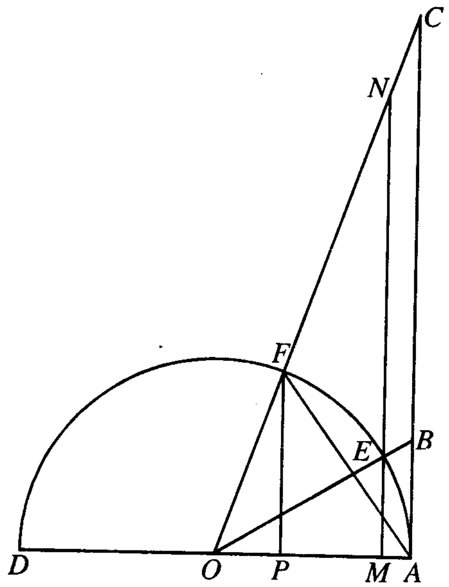
12. Ja novelkam vienības riņķa līniju ar centru punktā O, loks AE ir vienāds ar α un loks AF vienāds ar β. Ja EM un FP ir perpendikulāri no punktiem E un F pret rādiusu OA, tad

$$S_{\Delta OEA} = \frac{1}{2}\sin\alpha,$$
$$S_{\Delta OFA} = \frac{1}{2}\sin\beta,$$
$$S_{sekt.OEA} = \frac{1}{2}\alpha,$$
$$S_{sekt.OFA} = \frac{1}{2}\beta.$$

No šejienes izriet, ka

$$\alpha - \sin\alpha = 2S_{segm.AME},$$
$$\beta - \sin\beta = 2S_{segm.AEF}.$$

Tātad α-sinα<β - sinβ.



13. Analogi kā 12.uzdevumā
14. (Sk. 12.uzdevuma zīmējumu.)

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}tg\alpha, S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}tg\beta, S_{sekt.OAE} = \frac{1}{2}\alpha, S_{sekt.OAF} = \frac{1}{2}\beta.$$

Tātad $\dfrac{tg\alpha}{\alpha} = \dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{sekt.OAE}}, \dfrac{tg\beta}{\beta} = \dfrac{S_{\Delta OAC}}{S_{sekt.OAF}}.$

Nav grūti ieraudzīt, ka $\dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{sekt.OAE}} < \dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{sekt.OEF}}.$

Patiešām $\dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{sekt.OAE}} < \dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OEM}}$

un $\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{sekt.OEF}} > \dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}},$

bet $\dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OEM}} > \dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}}.$

No šejienes $\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{sekt.OEF}} > \dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{sekt.OAE}}$

Tātad $\frac{S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}}{S_{sekt.OAE}+S_{sekt.OEF}}>\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{sekt.OAE}}$,

t.i., $\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{sekt.OAF}}>\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{sekt.OAE}}$.

Tas arī bija jāpierāda.

15. Analogi kā 14.uzdevumā.

7.5. Varbūtību teorijas elementi nevienādību pierādīšanā

16. Apskatīsim trijstūri, kas sastāv no mxn rūtiņām. Apzīmēsim tā kolonnas ar $k_1, k_2, \ldots, k_m$, bet rindiņas - ar $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Pieņemsim, ka ar varbūtību p katrā rūtiņā ierakstīts cipars 1, bet ar varbūtību q - cipars 0. Tad varbūtība, ka visās m rūtiņās katrā rindiņā ir ierakstīti vieninieki, ir p^m, bet varbūtība, ka šajā rindiņā vismaz vienā rūtiņā ierakstīta nulle, ir $1 - p^m$. Tāpēc varbūtība, ka ikvienā no n rindiņām $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ierakstīta vismaz viena nulle, ir $(1-p^m)^n$. Apzīmēsim šādu notikumu ar A.

Varbūtība, ka ikvienā no kolonnām ierakstīts vismaz viens vieninieks, ir $(1-q^n)^m$. Šādu notikumu apzīmēsim ar B.

Ja nav ne A, ne B notikuma, tad eksistē rindiņa, kas sastāv tikai no vieniniekiem, un eksistē kolonna, kuru veido tikai nulles. Taču tas nav iespējams! Vai nu A, vai arī B notikumam noteikti ir jābūt. Bet tad šo varbūtību summa $(1-p^m)^n+(1-q^n)^m$ ir vismaz 1. Tas arī bija jāpierāda.

17. Apskatīsim 2x2 rūtiņu lauciņu. Pieņemsim, ka ikviena rūtiņa tiek iekrāsota zila, dzeltena vai oranža. Abūs notikums, kad viena fiksēta rūtiņa ir zila, B - kad šī rūtiņa ir dzeltena, C - kad šī rūtiņa ir oranža. Apzīmēsim šo notikumu varbūtības attiecīgi ar $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$, $P(C)=p_3$.

p_1^2 būs varbūtība, ka vienā fiksētā rindā abas rūtiņas ir iekrāsotas zilā krāsā,

$1 - p_1^2$ - varbūtība, ka šajā rindā kāda rūtiņa nav zilā krāsā,

$(1 - p_1^2)^2$ - varbūtība, ka abās rindās kāda rūtiņa nav zilā krāsā,

$1 - (1 - p_1^2)^2$ - varbūtība, ka eksistē rinda, kurā abas rūtiņas ir iekrāsotas zilā krāsā.

Līdzīgi iegūstam arī lielumus:

$1 - (1 - p_2^2)^2$ - varbūtība, ka eksistē kolonna, kurā abas rūtiņas ir iekrāsotas dzeltenā krāsā,

$1 - (1 - p_3^2)^2$ - varbūtība, ka eksistē diagonāle, kurā abas rūtiņas ir iekrāsotas oranžā krāsā.

Visi šie notikumi ir pa pāriem nesavienojami, bet tas nozīmē, ka varbūtību summa ir mazāka vai vienāda ar 1, t.i.:

$1 - (1 - p_1^2)^2 +1 - (1 - p_2^2)^2 +1 - (1 - p_3^2)^2 \le 1.$

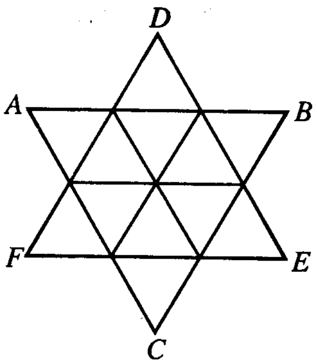
Nedaudz pārveidojot izteiksmi, iegūstam:

$- (1 - p_1^2)^2 - (1 - p_2^2)^2 - (1 - p_3^2)^2 \le -2$

jeb $(1 - p_1^2)^2 + (1 - p_2^2)^2 + (1 - p_3^2)^2 \le 2.$

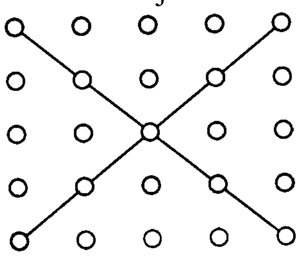
Tas arī bija jāpierāda.

18. Apskatīsim zīmējumā attēloto figūru.



Pieņemsim, ka ikviens no trijstūrīšiem ir baltā, melnā vai zilā krāsā. A būs notikums, kad viens fiksēts trijstūrītis ir baltā krāsā,
B - notikums, kad šis trijstūrītis ir zilā krāsā,
C - notikums, kad šis trijstūrītis ir melnā krāsā.
Atiecīgās varbūtības šiem notikumiem apzīmēsim ar
$P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$, $P(C) = p_3$.
Apskatīsim šādas varbūtības:
p_1^9 - varbūtība, ka ΔABC ir baltā krāsā,
p_2^9 - varbūtība, ka ar zilu krāsu iezīmētā figūra ir zilā krāsā,
p_3^9 - varbūtība, ka rombiņš, ko veido divi trijstūrīši, ir melnā krāsā,
$1 - p_3^2$ - varbūtība, ka fiksētajā rombiņā vismaz viens trijstūrītis nav melns,
$1 - (1 - p_3^2)^6$ - varbūtība, ka vismaz vienā no sešiem rombiņiem abi trijstūrīši ir melni.
Apskatīsim notikumus, kuru varbūtības ir p_1^9, p_2^9 un $1 - (1 - p_3^2)^6$. Skaidrs, ka šie notikumi ir pa pāriem nesavienojami, t.i.:
$p_1^9 + p_2^9 + 1 - (1 - p_3^2)^6 \leq 1$.
Nedaudz pārveidojot šo nevienādību, iegūstam: $(1 - p_3^2)^6 \geq p_1^9 + p_2^9$, tas arī bija jāpierāda.

19. Nevienādības pierādīšanai izmantosim zīmējumu.



Pieņemsim, ka katrs no punktiem ir zaļā, melnā vai sarkanā krāsā.
A būs notikums, kad viens fiksēts punkts ir zaļā krāsā,
B - notikums, kad šis punkts ir melnā krāsā,
C - notikums, kad šis punkts ir sarkanā krāsā.
Attiecīgās varbūtības šiem notikumiem apzīmēsim ar $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$, $P(C)=p_3$.
p_1^5 būs varbūtība, ka viena fiksēta rinda sastāv no zaļas krāsas punktiem,
$1-p_1^5$ - varbūtība, ka šajā rindā vismaz viens punkts nav zaļā krāsā,
$(1-p_1^5)^5$ - varbūtība, ka vismaz vien punkts katrā rindā nav zaļā krāsā,
$1 - (1-p_1^5)^5$ - varbūtība, ka eksistē rinda no punktiem zaļā krāsā.
Līdzīgi iegūstam arī varbūtību, ka eksistē kolonna no melnas krāsas punktiem. Tā ir $1 - (1-p_2^5)^5$.
Trešais būs notikums, kad abas garās diagonāles sastāv no sarkaniem punktiem. Tad p_3^5 būs varbūtība, ka vienu fiksētu diagonāli veido sarkanas krāsas punkti. Tā kā notikumi, kad viena un otra diagonāle ir sarkana, ir savienojami, tad varbūtība notikumam, kad abas diagonāles ir sarkanas, ir $2p_3^5 - p_3^9$.

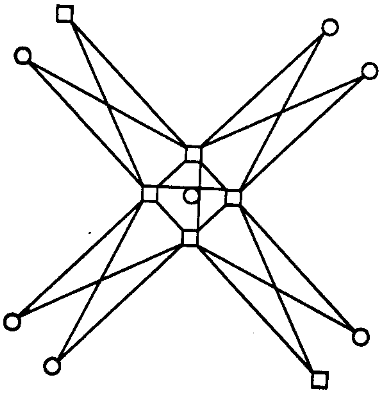
Savukārt notikumi, kuru varbūtība ir 1 - $(1-p_1^5)^5$, 1 - $(1-p_2^5)^5$ un $2p_3^5$ - p_3^9, pa pāriem nav savienojami, un tāpēc

$$(1-p_1^5)^5 + (1-p_2^5)^5 + 2p_3^5 + p_3^9 \le 1$$

jeb $(1-p_1^5)^5 + (1-p_2^5)^5 \le 1 + 2p_3^5 + p_3^9$.

Tas arī bija jāpierāda.

20. Nevienādības pierādīšanai izmantosim zīmējumu.



Pieņemsim, ka ikviens punkts ir nokrāsots baltā, melnā, zilā vai violetā krāsā.
A būs notikums, kad punkts ir balts,
B - notikums, kad punkts ir melns,
C - notikums, kad punkts ir zils,
D - notikums, kad punkts ir violets.
Attiecīgās varbūtības šiem notikumiem apzīmēsim ar $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$, $P(C) = p_3$ un $p(D) = p_4$.
Par vertikālēm (vai horizontālēm) sauksim tikai tās vertikāles (vai horizontāles), kurās ir vairāk nekā divi punkti. Tad
p_1^6 būs varbūtība notikumam, kad ar kvadrātiņiem atzīmētie punkti ir baltā krāsā,
1 - $(1-p_2^3)^3$ - varbūtība notikumam, kad eksistē kāda vertikāle, ko veido melnas krāsas punkti,
1 - $(1-p_3^4)^2$ - varbūtība notikumam, kad eksistē diagonāle virzienā /, kura sastāv no ziliem punktiem,
1 - $(1-p_4^4)^2$ - varbūtība notikumam, kad eksistē diagonāle virzienā \, kura sastāv no violetiem punktiem.
Pēc zīmējuma ir redzams, ka minētie gadījumi ir pa pāriem nesavienojami, un tāpēc var rakstīt:
$p_1^6+1-(1-p_2^3)^3 + 1 - (1 - p_3^4)^2 + 1 - (1 - p_4^4)^2 \le 1$
jeb $p_1^6 + 2 \le (1-p_2^3)^3 + (1-p_3^4)^2 + (1-p_4^4)^2$, tas arī bija jāpierāda.

8. NEVIENĀDĪBĀ IETILPSTOŠO FUNKCIJU ĪPAŠĪBU IZMANTOŠANA NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANĀ

8.1. Sinusa un kosinusa funkciju ierobežotības izmantošana

1. Dots: $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \le \max(\pm \sin x \cdot \sin y \pm \cos x \cdot \cos y)$, kur iespējamas visas zīmju kombinācijas. Šī izteiksme

$$\max(\pm \sin x \cdot \sin y \pm \cos x \cdot \cos y) = \max |\cos(x \pm y)| < 1.$$

2. $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}\le \max(x,y)<x+y.$

3. Tā kā jebkuriem x un y ir spēkā $-1\le \sin x, \sin y\le 1$, tad

$$-\frac{\pi}{2}<\sin x\cdot\sin y<\frac{\sin^2 x+\sin^2 y}{2}<\frac{\pi}{2}$$

un dotā nevienādība izriet no funkcijas f(x) = sin x augšanas intervālā $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Ņemsim a = sinα, b = sinβ. Tad

$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)\le 1.$$

Trigonometriskās nevienādības kreiso pusi var uzrakstīt šādi:

$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha},\qquad (1)$$

jo $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$

Ja α ir šaurs leņķis, tad visi saucēji ir pozitīvi. Tā kā sin un cos funkcijas ir mazākas par 1 vai vienādas ar 1, tad otrais un trešais saskaitāmais nav mazāks par 1, bet pēdējais - nav mazāks par 2. Tādējādi summa ir lielāka par 5 vai vienāda ar 5. Taču izteiksme (1) nevar būt vienāda ar 5, jo otrais saskaitāmais un trešais saskaitāmais vienlaikus nevar būt vienādi ar 1. Tātad summa ir lielāka par 5.

8.2. Pakāpes funkcijas īpašību izmantošana

6. Varam uzrakstīt šādas nevienādības:

$$a^{c+d}-a^cb^d-a^db^c+b^{c+d}\ge 0;$$
$$a^c(a^d-b^d)-b^c(a^d-b^d)\ge 0;$$
$$(a^d-b^d)(a^c-b^c)\ge 0.$$

Ja $a\ge b$, tad $a^c\ge b^c$ un $a^d\ge b^d$, un tāpēc abi reizinātāji nenegatīvi.

Ja $a<b$, tad $a^c<b^c$ un $a^d<b^d$, un tāpēc abi reizinātāji negatīvi.

7. Zināms, ka $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Varam izvēlēties šādus a_i:

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n}.$$

Tad $a_i^2=\frac{1}{n^2}$ un $\sum a_i^2=n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}.$

Bet n var ņemt tādu, lai $\frac{1}{n}<0{,}1$.

Attiecīgās varbūtības šiem notikumiem apzīmēsim ar $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$, $P(C)=p_3$ un $P(D)=p_4$.

Par vertikālēm (vai horizontālēm) sauksim tikai tās vertikāles (vai horizontāles), kurās ir vairāk nekā divi punkti. Tad

p_1^6 būs varbūtība notikumam, kad ar kvadrātiņiem atzīmētie punkti ir baltā krāsā,

$1-(1-p_2^3)^3$ - varbūtība notikumam, kad eksistē kāda vertikāle, ko veido melnas krāsas punkti,

$1-(1-p_3^4)^2$ - varbūtība notikumam, kad eksistē diagonāle virzienā /, kura sastāv no ziliem punktiem,

$1-(1-p_4^4)^2$ - varbūtība notikumam, kad eksistē diagonāle virzienā \, kura sastāv no violetiem punktiem.

Pēc zīmējuma ir redzams, ka minētie gadījumi ir pa pāriem nesavienojami, un tāpēc var rakstīt:

$$p_1^6+1-(1-p_2^3)^3+1-(1-p_3^4)^2+1-(1-p_4^4)^2\leq 1$$

jeb $2+p_1^6\leq(1-p_2^3)^3+(1-p_3^4)^2+(1-p_4^4)^2$.

Tas arī bija jāpierāda.

8.3. Kvadrāttrinoma īpašību izmantošana.

8. Dotā nevienādība būs pareiza attiecībā uz visiem x, ja dotā trinoma diskriminants būs mazāks par 0, t.i.:
$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2<0$.
Pārveidojot iegūstam $-16p(p-a)(p-b)(p-c)<0$,
kur p ir pusperimetrs. Šī nevienādība ir acīmredzama.

9. Apskatām trinomu $a_1x^2+2b_1x+c_1$. Pēc uzdevuma nosacījumiem $a_1>0$ un diskriminants $4(b_1^2-a_1c_1)$ ir nepozitīvi. Tātad attiecībā uz katru x ir spēkā nevienādība

$$a_1x^2+2b_1x+c_1\geq 0.$$

Analogi iegūstam, ka $a_2x^2+2b_2x+c_2>0$ un $5x^2+6x+2>0$
attiecībā uz jebkuru skaitli x. Saskaitot pēdējās trīs nevienādības, iegūstam:

$$(a_1+a_2+5)x^2+2(b_1+b_2+3)x+(c_1+c_2+2)>0.$$

Tātad diskriminants $4\left[(b_1+b_2+3)^2-(a_1+a_2+5)(c_1+c_2+2)\right]$ ir negatīvs, t.i.: $(a_1+a_2+5)(c_1+c_2+2)>(b_1+b_2+3)^2$.

10. Ja visām x vērtībām $f(x)=ax^2+2bx+c\geq 0$ *un* $g(x)=px^2+2qx+r\geq 0$,

$$\text{tad } a\geq 0,\ c\geq 0,\ p\geq 0,\ r\geq 0$$

un turklāt vēl $ac-b^2\geq 0$, $pr-q^2\geq 0$,

$$\text{t.i., } ac\geq b^2,\ pr\geq q^2.$$

Taču tad jābūt spēkā arī nevienādībām $ap\geq 0$, $cr\geq 0$ un $ac\cdot pr\geq b^2q^2$,

$$\text{t.i., } ap\cdot cr-(bq)^2\geq 0.$$

Tas ir iespējams tikai tad, ja visām x vērtībām

$$apx^2+2bqx+cr\geq 0.$$

11. Trinoma $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$ vērtības punktos x_1 un x_2 ir $\left(-\frac{a}{2}x_1^2\right)$ un $\frac{3a}{2}x_2^2$, tātad tiem ir pretējas zīmes. Tāpēc viena no saknēm ir starp x_1 un x_2.

12. Apzīmēsim $p=a+b+c>0$, $q=ab+bc+ca>0$, $r=abc>0$.
Polinoms $P(x)=x^3-px^2+qx-r$ ir negatīvs, ja $x\leq 0$. Tātad visas polinoma saknes pēc apgrieztās Vjeta teorēmas ir pozitīvas.

9. PIERĀDĪJUMI NO PRETĒJĀ

1. Pieņemsim pretējo, t.i., to, ka spēkā ir nevienādības:

$$a_1+a_3\leq a_2\sqrt{3}, \qquad (1)$$

$$a_2+a_4\leq a_3\sqrt{3}, \qquad (2)$$

$$a_3+a_5\leq a_4\sqrt{3}, \qquad (3)$$

$$a_4+a_6\leq a_5\sqrt{3}, \qquad (4)$$

$$a_5+a_7\leq a_6\sqrt{3}. \qquad (5)$$

Tā kā $a_1=0$, tad no (1) izriet, ka $a_3>a_2\cdot\sqrt{3}$.

Tāpēc no (2) izriet, ka $a_2+a_4>3a_2$

un $a_4>2a_2$.

Līdzīgi iegūstam $a_4>2a_6$.

Tātad $2a_4>2a_2+2a_6$

un $a_4>a_2+a_6$. (6)

No (2) un (4) iegūstam $a_2+2a_4+a_6>(a_3+a_5)\cdot\sqrt{3}>3a_4$

un $a_2+a_6>a_4$. (7)

Nevienādības (6) un (7) rada pretrunu.

2. Acīmredzami, ka $a\geq b\geq c$. Pieņemsim, ka pierādāmā nevienādība nav spēkā, t.i.:

$$a-b>\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \text{ un } b-c>\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Saskaitot iegūsim $a-c>\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

No šejienes $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq3(a^2+b^2+c^2)$,

ko iegūstam, iepriekšējās trīs nevienādības kāpinot kvadrātā un visas trīs saskaitot.

Ievērosim, ka $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$.

Tādējādi iegūsim $3(a^2+b^2+c^2)<3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$.

Taču tas nav iespējams.

3. Apzīmēsim kreisās un labās nevienādības puses maksimālos elementus ar M_1 un M_2.

Pieņemsim, ka ir spēkā nevienādība $M_1<M_2$.

Varam uzskatīt, ka $M_2=A^2-A$.

Tad $A^2-B<M_2$, $B>A$, $B^2-C<M_2$, $C>A$.

Acīmredzami, ka $C^2-A>A^2-A$.

Tātad ir radusies pretruna.

4. Analogi kā 3.uzdevumā.

5. Pieņemsim, ka spēkā ir nevienādība $a+b+c<3$.

Reizinot šo nevienādību ar ab, iegūstam

$$a^2b+ab^2+abc<3ab$$

$$\text{vai } ab^2+b(a^2-3a)+1<0.$$

Pēdējā nevienādība nozīmē, ka kvadrātiskā funkcija $y=ax^2+(a^2-3a)x+1$ punktā $x=b$ pieņem negatīvu vērtību. Tā kā šī funkcija ir pozitīva pēc absolūtās vērtības pietiekami lielam x, tad tai ir divas reālas saknes. Tātad

$$D=(a^2-3a)^2-4a>0.$$

No šejienes $a^3-6a^2+9a-4>0$

$$\text{vai } (a-1)^2(a-4)>0.$$

Tādējādi $a>4$ un vēl jo vairāk

$$a+b+c>4.$$

Pēdējā nevienādība ir pretrunā ar pieņemto.

6. Pieņemsim pretējo, t.i., to, ka spēkā ir nevienādība $\cos x^2+\cos y^2+\cos xy\geq3$.

Tā kā $\cos x^2\leq1$, $\cos y^2\leq1$ un $-\cos xy\leq1$,

tad nepieciešams, lai būtu $\cos x^2=1$, $\cos y^2=1$ un $\cos xy=-1$,

$$\text{t.i., } x^2=2k\pi,\ y^2=2l\pi,\ xy=\pi+2m\pi,$$

kur k, l, m ir veseli skaitļi

No šīm trim nevienādībām izriet, ka $x^2y^2=2k\pi\cdot2l\pi=(\pi+2m\pi)^2=(xy)^2$,

$$\text{t.i., } 4kl=(1+2m)^2.$$

Taču tas nav iespējams, jo vienādības kreisajā pusē ir pārskaitlis, bet labajā - nepārskaitlis.

Līdz ar to ir radusies pretruna:

$$\cos x^2+\cos y^2+\cos xy<3.$$

7. Pieņemsim, ka attiecībā uz kādu α ir spēkā nevienādība

$$\frac{1}{3} \le \frac{tg3\alpha}{tg\alpha} \le 3. \qquad (1)$$

Tad jebkuram veselam k lielums α atbilst nevienādībām

$$\alpha \neq k\pi, \qquad (2)$$

$$3\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

Nevienādība (2) uzdod tās α vērtības, kurām eksistē $\frac{1}{tg\alpha}$, bet nevienādība (3) - α vērtības, kurām eksistē tg3α.

Pierādīsim, ka $$\frac{tg3\alpha}{tg\alpha} = \frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}, \qquad (4)$$

ja α atbilst nosacījumiem (2) un (3).
No trigonometrijas ir zināms, ka attiecība

$$tg3\alpha = \frac{tg\alpha(3 - tg^2\alpha)}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad (5)$$

ir spēkā attiecībā uz visiem α, kuriem eksistē tgα un tg3α (tā rezultātā $1 - tg^2\alpha \neq 0$), t.i., tādiem α, kuri atbilst nevienādībai (3) un nevienādībai

$$\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (6)$$

kur k ir jebkurš vesels skaitlis.
Ja turklāt arī tgα≠0, t.i., tādiem α, kuri atbilst nevienādībai

$$\alpha \neq kp \qquad (7)$$

(k-vesels skaitlis), tad no vienādības (5) izriet vienādība (4). Tādējādi, ja α atbilst nosacījumiem (2) un (3), tad ir spēkā (6) un (7) un tāpēc arī spēkā attiecība (4).
No nevienādības (1) un attiecības (4) izriet, ka

$$\frac{1}{3} \le \frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \le 3.$$

Tad a atbilst divām nevienādībām:

$$\frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \ge \frac{1}{3}, \qquad (8)$$

$$\frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \le 3. \qquad (9)$$

No nevienādības (8) iegūstam:

$$\frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} - \frac{1}{3} \ge 0,$$

$$\frac{8}{3(1 - 3tg^2\alpha)} \ge 0.$$

No šejienes $1 - 3tg^2\alpha > 0.$ (10)

No nevienādības (9) iegūstam:

$$\frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} - 3 \le 0,$$

$$\frac{8tg\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \le 0.$$

Tātad vai nu tg2α=0, vai arī 1 - 3tg$^2\alpha$<0. (11)

Salīdzinot nosacījumus (10) un (11), nav grūti konstatēt, ka tg$^2\alpha$=0. Tāpēc arī tgα=0 un α=nπ (n - vesels skaitlis). (12)

Attiecība (12) ir pretrunā ar nevienādību (2). Tātad pieņēmums, ka eksistē α vērtības, attiecībā uz kurām ir spēkā nevienādība (1), ir nepareizs. Līdz ar to uzdevuma apgalvojums ir pierādīts.

8. Pieņemsim, ka a>1. Ievērosim, ka

$$|f(1)-f(0)|=$$

$$=\left|f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-2}{n}\right)+\ldots-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right|\leq$$

$$\leq\left|f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right|+\ldots+$$

$$+\left|f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right|\leq$$

$$\leq n\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Šī nevienādība ir spēkā attiecībā uz visiem n$\in$N. Ja n$\to\infty$, tad $\frac{1}{n^{\alpha-1}}\to 0$, jo α>1.

Tāpēc f(1)=f(0). Līdzīgi par katriem diviem a un b var pierādīt, ka f(a)=f(b), t.i., ka f ir konstante. Tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, tātad a$\leq$1.

9. Pieņemsim, ka nevienādību sistēmai ir atrisinājums. Tad visu četru nevienādību reizinājums būs pareiza nevienādība. Veiksim šādas darbības:

($*$) kāpināsim katru nevienādību kvadrātā;

($*$) visus locekļus no labās puses pārnesīsim uz kreiso pusi;

($*$) iegūto kvadrātu starpības aizvietosim ar summas un starpības reizinājumu;

($*$) sareizināsim visas nevienādību kreisajās pusēs iegūtās iekavas.

Visas šo nevienādību kreisās puses nav vienādas ar nulli un ir ar vienādām zīmēm, tātad to reizinājums ir pozitīvs. No otras puses, iegūstam, ka

$-((x-y+z-t)(x+y-z+t)(-x+y+z-t)(x-y+z+t))^2>0$.

Taču tādējādi ir radusies pretruna.

10. DAŽI SKAITLISKO NEVIENĀDĪBU PĀRBAUDĪŠANAS PAŅĒMIENI.

10.1. Skaitļu starpība

1. Izmantojam 10.1.2. aprakstīto metodi. Atbilde "<".

2. Izmantojam 10.1.2. aprakstīto metodi. Atbilde "<".

3. Ievērojam, ka viens skaitlis ir mazāks par 1, otrs - lielāks par 1.

4. Pirmā summa pa locekļiem ir mazāka par otro summu.

10.2. Tādu skaitļu salīdzināšana, kuri satur saknes zīmi

5. Pieņemsim, ka $\sqrt{3}+\sqrt{4}>\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Kāpināsim kvadrātā 3+2$\sqrt{12}$+4>2+2$\sqrt{10}$+5, 2$\sqrt{12}>2\sqrt{10}$.

Tas acīmredzami ir pareizi, tātad arī pieņēmums ir pareizs.

6. Pieņemsim, ka $\sqrt{8}+\sqrt{11} > \sqrt{5}+\sqrt{14}$.

Kāpināsim kvadrātā: 8+2$\sqrt{88}$+11>5+2$\sqrt{70}$+14.

Tālāk 2$\sqrt{88}$+19>2$\sqrt{70}$+19

vai 2$\sqrt{88}$>2$\sqrt{70}$.

Tas ir acīmredzami pareizi.

7. Pieņemsim, ka $\sqrt{19}$ - $\sqrt{7}$ > 2$\sqrt{3}$.

Kāpinot kvadrātā, iegūsim: 19-2$\sqrt{136}$+7>4·3

vai 14>2$\sqrt{136}$,

7>$\sqrt{136}$.

Ja kāpinām kvadrātā pēdējo nevienādību, rodas pretruna:
49>136.

Tātad pieņēmums ir nepareizs.

8. Pieņemsim, ka $\sqrt{10}$ - $\sqrt{7}$ > $\sqrt{2}$.

Kāpināsim kvadrātā: 1-2$\sqrt{70}$+7>2.

Tālāk 15<2$\sqrt{70}$.

Vēlreiz kāpinām kvadrātā: 15·15<4·70,

225<280.

Tas acīmredzami ir pareizi.

9. Pieņemsim, ka $\sqrt{7}+\sqrt{10} > \sqrt{3}+\sqrt{19}$.

Kāpinot kvadrātā, iegūsim: 7+2$\sqrt{70}$+10>3+2$\sqrt{57}$+19

vai 2$\sqrt{70}$+17>2$\sqrt{57}$+22.

Tālāk 2$\sqrt{70}$>2$\sqrt{57}$+5.

Kāpinot kvadrātā, iegūsim: 4·70>4·57+10$\sqrt{57}$+25,

280>228+10$\sqrt{57}$+25,

27>10$\sqrt{57}$.

Vēlreiz kāpinot kvadrātā, iegūstam: 27·27>100·57.

Tas ir pretrunīgi, tātad pieņēmums ir nepareizs.

10. Pieņemsim, ka $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2-\sqrt[3]{3}} > 2\sqrt[3]{2}$.

Kāpinot kvadrātā, iegūsim: $\sqrt{4-\sqrt[3]{9}}$>2$\sqrt[3]{4}$-2.

Atkal kāpinot kvadrātā, iegūsim:4-$\sqrt[3]{9}$>4$\sqrt[3]{16}$-8$\sqrt[3]{4}$+4

vai -$\sqrt[3]{9}$>4$\sqrt[3]{16}$-8$\sqrt[3]{4}$.

Tālāk 8$\sqrt[3]{4}$-8$\sqrt[3]{2}$>$\sqrt[3]{9}$

vai 8$\sqrt[3]{4}$($\sqrt[3]{2}$-1)>$\sqrt[3]{9}$.

Acīmredzami, ka $\sqrt[3]{9}<\sqrt[3]{16}$=2$\sqrt[3]{4}$. (1)

Ja izdotos pierādīt, ka 8$\sqrt[3]{4}$($\sqrt[3]{2}$-1)> 2$\sqrt[3]{4}$, (2)

tad nevienādība būtu pierādīta.

Patiešām, nevienādību dalot ar 2$\sqrt[3]{4}$, iegūstam:

4($\sqrt[3]{2}$-1)>1

vai $\sqrt[3]{2}$-1>$\frac{1}{4}$,

$$\sqrt[3]{2} > \frac{5}{4}.$$

Kāpinot 3 pakāpē, iegūstam: $2>\frac{125}{64}$.

Tas nozīmē, ka nevienādība (2) ir pareiza.

No (1) un (2) izriet nevienādības $8\sqrt[3]{4}\,(\sqrt[3]{2}-1)>\sqrt[3]{9}$ pareizība.

11. Salīdzināsim abu skaitļu kvadrātus:

$$1973+2\sqrt{1973}\cdot\sqrt{1975}+1975 \ldots 4\cdot 1974$$

$$\text{vai arī } 2\sqrt{1973}\cdot\sqrt{1975} \ldots 2\cdot 1974.$$

Pēdējo varam uzrakstīt šādi: $\sqrt{1974^2-1}<1974$.

Nevienādības zīmes vērsums ir acīmredzams.

12. Aplūkojam skaitļu dalījumus.

13. Izmantojot formulu (sk. 10.nod. punktu 10.2.2.), iegūst $-\sqrt{2}<0$.

14. Izmantojot formulu kreisajā pusē, iegūstam:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=0.$$

Tātad abi skaitļi ir vienādi.

10.3. Ekvivalentie pārveidojumi skaitlisko nevienādību pierādīšanā

15. Ekvivalento pārveidojumu rezultātā iegūstam:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt[5]{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt[5]{7}\right)^2>0.$$

Tas ir acīmredzami pareizi.

16. Ekvivalento pārveidojumu rezultātā iegūstam pareizu nevienādību:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt[3]{7}\right)^2>0.$$

17. Ekvivalento pārveidojumu rezultātā iegūstam:

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}\right)^2>0.$$

18. $S=\log_\pi 2+\log_\pi 8+\log_\pi 5<\log_3 81,$

$\log_\pi 80<\log_3 81.$

Šī nevienādība izriet no $\log_\pi 80<\log_3 80<\log_3 81.$

19. Izmantosim to, ka $\sqrt{10}\approx 3{,}16>\pi.$

Ievērojot logaritmiskās funkcijas pamatīpašības, iegūstam

$$\log_\pi 2+\log_\pi 5>\log_\pi \pi^2$$

$$\text{vai } \log_\pi (2\cdot 5)>\log_\pi \pi^2.$$

Tad jābūt $10>\pi^2$.

Tas ir patiesi, jo $10>3{,}52>\pi^2$.

Šo nevienādību var uzrakstīt arī mazliet citādi.

Apzīmēsim $\log_2\pi=a,\ \log_5\pi=b.$

$$\text{Tad } 2^a=\pi,\ 5^b=\pi$$

$$\text{vai } \pi^{\frac{1}{a}}=2,\quad \pi^{\frac{1}{b}}=5. \qquad (1)$$

Ņemot vērā apzīmējumus, pierādāmā nevienādība uzrakstāma šādi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2.$$

Taču jābūt spēkā arī nevienādībām $\pi^{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} > \pi^2$ vai $\pi^{\frac{1}{a}} \cdot \pi^{\frac{1}{b}} > \pi^2$.
Ievietojot pēdējā nevienādībā vērtības (1), iegūstam:

$$2{\cdot}5>\pi^2$$

$$\text{vai } 10>3{,}14^2\sim \pi^2.$$

20. Pierādāmo nevienādību varam uzrakstīt šādi:

$$\log_{9^2}(9\cdot 64) < \log_{6^2}(6\cdot 32)$$

$$\text{vai } \log_{9^2} 9+\log_{9^2} 64<\log_{6^2} 6+\log_{6^2} 32.$$

$$\text{Tā kā } \log_{9^2} 9=\log_{6^2} 6=\frac{1}{2},$$

$$\text{tad } \log_{9^2} 64<\log_{6^2} 32,$$

$$\text{bet pēc logaritmu īpašībām } \frac{1}{\log_{64} 81}<\frac{1}{\log_{32} 36}.$$

$$\text{Tas nozīmē, ka } \log_{64} 81<\log_{32} 36.$$

Pārejot uz bāzi 2 abās nevienādības pusēs, iegūstam: $\dfrac{\log_2 81}{\log_2 64}>\dfrac{\log_2 36}{\log_2 32}$.

Šī nevienādība ir ekvivalenta ar $\dfrac{\log_2 81}{6}>\dfrac{\log_2 36}{5}$.

Tālāk $5\cdot\log_2 81>6\cdot\log_2 36$.

Vai arī $\log_2 81^5>\log_2 36^6$.

Pēc logaritmiskās funkcijas īpašībām $81^5>36^6$

vai $\left(\dfrac{81}{36}\right)^5>36$.

Savukārt $\left(\dfrac{9}{4}\right)^5>36$.

Reizinot ar $\dfrac{4}{9}$, iegūstam $\dfrac{81}{16}\cdot\dfrac{81}{16}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^5>16$.

Šī nevienādība ir patiesa, jo

$$16=\frac{256}{16}<\frac{324}{16}=\frac{4\cdot 81}{16}=\frac{4\cdot 16\cdot 81}{16\cdot 16}=\frac{64\cdot 81}{16\cdot 16}<\frac{81}{16}\cdot\frac{81}{16}.$$

21. Logaritmēsim abus skaitļus:

$$\lg 15^{\log_3 10}\ldots\lg 10^{\log_3 15}.$$

Izmantojot logaritma pamatīpašības, iegūstam:

$$\log_3 10\cdot\lg 15\ldots\log_3 15\cdot\lg 10.$$

$$\text{vai } \log_3 15\ldots\log_3 15.$$

Tātad abi skaitļi ir vienādi.

22. Rīkojamies analogi kā 21.uzdevumā:

$$\lg 9^{\log_{15} 10}\ldots\ \lg 10^{\log_{15} 6},$$

$$\log_{15} 10\cdot\lg 9\ldots\log_{15} 6\cdot\lg 10,$$

$$\log_{15} 9>\log_{15} 6.$$

23. Rīkojamies analogi kā 21.uzdevumā:

$$\lg 12^{\log_4 10} \; .... \; \lg 10^{\log_4 13},$$
$$\log_4 10 \cdot \lg 12 .... \log_4 13 \cdot \lg 10,$$
$$\log_4 12 < \log_4 13.$$

24. Pirmo skaitli uzrakstīsim citādā formā:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \; ... \; \cdot 99 =$$
$$= (50-49)\cdot(50-48)\cdot...\cdot(50-1)\cdot 50\cdot(50+1)\cdot...\cdot(50+48)\cdot(50+49)=$$
$$=(50^2-49^2)\cdot(50^2-48^2)\cdot...\cdot(50^2-1)\cdot 50<50^{99}.$$

10.4. Nevienādības pastiprināšanas metode skaitlisko nevienādību pierādīšanā.

25. Pēc pakāpes funkcijas īpašībām

$$0{,}99999^{1{,}00001}\cdot 1{,}00001^{0{,}99999}<$$
$$<0{,}99999\cdot 1{,}00001 =$$
$$= (1-10^{-5})\cdot(1+10^{-5}) = 1 - 10^{-10} <1.$$

26. No nevienādību virknes

$$48^{25} < 49^{25} = (7^2)^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17}<344^{17}$$

izriet pierādāmā nevienādība.

27. Atbilde: $17^{14}>31^{11}$.

Izveidojam nevienādību virkni:

$$17^{14}>16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}.$$

28. Veidojam nevienādību virkni:

$$6^{65}<(2^3)^{22}\cdot 3^{65}<(3^2)^{22}\cdot 3^{65}<3^{47}\cdot 3^{65} = 9^{56}.$$

29. Acīmredzami, ka $\log_2 3 >1> \log_3 2$.

30. No logaritmiskās funkcijas īpašībām automātiski izriet:

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<1<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}, \text{ jo } \frac{1}{3}<\frac{1}{2}.$$

31. Acīmredzami, ka $\log_7 3 <1< \log_5 9$.

32. Izmantojam logaritmiskās funkcijas īpašības:

$$\log_{12}10< \log_{11}10<1< \log_{10}11< \log_{10}12.$$

33. Vispirms jānovērtē leņķi 100 un 1000. Tā kā

$$3{,}14<\pi<3{,}142,$$

tad $31\cdot\pi<97{,}402<100<100{,}512<32\cdot\pi$.

Tātad $31\cdot\pi<100<32\cdot\pi$,

no kurienes $\sin 100<0$. (1)

Analogi novērtējot leņķi 1000, iegūstam:

$$318\cdot\pi<999{,}156<1000<1000{,}4085<318{,}5\cdot\pi.$$

Tātad $318\cdot\pi<1000<318{,}5\cdot\pi$,

no kurienes izriet, ka $\cos 1000>0$.

No (1) un (2) izriet, ka $\sin 100<\cos 1000$.

34. Novērtēsim

$$\sin 1<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{7}{8}.$$

Parādīsim, ka $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{7}{8}$.

Vispirms kāpinot kvadrātā un pēc tam reizinot ar 4, iegūstam:

$$\frac{3}{4} < \frac{49}{64},$$

$$3 < \frac{49}{64} = 3\frac{1}{16}.$$

Šī nevienādība ir acīmredzami pareiza.

Pierādīsim, ka $\frac{7}{8} < \log_3 \sqrt{7}$.

Reizinot nevienādību ar 8 un izmantojot logaritmiskās funkcijas īpašības, iegūstam:

$$7 < \log_3 (\sqrt{7})^8$$

vai $\log_3 3^7 < \log_3 7^4$.

Pēc logaritmu īpašībām $3^7 < 7^4$.

Dalot ar 3^4, iegūstam:

$$3^3 < \left(\frac{7}{3}\right)^4$$

$$\text{vai } 27 < \frac{49 \cdot 49}{9 \cdot 9}.$$

Savukārt $27 = \frac{243}{9} < \frac{245}{9} = \frac{5 \cdot 49}{9} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 49}{9 \cdot 9} = \frac{45 \cdot 49}{9 \cdot 9} < \frac{49 \cdot 49}{9 \cdot 9}$.

Tas arī bija jāpierāda.

35. Novērtēsim skaitļus, kuri tiek izskaitļoti, izmantojot logaritmu bāzes pakāpes

$$2^1 < 3 < 2^2,\ 3^1 < 5 < 3^2.$$

Tā kā $\log_a x$ ir augoša, ja $a>1$, tad

$$\log_2(2^1) < \log_2 3 < \log_2(2^2), \quad \log_3(3^1) < \log_3 5 < \log_3(3^2),$$

$$1 < \log_2 3 < 2, \qquad 1 < \log_3 5 < 2.$$

No pēdējām nevienādībām nevar izdarīt nekādus secinājumus, jo abi logaritmi ir ierobežoti starp vieniem un tiem pašiem skaitļiem.

Pilnveidosim iepriekšējo novērtējumu. Novērtēsim skaitļus 3 un 5 ar skaitļu 2 un 3 daļveida pakāpēm. Ņemsim skaitļus

$$2^{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \text{ un } 3^{1+\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$$

un ar šiem skaitļiem salīdzināsim 3 un 5. Ar iepriekš aprakstīto metodi var parādīt, ka $3 > 2\sqrt{2}$ un $5 < 3\sqrt{3}$.

Tādā veidā iegūstam $2^{\frac{3}{2}} < 3 < 2^2$, $3^1 < 5 < 3^{\frac{3}{2}}$,

no kurienes $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$, $1 < \log_3 5 < \frac{3}{2}$.

No divām pēdējām nevienādībām izriet, ka

$$\log_2 3 > \log_3 5.$$

Atzīmēsim, ka nepieciešamības gadījumā arī šo novērtējumu varētu pilnveidot tālāk.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

Grāmatas

1. Бекенбах Е.б Беллман Р. Неравенства. М.б Мир, 1965.
2. Хорди.Дж.б Литтльвуд Дж.. Полио Г. Неравенства. М., Гостехиздат, 1948.
3. Сивашинский И. Неравенства в задачах.М., Наука, 1967.

Žurnāli

Квант. 1970-1997.
Komal (Ungārija). 1977-1997
Математика (**Bulgārija). 1978-1992.**
CRUX MATMEMATICORUM (Kanāda). 1981-1997.

Olimpiāžu materiāli

Latvijas matemātikas olimpiāžu materiāli, 1978-1997.
Vissavienības, Maskavas, Ļeņingradas matemātikas olimpiāžu materiāli, 1967-1997.
Starptautisko matemātikas olimpiāžu materiāli, 1959-1997.

+