A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons

KĀRTOŠANAS UN MEKLĒŠANAS UZDEVUMI

A. Andžāna redakcijā

Rīga 1999

IEVADS

Rit diena pēc dienas, stunda pēc stundas. Minūtes aizskrien nemanāmi ātri. Daudzās dzīves jomās pat sekunžu tūkstošdaļām ir būtiska nozīme. Bet cik daudz mēs spējam padarīt šajā neapturamajā laika plūdumā? Cik bieži klusībā neesam nodomājuši: "Kaut es šo darbu varētu paveikt ātrāk!"

Mēdz teikt, ka "laiks ir nauda". Tas sevišķi izjūtams datoru pasaulē, kur aptuveni 30% no komerciālā datorlaika tiek patērēts datu kārtošanas problēmām. Ja kārtošanas problēmu izdodas optimizēt, tas nenoliedzami labvēlīgi atsaucas uz panākumiem. Jo asprātīgāk un optimālāk sakārtota vide, kurā mēs strādājam, jo vieglāk un ātrāk mēs varam panākt sev vēlamo rezultātu.

Dažkārt nākas vien pabrīnīties, cik maz mūsu spriedumos jāpamaina, lai būtiski uzlabotu izstrādāto kārtošanas stratēģiju. Bet vai jau vienreiz uzlabotā algoritma darbības ātrumu nevar vēl palielināt? Ja var, tad kur ir tā robeža, kuru principā pārkāpt netagad, ne arī jebkad vispār nebūs iespējams? Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi ir viena no tām matemātikas jomām, kur visciešāk saskaras elementārā matemātika ar vēl nezināmo. Radušies no teorētiskās datorzinātnes reālām problēmām, tie paver bagātīgas iespējas patstāvīgiem pētījumiem.

Darbā apkopoti uzdevumi, kas attiecas uz kārtošanas un meklēšanas tematiku. Pamatā tie ņemti no dažādām olimpiādēm un konkursiem Latvijā un citās valstīs. Uzdevumu lielākā daļa ir oriģināli; arī aizgūtajiem uzdevumiem gandrīz vienmēr atrisinājumi rakstīti no jauna. Cik mums zināms, šādas kārtošanas un meklēšanas uzdevumu un to risināšanas metožu sistematizācija agrāk nav veikta.

Darbs sastāv no nodaļām. Aplūkotie uzdevumi katras nodaļas ietvaros ir numurēti. Darbā lietoti daži kopīgi apzīmējumi: $\bullet$ apzīmē problēmas atrisinājuma sākumu; $\otimes$ apzīmē problēmas atrisinājuma beigas. Uz teorēmu un lemmu pierādījumu sākumu un beigām attiecīgi norāda $\vee$ un $\wedge$.

1. NODAĻA

MONOTONI TURNĪRI.

Šajā nodaļā aplūkosim tādus kārtošanas uzdevumus, kuros būtisks ir fakts, ka par kārtojamajiem objektiem jau iepriekš ir noteikti zināms, ka nav divu objektu ar vienādām pazīmēm pēc kurām šie objekti tiek kārtoti. Piemēram, nav divu vienādu monētu ar vienādu masu, sporta spēļu turnīrā nepiedalās divas spēkos vienādas komandas (šis fakts izslēdz neizšķirta rezultāta iespējamību), proti, vienmēr uzvarēs stiprākā komanda vai arī, sverot monētas, svaru kausi nekad neatradīsies līdzsvarā. Nodaļas sākuma daļā piedāvātais materiāls būs veltīts tieši sporta spēļu turnīru izpētei, taču itin viegli tālāk minētos rezultātus var pielietot arī monētu svēršanai.
Turpmāk aplūkosim turnīrus ar n dalībniekiem ($n \geq 2$), kuros katram ar katru paredzēts sacensties tieši vienu reizi, pie kam neizšķirtu nav. Dalībniekus mēs bieži attēlosim ar punktiem un apzīmēsim ar burtiem (varbūt lietojot arī indeksus). To, ka dalībnieks A uzvarējis dalībnieku B, attēlosim ar pierakstu $A \rightarrow B$.

Definīcija.
Par monotoniem sauc tādus turnīrus, kuros uzvarētājs pieveic visus savus sāncenšus, otrās vietas ieguvējs - visus, izņemot uzvarētāju, bronzas medaļas īpašnieks pārspēj visus, atskaitot čempionu un vicečempionu, utt.; pēdējās vietas ieguvējs zaudē visiem citiem turnīra dalībniekiem. Var iztēloties, ka spēlētāju prasmi raksturo skaitļi (visiem spēlētājiem tie ir dažādi) un savstarpējā spēlē no diviem vienmēr uzvar tas, kam šis skaitlis ir lielāks.

Turpmāk pieņemsim, ka par turnīru jau iepriekš zināms, ka tas būs monotons, un aplūkosim sekojošu problēmu: kā turnīrs jāorganizē, lai būtu jāizspēlē iespējami maz spēļu?

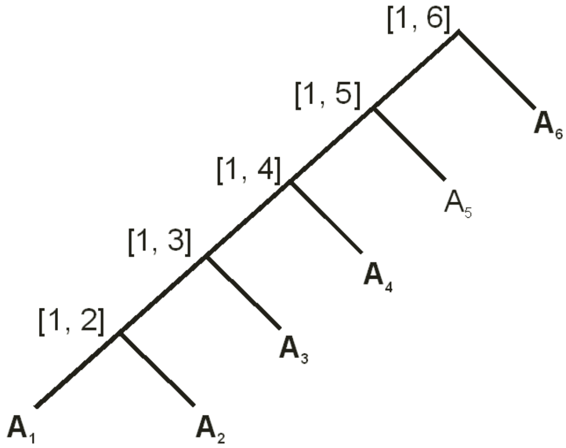
1.1 UZVARĒTĀJA NOSKAIDROŠANA.

Atbilde uz šo jautājumu ir atkarīga no tā, ko mēs ar turnīra palīdzību vēlamies noskaidrot. Pieņemsim, ka mūs interesē šāda problēma:

Turnīrā piedalās n dalībnieki. Katram turnīra dalībniekam ar katru citu jātiekas tieši vienu reizi un vienmēr uzvar spēcīgākais (turnīrā neizšķirtu nav). Kāds ir mazākais spēļu skaits, kas organizējams turnīrā, lai noskaidrotu pašu spēcīgāko turnīra dalībnieku?

Šajā gadījumā var rīkoties sekojoši. Vispirms sacenšas divi dalībnieki; šīs spēles uzvarētājs atkal sacenšas ar kādu no pārējiem, utt., kamēr visi dalībnieki izspēlējuši vismaz vienu spēli. Pēdējās, (n-1)-ās spēles uzvarētājs tiek pasludināts par turnīra uzvarētāju.
Tas, ka šādā ceļā noskaidro turnīra uzvarētāju, ir gandrīz acīmredzams. Tiešām, katrs cits, izņemot pēdējās spēles uzvarētāju, kādam ir zaudējis, tātad nevar pretendēt uz visstiprākā godu.
Vai mūsu mērķi nevarēja sasniegt ar mazāku spēļu skaitu nekā n-1? Pierādīsim, ka ne - mūsu uzrādītais algoritms spēļu skaita ziņā ir visekonomiskākais.

Tiešām, neatkarīgi no tā, kā tiek organizēts turnīrs, katrā spēlē zaudējumu cieš viens spēlētājs. Ja izspēlētu augstākais n-2 spēles, tad ne vairāk kā n-2 spēlētāji būtu kādreiz zaudējuši (zaudējušo spēlētāju varētu būt pat mazāk, ja kāds no tiem būtu zaudējis vairāk nekā vienā spēlē). Tātad būtu vismaz n-(n-2)=2 spēlētāji, kas nav zaudējuši <u>ne reizes</u>. Katrs no tiem var būt visspēcīgākais un līdzšinējo spēļu rezultāti neļauj starp tiem izvēlēties čempionu. Tātad ar n-2 spēlēm čempionu noskaidrošanai nevar pietikt <u>*nevienā*</u> gadījumā.
Atzīmēsim, ka shēmu, pēc kuras atradām čempionu, var uzskatāmi attēlot, kā parādīts attēlā (attēls 1-1 ,tur n=6):



attēls 1-1

ja divi spēlētāji atrodas "jumtiņa" apakšējos punktos, tad virsotnē ierakstām to, kas uzvarējis viņu savstarpējā spēlē. Ar [a,b] apzīmēts spēlētājs, kas ir spēcīgākais starp spēlētājiem ar numuriem a; a+1; a+2; ...; b.

Līdzšinējo spriedumu rezultātus varam noformulēt teorēmas veidā:

<u>**1. Teorēma**</u>

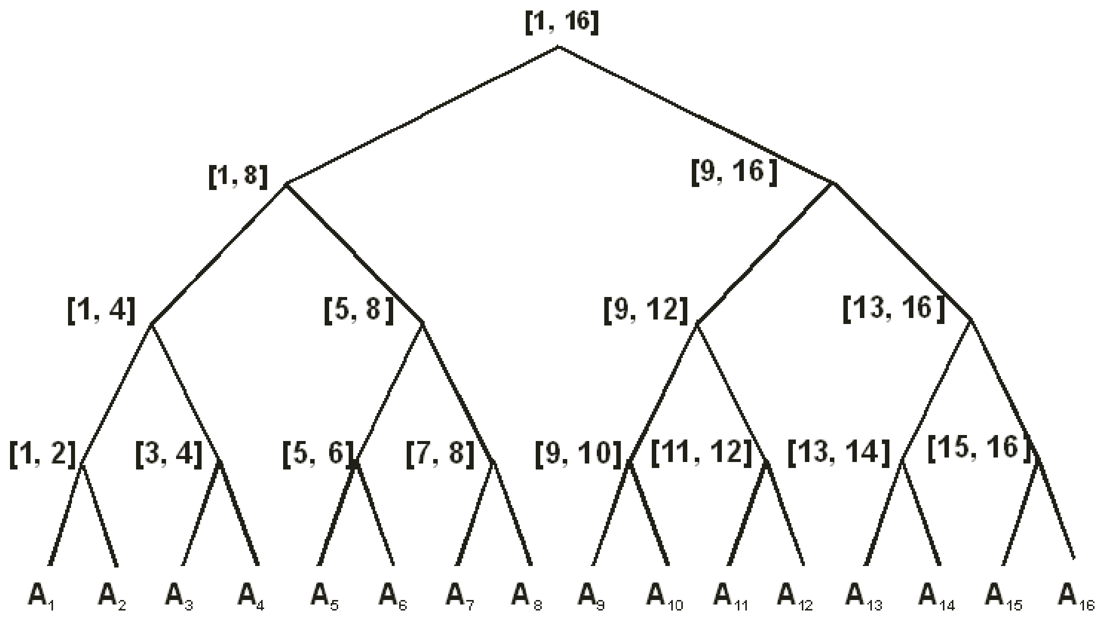
Monotonā turnīrā čempiona noskaidrošanai nepieciešamas un pietiekamas (n-1) spēles, ja n - turnīra dalībnieku skaits.

1.2 ČEMPIONA UN VICEČEMPIONA NOSKAIDROŠANA.

Tagad aplūkosim mazliet sarežģītāku problēmu:
Volejbola turnīrā piedalās n komandas. Katrai ar katru paredzēts tikties tieši vienu reizi. Katrā spēlē uzvar spēcīgākā komanda (volejbolā neizšķirtu nav). Kāds ir mazākais spēļu skaits, kas nepieciešams, lai noskaidrotu turnīra visspēcīgāko un otro spēcīgāko komandu?

Uzskatāmības labad līdz ar vispārīgo gadījumu aplūkosim gadījumu, kad n=16.
Pirmā doma, kas nāk prātā - vispirms atrast čempionu ar 1.1 punktā aplūkotās metodes problēmas atrisinājuma metodi, bet pēc tam no atlikušajām n-1 komandām ar

to pašu metodi atrast spēcīgāko - tā komanda būs vicečempions. Tādējādi būs jāizspēlē (n-1)+(n-2)=2n-3 spēles (mūsu speciālajā gadījumā 29 spēles).
Jau nelielas pārdomas rada šaubas par šāda paņēmiena lietderību. Patiešām, šādi rīkojoties, mēs vicečempiona atrašanas procesā gandrīz nemaz neizmantojam to informāciju, ko esam ieguvuši meklējot čempionu (izmantojam tikai to faktu, ka par čempionu kļuvušais nebūs vicečempions un tāpēc vicečempionu meklējam nevis kā stiprāko starp 16, bet kā spēcīgāko starp 15 spēlētājiem). Varbūt čempiona atrašanu var organizēt citādi nekā 1.1. punkta problēmas risinājuma aprakstā?
Apskatīsim nākamajā attēlā (attēls 1-2) redzamo shēmu; lietotie apzīmējumi tādi paši kā iepriekšējā attēlā (attēls 1-1).



attēls 1-2

Te parādīta čempiona noskaidrošana pēc klasiskās olimpiskās shēmas: astotdaļfināls, ceturtdaļfināls, pusfināls, fināls. Ievērojiet, ka arī te čempions tiek noskaidrots ar 15 spēlēm. Tomēr, kaut arī šī shēma tiek plaši lietota, fināla zaudētājs (ko parasti pasludina par vicečempionu) nebūt garantēti nav otrais spēcīgākais spēlētājs. Tiešām, var taču gadīties, ka A_1 stiprāks par A_2, A_2 par A_3, utt., A_{15} par A_{16}. Tad par vicečempionu pēc klasiskās olimpiskās shēmas tiek pasludināts A_9, kura meistarība patiesībā vājāka nekā veselai pusei turnīra dalībnieku!
Kādu papildus darbu jāveic, lai, lietojot klasisko olimpisko shēmu čempiona atrašanai, par vicečempionu ar garantiju kļūtu otrais spēcīgākais spēlētājs?
Vispirms ievērosim, ka uz vicečempiona godu var pretendēt tikai tie spēlētāji, kas zaudējuši čempionam. Tiešām, katrs spēlētājs A, kas zaudējis ne čempionam, bet kādam citam spēlētājam B, ir vājāks gan par B, gan par čempionu, tātad nevar būt otrais spēcīgākais.
Lai arī kurš spēlētājs būtu kļuvis par čempionu, ceļā uz troni viņš izcīnījis 4 uzvaras. Tātad vicečempionu jāatrod starp tiem 4 spēlētājiem, kas zaudējuši čempionam. Mēs jau zinām, ka spēcīgāko no tiem var atrast ar 3 spēļu palīdzību (vai nu pēc pirmajā attēlā (attēls 1-1)vai otrajā attēlā (attēls 1-2) doto shēmu parauga, vai var būt vēl kā citādi). Tātad čempionu un vicečempionu var atrast, kopā izspēlējot 15+3=18 spēles.

Vispārīgā gadījumā pēc šīs metodes spēļu skaits iznāks ne lielāks par $n-2+\lceil \log_2 n \rceil$. (Paskaidrojums: ar $\lceil x \rceil$ apzīmē mazāko veselo skaitli, kas nav mazāks par x. Piemēram, $\lceil 5 \rceil = 5$; $\lceil 3{,}8 \rceil = 4$.)
Vai nevar izstrādāt metodi, kas ļautu spēļu skaitu garantēti vēl samazināt? Parādīsim, ka tas nav iespējams.
Pieņemsim, ka n spēlētāju turnīrs beidzies un atrasti gan čempions C, gan vicečempions V. Tas nozīmē, ka neviens no pārējiem n-2 spēlētājiem vairs nepretendē uz vicečempiona godu. Bet tad katrs no viņiem zaudējis kādam spēlētājam, kas nav čempions. Tiešām, ja kāds spēlētājs X nav zaudējis nevienam, izņemot C, tad nav pamata uzskatīt, ka V ir stiprāks par X.
Tātad ir notikušas vismaz n-2 spēles bez čempiona C līdzdalības.
Parādīsim, ka mēs nevaram garantēt, lai čempions izspēlētu mazāk par $\lceil \log_2 n \rceil$ spēlēm.
Pasludināsim katrā turnīra brīdī par spēlētāja A ***nozīmību*** skaitli 2^a, kur a - šajā brīdī A izcīnīto izvaru skaits. Par turnīra ***intrigu*** I katrā brīdī sauksim visu to spēlētāju nozīmību summu, kuri šajā brīdī vēl pretendē kļūt par čempioniem (t.i. nav zaudējuši). Skaidrs, piemēram, ka pirms turnīra sākuma katra spēlētāja nozīmība ir $2^0 = 1$, bet turnīra intriga ir 1+...+1=n (visi pretendē būt par čempioniem).
Pieņemsim, ka pirms A un B savstarpējās spēles turnīra intriga ir I. Apzīmēsim turnīru intrigu A uzvaras gadījumā ar I_A, bet B uzvaras gadījumā - ar I_B.

1. Lemma. $\mathbf{I_A + I_B = 2 \times I}$

∨
Lai lemmu pierādītu, pietiek atzīmēt, ka uzvaras gadījumā A resp. B nozīmība divkāršojas, zaudējuma gadījumā tā kļūst 0, bet pārējo spēlētāju nozīmība A un B spēles rezultātā nemainās.
∧

No šejienes varam secināt, ka vai nu $\mathbf{I_A \geq I}$, vai $\mathbf{I_B \geq I}$.
Pieņemsim, ka turnīrā visas spēles beidzās tā, ka turnīra intriga vai nu nemainās, vai palielinās (mums jābūt gataviem arī uz tādu likteņa pavērsienu). Tas nozīmē, ka turnīra beigās vienīgā čempiona nosaukuma pretendenta (paša čempiona!) nozīmība ir vismaz n. Bet sākumā tā bija 1 un katras viņa izspēlētās spēles rezultātā palielinājās 2 reizes. Ja čempions izspēlējis x spēles, tad jābūt $2^x \geq n$, no kurienes $x \geq \log_2 n$. Tā kā x - vesels skaitlis, tad $x \geq \lceil \log_2 n \rceil$.
Tātad ar čempiona piedalīšanos izspēlētas vismaz $\lceil \log_2 n \rceil$ spēles, bet bez viņa piedalīšanās - vismaz n-2 spēles. Tātad kopā spēļu skaits nav mazāks par $n-2+\lceil \log_2 n \rceil$.
Iegūto rezultātu var formulēt teorēmas veidā:

2. Teorēma
Monotonā turnīrā čempiona un vicečempiona noskaidrošanai nepieciešamas un pietiekamas $n-2+\lceil \log_2 n \rceil$ spēles, ja n - turnīra dalībnieku skaits.

Atzīmēsim šīs teorēmas būtisko atšķirību no 1. teorēmas par čempiona atrašanu. Tur tika pierādīts, ka *nekādos apstākļos* čempionu nevar atrast ar mazāk nekā n-1 spēlēm. Šajā teorēmā "nepieciešams" jāsaprot citādi: lai kādu turnīra organizēšanas stratēģiju mēs izvēlētos, var gadīties, ka nāksies izspēlēt vismaz $n-2+\lceil \log_2 n \rceil$ spēles (bet var arī gadīties, ka mēs tiekam galā ar mazāku spēļu skaitu; piemēram, ja gadās tā, ka

$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A_n$, tad ar n-1 spēlēm esam noskaidrojusi gan to, ka A_1 ir čempions, gan to, ka A_2 ir vicečempions).

Uzdevums 1-1

Doti 32 akmeņi ar pa pāriem dažādām masām. Pierādiet, ka ar 35 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var noteikt pašu smagāko un otru smagāko akmeni.

• Šā uzdevuma atrisinājums izriet kā speciālgadījums no tikko aprakstītā vispārīga gadījuma. Tātad jau esam parādījuši, ka ar 31 svēršanas palīdzību (un nekādā gadījumā mazāk) varam noskaidrot smagāko akmeni. Smagākais akmens tika piecas reizes salīdzināts ar kādu citu akmeni un vienmēr to pārsvēra. Tātad otrs smagākais akmens ("vicečempions") meklējams tieši starp šiem 5 akmeņiem. Smagākais no 5 atrodams ar 4 svēršanām. tas nozīmē, ka ar 31+4 svēršanām pietiek, lai noskaidrotu pašu smagāko un otro smagāko akmeni no 32 akmeņu kaudzes. ⊗

Uzdevums 1-2

Doti 64 akmeņi ar pa pāriem dažādām masām. Pierādiet, ka ar 68 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var noteikt pašu smagāko un otru smagāko akmeni.

• Šā uzdevuma risinājums ir analogs iepriekšējā uzdevuma (Uzdevums 1-1) risinājumam, tikai šoreiz, lai noskaidrotu smagāko akmeni, jāpatērē 63 spēles. Smagākais akmens tika sešas reizes salīdzināts ar kādu citu akmeni un vienmēr to pārsvēra. Tātad otrs smagākais akmens ("vicečempions") meklējams tieši starp šiem 6 akmeņiem. Smagākais no 6 atrodams ar 5 svēršanām. tas nozīmē, ka ar 63+5=68 svēršanām pietiek, lai noskaidrotu pašu smagāko un otro smagāko akmeni no 64 akmeņu kaudzes. ⊗

Uzdevums 1-3

A un B spēlē šādu spēli. B iedomājas 16 dažādus skaitļus $x_1, x_2, x_3, ..., x_{16}$. A uzdod viņam jautājumus: "Vai tiesa, ka $x_i < x_j$?" un pēc katra jautājuma saņem atbildi "Ja" vai "nē".
a) Kāds ir mazākais jautājumu skaits, kas jāuzstāda spēlētājam A, lai noskaidrotu, kurš no B iedomātajiem skaitļiem ir vislielākais? Kā to izdarīt?
b) Kāds ir mazākais jautājumu skaits, kas jāuzstāda spēlētājam A, lai noskaidrotu gan to, kurš no B iedomātajiem skaitļiem ir vislielākais, gan to, kurš ir otrais lielākais? Kā to izdarīt?

• a) Lai no 16 skaitļiem atrastu lielāko, rīkojamies sekojoši. Pajautājam par x_1 un x_2. Pēc tam lielāko no šiem skaitļiem salīdzinām ar x_3. Pēc tam lielāko salīdzinām ar x4 utt. līdz tiek salīdzināts lielākais no pirmajiem 15 skaitļiem ar x_{16}. Skaitlis, kas pēdējā salīdzināšanā izrādīsies lielākais, būs arī vislielākais starp B iedomātajiem 16 skaitļiem.
No 1.1. punktā pierādītā seko, ka lielākā starp skaitļiem atrašanai pietiekami un nepieciešami 15 jautājumi.

b) Lielāko un otro lielāko skaitli no 16 skaitļiem viegli var atrast, rīkojoties pēc olimpiskās shēmas: sadalīsim visus 16 skaitļus pa pāriem, piemēram x_1 un x_2, ..., x_{15} un x_{16} un par katru pāri jautāsim: "Vai tiesa, ka $x_i < x_j$?" Lielākos skaitļus atkal sadalīsim pa pāriem un atkal par katru pāri pajautāsim pēc uzdevumā noteiktās formas. Tā kā $2^4=16$, tad četros šādos etapos noskaidrosim pašu lielāko skaitli. Tā kā otrais lielākais skaitlis var būt tikai starp tiem skaitļiem, kas salīdzināti ar lielāko (tādi skaitļi ir 4, jo lielāko skaitli atrada ar 4 etapu palīdzību), tad vēl ar 3 jautājumiem mēs uzzināsim otro lielāko skaitli.
Tas, ka mazāk nekā ar 18 jautājumiem lielāko un otro lielāko skaitli vispārīgā gadījumā garantēti atrast nevar, izriet no 1.2. punktā pierādītā. ⊗

Uzdevums 1-4

Turnīrā piedalās 25 šahisti. Visu viņu spēles prasme ir atšķirīga un partijā vienmēr uzvar spēcīgākais. Kāds ir mazākais nepieciešamais spēļu skaits, lai noskaidrotu divus stiprākos spēlētājus?

● Rīkosimies pēc klasiskās olimpiskās shēmas, taču ņemsim vērā, ka nesanāk pilna shēma, t.i. 25 dalībniekus nevar sadalīt apakšgrupās tā, lai vienmēr veidotos pilnas apakšfinālu grupas. Tāpēc papildinām dalībnieku sarakstu ar "iedomātiem" dalībniekiem, lai kopējais šahistu skaits būtu 32. Liekam izspēlēt visiem (arī iedomātajiem) dalībniekiem 16-daļfinālu. Uzskatīsim, ka "reālais šahists" savu iedomāto partneri vienmēr uzvar un iekļūst nākamajā apakšfinālā. Tā kā reāli šāda spēle vispār nenotiek, tad, skaitot izspēlētās spēles, tās neņemsim vērā. Citiem vārdiem - ciktāl pēc shēmas prasībām būs nepieciešami iedomātie spēlētāji, 25. šahistu "vilksim" automātiski līdzi un uzskatīsim par "tukšās" spēles uzvarētāju.
Tādējādi, rīkojoties pēc shēmas, iegūsim, ka čempiona atrašanai nepieciešamas 24 spēles, bet, lai noskaidrotu vicečempionu, būs jāpatērē vēl 4 spēles. Tas izriet no apsvēruma, ka vispārīgā gadījumā čempions būs uzvarējis 5 partijās. Tieši šo 5 spēļu zaudētāji tad arī var pretendēt uz vicečempiona titulu (skat. 1.2. nodaļu). Tātad rezultātā, lai starp 25 šahistiem noteiktu spēcīgāko, pavisam būs pietiekamas un nepieciešamas 28 spēles. ⊗

1.3 ČEMPIONA, VICEČEMPIONA UN BRONZAS MEDAĻAS ĪPAŠNIEKA NOSKAIDROŠANA.

Tagad aplūkosim vēl mazliet sarežģītāku problēmu:

Turnīrā piedalās n komandas. Katra ar katru citu tiekas tieši vienu reizi, neizšķirtu nav. Katru reizi uzvar spēcīgākā komanda. Kāds ir mazākais spēļu skaits, kas nepieciešams, lai pilnīgi droši noskaidrotu turnīra spēcīgāko, otro spēcīgāko un trešo spēcīgāko komandu?

3. Teorēma

Čempiona, vicečempiona un bronzas medaļas īpašnieka atrašanai jāizspēlē ne mazāk kā $n-3+\lceil \log_2 n(n-1) \rceil$ spēles (ja n=16, šis skaitlis ir 21).

$\vee$

Pieņemsim, ka turnīrā piedalās n dalībnieki. Par komandu sauksim jebkuru dalībnieku pāri (A,B). Ievērosim, ka komandas (A,B) un (B,A) ir atšķirīgas: komandā (A,B) spēlētājs A tiks uzskatīts par pirmo, bet B - par otro; savukārt komandā (B,A) - spēlētājs B ir pirmais, bet A - otrais. Līdz sacensību sākumam uz čempiona un vicečempiona godu līdzvērtīgi pretendē visas komandas. Cik to ir? Līdz turnīram katram spēlētājam ir izredzes kļūt par čempionu. Tādā gadījumā viņš var būt pirmais spēlētājs n-1 komandā: kā otrais spēlētājs pie viņa var nokļūt jebkurš cits spēlētājs, izņemot viņu pašu. Tātad komandu skaits ir n(n-1).
Sacensību gaitā to komandu skaits, kuras pretendē uz čempiona un vicečempiona godu, pakāpeniski samazinās, līdz paliek tikai viena tāda komanda. Pieņemsim, ka turnīrā jau izspēlēts kaut kāds spēļu skaits. Pēc to rezultātiem visus dalībniekus sadalīsim 3 grupās. Pirmajā ieskaitīsim visus tos, kas nav zaudējuši nevienu spēli; otrajā - tos spēlētājus, kas zaudējuši tikai vienu spēli, pie tam tikai pirmās grupas spēlētājam; trešajā grupā ieskaitīsim visus pārējos (tos, kas zaudējuši vairāk kā vienu spēli, vai arī vienu spēli, bet ne pirmās grupas spēlētājam).
Pieņemsim, ka uz kaut kādu turnīra brīdi dalībnieks A ir uzvarējis a spēlēs, bet spēlētājs B - b spēlēs. tad teiksim, ka komandas (A,B) ***kontā*** ir a+b punkti, bet skaitli 2^{a+b} sauksim par ***komandas (A,B) nozīmību***.
pēc katras jaunas spēles komandas konts vai nu palielinās par 1 (ja partijas uzvarētājs ietilpst komandā), vai nemainās. Atbilstoši katras komandas nozīmība dubultojas vai arī nemainās.
Pieņemsim, ka izspēlēts kaut kāds spēļu skaits. Radušos situāciju ērti raksturot ar skaitli M, kas ir vienāds ar visu to komandu nozīmību summu, kuras vēl pretendē uz čempiona un vicečempiona godu. Šo skaitli, pēc analoģijas ar 1.2. punktu, nosauksim par turnīra ***intrigu***. Kamēr nav izspēlēta neviena spēle, katras komandas kontā ir 0 punktu, bet katras komandas nozīmība ir $2^0=1$. Tādējādi $M_{sākuma}=n(n-1)$.
Pieņemsim, ka kaut kādā brīdī turnīra intriga ir M; tāpat pieņemsim, ka notiek spēle starp A un B. Ar M_A apzīmēsim turnīra intrigu gadījumā, ja uzvarēs A, bet ar M_B - turnīra intrigu B uzvaras gadījumā.

2. Lemma.
$\mathbf{M_A + M_B = 2M}$

No šejienes seko, ka vismaz viens no skaitļiem nav mazāks par M, t.i. $\mathbf{M_A \geq M}$ vai $\mathbf{M_B \geq M}$.

$\vee$

Līdz spēlei starp A un B visas komandas, kas pretendē uz pirmajām divām titulētajām vietām, dabiski sadalīt 3 grupās:
1. grupa. Komandas, kurās A ietilpst, bet B vai nu neietilpst, vai ietilpst aiz A; (B aiz A ietilpst tikai vienā komandā: (A,B)). Šī komanda ieskaitāma pirmajā grupā tikai tad, ja tā vēl vispār pretendē uz pirmo divu titulu iegūšanu);

2. grupa. Komandas, kurās ietilps B, bet A vai nu neietilpst, vai arī ietilpst aiz B;
3. grupa. Komandas, kurās neietilpst ne A, ne B.

Ar M_I, M_{II}, M_{III} attiecīgi apzīmēsim grupu I, II, III nozīmību summu (tātad $M = M_I + M_{II} + M_{III}$).

Pierādīsim, ka $M_A = 2M_I + M_{III}$. Tiešām, pēc A uzvaras uz pirmo divu prēmēto laureātu godu pretendē tikai grupu I un III komandas, pie tam grupā III komandu nozīmība nemainās, bet grupā I dubultojas.
Analogi pierāda, ka $M_B = 2M_{II} + M_{III}$. Tādējādi $M_A + M_B = 2(M_I + M_{II} + M_{III}) = 2M$.
^

Kā vispār risinās turnīrs? Visas partijas tiek izspēlētas viena aiz otras. Katras jaunas partijas dalībnieki tiek noteikti no visu iepriekšējo partiju rezultātiem.
Pieņemsim, ka jau izspēlēts kaut kāds spēļu daudzums un kārtējai spēlei jānotiek starp A un B. Gadījumā, ja $M_A > M_B$, pieņemsim, ka uzvarējis A; ja $M_B > M_A$, tad uzvarējis B; ja $M_A = M_B$, tad uzvarētāju izvēlēsimies patvaļīgi. Tā kā lielākais no skaitļiem M_A un M_B ir ne mazāks par M (pēc lemmas), tad pie augstāk minētajiem pieņēmumiem turnīra intriga M pēc katras spēles nesamazinās. Šos pieņēmumus, kas patiesībā nav nekas cits, kā garants tam, lai pirmo ***trīs*** līderu atrašanas procesā būtu jāizspēlē visas spēles, kas garantēti to ļauj noskaidrot, attiecināsim uz visu turnīra gaitu. (Būtībā mēs pieņemam, ka vienmēr iestājas "*ļaunākais gadījums*".)
Līdz sacensībām turnīra intriga ir $M_{sākuma} = n(n-1)$. Ar ko vienāda turnīra intriga, kad sacensības jau beigušās un noskaidroti visi trīs godalgotie laureāti X, Y un Z? Kā pirmie divi līderi atrasts pāris (X<Y). Ar V apzīmēsim šīs komandas kontā esošos punktus. Tad $M_{beigu} = 2^V$.
Ja vienmēr ir iestājies "ļaunākais gadījums", tad spēļu rezultātā intriga M nesamazinājās, tāpēc $M_{beigu} \geq M_{sākuma}$. No šejienes seko, ka $2V \geq n(n-1)$; tā kā V ir vesels skaitlis, tad $V \geq \lceil \log_2(n(n-1)) \rceil$. Tādējādi pirmie divi laureāti X un Y piedalījušies ne mazāk kā $\lceil \log_2(n(n-1)) \rceil$ spēlēs. Bez tam kā minimums tika izspēlētas n-3 spēles bez šiem dalībniekiem. Tiešām, katram no n-3 dalībniekiem, kas neiekļuva pirmo 3 laureātu sarakstā, bija jāzaudē kādam citam bez X un Y; pretējā gadījumā viņš pretendētu uz 3. vietu turnīrā. Tādējādi visā turnīrā tika izspēlētas ne mazāk kā $\lceil \log_2(n(n-1)) \rceil$ + n-3 spēles. Līdz ar to teorēma ir pierādīta.
^

Ja n = 16, minētais skaitlis ir 21.
Tagad pieņemsim, ka turnīrā piedalās n dalībnieki un $n \leq 2^k$. Tas nozīmē, ka, ja čempionu meklē pēc klasiskās olimpiskās shēmas, tad to mēs paveiksim k etapos. Tas nozīmē, ka k etapos tiks izspēlēta n-1 spēle, ja katrs no n turnīra dalībniekiem, izņemot čempionu, zaudē tieši vienā partijā (skat. 1.1. punktu).
No 1.2. punktā pierādītā seko, ka uz vicečempiona godu pretendē ne vairāk kā k spēlētāji - tie, kas zaudējuši pašam čempionam. Piešķiram šiem k spēlētajiem numurus no 1 līdz k (i-to numuru piešķiram tam spēlētājam, kurš čempionam zaudēja i-tajā etapā).
Spēles veiksim sekojošā kārtībā: Nr.1 spēlē ar Nr.2, šīs spēles uzvarētājs ar Nr.3, u.t.t. līdz tiek atrasts šī apakšturnīra uzvarētājs. Tas arī būs vicečempions. Kopā tiks izspēlētas k-1 spēles.
Nav grūti ievērot, ka otrās vietas ieguvējs uzvarējis ne vairāk kā k spēlēs. Tas nozīmē, ka uz 3. vietu pretendē ne vairāk kā k dalībnieki. Stiprāko no tiem (līdzīgi kā iepriekš) atrodam ar k-1 spēli.
Tātad, lai starp n turnīra dalībniekiem noteiktu līderu trijnieku, jāizspēlē ne vairāk kā $(n-1) + (k-1) + (k-1)\ 2k + n - 3 \leq 2\lceil \log_2 n \rceil + n - 3$ spēles. Šo rezultātu varam formulēt teorēmas veidā.

4. Teorēma.

Čempionu, vicečempionu un bronzas medaļas īpašnieku var atrast, izspēlējot ne vairāk kā n-3+2$\lceil \log_2 n \rceil$ spēles (ja n=16, šis skaitlis ir 21).

Salīdzināsim 3. un 4. teorēmu rezultātus. viegli saprast, ka $\lceil \log_2(n(n-1)) \rceil \leq 2\lceil \log_2 n \rceil$, un šie lielumi atšķiras ne vairāk kā par 1. Mēs redzējām, ka pie n=16 tie sakrīt; savukārt, piemēram pie n=5 tie atšķiras.
Gadījumos, kad abi lielumi atšķiras, mēs čempiona, vicečempiona un bronzas medaļas īpašnieka atrašanu neesam izpētījuši līdz galam: mūsu piedāvātais algoritms prasa par vienu spēli vairāk, nekā 3. teorēmas sniegtā apakšējā robeža, zem kuras spēļu skaits vairs principā nav samazināms. Kuros gadījumos minimālo spēļu skaitu izsaka 3., kuros - 4. teorēma, ir vēl šodien neatrisināta problēma.

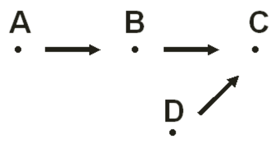
1.4 MONOTONU TURNĪRU PILNĪGA SAKĀRTOŠANA: VIENKĀRŠĀKIE ALGORITMI.

Līdz šim esam risinājuši jautājumus per to, cik spēļu jāizspēlē, lai atrastu čempionu, čempionu un vicečempionu vai arī visus trīs turnīra laureātus. Tagad pievērsīsimies problēmai par pilnīgas monotona turnīra dalībnieku ranga tabulas sastādīšanu - kāds būs mazākais pietiekamais spēļu skaits. tātad mūsu nākošo problēmu var formulēt sekojoši:

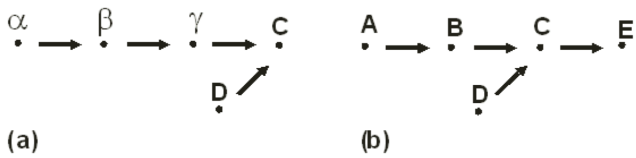
Monotonā turnīrā piedalās n komandas (n $\geq$ 2). Katrai komandai ar katru citu turnīrā paredzēts tikties tieši vienu reizi. Katrā spēlē uzvar spēcīgākā komanda un neizšķirtu nav. Kāds ir mazākais spēļu skaits, kas nepieciešams, lai izveidotu komandu - turnīra dalībnieču pilnīgu ranga tabulu?

Ar M(n) apzīmēsim mazāko spēļu skaitu, kas nepieciešams, lai pilnīgi sakātotu rangu tabulu n dalībnieku turnīrā.
Skaidrs, ka <u>M(2)=1</u>.
Apskatīsim gadījumu kad n=3 un turnīrā piedalās spēlētāji A, B, C. Varam uzskatīt, ka pirmajā spēlē A $\rightarrow$ B. ja otrajā spēlē B $\rightarrow$ C, tad citas spēles vairs nav vajadzīgas. Ja turpretī otrajā spēlē C $\rightarrow$ B, tad divu spēļu rezultātā esam tikai noskaidrojuši, ka B ir visvājākais turnīra dalībnieks, bet čempiona noskaidrošanai vēl jāizspēlē spēle starp A un C.
Savukārt, ja otrajā spēlē sacenšas A un C, tad iznākuma A $\rightarrow$ C gadījumā (un uz tādu mums jābūt gataviem) mēs vēl nezinām, kurš no spēlētājiem B un C ir turnīrā pats vājākais. Tā noskaidrošanai jāizspēlē spēle starp B un C.
Minētie spriedumi parāda, ka M(3)=3.
Apskatīsim gadījumu, kad n=4. Pati vienkāršākā doma - izspēlēt visas spēles; to pavisam ir 6 (AB, AC, AD, BC, BD, CD). Tad čempions ir tas, kas uzvarējis visās trīs spēlēs, vicečempions - tas, kurš uzvarējis visās spēlēs, izņemot pret čempionu, trešās vietas ieguvējs - tas, kas zaudējis tikai čempionam un vicečempionam, bet pēdējais - tas, kas zaudējis visiem pārējiem. Pagaidām mēs zinām, ka <u>M(4)$\leq$6</u>.
Parādīsim, kā vienu spēli var ieekonomēt. Sadalīsim vispirms turnīra dalībniekus 2 pāros un liksim katram pārim spēlēt savā starpā. Pēc tam liksim spēlēt abu pāru uzvarētājiem. Šīs spēles uzvarētājs ir čempions. Liksim spēlēt abu pāru zaudētājiem;

šīs spēles zaudētājs ir pats vājākais turnīrā. Abi pārējie spēlētāji savstarpējā spēlē noskaidro, kurš no tiem ir otrais, kurš - trešais.
Šis spriedums ļauj secināt, ka <u>$M(4) \leq 5$</u>. Tomēr paliek jautājums - vai ar vēl "viltīgāku" paņēmienu nevarētu 4 dalībnieku monotonu turnīru sakārtot vēl ātrāk? Pagaidām atliksim šī jautājuma risināšanu uz vēlāku laiku.
Apskatīsim tagad gadījumu, kad n=5. Pati vienkāršākā metode, kad katrs spēlē ar katru, prasa 10 spēles (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE). Tad čempions ir tas, kas uzvarējis visās spēlēs, vicečempions - tas, kas uzvarējis visus, izņemot čempionu, u.t.t.. Pagaidām zinām, ka <u>$M(5) \leq 10$</u>.
Varētu rīkoties nedaudz "viltīgāk". No iepriekšējā zināms, ka ar 5 spēlēm varam sakārtot 4 dalībniekus; pieņemsim, ka iegūtā kārtība ir $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$. Tagad, liekot piektajam dalībniekam E spēlēt pēc kārtas ar A, B, C, D, atrodam vietu, kurā viņu jāievieto jau izveidotajā ķēdē. Acīm redzot, šī metode parāda, ka <u>$M(5) \leq 9$</u>. Rīkojoties ar lielāku apdomu, varējām iztikt arī ar 8 spēlēm. Pēc tam, kad iegūta ķēdīte $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$, liksim E spēlēt ar B. Ja $E \rightarrow B$, tad vēl ar vienu spēli starp A un E iegūst pilnīgu turnīra sakārtojumu; ja $B \rightarrow E$, tad šim mērķim vēl liekam E spēlēt ar C un D. Lielākais iespējamais patērēto spēļu skaits ir 5 + 1 +2 = 8.
Parādīsim vēl citu veidu, kā varētu iztikt ar 8 spēlēm. Vispirms ar trim spēlēm sakārtosim trīs turnīra dalībniekus; pēc tam liksim savā starpā spēlēt abiem pārējiem dalībniekiem. Ar četru spēļu palīdzību esam ieguvuši divas pagaidām nesaistītas "ķēdītes": (1) $A \rightarrow B \rightarrow C$ un (2) $D \rightarrow E$.
Tagad "apvienosim" šīs ķēdītes. Vispirms liksim savā starpā spēlēt C un E. Šīs spēles zaudētājs ir pats vājākais turnīra dalībnieks; ievietojam to veidojamās tabulas pēdējā ailē un izņemam no atbilstošās ķēdītes (1) vai (2). Pēc tam liekam savā starpā spēlēt vājākajiem spēlētājiem, kas vēl palikuši ķēdītē (1) un (2); šīs spēles zaudētājs ir otrais vājākais visā turnīrā, utt. Acīm redzot, šādi jāturpina tik ilgi, kamēr viena no ķēdītēm (1) un (2) pilnībā "pāriet" uz veidojamo turnīra tabulu. Tad atlikušo vēl neiztukšotās ķēdītes daļu vienkārši pieraksta turnīra tabulas sākumā.
Šāda ķēdīšu pakāpeniska pārnešana uz turnīra tabulu var prasīt 4 spēles (pēc trim spēlēm gan (1), gan (2) vēl var būt palicis pa vienam spēlētājam). Kopumā mums jārēķinās ar 3 + 1 + 4 = 8 spēlēm.
Tātad tagad mēs zinām, ka <u>$M(5) \leq 8$</u>. Tomēr izrādās, ka arī tā nav galējā robeža! Parādīsim, ka 5 spēlētāju monotonu turnīru var pilnībā sakārtot ar 7 spēlēm.
Vispirms liksim savā starpā spēlēt diviem spēlētāju pāriem un pēc tam - to zaudētājiem. Varam uzskatīt, ka iegūta nākamajā attēlā (attēls 1-3) parādītā aina:



attēls 1-3

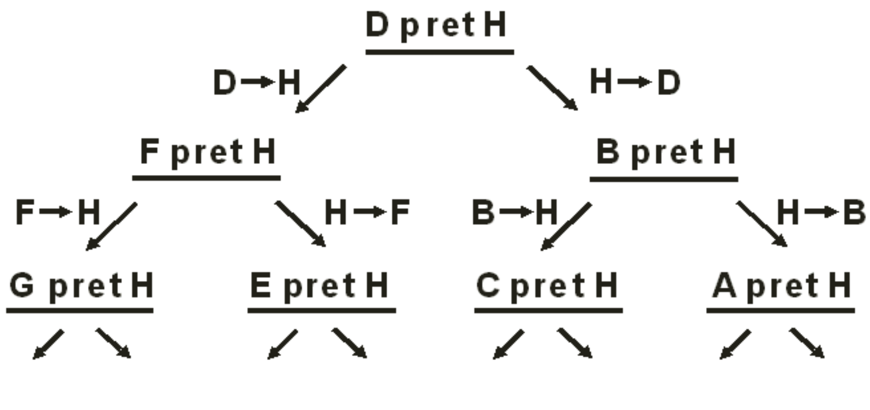


attēls 1-4

Tālāk liekam spēlēt B un E. Ja E $\rightarrow$ B, liekam spēlēt A un E; ja B $\rightarrow$ E, liekam spēlēt C un E. Jebkurā gadījumā iegūstam vienu no attēlā (attēls 1-4) parādītajām ainām, pie tam situācija (b) rodas tikai tad, ja aprakstītajās spēlēs B $\rightarrow$ E un C $\rightarrow$ E; citos gadījumos rodas 4. attēla (a), kur α, β, γ var būt attiecīgi ABE, AEB vai EAB.
Pagaidām iztērētas 5 spēles. Tālāk, attēls 1-4 (b) gadījumā, liekam spēlēt D ar A un B, iegūstot pilnīgu sakārtojumu, bet attēls 1-4 (a) gadījumā liekam D spēlēt ar β, bet tālāk ar α, ja D $\rightarrow$, un ar , ja $\beta \rightarrow$ D. Tā rezultātā iegūstam pilnīgu turnīra sakārtojumu, kopā izmantojot 7 spēles.
Tātad tagad jau zinām, M(5)≤7. Vai tā ir galīgā robeža?
Pamēģināsim tagad atrast M(n) novērtējumu no augšas vispārīgā gadījumā.
Rīkojoties pēc visvienkāršākā algoritma V (katrs spēlētājs spēlē ar katru), patērēto spēļu skaits ir

$$V(n) = C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1),$$

t.i. aptuveni proporcionāli lielumam n^2. Tādos gadījumos saka, ka algoritms V ir "ar sarežģītību n^2".
Apskatīsim algoritmu B, ar kura palīdzību mēs pirmo reizi parādījām, ka M(5)≤8. Vispārīgā gadījumā šī algoritma būtību var aprakstīt sekojoši: ja jau ir sakārtoti n spēlētāji, tad (n+1)-am spēlētājam liekam spēlēt ar vidējo (vai vienu no vidējiem) šajā n spēlētāju sakārtojumā. Atkarībā no spēles rezultāta (n+1)-ais spēlētājs jau jāievieto n spēlētāju saraksta kreisajā vai labajā pusē; to darām, atkal salīdzinot viņu ar atbilstošās puses vidējo spēlētāju, utt.
Piemēram, ja ir jau iegūts 7 spēlētāju sakārtojums A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ E $\rightarrow$ F $\rightarrow$ G, tad astotā spēlētāja H "ievietošanu" tajā parāda nākamajā attēlā (attēls 1-5) redzamā shēma:



attēls 1-5

Kā redzams, shēma ļauj atrast, kurā no 8 iespējamajām vietām (pirms A; starp A un B; ...; pēc G) jāievieto H, izmantojot pavisam 3 spēles.
Šādu algoritmu B sauc par *binārās ievietošanas algoritmu*.
Var pierādīt, ka n spēlētāju turnīra pilnīgai sakārtošanai ar binārās ievietošanas algoritmu pietiekamais sēļu skaits B(n) apmierina sakarību $B(n) \leq \lceil \log_2 n \rceil$. Matemātiķi saka, ka binārās ievietošanas algoritms ir "ar sarežģītību n log n".

Binārās ievietošanas algoritms ir būtiski labāks par iepriekš aprakstīto "parasto" algoritmu V. Iegūto novērtējumu attiecība ir $\approx \dfrac{n}{2\log_2 n}$. Ja $n \to \infty$, arī šīs attiecības vērtība tiecas uz bezgalību. Pie n= 1 000 000 tā ir aptuveni 25 000. Tātad jau pie $n=10^6$ algoritms B ir apmēram 25 000 reizes labāks par algoritmu V. Tālākajā mums būs svarīgi zināt faktu, ka lai ar binārās ievietošanas algoritmu pilnīgi sakārtotu 24 spēlētāju turnīru, nepieciešams izspēlēt 89 spēles; pārliecinieties par to patstāvīgi.
Apskatīsim vispārīgā veidā algoritmu S, ar kuru mēs otro reizi pierādījām, ka $M(5)\leq 8$.
Algoritma S būtība ir - sadalīt turnīra spēlētājus divās iespējami vienādās daļās A un B, sakārtot katru no tām atsevišķi un pēc tam apvienot daļas vienā sarakstā, pakāpeniski salīdzinot abu daļu vājākos spēlētājus. Pašas daļas A un B arī tiek kārtotas līdzīgi.
Piemēram, 8 spēlētāju turnīra gadījumā vispirms to sadala grupās A un B pa 4 spēlētājiem katrā. Katru grupu A un B sadala grupās A_1 un A_2, B_1 un B_2 pa 2 spēlētājiem katrā. Katru no šīm grupām sadala 2 grupās pa 1 spēlētājam katrā. Pēc tam, apvienojot A_1 ar A_2 un B_1 ar B_2 (katru reizi patērējot 3 spēles), iegūstam A un B sakārtojumus. Pēc tam, ar 7 spēlēm apvienojot A un B, iegūstam visa turnīra sakārtojumu. Kopā $S(8)\leq 4x1+2x3+7=17$.
Algoritmu S sauc par saliešanas algoritmu. Tas ir tipisks "skaldi un valdi" tipa algoritmu pārstāvis, kura galvenā būtība - sadalīt problēmu atsevišķās daļās, risināt to katrai daļai atsevišķi un pēc tam iegūtos rezultātus apvienot.
Apzīmējot maksimālo algoritma S patērēto spēļu skaitu n spēlētāju turnīra gadījumā ar S(n), iegūstam sakarības:

$S(1)=0$
$S(2n)\leq 2S(n)+(2n-1)$
$S(2n+1)\leq S(n)+S(n+1)+2n$ (*)

Parādīsim, ka arī algoritms S ir ar sarežģītību $n \log n$: pierādīsim, ka visiem naturāliem n pastāv nevienādība $S(n) \leq n \log_2 n$. Pierādījumā izmantosim matemātisko indukciju.

∨
Bāzi pie n=1 pārbauda tieši.
Pieņemsim, ka nevienādība $S(k)\leq k \log_2 k$ pareiza visiem k, kur $k<n$.
Apskatīsim S(n). Šķirosim 2 gadījumus.

1. n - pāra skaitlis, n = 2k.
tad sakarā ar (*),tā kā $k<n$, iegūstam
$S(n)\leq 2S(k)+(2k-1)\leq 2k \log_2 k + (2k-1)$.
Lai pierādītu vajadzīgo, pietiek pierādīt, ka
$2 k \log_2 k+(2k-1)\leq 2k \log_2(2k)$,
kas potencējot ekvivalents ar
$k^{2k}\, 2^{2k-1} \leq (2k)^{2k}$ jeb $k^{2k}\, 2^{2k-1} \leq 2^{2k}\, k^{2k}$.
Šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama.

2. n - nepāra skaitlis, n=2k+1.

Tad saskaņā ar (*), tā kā k<n, iegūstam

$S(n) \le S(k) + S(k+1) + 2k \le k \log_2 k + (k+1) \log_2 (k+1) + 2k.$
Lai pierādītu vajadzīgo, pietiek pierādīt, ka

$k \log_2 k + (k+1) \log_2 (k+1) + 2k \le (2k+1) \log_2 (2k+1),$

kas potencējot ekvivalents ar

$k^k (k+1)^{k+1} 2^{2k} \le (2k+1)^{2k+1}$

jeb

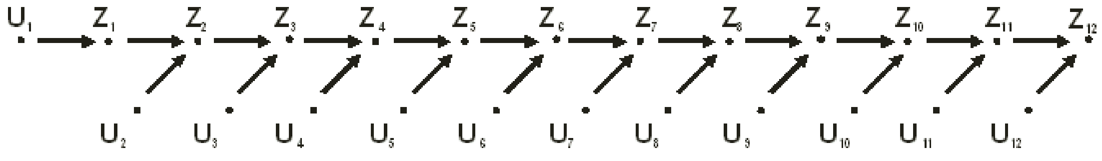
$(4k^2+4k)^k(k+1) \le (4k^2+4k+1)^k (2k+1)$

Arī šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama.
^

Tātad, gan binārās ievietošanas algoritms B, gan saliešanas algoritms S ir ar sarežģītību n log n, t.i. lieliem n tie izturas "apmēram vienādi".
Nupat aplūkotie algoritmi - gan binārās ievietošnas, gan saliešanas - ļāva n spēlētāju monotonu turnīru pilnīgi sakārtot ar ne vairāk kā $n \log_2 n$ spēļu palīdzību. Ja spēlētāju skaits turnīrā ir 24, tad kā viens, tā otrs no iepriekš apskatītajiem algoritmiem tā pilnīgai sakārtošanai "patērē" 89 spēles; pārliecinieties par to patstāvīgi.

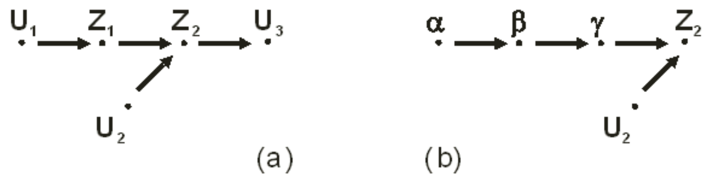
1.5 FORDA-DŽONSONA ALGORITMS.

Tagad aplūkosim spēcīgāku algoritmu: Forda-Džonsona algoritmu, kas tā nosaukts savu izgudrotāju - divu amerikāņu matemātiķu vārdā. Šī algoritma patērēto spēļu skaitu n spēlētāju turnīra gadījumā apzīmēsim ar FD(n). Algoritma darbību ilustrēsim 24 spēlētāju turnīra gadījumā.
●
1. Vispirms sadalām 24 spēlētājus pa pāriem un liekam katrā pārī apvienotajiem spēlētājiem spēlēt savā starpā.
2. Apskatām atsevišķi zaudētājus. Sakārtojam tos pēc spēles prasmes (kā to izdarām, aprakstīsim vēlāk). Iegūtā situācija parādīta attēlā (attēls 1-6), kur ar $Z_1, Z_2, ..., Z_{12}$ attēloti zaudētāji, bet ar $U_1, U_2, ..., U_{12}$ - ar tiem vienā pārī spēlējušie uzvarētāji.



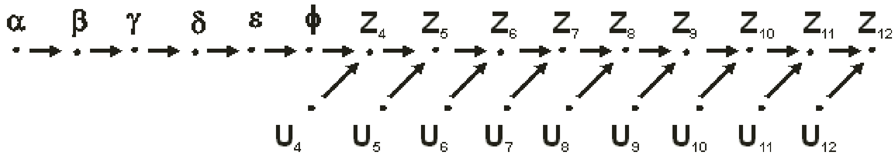
attēls 1-6

Ievērosim, ka patlaban mums jau virknē sakārtoti 13 spēlētāji (U_1, Z_1, Z_2, ...Z_{12}) un pārējie 11 (U_2, U_3, ..., U_{12}) jāpievieno šai virknei.
Saskaņā ar FD algoritmu vispirms galvenajā virknē jāievieto U_3. Skaidrs, ka U_3 tajā atradīsies pa kreisi no Z_3. Liksim vispirms U_3 spēlēt ar Z_1. Ja $U_3 \rightarrow Z_1$, tad tālāk U_3 spēlē ar U_1; ja $Z_1 \rightarrow U_3$, tad tālāk U_3 spēlē ar Z_2. Pēc šīm 2 spēlēm U_3 vieta galvenajā virknē ir noskaidrota.
Atkarībā no spēļu iznākumiem shēmas kreisais gals tagad var izskatīties divējādi (attēls 1-7):



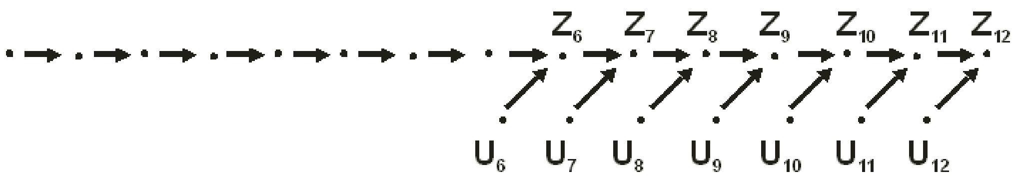
attēls 1-7

(a) gadījums iespējams tikai tad, ja U_3 zaudējis gan pret Z_1, gan pret Z_2; (b) gadījums rodas, ja U_3 uzvarējis vai nu pret Z_1, vai otrajā spēlē pret Z_2. Šajā gadījumā α, β un γ var būt U_3, U_1, Z_1; U_1, U_3, Z_1; U_1,Z_1,U_3. (a) gadījumā U_2 vietu galvenajā virknē noskaidrojam ar ne vairāk kā 2 spēlēm (liekot U_2 spēlēt ar Z_1 un - uzvaras gadījumā - vēl ar U_1). (b) gadījumā U_2 vispirms spēlē ar β un pēc tam ar α vai γ. Tādējādi U_3 un U2 abi divi ir ievietoti galvenajā virknē, kopā izmantojot ne vairāk par 4 spēlēm.
Ievērosim, ka ļoti būtiski bija izdarīt U_3 un U_2 ievietošanu tieši šādā kārtībā. Padomāsim, cik spēles tiktu izmantotas, ja vispirms galvenajā virknē ievietotu U_2 un pēc tam - U_3.
Skaidrs, ka U_2 ievietošanai jārēķinās ar 2 spēlēm. Pēc tam, kad U_2 jau ievietos galvenajā virknē, U_3 jāievieto starp 4 spēlētājiem U_2, U_1, Z_1, Z_2; mēs to protam izdarīt tikai ar 3 spēlēm, un var pierādīt (kā, būs redzams turpmākajā darba gaitā), ka ātrāk tas nav izdarāms. Tātad kopā mēs patērētu 2+3=5 spēles - par vienu vairāk nekā FD algoritmā.
Viegli saprast, kāds mehānisms rada šo atšķirību. Sākumā U_2 "pieļaujamais intervāls" satur 2 spēlētājus: U_1 un Z_1. Pēc U_2 ievietošanas U_3 "pieļaujamais intervāls", salīdzinot ar U2 "pieļaujamo intervālu", saņem uzreiz divus spēlētājus: U_2 un Z_2, un tajā ir 4 spēlētāji. Maksimālais pieļaujamais intervāls, kurā var ievietot spēlētājus, izspēlējot 2 spēles, ir 3; tātad šajā gadījumā U_2 mēs ievietojām īsākā intervālā, nekā varētu, un uz tā rēķina U_3 nācās ievietot jau pārāk garā intervālā.
Ja turpretī vispirms ievieto U_3, tad tā pieļaujamais intervāls satur 3 spēlētājus: U_1, Z_1 un Z_2. Pēc U_3 ievietošanas U_2 pieļaujamais intervāls, salīdzinot ar U_3 pieļaujamo intervālu, noteikti zaudē 1 spēlētāju Z_2 un varbūt iegūst vienu jaunu spēlētāju U_3, tātad atkal sastāv no augstākais 3 spēlētājiem. Šajā gadījumā abu spēlētāju pieļaujamie intervāli tiek sadalīti līdzīgi un tas arī ļauj ietaupīt vienu spēli.
Pēc U_3 un U_2 ievietošanas iegūstam nākamajā attēlā (attēls 1-8) paradīto ainu:



attēls 1-8

Te α, β, γ, δ, ε, ϕ - kaut kādā secībā izvietojušies spēlētāji U_1, U_2, U_3, Z_1, Z_2, Z_3.
Tā kā 7 ir lielākais jau pilnīgi sakārtotu spēlētāju skaits, starp kuriem var ievietot nākošo spēlētāju, izmantojot 3 spēles, tad FD algoritms ka nākošo ievieto galvenajā virknē U_5, bet pēc tam - U_4, kopā patērējot 6 spēles (tas notiek ar binārās ievietošanas algoritma palīdzību). Rezultātā ieveidojas nākamajā attēlā (attēls 1-9) parādītā aina:

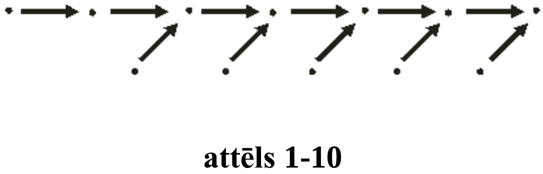


attēls 1-9

Lielākais jau pilnīgi sakārtotu spēlētāju skaits, starp kuriem var ievietot nākošo, izmantojot 4 spēles, ir 15. Saskaņā ar FD algoritmu ievietojam galvenajā virknē U_{11}, U_{10}, U_9, U_8, U_7, U_6, kopā patērējot 6x4=24 spēles. Pēc tam ievietojam tajā U_{12}, patērējot 5 spēles (tiek izmantota binārās ievietošanas metode). Līdz ar to visi 24 spēlētāji sakārtoti.
Mēs esam patērējuši 12 spēles sākotnējos pāros, 2x2+2x3+6x4+1x5=39 spēles un vēl pagaidām nenoskaidrotu spēļu daudzumu 12 zaudētāju sakārtošanai, kas tika minēta algoritma apraksta otrā punkta sākumā. Šī sakārtošana arī notiek ar pašu Forda-Džonsona algoritmu (mēs aprakstīsim, kā), tāpēc iegūstam vienādību

$$FD(24)=12+39+FD(12) \qquad (1)$$

3. Kārtosim 12 zaudētājus ar FD algoritmu. Vispirms sadalām tos pāros un liekam katra pāra spēlētajiem spēlēt savā starpā; patērējam 6 spēles. Pēc tam zaudētājus sakārtojam pēc spēles prasmes (kā aprakstīsim vēlāk). Iegūstam ainu, kas parādīta attēlā (attēls 1-10):



attēls 1-10

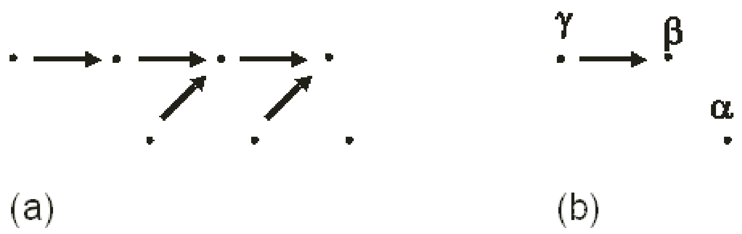
Rīkojoties tālāk pēc jau aprakstītā paņēmiena, visas "astītes" varam ievietot galvenajā virknē, izmantojot 2x2+2x3+1x4=14 spēles. Tātad esam patērējusī 6 spēles pāros, 14 spēles ievietošanai un vēl pagaidām nenoskaidrotu skaitu spēļu 6 zaudētāju sakārtošanai. Šo sakārtošanu atkal veiksim ar FD algoritmu. Tāpēc iegūstam vienādību:

$$FD(12)=6+4+FD(6) \quad (2)$$

4. Rīkojoties līdzīgi, iegūstam

$$FD(6)=3+4+FD(3) \quad (3)$$

5. Mums jānoskaidro FD(3) vērtība. Šim gadījumam piemīt īpatnība, kura parādās pirmoreiz: kārtojamo spēlētājus skaits ir nepāra skaitlis. Tādos gadījumos FD algoritms paredz "lieko", bez pāra palikušo spēlētāju uzskatīt par uzvarētāju un novietot pa labi no visiem citiem uzvarētājiem (piemēram, 7 spēlētāju gadījumā skat. attēls 1-11). Mūsu gadījumā iegūstam zemāk redzamajā attēlā (attēls 1-11(b)) parādīto ainu:



attēls 1-11

Skaidrs, ka iegūstam vienādību

$$FD(3)=1+2+FD(1) \quad (4)$$

Tiešām "astītes" α ievietošanai vajadzīgas 2 spēles; formāli turpinot aizsākto algoritma konstrukciju, mums jāparāda, kā FD algoritms kārto zaudētāju kopu, kura sastāv no viena zaudētāja β. Protams, tam nekādas spēles nav vajadzīgas, tāpēc FD(1)=0.
Saskaitot (1), (2), (3), (4) un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam

FD(24) = 81.

Kā redzams, iegūts uzlabojums, salīdzinot art binārās ievietošanas un saliešanas algoritmiem, kas deva B(24)=S(24)=89. Ja n palielinās, šī starpība kļūst vēl lielāka un tiecas uz bezgalību, ja n tiecas uz bezgalību. ⊗

Vai Forda-Džonsona algoritms ir pats labākais? Acīm redzot tas apvieno sevī būtiskas iepriekš aplūkoto algoritmu - binārās ievietošanas un saliešanas - iezīmes. binārās ievietošanas metode tiek lietota, papildinot galveno virkni ar "astītēm"; saliešanas ideja tiek izmantota apvienojot vienā sarakstā vairākus neatkarīgi sakārtotus pārus. Tomēr ir arī citas idejas, kuras kombinējot ar aprakstītajām. spēļu skaitu var būtiski samazināt. Ir pierādīts, ka pastāv tāds turnīra kārtošanas algoritms (apzīmēsim to ar A), ka

$FD(n) - A(n) \to \infty$, ja $n \to \infty$.

Tomēr tas ir tehniski ļoti sarežģīts un šeit to neapspriedīsim.
Jāatzīmē, ka pats jautājums par to, vai viens vai otrs algoritms ir pats labākais, nav precīzs un uz to parasti var atbildēt dažādi. Apskatītie turnīru kārtošanas algoritmi, protams, netiek lietoti tikai “sportiskiem” mērķiem (un patiesībā vispār sportiskiem mērķiem netiek lietoti). To galvenais pielietojuma lauks ir datu masīvu kārtošanas elektronisko skaitļotāju atmiņā. Spēlei starp diviem turnīra dalībniekiem atbilst divu ierakstu salīdzināšana; minimālais spēļu skaits - mazākajam salīdzināšanas operāciju skaitam, kas jāizdara, kārtojot patvaļīgu no n ierakstiem sastāvošu masīvu. Šis uzdevums ir praktiski ļoti svarīgs: apmēram 30% no komerciālā mašīnlaika pasaulē tiek patērēts dažādu kārtošanas uzdevumu risināšanai. Tomēr maldīgi domāt, ka algoritms ar mazāko salīdzināšanu skaitu sliktākajā gadījumā ir arī labākais vispār. Pirmkārt, paši sliktākie gadījumi parādās samērā reti; praktiski svarīgāk būtu minimizēt vidējo salīdzināšanu skaitu. Otrkārt, ja algoritmu ļoti sarežģīti noprogrammēt, tad ieguldītais darbs un kļūdu labošana var izrādīties dārgāki par iegūto efektu. Treškārt, cenšanās par katru cenu
samazināt salīdzināšanu skaitu var izsaukt citu operāciju skaita palielināšanos un algoritms kopumā atkal var kļūt neefektīvāks. Ceturtkārt, ne visi algoritmi strādā vienlīdz labi uz visiem datoriem: ja programma ir ļoti sarežģīta vai kārtojamie masīvi - ļoti lieli, var nākties lietot ārējos atmiņas nesējus, kas atkal var būtiski sadārdzināt algoritma izmantošanu. līdzīgu uzskaitījumu varētu vēl turpināt. Tāpēc jau pats uzdevums - katrā konkrētā gadījumā saprast, kāds algoritms šim gadījumam ir pats labākais - ir ļoti sarežģīts un apmierinoša atrisinājuma tam nav līdz pat šim brīdim. Tomēr salīdzināšanu skaits sliktākajā gadījumā ir viens no pašiem galvenajiem kārtošanas algoritma kvalitātes rādītājiem.
Līdz šim tika aplūkoti vairāki algoritmi, ko var lietot turnīru pilnīgai sakārtošanai: binārās ievietošanas, saliešanas un Forda-Džonsona algoritms. Abiem pirmajiem algoritmiem mēs pierādījām, ka iespējamo spēļu skaits n dalībnieku turnīru gadījumā no augšas ierobežojams ar lielumu $n \log_2 n$, t.i. lietojot šos algoritmus, pat visneveiksmīgākajos gadījumos nenāksies rīkot vairāk par $n \log_2 n$ spēlēm. Mēs pierādījām arī, ka Forda-Džonsona algoritms pārspēj abus iepriekšējs gadījumā, ja n=24; nav grūti pierādīt, ka tas pats ir spēkā visiem $n \geq 5$.

Uzdevums 1-5

Pierādiet, ka 20 un 21 spēlētāju gadījumā turnīra pilnīgai sakārtošanai pietiekamas 62, resp. 66 spēles.

● Lai pierādītu uzdevumā prasīto, vadīsimies pēc Forda-Džonsona algoritma aprasta. Atrisinājumu parādīsim gadījumam, kad turnīrā piedalās 20 spēlētāji. Otrs gadījums ir pilnīgi analogs pirmajam, tāpēc to tuvāk neaplūkosim. Tāpat vairs sīki neaprakstīsim visus izmantotos spriedumus, kas saistīti ar spēlētāju pievienošanas galvenajai virknei kārtību, jo tas vienreiz jau ir izdarīts.
Saskaņā ar Forda-Džonsona (turpmāk: FD) algoritmu, visus 20 spēlētājus patvaļīgi (kaut vai izlozes kārtībā) sadalām pa pāriem un liekam katra pāra dalībniekiem izspēlēt savstarpēju spēli; turpmāk apskatām visu 10 spēļu zaudētājus. Sakārtojam tos pēc spēles prasmes (kā tas izdarāms, parādīsim mazliet vēlāk). Pēc tam, kad tas jau ir izdarīts, mums virknē ir jau sakārtoti 11 spēlētāji: U_1, Z_1, Z_2,..., Z_{10}. Pārējie deviņi - U_2, U_3, ..., U_{10} - vēl jāpievieno šai virknei.

Saskaņā ar FD algoritmu galvenajai virknei vispirms jāpievieno U_3 un U_2. Lai to izdarītu, mums jāpatērē 2x2=4 spēles.
Pēc tam galvenajai virknei pievienojam U_5 un U_4. Šajā algoritma izpildes solī mums būs jāpatērē 2x3=6 spēles. Pēc šī soļa mēs iegūstam situāciju, kurā galvenajai virknei vēl nepievienoti paliek U_6, U_7, ..., U_{10}.
Tālāk, rīkojoties pēc algoritma, galvenajā virknē varam ievietot atlikušos 5 spēlētājus. Šī mērķa sasniegšanai būs jāpatērē 5x4=20 spēles. Tātad, uz doto brīdi mēs jau zinām, ka mums, lai sakārtotu 20 spēlētāju turnīru, jārēķinās ar 10+2x2+2x3+5x4=40 spēlēm un vēl kaut kādu, pagaidām vēl nenoskaidrotu, spēļu skaitu, kas nepieciešams visu pāru zaudētāju sakārtošanai pēc to spēles prasmes.
Lai sakārtotu zaudētājus pēc to spēles prasmes, rīkosimies pēc tā paša FD algoritma. Tāpēc varam rakstīt, ka kopā patērējamais spēļu skaits 20 spēlētāju gadījumā ir izsakāms šādi:

$$FD(20)=40+FD(10). \quad (1)$$

Kārtosim 10 spēlētājus ar FD algoritmu. Vispirms tos sadalām pāros un liekam katra pāra spēlētajiem izspēlēt savā starpā. Patērējam 5 spēles. Pēc tam zaudētājus sakārtojam pēc spēles prasmes. Rīkojoties tālāk jau pēc aprakstītā plāna, visas "astītes" galvenajā virknē varam ievietot ar 2x2+2x3=10 spēlēm. Tātad esam patērējuši vēl 15 spēles un vēl nezināmu spēļu skaitu piecu zaudētāju kārtošanai. Tātad

$$FD(10)=5+10+FD(5). \quad (2)$$

Tālāk mums jāatrod FD(5) vērtība. Šim gadījumam iemīt īpatnība, ka kārtojamo spēlētāju skaits ir nepāra skaitlis. Šādā situācijā FD algoritms pieprasa bez pretinieka palikušo spēlētāju uzskatīt par uzvarētāju un tālāk rīkoties pēc jau iepriekš paredzētā plāna. Tādejādi, lai galvenajā virknē ievietotu "astītes", nepieciešamas vēl 2x2 spēles. tas nozīmē, ka

$$FD(5)=2+4+FD(2). \quad (3)$$

Viegli izspriest, ka

$$FD(2)=1. \quad (4)$$

Saskaitot izteiksmes(1), (2), (3), (4) un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam, ka FD(20)=40+20+2=62.
Līdz ar to uzdevumā prasīto esam izpildījuši. ⊗

1.6 PARALĒLĀS KĀRTOŠANAS ALGORITMI

Līdz šim mēs interesējāmies par turnīra kopējā spēļu skaita minimizēšanu. Tomēr dažreiz var būt nepieciešams turnīru pabeigt ātri, šajā nolūkā katru dienu papūloties vairāk, nekā minimāli nepieciešams. Ievērosim, ka dažas spēles turnīrā var organizēt vienlaicīgi (vienas spēles rezultāts neiespaido to, vai otrai spēlei jānotiek vai nē), bet dažas var rīkot tikai pēc tam, kad noteiktas iepriekšējās jau izspēlētas (piemēram fināls olimpiskajā turnīrā var notikt tikai pēc pusfināliem, kuri savukārt var notikt vienlaicīgi).

Tādus algoritmus, kuru izpildes gaita dažus soļus var veikt vienlaicīgi, sauc par paralēlās darbības algoritmiem. Šajā punktā aplūkosim paralēlā algoritma piemēru.

Uzdevums 1-6

Turnīrā piedalās 64 tenisisti. Visiem ir dažāda spēles prasme un katrā spēlē uzvar spēcīgākais. Katrs tenisists katru dienu spēlē ne vairāk kā vienu maču. Pierādiet, ka pietiek ar 21 dienu, lai sastādītu visu tenisistu rangu tabulu.

● Pieņemsim, ka mums ir n spēlētāji A_1, A_2, A_3,..., A_n, par kuriem zināma viņu pilnīga rangu tabula, t.i. ir zināms, ka A_1 ir visvājākais, A_2 - otrais vājākais, ..., A_n - visstiprākais; attēlosim to ar nevienādībām
$A_1 < A_2 < A_3 < ... < A_n$.
Pieņemsim, ka tāpat zināma spēlētāju B_1, B_2, B_3, ..., B_n pilnīga rangu tabula
$B_1 < B_2 < B_3 <...<B_n$,
bet nekas nav zināms par au grupu spēlētāju prasmes salīdzinājumu.
Ar S(n) apzīmēsi minimālo dienu skaitu, krurā mēs varam sastādīt kopējo abu grupu ranga tabulu, pie kam katram spēlētājam katru dienu liekot spēlēt ne vairāk kā vienu spēli.

3. Lemma **$S(2^k) \leq k+1$**

$\vee$
Uz brīdi pieņemsim, ka lemma jau pierādīta. Tad vispirms sadalīsim spēlētājus 32 pāros un katrā pārī noskaidrosim to savstarpējo prasmi. Pēc tam šos pārus apvienosim pa divi un katrā spēlētāju četriniekā sastādīsim pilnīgu ranga tabulu; pēc tam apvienosim četriniekus pa 2 un katrā astotniekā sastādīsim pilnīgu ranga tabulu utt..
Pavisam mums nāksies izmantot:
$1+S(2^1)+S(2^2)+S(2^3)+S(2^4)+S(2^5) \leq 1+2+3+4+5+6 \leq 21$
dienas, ko arī vajadzēja pierādīt. Atliek pamatot lemmu. Izdarīsim to ar matemātiskās indukcijas palīdzību.
Ja k=1. Aplūkosim 2 grupas $A_1<A_2$ un $B_1<B_2$. Pirmajā dienā liksim spēlēt A_1 ar B_2 un A_2 ar B_1, bet otrajā - A_1 ar B_2 un A_2 ar B_1. Pēc šim divām dienām mums par katru spēlētāju pāri zināms viņu spēles prasmes salīdzinājums, tātad mums zināma arī viņu pilnīgā ranga tabula. Ar to indukcijas bāze ir pamatota.
Pieņemsim, ka esam pierādījuši, ka **$S(n) \leq t+1$**, un parādīsim, ka tādā gadījumā $S(2n) \leq t+2$. Tad induktīvā pāreja būs izdarīta.
Aplūkosim 2 spēlētāju sarakstus:

$$A_1 < A_2 < ... < A_{2i-1} < A_{2i} < ... < A_{2n}$$

un

$$B_1 < B_2 < ... < B_{2i-1} < B_{2i} < ... < B_{2n}.$$

Izdalīsim no tiem "apakšsarakstus":

$$A_1 < A_3 < ... < A_{2i-1} < ... < A_{2n-1}$$

un

$$B_1 < B_3 < ... < B_{2i-1} < ... < B_{2n-1}$$

un t+1 dienās apvienosim tos vienā rangu tabulā T_1 saskaņā ar induktīvo pieņēmumu. Šajās t+1 dienās vienā rangu tabulā T_2 apvienosim “apakšsarakstus”:

$$A_2 < A_4 < ... < A_{2i} < ... < A_{2n}$$

un

$$B_2 < B_4 < ... < B_{2i} < ... < B_{2n}.$$

Atlikušajā (t+2)-ā dienā jāapvieno vienā tabulā T_1 un T_2. Tas ir izdarāms, jo katram tenisistam ir ne vairāk kā viens cits no otras tabulas, attiecībā pret kuru viņa “spēles prasme” nav vēl noskaidrota. Tiešām, ja A_i tabulā T_1 vai T_2 apmierina sakarības $B_{j-1}<A_i<B_{j+1}$, tad A_i var būt neskaidrības vienīgi attiecībā pret B_j. Skaidrs, ka tenisisti šādā izpratnē apvienojas pa pāriem, un visas neskaidrības var novērst vienā dienā.

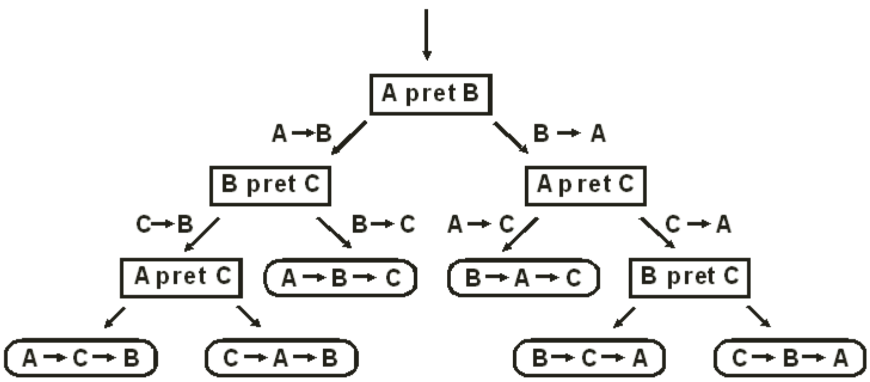
$\wedge \otimes$

1.7 KĀRTOŠANAS ALGORITMU APAKŠĒJIE NOVĒRTĒJUMI.

Monotonu turnīru kārtošanai pastāv daudz algoritmi. Piemēram, 5 spēlētāju turnīra sakārtošanai mēs vienu pēc otra izstrādājām 4 aizvien sarežģītākus algoritmus, kas šim mērķim patērēja 10;9;8;7 spēles. bet varbūt arī tā vēl nav galīgā robeža un, labi papūloties, mums izdodas atrast algoritmu, kas garantē šāda turnīra sakārtošanu ar 6 spēlēm?

Ja kāds ir mēģinājis atrast šādu “superoptimālu” algoritmu, viņš droši vien ir cietis neveiksmi. Bet vai tikai ilgstošas neveiksmes vienas pašas var būt par pamatu apgalvojumam, ka tāda algoritma nav? Kā var pierādīt, ka kaut kādu minimālo spēļu skaitu samazināt vairs nevar - ne tagad, ne pēc miljons gadiem?

Apskatīsim sekojošu piemēru - shēmu, kas attēlo triju spēlētāju A, B un C turnīra pilnīgu sakārtošanu (attēls 1-12):



attēls 1-12

Taisnstūros ierakstītas izspēlētās spēles. No katra taisnstūra izejošās bultiņas atbilst abiem iespējamiem spēles iznākumiem. ja bultiņa beidzas ar ovālu, tad tālākas spēles vairs nav nepieciešamas un ovālā ir ierakstīts turnīra dalībnieku sakārtojums pēc spēles prasmes, kas atbilst notikušajām spēlēm. Tāpēc katru šādu ovālu sauksim par kārtošanas shēmas *izeju*.

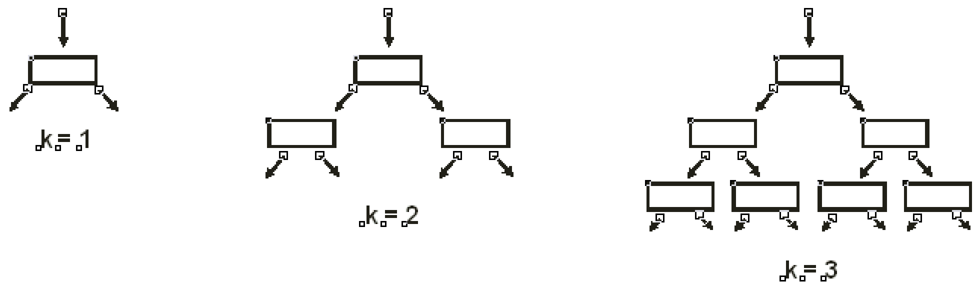
Iepazīstoties ar attēlā (attēls 1-12) parādīto kārtošanas shēmu, redzam, ka tai ir 6 izejas. vai tā ir nejaušība, vai arī to varēja paredzēt jau iepriekš?

Ievērosim, ka 3 spēlētāji A, B, C pavisam pēc spēles prasmes var izkārtoties 6 dažādos veidos: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Turnīra organizatoriem jābūt gataviem uz jebkuru šādu izkārtojumu.

Tālāk - ļoti svarīgs apgalvojums: katram iespējamajam izkārtojumam shēmā jābūt paredzētai citai izejai (attēlā (attēls 1-12) redzamajā shēmā tā arī ir). Pārliecināsimies par tā pareizību.

Tiešām, pieņemsim, ka diviem dažādiem izkārtojumiem α un β turnīra organizatoru paredzētajā shēmā atbilst viena un tā pati izeja. Tas nozīmē, ka gan izkārtojuma α, gan izkārtojuma β gadījumā tiks izspēlētas vienas un tās pašas spēles, kas beigsies ar tiem pašiem rezultātiem. Tātad, gadījumā, ja patiesais spēlētāju izkārtojums ir α, turnīra rīkotāju rīcībā tā noslēgumā būs tāda pati informācija kā gadījumā, ja patiesais spēlētāju izkārtojums ir β. Bet tas nozīmē, ka turnīra rīkotāji, pamatojoties uz savu izstrādāto shēmu, nevar atšķirt izkārtojumu α no izkārtojuma β, resp. vismaz viena izkārtojuma gadījumā būs spiesti kļūdīties (vai vismaz minēt uz labu laimi), kas nav pieļaujams. Tātad triju spēlētāju turnīra gadījumā tā rīkotāju izstrādātajai shēmai tiešām jābūt vismaz 6 izejām (vārds "vismaz" lietots tāpēc, ka kādam izkārtojumam varētu atbilst arī vairākas izejas).

Nav grūti saprast, ka arī katru algoritmu, kas paredzēts n dalībnieku turnīra kārtošanai, var attēlot ar attēlā (attēls 1-12) redzamajai shēmai līdzīgu shēmu. Tā kā n dalībnieki var izkārtoties $1 \times 2 \times ... \times n = n!$ dažādos veidos, tad šādai shēmai jābūt vismaz n! izejām. Ja pieņemam, ka kāds kārtošanas algoritms *nevienā* gadījumā nepatērē vairāk par k spēlēm, tad tam atbilstošajai shēmai nevar būt vairāk par 2^k izejām. To viegli saprast no nākamā attēla (attēls 1-13), ievērojot, ka vienas papildus spēles pieļaušana iespējamo izeju skaitu var augstākais dubultot (katras izejas vietā parādās spēle, no kuras izejošo abu bultiņu galos ir pa vienai izejai.



attēls 1-13

Apzīmējot kārtošanas algoritmu shēmas izeju ar I, bet šī algoritma vissliktākajā gadījumā patērēto spēļu skaitu ar k, no augšminētā iegūstam

$$2^k \geq I \geq n!$$

no šejienes seko nevienādība

$$2^k \geq n! \qquad \text{jeb} \qquad k \geq \log_2(n!).$$

no matemātiskās analīzes pazīstama Stirlinga formula, kas ļauj novērtēt lielumu n!. Saskaņā ar šo formulu n! = $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha_n$, kur α_n - vieniniekam tuvs, bet par to lielāks skaitlis (n ≥ 2). Tātad

n! > $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha_n$

un no nevienādības k ≥ n $\log_2$(n!) seko, ka

$$k \geq n\log_2 n - n\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2 n + \frac{1}{2}\log_2(2\pi).$$

Galvenais (straujāk augošais) saskaitāmais labajā pusē ir n $\log_2$ n. Tāpēc no šī rezultāta un saliešanas un binārās ievietošanas algoritmu iepriekš veiktās analīzes seko, ka n spēlētāju turnīra sakārtošanai minimālais spēļu skaits S(n) apmierina sakarību

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n\log_2 n}=1,$$

t.i. šī lieluma galvenā daļa ir n $\log_2$ n jeb šis lielums "bezgalībā uzvedas" apmēram tāpat kā n $\log_2$ n.
Nav grūti pierādīt, ka pie n=5 nevienādība $2^k \geq 5!$ jeb $2^k \geq 120$ dod k≥7 (jāatceras, ka k ir naturāls skaitlis), bet pie n=24 nevienādība $2^k \geq 24!$ dod k≥80. Tātad iepriekš aplūkotais algoritms 5 spēlētāju turnīra gadījumā ir optimāls, bet Forda-Džonsona algoritma gadījumā vai nu ir optimāls, vai arī dod rezultātu, kas no optimālā atšķiras par augstākais vienu spēli (atceramies, ka FD(24)=81). Vai patiesībā 24 spēlētāju turnīru var vai nevar sakārtot ar 80 spēļu palīdzību, šodien nav zināms; tā ir neatrisināta matemātikas problēma.
Pamatojoties uz informācijas teorijas rezultātiem, var dot sekojošu iegūtā apakšējā novērtējuma pamatojumu. Katra spēle mums sniedz vienu bitu informācijas (1 bits ir informācijas daudzums, kas pieļauj tikai divas dažādas atbildes; mūsu gadījumā - kurš no abiem spēles dalībniekiem ir spēcīgāks). Ja tiek izspēlētas k spēles, iegūstam k bitus informācijas. Bet ar k bitiem var kodēt 2^k atšķirīgas situācijas (uzskatāmi - iespējamas 2^k dažādas k vārdu virknītes, kurā katrs vārds ir "jā" vai "nē", vai arī 2^k nuļļu un vieninieku virknītes garumā k). Tā kā ar šīs informācijas palīdzību mums jāšķiro n! dažādi gadījumi, tad jābūt $2^k \geq n!$, no kurienes seko vajadzīgais.
Augšminētā sprieduma dēļ aprakstīto metodi bieži sauc par informācijas teorijas sniegto apakšējo novērtējumu (information theory lower bound). Tā vēl šodien ir galvenā metode, ar kuras palīdzību iegūst dažādu kombinatorisku algoritmu apakšējos novērtējumus, t.i., robežas, tālāk par kurām algoritma darbības novērtējums nav uzlabojams.
Parādīsim vēl vienu šīs metodes pielietojumu. Analizējot Forda-Džonsona algoritmu un binārās ievietošanas algoritmu, mums bieži nācās ievietot vienu spēlētāju jau sakārtotā n spēlētāju virknītē. No aprakstītajiem piemēriem bija skaidrs, ka to var izdarīt ar k spēļu palīdzību, ja $n \leq 2^k - 1$. Pierādīsim, ka tas ir labākais iespējamais novērtējums, proti, ja $n \geq 2^k$, tad n spēlētāju sakārtotā virknītē ievietot (n+1)-o spēlētāju ar ne vairāk kā k spēļu palīdzību nav iespējams.

- Tiešām, apskatām n spēlētāju sakārtotu virknīti (attēls 1-14).

attēls 1-14

“Ievietojamais” spēlētājs B tajā var ieņemt jebkuru no sekojošajām pozīcijām: pirms A_1; strap A_1 un A_2, starp A_2 un A_3; ...; starp A_{n-1} un A_n; aiz A_n.
Tātad B iespējamas n+1 pozīcijas. Pieņemsim, ka B ievietošanai izstrādāts algoritms, kas garantē mērķa sasniegšanu, neizmantojot vairāk par k spēlēm. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūstam nevienādības

$$2k \geq I\ n+1$$

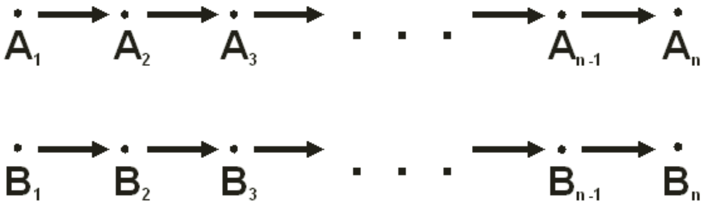
(te I - algoritma shēmas izeju skaits), no kurienes seko

$$2^k \geq n+1 \qquad \text{jeb} \qquad n \leq 2^k-1,$$

ko vajadzēja arī pierādīt. ⊗

Iepriekš, analizējot čempiona un vicečempiona, kā arī čempiona, vicečempiona un bronzas medaļas laureāta atrašanai izmantotos algoritmus, tika izmantota šī pati pieeja.
Tomēr informācijas teorijas metodes nav vienīgās, kas ļauj iegūt apakšējos novērtējumus. Par to varēja pārliecināties iepriekš - piemēram, čempiona atrašanas algoritma apakšējais novērtējums, ja tas tiku iegūts ar nupat aprakstīto metodi, būtu tikai $\lceil \log_2 n \rceil$, kamēr patiesībā, kā mēs to redzējām, šis novērtējums ir n-1. Parādīsim vēl vienu piemēru, kur apakšējos novērtējumos tiek lietotas citas metodes.
Šajā nodaļā tika aprakstīts saliešanas algoritms, kura būtiska sastāvdaļa ir divu jau sakārtotu spēlētāju virkņu apvienošana vienā virknē. Mēs redzējām, ka divas n spēlētāju virknes, no kurām katra ir pilnīgi sakārtota, var apvienot vienā virknē, izmantojot ne vairāk kā 2n-1 spēles.
Parādīsim, ka šis rezultāts nav uzlabojams, t.i., pierādīsim, ka katrs algoritms divu šādu virknīšu apvienošanai vienā vai vismaz dažos gadījumos patērēs ne mazāk par 2n-1 spēlēm.

•
Pieņemsim, ka sākumā dotas divas sakārtotas spēlētāju virknes (attēls 1-15)



attēls 1-15

Pieņemsim, ka, tās pavienojot, notikušas ne vairāk kā 2n-2 spēles. Mūsu algoritmam jābūt gatavam arī uz sekojošiem rezultātiem:

a) $A_i \rightarrow A_j$ un $B_i \rightarrow B_j$, ja starp šīm spēlēm ir spēle starp A_i un A_j (B_i un B_j) un $i<j$;

b) $A_i \rightarrow B_j$, ja starp šīm spēlēm ie spēle starp A_i un B_j un $i \leq j$;

c) $B_j \rightarrow A_i$, ja starp šīm spēlēm ir spēle starp A_i un B_j un $i>j$.

Pieņemsim, ka visas apvienošanas procesā notikušās spēles beigušās tieši ar šādiem rezultātiem. Apskatīsim sekojošus spēlētāju pārus (to skaits ir 2n-1):

(A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_{n-1}, B_{n-1}), (A_n, B_n) un (A_2, B_1), (A_3, B_2), ..., (A_n, B_{n-1}).

Tā kā izspēlētas ne vairāk kā 2n-2 spēles, tad vismaz vienā pārī minētie savā starpā nav spēlējuši. *Neviens* no abiem iespējamajiem viņu savstarpējās spēles rezultātiem nav pretrunā ar līdz šim notikušo spēļu gaitā iegūto informāciju. Tātad notikušās spēles vēl neļauj iegūt pilnīgu priekšstatu par visu spēlētāju pilnīgo sakārtojumu un ar 2n-2 spēlēm abu virkņu apvienošanai nepietiek. ⊗

Tālāk piedāvātie uzdevumi paredzēti, lai patrenētos apakšējo novērtējumu iegūšanā.

Uzdevums 1-7

Jānis iedomājies naturālu skaitli, kas nepārsniedz 1000. Pēteris drīkst viņam uzdot jautājumus, uz kuriem atbilde ir "jā " vai "nē". Pierādiet, ka 10 ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Pēteris garantēti var uzzināt Jāņa iedomāto skaitli.

● Uzdodot jautājumu, mēs varam saņemt gan atbildi "jā", gan "nē". Tas nozīmē, ka mums vienmēr jārēķinās ar šīm divām iespējām. līdz ar to binārajā kokā katram jautājumam jāparedz 2 izejas. Tā kā mēs aplūkojam skaitļus no 1 līdz 1000, tad beigās shēmai jābūt vismaz 1000 izejām. Tas nozīmē, ka skaitlim k, ar kuru apzīmēsim mazāko izdodamo jautājumu skaitu, jāapmierina sakarība: $2^k \geq 1000$. Tā kā k ir vesels skaitlis, tad $k \geq 10$, jo $2^{10} = 1024 > 1000$; ja k=9, tad $2^9 = 512 < 1000$. Tātad uzdodamo jautājumu skaits nav mazāks par 10.

Kā rīkoties, lai ar 10 jautājumiem varētu uzzināt jebkuru no Jāņa iedomātajiem skaitļiem? Stratēģija ir sekojoša. Pirmajā reizē Pēterim jautā: "Vai iedomātais skaitlis ir nepārsniedz 500?" Ja Jānis atbild ar "JĀ", tad nākošais jautājums jāuzdod par uz pusi mazāku intervālu, nekā tas, par kuru jau zināms, ka tajā atrodas iedomātais skaitlis, t.i. "Vai skaitlis nepārsniedz 250?" Ja pirmajā reizē tika saņemta atbilde "NĒ", tad skaitlis atrodas intervālā [501, 1000]. Tad jautājam: "Vai skaitlis nepārsniedz 750?"

Atkarībā no atbildes atkal aplūkojam skaitli ietverošo intervālu. Katrs nākošais jautājums veidojams tā, lai aplūkojamo intervālu sadalītu divās maksimāli līdzīgās daļās. Šādi rīkojoties, vēlākais pēc 10 jautājumiem mēs būsim atminējuši iedomāto skaitli. ⊗

Uzdevums 1-8

Dotas n pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām n-1 monēta ir ar vienādu masu, bet viena monēta ir smagāka. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Uz svaru kasiem var nolikt patvaļīgus monētu daudzumus. Pierādīt, ka $\lceil \log 3n \rceil$ ir mazākasi svēršanu skaits, ar kuru garantēti var atrast smagāko monētu.

(Norāde. padomājiet, cik dažādu iznākumu šoreiz var būt katrai svēršanai).

• No uzdevuma nosacījumiem viegli redzēt, ka, lai kādu svēršanu mēs arī neveiktu, svaru kausi var nostāties *trīs* stāvokļos: vai nu kāds no kausiem pārsvērs, vai arī svaru kausi atradīsies līdzsvarā. Visas šīs iespējas ir vienlīdzīgas. Tas nozīmē, ka, ja svēršanu gaitu attēlotu koka veidā, tad katrai no svēršanām būtu jāatbilst 3 izejām. Tālāk spriežam sekojoši: tā kā ir n monētas, tad kokam beigās jābūt vismaz n izejām. tas nozīmē, ka kokam jābūt vismaz k stāviem, pie kam jāizpildās sakarībai $\mathbf{3^k \geq n}$. Logaritmējot abas nevienādības puses pie bāzes 3, iegūstam, ka vajadzīgā rezultāta sasniegšanai jāveic vismaz $k \geq \log_3 n$ svēršanas. Tā kā k ir vesels skaitlis, tad $k \geq \lceil \log_3 n \rceil$. Kā ar šādu svēršanu skaitu iztikt, izdomājiet patstāvīgi. ⊗

Uzdevums 1-9

Katrā šaha galdiņa rūtiņā ierakstīts cits naturāls skaitlis no 1 līdz 64. Mēs ar vienu jautājumu varam norādīt uz jebkuru rūtiņu kopu un kā atbildi mums pasacīs to skaitļu kopu, kas ierakstīti šajās rūtiņās, bet nepasacīs, kurš skaitlis katrā rūtiņā ierakstīts. Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru mēs varam noskaidrot katrā rūtiņā ierakstīto skaitli?

• Rīkosimies sekojoši: ar pirmo jautājumu pajautāsim par skaitļiem, kas atrodas pirmo četru rindu un visu 8 kolonnu krustpunktos. Līdz ar to kļūs skaidrs, kuri skaitļi atrodas apakšējās četrās rindās. Ar otro jautājumu pajautāsim par skaitļiem, kas atrodas laukumā, ko nosaka pirmās četras kolonnas un visas astoņas rindas. līdz ar to būsim ieguvuši skaidrību par to, kādi skaitļi ierakstīti katrā šaha galdiņa ceturtdaļā.
Trešo jautājumu uzdosim par skaitļiem, kas atrodas no trešās līdz sestajai rindai un visu astoņu kolonnu krustpunktos. Tādējādi mēs varēsim pateikt, kādi skaitļi ierakstīti katrā no šaha galdiņa astotdaļām.
līdzīgi, pajautājot par skaitļiem, kas atrodas no trešās līdz sestajai kolonnai, visas minētās "astotdaļas" sadalās uz pusēm; mēs jau zinām, kādi skaitļi ierakstīti kvadrātos 2x2 rūtiņas.
Tālāk līdzīgi kā iepriekš: katru jau noskaidroto skaitļu kopu turpinām samazināt uz pusi. Tāpēc ar piekto jautājumu interesējamies par skaitļiem, kas atrodas rindās ar, piemēram, pāra numuriem. Tādā veidā būsim sadalījuši šaha galdiņu 32 vienādās daļās.
Ar sesto jautājumu noskaidrosim, kādi skaitļi atrodas kolonnās ar pāra kārtas numuriem. Līdz ar to būsim šaha galdiņu sadalījuši 64 daļās. Tas nozīmē, ka mums būs jau zināms, kāds skaitlis katrā rūtiņā ir ierakstīts. tātad ar 6 jautājumiem esam noskaidrojuši uzdevuma noteikumos prasīto.
Tagad parādīsim, ka ar mazāk kā 6 jautājumiem prasīto uzzināt nevar. Ar katru jautājumu mēs par jebkuru no skaitļiem noskaidrojam: vai skaitlis pieder, vai nepieder tai kopai, par kuru mēs jautājām. Pieņemsim, ka esam uzdevuši jau 5 jautājumus. Tas nozīmē, ka pēc pirmā jautājuma mēs par katru no skaitļiem zinām, vai tas pieder kopai A_1 vai nepieder - tātad pieder kopas A_1 papildinājumam $\bar{A}_1$. Ar otro jautājumu mēs noskaidrojam katra skaitļa piederību katrai no kopām A_1A_2, $A_1\bar{A}_2$, $\bar{A}_1A_2$, $\bar{A}_1\bar{A}_2$. Tādējādi, pēc 5. jautājuma uzdošanas mēs būsim noskaidrojuši katra skaitļa attiecības ar katru no <u>32</u> kopām $A_1A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_4\bar{A}_5$, ..., $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5$. Tā kā kopu ir 32, bet skaitļu 64, tad tas nozīmē, ka vismaz vienā no kopām ir vismaz 2 rūtiņas, par kurām mēs nekādi nevarēsim pateikt - kurš skaitlis katrā rūtiņā ir ierakstīts. Tātad ar 5 jautājumu uzdošanu nepietiek. ⊗

Uzdevums 1-10

Pierādiet, ka, lai apvienotu divas jau sakārtotas spēlētāju virknes, kurās ir n un n+1 spēlētājs, nepieciešamas vismaz 2n spēles.

• Šī uzdevuma atrisinājums ir līdzīgs tam, kuru ilustrē attēls 1-15) ⊗

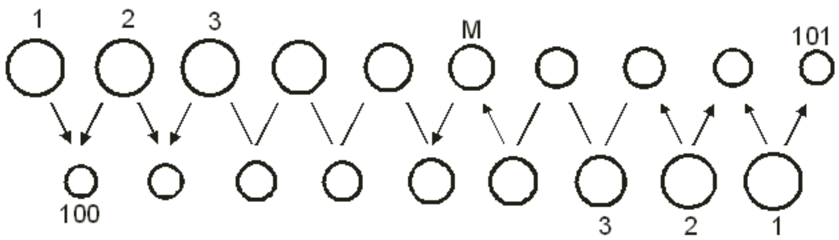
1.8 DAŽI SPECIFISKI UZDEVUMI.

Šajā nodaļā aplūkosim uzdevumus, kas saistīti ar vidējā elementa, kā arī vienlaicīgu "vislielākā" un "vismazākā" elementa atrašanu.

Uzdevums 1-11

Dotas 100 sudraba monētas, kuras sakārtotas svaru pieaugšanas secībā, un 101 zelta monēta, kas tāpat sakārtotas svaru pieaugšanas secībā. Zināms, ka visas monētas atšķiras pēc svara. Jūsu rīcībā ir sviras svari, kas ļauj noteikt, kura no jebkurām divām monētām ir smagākā. Kā ar vismazāko svēršanu skaitu atrast monētu, kas ir 101. smagākā pēc svara. Norādiet šo skaitli un pierādiet, ka ar mazāku svēršanu skaitu šā mērķa sasniegšanai nepietiek.

• Izvietosim zelta monētas masu samazināšanās secībā, zem tām otrā rindā - sudraba monētas - masu pieaugšanas secībā un savienosim monētas ar nogriežņiem, kā to rāda attēls 1-16 (pirmajā rindā zelta, otrajā - sudraba monētas).



attēls 1-16

Katrs nogrieznis savieno 2 monētas. piešķirsim tam virzienu no smagākās monētas uz vieglāko tā, lai katrs nogrieznis pārvērstos par bultiņu. Šīs bultiņas ir ar tādu īpašību, ka, ja kaut kāda ir vērsta uz leju, tad arī visas tās, kuras atrodas no viņas pa kreisi, arī ir vērstas uz leju, bet, ja kāda ir vērsta uz augšu, tad arī visas no viņas pa labi esošās ir vērstas augšup. Šajā shēmai katrai monētai ir tā īpašība, ka to monētu skaits, kas atrodas augšējā rindā pa kreisi no viņas, plus to monētu skaits, kas atrodas apakšējā rindā pa labi no viņas, ir vienāds ar 100. Tādējādi 101-ā "vidējā" monēta M raksturojas ar to, ka pa kreisi no viņas visas bultiņas ir vērstas uz leju, bet pa labi - uz augšu.

Šo vietu var atrast ar 8 svēršanu palīdzību. Sākumā mūsu priekšā ir 200 nogriežņi, uz kuriem vēl nav saliktas bultiņas. Pārbaudām kaut kādu nogriezni un liekam uz tā bultiņu. (Ja tā ir vērsta uz leju, tad tālāk ir pietiekami pārbaudīt nogriežņus pa labi no tās, bet, ja uz augšu, tad - pa kreisi: uz otru pusi bultiņas tiek liktas automātiski.) Katru reizi pārbaudīsim vidējo no nepārbaudītā apgabala, bet ja vidējo ir divi, tad vienu no tiem. Pirmās pārbaudes rezultātā paliks ne vairāk kā 100 nepārbaudīto nogriežņu; 2. pārbaudes laikā - ne vairāk kā 50; 3. pārbaudes rezultātā - ne vairāk kā 25; 4. pārbaudes rezultātā - ne vairāk par 12; 5. pārbaudes rezultātā - ne vairāk par 6'6. pārbaudes rezultātā - ne vairāk par 3; pēc 7 pārbaudes paliks ne vairāk kā 1. Astotā pārbaude uzliek bultiņu pēdējam nepārbaudītajam nogrieznim.
Ar mazāku svēršanu skaitu iztikt nevar. Tiešām, pirms visām svēršanām visas monētas(201) bija 101. vietas kandidātes. Vienas svēršanas rezultātā to monētu kopa, kuras bija kandidātes pirms svēršanas, dalās 2 apakškopās: tās monētas, kuras saglabā iespēju ieņemt 101. vietu, un pārējās. Svēršanu rezultāti iepriekš nav zināmi. Tāpēc var notikt tā, ka pirmās svēršanas rezultātā paliks ne mazāk kā 101 kandidāte, otrās svēršanas rezultātā - ne mazāk kā 51, trešās rezultātā - ne mazāk kā 26, ceturtās rezultātā - ne mazāk par 13, piektās rezultātā - ne mazāk kā 7, pēc sestās - 4, septītās svēršanas rezultātā - 2. Un tātad nevar garantēt, ka pēc 7 svēršanām kandidāšu skaits būs mazāks par 2, kas nozīmē, ka ar 7 svēršanām var nepietikt. ⊗

Uzdevums 1-12

Kādā valstī ir 2001 tenisists. viņiem visiem ir dažāda spēles prasme un savstarpējā spēlē vienmēr uzvar spēcīgākais no abiem dalībniekiem. Tomēr nekas nav zināms par to, tieši kurš tenisists ir vislabākais, kurš otrais labākais utt..
1000 no šiem tenisistiem sacentās savā starpā katrs ar katru un tādējādi noskaidroja savstarpējo spēles līmeni. Atlikušie 1001 tenisisti arī sacentās savā starpā katrs ar katru un tādējādi noskaidroja savstarpējo spēles līmeni.
Pierādiet, ka šajā situācijā pietiek ar vēl 11 spēlēm, lai noskaidrotu , kurš ir valsts "vidējais" (t.i. 1001.) tenisists.

•
Vispirms pierādīsim šādu lemmu.

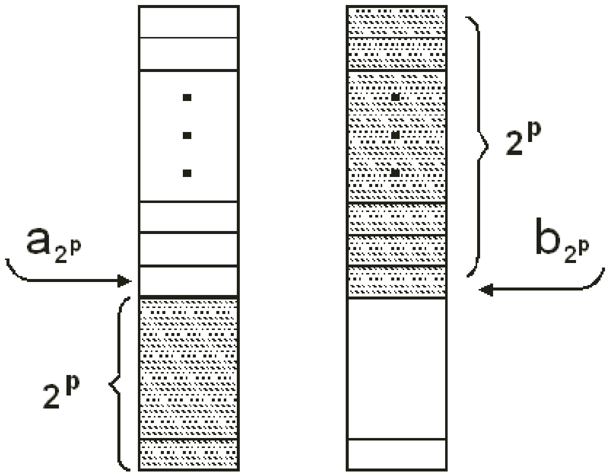
4. lemma

Ja doti 2^{k+1} tenisisti, kas sadalīti 2 grupās pa 2k tenisistiem, un katrā no grupām ir zināmi tenisistu spēku samēri, tad visu 2^{k+1} tenisistu vidū ar k+1 spēli var atrast to tenisistu, kurš atrodas 2^k-tajā vietā, ja vietas numurē meistarības pazemināšanās virzienā.

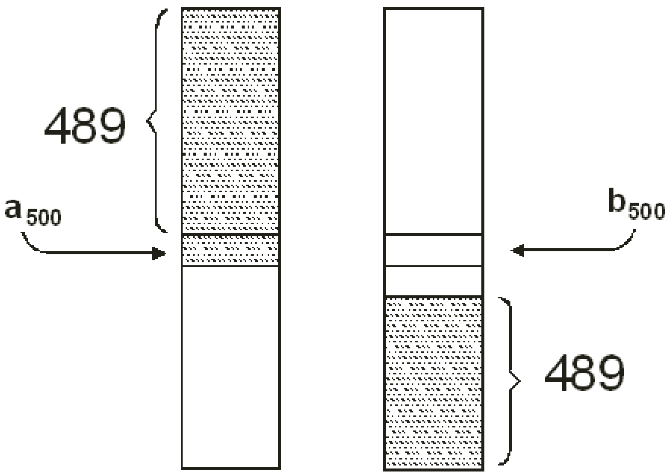
∨
Lietosim matemātiskās indukcijas metodi. Ar a_1, a_2, ..., a_{2^k} apzīmēsim pirmās grupas, bet ar b_1, b_2, ..., b_{2^k} - otrās grupas tenisistus, kur tenisists ar indeksu i atrodas i-tajā vietā meistarības ziņā savas grupas ietvaros.

Indukcijas bāze: ja k=0, tad $2^{k+1}=2$ tenisistu vidū ar k+1=1 spēli var noskaidrot to, kurš atrodas $2^k=1$ vietā.

Induktīvā pāreja: pieņemsim, ka mūsu apgalvojums pie k=p ir spēkā un pierādīsim to pie k=p+1.



attēls 1-17



attēls 1-18

Pirmajā spēlē liksim spēlēt a_{2^p} un b_{2^p} (attēls 1-17). Pieņemsim, ka uzvarējis tenisists b_{2^p}. Tad tenisisti no a_{2^p+1} līdz $a_{2^{p+1}}$ nevar kopējā klasifikācijā ierindoties (2^{p+1})-ā vietā, jo par viņiem spēcīgāki ir vismaz 2^{p+1} tenisisti: no a_1 līdz a_{2^p} un no b_1 līdz b_{2^p}. Tāpat 2^{p+1}-ā vietā nevar ierindoties arī tenisisti no b_1 līdz b_{2^p} un , jo par tiem noteikti vājāki ir tenisisti no a_{2^p} līdz $a_{2^{p+1}}$ un b_{2^p+1} līdz $b_{2^{p+1}}$, kopā $2^{p+1}+1$. Līdz ar to kā

kandidāti uz 2^{p+1}-mo vietu ir atlikuši tikai tenisisti a_1 līdz a_{2^p} un b_{2^p+1} līdz $b_{2^{p+1}}$ - katrā grupā pa 2^p un atlikušas p+1 spēles 2^{p+1}-ā tenisista noskaidrošanai.
Tā kā 2^{p+1}-ais tenisists atlikušo tenisistu vidū ieņems 2^p-to vietu, tad pēc induktīvā pieņēmuma to var noskaidrot ar atlikušajām p+1 spēlēm. lemma pierādīta.
^

Tagad pāriesim pie mūsu konkrētā uzdevuma. Pieņemsim, ka doti tenisisti a_1, a_2, ...,a_{1001} un b_1, b_2, ..., b_{1000}. Pirmajā spēlē liksim sacensties a_{500} ar b_{500}. Iespējami 2 gadījumi:

Ja $a_{500} > b_{500}$. Tad par 1001-0 tenisistu vairs nevar kļūt vismaz tenisisti no a_1 līdz a_{500} (tie visi ir spēcīgāki par 1001-o tenisistu) un no b_{502} līdz b_{1000} (tie visi ir vājāki par 1001-o).
Tomēr, lai varētu izmantot lemmu, atskaitīsim no kandidātiem uz 1001-o vietu tikai tenisistus no a_1 līdz a_{489} un no b_{513} līdz b_{1000}, atstājot katrā grupā pa 512 tenisistiem. tagad šo 2x512 tenisistu konkurencē jānoskaidro 512-tais starp viņiem (tas būs arī 1001-ais starp visiem tenisistiem). Bet pēc pierādītās lemmas ar atlikušajām 10 spēlēm to var izdarīt (2^9=512), tāpēc šajā gadījumā uzdevums ir atrisināts.

Ja $b_{500} > a_{500}$. Tad par 1001-o tenisistu vairs nevar kļūt tenisisti no a_{502} līdz a_{1001} un no b_1 līdz b_{500}. No kandidātiem uz 1001-o vietu atmetam tenisistus no a_{513} līdz a_{1001} un no b_1 līdz b_{488}, atstājot katrā grupā pa 512 tenisistiem, kuru vidū vajadzīgo atkal var noskaidrot ar 10 spēlēm (pēc lemmas).
Tātad jebkurā gadījumā ar 11 spēlēm pietiek, lai 201 divās grupās sadalītu tenisistu vidū noskaidrotu 1001-o. ⊗

Uzdevums 1-13

Dotas 68 monētas, kas atšķiras pēc svara, bet ir vienādas pēc ārējā izskata. Ar 100 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrodiet pašu vieglāko un pašu smagāko monētu.

●
Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas - nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pārī. Tā kā ir 34 pāri (68:2=34), tad svarus esam izmantojuši 34 reizes (esam "iztērējuši" 34 svēršanas no 100 atļautajām). Visas 34 vieglākās monētas noliekam vienā kaudzītē, visas smagākās - otrā.
Apskatām katru kaudzīti atsevišķi ar mērķi - noteikt visvieglāko un vissmagāko no visām monētām. Skaidrs, ka visvieglākā monēta jāmeklē vieglāko monētu kaudzītē, bet vissmagākā - starp smagākajām.
No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās (viena svēršana). Smagāko liekam nost - tā mūs vairs neinteresē, bet vieglāko salīdzinām ar nākošo (trešo) monētu no kaudzītes (otra svēršana).
Skaidrs, ka vieglākā no šīm monētām ir vieglāka par pirmo nolikto. Vieglākā no abām iepriekšējām salīdzinām ar ceturto monētu no kaudzītes (trešā svēršana), vieglāko no šīm (kas ir vieglākā no visām četrām jau apskatītajām) - ar piekto monētu no kaudzītes utt.. Ar trīsdesmit trešo svēršanu salīdzinām pēdējo monētu ar vieglāko no iepriekšējām divām (tā arī ir vieglākā no visām 33 iepriekšējām) un nosakām visvieglāko monētu no visām.

Tieši tāpat atrodam vissmagāko monētu, ar 33 svēršanām salīdzinot savā starpā monētas no otras kaudzītes. tikai te uzmanību pievērsīsim nevis vieglākajām, bet smagākajām monētām.
Tādā veidā svarus esam izmantojuši 34+33+33=100 reizes un doto uzdevumu esam izpildījuši. ⊗

Uzdevums 1-14

Pierādiet, ka ar 3n+1 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot pašu smagāko un pašu vieglāko akmeni no 2n+2 akmeņiem.

●
Sadalīsim akmeņus patvaļīgi pa pāriem. A n+1 svēršanu mēs katrā pārī atradīsim vieglāko un smagāko akmeni un saliksim tos attiecīgi 2 kaudzītēs: vienā liksim katra pāra vieglāko akmeni, bet otrā - smagāko. Skaidrs, ka pats smagākais no visiem akmeņiem atrodas smagāko akmeņu kaudzē. Nosauksim šo kaudzi par "S", pārējos pa kaudzi "V".
No kaudzes S smagāko akmeni mēs varam atrast ar n svēršanām: sākot ar patvaļīgu akmeņu pāri no kaudzes S, mēs nosveram tos un atmetam vieglāko, ņemam nākamo akmeni no kaudzes un salīdzinām ar pirmās svēršanas smagāko akmeni. Pēc otrās salīdzināšanas atliekam sāņus vieglāko akmeni, bet smagāko salīdzinām ar kādu no vēl kaudzē palikušajiem akmeņiem. Tā rīkojamies, līdz tiek salīdzināts pēdējais akmens no kaudzes S ar līdz šim brīdim smagāko akmeni. Šīs svēršanas rezultātā atrastais smagais akmens ir arī pats smagākais starp visiem 2n+2 akmeņiem. Līdzīgi atrod vieglāko akmeni no kaudzes V.
Tādējādi, vieglāko un smagāko akmeņus no 2n+2 akmeņiem var atrast ar n+1+n+n=3n+1 svēršanas palīdzību. ⊗

2. NODAĻA

KĀRTOŠANA UN MEKLĒŠANA, JA PIEEJAMA INFORMĀCIJA PAR OBJEKTU SKAITLISKAJĀM VĒRTĪBĀM

No virsraksta viegli saprast šajā nodaļā ietverto uzdevumu specifiku. Gandrīz visiem šis nodaļas uzdevumiem atrisinājumā būs jācenšas izveidot tādu pārbaudes sistēmu, kas, balstoties uz konkrētajām skaitliskajām vērtībām (un skaitļu īpašībām), ļaus noskaidrot prasīto: vai nu atrast "negodīgu ļaužu" ražotu viltotu monētu, vai arī atrast vienu konkrētu priekšmetu starp vairākiem pēc ārējā izskata vienādiem.

Uzdevums 2-1

Doti pieci atsvari. To masas ir 1000g, 10001g, 1002g, 1004g un 1007g, bet uzrakstu uz atsvariem nav un ārēji tie nav atšķirami. Doti arī svari ar vienu kausu un bultiņu, kura rāda masu gramos. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast atsvaru ar masu 1000g?

• Svēršanu veiksim sekojošā veidā: sadalīsim atsvarus pa pāriem, bet piekto atsvaru atliksim malā. Pirmajā un otrajā svēršanā nosvērsim katru atsvaru pāri, tādējādi uzzināsim katra pāra atsvaru kopējo masu. Katrā no svēršanām iespējams iegūt vienu no tabulā parādītajiem svaru rādījumiem:

2001 = 1000 + 1001	2006 = 1002 + 1004
2002 = 1000 + 1002	2007 = 1000 + 1007
2003 = 1001 + 1002	2008 = 1001 + 1007
2004 = 1000 + 1004	2009 = 1002 + 1007
2005 = 1001 + 1004	2011 = 1004 + 1007

Ja pirmajā svēršanā nav iegūts neviens no izceltajiem rezultātiem, tad 100g smagais atsvars atlikts malā. Ja, savukārt, vienā no svēršanas reizēm ir izdevies iegūt kādu no iezīmētajiem rezultātiem, tad tas nozīmē, ka 1000g smagais atsvars atrodas attiecīgajā pārī. tad ar trešo svēršanu ir jānosver viens no "aizdomīgā" pāra atsvariem. Ja svari rāda 1000g, tad meklētais atsvars ir uz svariem, ja citu skaitli, tad 1000g atsvars ir otrs no "aizdomīgā" pāra. ⊗

Uzdevums 2-2

Dotas četras monētas: 1 piastra, 2 piastru, 3 piastru un 5 piastru vērtībā. Zināms, ka tieši viena no tām ir viltota, t.i. pēc svara atšķiras no īstās. Vai ar divām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var atrast viltoto monētu, ja zināms, ka īsto monētu svars ir atbilstoši 1g, 2g, 3g un 5g?

• Izdarām 2 svēršanas (pieņemsim, ka naudas vienības "piastrs" saīsināts apzīmējums ir "P"):
1)
- uz kreisā svaru kausa liekam monētas 2P un 3P vērtībā;
- uz labā svaru kausa liekam 5P monētu;

2)
- uz kreisā svaru kausa liekam 1P un 2P vērtības monētas;
- uz labā svaru ausa liekam 3P vērtības monētu.

Ja kādā no šim 2 svēršanām svari atrodas līdzsvarā, secinām, ka viltota ir šajā reizē nesvērtā monēta.
Apskatīsim gadījumu, kad vienā no svēršanām svari nestāv līdzsvarā. Šeit ir 4 iespējas:

1.	2+3<5	1+2<3
2.	2+3<5	1+2>3
3.	2+3>5	1+2<3
4.	2+3>5	1+2>3

Visos gadījumos viltota ir vai nu 2P, vai 3P monēta, jo, ja būtu viltota 1P vai 5P monēta, tad vienā svēršanā svari atrastos līdzsvarā.

1)
$2+3<5 \rightarrow$ 2P monēta vieglāka vai 3P monēta vieglāka;
$1+2<3 \rightarrow$ 2P monēta vieglāka vai 3P monēta ir smagāka;
$\rightarrow$ 2P monēta ir vieglāka;

2)
$2+3<5 \rightarrow$ 2P monēta vieglāka vai 3P monēta vieglāka;
$1+2>3 \rightarrow$ 2P monēta smagāka vai 3P monēta ir vieglāka;
$\rightarrow$ 3P monēta ir vieglāka;

3)
$2+3>5 \rightarrow$ 2P monēta smagāka vai 3P monēta smagāka;
$1+2<3 \rightarrow$ 2P monēta vieglāka vai 3P monēta ir smagāka
$\rightarrow$ 3P monēta ir smagāka;

4)
$2+3>5 \rightarrow$ 2P monēta smagāka vai 3P monēta smagāka;
$1+2>3 \rightarrow$ 2P monēta smagāka vai 3P monēta ir vieglāka
$\rightarrow$ 2P monēta ir smagāka;

Tātad visos gadījumos iespējams atrast viltoto monētu. ⊗

Uzdevums 2-3

Dotas 5 monētas, kuru vērtības ir 1, 2, 3, 5 un 10 piastri. Viena no tām ir viltota, t.i. tās svars nav vienāds ar monētas vērtību. Kā ar sviru svaru palīdzību bez atsvariem noteikt viltoto monētu?

● Tā kā uzdevumā izmantotie spriedumi ir līdzīgi 2.2. uzdevumā izmantotajiem, tad šī uzdevuma risinājumu sniegsim tabulas veidā. Ar “A+B” apzīmēsim faktu, ka kopā tiek svērtas monētas A un B. Ar “A>B” vai “A<B” apzīmēsim faktu, ka monētu A kopa ir smagāka par monētu kopu B, vai, attiecīgi, ka monētu kopa A ir vieglāka par kopu B. Burtu “S” resp. “V” lietosim, lai atzīmētu, ka viltotā monēta ir smagāka resp. vieglāka par īsto (kaut gan uzdevumā tas nav prasīts).

1. svērš. 2. svērš.	1+2 > 3 2+3 = 5	**1 S**	1. svērš. 2. svērš.	1+2 > 3 2+3 = 5	**1 V**
1. svērš. 2. svērš.	1+2 = 3 2+3 > 5	**5 V**	1. svērš. 2. svērš.	1+2 > 3 2+3 = 5	**5 S**
1. svērš. 2. svērš.	1+2 > 3 2+3 < 5	**3 V**	1. svērš. 2. svērš.	1+2 > 3 2+3 = 5	**2 S**
1. svērš. 2. svērš.	1+2 < 3 2+3 < 5	**2 V**	1. svērš. 2. svērš.	1+2 > 3 2+3 = 5	**3 S**
		Svērš. rezultāts	Papildus svērš.	Pap. svērš. rez.	
1. svērš. 2. svērš.	1+2 = 3 2+3 = 5	10 viltota	2+3+5 > 10 2+3+5 < 10	**10 V** **10 S**	

⊗

Uzdevums 2-4

Četru pēc ārējā izskata vienādu priekšmetu masas veido ģeometrisku progresiju, kas nav konstanta. Atrast smagāko priekšmetu, veicot 2 svēršanas uz sviru svariem bez atsvariem.

● Apzīmēsim priekšmetu masas ar a, aq, aq^2, aq^3, kur q>1. Ievērosim, ka

$a+aq^3 > aq + aq^2$;

tiešām, šī nevienādība ekvivalenta ar

$q^3-q^2-q+1>0$ jeb $(q+1)(q-1)^2>0$.

Skaidrs, ka

$$aq^3 + aq^2 > aq + a \text{ (jo } aq^3 > aq \text{ un } aq^2 > a)$$

un

$$aq^3 + aq > aq^2 + a \text{ (jo } aq^3 > aq^2 \text{ un } aq > a).$$

Tāpēc, ja novietojam priekšmetus uz svaru kausiem pa 2, tad smagākais priekšmets noteikti atradīsies uz smagākā kausa. Otrajā svēršanā salīdzinām abus priekšmetus, kas pirmajā svēršanā atradās uz šī kausa. tādējādi ar divām svēršanām esam atraduši smagāko no dotajiem 4 priekšmetiem. ⊗

Uzdevums 2-5

No 9 monētām 2 ir viltotas. Īstā monēta sver 10g, bet viltotā - 11g. Kā atrast viltotās monētas ar 5 svēršanām uz vienkausa svariem ar bultiņu, kas rāda uz svariem uzlikto monētu kopējo masu (vienas iedaļas vērtība ir vienāda ar 1g)?

• Ar vienu svēršanu var noteikt viltoto monētu skaitu jebkurā komplektā. Izvietosim šīs deviņas monētas tabulas ar izmēriem 3x3 rūtiņās. Ar četrām svēršanām noteiksim viltoto monētu skaitu pirmajās divās rindās un pirmajās divās kolonnās. Ja vienā no šīm svēršanām rindā vai kolonnā izrādījās 2 viltotās monētas, tad citu svēršanu rezultāti nosaka to atrašanās vietu arī bez 5. svēršanas.
Ja tā nav, tad pie jebkuriem svaru rādītiem mērījumiem nosakām rindu pāri un kolonnu pāri, katrā no kurām atrodas pa vienai viltotai monētai, t.i. abas viltotās monētas atrodas četrās šo līniju krustošanās rūtiņās "pa diagonāli". Nosverot jebkuru no šīm četrām monētām, noteiksim viltotās monētas. ⊗

Uzdevums 2-6

Dotas 100 monētas, kuru vērtības ir 1, 2, ..., 100 piastri. Starp tām 16 ir viltotas, t.i. tādas, ka to svars gramos nesakrīt ar monētas vērtību. Kā ar sviras svariem bez atsvariem atrast visas viltotās monētas?

• Lai par katru no dotajām 100 monētām noskaidrotu, vai tā ir viltota, vai īsta, katrai monētai veidosim īpašu salīdzināšanas sistēmu, kas sastāvēs no vismaz 33 atsevišķiem dažādu monētu komplektiem. Pēc šo komplektu pārbaužu (svēršanu uz sviras svariem) rezultātiem varēsim secināt uzdevumā prasīto. Katrai monētai veidojamo salīdzināšanu sistēmu izveidē ievērosim sekojošus noteikumus: pārbaudāmā monēta katrā komplektā ietilpst vienu reizi; konkrētajai monētai veidotās sistēmas ietvaros citas monētas katru drīkst izmantot augstākais vienu reizi. Komplekta veidošanas ideja būs sekojoša: uz viena svaru kausa liksim pārbaudāmo monētu, bet uz otra kausa - divas tādas monētas, uz kurām uzrakstīto skaitļu summai jābūt vienādai ar skaitli, kas uzrakstīts uz pārbaudāmās monētas. Vai arī uz viena kausa liksim pārbaudāmo monētu kopā ar kādu citu, bet uz otra kausa tad liksim monētu, uz kuras uzrakstītais skaitlis vienāds ar uz pirmā kausa uzlikto monētu uzrakstu summu. Ja vairākums no šādi veidotiem komplektiem izrādīsies aplami, t.i. ja svari nenostāsies līdzsvarā, tad secināsim, ka pārbaudāmā monēta ir viltota, bet pretējā gadījumā - īsta.
Tagad aprakstīsim, kā un *kādā secībā* (turpmākajos spriedumos mums būs svarīgi zināt jau iepriekš veikto pārbaužu rezultātus) veidojami monētu komplekti katrai monētai. Pārbaudāmo monētu apzīmēsim ar **k**.

1) Monētām, uz kurām uzrakstītie skaitļi **k** $\geq$ 68.

Kreisais kauss	Labais kauss
k	(k-1) un 1
k	(k-2) un 2
k	(k-3) un 3
...	...
k	(k-33) un 33

Šinī gadījumā katrai monētai ir izveidota sava pārbaužu sistēma, kas sastāv no 33 monētu komplektiem;

2) Monētām, uz kurām uzrakstītie skaitļi ir lielāki vai vienādi ar 34 un mazāki bai vienādi ar 67, komplektus veidosim pēc šāda principa:

Kreisais kauss	Labais kauss
k un 1	(k+1)
k un 2	(k+2)
k un 3	(k+3)
...	...
k un 33	(k+33)

Arī šajā gadījumā priekš katras pārbaudāmās monētas veidotajā pārbaužu sistēmā ir 33 monētu komplekti;

3) Ja monētas atrodas slēgtā intervālā no 17 līdz 33, tad monētu komplektus veidosim pēc sekojoša principa:

Kreisais kauss	Labais kauss
k un 50	(k+50)
k un 51	(k+51)
k un 52	(k+52)
...	...
k un 66	(k+66)

Šinī gadījumā mums būs no svara zināt jau iepriekš aprakstīto (un veikto) pārbaužu rezultātus. Sistēmā patreiz ir izveidoti 17 monētu komplekti. Tie tiek veidoti no pirmajā un otrajā etapos pārbaudi jau izgājušajām monētām. Par cik viltotu monētu ir 16, tad ļaunākajā gadījumā starp šiem 17 komplektiem noteikti atradīsies viens tāds (bet var gadīties, ka tādu ir pat vairāki), kurā abas pārbaudītās monētas nav viltotas. Šo monētu komplektu tad arī reāli liksim uz svariem. Ja svaru kausi nostāsies līdzsvarā, tad varēsim secināt, ka monēta k ir īsta. Ja viens svaru kauss nosvērsies uz leju, tad monētu k pasludināsim par viltotu.

4) Monētām, uz kurām uzrakstītie skaitļi $2 \leq k \leq 16$, pārbaužu komplektus veidosim sekojoši; sadalīsim visas 100 monētas pa grupām, kurās katrā, atskaitot pirmo, ietilpst 2k monētu. Pirmajā grupā iekļausim monētas ar uzrakstiem no 1 līdz 2k-1. Tātad grupas, kādās sadalīsim visas 100 monētas, būs šādas (veidosim tikai pilnas grupas; tas nozīmē: ja pēdējā grupā nesanāk 2k monētas, tad tās vienkārši atstāsim malā):

Grupas numurs	Labais kauss
1.	[1, 2k-1]
2.	[2k, 4k-1]
3.	[4k, 6k-1]
...	...

Tad uz kausiem monētas saliksim pēc likuma:

Kreisais kauss	**Labais kauss**
k un 1	(k+1)
k un 2	(k+2)
...	...
k un (k-1)	(2k-1)
k un 2k	3k
k un 2k+1	3k+1
...	...
k un 3k-1	4k-1
k un 4k	5k
...	...
k un 5k-1	6k-1
...	...

Cik monētu komplektus šādā veidā var izveidot? Par cik pirmajā komplektā ietilpst pati pārbaudāmā monēta, tad no pirmās grupas monētām var izveidot k-1 komplektu, bet no pārējām monētu grupām - k monētu komplektus. Novērtēsim šādi veidotu komplektu kopējo skaitu S.

$$S \geq k \cdot \left[\frac{100}{2k}\right] - 1 = k \cdot \left[\frac{50}{k}\right] - 1 \geq k \cdot \left(\frac{50}{k} - 1\right) - 1 = 50 - k - 1 = 49 - k\,,$$

kur k - komplektu skaits vienā grupā, bet ar [a] apzīmēta skaitļa a veselā daļa.
Par cik lielākā k vērtība ir 16, tad seko, ka $\underline{S} \geq 49 - k \geq \underline{33}$. Tas nozīmē, ka šādi organizētu monētu komplektu skaits būs pietiekams, lai varētu noskaidrot uzdevuma noteikumos prasīto.

5) Parādīsim kā jāveido monētu komplekti monētai ar uzrakstu 1.

1 un 2	3
1 un 4	5
1 un 6	7
...	...
1 un 66	67.

Esam izveidojuši 33 komplektus, ar kuriem pilnīgi pietiek, lai ar jau aprakstīto spriedumu palīdzību noskaidrotu uzdevumā prasīto. ⊗

Uzdevums 2-7

Dotas 100 monētas ar vērtībām 1, 2, ..., 100 piastri. Starp tām ir ne vairāk kā 20 viltotās, t.i. tādas, kuru svars gramos nav vienāds ar šīs monētas vērtību. Kā ar sviras svariem bez atsvariem noteikt, vai monēta, kuras vērtība ir 10 piastri, ir viltota?

- Apskatīsim šādas svēršanas:

1+10=11	10+20=30	10+40=50
2+10=12	10+21=31	10+41=51
3+10=13	10+22=32	10+42=52
...	...	...
9+10=19	10+29=39	10+49=59
	10+60=70	10+80=90
	10+61=71	10+81=91
	10+62=72	10+82=92
	...	...
	10+69=79	10+89=99

Kopā esam veikuši 49 svēršanas. Tā kā ir ne vairāk kā 20 viltotu monētu, tad, ja monēta ar vērtību 10 piastri ir īsta, no šīm 49 sakarībām ne vairāk kā 20 būs nepareizas, t.i. vismaz 29(vairākums) būs pareizas. Ja, savukārt, mūs interesējošā monēta izrādīsies viltota, tad vairākums uzrakstīto sakarību izrādīsies aplamas. ⊗

Uzdevums 2-8

Doti atsperu svari ar vienu svaru kausu un skalu, kuras iedaļas vērtība ir 1g un četras monētas. Zināms, ka katra monēta sver vai nu 9g, vai 10g, bet nav zināms, cik ir viena tipa un cik otra tipa monētu (var pat gadīties, ka visas monētas ir viena tipa). Kā ar 3 svēršanām noskaidrot katras monētas svaru? (Drīkst svērt arī vairākas monētas reizē.)

- Apzīmēsim monētas ar A, B, C un D, bet to masas ar a, b, c un d. Ar pirmo svēršanu nosveram A un B.

1) Ja a+b=18 (resp. a+b=20), tad a=b=9 (resp. a=b=10); ar abām atlikušajām svēršanām nosver atsevišķi C un D.
2) Ja a+b=19, tad ar otro svēršanu nosveram A un C. Ja a+c=18 (resp. a+c=20), esam noskaidrojuši A un C masas un varam aprēķināt arī B masu; ar trešo svēršanu nosveram D;
3) Atliek apskatīt gadījumu, kad arī a+c=19. Tad skaidrs, ka b=c. Ar trešo svēršanu nosveram B, C un D:

ja b+c+d=27, tad b=c=d=9 un a=10;
ja b+c+d=28, tad b=c=9, d=10 un a=10 (nevar būt b=c=10, jo tad d=8);
ja b+c+d=29, tad b=c=10, d=9 un a=9.

Ja būtu b+c+d=30, tad b=c=d=10 un a=10, tomēr viegli saprast, ka tā nevar iznākt, jo tad a+b=20. ⊗

Uzdevums 2-9

Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas. To masas ir 1g, 2g, 3g un 4g. Ar 4 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem nepieciešams noskaidrot katras monētas masu. Kā to izdarīt?

●

Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām. Ir 2 iespējas:
1) svari atrodas līdzsvarā. Tādu stāvokli uz svaru kausiem izsaka vienādība 1+4=2+3. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros(1;4) un (2;3). Salīdzinām tās savā starpā 4. svēršanā, noskaidrojam, kura no monētām ir 3g, kura - 4g monēta. tad monēta, kas atradās uz viena kausa ar 4g smago monētu, sver 1g, bet tā monētu, kas atradās uz viena kausa ar 3g smago monētu, attiecīgi sver 2g;
2) svari nav līdzsvarā. Atkal divas iespējas: a) 1+2<3+4 un b) 1+3<2+4. Otrajā svēršanā salīdzina abas monētas no smagākā pāra. Smagākā monēta no tām sver 4g. trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas. Vieglākā no tām ir 1g monēta. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas vēl "neidentificētās" monētas: vieglākā no tām ir 2g smagā monēta, bet smagākā, attiecīgi, ir 3 g smagā monēta. ⊗

Uzdevums 2-10

Dotas 1977 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām 50 ir viltotas. Katra viltotā monēta no īstas atšķiras par 1g (uz vienu vai otru pusi). Doti arī sviras svari ar bultiņu, kas parāda viena un otra svaru kausa svaru starpību. Ar vienu svēršanu par vienu izvēlētu monētu jānoskaidro, vai tā ir viltota vai īsta. Kā to izdarīt?

●

Pieņemsim, ka vispār ir dotas 2n+1 monētas, no kurām 2k ir viltotas (k≤n), pie kam katra viltotā monēta no īstas atšķiras par 1g (vienā vai otrā virzienā). Pieņemsim, ka īstās monētas masa ir vienāda ar a gramiem.
Atliksim vienu izvēlētu monētu, bet no atlikušajām 2n monētām n uzliksim uz viena svaru kausa, bet n monētas - uz otra svaru kausa. Ievērosim, ka pie tam atsvaru masa uz katra kausa no **n x a** (n īsto monētu masa) atšķirsies par tās pašas šķiras skaitli (pāra vai nepāra), kāds ir viltoto monētu skaits uz šī svaru kausa.
Ja atliktā monēta ir īsta, tad kopējais viltoto monētu skaits uz svariem ir 2k (pāra skaitlis), tātad, to skaits uz viena un otra kausa ir tās pašas šķiras (pāra vai nepāra). Sekojoši, viena un otra kausa masu starpība ir pāra skaitlis.
Ja atliktā monēta ir viltota, tad viltoto monētu skaits uz svariem ir nepāra skaitlis - (2k-1); tad arī svari rāda nepāra skaitli.
Un tā, redzam, ka izvēlētā monēta ir īsta vai viltota atkarībā no tā, vai svari rāda pāra vai nepāra skaitli. ⊗

Uzdevums 2-11

Dotas 99 pēc ārējā izskata vienādas monētas starp kurām dažas ir viltotas. Zināms, ka viltotā monēta pēc svara atšķiras no īstas monētas par nepāra skaitu gramu un ka visu monētu kopējais svars ir vienāds ar 99 īsto monētu svaru. Doti divkausu svari ar bultiņu, kas rāda to smagumu svaru atšķirību gramos, kas uzlikti uz kausiem. Pierādiet, ka, veicot tikai vienu tādu svēršanu ar šādiem svariem, par jebkuru agrāk izvēlētu monētu var uzzināt, vai tā ir viltota vai nē.

●

No nosacījumiem viegli izspriest, ka viltoto monētu skaits ir pāra skaitlis. Noliksim jebkuru no monētām un pārējās 98 monētas sadalīsim grupās pa 49 monētām un uzliksim šīs grupas uz svaru kausiem. Ja svaru bultiņa parāda pāra skaitu gramu, tad sānus atliktā monēta ir īsta, ja svari parāda nepāra skaitli - tad mūsu izvēlētā monēta ir viltota. ⊗

Uzdevums 2-12

Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas, kuru masas ir 1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6 g. Uz monētām ir uzraksti 1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6 g (varbūt daži pareizi, bet daži nepareizi). Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem noskaidrot, vai visi uzraksti ir pareizi?

●

Apzīmēsim monētas, uz kurām ir uzraksti 1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6 g atbilstoši ar **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**. Pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa novietosim **1**, **2** un **3**, bet uz otra kausa - **6**. Ievērosim, ka mazākā iespējamā 3 monētu kopējā masa ir 1g+2g+3g=6g, bet lielākā iespējamā vienas monētas masa ir 6g. Tāpēc, ja svari stāv līdzsvarā tad mēs zinām, ka **6** tiešām sver 6g, bet monētas **1**, **2** un **3** viena sver 1g, viena - 2g un viena - 3g, bet nezinām, kura monēta cik gramus sver. Tāpat mēs zinām, ka monētas **4** un **5** viena sver 4g, bet otra - 5g (bet atkal nevaram pateikt - kura cik). Ja svari nestāv līdzsvarā, tad noteikti vismaz vienai monētai uzraksts nav pareizs un mēs uzdevuma prasības esam izpildījuši.
Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam **6** un **1**, bet uz labā **3** un **5**. Ja labais kauss nenosveras uz leju, tad vismaz viens uzraksts nav pareizs. Ko varam secināt, ja labais kauss nosveras uz leju?
Monētu masa uz kreisā kausa ir vismaz 7g, jo **6** sver 6g, bet **1** sver 1g vai vairāk; turklāt tā ir 7g tikai tad, ja **1** sver 1g. Monētu masa uz labā kausa ir 8g vai mazāk, jo **5** nesver vairāk par 5g, bet **3** nesver vairāk par 3g; turklāt monētu masa uz labā svaru kausa ir 8g tikai tad, ja **5** sver 5g un **3** sver 3g. Ja uz kreisā kausa monētu masa lielāka par 7g vai uz labā kausa monētu masa mazāka par 8g, labais kauss nenosveras uz leju. Tātad, ja kreisais kauss paceļas augšup, bet labais nosveras uz leju, tad uzraksti uz **1**, **3** un **5** ir pareizi; tad tie ir pareizi arī uz **2** un **4**. ⊗

Uzdevums 2-13

Dotas 6 monētas, no kurām 2 ir viltotas un smagākas par īstajām par 0,1g. Doti svari, kuri reaģē, ja uz svaru kausiem smagumi atšķiras ne mazāk kā par 0,2g. Kā atrast abas viltotās monētas ar 4 svēršanām?

●

Sanumurēsim monētas ar skaitļiem no 1 līdz 6 un sadalīsim 2 grupās: **1**, **2**, **3** un **4**, **5**, **6** un nosvērsim. Ja svari nosveras, tad skaidrs, ka viltotās monētas atrodas uz tā kausa, kas izrādījies smagāks. Tāpat kļūst skaidrs, ka vieglākā kausa visas monētas ir īstas. Pieņemsim, ka smagāks bijis kauss ar monētām **4**, **5**, **6** (tad monētas **1**, **2**, **3** garantēti ir īstas). Tālāk rīkojamie sekojoši: uz kreisā kausa uzliekam monētas **1** un **2**, bet uz labā - **4** un **5**. Ja svari nosveras, **4** un **5** ir viltotās, ja līdzsvarā, tad viena no monētām **4** un **5** nav viltota. Trešās svēršanas reizē uz labā kausa liekam monētas **4** un **6**. Ja svari nosveras, tad viltotās ir monētas **4** un **6**, bet, ja svari paliek līdzsvarā, tad secinām, ka viltotas ir monētas **5** un **6**.
Ja pirmās svēršanas reizē svari palika līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka uz katra svaru kausa bija pa vienai viltotai monētai. Tad otrajā svēršanā salīdzinām **1**, **2**, **4** ar **3**, **5**, **6**. ja svari nosveras, piemēram **1**, **2**, **4** < **3**, **5**, **6**, tad secinām, ka **3** ir viltotā monēta, bet **1**, **2**, **4** - īstas. Tad trešajā svēršanā sveram **1**, **2** un **3**, **5**. Ja svari līdzsvarā, tad viltotās ir monētas **3** un **6**. Ja svari nosveras, tad **3** un **5**.
Ja otrās svēršanas reizē svari atkal palika līdzsvarā, tad sver **1**, **3**, **4** un **2**, **5**, **6**. Ja svari nosveras, tad viltotās ir starp **2**, **5**, **6** un **1**, **3**, **4** ir īstas. Tad 4. svēršanā sver **3**, **4** un **2**, **5**. Ja svari ir līdzsvarā, tad viltotas ir **2**, **6**, bet, ja svari nosveras, tad **2**, **5**.
Ja trešās svēršanas laikā svari nostājās līdzsvarā, tad viltotās monētas ir starp **1**, **5**, **6**, bet **2**, **3**, **4** ir īstas. Tad ceturtajā svēršanā sver **1**, **5** un **3**, **4**. Ja svari līdzsvarā, tad viltotās ir **1**, **6**, bet ja nosveras, tad **1**, **5**. ⊗

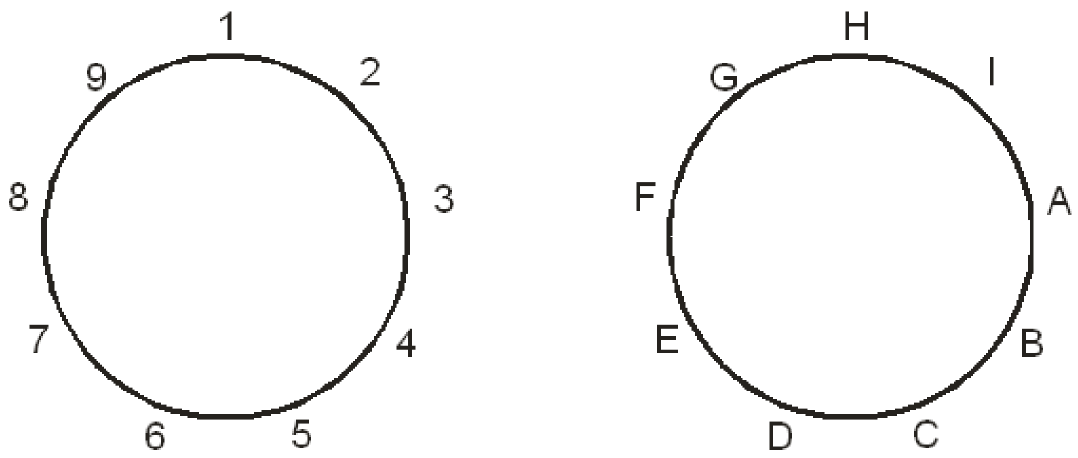
Uzdevums 2-14

Pa apli novietotas 9 monētas. Vienas monētas masa ir 1 g, bet aiz tās pulksteņa rādītāja kustības virzienā seko monētas ar masām 2g, 3g, ..., 9g. Monētas ārēji izskatās vienādas. kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast monētu ar masu 1g?

●

Apzīmēsim monētas pulksteņa rādītāja virzienā ar A, B, C, D, E, F, G, H, I.

Pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa novietosim monētas A un C, uz otra - monētas F un G.



attēls 2-1

Viegli pārbaudīt (attēls 2-1):

1) pirmais kauss nosveras uz leju tikai tad, ja 1g monēta ir D, E vai F;

2) otrais kauss nosveras uz leju tikai tad, ja 1g monēta ir H, I vai A;

3) svari ir līdzsvarā tikai tad, ja 1g monēta ir B, C vai G.

Otrā svēršana tiek izvēlēta atkarībā no pirmās svēršanas rezultātiem.

1) Ja pirmajā svēršanā uz leju nosvērušās monētas A un C, tad otrajā svēršanā salīdzinām C un F ar D un E.

Ja C+F > D+E, tad D=1;
Ja C+F = D+E, tad E=1;
Ja C+F < D+E, tad F=1.

2) ja pirmajā svēršanā uz leju nosvērušās F un G, tad otrajā svēršanā salīdzinām G un A ar H un I.

Ja G+A > H+I, tad H=1;
Ja G+A = H+I, tad I=1;
Ja G+A < H+I, tad A=1;

3) ja pirmajā svēršanā svari palikuši līdzsvarā, tad otrajā svēršanā salīdzina B un G ar C un F.

Ja B+G > C+F, tad C=1;
Ja B+G = C+F, tad B=1;
Ja B+G < C+F, tad G=1; ⊗

3. NODAĻA

KĀ ATRAST VIENU MONĒTU

Šajā nodaļā aplūkosim uzdevumus, kuros par meklējamajiem objektiem nekāda konkrēta skaitliska informācija nav dota un arī nav iegūstama. Gandrīz visos uzdevumos tiks runāts par vienīgās no pārējām (vienādām) monētām atšķirīgās atrašanu; šai ziņā šīs nodaļas uzdevumi principiāli atšķiras no 1. un 2. nodaļās aplūkotajiem.

Uzdevums 3-1

Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām 1 ir viltota - tā ir vieglāka nekā citas. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu, ja vēl zināms, ka visas īstās monētas sver vienādi?

●

Sadalām šīs monētas trīs grupās pa 3 monētām katrā. Apzīmēsim šīs grupas ar A, B, C. Skaidrs, ka neīstā monēta atrodas vienā no šīm grupām. Tāpēc pirmajā svēršanas reizē nosver grupas A un B.

Ja A=B, tad skaidrs, ka viltotā monēta meklējama starp grupas C monētām. Tāpēc 2. svēršanas reizē nosver 2 no grupas C monētām. Ja svari atrodas līdzsvarā, tad viltotā monēta ir vēl nesvērtā grupas C monēta. Ja svari nosveras, tad viltota ir tā monēta, kura atrodas tajā kausā, kas otrās svēršanas reizē pacēlās uz augšu (t.i. otrajā svēršanā izrādījās vieglākā);

Ja A ≠B, tad pieņemsim, ka A>B. Tad tas norāda, ka viltotā monēta meklējama starp grupas B monētām. Otrajā svēršanā uz svaru kausiem liekam jebkuras 2 no grupas B trim monētām. Ja svari atrodas līdzsvarā, tad viltota ir malā palikusī monēta, bet, ja svari atkal nav līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas otrajā svēršanā izrādījusies vieglākā. ⊗

Uzdevums 3-2

Zināms, ka starp 80 monētām ir viena viltotā - tā ir vieglāka par pārējām, kurām visām ir vienāds svars. Ar 4 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrodiet viltoto monētu.

●

Sadalīsim monētas 3 grupās: divās grupās pa 27 monētām katrā un vienā ar 26 monētām.

Pirmajā svēršanā nosvērsim abas vienādā apjoma grupas. Ja svari nav līdzsvarā, tad viltotā monēta (turpmāk VM) ir uz "vieglākā" kausa. Ja svari līdzsvarā, tad VM ir starp pārējām 26 monētām. tātad tagad jāatrisina sekojošs uzdevums; ka ar 3 svēršanu palīdzību uz sviru svariem bez atsvariem noteikt VM starp 27 monētām (uzdevumu atrast VM starp 26 monētām var reducēt uz šo, piemēram, pievienojot 26 monētu grupai vienu monētu no citām 54 monētām).

Tālāk sadalīsim 27 monētu grupu vēl 3 vienādās grupās pa 9 monētām katrā un otrajā svēršanā salīdzināsim savā starpā divas no šīm jaunizveidotajām grupām. Atkārtojot

tādus pašus spriedumus kā pēc pirmās svēršanas, atradīsim to 9 monētu grupu, kurā atrodas viltotā monēta.
Tad pirms trešās svēršanas atkal pārdalīsim “aizdomīgo” grupu trīs vienādās daļās pa trim monētām katrā un atkal salīdzināsim divas jaunās daļas. Tā varēsim noteikt, starp kurām trim monētām ir viltotā.
Ceturtajā svēršanā pēc aizdomīgā trijnieka pārdalīšanas grupās pa vienai monētai katrā atkal salīdzināsim divas grupas savā starpā. Ja svari būs līdzsvarā, tad VM ir malā palikusī, bet ja svari nosveras, tad VM atrodas uz tā svaru kausa, kurš pacēlās uz augšu. ⊗

Uzdevums 3-3

Zināms, ka starp n monētām viena ir viltota - tā ir vieglāka nekā pārējās - īstās. Īstajām monētām visām ir vienāds svars. Kāds ir mazākais tāds skaitlis k, ka ar k svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast viltoto monētu?

●
Viltoto monētu atrisinājuma parakstā apzīmēsim ar VM. Pieņemsim, ka k ir naturāls skaitlis, kas apmierina nevienādības $3^k \geq n$, $3^{k-1} < n$. Pierādīsim, ka šis skaitlis k apmierina uzdevuma nosacījumus.
Vispirms pierādīsim, ka ar k svēršanām vienmēr var noteikt viltoto monētu. Sadalīsim monētas 3 grupās tā, lai divās vienādās grupās būtu pa 3^{k-1} (vai mazāk) monētu, bet monētu skaits trešajā grupā nepārsniedz 3^{k-1} (tas ir iespējams, jo $n \leq 3^k$). Uzliekot uz svariem abas grupas ar vienādo monētu skaitu, mēs varēsim noteikt, kurā no 3 grupām atrodas viltotā monēta (salīdziniet ar Uzdevums 3-2 risinājumu). Tādā veidā pēc pirmās svēršanas mēs iegūsim grupu ar 3^{k-1} monētām, starp kurām atrodas VM (ja izrādīsies, ka VM atrodas grupā, kurā ir mazāk kā 3^{k-1} monētu, tad mēs varēsim šo grupu papildināt līdz 3^{k-1} monētām ar jebkurām no abu citu grupu monētām). Katrā nākošajā svēršanā aizdomīgo grupu dalīsim 3 vienādās daļās un noteiksim, kurā no šim daļām ir viltotā monēta. Tādā kārtā pēc k svēršanām mēs iegūsim grupu, kas saturēs sevī vienu monētu, t.i būsim noskaidrojuši VM.
Tagad palicis vēl pierādīt, ka k ir mazākais svēršanu skaits, ar kura palīdzību vienmēr varēsim atrast VM, t.i. ka pie jebkuras svēršanu metodes svēršanu rezultāti var veidoties tā, ka pēc k-1 svēršanas VM vēl nebūs atrasta.
Pēc katras svēršanas monētas sadalās 3 grupās: monētas, kas ir uzliktas uz viena kausa; monētas, kas ir uzliktas uz otra svaru kausa un monētas, kas nav uzliktas uz svariem. Ja uz svaru kausiem bija uzlikts vienāds monētu skaits un svari izlīdzsvarojās, tad VM noteikti atrodas grupā, kas satur uz kausiem neuzliktās monētas. ja viens no kausiem pārsvērsies (pie vienāda monētu skaita), tad VM atrodas uz otra kausa. Visbeidzot, ja uz kausiem bija uzlikts dažāds monētu skaits, tad gadījumā, kad pārsvērās kauss, uz kura bija vairāk monētu, VM var atrasties jebkurā no trim augstāk minētajām grupām un šāda svēršana vispār nesniegs nekādu informāciju par viltotās monētas atrašanās vietu.
Tagad pieņemsim, ka pie patvaļīgi veiktām svēršanām svēršanas rezultātus katru reizi izrādās mums nelabvēlīgs, t.i. VM katru reizi izrādās tajā no 3 grupām, kura satur vislielāko monētu skaitu. Tad katrā svēršanā tās grupas, kas satur VM, monētu skaits samazinās ne vairāk kā 3 reizes (par cik, dalot kaut kādu monētu skaitu 3 grupās, vienmēr vismaz viena no 3 grupām satur ne mazāk kā 1/3 kopējā monētu skaita); tādēļ

pēc k-1 svēršanas monētu skaits grupā, kas satur VM, paliks ne mazāks kā $n/3^{k-1}$, un tā kā $n>3^{k-1}$, tad pēc k-1 svēršanas VM netiks atrasta. Šo rezultātu īsāk var pierakstīt tā: minimālais svēršanu skaits, kas veicams, lai starp n monētām ar garantiju atrastu 1 monētu (ja zināms meklētās monētas tips), ir $\lceil \log_3 n \rceil$, kur iekavas apzīmē skaitļa augšējo veselo daļu. ⊗

Uzdevums 3-4

Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām 1 ir viltota, bet nav zināms, vai tā ir vieglāka vai smagāka par pārējām monētām. Mūsu rīcībā bez tam ir arī vēl viena tāda pati monēta, par kuru pie tam ir zināms, ka tā ar garantiju ir īsta. To mazliet iezīmēsim, lai atšķirtu no citām (iekrāsosim), bet tā, lai viņas svars jūtami nemainītos. Pierādiet, ka šādā gadījumā viltoto monētu no dotajām 13 var atrast ar 3 svēršanu palīdzību uz sviras svariem bez atsvariem.

●

Dažkārt uzdevuma atrisinājumu ir ērti sniegt tabulas formā. Tādas tabulas piemēru piedāvājam šā uzdevuma risinājumā.

Tabulā lietosim sekojošus apzīmējumus: svaru kausus apzīmēsim ar burtiem K - kreisais kauss, L - labai. Iekavās aiz kausa apzīmējuma rakstīsim to monētu numurus, kuras aplūkojamās svēršanas laikā atrodas uz konkrētā svaru kausa. Piemēram, L(1,() nozīmēs, ka patreiz uz labā svaru kausa atrodas monētas ar numuriem 1 un 9. Ja svari svēršanas rezultātā nostāsies līdzsvarā, rakstīsim K = L. Ja kreisais (resp. labais) kauss izrādīsies vieglāks nekā labais (resp. kreisais), to pierakstīsim ar nevienādību K < L (resp. K > L). Monētas sanumurēsim ar skaitļiem 1, 2, ..., 13. Garantēti īsto monētu apzīmēsim ar burtu G. Pierakstot meklējumu rezultātus, lietosim sekojošus apzīmējumus: vispirms norādīsim atrastās viltotās monētas numuru, bet aiz tā, atdalot ar domuzīmi, rakstīsim burtu S vai V, kas raksturos viltotās monētas tipu: ja monēta izrādīsies smagāka par pārējām, tad aiz domuzīmes rakstīsim burtu S, ja vieglāka - burtu V.

KAUSOS 1. SVĒRŠ	REZULT.	KAUSOS 2. SVĒRŠ	REZULT.	KAUSOS 3. SVĒRŠ	REZULT.	VILT. MON.
K(1, 2, 3, 4, 5) L(6, 7, 8, 9, G)	K > L	K(1, 2, 6, 7, 8) L(9, 10, 11, 12, G)	K > L	K(1); L(2)	K > L	1 - S
					K = L	9 - V
					K < L	2 - S
			K = L	K(3); L(4)	K > L	3 - S
					K = L	5 - S
					K < L	4 - S
			K < L	K(6); L(7)	K > L	7 - V
					K = L	8 - V
					K > L	6 - V
	K = L	K(10, 11) L(12, G)	K > L	K(10); L(11)	K > L	10-S
					K = L	12 - V
					K < L	11 - V
			K = L	K(13); L(G)	K > L	13 - S
					K < L	13 - V
			K < L	K(10); L(11)	K < L	11 - V
					K = L	12 - S
					K < L	10 - V
K(1, 2, 3, 4, 5) L(6, 7, 8, 9, G)	K < L	K(6, 7, 1, 2, 3) L(4, 10, 11, 12, G)	K > L	K(6); L(7)	K > L	6 - S
					K = L	4 - V
					K < L	7 - S
			K = L	K(8); L(9)	K > L	8 - S
					K = L	5 - V
					K < L	9 - S
			K < L	K(1); L(2)	K > L	2 - V
					K = L	3 - V
					K > L	1 - V

Līdz ar to šis uzdevums ir atrisināts. ⊗

Uzdevums 3-5

Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trim no tām ir vienāds svars, trim citām - arī vienāds, bet mazāks nekā trim pārējām monētām. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā atrast vienu (vienalga - kuru) no smagākajām monētām, lietojot svarus tikai 2 reizes?

●

Pirmajā svēršanā noliekam uz katra svaru kausa 3 monētas. tad vai nu uz viena kausa ir 3 smagākās, bet uz otra - 3 vieglākās monētas, vai arī uz viena kausa ir 2 smagākās

un viena vieglākā monēta, bet uz otra svaru kausa, attiecīgi, 2 vieglākās un viena smagākā monēta. Abos gadījumos viens svaru kauss nosveras uz leju.
Apskatām 3 monētas, kas uz tā atrodas. Starp tām ir vismaz 2 smagākās monētas. Uzliekam 2 no šīm trim monētām pa vienai uz katra svaru kausa. Ja svari stāv līdzsvarā, tad uz svaru kausiem uzliktas smagākās monētas. Ja svari neatrodas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka uz kausa, kas nosvēries uz leju, atrodas smagākā monēta. Turklāt otrajā svēršanas reizē nesvērtā monēta arī ir viena no trim smagākajām. Tātad, izmantojot divas svēršanas, varam atrast pat 2 smagākās monētas. ⊗

Uzdevums 3-6

Svariem ir 3 kausi un pie svēršanas nosveras tas kauss, kurā ievietots pēc svara vidējais priekšmets no trim sveramajiem. Tāpat doti septiņi pēc ārējā izskata vienādi priekšmeti, bet ar dažādām masām. Kā ar 8 svēršanām noteikt vidējo pēc masas no šiem septiņiem priekšmetiem? Katrā svēršanā uz katra svaru kausa drīkst atrasties tikai viens priekšmets (ne vairāk, ne mazāk).

●

Apzīmēsim priekšmetus ar burtiem A, B, C, D, E, F, G. Pirmajā svēršanā nosvērsim priekšmetus A, B un C. Pieņemsim, ka uz leju nosvēries kauss ar priekšmetu B. Esam ieguvuši monotonu sakārtotu priekšmetu virkni ABC. Tiešām, tā kā B ir pēc svara vidējais priekšmets, tad A ir vai nu vieglāks, vai arī smagāks par B, bet C - otrādi. Turpmākajā risinājuma gaitā mums pat nebūs svarīgi zināt, vai mūsu veidotā priekšmetu virkne ir monotoni augoša vai monotoni dilstoša, taču ļoti būtisks būs pats monotonitātes fakts. Skaidrs, ka, ja mūsu rīcībā būtu 7 priekšmetu monotona virkne (attiecībā pret priekšmetu svaru), no tās izvēlēties pēc svara vidējo priekšmetu nesagādātu nekādas grūtības.
Tālāk otrajā svēršanas reizē salīdzināsim D ar A un B.
Ja izrādīsies, ka priekšmets A ir vidējais pēc svara, tad skaidrs, ka priekšmeti pēc svara veido monotonu virkni **DABC**.
Ja izrādīsies, ka pēc svara vidējais ir priekšmets B, tad ar trešo svēršanu jānoskaidro D un C savstarpējais novietojums.
Tāpēc 3. svēršanas reizē salīdzināsim D ar B un C.
Ja šoreiz izrādās, ka pēc svara vidējais ir priekšmets D, tad priekšmeti veido monotono virkni **ABDC**.
Ja pēc svara vidējais izrādās priekšmets C, tad priekšmeti monotonu virkni veido secībā ABCD.
Gadījums, kad šādā situācijā vidējais pēc svara ir priekšmets B, nav iespējams.

Ja otrās salīdzināšanas reizē vidējais ir izrādījies priekšmets D, tad priekšmeti monotonu virkni veido pie izvietojuma ADBC.
Tātad lielākais ar 3 svēršanām varam iegūt 4 priekšmetu monotonu izvietojumu pēc to masām. Ērtības labad apzīmēsi šo, vispārīgā gadījumā - jauno, izvietojumu ar $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$.
Ar nākošo svēršanu (sliktākajā gadījumā tā jau ir 4. svēršana) nosveram priekšmetu E ar B_1 un C_1.
Ja priekšmets E izrādās vidējais, tad jaunā monotonā, no 5 priekšmetiem sastāvošā virkne ir $\mathbf{A_1B_1EC_1D_1}$;
Ja vidējais izrādās priekšmets B_1, tad jānoskaidro E un A1 savstarpējais novietojums.

Tālab ar nākošo svēršanu salīdzinām E ar A_1 un B_1.
Ja vidējais šoreiz izrādās *priekšmets E*, tad meklētā virkne ir $\mathbf{A_1EB_1C_1D_1}$;
Ja vidējais ir priekšmets A_1, tad meklētā virkne ir $\mathbf{EA_1B_1C_1D_1}$;
Gadījums, kad vidējais ir priekšmets B_1, atkal nav iespējams;

Ja, salīdzinot priekšmetus E, B_1, C_1 vidējais ir izrādījies *priekšmets C_1*, tad tālāk jānoskaidro, kur jāatrodas E attiecībā pret D_1.
Tāpēc ar nākošās svēršanu jānosver priekšmeti E, C_1 un D_1.
Ja šajā gadījumā *vidējais pēc svara ir priekšmets E*, tad monotonu virkni nosaka priekšmetu izvietojums $\mathbf{A_1B_1C_1ED_1}$;
Savukārt faktam, ka *vidējais pēc svara ir priekšmets D_1*, atbilst jauns priekšmetu izvietojums $\mathbf{A_1B_1C_1D_1E}$.
Gadījums, kad vidējais ir priekšmets C_1, nav iespējams.

Uz doto brīdi esam ieguvuši piecu priekšmetu monotonu (attiecībā pret priekšmetu masu) virkni. Apzīmēsim šo priekšmetu sakārtojumu ar $A_2B_2C_2D_2E_2$ (ar šo sakārtojumu sapratīsim jebkuru no iespējamajiem šo priekšmetu sakārtojumiem). Patreiz esam iztērējuši augstākais 5 svēršanas.

Pēc tam salīdzināsim priekšmetus F, B_2 un C_2.
Ja priekšmets *F izrādās pēc svara vidējais*, tad iegūstam 6 priekšmetu sakārtotu virkni $\mathbf{A_2B_2FC_2D_2E_2}$;
Ja vidējais pēc svara izrādīsies *priekšmets B_2*, tad tālāk F jāsalīdzina ar A_2 un B_2.
Ja šādā situācijā *vidējais ir priekšmets F*, tad iegūstam monotoni sakārtotu priekšmetu virkni $\mathbf{A_2FB_2C_2D_2E_2}$;
Ja kā *vidējais* nosveras *priekšmets A_2*, tad jaunā 6 priekšmetu monotoni sakārtotā virkne ir $\mathbf{FA_2B_2C_2D_2E_2}$;
Gadījums, kad vidējais ir priekšmets B_2, šinī situācija nav iespējams.

Ja vidējais pēc svara ir priekšmets C_2, tad tālāk F jāsalīdzina ar D_2 un E_2.
Ja vidējais ir priekšmets F, tad jaunais sakārtojums ir $\mathbf{A_2B_2C_2D_2FE_2}$;
Ja vidējais izrādījies priekšmets D_2, tad mūsu meklētā monotonā virkne ir $\mathbf{A_2B_2C_2FD_2E_2}$;
Gadījumā, ja vidējais izrādījies priekšmets E2, jaunais priekšmetu sakārtojumsir $\mathbf{A_2B_2C_2D_2E_2F}$;

Iegūto 6 priekšmetu monotono sakārtojumu apzīmēsim ar $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$. Atzīmēsim, ka uz doto brīdi mēs esam iztērējuši ne vairāk kā 7 svēršanas.
Ar pēdējo svēršanu salīdzināsim atlikušo vēl virknē neievietot priekšmetu ar C_3 un D_3. Atzīmēsim, ka šoreiz mums pat vairs nebūs tik svarīgi, vai virkne beigās būs monotona vai tāda vairs nebūs.

Ja pēdējās salīdzināšanas rezultātā *vidējais izrādās priekšmets G*, tad mēs iegūstam jaunu monotonu virkni $A_3B_3C_3GD_3E_3F_3$ un par vidējo pēc svara priekšmetu pasludinām **G**;
Ja vidējais izrādījies priekšmets C_3, tad vairs nav būtiski zināt, kur jāievieto G, lai virkne paliktu monotona, bet kļūst skaidrs, ka pēc masas vidējais ir priekšmets $\mathbf{C_3}$;
Ja vidējais izrādījies priekšmets D_3, tad atkal mūs vairs neinteresē G vieta starp citiem priekšmetiem, bet par vidējo pēc svara starp dotajiem priekšmetiem mēs pasludinām $\mathbf{D_3}$.

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts. ⊗

<u>Uzdevums 3-7</u>

Dotas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Sešām no tām ir vienādas masas; septītās monētas masa atšķiras. Mūsu rīcībā ir ierīce, ar kuras palīdzību var vienlaikus pārbaudīt jebkuras 3 monētas un uzzināt, vai starp tām ir atšķirīgā monēta. Ar kādu mazāko pārbaužu skaitu var garantēti atrast atšķirīgo monētu?

• Ja divi mēģinājumi kopā aptver mazāk par 6 monētām, tad gadījumā, ja tie neviens neuzrāda atšķirīgās monētas klātbūtni, mēs nevaram to izvēlēties starp vēl nepārbaudītajām. Ja tie kopā aptver 6 monētas, tad, ja vienā mēģinājumā atšķirīgās monētas klātbūtne fiksēta, to nevar atrast. Tātad ar 2 pārbaudēm nepietiek. Ar trim pārbaudēm pietiek. Pierādīsm to.

Pārbaudām (A, B, C).
<u>Ja ierīce uzrāda, ka atšķirīgā monēta ir starp A, B, C,</u> tad tālāk pārbaudām trijniekus (A, E, F) un (B, G, H). Ja kādā no tiem ir atšķirīgā monēta, tad tā ir A resp. B; ja meklētās monētas tur nav, tad atšķirīgā monēta ir C.

Ja ierīce uzrāda, ka atšķirīgās monētas starp A, B, C nav, tad pārbauda (A, E, F) un tādējādi noskaidro, vai atšķirīgā monēta ir starp (E, F), vai arī tā ir starp (G, H). Ar trešo pārbaudi apskatām vienu monētu no “aizdomīgā pāra” kopā ar divām garantēti īstajām. ⊗

DAISONA METODE.

Tagad tuvāk aplūkosim šādu problēmu.

Dotas n monētas, no kurām viena ir viltota, taču nekas nav zināms par to, vai viltotā monēta ir smagāka vai vieglāka par īsto. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, atrast viltoto monētu un noteikt, vai tā ir vieglāka vai smagāka par īsto?

Šī problēma pirms aptuveni četrdesmit gadiem nodarbināja daudzu matemātiķu prātus. Labākais risinājums pieder angļu matemātiķim F. Dž. Daisonam. Daisona ideja balstās uz trijnieku skaitīšanas sistēmu: visas monētas tiek marķētas ar speciāli izvēlētiem trijnieku skaitīšanas sistēmas skaitļiem - marķieriem, kas ļauj ērti attēlot sekojošo svēršanu gaitu. Sevišķi pievilcīgs šajā problēmas risinājumā šķiet tas, ka monētu izvēle ir nākamajai svēršanai dažos gadījumos nemaz nav atkarīga, bet citos - minimāli atkarīga no iepriekšējo svēršanu rezultātiem.
Visu Daisona risinājumu var sadalīt divos etapos.

A) Pierādām, ja $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$, n=2,3,..., tad vienas viltotās monētas atrašanai un tās tipa noskaidrošanai (kopējais monētu skaits ir m), pietiek veikt n svēršanas;

B) Pierādām, ja monētu skaits $m < \frac{1}{3}(3^n - 3)$, m≥3, tad šī paša mērķa sasniegšanai tāpat pietiek ar n svēršanām.
Tagad aplūkosim katru etapu atsevišķi.

PIRMAIS ETAPS.

Pieņemsim, ka monētu skaits ir $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$, m≥3. aplūkosim visus n-ciparu "trijnieku skaitļus" (ciparu 0, 1, 2) virknes 00...00, 00...01, ..., 22...22. to ir 3^n. Izmantosim tos monētu marķēšanai pēc sekojoša principa: kā marķierus izvēlēsimies visus šos skaitļus, izņemot trīs, kuru pierakstā visi cipari ir vienādi: 00...00, 11...11 un 22...22.
Saliksim visus marķierus pa pāriem: vienā pārī "ieliksim" divus tādus marķierus, kuriem atbilstošo šķiru cipari summā dod 2 (citiem vārdiem - vienā pārī marķieri būs tie marķieri, kuru summa būs 22..22).
Marķieri nosauksim par "***labējo***", ja tajā pirmais no kreisās puses nevienādo ciparu pāris - 01,12, 20.. Pretējā gadījumā marķieri sauksim par "***kreiso***". Acīm redzot, katrā marķieru pārī viens noteikti būs labais, otrs - kreisais.
Atzīmēsim, ka marķieru pāru skaits tieši vienāds ar monētu kopējo skaitu m. Piekārtosim katrai monētai numurus no 1 līdz m un patvaļīgi katrai monētai piekārtosim vienu marķieru pāri.
Piemēram, 12 monētas var samarķēt, kā parādīts tabulā.

MONĒTAS Nr.	KREISAIS MARĶ.	LABĒJAIS MARĶ.
1	211	011
2	100	122
3	022	200
4	212	010
5	101	121
6	020	202
7	210	012
8	102	120
9	021	201
10	221	001
11	110	112
12	002	220

Ar M(i,0), M(i,1), M(i,2) attiecīgi apzīmēsim tādu monētu kopu, kurām atbilstošā labējā marķiera i-tā šķira ir vienāda ar 0, 1 vai 2.
Viegli redzēt, ka monētu skaits katrā no kopām M(i,0), M(i,1) un M(i,2) ir viens un tas pats un ka šīm kopām nav kopīgu elementu (skat., piemēram, tabulu).
Daisona izgudrotās monētu svēršanas metodes būtība ir sekojoša: secīgi tiek veiktas n monētu svēršanas.
i-tajā svēršanā (i=1, 2, ..., n) uz svaru kreisā kausa tiek liktas visas kopas M(i,0) monētas, uz labā kausa - visas kopas M(i,2) monētas. Katras svēršanas rezultātu apzīmēsim ar 0, ja nosvērsies kreisais kauss, ar 1, ja abiem kausiem vienāds svars un ar 2, ja nosvērsies labais kauss. i-tās svēršanas rezultātu apzīmēsim ar l_i.
No cipariem $l_1, l_2, ..., l_n$ izveidosim marķieri $L=l_1l_2...l_n$. Izrādās, L - viltotās monētas F marķieris un ja L - labējais marķieris, tad F ir smagāka par pārējām, bet, ja L - kreisais marķieris, tad F - vieglāka nekā pārējās monētas.

Tiešām, paskatīsimies, kas notiek, kad tiek veikta i-tā svēršana. Šīs svēršanas rezultātā svari vai nu paliek līdzsvarā vai arī viens no kausiem nosveras.
Ja svari palika līdzsvarā, tad viltotās monētas uz tiem nav, sekojoši, tā ir kopā M(i,1), bet tas nozīmē, ka tās labējā (vai kreisā) marķiera i-tā šķira ir vienāda ar 1, uz ko arī norāda svēršanas rezultāts: l_i=1.
Ja viens svaru kauss nosveras, tad viltotā monēta atrodas uz svariem. Pieņemsim, piemēram, ka nosvēries labais kauss, t.i. l_i=2. Šis rezultāts iespējams divos gadījumos:
1) viltotā monēta atrodas uz labā kausa (tad tā ir smagāka par citām monētām), tas nozīmē, ka tā atrodas kopā M(i,2), tās labējā marķiera i-tā šķira ir vienāda ar 2, sekojoši - svēršanas rezultāts sakrīt ar tās labējā marķiera i-to šķiru.
2) viltotā monēta atrodas uz kreisā kausa (tad tā ir vieglāka par citām monētām), tas nozīmē, ka tā atrodas kopā M(i,0), sekojoši, tās labējā marķiera i-tā šķira ir vienāda ar 0, un svēršanas rezultāts sakrīt ar tās kreisā marķiera i-to šķiru.

Pilnīgi analogs ir "simetriskais" gadījums, kad nosveras kreisais kauss (l_i=0)
Tāpēc tiešām secīgo svēršanu rezultātā izveidotais marķieris $L=l_1l_2...l_n$ ir viltotās monētas marķieris, pie kam labējais smagākās monētas gadījumā un kreisais gadījumā, ja viltotā monēta ir vieglāka par pārējām monētām, ko arī vajadzēja pierādīt.

Interesanti atzīmēt, ka monētas tips, kā likums, noskaidrojas agrāk, nekā veiktas visas monētu svēršanas - tiklīdz marķiera L formēšanā parādījušies divi atšķirīgi cipari.
Aplūkotajā gadījumā monētu izvēle katrai svēršanai nav atkarīga no iepriekšējo svēršanu rezultātiem. Piemēram, priekš 12 monētām, kas samarķētas tā, kā parādīts tabulā, vajag veikt sekojošas trīs svēršanas:
(1,4,7,10) , (3,6,9,12);   (3,6,9,10) , (2,5,8,12);   (3,4,8,12) , (2,6,7,11).

OTRAIS ETAPS.

Īsi aprakstīsim Daisona metodi gadījumam $m < \frac{1}{3}(3^n - 3)$.

Šajā gadījumā monētu izvēle pirmajām n-1 svēršanām nebūs atkarīga no iepriekšējo svēršanu rezultātiem, bet monētu izvēle n-tajai svēršanai dažos gadījumos - būs.
Ja šajā gadījumā monētu marķierus piekārtotu patvaļīgi, tad kopās M(i,0) un M(i,2) var izrādīties dažāds monētu skaits. Tāpēc rīkosimies sekojoši: sadalīsim visus marķierus grupās pa seši: vienā grupā ieskaitīsim labējos marķierus, kas iegūstami viens no otra ar ciklisku ciparu maiņu $0\to1$, $1\to2$, $2\to0$ un tiem atbilstošos kreisos marķierus.
Katrā grupā nokļūs trīs labējie marķieri un trīs kreisie marķieri. Grupu, kas satur labējos marķierus 00...01, 11...12, 22...20, izcelsim sevišķi. Sadalīsim monētas grupās pa trim, kamēr tas ir iespējams, un samarķēsim tās sekojošā veidā: vienas grupas monētām piekārtosim vienas grupas marķierus, bet atlikumam, ja tāds ir, lietosim marķierus no izceltās grupas: ja paliks viena monēta, kas neietilpst trijniekos, tad piekārtosim tai labējo marķieri 11...12, bet ja divas, tad labējos marķierus 00...01 un 22...20 (un atbilstošos kreisos marķierus).
Ievērosim: ja kādas grupas marķieri tiek izmantoti pilnībā, tad katrā no kopām M(i,0), M(i,1), M(i,2) pievienojas pa vienai monētai.
Pirmās n-1 svēršanas organizējam pēc vecajiem noteikumiem.

Kā organizējam n-to svēršanu, atkarīgs no tā, kā beigusies monētu dalīšana grupās pa 3.
Ja visas monētas sadalījušās grupās pa 3, tad arī n-to svēršanu veicam pēc vecajiem nosacījumiem un arī rezultātus interpretējam kā agrāk.
Ja, dalot monētas grupās pa3, pāri paliek viena monēta M (ar labējo marķieri 11...12), tad šī monēta pirmajās n-1 svēršanās vispār nav piedalījusies. Savukārt jebkura cita monēta ir piedalījusies vismaz vienā svēršanā (jo nevienai monētai, izņemot īpašo, nav marķiera, kuram pirmie n-1 cipari būtu vieninieki). Šķirosim divus gadījumus:
a) nevienā no līdzšinējām svēršanām neviens kauss nav nosvēries. Tad īpašā monēta ir līdz šim malā palikusī M un ar pēdējo svēršanu noskaidrojam tās tipu;
b) kaut vienā no līdzšinējām svēršanām kāds kauss ir nosvēries. Tad palikusī monēta M nav īpašā un n-to svēršanu varam izdarīt pēc vecajiem noteikumiem, ignorējot šo monētu.

Ja dalot monētas grupās pa 3, pāri paliek divas monētas(ar labējiem marķieriem 00...01 un 22...20), tad tās piedalījušās visās līdzšinējās svēršanās, pie tam atradušās uz pretējiem svaru ausiem. Savukārt, neviena cita monēta visās svēršanās nav piedalījusies (katrai citai monētai labējā marķierī vismaz viens no pirmajiem n-1 cipariem ir1). Ja visās līdzšinējās svēršanās abu izdalīto monētu sacensībā "uzvarējusi" viena un tā pati, tad īpašā monēta ir viena no tām; ar pēdējo svēršanu salīdzinām vienu no tām ar jebkuru citu un uzzinām visu vajadzīgo. Ja, turpretī, abu izdalīto monētu "mačs" kādreiz beidzies neizšķirti, tad neviena no tām nav īpašā; tad n-to svēršanu organizējam pēc vecajiem noteikumiem, ignorējot monētu ar marķieri 22...20 - tā noteikti nav īpašā, un tās noņemšana vienādo monētu skaitu uz abiem kausiem.
Līdz ar to Daisona metode parakstīta.

Tagad pārliecināsimies, ka tā kaut kādā ziņā ir labākā iespējamā.
Parādīsim, ka, ja no m monētām ar n svēršanām var atrast viltoto monētu un noteikt tās tipu, tad $2m \leq 3^n-3$.

Protams, mēs neņemsim vērā iespējamo "veiksmi": "veiksmes" gadījumā viltotās monētas noskaidrošanai no jebkura monētu daudzuma var pietikt arī ar divām svēršanām.

$\vee$
Pieņemsim no pretējā, ka ar n svēršanām pietiek. Katra no m monētām sākotnēji pretendē būt gan vieglāka, gan smagāka. Tātad mums jāatrod patiesā no 2m iespējām: "1. vieglāka", "1. smagāka", ..., "m-tā vieglāka", "m-tā smagāka". Katrai svēršanai iespējami 3 rezultāti: nosveras kreisais kauss, nosveras labais kauss, kausi paliek līdzsvarā. Spriežot līdzīgi kā 1.7. punktā, jāaplūko shēmas, kurās no katras svēršanas uz lejuieziet trīs zari. Iegūstam, ka jāpastāv nevienādībai $2m \leq 3^n$.
Bet tas vēl nav viss! Mēs neesam tikuši skaidrībā ar gadījumu $2m=3^n-1$ (pāra skaitlis 2m nevar būt vienāds ne ar3^n-2, ne 3^n). Šim gadījumam ar augstāk minētajiem apsvērumiem nepietiek.
Aplūkosim pirmo svēršanu uzmanīgāk. Skaidrs, ka iespēju skaits, kas atbilst rezultātam "nosveras kreisais kauss", vienāds ar iespēju skaitu, kas atbilst rezultātam "nosveras labais kauss". Pieņemsim, ka gan vienu, gan otru ir p. tad 2m-2p iespējas atbilst rezultātam "kausi paliek līdzsvarā".

Ievērosim, ka p - pāra skaitlis. Tiešām - ja uz svaru kreisā un labā kausa atrodas k monētas, tad p=2k. Ja p vai 2m-2p ir lielāks par 3^n-1, tad vajadzīgās iespējas noskaidrošanai ar atlikušajām n-1 svēršanām var nepietikt. Ja, savukārt,

$p=2k\leq 3^n-1$ un $2m-2p\leq 3^n-1$,

tad, tā kā 3^n - nepāra skaitlis, jābūt $p\leq 3^{n-1}-1$, $2m-2p\leq 3^{n-1}-1$. Bet tad

$2m = (2m-2p) + 2p \leq 3^{n-1} + 2(3^{n-1}-1) = 3^n-3$.

Un tā, ja ar n svēršanām pietiek, tad $2m \leq 3^n-3$.

^

To, ka viltotās monētas atrašanai, nezinot tās tipu, starp N monētām pietiek ar n svēršanām, ja $N \leq \frac{3^n-3}{2}$, un ar mazāk par n svēršanām vispārīgā gadījumā var nepietikt, var pierādīt arī savādāk. Parādīsim pierādījuma gaitu un veiksim to trīs etapos.

Vispirms pirmajā etapā atrisināsim vienkāršu problēmu.

Uzdevums 3-8

Dotas divas monētu grupas X un Y, kurās kopā ir N monētas, N ≠ 2. Zināms, ka viena monēta ir viltota: tā ir vieglāka, ja pieder pirmajai grupai, un smagāka, ja pieder otrajai grupai. Pierādiet: ja $N\leq 3^n$, tad viltoto monētu var atrast ar n svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem , bet, ja $N>3^n$, tad tas ar n svēršanām nav garantēti izdarāms.

●

Atzīmēsim, ka, ja N=2 un katrā grupā ir pa vienai monētai, tad viltoto monētu vispār nevar noteikt. Izteikto apgalvojumu pierādīšanai izmanto matemātisko indukciju.

Ja n=1, t.i. pie N=1 vai N=3, šis apgalvojums i gandrīz acīm redzams. Tā, piemēram, ja N=3, lai noteiktu viltoto monētu, pietiek salīdzināt 2vienas grupas monētu masas.

Pieņemsim, ka ir spēkā apgalvojums: ja $N\leq 3^{n-1}$, tad viltoto monētu var noteikt ar n - 1 svēršanas palīdzību.

Tālāk aplūkosim gadījumu, kad $N\leq 3^n$. Uz katra svaru kausa uzliksim x monētas no grupas X un y monētas no grupas Y, kur v un y izvēlēti tā, lai tiktu apmierinātas nevienādības: $x+y\leq 3^{n-1}$; $N-2(x+y)\leq 3^{n-1}$.

Ja svari nostājas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka viltotā monēta (turpmāk VM) atrodas starp N-2(x+y) monētām, kas nav uzliktas uz svariem; ja viens svaru kauss nosvēries, tad tas nozīmē, ka VM atrodas vai nu starp tām x no grupas X paņemtajām monētām, kas atrodas uz vieglākā kausa, vai arī starp tām y grupas Y monētām, kas uzliktas uz smagākā kausa. Bet saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, abos gadījumos mēs varam atrast viltoto monētu, vēl papildus veicot n-1 svēršanu (par cik gan N-2(x+y), gan x+y nav lielāks par 3^{n-1}). (Šeit atzīmēsim, ka šajā situācijā, ja N>2, gadījums x=1 un y=1 vairs nav izņēmums, jo tagad bez šīm divām monētām mūsu rīcībā ir kaut kāds skaits garantēti īstu monētu. Salīdzinot vienas no šīm monētām masu ar vienas “šaubīgās”

monētas masu, mēs ar vienu svēršanu atradīsim VM). Apgalvojuma pirmā daļa pierādīta.
Tagad pierādīsim, ka, ja N>3n, viltoto monētu vispārīgā gadījumā ar n svēršanām atrast nevar. Lai to pierādītu, vispirms atrisināsim vispārīgāku uzdevumu. ⊗

Uzdevums 3-9

Dotas 3 monētu grupas X, Y un Z, pie kam grupas Z monētas ar garantiju nav viltotas, bet starp pārējām monētām viena ir viltota un par to zināms: ja tā atrodas pirmajā grupā, tad tā ir smagāka par īsto monētu, bet, ja tā atrodas otrajā grupā, tad tā ir vieglāka par īsto. Pierādīt, ka pat šajā gadījumā viltoto monētu vispārīgā gadījumā ar n svēršanām atrast nevar, ja grupās X un Y kopā ir vairāk nekā 3^n monētas.

●
Viegli pārbaudīt, ka, ja n=1 (t.i. monētu skaits grupās X un Y ir lielāks par 3) ar vienu svēršanu tiešām ne vienmēr var noteikt VM.
Pieņemsim, ka mēs protam pierādīt: ja monētu skaits grupās X un Y kopā ir lielāks par 3^{n-1}, viltoto monētu ne vienmēr var atrast ar n-1 svēršanas palīdzību. Pierādīsim, ka tādā gadījumā pie $N>3^n$ ar n svēršanām nevar garantēti atrast VM.
Pieņemsim, ka pirmās svēršanas reizē uz viena no kausiem esam uzlikuši x monētas no grupas X, y monētas no grupas Y un z monētas no grupas Z, bet uz otra svaru kausa x' monētas no grupas X un y' monētas no grupas Y, pie kam x+y=x'+y'. (Skaidrs, ka ir pilnīgi lieki likt grupas Z monētas uz abiem ausiem). Pieņemsim, ka no grupām X un Y nesvērtas palikušas w monētas (x+x'+y+y'+w=N). Par cik šādā situācijā svari var izrādīties līdzsvarā, tad pēc induktīvā pieņēmuma, lai varētu iztikt ar n svēršanām, w nedrīkst pārsniegt 3^{n-1}. Tādā gadījumā

$x+y+x'+y' \geq N-3^{n-1} > 3^n-3^{n-1} = 2x3^{n-1}$

un lielākais no skaitļiem x+y' un x'+y būs lielāks par 3^{n-1}. Bet, ja, piemēram, $x'+y > 3^{n-1}$, tad saskaņā ar izdarīto pieņēmumu, mums ar n-1 svēršanu nepietiks tanī gadījumā, ja nosvērsies tas kauss, uz kura atrodas x' monētas no grupas X un y monētas no grupas Y. induktīvā pāreja izdarīta. Esam atrisinājuši uzdevumu un pabeiguši arī iepriekšējā uzdevuma (Uzdevums 3-8)risināšanu. ⊗

Otrajā etapā aplūkosim sekojošu uzdevumu:

Uzdevums 3-10

Dotas N monētas un zināms, ka starp tām ir viena viltota, kas pēc svara atšķiras no pārējām monētām, bet nav zināms, vai tā ir vieglāka vai smagāka par īsto. Bez tam dota arī vismaz viena garantēti īsta monēta. pierādiet, ka, ja $N \leq \frac{3^n-1}{2}$, tad viltoto monētu vienmēr var atrast ar n svēršanām un pie tam noteikt, vai viltotā monēta ir

vieglāka, vai smagāka par pārējām, bet, ja $N > \dfrac{3^n-1}{2}$***, tad tas nav garantēti izdarāms.***

•

Sākumā pieņemsim, ka N ≤ $\dfrac{3^n-1}{2}$. Ja n=1 (t.i. N=1), tad ar vienu svēršanu pietiek. Turpmāk uzskatīsim, ka esam pierādījuši, ka pie N ≤ $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$ varam iztikt ar n-1 svēršanas palīdzību un pierādīsim, ka tādā gadījumā pie N ≤ $\dfrac{3^n-1}{2}$ pietiek ar n svēršanām.

Uz viena no svaru kausiem novietosim x no dotajām N monētām un vienu īsto monētu, bet uz otra svaru kausa uzliksim x+1 monētu; tad nenosvērtas paliks N-2x-1 monētas. Skaitli x izvēlamies tā, lai

$2x+1 \le 3^{n-1}$ un $N-2x-1 \le \dfrac{3^{n-1}-1}{2}$.

Skaidrs, ka x tā vienmēr var izvēlēties, jo kopējais monētu skaits nepārsniedz 3^{n-1}. Tad x ņemam iespējami lielu, lai izpildītos sakarība 2x+1 3^{n-1}; grupā N-(2x+1) paliks ne vairāk kā 1 monēta (viena, ja to pavisam ir pāra skaitlis), un tas apmierina arī otro nosacījumu. Ja turpretī kopējais monētu skaits pārsniedz 3^{n-1}, tad ņemam x= $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$; tad

$$N-2x-1 \le \frac{3^n-1}{2}-(3^{n-1}-1)-1 = \frac{3^{n-1}-1}{2}.$$

Ja svari nostājas līdzsvarā, tad paliks N-2x-1 ≤ $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$ nepārbaudītas monētas; tāpēc, pēc induktīvā pieņēmuma, mēs varam atrast viltoto monētu, vēl papildus veicot ne vairāk kā n-1 svēršanu. Ja līdzsvars neiestāsies, tad x monētas uz viena kausa un x+1 uz otra svaru kausa veido divas grupas, kas satur tikai $2x+1 \le 3^{n-1}$ monētas, kurām pielietojami pirmajā etapā aplūkotie paņēmieni. Tātad arī šajā gadījumā mums būs nepieciešama vēl ne vairāk kā n-1 svēršana. Līdz ar to esam pierādījuši, ka pie monētu skaita N ≤ $\dfrac{3^n-1}{2}$ uzdevuma veikšanai pietiek ar n svēršanām.

Tagad parādīsim, ka pie monētu skaita N > $\dfrac{3^n-1}{2}$ ne vienmēr var pietikt ar n svēršanām, lai starp N monētām atrastu viltoto un noteiktu tās tipu.

Ja n=1 (t.i. pie N>1), viegli ieraudzīt, ka ar vienu svēršanu nepietiek. Tālāk pieņemsim, ka priekš N > $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ jau esam pierādījuši, ka ar n-1 svēršanu nepietiek un aplūkosim gadījumu, kad N > $\frac{3^{n}-1}{2}$.

Pieņemsim, ka pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa esam uzlikuši x monētas no kopējā monētu skaita N un z garantēti īstās monētas (šeit mēs pat uzskatām, ka mums ir ne tikai viena, bet daudzas garantēti īstas monētas), bet uz otra kausa x+z monētas no mūsu N monētām. to monētu skaitu, kas pēc pirmās svēršanas ir ”šaubīgas kvalitātes”, apzīmēsim ar w. Par cik svari var izrādīties līdzsvarā, tad, lai varētu iztikt ar n svēršanām, uz tiem neuzlikto monētu skaitam (šajā gadījumā tas ir w) jābūt ne lielākam par $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ (pēc izdarītā pieņēmuma). Bet tad uz svariem uzlikto monētu skaits 2x+z > $\frac{3^{n}-1}{2}$ - $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ = 3^{n-1}. Tā kā priekš divām monētu grupām X un Y, kuras sastāv no šaubīgām monētām, kas uzliktas uz viena vai otra svaru kausa, gadījumā, ja līdzsvara nebūs, ir spēkā pirmajā etapā (Uzdevums 3-8 un Uzdevums 3-9) iegūtie rezultāti, tad no nevienādības $2x+z>3^{n-1}$ seko, ka ar n svēršanām var nepietikt. ⊗

Trešajā etapā vispirms pierādīsim, ka

ja starp N monētām (2 < N ≤ $\frac{3^{n}-3}{2}$) ir viena viltota, bet nav zināms, vai tā ir vieglāka vai smagāka par pārējām monētām, tad, lai atrastu šo viltoto monētu un noteiktu tās tipu, pietiekamas n svēršanas.

∨

Uz katra no svaru kausiem novietosim pa x monētām. Tad nesvētas vēl paliks N-2x monētas. Pie tam x izvēlēsimies tā, lai $2x \le 3^{n-1}$ un N-2x ≤ $\frac{3^{n-1}-1}{2}$. Pie N ≤ $\frac{3^{n}-3}{2}$ tas iespējams.

Ja svari nostājas līdzsvarā, tad šaubīgas paliks tikai N-2x ≤ $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ monētas, turklāt mūsu rīcībā būs 2x garantēti īstas monētas. Balstoties uz otrā etapa rezultātiem (Uzdevums 3-10), ar vēl n-1 svēršanas palīdzību mēs varam atrast viltoto monētu. Ja, savukārt, svari līdzsvarā nenostājas, tad uz abiem svaru kausiem atrodošos monētu grupām pielietojami pirmā etapa rezultāti (Uzdevums 3-8 un Uzdevums 3-9); tā kā kopējais monētu skaits šajās abās grupās ir $2x \le 3^{n-1}$, tad arī šajā gadījumā ar vēl n-1 svēršanas palīdzību mēs varēsim atrast viltoto monētu un noteikt tās tipu.

Tagad pierādīsim, ka gadījumā, ja N > $\frac{3^{n}-3}{2}$**,** tad ar mazāk nekā n svēršanām mūsu uzdevuma izpildei var nepietikt. Pieņemsim, ka pirmās svēršanas laikā uz katra kausa bija uzliktas x monētas un w monētas palika nesvērtas. Ja svari izrādīsies līdzsvarā, tad, ievērojot otrā etapa rezultātus, viltotās monētas noskaidrošanai un tās tipa noteikšanai pietiekams veikt vēl n-1 svēršanu tikai tajā gadījumā, ja w nav lielāks par $\frac{3^{n-1}-1}{2}$. Bet tad

$$2x > \frac{3^n-3}{2} - \frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{2\cdot 3^{n-1}-2}{2} = 3^{n-1}-1.$$

Tā kā 2x ir pāra skaitlis, tad seko, ka $2x>3^{n-1}$ un, ievērojot pirmā etapa rezultātus, gadījumā, ja viens kauss nosvērsies, ar n svēršanām viltoto monētu noteikt nebūs iespējams. ⊗

4. NODAĻA

KĀ PIE SPECIĀLEM NSACĪJUMIEM ATRAST VAIRĀKAS MONĒTAS

Šajā nodaļā aplūkosim uzdevumus, kuros, vadoties no piedāvātās informācijas, tiks prasīts atrast vairākus objektus. Kā tūlīt redzēsim, šo uzdevumu atrisinājumi balstīsies uz loģisku spriedumu ceļā izveidotām monētu grupēšanas metodēm, kuras nosaka uzdevuma formulējumā norādītās pētāmo objektu savstarpējās attiecības.

Uzdevums 4-1

Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trīs no tām ir ar vienādu masu, viena ir vieglāka par pērējām, bet viena - smagāka. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast vieglāko un smagāko monētu?

●

Apzīmēsim monētas ar burtiem A, B, C, D un E. To, ka monēta X smagāka par monētu Y, pierakstīsim kā $X > Y$. To, ka monētas sver vienādi, apzīmēsim ar $X = Y$. Tās trīs monētas, kurām masas ir vienādas, sauksim par *normālām*.
Pirmajā svēršanā salīdzinām A un B, otrā C un D. Pastāv divas iespējas:
a) abos gadījumos viens kauss nosveras uz leju;
b) vienā gadījumā kausi paliek līdzsvarā, bet otrā viens kauss nosveras uz leju.
Trešā situācija, kad abās svēršanas reizēs kausi paliek līdzsvarā, nav iespējama, jo divas no piecām monētām nav "normālas"; pat tad, ja viena no viltotajam monētām ir monēta E (vienalga, vai tā ir vieglāka, vai smagāka par citām), starp sveramajām 4 monētām tā kā tā atrodas viena neīstā monēta un vienā no svēršanas reizēm svari nepaliks līdzsvarā.

Apskatīsim šīs divas situācijas atsevišķi.

a) Pieņemam, ka A>B un C>D.
Trešajā svēršanā salīdzinām D un E.
Ja D=E, tad D un E ir normālas monētas, bet C - smagāka. Tāpēc A - normāla, bet B - vieglākā monēta;
Ja D<E, tad - vieglākā, bet A - smagākā monēta.
Rezultāts D>E nav iespējams, jo , ja C>D>E, tad būtu jābūt, ka C - smagākā monēta, D - normālā, bet E - vieglākā, bet tad nevar būt A>B.
Citus gadījumus (A>B un C<D; A<B un C>D; A<B un C<D) apskata līdzīgi.

b) Pieņemsim, ka A>B un C=D.
Skaidrs, ka C un D - normālās monētas. trešajā svēršanā salīdzinām D un E.
Ja D=E, tad A - smagākā, bet B - vieglākā monēta;
Ja D<E, tad E - smagākā monēta, A - normālā, bet B- vieglākā monēta;
Ja D>E, tad E - vieglākā, A - smagākā, B - normālā monēta.

Citus gadījumus, kad A<B un C=D; A=B un C>D; A=B un C<D, apskata līdzīgi.
⊗

Uzdevums 4-2

No deviņām monētām divas ir viltotas. Atrodiet viltotās monētas ar 4 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem, ja zināms, ka abas viltotās monētas sver vienādi, pie kam tās ir smagākas par īstajām (arī visas īstās monētas sver vienādi).

●

Sadala monētas 3 grupās pa trim monētām katrā. Apzīmēsim šīs grupas attiecīgi ar A, B un C.
Pirmajā svēršanā nosver A un B, otrajā svēršanā salīdzina B un C. Iespējami vairāki varianti:
1. Pirmajā svēršanā A=B un otrajā svēršanā B>C. tas iespējams tikai tādā gadījumā, ja viltotās monētas atrodas pa vienai kaudzītēs A un B. Tad trešajā svēršanā nosver 2 monētas no grupas A. Ja kausi līdzsvarā, tad viltotā monēta ir nesvērtā, bet, ja kausi nav līdzsvarā, tad smagākā monēta ir meklētā viltotā monēta. Ar ceturto svēršanu analogi atrod otro viltoto monētu no grupas B.
2. Pirmajā svēršanas reizē A=B un otrajā svēršanā B<C. Tas nozīmē, ka abas viltotās monētas atrodas grupā C. Šoreiz trešajā svēršanas reizē nosveram divas grupas C monētas. Ja svaru kausi atrodas līdzsvarā, tad abas smagākās monētas esam atraduši; ja svari neatrodas līdzsvarā, tad tik un tā varam pateikt, kuras no grupas C monētām ir viltotas: tā monēta, kura trešās svēršanas reizē izradījās smagākā un malā palikusī grupas C monēta.
3. Pirmajā svēršanas reizē A>B un otrajā svēršanā B<C. Tas nozīmē, ka grupa B viltoto monētu nav, bet tā pa vienai atrodas grupas A un C. Tad trešās svēršanas reizē nosveram divas grupas A monētas. Ja svari līdzsvarojas, tad viltotā - smagākā - monēta ir nesvērtā monēta. Ja svari nosveras uz vienu vai otru pusi, tad meklētā ir svēršanas reizē smagākā monēta. Analogi ar ceturto svēršanu atrodam viltoto monētu starp grupas C monētām.
4. Gadījumā, ja sverot fiksēti rezultāti A>B un B=C, spriedums ir analogs gadījumam *2.*
5. Gadījums A<B un B=C ir līdzīgs gadījumam**1.** .
6. Gadījumā A<B un B>C secinām, ka abas viltotās monētas ir meklējamas grupā B. Trešajā svēršanā jāsalīdzina grupas b divas monētas. Ja svari līdzsvarā, tad meklētais ir atrasts, proti, abas viltotās monētas atrodas uz svariem; ja svari neatrodas līdzsvarā, tad meklētās monētas ir nesvērtā un tā monēta, kura 3. svēršanas reizē izrādījās smagākā.
Līdz ar to uzdevums ir atrisināts. Kā redzējām, dažos gadījumos pietiek pat ar trim svēršanām, lai atrastu meklējamās monētas, taču vispārīgā gadījumā ar trim reizēm var nepietikt. ⊗

Uzdevums 4-3

Starp 25 pēc ārējā izskata vienādām monētām 3 ir viltotas un 22 īstas. Visas īstās monētas sver vienādi. Visas viltotās monētas arī sver vienādi, bet tās ir vieglākas par īstajām monētām. Kā ar 2 svēršanu palīdzību uz sviras svariem bez atsvariem atrast 6 īstas monētas?

●

Atliksim kaut kādu monētu sānis, bet no atlikušajām 24 monētām patvaļīgi izvēlēsimies 12 un uzliksim tās uz viena svaru kausa, bet otras 12 - uz otra svaru kausa.
Ja svari atrodas līdzsvarā, tad malā atliktā monēta ir viltota un uz katra no svaru kausiem arī atrodas pa vienai viltotai monētai. Noņemsim no viena kausa visas monētas un to vietā uzliksim kaut kādas 6 monētas no otra svaru kausa. Tad uz tā svaru kausa, kurš nosvērsies, atradīsies 6 īstās monētas, bet uz otra - 5 īstas un viena viltotā monēta.
Ja svari pirmajā svēršanā neatradās līdzsvarā, tad uz tā kausa, kurš nosvērās, atrodas ne vairāk par vienu viltoto monētu. Noņemam no vieglākā kausa visas monētas un to vietā uzliksim jebkuras 6 no otra kausa. Ja svari tagad ir līdzsvarā, tad uz katra kausa atrodas pa 6 īstām monētām. Savukārt, ja svari nav līdzsvarā, tad uz smagākā kausa atrodas 6 īstās monētas, bet uz otra - 5 īstas un 1 viltotā monēta. ⊗

Uzdevums 4-4

Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Četrām no tām masas savā starpā vienādas, bet divām - arī savā starpā vienādas, bet mazākas nekā četrām pirmajām. Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast abas vieglākās monētas?

●

Sadalām monētas 2 grupās pa 3 monētām katrā. Ar pirmo svēršanu salīdzināsim abas šīs grupas. Ja to masas ir vienādas, tad tas nozīmē, ka katrā grupā atrodas pa vienai vieglākajai monētai. Šai gadījumā ar otro svēršanu salīdzinām divas monētas no pirmās grupas. Ja tās ir vienādas, tad meklējamā monēta ir trešā šīs grupas monēta, ja nē - tad tā, kura otrajā svēršanā ir vieglākā. Ar trešo svēršanu tieši tāpat atrod vieglāko monētu otrajā grupā.
Ja pirmās svēršanas reizē svari nav līdzsvarā, tad abas meklētās monētas ir vienā - vieglākajā grupā. Otrajā svēršanas reizē katrā svaru kausā novietojam pa vienai šīs grupas monētai. Ja svari ir līdzsvarā, tad abas uz svariem esošās monētas ir meklētās; ja svari nav līdzsvarā, tad viltotās monētas ir otrajā svēršanas reizē malā palikusī monēta un tā, kura otrajā svēršanas reizē izrādījās vieglāka. ⊗

Uzdevums 4-5

Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 4 ir īstas (visas ar vienādu masu) un 4 viltotas (arī visas ar vienādu masu); īstās monētas ir smagākas par viltotajām. Kā ar 6 svēršanu palīdzību uz sviras svariem bez atsvariem atrast visas īstās monētas?

●

Apzīmēsim monētas attiecīgi ar burtiem A, B, C, D, E, F, G, H. Izdarām sekojošas svēršanas: A ar B; B ar C, C ar D, D ar E, E ar F, F ar G. Monēta H netiek svērta.
Šo svēršanu rezultātā par dažām monētām tieši noskaidrosies, ka tās ir īstas (tās, kas savā svēršanas reizē izradījās smagākas) vai viltotas (tās, kas savā svēršanas reizē izradījās vieglākas). Par dažām monētām netieši noskaidrosies, ka tās ir īstas vai viltotas: tās, kas savā svēršanas reizē izrādījušās vienādas ar īstu vai viltotu monētu.

Kopā būs "atšifrētas" 7 monētas. Astotā monēta H ir īsta vai viltota atkarībā no tā, vai starp 7 pērējām ir 3 vai 4 īstas. ⊗

Uzdevums 4-6

Dotas 12 pēc ārējā skata vienādas monētas. No tām 6 ir īstas (tām ir vienādas masas), bet 6 ir viltotas (arī tām masas ir vienādas). Viltotās monētas masa ir mazāka par īstās monētas masu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 9 svēršanu palīdzību uz šiem svariem atrast īstās monētas?

●

Sadalīsim visas monētas grupas pa 4. Apzīmēsim vienas grupas monētas ar a, b, c un d. Salīdzināsim a un b. Ja a>b, tad a - īsta, bet b - viltota monēta; salīdzinot c un d ar a, noskaidrosim, kādas ir c un d. Līdzīgi rīkojamies, ja b>a. Ja izrādās, ka a=b, tad noliekam a un b uz viena kausa, bet c un d - uz otra. ja aun b nosveras uz leju, tad tās ir īstas; ar trešo svēršanu salīdzinām c un d un uzzinām, kādas tās ir. Ja kauss ar vienu no tām nosveras uz leju, tad tā ir īstā, bet otra - viltota; a kausi atrodas līdzsvarā, tad tās abas ir viltotas monētas. ja a un b paceļas uz augšu, tad tās abas ir viltotās monētas un ar trešo svēršanu salīdzinām c un d un noskaidrojam to "dabu". Ja, turpretī, otrajā svēršanā a un b līdzsvarojas ar c un d, tad skaidrs, ka visas monētas a,b,c,d ir viena tipa: vai nu īstas, vai viltotas. Pagaidām darbošanos ar šo četrinieku pārtraucam.

Šādi rīkojamies ar katru monētu četrinieku. Pastāv divas iespējas:
1) katrā četriniekā ar 3 svēršanām atšifrētas visas monētas; kopā izdarītas 3x3=9 svēršanas;
2) kādā četriniekā izdarītas tikai 2 svēršanas un konstatēts, ka visas monētas ir viena tipa Ievērosim, ka tādi nevar būt visi trīs četrinieki: ja tā būtu, tad īsto un viltoto monētu daudzumi būtu 12 un 0; 8 un 4 vai 0 un 12, bet pēc dotā to ir pa sešām. Tātad, "šaubīgo" četrinieku ir viens vai divi un līdz 9 svēršanām vēl palikušas atbilstoši 1 vai 2 svēršanas. No trešā četrinieka ņemam vienu monētu un , kuras daba jau noskaidrota, un salīdzinām ar vienu no "šaubīgā" četrinieka monētām; šīs salīdzināšanas rezultātā visu šī četrinieku daba tiek noskaidrota. kopā iznāk ne vairāk kā 9 svēršanas. To var iznākt arī mazāk, ja, piemēram, vienā četriniekā atrastos 2 īstas un 2 viltotas monētas un divi četrinieki palikuši "šaubīgi". Jau pēc pirmās salīdzināšanas ar kādu no četrinieku monētām viss kļūst skaidrs. ⊗

Uzdevums 4-7

Dotas 4m monētas, no kurām tieši puse ir viltotas. Īstās monētas sver vienādi, viltotās arī, bet viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā ar ne vairāk kā 3m svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noteikt visas viltotās monētas?

●

Sadalīsim visas 4m monētas grupās pa 4. Tādas būs m grupas. Apzīmēsim vienas grupas monētas ar a,b,c un d. Salīdzināsim a un b. Ja a>B, tad a - īsta, bet b - viltota monēta; salīdzinot c un d ar a, noskaidrosim, kādas ir c un d. Līdzīgi rīkojamies, ja b>a. Ja izrādās, ka a=b, tad noliekam a un b uz viena kausa, brt c un d - uz otra. Ja a un b nosveras uz leju, tad tās abas ir īstas monētas; ar trešo svēršanu salīdzinām c un d

un uzzinām, kādas tās ir; ja viena no tām nosveras uz leju, tad tā ir īsta, bet otra - viltota; ja tās atrodas līdzsvarā, tad tās abas ir viltotas monētas. ja a un b paceļas uz augšu, tad tās abas ir viltotās monētas un ar trešo svēršanu salīdzinām c un d, noskaidrojot to "dabu". Ja, turpretī, otrajā svēršanā a un b līdzsvarojas ar c un d, tad skaidrs, ka visas monētas a, b, c un d ir viena tipa: vai nu īstas, vai viltotas. pagaidām darbošanos ar šo četrinieku pārtraucam.
Šādi rīkojamies ar katru monētu četrinieku. Pastāv divas iespējas:

1) katrā četriniekā ar 3 svēršanām atšifrētas visas monētas ; kopā izdarītas 3xm=3m svēršanas;
2) x četriniekos izdarītas tikai 2 svēršanas un konstatēts, ka visas monētas ir viena tipa, $x \geq 1$ Tālākie spriedumi atkarīgi no x un m vērtībām:
a) x=m+1 Tas nav iespējams;
b) x=m>1 (Tas iespējams tikai tad, ja m - pāra skaitlis, citādi īsto un viltoto monētu nevarētu būt vienāds skaits.) Ņemam pa vienai monētai no katra četrinieka un rīkojamies ar tām tāpat kā iepriekš aplūkotā risinājumā (Uzdevums 4-5); ar m-1 svēršanu visu būsim noskaidrojuši.
Kopējas svēršanu skaits ir $2m+(m-1) < 3m$.

c) $1 \leq x < m$. Tad mums ir vismaz viens četrinieks, kurā visu monētu daba noskaidrota. Ņemam vienu jau atšifrētu monētu un salīdzinām to ar vienu monētu un salīdzinām to ar vienu monētu no katra no '"šaubīgajiem" četriniekiem. Tādējādi ar

$3(m-x)+2x+x=3m$
svēršanām būsim visu noskaidrojuši. ⊗

Uzdevums 4-8

Dotas 6 svaru bumbas: viens pāris zaļu, viens pāris sarkanu un viens pāris baltu. Katrā pārī viena svaru bumba ir smaga, bet otra viegla, pie tam visas smagās svaru bumbas sver vienādi un visas vieglās arī sver vienādi. Ar divām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem jānosaka visas 3 smagās svaru bumbas. Kā to izdarīt?

●
Apzīmēsim svaru bumbas attiecīgi ar Z_1, Z_2, S_1, S_2, B_1 un B_2.
Pirmās svēršanas reizē nosvērsim bumbas S_1B_1 un Z_1B_2.
Ja svari nostājas līdzsvarā, tad, tā kā baltās bumbas atrodas katra uz sava svaru kausa, $S_1 \neq B_1$, $Z_1 \neq B_2$ un $S_1 \neq Z_1$.
Tad otrajā svēršanas reizē sveram Z_1B_1 un S_1B_2. Tagad uz katra no svaru kausiem atrodas viena smaguma bumbas: uz tā kausa, kas nosveras lejup, atrodas abas attiecīgās krāsas bumbas, bet uz otra kausa - attiecīgās krāsas vieglās bumbas. Pieņemsim, ka otrajā svēršanas reizē uz leju nosvērās svaru kauss ar bumbām S_1B_2. tas nozīmē, ka tiešā veidā esam atraduši sarkano un balto smagās bumbas, bet zaļā smagā bumba ir Z_2 (Z_1 ir vieglā, jo kauss, kurā tā atradās, pacēlās augšup).

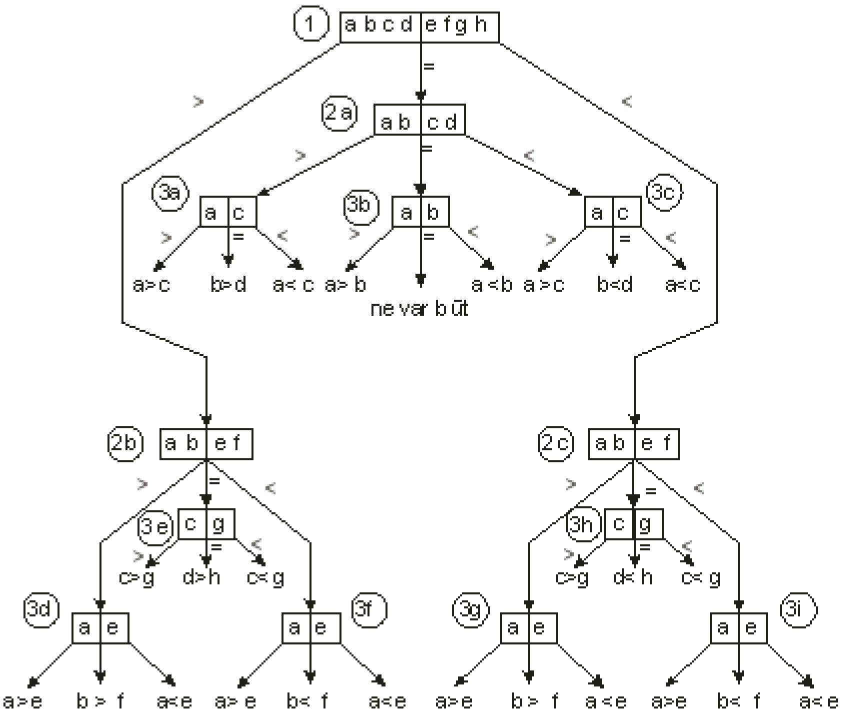
Tagad aplūkosim gadījumu, kad pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā. Varam pieņemt, ka uz leju nosvērās Z_1B_2. Tad noteikti B_1 - vieglākā un B_2 - smagākā bumba, bet S_1 nav smagāka par Z_1.

Otrajā svēršanā salīdzinām S_1Z_1 un S_2Z_2. Ja svari ir līdzsvarā, tad S_1 - vieglākā, Z_1 - smagākā bumba un viss noskaidrots. Ja S_1Z_1 nosveras uz leju, tad S_1 un Z_1 - smagās bumbas. Ja S_2Z_2 nosveras uz leju, tad S_2 un Z_2 - smagās bumbas.
Līdz ar to arī uzdevumu esam atrisinājuši. ⊗

<u>Uzdevums 4-9</u>

Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas no tām sver m gramus, bet dažas - n gramus (m≠n). Ir vismaz viena katra veida monēta. Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanām var atrast pa vienai no katra veida monētām?

●
Svēršanu gaitu attēlosim shēmā. Monētas apzīmēsim ar a, b, c, d, e, f, g, h. Katru svēršanu attēlosim kā divas rūtiņas, no kurām labajā rūtiņā ierakstīsim, kādas monētas atrodas uz labējā svaru kausa, un kreisajā rūtiņā rakstīsim, kādas monētas atrodas uz otrā svaru kausa. Katras svēršanas rezultātā var noteikt, vai svari ir līdzsvarā un, ja tas tā nav, tad uz kura svaru kausa novietoto monētu svaru summa ir lielāka. Ja svari ir līdzsvarā, tad shēmā to attēlosim ar bultu, pie kuras pierakstīta "=" zīme. Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad shēmā to attēlosim ar bultu, pie kuras pierakstīta ">", ja uz kreisā svaru kausa novietoto monētu svaru summa ir lielāka, un "<" zīme, ja uz labā kausa novietoto monētu masu summa ir lielāka.
Sanumurēsim svēršanas (attēls 4-1) - svēršanu numuri apvilkti ar aplīšiem. Aprakstīsim svēršanu gaitā izdarītos spriedumus.



attēls 4-1

<u>1</u>
Ja svari ir līdzsvarā, tad uz abiem svaru kausiem ir vienāds daudzums katra veida monētu, pie tam vismaz viena katra veida monēta. Tāpēc tālāk var apskatīt tikai tās monētas, kas atrodas uz viena no svaru kausiem. Ja svari nav līdzsvarā, tad uz abiem svaru kausiem ir dažāds daudzums katra veida monētu. Turpmāk salīdzināsim no katra svaru kausa divas monētas.

<u>2a</u>
Ja svari ir līdzsvarā, tad monētām a un b jābūt atšķirīgām, jo citādi visas monētas būtu vienādas. Ar trešo svēršanu jānoskaidro, kura no monētām a un b ir smagāka. Ja svari nav līdzsvarā, tad uz abiem svaru kausiem nav vienādi monētu komplekti. Trešajā svēršanā jāsalīdzina pa vienai monētai no katra komplekta.

<u>2b</u> un **<u>2c</u>**
Ja svari ir līdzsvarā, tad uz svaru kausiem ir vienādi monētu komplekti. Tā kā pirmajā svēršanā uz svaru kausiem nebija vienādi monētu komplekti, tad cd un gh nesatur vienādi daudz katra veida monētu. Turpmāk salīdzināsim pa vienai monētai no katra šī komplekta.
Ja svari nav līdzsvarā, tad atrasti atšķirīgi monētu komplekti un turpmāk salīdzināsim pa vienai monētai no katra atšķirīgā monētu komplekta.

Svēršanās **<u>3a</u>**, **<u>3b</u>**, **<u>3c</u>**, **<u>3d</u>**, **<u>3e</u>**, **<u>3f</u>**, **<u>3g</u>**, **<u>3h</u>**, **<u>3i</u>** uz katra svaru kausa ir viena monēta. gadījumā, ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atrastas divas atšķirīgas monētas un zināms, kura no tām ir smagāka.

<u>3a)</u> Ja svari līdzsvarā, tad a=c, bet a+b > c+d no otrās svēršanas. Tātad b > d.
<u>3b)</u> Ja svari līdzsvarā, tad a=b=c=d=e=f=g=h. Tātad svari nevar būt līdzsvarā, jo dotas divu veidu monētas.
<u>3c)</u> Ja svari līdzsvarā, tad a=c, bet a+b < c+d, tātad b un d ir atšķirīgās monētas un b < d.
<u>3d)</u> Ja svari līdzsvarā, tad a=e, bet a+b > e+f, tātad b un f ir atšķirīgās monētas un b>f.
<u>3e)</u> Ja svari ir līdzsvarā, tad c=g, bet c+d > g+h, tātad d > h.
<u>3f)</u> Ja svari ir līdzsvarā, tad a=e, bet a+b < e+f, tātad b < f.
<u>3g)</u> Ja svari ir līdzsvarā, tad a=e, bet a+b > e+f, tātad b > f.
<u>3h)</u> Ja svari ir līdzsvarā, tad c=g, bet c+d < g+h, tātad d < h.
<u>3i)</u> Ja svari ir līdzsvarā, tad a=e, bet a+b < e+f, tātad b < f. ⊗

<u>Uzdevums 4-10</u>

Dotas 64 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas no tām ir īstas (visām tām ir vienāds svars), dažas viltotas (arī tām ir vienāds svars, taču tās ir vieglākas par īstajām). Doti sviras svari bez atsvariem. Ar 6 svēršanu palīdzību uz sviras svariem bez atsvariem atrast vienu īsto un vienu viltoto monētu.

●
Ar matemātisko indukciju pierādīsim šādu no divām daļām sastāvošu apgalvojumu:
1) ja dotas 2^n monētas, starp kurām ir vismaz viena īstā un vismaz viena viltotā, tad ar n svēršanām var atrast vienu viltoto monētu;

2) ja dotas 2 kaudzes pa 2^n monētām, pie tam tādas, ka to svari atšķiras un zināms, kura kaudze vieglāka, tad arī ar n svēršanām var atrast vienu īsto un vienu viltoto monētu.

V

Indukcijas bāze

1) ja n=1, tad no 2 monētām smagāko (īsto) un vieglāko (viltoto) var noskaidrot ar 1 svēršanu;
2) ja n=1, tad ir dotas divas kaudzes A un B, pa 2 monētām katrā, pie tam kaudzes A svars mazāks par B svaru. Uzliekam uz svaru kausiem vienu monētu no kaudzes A un vienu monētu no kaudzes B. Ir divas iespējas:
a) viens svaru kauss nosveras uz leju. tātad smagākā (īstā) un vieglākā (viltotā) monēta ir atrasta;
b) svari stāv līdzsvarā. Tad malā palikusī kaudzes A monēta ir vieglāka par malā palikušo kaudzes B monētu. Atkal īstā un viltotā monētas ir atrastas;
Līdz ar to induktīvā bāze pierādīta.

Induktīvā pāreja.
Pieņemsim, ka abi mūsu apgalvojumi ir spēkā, ja n=k, t.i.
1) no kaudzes ar2^k monētām ar k svēršanām var atrast vienu īsto un vienu viltoto monētu;
2) ja dotas divas dažāda svara kaudzes ar 2^k monētām katrā un zināms, kura no tām vieglāka, tad ar k svēršanām var atrast vienu īsto un vienu viltoto monētu.
Pieņemam, ka n=k+1.
1) ja dota kaudze ar 2^{k+1} monētām, tad 1 svēršanā uz katra svaru kausa uzliek pa 2^k monētām. Ir divas iespējas:
a) svari stāv līdzsvarā. tad uz abiem svaru kausiem atrodas vienāds īsto un viltoto monētu skaits, bet, tā kā pavisam sākotnējā kaudzē ir vismaz viena īstā un vismaz viena viltotā monēta, tad arī uz katra svaru kausa ir vismaz viena īstā un vismaz viena viltotā monēta. Paņemam monētas no kreisā svaru kausa. To pavisam ir 2^k, starp tām ir vismaz viena īstā un vismaz viena viltotā monēta, tātad ar atlikušajām k svēršanām mēs varēsim atrast vismaz vienu īsto un vismaz vienu viltoto monētu. Kopā šajā gadījumā pietiek ar k+1 svēršanām;
b) viens svaru kauss nosveras lejup. Tad mums ir divas grupas pa 2^k monētām katrā, pie kam abu grupu svari ir dažādi (zināms, kura grupa smagāka, kura vieglāka). Tātad pēc induktīvā pieņēmuma arī šajā gadījumā var atrast vienu īsto un vismaz vienu viltoto monētu ar k svēršanām; kopā arī šajā gadījumā pietiek ar k+1 svēršanām.

2) ja dotas divas kaudzes pa 2^{k+1} monētām katrā un zināms, ka kaudzes A svars ir lielāks nekā kaudzei B, tad uz viena svaru kausa uzliekam 2^k kaudzes A monētas, bet uz otra kausa - 2^k kaudzes B monētas. Atkal ir divas iespējas:
a) viens svaru kauss nosveras uz leju. Bet tad mums atkal ir divas kaudzes pa 2^k monētām katrā, pie kam šo kaudžu svari ir dažādi (zināms, kura kaudze vieglāka, kura smagāka). Pēc induktīvā pieņēmuma, lai atrastu vismaz vienu īsto un vismaz vienu viltoto monētu, pietiek ar vēl k svēršanām. Tātad arī šajā gadījumā kopā pietiek ar k+1 svēršanām;
b) svaru kausi atrodas līdzsvarā. Bet tad atlikusī kaudzes A daļa no 2^k monētām ir smagāka par atlikušo kaudzes B daļu (arī no 2^k monētām). Tātad, pēc induktīvā

pieņēmuma, vēl ar k svēršanām varēs atrast vismaz vienu īsto un vismaz vienu viltoto monētu. tas nozīmē, ka arī šajā gadījumā kopā pietiek ar k+1 svēršanām.
Līdz ar to induktīvā pāreja ir pierādīta.

Uzdevuma apgalvojums tieši seko no tikko pierādītā apgalvojuma 1. punkta.
⊗

Uzdevums 4-11

Dotas 11 lodes, no kurām 2 ir radioaktīvas. Par jebkuru ložu komplektu ar vienu pārbaudi var noskaidrot, vai tajā ir radioaktīva lode (bet nevar uzzināt, cik to ir). Pierādīt, ka mazāk kā ar 7 pārbaudēm nevar garantēt abu radioaktīvo ložu atrašanu, bet ar 7 pārbaudēm tās vienmēr var atrast.

●
Mūsu uzdevums ir atrast divas īpašas lodes starp 11 ārēji vienādām. No 11 lodēm vispār var izveidot $C_{11}^2 = \dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$ dažādus vienādi iespējamus pārus. Ievērosim, ka viens starp tiem ir tāds, kurā abas lodes ir radioaktīvas, 18 pāri ir tādi, kuros ietilpst pa vienai radioaktīvai lodei, bet pārējos pāros radioaktīvo ložu nav.
Mazliet padomāsim, pēc kāda principa jāizvēlas lodes pirmajai un tālākajām pārbaudēm, lai pēc iespējas ātrāk atrastu "kaitīgās" lodes. Pārbaudot jebkuru izvēlētu ložu komplektu, dozometrs var notikšķēt vai nenotikšķēt. ja dozometrs notikšķ, tad tas nozīmē, ka starp pārbaudāmajām lodēm vismaz viena ir radioaktīva; ja dozometrs nenotikšķ, tad tas nozīmē, ka starp pārbaudāmajām lodēm radioaktīvo nav un abas radioaktīvās lodes atrodas starp vēl nepārbaudītajām lodēm. Mūsu uzdevums ir reducējams uz šādu problēmu: cik lodes jāizvēlas pārbaudei, lai pie jebkura dozometra rādījuma lodes būtu sadalītas divās grupās, no kurās ietilpstošajām lodēm varētu izveidot pēc iespējas vienādus pāru skaitus.
Ja mēs pirmajai svēršanai izvēlētos 2 lodes un dozometrs nebūtu tikšķējis, tas nozīmētu, ka abas radioaktīvās lodes atrodas starp vēl nepārbaudītajām 9 lodēm. No šīm lodēm iespējams izveidot $C_9^2 = \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ atšķirīgus, bet vienādi iespējamus ložu pārus. Tad otrajā grupa paliktu 55-36=19 vienlīdz iespējami pāri, kuri mūs vairs neinteresētu, jo nesaturētu nevienu radioaktīvo lodi. Ja pirmajai pārbaudei izvēlētos 4 lodes, tad dozometra nenotikšķēšanas gadījumā no atlikušajām 7 lodēm varam izveidot $C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ dažādus vienādi iespējamus ložu pārus, bet otrā grupā paliek 55-21=34 ložu pāri, par kuriem mēs vairs neinteresētos. Par cik dozometra tikšķēšana vai klusēšana ir vienādi varbūtiskas, tad otrās grupas izmēru nedrīkst ignorēt. Pārbaudīsim 3 lodes. Tad dozometra nenotikšķēšanas gadījumā abas radioaktīvās lodes atrodas starp vēl neaplūkotajām 8 lodēm, no kurām varam izveidot $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ dažādus vienādi iespējamus ložu pārus, bet otrā grupā paliek 55-28=27 dažādu ložu pāri. Šis ir pats optimālākais gadījums. Tātad pirmajai pārbaudei izvēlamies trīs lodes. Tālākajā risinājuma gaitā izmantosim līdzīgus spriedumus. Vēl atzīmēsim, ka gadījumos, kad būsim noskaidrojuši, ka vēl nepārbaudītajā grupā atrodas virs tikai viena radioaktīvā lode, šo atlikušo ložu kopu dalīsim uz pusēm (vai

arī divās pēc iespējas līdzīgās daļās) un pārbaudīsim vienu no pārdalītās grupas daļām. Tālāko spriedumu gaita un secība parādīta un aprakstīta nodaļās beigās pievienotajā shēmā, tāpēc to šeit vēlreiz nedarīsim.

Tagad pierādīsim, ka 11 ložu gadījumā ar mazāk nekā 7 pārbaudēm abas radioaktīvās lodes atrast nevar. Atgādināsim faktu, ka ar k pārbaudēm var sašķirot ne vairāk kā 2^k variantus. Sākumā mūsu priekšā atrodas 11 nepārbaudītas lodes. Mēs vēlamies ar 6 pārbaudēm atrast divas "kaitīgās" no šīm 11. Pēc pirmās pārbaudes mums būs atlikušas 5 pārbaudes un tas nozīmē, ka neviena no grupā, kādās pēc pirmās pārbaudes sadalīsies lodes, nedrīkst saturēt vairāk nekā 32 iespējamos ložu pārus. Tāpēc, ja pārbaudīsim vienu no 11 lodēm, tad lodes pārdalīsies zemāk redzamajā tabulā (tabula 4-1) parādītās grupās:

Ložu pāru skaits grupās, ja dozometrs:

Pārb. ložu skaits	**Tikšķ**	**Netikšķ.**
1	10	45>32
2	19	36>32
3	27	28
4	34>32	21

tabula 4-1

Tātad, ja mēs vispār ceram iztikt kopumā ar 6 pārbaudēm, tad jāpārbauda 3 lodes. Tā arī darām. Pieņemsim, ka pārbaudes rezultātā dozometrs nav tikšķējis. Tas nozīmē, ka abas radioaktīvās lodes atrodas starp vēl nepārbaudītajām 8 lodēm un no šīm 8 lodēm varam izveidot 28 līdzvērtīgus pārus. Turklāt mums vairs atlikušas tikai 5 pārbaudes. tas nozīmē, ka pēc nākošās pārbaudes atliks tikai 4. Tas, savukārt, nozīmē, ka neviens no skaitļiem, kas raksturos grupas, kādās pēc otrās pārbaudes pārdalīsies iespējamie ložu pāri, nedrīkst pārsniegt 2^4=16. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, priekš otrajā pārbaudes reizē pārbaudāmā ložu skaita, ja iepriekš dozometrs nav tikšķējis, iegūstam nākamajā tabulā (tabula 4-2) attēloto ainu:

Ložu pāru skaits grupās, ja dozometrs:

Pārb. ložu skaits	**Tikšķ**	**Netikšķ.**
1	7	21>16
2	**13**	**15**
3	18>16	10
4	22>16	6

tabula 4-2

Tātad, ja mēs vēl ceram kopumā iztikt ar 6 pārbaudēm, tad šajā variantā otrajā pārbaudē ir jāpārbauda 2 lodes. Pēc otrās pārbaudes, pieņemot, ka dozometrs nav tikšķējis, būs atlikušas 6 pārbaudāmas lodes un mūsu rīcībā būs vēl 4 pārbaudes. Tas nozīmē, ka pēc pāru pārdalīšanas kritiskais skaitlis būs 8, jo 2^3=8. Atkal spriedīsim līdzīgi kā iepriekš un centīsimies izdomāt, cik ložu jāizvēlas 3. pārbaudei, lai kopumā iztiktu ar 6 pārbaudēm. No 6 lodēm var izveidot 15 dažādus ložu pārus. Situācija, kāda rodas pēc trešās pārbaudes, redzama tabulā (tabula 4-3):

Ložu pāru skaits grupās, ja dozometrs:

Pārb. ložu skaits	Tikšķ	Netikšķ.
1	5	10>8
2	10>8	6
3	12>8	3
4	14>8	1

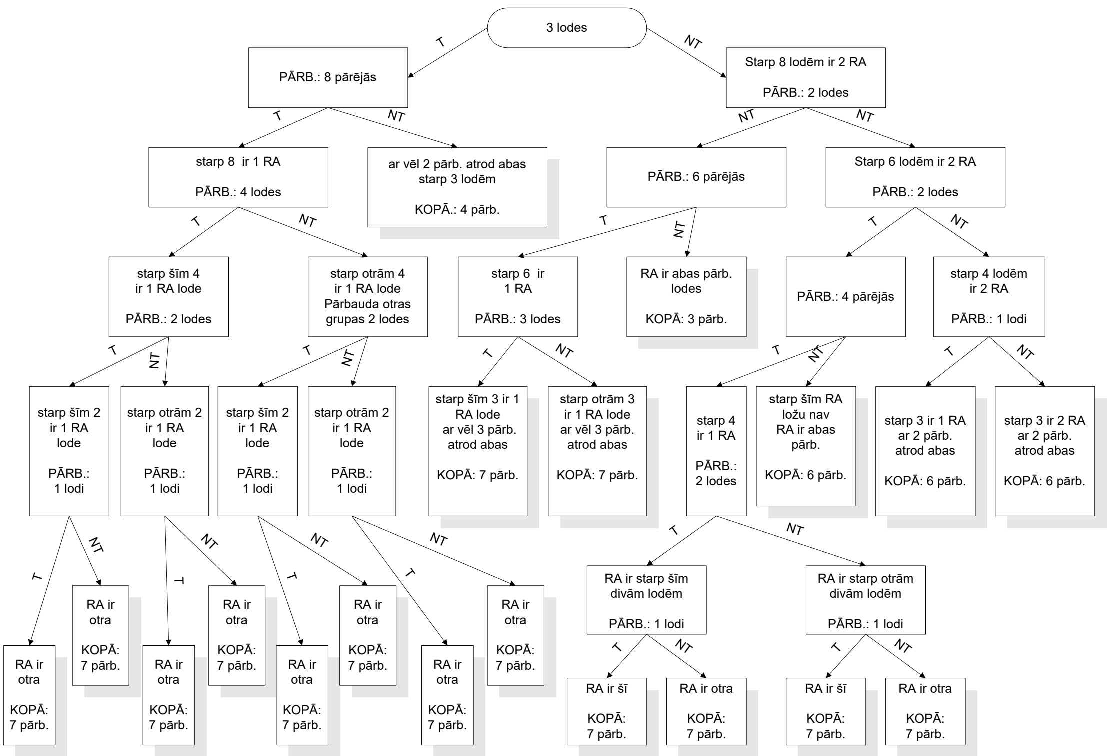
tabula 4-3

viegli redzēt, lai kā arī mēs necenstos ceturtajai pārbaudei atrast piemērotu pārbaudāmo ložu skaitu, tas neizdosies. Tātad esam pierādījuši, ka ar 6 pārbaudēm nevar garantēti atrast 2 radioaktīvas lodes starp 11 pēc ārējā izskata vienādām lodēm. ⊗

<u>Uzdevums 4-12</u>

Dotas 19 lodes, no kurām 2 ir radioaktīvas. Par jebkuru ložu komplektu ar vienu pārbaudi var noskaidrot, vai tajā atrodas kaut vai viena radioaktīva lode (bet nevar uzzināt, cik to ir). Pierādīt, ka mazāk nekā ar 8 pārbaudēm nevar garantēt abu radioaktīvo ložu atrašanu, bet ar 8 pārbaudēm tās vienmēr var atrast.

●
Šajā uzdevumā izmantojamie spriedumi ir pilnīgi analogi iepriekšējā uzdevumā (<u>Uzdevums 4-11</u>) izmantotajiem, tādēļ tos šeit vēlreiz neatkārtosim. (izmantojams arī attēls 4-2). ⊗



attēls 4-2

5. NODAĻA

UZDEVUMI, KUROS PRASĪTS IEGŪT INFORMĀCIJU PAR ATŠĶIRĪGIEM OBJEKTIEM, NEVIS TOS ATRAST

Šajā nodaļā paskatīsimies, kā izmantojot vispārīgus faktus, varam noskaidrot veselu pētāmo objektu kopu īpašības, to skaitu un pat pamēģināsim sastādīt “biznesa plānu”.

Uzdevums 5-1

Daži no 20 pēc ārējā izskata metāla klucīšiem ir alumīnija, bet citi - duralumīnija (t.i. nedaudz smagāki). Kā ar ne vairāk kā 11 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem noteikt alumīnija klucīšu skaitu? (Tiek pieņemts, ka visi klucīši var būt no alumīnija, bet visi nevar būt no duralumīnija.)

●

Pirmajā svēršanā uz svaru kausiem noliksim pa vienam klucītim. Pastāv divas iespējas:
10 viens kauss nosveras uz leju. Tas nozīmē, ka viens no svērtajiem klucīšiem ir smagāks - tātad duralumīnija, bet otrs - vieglāks - alumīnija. Tad otrajā svēršanā uz viena svaru kausa liekam šos abus klucīšus (turpmāk sauksim šo pāri par *etalonpoāri*), bet uz otra svaru kausa pēc kārtas liksim pa pāriem sadalītus atlikušos 18 klucīšus (kā šie 18 klucīši pāros tiek sadalīti, nav svarīgi). Ja kāds pāris pārsver etalonpāri, tad tas nozīmē, ka šī pāra abi klucīši ir duralumīnija; ja nosveras kauss ar etalonpāri, tad kļūst skaidrs, ka uz otra kausa atrodas klucīši no alumīnija. ja gadījumā svaru kausi nostājas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka ar etalonpāri ir salīdzināti divu tipu klucīši. tādā veidā šajā gadījumā duralumīnija klucīšu skaitu mēs varam noteikt ar 10 svēršanām;
2) pirmajā svēršanas reizē iestājas līdzsvars. Tādā gadījumā abi klucīši ir viena tipa: abi vai nu ir alumīnija, vai duralumīnija. tad abus šos klucīšus liekam uz svaru viena kausa, bet uz otra kausa, līdzīgi kā pirmajā gadījumā, vienu klucīšu pāri no 18 atlikušajiem klucīšiem. Pieņemsim, ka pirmie k no šiem pāriem izrādījās pēc svara vienādi ar pirmās svēršanas laikā svērtajiem klucīšiem, bet (k+1)-ais pāris ir ar citu svaru (ja k=9, tad tas nozīmē, ka visiem klucīšiem ir vienāds svars, tātad tie ir no alumīnija; gadījums k=0 ne ar ko neatšķiras no vispārīgā gadījuma). Noteiktības labad pieņemsim, ka (k+1)-ais pāris izrādījies smagāks par pirmajiem diviem klucīšiem (spriedumi daudz nemainītos, ja pieņemtu, ka (k+1)-ais pāris būtu izrādījies vieglāks). Tādā gadījumā pirmie divi klucīši, un tātad arī pirmo k pāru klucīši, noteikti ir no alumīnija. Uz doto brīdi pagaidām esam veikuši 1+(k+1)=k+2 svēršanas un esam noskaidrojuši, ka k+1 alumīnija klucīšu pāri. Tagad uz svaru kausiem noliksim pa klucītim no pēdējā nosvērtā pāra ((k+3)- ā svēršana). Ja izrādīsies, ka abi sver vienādi, tad tiem ir jābūt no duralumīnija; pretējā gadījumā viens n viņiem ir no alumīnija, bet otrs - no duralumīnija. Abos gadījumos mēs pēc k+3 svēršanām varam uzrādīt tādu klucīšu pāri, no kuriem viens ir alumīnija, bet otrs ir duralumīnija klucītis. Ar šī pāra palīdzību mēs 8-k svēršanām noteiksim duralumīnija klucīšu skaitu pēc jau pirmajā gadījumā aprakstītās metodes. Kopējais svēršanu skaits otrajā gadījumā ir vienāds ar k+3+(8-k)=11. ⊗

<u>Uzdevums 5-2</u>

Dotas 1000 monētas, no kurām 0, 1 vai 2 ir viltotas. Zināms, ka viltotajām monētām ir vienāda masa, kas ir atšķirīga no īsto monētu masas. Vai ar 3 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem pietiek, lai noskaidrotu: vai ir viltotās monētas un vai tās ir vieglākas vai smagākas par īstajām? Viltoto monētu skaitu noteikt nevajag.

●

Sadalīsim visas monētas 4 daļās pa 250 katrā. Apzīmēsim šīs daļas ar burtiem A, B, C, D.
Pirmajā svēršanā nosvērsim A un B. Vispirms pieņemsim ka A=B. Tas nozīmē, ka vai nu šajās daļās viltoto monētu nav vispār, vai arī katrā no tām atrodas pa vienai viltotai monētai. Tāpēc otrās svēršanas reizē salīdzināsim B ar C.
Ja B=C, tad kļūst skaidrs, ka grupas A, B un C viltoto monētu nav un ar trešo svēršanu salīdzinām C ar D. Ja arī šoreiz svari nostājas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka viltot monētu vispār nav. Ja svari nosveras, tad skaidrs, ka viltotās monētas (vai monēta) atrodas grupā D un tās (tā) ir smagākas (a), ja kauss, uz kura atradās grupa D, nosvērās uz leju; pretējā gadījumā viltotās (-ā) monētas (-a) ir vieglākas (-a) par pārējām;
Ja B $\neq$ C, tad tas nozīmē, ka grupas A un B ir vai nu pa vienai viltotai monētai katrā, vai arī grupā C ir vismaz viena viltota monēta. lai to noskaidrotu, sadalīsim grupu A uz pusēm un ar trešo svēršanu salīdzināsim abas šīs grupas A daļas savā starpā. Ja svari paliks līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka viltotā monēta (vai viltotās monētas) atrodas kopā C. Šīs monētas tipu tas, kādā virzienā otrajā svēršanas reizē pārvietojās kauss, uz kura tika uzliktas grupas C monētas: ja tas nosvērās uz leju, tad viltotā monēta ir smagāka par īsto monētu, bet, ja otrās svēršanas laikā tas pacēlās uz augšu, tad viltotā monēta ir vieglāka par īsto. Savukārt, ja trešās svēršanas rezultātā svari nesaglabā līdzsvara stāvokli, tad skaidrs, ka grupas A un B ir pa vienai viltotai monētai. Viltotās monētas tipu šajā gadījumā noteiksim atkarībā no tā, kādā stāvoklī atradās svaru kauss ar grupas B monētām pēc otrās svēršanas: ja šis kauss nosvērās uz leju, tad viltotā monēta ir smagāka par īsto, bet, ja pacēlās uz augšu, tad viltotā monēta ir vieglāk apar īsto monētu.
Citi svēršanu rezultāti ir reducējami uz šiem diviem gadījumiem, tāpēc tos tuvāk neapskatīsim. ⊗

<u>Uzdevums 5-3</u>

Starp 102 monētām 2 ir viltotas - no īstajām tās atšķiras pēc svara. Zināms, ka visas īstās monētas sver vienādi, tāpat kā abas viltotās. Ar trim svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrojiet, kas smagāks - īstā vai viltotā monēta?

●

Izveidosim trīs monētu kaudzītes pa 34 monētām katrā un salīdzināsim pirmās un otrās kaudzītes svaru, bet pēc tam otrās un trešās kaudzītes svaru. Skaidrs, ka tie visi nevar būt vienādi. Pieņemsim, ka pirmajā svēršanā kaudzīšu svars ir atšķirīgs, bet otrajā vienāds un noteiktības labad uzskatīsim, ka pirmā kaudzīte ir smagāka. Tad vai nu otrajā un trešajā visas monētas ir īstas un viltotā monēta ir smagāka par īsto, vai arī abās šajās kaudzītēs atrodas pa vienai viltotai monētai un tā ir vieglāka par īsto monētu.

Atliek noskaidrot, vai trešajā kaudzītē ir viltotā monēta, ko var izdarīt sadalot to uz pusēm un salīdzinot šo pušu svarus (katrā pa 17 monētām). Citi gadījumi tiek aplūkoti analogi. ⊗

<u>Uzdevums 5-4</u>

Dota 101 monēta. No tām 100 ir vienādas īstas un viena - viltotā, kas no īstajām atšķiras ar masu. Jānoskaidro, vai tā ir smagāka vai vieglāka par īstajām monētām. Kā to izdarīt ar sviras svaru bez atsvariem palīdzību, lietojot svarus tikai 2 reizes?

●

Vienu monētu atliek malā, bet atlikušās 100 monētas sadala kaudzītēs pa 50 un uzliek kaudzītes katru uz sava svaru kausa.
Ja svari līdzsvarā, tad malā atliktā monēta ir viltota un ar nākošo svēršanu, salīdzinot atlikto monētu ar kādu no tām, kas atradās uz svariem pirmajā svēršanā, nosakām - vai viltotā monēta ir vieglāka vai smagāka par īsto.
Ja pirmajā svēršanas reizē svari nav līdzsvarā, tad rīkojas sekojoši: noņem no svaru kausa smagāko kaudzīti, bet uz svariem atlikušās monētas sadala divas kaudzītēs pa 25 monētām katrā un salīdzina otrajā svēršanā. ja svari līdzsvarā, tad viltotās monētas starp šīm 50 nav, t.i. tā atrodas starp malā noliktajām 50 monētām un turklāt tā ir smagāka par īstajām. Pretējā gadījumā - ja otrajā svēršanā svari atkal nav līdzsvarā, tad viltotā monēta ir vieglāka par īsto un atrodas uz tā svaru kausa, kas otrajā svēršanas reizē pacēlās uz augšu. ⊗

<u>Uzdevums 5-5</u>

Dotas 2000 monētas, no kurām divas ir viltotas: viena - vieglāka, bet otra - smagāka par īsto monētu. Kā ar 4 svēršanu uz sviras svariem bez atsvariem palīdzību noskaidrot, kas smagāks - abu viltoto monētu kopējais svars vai divu īsto monētu svars, vai arī šādu pāru svars ir vienāds?

●

Sadalīsim monētas 4 grupās pa 500 monētām un ar A_1, A_2, A_3 un A_4 apzīmēsim šo monētu summāro svaru šajās grupās. Pietiekami apskatīt 3 gadījumus.

1) $A_1=A_2$, $A_3=A_4$. Tad abas viltotās monētas atrodas vienā grupā un to summārais svars vienāds ar divu īsto monētu summāro svaru. Šajā gadījumā pietiek ar divām svēršanām;

2) $A_1=A_2$, $A_3>A_4$. tad abas viltotās monētas atrodas starp trešās un ceturtās grupas monētām. Vienā grupā apvienojot pirmās un otrās grupas monētas un otrā grupā apvienojot trešās un ceturtās grupas monētas, salīdzina jaunizveidoto grupu monētu summāro svaru. Tādējādi iegūstam atbildi uz uzdevuma jautājumu: ja svari atkal būs līdzsvarā, tad divu īsto un divu viltoto monētu summārais svars ir vienāds, ja svari nav līdzsvarā, tad atkarībā no tā, kurš svaru kauss pārsvēries, pateiksim atbildi;

3) $A_1>A_2$, $A_3>A_4$. Šajā gadījumā pastāv divas iespējas: vai nu smagākā monēta atrodas pirmajā grupā, bet vieglākā - ceturtajā, vai arī smagākā atrodas trešajā un vieglākā - otrajā grupā.
Salīdzinot A_1 ar A_4, uzzināsim, kura no iespējām realizējas patiesībā: ja A1 = A4, tad smagākā monēta ir grupā A_3, bet vieglākā - A_2; ja $A_1>A_4$, tad smagākā monēta atrodas grupā A_1, bet vieglāka - grupā A_4. Pēc tam, salīdzinot A_1+A_4 ar A_2+A_3, iegūsim atbildi uz uzdevuma jautājumu. Šajā gadījumā vajag izpildīt 4 svēršanas. ⊗

Uzdevums 5-6

Dotas 8 monētas, no kurām 2 ir viltotas: viena vieglāka, bet otra - smagāka par īsto monētu. Vai ar 3 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot, kas smagāks - 3 viltotās monētas vai 2 īstās, vai arī šādu pāru svars ir vienāds?

●
Apzīmēsim dotās monētas ar burtiem A, B,C, D, E, F, G, H. Faktu, ka monēta X ir smagāka par monētu Y, pierakstīsim šādi: X>Y. Ja sveramajām monētām (monētu grupām) svars būs vienāds, to pierakstīsim X=Y.

Veiksim trīs sekojošas svēršanas, grupējot monētas pa pāriem:
AB CD salīdzināsim ar EF GH
AB EF salīdzināsim ar CD GH
ABGH salīdzināsim ar CD EF.

*) Ja kaut vienā no svēršanām iestājas līdzsvars, tad tas nozīmē, ka divas īstās monētas sver vienādi ar divām viltotajām.
*) Ja līdzsvars neiestājas nevienā svēršanas reizē, tad iespējami divi principiāli atšķirīgi gadījumi:

A gadījums

AB CD > EF GH
AB EF > CD GH
ABGH > CD EF
(viens pāris - šai gadījumā AB - vienmēr ir uz smagākā svaru kausa)

B gadījums

AB CD > EF GH
AB EF > CD GH
ABGH < CD EF
(katrs pāris gan “uzvar”, gan “zaudē”).

A gadījumā vai nu abas viltotās monētas atrodas pārī AB, vai arī pārī AB atrodas tikai smagākā no viltotajām monētām, taču neatkarīgi no tā, kurš variants ir patiess (jo viltoto monētu atrašana nav prasīta), skaidrs, ka abas viltotās monētas kopā sver vairāk par divām īstajām monētām.

B gadījumā vispirms atzīmēsim, ka abu viltoto monētu kopējais svars nevar būt vienāds ar divu īsto monētu kopējo svaru. Tiešām, katras divas monētas vismaz vienā no mūsu aplūkotajām 3 svēršanām nonāk kopā uz viena svaru kausa, un tad svariem būtu jābūt līdzsvarā.

Pieņemsim, ka viltotās monētas kopā sver vairāk par divām īstajām. Katrai iespējai (A - smagākā, B - vieglākā; A - smagākā, C - vieglākā, utt.) viegli atrast vienu vai divas no izdarītajām svēršanām, kuras (vai kuru kopā ņemti) rezultāts (rezultāti) ir pretrunā ar šo pieņēmumu.
Tātad B gadījumā viltotās monētas kopā sver mazāk par 2 īstajām.

Citi svēršanu rezultāti ir reducējami uz jau aplūkotajiem gadījumiem, tāpēc tos šeit neaplūkosim. ⊗

Uzdevums 5-7

Sprīdītim ir 8 dažādi zelta gabali un sviras svari bez atsvariem. Sprīdītis grib noskaidrot, vai taisnība, ka jebkuri divi zelta gabali kopā ir smagāki par jebkuru atsevišķi ņemtu trešo. Kā viņš to var izdarīt, izmantojot 13 svēršanas?

●

Acīmredzot Sprīdītim pietiek noskaidrot, vai abi vieglākie zelta gabali kopā ir smagāki par vissmagāko.
Vispirms Sprīdītis sadala zelta gabalus pa pāriem un salīdzina katrā pārī ietilpstošos zelta gabalus savā starpā. tiek patērētas 4 svēršanas.
No tiem 4 zelta gabaliem, kas savos pāros izrādījušies smagākie, Sprīdītis, rīkojoties tā, kā aprakstīts 1.1 punktā, ar 3 svēršanām atrod smagāko zelta gabalu. Šis zelta gabals ir arī smagākais no visiem astoņiem.
Tos zelta gabalus, kas savos pāros izrādījušies vieglākie, apvienojam pa pāriem un katrā jaunajā pārī atrodam vieglāko; pēc tam atrodam vieglāko no šādi atrastajiem diviem zelta gabaliem. Tas ir arī vieglākais zelta gabals no visiem astoņiem. Tā atrašanai patērētas vēl 3 svēršanas; Apzīmēsim šo zelta gabalu ar V.
Līdzšinējā procesā V salīdzināts ar trim citiem zelta gabaliem; Apzīmēsim tos ar A, B, C. Katrs cits zelta gabals, izņemot A, B, C, līdzšinējās svēršanās izrādījies smagāks par vēl kādu citu zelta gabalu bez V, tātad nevar būt otrs vieglākais. Tāpēc otrs vieglākais zelta gabals ir vieglākais no A, B un C; to varam atrast ar 2 svēršanām.
Gan smagākais, gan abi vieglākie zelta gabali ir atrasti un kopā patērētas 4+3+3+2=12 svēršanas. Ar 13. svēršanu Sprīdītis noskaidro, vai abi vieglākie zelta gabali kopā ir smagāki par pašu smagāko no visiem zelta gabaliem un tādējādi uzdevums ir atrisināts. ⊗

Uzdevums 5-8

Dotas n (n>2) pēc ārējā skata vienādas monētas, kuru masas visas ir dažādas, un sviras svari bez atsvariem. Jānis norāda Pēterim uz divām monētām. Kā Pēteris ar 2n-4 svēršanām var noskaidrot, vai abas Jāņa norādītās monētas atrastos blakus, ja visas monētas tiktu izvietotas virknē masu pieaugšanas secībā?

●

Pēteris salīdzina katru no Jāņa norādītajām monētām ar katru no tām n-2, uz kurām Jānis nav norādījis. Ja pirmā Jāņa norādītā monēta ir vieglāka par tieši tām pašām "pārējām" monētām, par kurām vieglāka otrā Jāņa norādītā monēta , tad tās virknē atrastos blakus, pretēja gadījumā - nē.
Komentārs. Var pierādīt, ka 2n-4 ir mazākais iespējamais svēršanu skaits minētā jautājuma noskaidrošanai. Visi mums zināmie pierādījumi ir ļoti gari un sarežģīti. ⊗

Uzdevums 5-9

Mūsu rīcībā ir 37 dārgakmeņi, tieši 1 no kuriem ir radioaktīvs, bet mēs nezinām - kurš. Katru ne radioaktīvu dārgakmeni var pārdot par 1 dālderi. Ar vienu pārbaudi par jebkuru dārgakmeņu kaudzīti var uzzināt, vai tajā ir vai nav radioaktīvais dārgakmens, bet ja tāds ir, tad visi pārbaudītās kaudzītes dārgakmeni kļūst radioaktīvi. Bez tam viena pārbaude arī izmaksā 1 dālderi. Piedāvāt pārdošanai radioaktīvos dārgakmeņus nedrīkst. Izstrādājiet modeli, kas ļauj mums nopelnīt vismaz 28 dālderus.

●

Sadalām dārgakmeņus 8 kaudzītēs: 37=8+7+6+5+4+3+2+2. Pārbaudām 1., 2., ..., 7. kaudzīti, kamēr atrodam radioaktīvu (ja vispār atrodam). Ja i-tajā pārbaudē atrodam radioaktīvu kaudzīti, tad esam iztērējuši i dālderus un nevaram pārdot šajā kaudzītē esošos 9-i dārgakmeņus; tātad, pārdodot visus pārējos, peļņa būs [37-(9-i)]-i = 28 dālderi.
Ja 7 kaudzītēs radioaktīvu dārgakmeņu nav, pārdodam tās. Tīrā peļņa būs 35-7=28 dālderi. ⊗

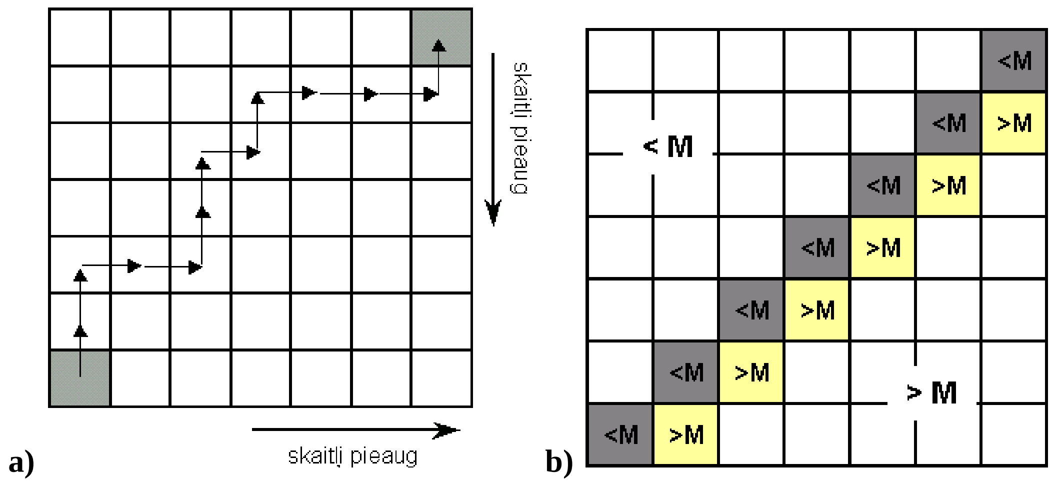
Uzdevums 5-10

Kvadrāts sastāv no nxn rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Bez tam zināms, ka katrā kolonnā skaitļi pieaug no augšas uz leju un katrā rindiņā - no kreisās uz labo pusi. Ar vienu jautājumu par jebkuru rūtiņu mēs varam uzzināt, kāds skaitlis tajā ierakstīts. Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru garantēti var uzzināt, vai tabulā ierakstīts skaitlis M?

●

Lai noskaidrotu, vai tabulā ir vai nav ierakstīts skaitlis M, rīkojamies sekojoši: vispirms pajautāsim par to, kāds skaitlis ierakstīts mūsu kvadrāta apakšējā kreisajā rūtiņā. Ja nosauktais skaitlis būs M, tad uzdevumu jau būsim atrisinājuši. ja nosauktais skaitlis nav M, tad tālāk jārīkojas atkarībā no tā, vai skaitlis, ko mums nosauca, ir lielāks vai mazāks par M. Ja nosauktais skaitlis ir lielāks par M, tad, tā kā skaitļi pieaug no augšas uz leju un no kreisās uz labo pusi, mums jājautā par skaitli, kas atrodas vienu rūtiņu virs jau aptaujātās rūtiņas. Ja nosauktais skaitlis ir mazāks par M, tad mums "jādodas" skaitļu pieaugšanas virzienā, t.i. pa labi no jau aptaujātās rūtiņas. Tā turpinām darīt, līdz atrodam skaitli M, vai arī atrodamies kvadrāta labajā augšējā stūrī un, ja tur ierakstītais skaitlis nav M, esam spiesti konstatēt, ka skaitļa M starp tabulā ierakstītajiem vispār nav. Šim procesam vajadzēs ne vairāk kā 2n-1 jautājumus. Risinājuma shematiska gaita attēlota zemāk redzamajā attēlā (attēls 5-1 a).

Tagad pierādīsim, ka ar mazāk kā ar 2n-1 jautājumiem nevar garantēti pateikt, vai skaitlis M ir vai nav starp tabulā ierakstītajiem. Pieņemsim, ka "no absolūti drošiem avotiem" mums kļuvis zināms, ka skaitlis M noteikti nav starp skaitļiem, kas neatrodas uz iezīmētās diagonāles (attēls 5-1 b). Turklāt mums tapis zināms, ka visi skaitļi, kas atrodas pa kreisi no diagonāles, ir mazāki par M, bet tie skaitļi, kas ierakstīti pa labi no tās, ir lielāki par M. Pieņemsim, ka vienmēr, kad mēs jautājam par tumšāk iezīmētajām rūtiņām, mums atbild, ka tur ierakstītais skaitlis ir mazāks par M, bet, ja mēs interesējamies par gaišāk iezīmēto rūtiņu skaitļiem, tad mums vienmēr atbild, ka tur ierakstītais skaitlis ir lielāks par M. Atzīmēsim, ka šāds pieņēmums nav pretrunā ar uzdevuma noteikumiem. Turklāt nav grūti saprast, ka tad, ja kaut viena ni šīm 2n-1 rūtiņām paliek neaptaujāta, mēs nekādi nevaram pateikt, vai tur ierakstītais skaitlis ir vai nav vienāds ar M. Tātad, lai veiktu uzdevumā prasīto, ļaunākajā gadījumā mums jārēķinās ar 2n-1 jautājumu. ⊗



attēls 5-1

6. NODAĻA

KURĀ TIEK STĀSTĪTS PAR NAUDAS MAISIEM ...

Līdz šim esam sastapušies ar uzdevumiem, kuros katra monēta bija pārstāvēta vienā eksemplārā. Šajā nodaļā apskatītajos uzdevumos situācija būs citāda. Kā galvenais ierocis tiks izmantotas dažādas pozicionālās skaitīšanas sistēmas.
Visos uzdevumos uzskatām, ka katra tipa monētas ir pieejamas neierobežotā skaitā.

Uzdevums 6-1

Doti 10 maisi ar monētām. Viens no tiem pilns ar viltotām monētām, kuras ir par 1g vieglākas nekā īstās. Ar vienu svēršanu uz sviras svariem ar bultiņu, kas rāda uz svaru kausiem uzlikto masu starpību, nosakiet viltoto maisu.

●
Sadalīsim maisus 2 grupās pa 5 maisiem katrā un katrā grupā sanumurēsim maisus ar skaitļiem no 1 līdz 5. Tad no katras grupas maisa paņemsim tik monētas, cik liels ir attiecīgā maisa numurs, un uzliksim šādi atlasītās katras grupas monētas uz svariem (katras grupas monētas uz sava svaru kausa). Viens kauss noteikti būs vieglāks. Pieņemsim, ka tas ir kreisais kauss. Tas nozīmē, ka vismaz viena viltotā monēta atrodas uz kreisā kausa To, kurā maisā precīzi atrodas viltotās monētas, parādīs svaru bultiņa: ja svaru starpība starp kausiem ir 1g, tas nozīmē, ka viltoto monētu maiss ir ar numuru 1 un atrodas tajā grupā, no kuras ņemtas monētas priekš kreisā svaru kausa. Ja svaru starpība starp kausiem ir 2g, tad viltotās monētas ir maisā ar uzrakstu 2, utt.
⊗

Uzdevums 6-2

Doti 11 maisi ar monētām un svari ar diviem kausiem un bultiņu, kas parāda, uz kura no kausiem svars ir lielāks un par cik. Zināms, ka vienā maisā visas monētas ir viltotas, bet visos pārējos - īstas. Visām īstajām monētām ir vienāda masa. Visām viltotajām monētām masa arī ir vienāda, bet cita. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu pietiek, lai noskaidrotu, kurā maisā ir viltotās monētas?

●
Parādīsim, kā ar 3 svēršanām atrast viltoto monētu maisu.
Maisus sanumurēsim ar skaitļiem no 1 līdz 11. No katra maisa paņemsim pa vienai monētai un visas uzliksim uz viena svaru kausa, otru kasu atstājot brīvu. Tā mēs uzzināsim uz svaru kausa uzlikto monētu kopējo masu. Svaru uzrādītais skaitlis ir pierakstāms šādi:

$11a + d = A$, (1)

kur d - starpība starp īsto un viltot monētu, bet a - īstās monētas masa. Patreiz esam veikuši vienu svēršanu.
Otrajai svēršanai monētas izvēlēsimies pēc principa: no pirmā maisa ņemsim vienu monētu, no otrā - divas, no trešā - trīs, utt., no maisa ar numuru 11 ņemsim 11 monētas un līdzīgi kā iepriekšējā svēršanā, noskaidrosim šādi izvēlētas monētu kopas

kopējo masu. Šo skaitli apzīmējot ar B un ievērojot, ka kopā pavisam esam paņēmuši 66 monētas, iegūto rezultātu varam pierakstīt sekojoši:

$66a + kd = B$, (2)

kur k - no viltoto monētu maisa paņemto monētu skaits (un arī viltoto monētu maisa numurs).
No otras puses, ievērojot vienādību (1), varam rakstīt, ka

$66a + 6d = 6A$. (3)

Atņemot no vienādības (2) vienādību (3), iegūstam

$(k-6)d = B- 6A$. (4)

Trešajai svēršanas reizei monētas izvēlēsimies šādi: no pirmā maisa ņemsim vienu monētu, no otrā maisa - $2^2=4$ monētas, no trešā maisa - $3^2=9$ monētas, utt. no 11 maisa ņemsim $11^2=121$ monētu (pavisam kopā 506 monētas). Tad, spriežot līdzīgi kā pēc otrās svēršanas, iegūsim sakarības

$506a + k^2d = C$ (5)
$506a + 46d = 46A$, (6)

no kurienes iegūstam

$(k^2-46)d - C-46A$. (7)

Aplūkojot vienā vienādojumu sistēmā vienādības (4) un (7), varam noteikt k (un arī d).

Vēl atlicis parādīt, ka ar divām svēršanām viltotā maisa atrašanai nepietiek. Pieņemsim, ka pirmajai svēršanai esam izvēlējušies monētas pēc likuma: $n_1, n_2, ..., n_k$ un svari rādījuši kaut kādu noteiktu skaitli A. Tāpat pieņemsim, ka otrajai svēršanai monētas izvēlētas pēc kaut kāda likuma $m_1, m_2, ..., m_k$ un svaru uzrādītā šādi izvēlētu monētu kopējā masa ir bijusi B.
Tad varam izveidot sekojošu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} (n_1 + ...n_k)a + n_i d = A \\ (m_1 + ... + m_k) + m_i d = B \end{cases}$$

kur a - īstās monētas masa, bet n_i un m_i - no nezināmā (i-tā) viltoto monētu maisa paņemto monētu skaits, kur i nav zināms.
Ja ar divām svēršanām viennozīmīgi varētu noteikt viltoto monētu maisu, tad šai sistēmai būtu jāeksistē atrisinājuma pie viena vienīga i. Tas nozīmē, ka ar citām i vērtībām sistēmai vai nu nav atrisinājuma, vai arī to ir vairāki. Tas nozīmē, ka šai vienādojumu sistēmai atbilstošajam sistēmas determinantam būtu jābūt vienādam ar nulli, izņemot vienu vienīgu i vērtību, t.i.

$$\begin{vmatrix} n_1 + ... n_k & n_i \\ m_1 + ... + m_k & m_i \end{vmatrix} = 0$$

pie visiem i, izņemot vienu (pieņemsim, k-to).
Tas iespējams tikai tad, ja rindiņas ir proporcionālas, t.i.

$(n_1+...+n_k) = \alpha\,(m_1+...+m_k)$ (1*)
$n_1 = \alpha\, m_1$, $n_2 = \alpha m_2$, ..., $n_{k-1} = \alpha\, m_{k-1}$ (2*)

Saskaitot visas k-1 (2*) vienādības un atņemot no (1*), iegūstam, ka arī $n_k = \alpha\, m_k$, kas nozīmē, ka arī šis viens atlikušais paņemtais pāris ir proporcionāls. Līdz ar to ar divām svēršanām nevar pietikt. ⊗

Uzdevums 6-3

Doti N maisi un katrā no tiem ir pietiekams monētu daudzums. Visos maisos, izņemot vienu, atrodas "normālas" monētas, bet vienā maisā visas monētas ir viltotas. Zināms, ka viltotās monētas svars ir par 1 g mazāks kā īstās monētas svars. Ar 1 svēršanu uz sviru svariem ar atsvariem palīdzību jānoskaidro, kurš ir maiss ar viltotajām monētām.

●
Sanumurēsim visus maisus ar skaitļiem no 1 līdz N un no katra maisa paņemsim tik monētas, cik liels ir atbilstošā maisa numurs. Visu šo monētu kopējā masa līdz tādam pat patieso monētu svaram būs nepietiekama tieši par tādu skaitu gramu, kāds ir tā maisa numurs, kurā atrodas viltotās monētas. ⊗

Uzdevums 6-4

Ir doti 10 maisi. Daži no tiem pilnībā piebērti ar viltotām monētām, bet visas pārējās monētas ir īstas. Viltotā monēta ir par 1g vieglāka nekā īstā. Par vienu maisu precīzi zināms, ka tur monētas ir īstas. Ar vienu svēršanu uz sviras svariem ar bultiņu nosakiet visus viltotos maisus.

●
Sanumurēsim maisus ar skaitļiem no 0 līdz 9. Monētas uz svariem liksim pēc šāda likuma: uz kreisā kausa vienu īsto monētu, uz labā kausa vienu monētu no 0-tā maisa; uz kreisā kausa 10 īstas monētas, bet uz labā - 10 no maisa ar numuru viens, utt., līdz uz kreisā kausa būs jāuzliek 10^9 īstas monētas, bet uz labā - 10^9 monētas no maisa ar numuru 9.
Pēc tam svari parādīs par cik gramiem uz svariem uzlikto monētu kopējā masas atšķiras no masas, kāda būtu, ja arī uz labā kausa būtu uzliktas tikai īstas monētas. Šis rādītājs būs desmitciparu skaitlis, kas sastāv no 0 un 1. Tās šķiras, kurās atradīsies 1, arī parādīs viltot monētu maisus. ⊗

Uzdevums 6-5

Ir N zeltkaļi. Daži no tiem izgatavo tikai viltotas monētas, daži - tikai īstas. Viltotās monētas svars ir atšķirīgs no īstā monētas svara. Visas viltotās monētas sver vienādi, visas īstās - arī. Ir doti svari ar pilnu atsvaru komplektu un viena garantēti īsta monēta. No katra zeltkaļa var paņemt cik patīk daudz monētu. Kā ar 3 svēršanu palīdzību noskaidrot visus naudas viltotājus? (Monētu svarus izsaka vesels skaits gramu).

●

Rīkojamies sekojoši: pirmajai svēršanai no katra zeltkaļa paņemam pa vienai monētai. Pieņemsim, ka no i-tā zeltkaļa paņemtās monētas masa ir m_i. Tad pirmās svēršanas rezultātu varam pierakstīt sekojoši: $\underline{m_1+m_2+...+m_N=S}$, kur S ir visu paņemto N monētu kopējā masa.

Skaidrs, ka ne īstās, ne arī viltotās monētas nesver vairāk par S. Otrās svēršanas reizē monētas izvēlamies pēc sekojoša principa: no pirmā zeltkaļa paņemam 1 monētu, no otrā zeltkaļa paņemam (S+1) monētu, no trešā $(S+1)^2$, utt., no N-tā zeltkaļa paņemam $(S+1)^{N-1}$ monētas. Nosveram visas šādi izvēlētas monētas. Iegūtais rezultāts pierakstāms formā $\underline{R=m_1+m_2(S+1)+m_3(S+1)^2+...+m_N(S+1)^{N-1}}$. Pierakstot skaitli R pozicionālajā skaitīšanas sistēmā ar bāzi (S+1), iegūstam skaitli, kura pierakstā kā koeficienti būs divi atšķirīgi cipari. Viens no tiem norādīs, ka zeltkalis, kura numurs ir par viens lielāks nekā kāpinātājs pie attiecīgās (S+1) pakāpes, ir kalis īstas monētas, bet otrs koeficients norādīs uz zeltkaļu numuriem, kuri sodāmi par blēdīšanos. Lai noskaidrotu, kurš koeficients u kuru zeltkaļu tipu norāda, trešās svēršanas rezultātā salīdzināsim garantēti īsto monētu ar vienalga kura zeltkaļa ražotu monētu (šoreiz atsvarus neizmantojam). Pieņemsim, ka svari nostāsies līdzsvarā. Tad skaidrs, ka šis zeltkalis un visi citi zeltkaļi, kurus raksturojošais koeficients ir tāds pats kā "etalonmeistaram", ražo īstas monētas, bet pārējie ir blēži. ⊗

Uzdevums 6-6

Doti N maisi ar monētām. Starp šiem N maisiem ir daži (nav zināms - cik) tādi, kuros ir smagākas monētas, un daži (tāpat nav zināms - cik), kuros ir vieglākas monētas par īstajām. Smagā monēta ir 1g smagāka par īsto, bet vieglā - 1g vieglāka par īsto monētu. Ar vienas svēršanas palīdzību uz sviras svariem ar atsvariem jānoskaidro, kuros maisos ir normālās, kuros - vieglākās un kuros - smagākās monētas. Vienā maisā atrodas viena svara monētas un ir zināms normālās monētas svars, kas izsakāms ar veselu skaitu gramu.

●

Apzīmēsim normālās monētas svaru ar n. Tad vieglāko monētu svars ir n-1 g, bet smagāko, attiecīgi n+1 g. Sanumurēsim maisus ar skaitļiem no 0 līdz N-1 un uz kreisā svaru kausa saliksim monētas pēc sekojoša likuma: no 0-tā maisa uzliksim vienu monētu, no maisa ar numuru 1 uz svariem uzliksim n+2 monētas, no maisa ar numuru divi uz svariem uzliksim $(n+2)^2$ monētas utt. līdz no N-1 maisa uz svariem uzliksim $n+2)^{N-1}$ monētas. Tad ar atsvaru palīdzību nolīdzsvarosim svarus (atsvaru kopējo masu apzīmēsi ar V). Izsakot skaitli V skaitīšanas sistēmā ar bāzi n+2 un apskatot iegūto rezultātu no labās uz kreiso pusi, noskaidrosim, kurā maisā kāda svara monētas atrodas: to parādīs attiecīgi skaitļi n-1, n, n+1, kas šajā skaitīšanas sistēmā ir cipari. ⊗

7. NODAĻA

KURA VĒSTA PAR TO, KĀ JĀĶER MEĻI

Mēdz teikt, ka meliem īsas kājas. Lai arī šī nodaļa ir samērā īsa, tajā ietvertie uzdevumi ir visai pamācoši. Mēs redzēsim, kā attapīgs cilvēks pat ar nepareiziem svariem var panākt vēlamo rezultātu, kā ar loģiskiem spriedumiem var noskaidrot, vai cilvēks ir melojis vai nē.

Uzdevums 7-1

Jānis iedomājas skaitli no 1 līdz 16. Andris drīkst viņam uzdot jautājumus, uz kuriem jāatbild ar "jā" vai "nē".
a) Kā Andris var noskaidrot Jāņa iedomāto skaitli, uzdodot 4 jautājumus, ja visas Jāņa atbildes ir patiesas?
b) Kā Andris var noskaidrot iedomāto skaitli, uzdodot 7 jautājumus, ja uz vienu jautājumu Jānis drīkst atbildēt nepareizi (bet drīkst arī uz visiem jautājumiem atbildēt pareizi)?
c) Vai a) gadījumā Andris var noskaidrot iedomāto skaitli, uzdodot tikai 3 jautājumus?

●

a) ja iedomājas skaitli x no 1 līdz 16, tad x-1 ir no 0 līdz 15. Skaitļi no 0 līdz 15 binārajā skaitīšanas sistēmā ir pierakstāmi ar četru ciparu palīdzību:
0 - 0000
1 - 0001
2 - 0010
3 - 0011
...
14 - 1110
15 - 1111.

Līdz ar to Andrim pietiek ar jautājumiem: "Vai skaitļa x-1 pirmais (otrais, trešais ceturtais) cipari ir 0?";

b) pirmais Andra jautājums būs: "Vai skaitlis ir grupā 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?". Ja Jānis atbildēs "nē", skaitļu virknē 1, ..., 16 zem pirmajiem 8 skaitļiem pavilksim mīnusus; ja Jānis atbildēs "jā", mīnusus novietosim zem skaitļiem no 9 līdz 16. Simetrijas pēc varam uzskatīt, ka Jānis atbild "jā" un iegūsim situāciju:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16.

Tātad mīnuss zem skaitļa nozīmē: "Jānis apgalvo, ka tas nav iedomātais skaitlis".

Otrais Andra jautājums būs "Vai skaitlis ir grupā 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12?" Ievērosim, ka šī grupa satur tieši pusi no tiem skaitļiem, zem kuriem pirmajā reizē pavilts mīnuss, un tieši pusi no tiem skaitļiem, zem kuriem pirmajā reizē mīnuss nav pavilkts. Šādas simetrijas pēc varam uzskatīt, ka Jānis atkal atbild "jā", un iegūt situāciju:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16.

Ievērosim, ka Jānis par skaitļiem 13, 14, 15, 16 jau divas reizes apgalvojis, ka tie nav iedomātie. Tā kā Jānis var samelot augstākais vienu reizi, tad neviens no šiem skaitļiem patiešām nav iedomātais.
Trešais Andra jautājums būs: “Vai skaitlis ir grupā 1, 2, 5, 6, 7, 8?” Šī grupa satur pusi no skaitļiem bez mīnusiem un pusi no skaitļiem ar vienu mīnusu. Šādas simetrijas pēc atkal varam pieņemt, ka Jānis atbild “jā” un iegūt situāciju:

$1\ \ 2\ \ \underline{3}\ \ \underline{4}\ \ \underline{5}\ \ \underline{6}\ \ \underline{7}\ \ \underline{8}\ \ \underline{\underline{9}}\ \ \underline{\underline{\underline{10}}}\ \ \underline{\underline{\underline{11}}}\ \ \underline{\underline{\underline{12}}}$.

Kā iepriekš, secinam, ka no tālākās aplūkošanas izslēdzami skaitļi 9, 10, 11, 12.
Ceturtais Andra jautājums būs : “Vai skaitļi ir grupā 1, 2?” Atkarībā no tā, ko atbildēs Jānis, iegūstam divus variantus”
b1) 1 2 3 4 5 6 7 8
Tagad skaidrs, ka Jānis jau ir melojis. Tāpēc tālāk ar 3 jautājumiem(tāpat kā a) variantā) skaitli atrodam no kopas {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
b2) 1 2 3 4 5 6 7 8
Tātad iedomātais skaitlis ir 1 vai 2. To varam atrast, trīs reizes pēc kārtas uzdodot jautājumu: “Vai skaitlis ir 1? “ Atbilde, kas tiks saņemta divas reizes, būs pareizā.
c) pieņemsim pretējo, ka tas iespējams. Vismaz vienai atbildei “jā” vai “nē” uz pirmo jautājumu atbilst vismaz puse iespēju, t.i. šī atbilde tiks dota vismaz 8 gadījumos. Var gadīties, ka tieši šī atbilde tiek saņemta. Tātad var gadīties, ka pēc pirmā jautājuma Andrim palikušas vismaz 8 līdzvērtīgas hipotēzes. Līdzīgi konstatē, ka pēc otrās atbildes saņemšanas var palikt vismaz 4 līdzvērtīgas hipotēzes, bet pēc trešās atbildes - vismaz divas līdzvērtīgas hipotēzes. Starp tām izšķirties nekļūdīgi nav iespējams. iegūta pretruna. ⊗

Uzdevums 7-2

Izmeklētājs izdomājis liecinieku nopratināšanas plānu, kas garantē nozieguma atklāšanu. Viņš grib uzdot jautājumus, uz kuriem pēc būtības var atbildēt tikai ar “jā” vai “nē”. Tas, kāds jautājums tiks uzdots, var būt atkarīgs no atbildēm uz iepriekšējiem jautājumiem. Izmeklētājs uzskata, ka visas atbildes būs patiesas; viņš izskaitļojis, ka jebkurā gadījumā pie jebkurām atbildēm viņam būs jāuzdod ne vairāk par 91 jautājumu. Pierādiet, ka izmeklētājs var sastādīt plānu ar ne vairāk kā 105 jautājumiem, kas garantētu nozieguma atklāšanu gadījumā, ja uz vienu jautājumu var dot nepatiesu atbildi.

●
Uzdevuma risinājumā izmantosim faktu, ka skaitli 91 var pierakstīt formā:

91 = 13+12+11+1-+...+3+2+1.

Aprakstīsim, kā jārīkojas izmeklētājam, lai garantētu nozieguma atklāšanu pie nosacījuma, ka uz viņa iepriekš izstrādātajiem jautājumiem kāds no lieciniekiem var vienreiz samelot (bet var arī gadīties, ka melots netiek ne reizes). Pēc jau agrāk izstrādātā plāna izmeklētājam jāuzdod pirmie 13 jautājumi un pēc tam jāuzjautā, vai liecinieks ir jau melojis. Ja tiek atbildēts ar “JĀ”, tad tas nozīmē, ka tiešām ir jau vienreiz samelots, vai arī samelots tika tikko, pasakot “JĀ”. Tātad vairāk melot

nedrīkst (pēc uzdevuma nosacījumiem) un izmeklētājam jāatkārto jau iepriekš uzdotie 13 jautājumi un tālāk atkal jārīkojas pēc "vecā" plāna. Tātad kopā papildus tiks uzdoti 14 jautājumi un ar 105 jautājumiem noziegums tiks atklāts. Ja gadījumā liecinieks atbild "NĒ", tad tas nozīmē, ka melots tiešām vēl nav ne reizes. Jo, ja vienreiz būtu samelots, tad, atbildot uz šo jautājumu ar "NĒ", tiktu melots jau otro reizi, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad mēs esam uzdevuši 13 iepriekš paredzētos jautājumus un vēl **1** "lieku" jautājumu. Tālāk izmeklētājam jāuzdod nākošie 12 "vecā" plāna jautājumi un atkal jāpārjautā, vai liecinieks ir jau melojis. Ja tiks atbildēts ar "JĀ", tad atkārtojam tos pašus pēdējos 12 jautājumus un tālāk rīkojamies pēc vecā plāna; ja atbildēts tiks ar "NĒ", tad esam uzdevuši 13+12=25 iepriekš plānotos jautājumus un vēl papildus 2 jautājumus. Ja būs nepieciešams vēlreiz pārjautāt, vai liecinieks nav samelojis, to nākošreiz darīsim pēc 11 nākošajiem uzdotajiem "vecā " plāna jautājumiem, tad pēc 10 utt. (ievērosim saistību ar s risinājuma sākumā parādīto skaitļa 91 pierakstu).
Tādā veidā turpinot, atkarībā no kontroljautājumu atbildēm izmeklētājam nāksies uzdot ne vairāk kā 105 jautājumus. Tiešām, nav grūti ievērot, ka atbildes "NĒ" gadījumā papildus uzdoto jautājumu skaits it kā pieaug, bet tanī pat laikā atbildes "JĀ" gadījumā atkārtojamo jautājumu skaits samazinās. Gadījumā, ja vispār netiek samelots ne reizes, papildus uzdoto jautājumu skaits būs 14 un tātad nepārsniegs 105 uzdodamo jautājumu robežu. ⊗

Uzdevums 7-3

Kongresā sapulcējušies 101 zinātnieks: ķīmiķi un alķīmiķi. Ķīmiķi vienmēr runā taisnību, bet alķīmiķi dažreiz runā taisnību, dažreiz melo. Ķīmiķu starp kongresa dalībniekiem ir vairākums. Profesors Cipariņš grib par katru zinātnieku noskaidrot, vai tas ir ķīmiķis vai alķīmiķis. Profesors drīkst katram dalībniekam jautāt par katru citu: "Kas viņš ir?" un saņemt atbildi. Pierādiet, ka profesors Cipariņš var sasniegt savu mērķi, uzdodot ne vairāk kā 150 jautājumus.

●

Ar indukciju pierādīsim, ka 2t+1 delegātu gadījumā pietiek ar 3t jautājumiem.

∨

Ja t=0, apgalvojums acīm redzams. Apzīmēsim delegātus ar $d_1, d_2, ..., d_{2n+1}$.
Cipariņš pēc kārtas prasa d_2, d_3, ...: "Kas ir d_1?" Tas turpinās, kamēr pirmo reizi iestājas viena no situācijām:
a) n aptaujātie saka, ka d_1 ir ķīmiķis;
b) vairāk aptaujāto teikuši, ka d_1 ir alķīmiķis, nekā, ka d_1 ir ķīmiķis.

A

Šajā gadījumā d_1 tiešām ir ķīmiķis (ja tā nebūtu, tad vairums delegātu būtu alķīmiķi pats d_1 un visi tie, kas samelojuši izsacīdamies par viņu). Pieņemsim, ka k delegāti apgalvojuši, ka d_1 ir alķīmiķis. Tad tie visi ir alķīmiķi. Jāpārbauda vēl 2n+1-1-k=2n-k delegāti. Par tiem jautājam delegātam d1. Kopā pavisam būs uzdoti (n+k)+(2n-k)=3n jautājumi.

B

Šajā gadījumā aptaujāt nepāra skaits delegātu. Starp tiem un d1 kopā alķīmiķu ir ne mazāk kā ķīmiķu. (To pierāda no pretējā, analizējot abus gadījumus, kad d1 ir ķīmiķis

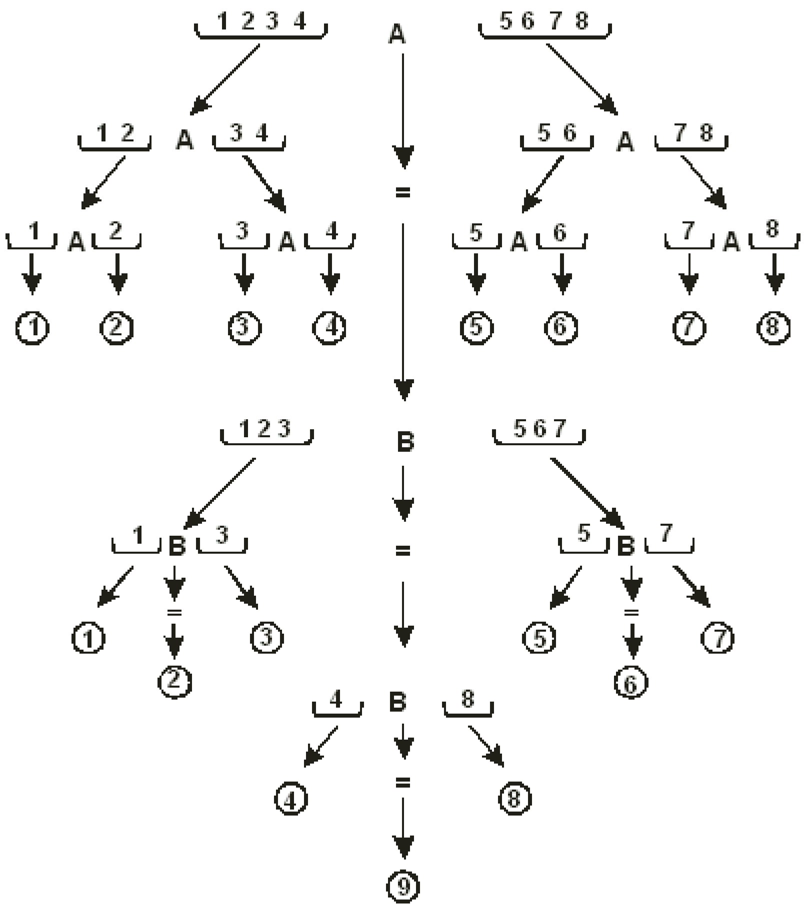
vai alķīmiķis). Pieņemsim, ka pārējo delegātu ir 2k+1; starp tiem ķīmiķus un alķīmiķus var noskaidrot ar 3k jautājumiem pēc induktīvā pieņēmuma. Uz pirmā posmā uzdotajiem 2n+1-1-(2k+1)=2n-1-2k jautājumiem n-1-k cilvēki atbildējuši ar "ķīmiķis", bet n-k cilvēki ar "alķīmiķis". Kādam no noskaidrotajiem ķīmiķiem pajautājam par d1 un pēc tam par tiem, kas par d1 devuši pareizas atbildes (tikai tie ir šaubīgi). Kopā jautājumu būs ne vairāk par (2n-1-2k)+(3k)+1+(n-k)=3n.
Līdz ar to induktīvā pāreja izdarīta.

^

Uzdevuma atrisinājums tieši seko no tikko pierādītā apgalvojuma. ⊗

Uzdevums 7-4

Dotas deviņas monētas, astoņas no tām ir vienāda svara, bet devītā - smagāka. Doti arī divi sviras svari. Vieni no tiem ir precīzi, bet otri - neprecīzi. Ja uz abiem neprecīzo svaru kausiem uzliek vienādu skaitu monētu, tad svari paliek līdzsvarā, neatkarīgi no tā, vai smagākā monēta ir uzlikta vai nav. Ja turpretī uz viena neprecīzo svaru kausa uzliek vairāk monētu nekā uz otra, tad neprecīzie svari izturas tāpat kā precīzie. Nav zināms, kuri svari ir precīzie, kuri - neprecīzie. Vai ar trim svēršanām var atrast smagāko monētu?



attēls 7-1

●
Jā var. Svēršanas shēma parādīta augstāk redzamajā 21.attēlā (attēls 7-1). Shēmā svari apzīmēti ar burtiem A un B, monētas ar cipariem. Bultiņa, kas vilkta uz leju no svaru kausa, norāda, ka šis svaru kauss attiecīgajā svēršanas reizē izrādījies smagāks. Bultiņa, kas vilkta vertikāli uz leju caur "=" zīmi, norāda, ka kausi bijuši līdzsvarā. Ar aplīti apvilktais cipars norāda, kura monēta ir smagākā. Gadījumā, ja visas trīs reizes svari ir palikuši līdzsvarā, mēs smagāko monētu gan atrodam, bet nenoskaidrojam, kuri svari ir precīzi, kuri neprecīzi. ⊗

Uzdevums 7-5

Dotas 4 monētas. Trīs no tām ir īstas un ar vienādu masu, bet ceturtās monētas masa ir citāda - tā ir viltota. Mūsu rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. Ja uz svaru kausiem tik novietotas vienādas masas, tad uz leju var nosvērties jebkurš no kausiem; ja, turpretī, uz tiem novieto dažādas masas, tad uz leju noteikti nosveras smagākais kauss. Kā ar trim svēršanām atrast viltoto monētu un noskaidrot, vai tā ir smagāka vai vieglāka par pārējām?

●
Uzliksim uz kausiem pa divām monētām. Tad viens kauss nosvērsies uz leju (apzīmēsim uz tā esošās monētas ar a un b), bet otrs pacelies uz augšu (apzīmēsim uz tā uzliktās monētas ar c un d). Otrajā svēršanā salīdzināsim a un c ar b un d. Varam pieņemt, ka ka uz leju nosveras a un c (otrs gadījums ir pilnīgi analogs). Ievērosim, ka monētas <u>b un c abās svēršanās uzvedušās dažādi, tāpēc tās ir īstas</u>. Tiešām, viltotā monēta vai nu abās svēršanās nosvērtos uz leju (ja tā būtu smagāka par īstajām), vai paceltos uz augšu (ja tā būtu vieglāka par īstajām). Tāpēc viltotā monēta ir vai nu a, vai d.
Trešajā svēršanā salīdzināsim b un c ar a un d. Ja b un c nosveras uz leju, tad viltotā monēta ir vieglāka nekā īstā; no abām pirmajām svēršanām secinām, ka tā ir d. ja a un d nosveras uz leju, tad viltotā monēta smagāka nekā īstā un tā ir a. ⊗

Uzdevums 7-6

Dotas 8 monētas. Septiņas no tām ir īstas un ar vienādu masu, bet ceturtās monētas masa ir citāda - tā ir viltota. Mūsu rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. Ja uz svaru kausiem tik novietotas vienādas masas, tad uz leju var nosvērties jebkurš no kausiem; ja, turpretī, uz tiem novieto dažādas masas, tad uz leju noteikti nosveras smagākais kauss. Kā ar četrām svēršanām atrast viltoto monētu un noskaidrot, vai tā ir smagāka vai vieglāka par pārējām?

●
Apvienosim monētas pa pāriem. Tā mēs būsim ieguvuši četras "supermonētas". Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā (Uzdevums 7-1), ar trim svēršanām atrodam viltoto "supermonētu" un uzzinām, vai tā ir vieglāka vai smagāka nekā īstā. Ceturtajā svēršanā, salīdzinot tās monētas, kuras ietilpst "supermonētā", atrodam viltoto monētu. ⊗

Uzdevums 7-7

Sprīdītim jāuzzina, vai ķēniņa pils atrodas pa labi vai pa kreisi. Viņš satiek trīs rūķīšus. Zināms, ka divi rūķīši vienmēr runā patiesību, bet viens dažreiz runā patiesību, dažreiz - melo. Sprīdītis nezin, kurš rūķītis ir "neuzticams". Kā viņš var uzzināt vajadzīgo, uzdodot pa vienam jautājumam diviem rūķīšiem? Pieļaujami tikai jautājumi, uz kuriem atbilde ir "jā" vai "nē".

●

Apzīmēsim rūķīšus ar A, B, C. Sprīdītis vispirms uzdod rūķītim A jautājumu: "Vai B vienmēr runā patiesību? "

a) ja atbilde ir "jā", tad B tiešām vienmēr runā patiesību. Par to varam pārliecināties, šķirojot divas iespējas:

1) ja A ir samelojis, tad vienīgais "neuzticamais" rūķītis ir A, tāpēc B runā patiesību;

2) ja A ir sacījis patiesību, tad B runā patiesību tāpēc, ka to ir apgalvojis A.

Tātad šajā gadījumā Sprīdītis ar otro jautājumu var noskaidrot sev vajadzīgo no rūķīša B.

b) ja atbilde ir "nē", tad rūķītis C vienmēr runā patiesību. Par to pārliecināmies, atkal šķirojot divas iespējas:

1) ja A ir samelojis, tad "neuzticamais" rūķītis ir A;

2) ja A sacījis patiesību, tad "neuzticamais" rūķītis ir B.

Tātad abos tikko izskatītajos gadījumos C nav "neuzticams" un Sprīdītis ceļu uz ķēniņa pili var uzzināt no C. ⊗

Uzdevums 7-8

Lutaušu zemē katrs iedzīvotājs vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Sprīdītis var katru dienu vienu reizi sasaukt kopā jebkurus lutaušus, kurus viņš vēlas, un katram no viņiem pajautāt, cik starp saaicinātajiem ir meļu. Bez tam viņš zina, ka vismaz viens lutausis runā patiesību.
Kāds ir mazākais dienu skaits, kurā Sprīdītis garantēti var par katru lutausi noskaidrot, vai tas runā patiesību vai melo?

●

Vispirms parādīsim, ka Sprīdītis var to izdarīt divās dienās. Pirmajā dienā viņš saaicina visus lutaušus. Pieņemsim, ka viņa saņemtās atbildes ir x_1, x_2, ..., x_n (katru no šīm atbildēm var būt devuši vairāki lutauši). Tieši viena no atbildēm ir pareiza, pārējās - nepareizas.

Ja n=1, tad visas atbildes ir pareizas, visi lutauši runā patiesību un otra diena vairs nav vajadzīga.

Ja n>1, tad Sprīdītis otrajā dienā uzaicina n lutaušus tā, lai būtu pārstāvētas visas pirmajā dienā saņemtās atbildes. Skaidrs, ka starp otrajā dienā uzaicinātajiem lutaušiem ir tieši n-1 meļi. Tāpēc otrajā dienā Sprīdītis uzzina, kuri no šajā dienā uzaicinātajiem melo un kuri - runā patiesību, un no tā un pirmās dienas atbildēm secina vajadzīgo arī par pārējiem lutaušiem.

Ja lutaušu zemē dzīvo tikai viens lutausis, tad nekādi jautājumi vispār nav jāuzdod; ja lutaušu pavisam ir divi, tad Sprīdītis vajadzīgo uzzina jau pēc pirmās dienas. Pieņemsim, ka lutaušu skaits ir n, n>2, un pierādīsim, ka ar vienu dienu nepietiek.

Tiešām, Sprīdītim vienīgajā aptaujas dienā būtu jāuzaicina visi n lutauši (citādi viņš neko neuzzinātu par tiem, kas nav aicināti). Pieņemsim, ka no šiem n lutaušiem k lutauši ir atbildējuši "**ir n-k meļu**", bet pārējie n-k lutauši ir atbildējuši "**ir k meļu**" ($0<k<n$, $k \neq n-k$). Acīmredzami, tas iespējams gan tad, ja patiesa ir atbilde "n-k", gan tad, ja patiesa ir atbilde :"k" un Sprīdītim nav nekādas iespējas izšķirties starp šiem variantiem, neuzdodot vēl vismaz vienu jautājumu.

8. NODAĻA

KĀRTOŠANA PILNĪGAS INFORMĀCIJAS ASTĀKĻOS

Iepriekšējās nodaļās aplūkotajos uzdevumos ar "eksperimentiem" bija jānoskaidro kaut kas sākumā nezināms. Šajā nodaļā apskatīsim kārtošanas situācijas, kad visa algoritma darbībai nepieciešamā informācija būs mūsu rīcībā.

Uzdevums 8-1

Robots "Robis" prot paņemt no plaukta trīs blakus stāvošas grāmatas un tādā pašā kārtībā nolikt plauktā citā vietā.
1) Plauktā stāv piecas grāmatas šādā secībā: ABCDE. Kā ar robota palīdzību iegūt secību BACDE?
2) Plauktā stāv 7 grāmatas. Kā ar robota palīdzību pārlikt tās pretējā kārtībā?

●
1) Vajadzīgo izkārtojumu mēs varam iegūt sekojošā veidā:
ABCDE $\rightarrow$ DEABC $\rightarrow$ BCDEA $\rightarrow$ BACDE.
Tas ir atrisinājums 5 grāmatu gadījumam. Mēs redzam, ka varam mainīt vietām divas patvaļīgas blakus esošas grāmatas, ja pa labi no tām ir vismaz 3 citas. Ja pa kreisi no divām maināmajām grāmatām ir 3 citas, var lietot apskatāmo pārveidojumu "spoguļattēlus".

2) Ja pavisam ir $n \geq 7$ grāmatas, tad, lai kuras divas blakus esošas no tām mēs izvēlētos, vai nu pa kreisi, vai pa labi no tām būs vismaz 3 citas. Tātad, ja pavisam ir $n \geq 7$ grāmatas, mēs varam mainīt vietā jebkuras divas blakus esošas un tātad iegūt jebkuru mums vajadzīgo grāmatu izkārtojumu, starp citu, arī pretējo sākotnējam. ⊗

Uzdevums 8-2

Septiņi enciklopēdijas sējumi salikti sekojošā secībā: 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Salieciet tos numuru pieaugšanas secībā, šai nolūkā lietojot sekojošu operāciju: drīkst paņemt 3 blakus stāvošus sējumus un novietot tos sākumā, beigās vai pa vidu starp jebkuriem diviem blakus esošiem sējumiem, bet šos 3 sējumu secību mainīt nedrīkst.

●
Lai iegūtu uzdevumā prasīto, rīkojamies sekojoši:

1 5 6 2 4 3 7 $\longrightarrow$ 1 6 2 4 5 3 7 $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ 1 2 4 5 6 3 7 $\longrightarrow$ 1 2 3 4 5 6 7

⊗

Uzdevums 8-3

Plauktā atrodas 8 grāmatas. Ar vienu gājienu atļauts paņemt jebkuras 3 blakus stāvošas grāmatas un, nemainot to kārtību, novietot plauktā citā vietā. Palīdziet Andrim pārkārtot grāmatas kārtībā, kas pretēja sākotnējai.

●

Apzīmēsim grāmatas ar skaitļiem 1, 2, 3, ..., 8. Pārkārtosim pretējā kārtībā nevis grāmatas, bet gan skaitļu virknīti 1, 2, 3, 4, ,5 , 6, 7, 8. Pārkārtošanas gaitu attēlosim ar shēmu palīdzību, kurās lietosim sekojošus apzīmējumus: to grāmatu (skaitļu) trijnieku, kuru attiecīgajā reizē vēlamies pārvietot, rakstīsim iekavās, bet vietu, kurā vēlamies šo trijnieku ievietot, apzīmēsim ar augšup vērstu bultiņu "↑".

Viens no kārtošanas veidiem varētu būt sekojošs:
(1) Pārvietojam skaitli 8 pareizajā vietā, t.i. 1. pozīcijā:

↑12345(678) ⇒ ↑67812(345) ⇒ ↑34567(812) ⇒ 81234567.

(2) Skaitli 8 vairs neaiztiksim. Virknītē 1, 2, .., 7 pārvietojam 1. pozīcijā skaitli 7:
(123)4567↑ ⇒ (456)7123↑ ⇒ 7123456.

(3) Arī skaitli 7 vairs neaiztiekam. Sakārtojam pretējā kārtībā virknīti 1, 2, 3, 4, 5, 6:
(123)456↑ ⇒ (456)12↑3 ⇒ (124)563↑ ⇒ 56↑3(124) ⇒ ↑5(612)43 ⇒ 61↑2(543) ⇒ 6(154)32↑ ⇒ 6(321)54↑ ⇒ 654321.

(4) Parādīsim vēl, kā var pārkārtot pretējā secībā piecas grāmatas (mums tas būs vajadzīgs uzdevuma vispārināšanas gaitā):
(123)4↑5 ⇒ (412)3↑5 ⇒ 3↑4(125) ⇒ ↑31(254) ⇒ ↑2(543)1 ⇒ 54321.

Esam veiksmīgi tikuši galā ar 8 grāmatu pārkārtošanu. Tagad paskatīsimies, kā ar šo pašu nupat aplūkoto metodi pretējā kārtībā var pārkārtot jebkuru grāmatu skaitu n (n≥5). Pierādīsim to, izmantojot matemātisko indukciju.

∨
Par *indukcijas bāzi* izvēlēsimies grāmatu skaitu n=6, n=6, n=7, n=8. To, ka un kā šādu grāmatu skaitu var sakārtot, parādījām punktos (1), (2), (3), (4).
Pieņemsim, ka mēs varam pretējā kārtībā sakārtot jebkuru grāmatu skaitu, kas nepārsniedz n un nav mazāks par 5 (t.i. 5 grāmatas, 6 grāmatas, ..., n-1 grāmatu, n grāmatas). *Varam pieņemt, ka n≥8*. Balstoties uz šo induktīvo pieņēmumu, pierādīsim, ka pretējā kārtībā var pārkārtot arī n+1 grāmatu.

Ja n+1, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad n dalās ar 3. Rīkojamies sekojoši:
(123)456789... n-2 n-1 n n+1↑ ⇒
⇒ (456)789 ... n-2 n-1 n n+1 123 ⇒
⇒ (789) 10 11 12 ... 123456↑ ⇒
⇒ ... ⇒ (n-2 n-1 n) n+1 123 .. n-5 n-4 n-3 ↑ ⇒
⇒ n+1 12344... n-2 n-1 n.

Grāmatu ar numuru n+1 esam novietojuši pirmajā pozīcijā. Tālāk pārkārtojam pārējās n grāmatas pretējā kārtībā. To, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, mēs varam izdarīt. Tātad šajā gadījumā induktīvo pāreju esam izdarījuši.

Ja n+1, dalot ar 3, atlikumā dod 2, rīkojamies līdzīgi iepriekšējam gadījumam, grāmatas pārvietojot pa kreisi:

↑(123)45678 ... (n-1 n n+1) ⇒ ↑n-1 n n+1 12345 ... (n-4 n-3 n-2) ⇒
⇒ ... ⇒ ↑345678 ... n (n+1 1 2) ⇒ n+1 123456 ... n-1 n.

Tālāk pārkārtojam pārējās n grāmatas pretējā kārtībā. Tātad arī šo induktīvo pāreju esam izdarījuši.

Ja n+1 dalās ar 3 bez atlikuma, tad grāmatu pārkārtošanu veicam sekojoši:
1 2 3 4... n-4 n-3 (n-2 n-1 n) n+1 ↑ ⇒ ↑ 1 2 3 4 5 6 ... n-4 n-3 (n+1 n-2 n-1) n ⇒
⇒ n+1 n-2 n-1 $\underline{\text{1 2 3 4 5 6 ... n-4 n-3 n}}$.

Pasvītroto virkni 1 2 3 ... n-4 n-3 n, kuras garums ir n-2 skaitļi, var pārkārtot pretējā kārtībā (pēc induktīvā pieņēmuma; ievērosim, ka n≥8, tātad, n-2≥6). Iegūstam
n+1 n-2 n-1 n $\underline{\text{n-3 n-4 ... 6 5 4 3 2 1}}$. Atkal pasvītroto virkni (garums n-3 skaitļi) var pārkārtot pretējā kārtībā (pēc induktīvā pieņēmuma, ievērojot, ka n-3≥5). Iegūstam:
n+1 (n-2 n-1 n) 1 2 3 4 5 ... n-5 n-4 n-3 ↑ ⇒
⇒ n+1 1 2 3 4 5 6 ... n-5 n-4 n-3 n-2 n-1 n.

Grāmatu ar numuru n+1 esam novietojuši pareizā vietā. Savukārt pārējās n grāmatas iespējams pārkārtot pretējā secībā, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu. Tāpēc arī šajā gadījumā induktīvo pāreju esam izdarījuši. Tātad ir parādīts, ka n (n≥5) grāmatas ir iespējams pārkārtot pretējā secībā.

^
⊗

Uzdevums 8-4

Rindā noliktas kartiņas, uz kurām uzrakstīti skaitļi: 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3. Atļauts paņemt dažas pēc kārtas esošas kartiņas un pārkārtot tās pagrieztā kārtībā. Kā ar 3 šādām pārkārtošanām panākt izkārtojumu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

●
Pārkārtošanas veicamas šādā kārtībā:
$\underline{\text{7 8 9 4 5 6}}$ 1 2 3 → 654$\underline{\text{987123}}$ → $\underline{\text{654321}}$789 → 123456789

(Pasvītrotas ir katru reizi pārkārtojamo kartiņu grupas). ⊗

Uzdevums 8-5

Plauktā stāv 15 grāmatas. Ar vienu gājienu atļauts paņemt jebkuru daudzumu blakus stāvošu grāmatu un tādā paša kārtībā novietot plauktā citā vietā. Pierādiet, ka ar 8 gājieniem var panākt, lai grāmatas būtu novietotas pretējā kārtībā, nekā tās bija sākumā.

●

Grāmatas apzīmēsim ar skaitļiem 1, 2, 3, ..., 15. Sekojošā tabula parāda pārkārtošanas secību. Katrā rindā ar tumšāku fonu iezīmēta grāmatu grupa, kura tiek pārnesta uz citu vietu, bet ar zvaigznīti un smalku rāmīti apvilktais grāmatas numurs norāda uz vietu, kur šo grāmatu grupu novieto. Ja zvaigznīte atrodas aiz skaitļa, tas nozīmē, ka grāmatu grupa ievietojama aiz šī skaitļa, bet, ja pirms skaitļa, tad arī grāmatu grupa ir ievietojama pirms šī skaitļa.

Gājiena Nr.	Grāmatu secība														
1	1*	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	8	9	10	11	12	13	14	1	2	3	4	5	6	7	15*
3	8	9	10	11	12	13	2	3	4	5	6	7	15	14*	1
4	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	15	14	13*	2	1
5	8	9	10	11	4	5	6	7	15	14	13	12*	3	2	1
6	8	9	10	5	6	7	15	14	13	12	11*	4	3	2	1
7	8	9	6	7	15	14	13	12	11	10*	5	4	3	2	1
8	8	7	15	14	13	12	11	10	9*	6	5	4	3	2	1

⊗

Uzdevums 8-6

Dota kāršu kava no n kārtīm, kas novietotas secībā 1, 2, ..., n. Drīkst paņemt pēc kārtas dažas kārtis, un, neizjaucot to secību, ievietot jebkurā citā vietā šajā kavā (var likt arī sākumā un beigās). Ar S(n) apzīmēsim mazāko šādu operāciju skaitu, kas pietiekams, lai kārtis pārliktu pretējā secībā. Atrodiet S(n).

●

Rīkojoties kā iepriekšējā uzdevuma risinājumā, viegli saprast, ka pietiek ar (n+1)/2 soļiem priekš nepāra un n/2+1 soļiem pāra skaitļa n. Mēs pierādīsim, ka šis skaitlis ir mazākais iespējamais.

Uzskatīsim, ka starp blakus esošajām kārtīm ir iespējamas divu veidu saites: “>” vai “<” (“vairāk” vai “mazāk”), un pēc S operācijām visām n-1 “<” tipa saitēm jāpārvēršas par pretējā tipa “>” saitēm. Ievērosim, ka katrā solī “>” tipa saišu skaits var pieaugt ne vairāk kā par 2. Patiešām, uzreiz 3 “<” tipa saites par “>” tipa saitēm varētu pārvērsties pie pārejas no ... a, b, ..., c, d, ..., p, q, ... uz a, d, ..., p, b, ..., c, q, ... tikai tajā gadījumā, ja a<b, c<d, p<q, a>d, p>, c>q. Taču šīs sešas nevienādības nav savienojamas: no tām seko, ka a<b<p<q<c<d<a, kas ir acīm redzama pretruna.

Pārbaudiet patstāvīgi, ka gan pirmajā, gan pēdējā solī tipu mainīt var tikai viena saite.

Tātad S nepieciešamajiem soļiem iegūstam novērtējumu $1+2(S-2)+1 \geq n-1$, no kurienes seko, ka $S \geq (n+1)/2$. No šejienes seko vajadzīgais (ievērojiet, ja n - pāra skaitlis, tad n+1 - nepāra). ⊗

Uzdevums 8-7

Uz 9 kartītēm uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9 (uz katras kartītes cits skaitlis). Kartītes kaut kādā secībā novietotas rindā. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras pēc kārtas stāvošas kartītes, uz kurām uzrakstītie skaitļi ir augošā vai dilstošā kārtībā, un novietot šīs kartītes tai pašā vietā apgrieztā secībā. (Piemēram, ar vienu gājienu 916532748 var pārveidot par 913562748). Pieradiet, ka ar 12 gājieniem var panākt, lai visi 9 skaitļi rindā atrastos monotonā secībā (vienalga, augošā vai dilstošā).

●

Apzīmēsim minimālo gājienu skaitu, ar kuru garantēti var atrisināt līdzīgu uzdevumu n skaitļu gadījumā, ar f(n).

Vispirms pierādīsim, ka $f(n) \leq f(n-1)+2$. Tiešām, pieņemsim, ka n skaitļu virknē pirmais skaitlis ir k. Tad šo virkni ar f(n-1) gājieniem var pārveidot par (k, 1,2,...,k-1,k+1,..., n-1, n) vai arī par (k, n, n-1, ..., k+1, k-1, ..., 2, 1). Pirmajā gadījumā iegūstam vispirms (k, k-1, ..., 2, 1, k+1, ...,n) un pēc tam monotoni augošu virkni; otrajā gadījumā - vispirms iegūst (k, k+1, ..., n-1,n, k-1, ..., 2, 1) un pēc tam monotoni dilstošu virkni.

Lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek pierādīt, ka $f(5) \leq 4$; tad $f(6) \leq 6$, $f(7) \leq 8$, $f(8) \leq 10$, $f(9) \leq 12$. Izdarīsim to!

Pārbaudot visus gadījumus, redzam, ka f(3)=1. Aplūkosim skaitļu 1;2;3;4 patvaļīgu secību. Ja vai nu 1 vai 4 atrodas pirmajā vai pēdējā vietā, ar vienu gājienu “monotonizējam” trīs pārējos skaitļus un ar otru pabeidzam sakārtošanu. Ievērosim, ka, vajadzības gadījumā lietojot vēl trešo gājienu, mēs varam iegūt gan monotoni augošu , gan monotoni dilstošu secību.

Aplūkosim četras vēl neaplūkotās sākotnējās secības:

(2,1,4,3) → (1,2,4,3) → (1,2,3,4) → (4,3,2,1,);

(3,4,1,2) → (4,3,1,2) → (4,3,2,1) → (1,2,3,4);

(2,4,1,3) → (2,1,4,3) → (1,2,4,3) → (1,2,3,4,)
vai
(2,4,1,3) → (4,2,1,3) → (4,2,3,1) → (4,3,2,1);

(3,1,4,2) → (3,4,1,2) → (4,3,1,2) → (4,3,2,1)
vai
(3,1,4,2) → (1,3,4,2) → (1,3,2,4) → (1,2,3,4).

Redzam, ka ar 3 gājieniem mēs varam skaitļus no 1 līdz 4 sakārtot pēc vēlēšanās vai nu augošā vai dilstošā kārtībā.

Tagad aplūkosim skaitļu 1;2;3;4;5 patvaļīgu secību. Ja 1 vai 5 atrodas vai nu tās sākumā vai beigās, tad mēs ar 3 gājieniem varam sakārtot pārējos četrus skaitļus vajadzīgajā (augošā vai dilstošā) secībā.

Ja ne 1, ne 5 nav ne sākumā, ne beigās, tad vismaz viens no tiem atrodas otrajā vai ceturtajā vietā. Ar vienu gājienu "nogādājam" to malējā vietā un pēc tam sakārtojām pārējos četrus skaitļus vajadzīgajā secībā, lietojot ne vairāk kā 3 gājienus.
Esam pierādījuši, ka $f(5) \leq 4$, un līdz ar to atrisinājuši uzdevumu.

Komentāri.

1. Var pierādīt, ka patiesībā $f(9) \leq 11$. Pamēģiniet tō izdarīt patstāvīgi.
2. Patiesā f(9) vērtība, kā arī f(n) vērtības, ja $n \geq 6$, nav zināmas. ⊗

Uzdevums 8-8

Dotas 2^n kartiņas, n - naturāls skaitlis. Tās sakārtotas kaudzītē. Ar vienu gājienu kaudzīti var pārdalīt patvaļīgā vietā un pēc tam abas iegūtās daļas "sajaukt" savā starpā tā, ka iepriekšējās "augšējās" daļas kartīšu savstarpējais novietojums paliek nemainīgs un iepriekšējās "apakšējās" daļas kartīšu savstarpējais novietojums - tāpat.
Pieradiet, ka ar n gājieniem pietiek, lai iegūtu jebkuru mums vēlamu kartīšu sakārtojumu.

●
Piešķiram kartiņām numurus 1; 2; 3; ...; 2^n tādā kārtībā, kādā tām jāparādās beigās (no apakšās uz augšu).
Apskatīsim sākotnējo sakārtojumu no apakšas uz augšu. Kartiņu numuri izvietojas kaut kādā secībā. Sadalīsim tos monotoni augošos fragmentos; šādu fragmentu sākumā nav vairāk par 2^n. Pieņemsim, ka fragmentu skaits ir k. Sadalīsim kaudzīti divās daļās tā, lai augšējā daļā būtu [k/2] monotonie fragmenti. Pēc tam daļas apvienojam tā, ka abu daļu apakšējie monotonie fragmenti tagad veido vienu monotonu fragmentu, nākošie abu daļu monotonie fragmenti arī veido vienu monotonu fragmentu utt. Pēc šādas apvienošanas monotono fragmentu nav vairāk par 2^{n-1}. Atkārtojot šādas operācijas, pēc n gājieniem būs 1 monotons fragments, t.i., kartiņas būs izkārtotas vajadzīgajā kārtībā. ⊗

Uzdevums 8-9

Plauktā atrodas 6 sējumu kopotie raksti. Sākumā sējumi atrodas pareizā secībā. Jānis katru dienu maina vietām divus blakus stāvošus sējumus. Vai viņš var to darīt tā, lai kādā laika periodā realizētos visi iespējamie grāmatu izkārtojumi, katrs tieši vienu reizi?

●
Trīs sējumu gadījumā pārkārtojumu secība
ABC → ACB → CAB → CBA → BCA → BAC.
Induktīvā pāreja no n uz)n+1) sējumu: katru reizi, pirms mainīt divus blakus esošos sējumus no pirmajiem n, Jānis "izdzen"(n+1)-o sējumu no viena gala līdz otram "cauri" pirmajiem sējumiem. ⊗

<u>**Uzdevums 8-10**</u>

Grāmatu plauktā kaut kādā kārtībā novietoti 20 sējumi. Bibliotekārs grib tos sakārtot monotonā secībā no 1 līdz 20 no kreisās uz labo pusi. Ar vienu paņēmienu bibliotekārs maina vietām jebkuru sējumu, kas neatrodas savā vietā, ar sējumu, kas aizņem viņa vietu. Pierādiet, ka šo operāciju skaits, kas nepieciešams, lai sakārtotu sējumus, nav atkarīgs no bibliotekāra darbību secības, bet tikai no grāmatu sākotnējā izkārtojuma.

●

Pieņemsim, ka sējums ar numuru a stāv b-tajā vietā, bet sējums ar numuru b stāv c-tajā vietā utt. līdz sējumam ar numuru k, kas atrodas a-tajā vietā. teiksim, ka sējumi a, b, c, ..., k veido <u>*ciklu*</u>. Pēc nosacījuma bibliotekārs maina vietām tikai sējumus, kas pieder vienam ciklam. Pie katras pārkārtošanas viens sējums nonāk savā vietā, bet cikls, kurā tas ietilpa, saīsinās par 1. Tādējādi, lai noliktu vietā ciklu veidojošus n sējumus, nepieciešamas n-1 pārkārtošanas. Tas nozīmē, ka kopumā bibliotekāram būs nepieciešams realizēt (20-s) pārkārtošanas, kur s - visu ciklu skaits. No iepriekš minētā viegli ievērot, ka, lai kādā secībā bibliotekārs arī nemainītu grāmatas, patērēto operāciju skaits no tā nav atkarīgs (bet no ciklu skaita gan). ⊗

<u>**Uzdevums 8-11**</u>

Plauktā novietoti 30 sējumu kopotie raksti numuru pieaugšanas kārtībā. Andris pārlika 1. sējumu aiz trīsdesmitā, pārējo sējumu secību nemainot. Jānis ar vienu gājienu drīkst mainīt vietām jebkurus divus sējumus. Kāds ir mazākais gājienu skaits, kas pietiekams, lai Jānis varētu atjaunot pareizo kārtību? Kāds tas būtu gadījumā, ja Andris aiz trīsdesmitā sējuma būtu novietojis 1., 2., 3. sējumus (tieši šādā secībā)?

●

Apskatīsim vispirms gadījumu, kad Andris pārlicis tikai pirmo sējumu.
Apzīmēsim grāmatas ar skaitļiem 1, 2, ..., 30. Iedomāsimies, ka Jānis izstrādājis kaut kādu metodi, kā atjaunot sējumu pareizo kārtību, un realizējis šo metodi. Savienosim ar līniju divus skaitļus tai brīdī, kad Jāņa metodes realizācijas gaitā savstarpēji tiek mainītas grāmatas, kas atrodas atbilstošajās vietās (vai nu atradušās tur jau no sākuma, vai nonākušas tur iepriekšējo maiņu rezultātā). Ievērosim, ka grāmatu pārvietošanās notiek tikai "pa līnijām". Tā kā grāmatai no 1 visu maiņu rezultātā jāpāriet uz 2, no 2 uz 3 , ..., no 29 uz 30, no 30 uz 1, tad novilkto līniju sistēmai jābūt ar īpašību: no katra skaitļa var aiziet uz katru citu, ejot tikai pa noviltajām līnijām. Padomāsim, cik līniju vismaz jānovelk, lai šāda īpašība tiktu iegūta.
Kamēr nav novilkta neviena līnija, skaitļi veido 30 atsevišķas sistēmas. No vienas sistēmas pāriet uz otru nevar. Novelkot pirmo līniju, divi skaitļi apvienojas vienā sistēmā un sistēmu skaits par vienu samazinās. Arī turpmāk katra jauna novilkta līnija vai nu nemaina sistēmu skaitu (ja tā savieno aplīšus no vienas un tās pašas sistēmas), vai arī samazina to par 1 (ja savieno aplīšus no dažādām sistēmām). Pēc visu līniju novilkšanas paliek viena sistēma.; tātad to skaits samazinājies par 30-1=29. Tātad jānovelk vismaz 29 līnijas. Tas nozīmē, ka, lai atjaunotu pareizo grāmatu kārtību, jāizdara vismaz 29 maiņas.
Ar 29 maiņām arī pietiek. Jānis var pakāpeniski mainīt 1. sējumu ar 30., 29., ..., 3., 2. sējumu. Pēc šim 29 maiņām būs iegūta pareizā sējumu kārtība.

Ja Andris no sākuma aiz 30 sējuma pārcēlis pirmos 3 sējumus, tad spriežot līdzīgi, redzam, ka vienā sistēmā jāapvienojas 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28;
otrajā sistēmā jāapvienojas 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29;
trešajā sistēmā jāapvienojas 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

Katras sistēmas izveidei nepieciešamas vismaz 9 līnijas. Tātad mums jāizdara vismaz 3x0=27 maiņas. Ar 27 maiņām pietiek: Jānis pakāpeniski maina:

1. sējumu ar 28., 25., 22., ..., 10., 7., 4. sējumu;
2. sējumu ar 29., 26., 23., ..., 11., 8., 5. sējumu;
3. sējumu ar 30., 27., 24., ..., 12., 9., 6. sējumu. ⊗

Uzdevums 8-12

Plauktā patvaļīgā secībā novietoti kopotie raksti simts sējumos. Drīkst paņemt jebkurus divus sējumus, no kuriem vienam numurs ir pāra skaitlis, otram - nepāra skaitlis, un apmainīt tos vietām. Kāds ir mazākais šādu pārkārtojumu skaits, kas pietiekams, lai sējumus sakārtotu pēc kārtas?

●
n sējumus sauc par ***ciklu***, ja viens no tiem atrodas tajā vietā, kur jābūt otram, otrais - tajā vietā, kur jābūt trešajam, utt., n-tais - tajā vietā, kur jābūt pirmajam.
Katrs sējums, kurš neatrodas savā vietā pieder kaut kādam ciklam.
Ciklu sauc par ***pāra***, ja tajā ir tikai pāra sējumi, par ***nepāra*** - ja tajā ir tikai nepāra sējumi, bet par ***jauktu*** - ja tajā ir gan pāra, gan nepāra sējumi.
Kaut kādam sējumu izvietojumam plauktā par šī izvietojuma ***koeficientu*** nosauc šādu skaitli: (sējumu skaits, kas nav savās vietās) - (jaukto ciklu skaits) + (starpības starp pāra un nepāra ciklus modulis).
Izvietojuma koeficients ir 0 tad un tikai tad, ja visi sējumi ir savās vietās.

Lemma.

Ja kaut kāda sējuma izvietojuma koeficients ir lielāks par 0, tad
1) ar kaut kāda gājiena palīdzību to var samazināt par 1;
2) ne ar kāda viena gājiena palīdzību to nevar samazināt vairāk kā par 1.

∨
1) Šķirosim 3 gadījumus:
a) ir vismaz viens jaukts cikls.
Ja tajā ir tikai divi sējumi, tad apmainām tos vietām. līdz ar to savās vietās neesošo sējumu skaits samazinās par 2, bet jauktu ciklu - par 1. Līdz ar to koeficients kļūst par 1 mazāks.
Ja ciklā ir vismaz 3 sējumi un vismaz 2 no tiem ir pāra sējumi, tad cikla atrodam tādu nepāra sējumu n, kas stāv pāra sējuma vietā, un apmainām šos divus sējumus vietām. tā rezultātā sējumu, kas nav savas vietās, kļūst par 1 mazāk, bet ciklu skaits nemainās.
Ja ciklā ir vismaz 3 sējumi, bet no tiem viens ir pāra, tad vismaz 2 ir nepāra. Tādā gadījumā rīkojas analogi.

b) ir vismaz viens pāra un viens nepāra cikls.

Tad ņemam kādu sājumu no kāda pāra cikla un vienu sējumu no kāda nepāra cikla un apmainām tos vietām. Kā var pārliecināties, 1 pāra un 1 nepāra cikla vietā rodas 1 jaukts cikls. Līdz ar to koeficients samazinās par 1.
c) ir tikai pāra (nepāra) cikli.
Tas iespējams tikai, ja visi nepāra (pāra) sējumi ir savās vietās. Tad ņemam kādu nepāra sējumu un apmainām to vietām ar kāda pāra cikla kādu sējumu. Tad savā vietā neesošo sējumu kļūst par vienu vairāk, tādējādi arī šajā gadījumā koeficients samazinās par 1.
Lemmas pirmā daļa pierādīta.

2) Apskatīsim dažādus iespējamos gājienus.
Viens iespējamais gājiens ir 2 sējumu, kas pieder dažādiem cikliem, apmaiņa vietām. Tā rezultātā savās vietās neesošu sējumu skaits nemainās, bet 2 ciklu vietā rodas 1.
Ja abi cikli, pie kuriem pieder maināmie sējumi, ir jaukti, tad jaukto ciklu skaits samazinās par 1, bet koeficients palielinās par 1.
Ja viens cikls ir jaukts, tad koeficients var samazināties augstākais par 1.
Ja viens no cikliem ir pāra, otrs - nepāra, tad, kā jau agrāk minēts, koeficients arī samazinās par 1.
Arī citiem iespējamiem gājieniem var līdzīgā veidā parādīt, ka koeficients nesamazinās vairāk kā par 1.

^

No lemmas izriet, ka, lai visus sējumus noliktu savās vietās, nepieciešams un pietiekams izdarīt tikpat gājienus, cik ir sākuma stāvokļa koeficients.
Tagad pierādīsim, ka sākuma stāvokļa koeficients nevar būt lielāks par 124.
Katrā ciklā ir vismaz 2 sējumi. Tāpēc pāra (tāpat arī nepāra) ciklu nav vairāk par 50/2=25.
Ja tādu ir 245 vai mazāk, tad starpība starp pāra un nepāra ciklu skaitu nepārsniedz 24, bet savā vietā neesošu sējumu skaits - 100, tāpēc koeficients nav lielāks par 1245.
Ja pāra ciklu ir 25, tad tajos iesaistīti visi pāra sējumi un tāpēc jauktu ciklu nav. Ja nav arī nepāra ciklu, tad koeficients ir 50+25=75. Savukārt, ja ir vismaz 1 nepāra cikls, tad starpība starp pāra un nepāra ciklu skaitu nepārsniedz 24 un koeficients - 124. Koeficients var būt 124, ja sējumi izvietoti šādi: 1. sējums - 3. vietā, 3. - 5., ..., 99. sējums - 1. vietā; 2. un 44. apmainīti vietām, 6. un 8. arī, 98. un 100. sējumi apmainīti vietām.
Līdz ar to minimālais gājienu skaits ir 124. ⊗

Uzdevums 8-13

Noliktavā divos strēķos patvaļīgā secībā sakrauti n konteineri, kuriem ir numuri 1, 2, 3, ..., n. Autoiekrāvējs piebrauc vienam no strēķiem, noceļ no augšas dažus konteinerus un novieto tos uz otrā strēķa. pierādiet, ka ar 2n-1 šādām operācijām visus konteinerus var salikt vienā strēķī numuru kārtībā: apakšā Nr.1, pēc tam Nr.2, utt..

●

Pieņemsim, ka viena strēķī jau salikti pirmie k konteineri pareizā secībā - apakšā Nr.1, pēc tam Nr.2, utt. līdz Nr.k. Tad izdarīsim sekojošo: noņemam no šī strēķa visus pārējos konteinerus un uzliksim otram strēķim, pēc tam no šī otrā strēķa paņemsim visus konteinerus, kas atrodas ne zemāk par (k+1)-o, un uzliksim tos pirmajam strēķim. Tādā veidā ar 2 operācijām mēs panāksim, ka viena no strēķiem pamatā pareizās secībā nolikti jau k+1 konteiners. Skaidrs, ka pēdējam n-tajam konteineram mums vajadzēs ne vairāk kā vienu operāciju. Tas nozīmē, ka viss tiks izpildīts ar 2n-1 operācijām. ⊗

Uzdevums 8-14

Kaudzē ir n atšķirīgu izmēru pankūkas. Ar vienu gājienu kaudzē var iebāzt lāpstiņu, apgriezt augšējo daļu otrādi un nolikt uz apakšējās (atļauts apgriezt arī visu kaudzi). Pierādiet, ka ar 2n-2 gājieniem kaudzi var pārkārtot augošā kārtībā.

●

Kaudze sākumā izveidota patvaļīgi. tad lāpstiņu iebāžam zem lielākās pankūkas un apgriežam augšējo daļu ar lielāko pankūku uz augšu, bet pēc tam apgriežam visu kaudzi. Tādā veidā esam nolikuši lielāko pankūku savā vietā, šim nolūkam patērējot 2 operācijas. tātad visu kaudzi varam pārkārtot ar 2n operācijām, Taču ievērojot, ka pēdējā pankūka savā vietā nostāsies automātiski, 2 pēdējās operācijas “izpaliek’. Tātad, lai pārkārtotu sākotnējo pankūku kaudzi pēc uzdevuma noteikumiem, pavisam kopā esam patērējuši 2n-2 operācijas. ⊗

Uzdevums 8-15

Pa apli kaut kādā secībā stāv 25 zēni un 25 meitenes. Ar vienu gājienu drīkst samainīt vietām jebkurus divus bērnus. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kādu patvaļīgam bērnu izvietojumam pietiek, lai pārkārtotu tos tā, ka zēni un meitenes stāv pamīšus?

●

Sanumurēsim bērnu atrašanās vietas pēc kārtas ar skaitļiem 1, 2, 3, ..., 50 tā, lai 25 vietās ar pāra numuriem stāvētu ne vairāk kā 12 zēni. Meiteņu skaits vietās ar nepāra numuriem vienāds ar zēnu skaitu vietās ar pāra numuriem. Mainot šos bērnus vietām, ar ne vairāk kā 12 gājieniem varam panākt prasīto. Ja sākumā visi 25 zēni stāv pēc kārtas, tad varam uzskatīt, ka 12 no tiem stāv pāra, bet 13 - nepāra vietās. Atkarībā no tā, vai zēni beigās novietojas pāra vai nepāra vietās, nepieciešami vismaz 13 resp. 12 gājieni, jo ar katru gājienu “izlabo” augstākais viena zēna pozīciju.
Tātad uzdevuma atbilde ir 12. ⊗

Uzdevums 8-16

Rindā nostādīti 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām tad, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi.
a) pierādīt, ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka vispirms stāv 10 zēni, bet pēc tam 10 meitenes;
b) pierādīt: sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām to panākt nevar.

●

a) Ja k-tajā vietā stāv meitene ($1 \le k \le 10$), tad kādā no vietām ar numuriem k+1; k+2;...; k+10 stāv zēns (citādi meiteņu būtu vairāk par 10). Mainot šos bērnus, k-tajā vietā nostādām zēnu. Pēc kārtas apskatām 1., 2., ..., 10. vietu.
b) ja pirmajās 10 vietās stāv meitenes, vajag vismaz 10 maiņas, jo vienas maiņas rezultātā tiek "izlabota" augstākais viena "nepareizība", bet to pavisam ir 10. ⊗

Uzdevums 8-17

Uz skolotāja galda stāv sviras svari. z svariem atrodas atsvari (ne obligāti ar vienādu svaru). uz katra atsvara uzrakstīts viena vai vairāku skolēnu uzvārds. Skolēns, ienākot klasē, pārliek uz svaru otru kausu katru atsvaru, uz kura rakstīts viņa uzvārds. Pierādiet, ka var klasē ielaist tādus skolēnus, lai rezultātā nosvērtos ne tas kauss, kurš nosvērās sākumā (tiek pieņemts, ka svari sākumā neatrodas līdzsvarā).

●

Pierādīsim prasīto ar indukcijas palīdzību.
Gadījumā, ja klasē ir viens skolēns, iesaucam to klasē, un uz svaru kausiem esošie atsvari tiks samainīti vietām un kausi nosvērsies pretēji tam stāvoklim, kādā tie atradās sākumā.
Parādīsim, kā jārīkojas, ja klasē ir divi skolēni. Skaidrs, ka uz katra no svaru kausiem var būt kaut kāds atsvaru skaits, uz kuriem uzrakstīts viena vai otra skolēna uzvārds, kā arī tāds atsvars (vai vairāki tādi), uz kura uzrakstīti abu skolēnu uzvārdi. Tāpat skaidrs, ka uz viena no abiem svaru kausiem atrodas smagākais no šādiem atsvariem veidotais komplekts. Piemēram, ja uz kreisā svaru kausa atrodas atsvari ar uzrakstu A un to kopējā masa ir m_1, bet uz labā svaru kausa attiecīgā tipa atsvaru kopējā masa ir m_2, pie kam $m_1 > m_2$, tad turpmāk risinājuma gaitā ar A apzīmēsim attiecīgā tipa atsvaru komplektu ar lielāko masu. Šoreiz tas būtu komplekts ar kopējo masu m_1. Ievērojot šo norunu, varam uzskatīt, ka objektīvi pastāv 3 atšķirīgi smagākie atsvaru komplekti: priekš skolēna A, priekš skolēna B un smagākais atsvaru komplekts, kurā uz katra atsvara uzrakstīti abu skolēnu uzvārdi. (Atzīmēsim, ka nebūt nav tā, ka smagākajā komplektā ietilpst visi smagākie atsvari - runa ir par viena tipa atsvaru kopējo masu uz viena svaru kausa.) Tālāk sekojošajā tabulā parādītas visas iespējamās smagāko komplektu savstarpējās "mijiedarbības" varianti un dots klasē iesaucamo skolēnu saraksts (pirmajam skolēnam sarakstā arī klasē jāienāk kā pirmajam), kā arī svaru kausu stāvoklis pēc tam, kas visi (pēc skolotāja domām) nepieciešamie skolēni jau ir ieaicināti klasē. Tabulā apzīmējums "A $\prec$ B" vai "B $\succ$ A" lietots, lai apzīmētu faktu, ka kauss, uz kura atrodas A tipa smagākais komplekts, ir vieglāks par kausu, uz kura atrodas B tipa smagākais komplekts. Ar "∅" apzīmēsim faktu, ka uz attiecīgā svaru kausa nav neviena smagākā komplekta.

Sākotn. noviet.	Jāiesauc	Rezultāts
A un B $\prec$ AB	A	AB un B $\succ$ A
A un B $\succ$ AB	A, B	∅ $\prec$ AB un A un B
A $\succ$ AB un B	A	AB $\prec$ A un B
A $\prec$ AB un B	B	A un AB un B $\succ$ ∅

Atzīmēsim, ka gadījums, kad A un B un AB $\prec$ ∅, nevar būt.

Tālāk analizēsim atsevišķi gadījumu, kad A un B un $AB \succ \emptyset$. Mūsu rīcība atkarīga no tā, kādas attiecības pastāv starp attiecīgo komplektu masām.

Ja gadījumā $|A|+|B|>|AB|$, tad klasē vispirms ieaicināsim skolēnu A, bet pēc tam B, kā rezultātā iegūsim, ka $AB \prec$ A un B;
Ja gadījumā izrādītos, ka $|A|+|B|\leq|AB|$, pie tam $|A| \geq |B|$, tad klasē jāieaicina tikai viens skolēns, proti, skolēns A, un tad iegūsim, ka $B \prec$ A un AB.

līdz ar to indukcijas bāze ir pamatota. Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā gadījumam ar k skolēniem un parādīsim, ka arī gadījumā ar k+1 skolēnu mūsu pierādāmais apgalvojums ir patiess. k+1 skolēnu sadalīsim divās grupās. vienā iekļausim pirmos k skolēnus A_1, A_2, A_3, ...A_k un otrajā grupā atstāsim vienu pašu skolēnu A_{k+1}. Pirmo grupu apzīmēsim ar A, bet otro ar B un tālāk rīkosimies tāpat kā nupat aprakstītajā divu skolēnu gadījumā. ⊗

Uzdevums 8-18

Doti sviras svari un n atsvari ar dažādu masu. Jānis pēc kārtas liek pa atsvaram uz viena no svaru kausiem. Pierādiet, ka Jānis var panākt jebkuru svaru kausu nosvēršanās secību pa kreisi vai pa labi.

●

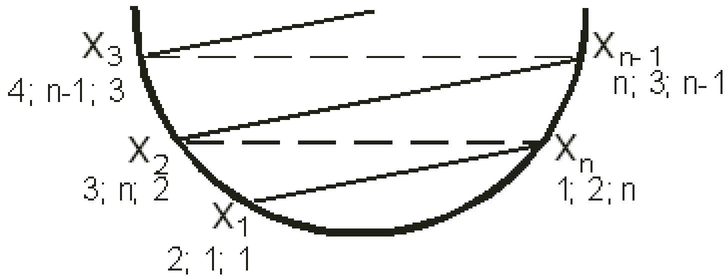
Sarindosim atsvarus augošā secībā: $A_1<A_2<...<A_n$. Aplūkosim jebkuru šīs atsvaru rindas fragmentu $A_{i+1}<A_{i+2}<...<A_{i+k}$. Pieņemsim, ka tie novietoti uz svaru kausiem pamīšus: A_{i+1} uz viena kausa, A_{i+2} uz otr, A_{i+3} atkal uz pirmā, A_{i+4} - uz otrā utt. <u>Tad uz leju nosveras tas kauss, uz kura atrodas A_{i+k}</u>. Tiešām, ja k - pāra skaitlis, tad tas seko no nevienādībām $A_{i+1}<A_{i+2}$, $A_{i+3}<A_{i+4}$, ..., $A_{i+k-1}<A_{i+k}$, bet, ja k - nepāra skaitlis, tad no nevienādībām $A_1>0$, $A_3>A_2$, $A_5>A_4$, ..., $A_k>A_{k-1}$.
Novietosim tagad atsvarus uz kausiem pamīšus tā, lai beigās uz leju nosvērtos tas kauss, kādu Jānis vēlas. Sāksim ņemt nost atsvarus, realizējot no otra gala Jāņa iedomāto nosvēršanās virknīti. Turklāt, ja nosvēršanās jāmaina, tad noņemam smagāko uz sariem esošo atsvaru, bet, ja nav jāmaina, tad vieglāko. Šāda algoritma pareizību pamato pasvītrotais apgalvojums.
Uzliekot atsvarus uz sākumā tukšiem svaru kausiem apgrieztā secībā, noņemot iegūtajai virknītei, panākam vajadzīgo kausu nosvēršanās secību. ⊗

Uzdevums 8-19

Kādā pilsētā ir atļauta dzīvokļu maiņa (viena ģimene ieiet otras ģimenes dzīvoklī, otra - attiecīgi pirmās dzīvoklī, bet visāda cita veida maiņas ir aizliegtas). Divas ģimenes, kuras apmainījušās ar dzīvokļiem, nav tiesīgas tanī pat dienā piedalīties citās maiņās. Pierādiet, ka jebkuru visu pilsētas iedzīvotāju izplānota dzīvokļu maiņu var realizēt divās dienās.

●

Pieņemsim, ka katru mainīties gribošu ģimeni pārstāv kāds ģimenes loceklis. Izvēlēsimies vienu šādu pārstāvi. Tam aiz muguras nostādām tās ģimenes pārstāvi, kas grib mainīties uz priekšā stāvošā cilvēka dzīvokli, aiz otrā cilvēka nostādām tās ģimenes pārstāvi, kura vēlas ieiet otrās ģimenes dzīvoklī utt., līdz izveidojas aplis, t.i. pirmās ģimenes pārstāvis atrodas aiz pēdējās ģimenes pārstāvja, jo vēlas samainīties ar šo cilvēku dzīvokļiem. Tādā veidā visas mainīties gribošās ģimenes var sadalīt apļos. Ja kāda ģimene vēlas palikt savā dzīvoklī, tā viena pati veido atsevišķu apli. Dzīvokļu maiņa notiek tikai katra apļa ietvaros. Apskatām apli, k veido n mainīties gribošas ģimenes. Sanumurēsim tās ar x_1, x_2, ..., x_n, bet dzīvokļus- 1., 2., ..., n-tais. Tālāk redzamajā attēlā (attēls 8-1)ar nepārtrauktu līniju atzīmētas maiņas pirmajā dienā, bet ar raustītu - otrajā. Zem katra x_i uzrakstīti šo ģimeņu veco (līdzšinējo) dzīvokļu numuri, dzīvokļu numuri pēc pirmās maiņu dienas un pēc otrās maiņu dienas.



attēls 8-1

Atkarībā no tā, vai n ir pāra vai nepāra skaitlis:
ja n ir pāra skaitlis, tad pirmajā dienā $x_{n/2+1}$ samaina dzīvokli ar $x_{n/2}$, bet otrajā dienā nedara neko;
ja n ir nepāra skaitlis, tad pirmajā dienā $x_{(n+1)/2}$ nedara neko, bet otrajā dienā samaina dzīvokli ar $x_{(n+3)/2}$.
Pēc divām dienām katra no n mainīties gribējušajām ģimenēm ir saņēmusi karotā dzīvokļa atslēgas. ⊗

Uzdevums 8-20 (Hanojas tornis)

Dota piramīda, kas sastāv no n dažāda izmēra gredzeniem, kas uzmaukti uz vertikāla stienīša tā, ka pats lielākais gredzens atrodas apakšā, otrs lielākais uz tā, utt., līdz pašā augšā uzlikts pats mazākais gredzens. Divi citi stienīši sākumā ir tukši. Ar vienu gājienu drīkst noņemt vienu gredzenu no jebkura stienīša un pārlikt uz cita stienīša. Izmantojot papildus trešo stienīti, ar aprakstītās operācijas palīdzību visi gredzeni jāpārliek no sākotnējā stienīša uz otro. Pārlikšanas procesā nedrīkst likt lielāku gredzenu uz mazāka. Kāds ir mazākais pārlikšanu skaits k, ar kuru var paveikt šo uzdevumu?

●
Mazāko pārlikšanu skaitu, kas nepieciešams, lai n gredzenus pārliktu no viena stienīša uz otru saskaņā ar uzdevuma noteikumiem, apzīmēsim ar k(n). Acīm redzot, k(1)=1. Nav grūti pārliecināties, ka k(2)=3.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $k(n)=2^n-1$.

indukcijas bāze mums jau ir. Pieņemsim, ka apgalvojums pierādīts par k(1), k(2), ..., k(n) un aplūkosim n+1 gredzena gadījumi.
Lai pārliktu apakšējo no n+1 gredzeniem uz otro stienīti, vispirms augšējiem n gredzeniem jābūt sakārtotiem uz trešā stienīša. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu, tam nepieciešamas un pietiekamas 2^n-1 pārlikšanas. Pēc tam pārliekam lielāko gredzenu uz otro stienīti (a pārlikšana). Pēc tam n gredzenu pārlikšanai no trešā stienīša uz otro neieciešamas un pietiekamas 2^n-1 pārlikšanas.
Tātad $k(n+1) = (2^n-1) +1+(2^n-1)=2x2^n-1=2^{n+1}-1$, kas bija jāpierāda. ⊗

Uzdevums 8-21

Doti 3 vertikāli stienīši. Uz vien no tiem cits virs cita uzmaukti n gredzeni; abi pārējie stienīši sākumā ir tukši. Ar vienu gājienu var noņemt augšējo gredzenu no jebkura stienīša un uzmaukt uz cita stienīša (ja tur jau ir citi gredzeni, tad uzmauktais paliek augšpusē). Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var panākt, lai gredzeni novietotos uz tā paša stienīša, uz kura tie atradās sākumā, bet apgrieztā secībā?

●

Pierādīsim, ka prasīto var izdarīt ar 3n-2 gājieniem.

Pieņemsim, ka gredzeni sākumā uzmaukti uz stienīša X, bet stienīši Y un Z ir brīvi. Rīkojamies sekojoši:

a) augšējo gredzenu parliekam uz Y;

b) pārējos gredzenus pārliekam vienu aiz otra uz Z (tie tur novietojas apgrieztā secībā);

c) gredzenu no Y pārliekam uz X;

d) visus gredzenus, izņemot apakšējo, no Z pārliekam vienu aiz otra uz Y (tie tur novietojas sākotnējā secībā), bet apakšējo gredzenu no Z pārliekam uz X;

e) visus gredzenus no Y vienu aiz otra pārliekam uz X.

Esam iztērējuši 1+(n-1)+1+(n-2)+1+(n-2)=3n-2 gājienus.

Tagad parādīsim, ka ar mazāku gājienu skaitu uzdevuma prasības nav izpildāmas.

Skaidrs, ka neviens gredzens nevar visu laiku palikt uz X; tātad katram gredzenam jāizdara vismaz 2 gājieni. Ja kopējais gājienu skaits būtu mazāks par 3n-2 (t.i., ne lielāks par 3n-3), tad atrastos 3 gredzeni, katrs no kuriem pārvietots tieši 2 reizes. tie ir pārvietoti uz stienīšiem Y un Z; varam pieņemt, ka divi no tiem pārvietoti uz stienīti Y. Skaidrs, ka šie gredzeni savu savstarpējo novietojumu pēc atgriešanās uz X nav mainījuši.

Iegūtā pretruna pierāda mūsu apgalvojumu. ⊗

Uzdevums 8-22

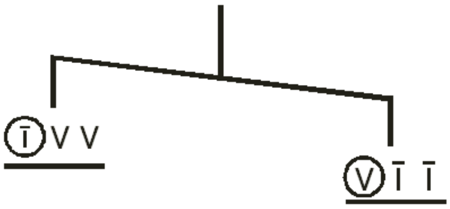
Tiesā kā lietiškie pierādījumi tiek uzrādītas 14 monētas. Ekspertam izdevās noskaidrot, ka 7 no tām ir viltotas, pārējās - īstas, pie kam uzzināt, kuras monētas tieši ir viltotas, kuras - īstas. Tiesai zināms tikai, ka viltotās monētas sver vienādi, īstās arī sver vienādi, bet viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Eksperts grib ar 3 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem pierādīt tiesai, ka visas viņa noteiktās viltotās monētas tiešām ir neīstas, bet īstās ir tiešām īstas. Vai viņam tas izdosies?

●

Risinājumā īstās monētas apzīmēsim ar "ī", viltotās ar "v". Ja kādā svēršanā tiek izmantotas monētas, par kuru tipu tiesa jau pārliecināta, tās apvilksim ar aplīti.

Pirmajā svēršanā eksperts novieto uz viena kausa vienu īstu, uz otra - vienu viltotu monētu. Īstā monēta nosveras uz leju. Tiesai jāatzīst, ka tas var notikt tikai vienā gadījumā, proti, uz leju nosvērusies monēta ir īsta, bet otra viltota.

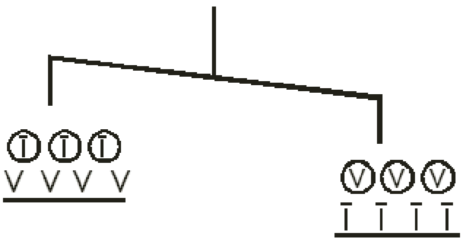
Otro svēršanu eksperts veic, kā parādīts attēlā (attēls 8-2).



attēls 8-2

Tā kā par apvilkto monētu tipu tiesa jau ir pārliecināta, tad tai jāatzīst - šāds iznākums iespējams tikai tad, ja abas līdz šim nenoskaidrotās monētas uz smagākā kausa ir īstas, bet uz vieglākā - viltotas; pārliecinieties par to patstāvīgi, izvēloties citas iespējas.

Ar trešo svēršanu, kas parādīta nākamajā attēlā (attēls 8-3), eksperts savu darbu beidz:



attēls 8-3

Šis uzdevums, kura autors ir Latvijas Universitātes profesors R. Freivalds, demonstrē svarīgu faktu: <u>pierādījums var būt būtiski īsāks par tā atklāšanas procesu</u>. Vispārinot izklāstīto metodi n īstu un n viltotu monētu gadījumam, iegūstam, ka eksperts savu darbu var veikt ar $[\log_2 n]+1$ svēršanām. Savukārt, lietojot 1.7. punkta metodes, nav grūti pierādīt, ka ekspertam īsto monētu <u>*atrašanai*</u> vajadzēja patērēt vismaz $\log_3 C_{2n}^{n}$

svēršanas; tā kā $C_{2n}^{n} \geq 2^{n}$, tad īsto monētu atrašanai jāpatērē <u>vismaz</u> $n \cdot \log_3 2$ svēršanas (patiesībā - vēl vairāk). Bet lielums $n \cdot \log_3 2$ - lineāra n funkcija - aug daudz straujāk par logaritmisko lielumu $[\log_2 n]+1$. ⊗

<u>Uzdevums 8-23</u>

Jūsu rīcībā n dažādi atsvari, to svars 1kg, 2kg, ... n kg. Atsvari jāsakārto trijās pēc svara vienādās kaudzītēs. Vai tas ir izdarāms, ja a)n=1977; b)n=1978?

●

Atsvaru kopīgais svars ir $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Tātad, vai nu n, vai n+1 jādalās ar 3. Ja n=2, vai n=3, prasība nav izpildāma. Ja n=5 vai n=6, tad svarus var salikt:

1kg	2kg	5kg		1kg	2kg	3kg
4 kg	3kg			6kg	6kg	4kg

Ja n atsvari jau slikti, tad arī n+3 atsvarus var salikt. Atsvaru n+3 kg novieto tajā kaudzītē, kurā ir 1 kg, atsvarus 1kg un n+1 kg novieto otrajā kaudzītē, bet atsvaru n+2 kg trešajā.

Tātad, n atsvarus trijās kaudzītēs var salikt tad un tikai tad, ja n≥5 un vai nu n, vai n+1 dalās ar 3.
Tas nozīmē, ka gadījumā, ja n=1977, atsvarus trijās pēc svara vienādās kaudzītēs varam salikt. Gadījumā, ja n=1978, atsvarus trijās pēc svara vienādās kaudzītēs salikt neizdosies. ⊗

<u>Uzdevums 8-24</u>

Doti n akmeņi ar masām 1kg, 2kg, 3kg, ..., n kg. Kādām n vērtībām tos var sadalīt divās vienādās kaudzītēs ar vienādām masām (akmeņus skaldīt nedrīkst)?

●
Masu summa M=1+2+3+...+n=n(n+1)/2. Acīm redzot, <u>nepieciešamais</u> nosacījums, lai varētu paveikt uzdevumā prasīto, ir M - pāra skaitlis. Viegli pierādīt, ka šī summa ir para skaitlis, ja n=4t (t=1, 2, ...) vai n=4t+3 (t=0, 1, ...) un nepāra skaitlis, ja n=4t+1 vai 4t+2 (t=0, 1, ...). Parādīsim, ka minētais nepieciešamais nosacījums ir arī pietiekamais.

A.
Parādīsim, ka akmeņus ar masām1, 2, ..., 4t var sadalīt 2 kaudzēs ar vienādām masām. Tiešām, tā kā (4i+3)+(4i+4)=(4i+2)+(4i+3), tad katru no i četriniekiem4i+1, 4i+2, 4i+3, 4i+4 var sadalīt divās daļās ar vienādām masām un pēc tam apvienot daļas no dažādiem četriniekiem divās kaudzēs (i=0, 1, ..., t-1).

B.

Akmeņus ar masām 1, 2, 3, ..., 4t+3 sadala līdzīgi: vispirms vienā kaudzē ievieto akmeņus ar masām 1 un 2, bet otrā akmeni ar masu 3, bet pēc tam apskata četriniekus 41, 4i+1, 4i+2, 4i+3 un ievēro, ka 4i+(4i+3) =(4i+1) + (4i+2), kur i=1, 2, ..., t. ⊗

Uzdevums 8-25

Doti n akmeņi ar masām 1kg, 2kg, ..., n kg. Tie jāsadala k kaudzēs tā, lai visu kaudžu masas būtu vienādas (akmeņus skaldīt nedrīkst). Kādiem n un k tas iespējams?

●

Skaidrs, ka jāizpildās dieviem acīmredzamiem nepieciešamiem nosacījumiem:
a) kopējai masai 1+2+3+...+n jādalās ar k;
b) vienas kaudzes paredzamā masa (1+2+...+n)/k nedrīkst būt mazāka par vissmagākā akmens masu n (tādā gadījumā, šo akmeni nesadalot nevarētu ievietot nevienā kaudzē).
Pierādīsim, ka šo abu acīmredzamo nosacījumu izpildīšanās ir arī pietiekama, lai uzdevumā prasīto varētu veikt.
Ar matemātisko indukciju pēc n pierādīsim šādu apgalvojumu:
*ja 1+2+...+n=k*m un m≥n, tad S_n={1;2;...;n} var sadalīt k grupās tā, ka katras grupas skaitļu summa ir m (k un m - naturāli skaitļi).*
Bāze. Apgalvojumu triviāli pārbaudīt pie n=1;2;3.
Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs kopām S_1, S_2, ..., S_{n-1} un pierādīsim tā pareizību kopai S_n.
Tā kā 1+2+...+n=n(n_1)/2, tad apgalvojums ir pareizs pie m=n un pie m=n+1.
Apskatot lielākas m vērtības, šķirosim atsevišķus gadījumus.

A.
Pieņemsim, ka m≥2n. Tad
$k = \frac{n(n+1)}{2m} \le \frac{n+1}{4}$, n≥4k-1 un n-2k ≥ 2k-1>0.]
Ievērosim, ka 1+2+...+ (n-2k) = (1+...+n) - ((n-2k+1)+..+n) = mk - k(2n-2k+1) dalās ar k. Tā kā n≥4k-1, tad

$$\frac{1+2+...+(n-2k)}{n-2k} = \frac{n-2k+1}{2} \ge k \ ;$$

tātad

$$\frac{1+2+...+(n-2k)}{k} \ge n-2k \ .$$

Tāpēc saskaņā ar induktīvo pieņēmumu skaitļus 1, 2, ..., n-2k var sadalīt k grupās ar vienādām summām (pirmais un pēdējais, otrais un priekšpēdējais, utt.) un pievienot šos pārus pa vienam jau izveidotajām grupām.
Vajadzīgais sadalījums izveidots.

B.
Pieņemsim, ka n+1<m<2n un m - pāra skaitlis.
Aplūkosim n-m/2 pārus: (n, m-n), (n-1, m-n+1), ..., ((m/2)+1, (m/2)-1). Katra pāra skaitļu summa ir m.

Tagad apskatīsim pāros neiekļautos skaitļus, izņemot m/2; tie veido kopu S_{m-n-1}, un to summa ir

$$1+2+...+(m-n-1)=(1+2+...+n)-((m-n)+...+n)=mk-m\frac{2n+1-m}{2}=\frac{m}{2}(2k+m-2n-1)\cdot$$

Šī summa dalās ar m/2. Tā kā m<2n, tad m/2 ≥ m-n-1 (atceramies, ka m - pāra skaitlis!). Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu kopu S_{m-n-1} var sadalīt 2k+m-2n-1 apakškopās ar elementu summām m/2.

Tātad mēs esam izveidojuši 2k+m-2n skaitļu grupas ar summām m/2 (nupat iegūtās, kā arī pats skaitlis m/2), un n-m/2 grupas ar summām m. Apvienojot pa pāriem grupas ar summām m/2, iegūsim vajadzīgo.

C.

Pieņemsim, ka n+1<m<2n un m - nepāra skaitlis.

Aplūkosim n-(m-1)/2 pārus: (n, m-n), (n-1, m-n+1), ..., ((m+1)/2, (m-1)/2). Katra pāra skaitļu summa ir m.

Atlikuši vēl skaitļi no kopas S_{m-n-1}; to summa ir

$$(1+2+...+n)-((m-n)+...+n)=mk-m\frac{2n-m+1}{2}=m\frac{2k-2n+m-1}{2}.$$

Tā kā $\frac{2k-2n+m-1}{2}$ ir vesels skaitlis (atceramies, ka m - nepāra) un m ≥ m-n-1, tad S_{m-n-1} var sadalīt grupās tā, ka katras grupas skaitļu summa ir m.

Vajadzīgais sadalījums iegūts. ⊗

9. NODAĻA

DETERMINĒTA KĀRTOŠANAS PROCESA REZULTĀTA NOTEIKŠANA.

Šajā nodaļā ietvertajos uzdevumos ir aprakstīts kārtošanas procesa algoritms, bet mūsu uzdevums būs prognozēt tā izpildes iespējamos rezultātus.

Uzdevums 9-1

a) Astotās klases skolēni nostādīti ierindā. Katram no viņiem priekšā stāv septītās klases skolēns, kurš pēc auguma ir mazāks par attiecīgo astotklasnieku. Pierādiet, ka, ja astotklasnieku rindu nostādīs pēc augumiem un arī septītklasniekus nostādīs pēc augumiem, tad tāpat kā iepriekš katrs astotklasnieks būs garāks par tam priekšā stāvošo septītklasnieku. (Augumus sakārto atbilstošā secība no kreisās uz ;labo pusi)
b) Kareivju pulks nostādīts taisnstūra veidā tā, ka karā rindā karavīri stāv pēc auguma. Pierādiet - ja katrā kolonnā karavīrus sakārtos pēc auguma, tad katrā rindā tāpat kā iepriekš viņi stāvēs sakārtoti pēc auguma.

●

a) Lai pierādītu prasīto, pietiek pierādīt, ka k-tais pēc auguma astotklasnieks ir garāks par k-to septītklasnieku. Pieņemsim, ka A ir k-tais pēc auguma septītklasnieks. Tad atradīsies ne mazāk tādu septītklasnieku (tai skaitā arī A), kas pēc auguma nav īsāki par A. visi k atsotklasnieki, kas stāv aiz viņiem, ir garāki, tāpēc pēc auguma k-tais garākais astotklasnieks ir garāks par A.
b) Šis uzdevums tiešā veidā reducējas uz a) gadījumu. ⊗

Uzdevums 9-2

Skautu vienība izvietota taisnstūra veidā. Katrā rindā tiek atrasts pats garākais un no šiem skautiem tiek izvēlēts pats īsākais. Katrā kolonnā tiek atrasts pats īsākais un no tiem tiek izvēlēts pats garākais skauts. Kurš no šiem diviem skautiem ir garākais? (Tiek uzskatīts, ka mūs interesējošie skauti ir dažādi cilvēki.)

●

Pieņemsim, ka pašu īsāko no garajiem sauc Jānis, bet garāko no īsajiem - Pēteris. Aplūkosim rindu, kurā stāv Jānis un kolonnu, kurā stāv Pēteris. To krustpunktā stāv kaut kāds skauts. Pieņemsim, ka viņu sauc Juris. Juris ir īsāks par Jāni, bet garāks par Pēteri. Tātad Jānis ir garāks par Pēteri. ⊗

Uzdevums 9-3

Naturāli skaitļi no 1 līdz 1982 izvietoti viens aiz otra kaut kādā secībā. ESM caurskata no kreisās uz labo pusi blakus stāvošu skaitļu pārus (pirmo un otro, otro un trešo utt.) līdz pat pēdējam un apmaina vietām skaitļus aplūkojamajā pārī, ja lielākais no tiem atrodas pa kreisi. Pēc tam mašīna caurskata visus pārus,. virzoties no labās uz kreiso pusi līdz pirmajam, mainot vietām skaitļus pēc tā paša likuma. Pēc šīs caurskates ar ESM strādājošais operators saņem informāciju, ka skaitlis,

kas atrodas 100-jā pozīcijā, abas reizes nav izkustējies no savas vietas. Atrodiet šo skaitli.

●

Apzīmēsim 100-tajā pozīcijā stāvošo skaitli ar M. Ko nozīmē, ka skaitlis M nav izkustējies no vietas, ESM kustoties no kreisās uz labo pusi? Tas nozīmē, ka M ir lielāks par tiem 99 skaitļiem, kas atrodas no viņa pa kreisi, pretējā gadījumā M noteikti būtu samainīts ar kādu lielāku skaitli un būtu izkustējies no savas sākotnējās pozīcijas. Tātad varam uzskatīt, ka ***M≥100***.
Kādu informāciju par M sniedz fakts, ka, ESM kustoties no labās puses uz kreiso, M nav izkustējies no savas sākotnējās pozīcijas? Acīm redzot, līdzīgi kā iepriekš M ir mazāks par tiem 1882 skaitļiem, kas atrodas no viņa pa labi. Tiešām, ja tā nebūtu, tad M būtu samainīts ar mazāku skaitli ESM atpakaļceļā. Tātad ***M≤100***. no abām izceltajām nevienādībām seko, ka ***M=100***. ⊗

Uzdevums 9-4

Dots n+1 atsvars ar kopējo svaru 2n un svari ar 2 kausiem, kas atrodas līdzsvarā. Katra atsvara svars ir izsakāms ar naturālu skaitli. Atsvarus pa kārtai liek uz svaru kausiem: vispirms pašu smagāko (vai vienu no pašiem smagākajiem), tad pašu smagāko no atlikušajiem utt.. Pie kam katru nākamo atsvaru liek uz tā kausa, kurš patreizējā brīdī ir vieglākais, bet, ja svari atrodas līdzsvarā, tad uz jebkura kausa. Pierādiet, ka pēc tam, kad uz svariem būs salikti visi atsvari, svari atradīsies līdzsvarā.

●

Pieņemsim, ka atsvarus esam sadalījuši 3 grupās:
1. grupā ieskaitīsim tos atsvarus, kuru svars ir 1 vienība;
2. grupā ieskaitīsim tos atsvarus, kuru svars ir 2 vienības;
3. grupā ieskaitīsim visus pārējos atsvarus.

Pieņemsim, ka 1. grupā pavisam ir x atsvaru, 2. grupā - y, bet 3. grupā - z atsvaru. Tad uzdevuma noteikumus varam pierakstīt sekojošas vienādojumu sistēmas veidā:

$$\begin{cases} x+y+z=n+1 \\ x+2y+\sum\limits_{z} m_i = 2n \end{cases} \quad (1)$$

No pirmā vienādojuma izsakot n, iegūstam:

n = x+y+z-1
Tad otro vienādību varam pārrakstīt sekojoši:

$$x=\sum_{z} m_i - 2z + 2 \quad (2)$$

Labajā pusē pirmo saskaitāmo pārrakstīsim citā veidā:

$$\sum_{z} m_i = \sum_{z-1} m_i^{'} + M ,$$

kur M - paša smagākā atsvara masa. Tagad izteiksme (2) pārrakstāma šādi:
$$\mathrm{x} = \mathrm{M} + \sum_{z-1} m_i' - 2z + 2 = M + \sum_{z-1} m_i' - 2(z-1).$$

Tā kā 3 grupā ieskaitījām visus tos atsvarus, kuru svars lielāks par 2, tad tas nozīmē, ka $\sum_{z-1} m_i' - 2(z-1) \geq 0$. Tātad x≥M (atsvaru ar masu 1 skaits (un tātad arī svars) ir lielāks par smagākā atsvara svaru). Tālākais spriedums ir sekojošs: katrā laika momentā uz svaru kausiem uzlikto atsvaru masa neatšķiras vairāk kā par M. tas nozīmē, ka pēc tam, kad uz svariem būs salikti visi atsvari, kuru svars lielāks par 1, svarus varēs nolīdzsvarot ar atsvariem ar svaru 1. ⊗

Uzdevums 9-5

Pie apaļa galda sēž 25 cilvēki. Katram no viņiem ir izdalīts pa divām kartiņām. uz katras no 50 kartiņām ir uzrakstīts viens no skaitļiem 1, 2, ...25, pie kam katrs no šiem skaitļiem ir sastopams 2 reizes. reizi minūtē pēc vadītāja signāla katrs no sēdošajiem padod savam kaimiņam, kas sēž pa labi, to kartiņu, uz kuras uzrakstīts mazākais skaitlis. Ja kādam uz abām kartiņām uzrakstītie skaitļi sakrīt, tad process beidzas. pierādiet, ka tas agri vai vēlu notiks.

●

Gadījumā, ja pēc kāršu izdalīšanas kādam no dalībniekiem abas kārtis jau ir vienādas, tad process beidzas. Tālāk aplūkosim gadījumu, kad katram spēles dalībniekam izdalītās kārtis ir atšķirīgas.
Viegli ievērot, ka kārtis ar uzrakstu 25 nekad neatstāj to spēlētāju, kuram tās pašā sākumā ir iedalītas (jo nav neviena kārts, uz kuras būtu uzrakstīts lielāks skaitlis par 25). Tātad pie galda noteikti sēdēs 2 cilvēki, kuri visas no kaimiņiem saņemtās kārtis pados tālāk. Kas notiek ar kārtīm ar uzrakstu 24? Nav grūti ievērot, ka augstākais pēc 2 spēles vadītāja signāliem (spēles soļiem) arī šīs kārtis apstāsies un tālākajā spēles gaitā vairs nekustēsies (vai arī abas kārtis nonāks viena cilvēka rokās un spēle beigsies. tālāk šādus variantus vairs neapskatīsim). Tātad pēc kaut kāda soļu skaita būs jau četras kārtis, kuras tālākajā spēles gaitā neatstās savu pozīciju. Par cik pie galda sēž 15 cilvēki, tad viegli saprast, ka agri vai vēlu kārtis no 25 līdz <u>*14*</u> noteikti apstāsies (vai arī kāds spēles dalībnieks būs saņēmis abas vienādās kārtis un spēle beigsies). Par cik visas kārtis ir pa divām, tad šādā situācijā 24 pie galda sēdošie cilvēki pados pienākošās kārtis pa labi, bet viens spēlētājs kārtis pados tālāk pamīšus, vadoties pēc spēles noteikumiem. Tā tas turpināsies kamēr pie šī 25-tā spēlētāja nonāks <u>*pirmā*</u> (skatoties kāršu kustības virzienā) kārts ar uzrakstu 13. Savukārt otra kārts ar uzrakstu 13 allaž tiks padota pa labi (par cik pie katra spēlētāja atrodas viena kārts, uz kuras uzrakstīts lielāks skaitlis) līdz nonāks pie "iestrēgušās" kārts ar uzrakstu 13 un spēle beigsies. Līdz ar to esam parādījuši, ka šādi organizēts process agri vai vēlu beigsies. ⊗

Uzdevums 9-6

Liela ozola zaros sēž dažas vārnas. Pēc signāla tās sāk pārsēsties. Katru minūti vienu no vārnām padzen kaimiņienes, kas sēž uz tā paša zara, un šī vārna pārlido uz nākošo pēc augstuma zaru (uz zaru, kas atrodas augstāk kāiepriekšējais0; ja no augšas zaru nav, vārna aizlido. Visi zari izvietoti dažādā augstumā. Pierādiet, ka laiks, pēc kura process beigsies (t.i. uz katra zara atradīsies ne vairāk kā viena vārna), nav atkarīgs no pārlidojumu secības, bet gan no vārnu sākotnējā izvietojuma.

●

Šā uzdevuma atrisinājumā izmantosim matemātisko indukciju pēc zaru skaita. Gadījumā, ja ir tikai viens zars, uz kura sasēdušās n vārnas, tad acīm redzami, ka neatkarīgi no tā, kura vārna būs spiesta aizlidot pirmā, kura pēdējā, pēc n-1 soļiem uz zara būs palikusi viena vārna.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā k zaru gadījumā, un pierādīsim, ka tas ir spēkā arī k+1 zara gadījumā.

k+1 zara gadījumā varam uzskatīt, ka uz k+1 zara pavisam sēž x+y vārnas, no kurām y ir kaut kā izvietojušās uz k zariem, bet x vārnas sēž uz augšējā, (k+1) zara. Kādas pārlidošanas vispār ir iespējamas?

1)

pārlidošanas k zaru sistēmas robežās. Pēc induktīvā pieņēmuma šo pārlidošanu skaits nav atkarīgs no vārnu pārlidošanas secības, bet tikai no vārnu sākotnējā izvietojuma. Šo pārlidojumu skaitu apzīmēsim ar P_1;

2)

pārlidošanas no k zaru sistēmas uz (k+1)-o zaru. Viegli saprast, ka ir gluži vienalga, kādā secībā vārnas ierodas uz (k+1)-o zaru. Šim nolūkam jāpatērē s=y-k pārlidošanas.

3)

aizlidošana no koka. Ja uz (k+1)-ā zara, ievērojot iepriekšējos spriedumus, nonāks s vārnas, tad neatkarīgi no vārnu aizlidošanas secības, aizlidošanai no tā jāpatērē x+s-1 signāls.

Tātad, pēc kaut kāda pārlidojumu skaita $P=P_1+s+(x+s-1)$ process būs beidzies. Par cik ne P_1, ne x, ne arī s nav atkarīgi no pārlidojumu secības, bet gan tikai no vārnu sākotnējā izvietojuma, uzdevumā prasīto esam pierādījuši. ⊗

Uzdevums 9-7

Pēc 20 daiļslidotāju uzstāšanās katrs no 9 tiesnešiem pēc sava ieskata sadala vietas no 1. līdz 20. Izrādījās, ka katra daiļslidotāja vietas, ko piešķīruši dažādi tiesneši, neatšķiras vairāk par 3. Saskaitīsim vietu summas, ko ieguvis katrs daiļslidotājs, un sakārtosim šos skaitļus to pieaugšanas secībā $c_1 \le c_2 \le c_3 \le \ldots \le c_{20}$. Kāda lielākā vērtība var būt c_1?

●

Ja vienam daiļslidotājam pirmo vietu ir piešķīruši visi tiesneši, tad $c_1=9$. ja pirmās vietas piešķirtas diviem daiļslidotājiem, tad viens no viņiem ir saņēmis mazāk kā 5

pirmās vietas, bet pārējās viņa iegūtās vietas ir ne augstākas par ceturto, tāpēc $c_1 \leq 5x1+4x4=21$.
Ja pirmās vietas piešķirtas 3 daiļslidotājiem, tad, tā kā pārējās to iegūtās vietas nav augstākas par ceturto, tad visu šo daiļslidotāju vietu summa nav lielāka par 1x9+3x9+4x9=72. tātad $c_1 \leq 24$. ja sportistu, kas ieguvuši pirmo vietu, ir četri, tad viņu vietu kopējā summa nepārsniedz 90. Tātad vienam no viņiem punktu summa nav lielāka par 22. Gadījums, kad pirmo vietu iegūst 5 un vairāk sportisti, ir neiespējams, jo tad priekš viņiem visiem nepietiks punktu no 1 līdz 4.
Tātad $c_1 \leq 24$. parādīsim, ka iegūt piemēru ar c1=24. ja tiesneši punktus sadala šādi: katrs no trim labākajiem daiļslidotājiem saņēmis vietas 1,1,1, 3,3,3, 4,4,4, katrs no trim nākošajiem 2,2,2, 5,5,5, 6,6,6, bet pārējie patvaļīgi, tad iegūstam sadalījumu, pie kura $c_1=24$. ⊗

Uzdevums 9-8

Tenisa federācija visiem tajā ietilpstošajiem tenisistiem piešķīra kvalifikācijas numurus: stiprākajam - pirmo, nākamajam stiprākajam - otro, utt.. Zināms, ka to tenisistu tikšanās reizēs, kuriem kvalifikācijas numuri atšķiras vairāk kā par 2, vienmēr uzvar sportists ar mazāko numuru. Turnīrs, kurā piedalās 1024 stiprākie tenisisti, tiek rīkots pēc olimpiskās sistēmas: katra apļa dalībniekus pēc izlozes sadala pāros un nākošajā aplī iekļūst katra pāra savstarpējās spēles uzvarētājs, tā kā pēc katra apļa dalībnieku skaits samazinās divas reizes. tādējādi pēc 10. apļa tiks noskaidrots uzvarētājs. Kāds ir lielākais iespējamais uzvarētāja numurs?

●
Lielākais uzvarētāja numurs ir 20.
Tā kā tenisists k var zaudēt tikai (neskaitot stiprākos) tikai (k+1)-ajam un (k+2)-ajam tenisistam, tad pēc katra apļa stiprākā no vēl nezaudējušajiem numurs nevar palielināties vairāk kā par 2. Tādējādi visa turnīra uzvarētāja numurs nav lielāks par 21. pierādīsim, ka tomēr arī tenisists ar numuru 21 nevar kļūt par uzvarētāju.
Lai to pierādītu, pieņemsim, ka pēc pirmā apļa jāizstājas pirmajam un otrajam tenisistam, zaudējot trešajam un ceturtajam (citādi uzvarētāja numurs ir mazāks par 21); otrajā aplī jāizstājas trešajam un ceturtajam, zaudējot piektajam un sestajam, u.t.t. līdz pat 9.aplim, kurā deviņpadsmitajam un divdesmitajam jāuzvar attiecīgi septiņpadsmitais un astoņpadsmitais tenisists. Tādā veidā 21. tenisists neiekļūst finālā, kurā sacenšas divi.
Atlicis parādīt tāda turnīra piemēru, kurā uzvar divdesmitais spēlētājs. Šajā nolūkā visus tenisistus sadalīsim 2 grupās pa 512 cilvēkiem katrā. Pirmajā grupā iekļausim 19-o, 20-o un vēl 510 vājākus spēlētājus. Turnīru grupā organizējam tā, lai uzvarētu 20-tais spēlētājs (to, acīmredzot, var izdarīt). Otrā grupā iekļausim 1-o, 2-o, …, 18-o un atlikušos vājākos sportistus un turnīru organizējam tā, lai uzvar 18-tais. To var izdarīt, noorganizējot turnīru tā, kā tas aprakstīts augstāk: pirmajā aplī 3-ais un 4-tais izcīna uzvaru pār 1-o un 2-o spēlētāju, otrajā aplī 5-tais un 6-tais uzvar 3-o un 4-o sportistu, u.t.t. līdz astotajam aplim, kad 17-ais un 18-tais izcīna uzvaru pār 15-o un 16-o, bet devītajā aplī 18-tais uzvar 17-o. Finālā satiekas 20-tais un 18-tais un tātad 20-tais var uzvarēt. ⊗

Uzdevums 9-9

Dota kaudzīte ar 2n+1 kartiņām, ar kurā atļautas divas sekojošas operācijas:
a) no augšas noņemt daļu kartiņu un novietot to apakšā, neizmainot kartiņu kārtību;
b) augšējās n kartiņas, ievērojot kārtību, ievienot n starpās starp apakšējām n+1 kartiņām.

●
Pierādiet, ka ar minēto operāciju palīdzību no sākotnējā kartiņu izvietojuma nevar iegūt vairāk nekā 2n(2n+1) dažādus kartiņu izvietojumus.

Sākumā sanumurēsim kartiņas ar skaitļiem no 0 līdz 2n. Šie kartiņu numuri nav nekas cits kā visi iespējamie skaitļu atlikumi, kādi var rasties, skaitli dalot ar 2n+1. Pie šādas numerācijas nosacījums: "jebkurām pēc kārtas sekojošām kartiņām ar numuriem a, b, c ir spēkā, ka a-2b+c dalās ar 2n+1" saglabājas. No šejienes izriet, ka pirmās un otrās kartiņas numuri kaudzītē nosaka citu kartiņu izvietojumu. Tā kā ir 2n(2n+1) pāri no diviem numuriem, tad arī kartiņu izvietojumu kaudzītē nav vairāk. ⊗

Uzdevums 9-10

Dota kolonna no n dažādu krāsu ķieģeļiem. Ar vienu operāciju drīkst paņemt dažus ķieģeļus no kolonnas apakšas un, nemainot to kārtību, novietot virspusē un pēc tam visu šo kolonnu apgriezt. Pierādiet, ka ar šādu operāciju palīdzību iegūto dažādo kolonnu skaits nepārsniedz 2n.

●
Aplūkosim uzdevumā doto algoritmu un paralēli veidosim citu tam atbilstošu modeli. Iedomāsimies, ka ķieģeļi nav sakrauti kolonnā, bet gan salikti pa apli. Noteiktības labad pieņemsim, ka kolonnas augšējais ķieģelis vienmēr pirms operāciju izpildes atradīsies apļa augšā (pozīcijā "pulksten 12"), bet pārējie ķieģeļi izvietoti vienādos attālumos viens no otra pulksteņa rādītāja kustības virzienā tādā pašā secībā, kā tie novietoti sākotnējā kolonnā. Kā pie šāda ķieģeļu izvietojuma būtu jāinterpretē kaut kāda ķieģeļu skaita k pārvietošana no kolonnas apakšas uz augšu? To varam interpretēt kā ķieģeļu apļa pagriešanu par k pozīcijām pulksteņa rādītāja virzienā. Otrai algoritma operācijai - izmainītās kolonnas apgriešanai - atbilst sekojoša operācija ar apli: pagriezīsim mūsu apli vēl par vienu pozīciju pa labi (par cik kolonnā pašā apakšā stāvošais ķieģelis mūsu modelī atrodas vienu vienību pa kreisi no pozīcijas "pulksten 12", tad, lai panāktu atbilstību starp modeļiem, pietiek pagriezt apli par vēl vienu vienību) un apgriezīsim apli ap vertikālo asi par 180°. Tagad pulksteņa rādītāju kustības virzienā apskatot ķieģeļu izvietojumu, varam pārliecināties, ka ķieģeļi izvietoti precīzi tāpat, kā tie stāvētu pēc sākotnējā algoritma abu operāciju veikšanas. Tātad esam parādījuši abpusēji viennozīmīgo atbilstību starp šiem abiem modeļiem.
Nav grūti ievērot, ka ķieģeļu apli varam pagriezt par n vienībām un tādējādi iegūt n atšķirīgus ķieģeļu izvietojumus. Veicot otru operāciju, varam iegūt ne vairāk kā n atšķirīgus spoguļattēlus. Tas nozīmē, ka dažādo ķieģeļu izvietojumu skaits nevar pārsniegt n+n=2n variantus. Par cik starp modeļiem pastāv viennozīmīga atbilstība, tad arī ar sākotnējo algoritmu iegūstamo dažādo ķieģeļu izvietojumu skaits nepārsniegs 2n. ⊗

<u>Uzdevums 9-11</u>

Regulāra 2n- stūra virsotnēs kaut kādā secībā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 2n, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts mainīt vietām skaitļus, kuru starpība ir 1. Pēc vairākiem tādiem gājieniem izrādījies, ka katrs skaitlis pārbīdījies par vienu virsotni pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, salīdzinot ar savu sākotnējo pozīciju. Pierādiet, ka kādā gājienā vietām tika mainīti skaitļi, kas pirms šī gājiena atradās pretējās 2n-stūra virsotnēs.

●

Pieņemsim pretējo. Apzīmēsim 2n-stūra virsotnes pulksteņa rādītāja kustības virzienā ar A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n. Apskatīsim virsotnes A_1 un B_1; pieņemsim, ka tajās sākotnēji ierakstīti skaitļi a un b, un a>b. Tā kā katrā gājienā skaitlis mainās tikai vienā no virsotnēm A_1 un B_1un šī izmaiņa notiek par lielumu 1, tad virsotnē A_1 visu laiku atrodas lielāks skaitlis nekā virsotnē B_1. Tā kā procesa beigās virsotnē A_1 nonāk skaitlis no A_2, bet virsotnē B_1 - skaitlis no B_2, tad sākotnēji virsotnē A_2 bija lielāks skaitlis nekā virsotnē B_2.Līdzīgi iegūstam, ka sākotnēji virsotnē A_3 bija lielāks skaitlis nekā B_3, A_4 - lielāks skaitlis nekā B_4, ..., A_n - lielāks skaitlis nekā B_n, B_1 - lielāks skaitlis nekā A_1. Tā ir pretruna, jo mēs aplūkojam gadījumu, kad sākotnēji A_1 bija lielāks skaitlis nekā virsotnē B_1. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs. ⊗

NOBEIGUMS.

Šis darbs uzskatāms par informatīvu ieskatu dažāda veida kārtošanas uzdevumos un orientēts uz jebkura vecuma lasītāju, kuram šķistu interesants šeit piedāvātais materiāls. Protams, galvenais adresāts ir skolēni, pie tam šajā darbā ietverti gan tādi uzdevumi, kuri būtu pa spēkam jaunāko klašu skolēniem, gan arī tādi, kas sagādātu mazas problēmas jau pieredzējušākiem vecāko klašu skolēniem. Tāpat piedāvātais materiāls var noderēt matemātikas un informātikas skolotājiem stundu un pulciņu nodarbību sagatavošanā.

Darbā ietvertie atrisinājumi nebūt nav vienīgie pareizie, tāpēc tas varētu radīt interesi pamēģināt atrisināt formulētās problēmas patstāvīgi un citā veidā, bet pēc tam salīdzināt iegūtos rezultātus.