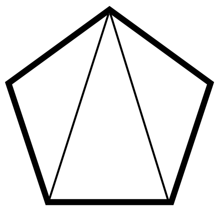
A. Cibulis

EKSTRĒMU UZDEVUMI

2. DAĻA



Rīga 2006

Cibulis A.
Ekstrēmu uzdevumi. II daļa. Rīga: Mācību grāmata, 2006. – 102. lpp.

Grāmata veltīta ekstrēmu uzdevumiem un to risināšanas elementārām metodēm. Tā satur daudz atrisinātu uzdevumu, atsevišķus jaunus rezultātus, kā arī vēsturiskas ziņas. Tā piemērota skolēniem, kuri padziļināti interesējas par matemātiku, kā arī matemātikas skolotājiem.

Grāmata iekļauta Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā sērijā. Tā sagatavota ar fonda NORD+NEIGHBOURS atbalstu.

ISBN 9984-18-329-7

Iespiests SIA „Mācību grāmata”, Raiņa bulv. 19, Rīgā, LV-1586, tel./fax. 7325322

SATURS

IEVADS

Elementārās metodes ir vieglāk apgūstamas,
ja pirms tām esam iepazinušies
ar neelementārām metodēm.

Grāmatas 1. daļā plašāk tika aplūkota ievērojamā nevienādība $G \leq A$, kas saista vidējo ģeometrisko un vidējo aritmētisko, kā arī Košī nevienādība.

Savukārt 2. daļā galvenā loma ir atvēlēta izoperimetriskajam uzdevumam, kā arī aplūkotas vairākas funkciju klases, kurām ekstrēmus var atrast elementārā veidā. Par vissenākajiem ekstrēmu uzdevumiem uzskata tā dēvētos izoperimetriskos uzdevumus (kāda figūra ierobežo vislielāko laukumu, ja uzdots tās perimetrs?). Jau Aristotelim (4. gs. p. m. ē.) bija zināms, ka "visietilpīgākās" figūras ir riņķis un lode attiecīgi starp plaknes un telpas figūrām. Ģeometriskie maksimumu un minimumu uzdevumi sastopami senatnes visu trīs dižāko matemātiķu – Eiklīda, Arhimēda un Apolonija – darbos. Saskaņā ar Enciklopēdisko vārdnīcu [EV, 55] Eiklīda slavenajos "Elementos" (6. grāmatā) atrodams visvienkāršākais un, ticams, arī visvecākais ekstrēmu uzdevums, proti, kādam taisnstūrim ar uzdotu perimetru ir vislielākais laukums? Apmēram pusi no grāmatas 2. daļas aizņem materiāls par izoperimetriskiem daudzstūriem. Darbā īpaša vieta ir ierādīta klasiskajai Zēnodora problēmai: kādam n-stūrim ar uzdotu perimetru ir vislielākais laukums? Atsevišķs punkts veltīts maksimālā daudzstūra (un vispār uzdevuma atrisinājuma) eksistences problēmai.

Darbā dota gan teorētiskā, gan praktiskā daļa. Turklāt ne visi uzdevumu risinājumi izklāstīti tradicionālā veidā, kad mērķi cenšas sasniegt pa iespējami "taisnāko" ceļu, t. i., ekonomējot laiku vai izklāsta apjomu. Ceļā uz mērķi laiku pa laikam tiek aplūkoti dažādi sānceliņi, skolēnu raksturīgākās kļūdas, maldus risinājumi utt. Praksē, risinot kādu jaunu problēmu, mums reti kad izdodas uzreiz (bez kļūdām, bez eksperimentēšanas) atrast īsāko, vienkāršāko risinājumu. Ir piedāvāti arī daži sofismi vai samērā vienkāršas kļūdas saturoši risinājumi, kuros lasītājam pašam vajadzētu ne tikai atrast pareizo risinājumu, bet arī saprast, kur citi risinātāji pieļāvuši kādu kļūdu, paviršību.

Ne darba saturs, ne dotās atsauces nepretendē uz izsmeļošu tēmas analīzi un atspoguļojumu. Tas ir tikai neliels ieskats atsevišķa tipa elementāri risināmos uzdevumos. Daudzi mācību līdzekļu autori izvairās dot atsauces uz izmantotajiem pirmavotiem un tādējādi stipri apgrūtina izsekot ideju attīstībai, uzdevumu izcelsmei, aizguvumiem.

Vairākas šeit neizvērstas tēmas var tikt izstrādātas skolēnu pētnieciskajos darbos. Elementāro metožu aspekts ir ļoti piemērots skolēnu un skolotāju vajadzībām, sevišķi gatavojoties matemātikas olimpiādēm. Kaut izklāsts ir elementārā līmenī, tomēr tā satura "sagremošanai" skolēniem jābūt pacietīgiem un pietiekami labi matemātiski sagatavotiem.

Izmantotās literatūras saraksts ir dots darba beigās. Grāmatas 2. daļā numerācija ir neatkarīga no 1. daļā lietotās numerācijas. Atsauces uz literatūru dotas formā [KR], [Zet, 3, 30-31], kur skaitļi norāda citētā avota lappuses.

1. nodaļa. Funkcija $ax + \frac{b}{x}$

Virsrakstā minētajai funkcijai ir ievērojama nozīme daudzu ekstrēmu uzdevumu risināšanā. Turklāt šīs funkcijas ekstremālo īpašību izpēte ir visai vienkārša.

Minēsim vairākus saistoša rakstura piemērus, kur parādās aplūkojamā tipa funkcija:

- Uzdevums par labāko redzes leņķi [Zet, 42– 43; Nat, 21; Cib1, 37];
- Heigensa uzdevums par lodēm [Cib1, 41];
- Eiklīda uzdevums par lielākā paralelograma ievilkšanu trijstūrī un tā modifikācija, kad uzdots paralelograma leņķis. [Funkcija $f(h) = \frac{ah}{4} - \frac{ay^2}{h}$ rodas salīdzinot *maksimālā* un *patvaļīga* paralelograma laukumus, Zet, 27 – 28];
- Viviāni uzdevums. [Zet, 58; Cib1, 17];
- Uzdevums par vismazākā tilpuma konusu, kurš apvilkts ap doto lodi [Cib1, 48 – 49];
- Minimizēt riņķa sektora perimetru, ja uzdots tā laukums, vai otrādi, maksimizēt riņķa sektora laukumu, ja uzdots sektora perimetrs;
- Minimizēt ap riņķi apvilkta taisnleņķa trijstūra laukumu;
- Minimizēt ap riņķi apvilkta taisnleņķa trijstūra hipotenūzas garumu;
- Novilkt taisni BC caur leņķa A iekšienē dotu punktu, lai iegūtu minimālā laukuma trijstūri ABC. [Elementārs ģeometrisks risinājums ir atrodams grāmatā [ŠČJ3, 332].
- Uzdevums par baterijas vislielāko jaudu [Nag, 49; O, 161; KUK, 357; Š1]
- Uzdevums par optimālo sviru [Kip, 24]

Monotonitātes intervāli

Ņemot vērā to, ka funkcijas $y(x) = ax + \frac{b}{x}$ grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu, t. i., $y(-x) = -y(x)$, pietiek noteikt šīs funkcijas monotonitātes intervālus pozitīviem x. Turpmāk uzskatīsim, ka $x > 0$ un ka koeficienti a un b nav vienādi ar nulli.

Ja reizinājums ab ir negatīvs, tad y ir monotona funkcija:

$\uparrow$) augoša, ja $a > 0$ un $b < 0$;

$\downarrow$) dilstoša, ja $a < 0$ un $b > 0$.

Nogrieznī $[x_1, x_2]$ definēta monotona funkcija savas ekstremālās vērtības sasniedz nogriežņa galapunktos.

Ja reizinājums ab ir pozitīvs, tad funkcijas y monotonitātes intervālu noteikšana kļūst nedaudz sarežģītāka.

1. lemma. $\min y(x) = y\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 2\sqrt{ab}$, ja $a > 0$ un $b > 0$;

$$\max y(x) = y\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = -2\sqrt{ab}, \text{ ja } a < 0 \text{ un } b < 0.$$

Lemmas pareizība izriet no nevienādības $u + v \geq 2\sqrt{uv}$, kas kļūst par vienādību tikai tad, kad $u = v$.

2. lemma. Ja a, b un x_1 pozitīvi, funkcijas $y(x) = ax + \frac{b}{x}$ definīcijas kopa ir nogrieznis $[x_1, x_2]$ un $x_3 := \sqrt{\frac{b}{a}} \in (x_1, x_2)$, tad y ir dilstoša nogrieznī $[x_1, x_3]$ un augoša nogrieznī $[x_3, x_2]$.

Pierādījums. Ņemsim $x_1 \leq x < z \leq x_3$. Tad jāpierāda sakarība

$$ax + \frac{b}{x} > az + \frac{b}{z} \Leftrightarrow \frac{b}{x} - \frac{b}{z} > az - ax \Leftrightarrow \frac{b(z-x)}{xz} > a(z-x) \Leftrightarrow b > axz.$$

Tā kā $axz < ax_3x_3 = b$, tad y ir dilstoša nogrieznī $[x_1, x_3]$. Analoģiski secinām, ka y ir augoša nogrieznī $[x_3, x_2]$.

No šīm lemmām kā sekas iegūstama šāda īsi formulējama

Teorēma. Nogrieznī $[x_1, x_2]$ definēta funkcija $y = ax + \frac{b}{x}$ savas ekstremālās vērtības sasniedz galapunktos x_1, x_2 vai punktā $x_3 = \sqrt{\frac{b}{a}}$, ja vien tas pieder šim nogrieznim.

Vairāki gan atrisināti, gan patstāvīgai risināšanai paredzēti piemēri, kuri saistīti ar aplūkojamo funkciju, ir doti mācību līdzeklī [VR].

"Pie kādas x vērtības izteiksmes $\frac{\lg^2 x + 4}{\lg x}$ vērtība ir mazākā?"

"Noteiksim izteiksmes mazāko vērtību:

$\frac{\lg^2 x + 4}{\lg x} = \lg x + \frac{4}{\lg x} \geq 2\sqrt{\lg x \cdot \frac{4}{\lg x}} = 4$. Tā ir 4. Mazāko vērtību izteiksme iegūst, ja lgx=2 jeb x=100." [VR, 19] [1)]

Atrisināsim divus patstāvīgai risināšanai paredzētos uzdevumus.

"Aprēķināt mazāko vērtību funkcijai $y = x + \frac{4}{x}$ intervālā [4;5]."

Minimuma punkts ir $x = 2$, taču tas nepieder dotajam intervālam. Funkcija y sasniedz savu minimumu galapunktā $x = 4$, jo

$$y = x + \frac{4}{x} \geq 4 + 1 \Leftrightarrow x - 4 \geq 1 - \frac{4}{x} = \frac{x-4}{x} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x}.$$

"Riņķa sektora laukums ir S. Kādam jābūt centra leņķim, lai sektora perimetrs būtu vismazākais?" [VR, 27]

Apzīmējot ar *r*, *p* un *x* attiecīgi riņķa rādiusu, sektora perimetru un centra leņķi, iegūsim $S = \frac{1}{2} r^2 x$ un

$$p = 2r + xr = 2r + \frac{2S}{r} \geq 4\sqrt{S}.$$

Optimālo centra leņķi nosakām no vienādības: $2r = \frac{2S}{r} = rx \Rightarrow x = 2$ (radiāni).

Kā sekas no šejienes iegūstam *duālā* uzdevuma "Maksimizēt riņķa sektora laukumu, ja uzdots tā perimetrs" atrisinājumu, proti, optimālais centra leņķis ir $x = 2$. [2)]

Uzdevums par baterijas vislielāko jaudu

Elektriskās baterijas jaudu P var aprēķināt pēc formulas $P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}$, *kur E ir nemainīgs elektrodzinējspēks, r – nemainīga baterijas iekšējā pretestība. Cik lielai jābūt ārējai pretestībai R, lai baterijas jauda P būtu vislielākā?* [KUK, 357] [3)]

Elementārs risinājums iegūstams, aplūkojot apgriezto lielumu. Tā minimums ir punktā $R = r$, t. i., baterijas jauda būs vislielākā, ja ārējā pretestība sakritīs ar iekšējo.

$$\frac{(r+R)^2}{R} = \frac{r^2}{R} + R + 2r \geq 2\sqrt{r^2} + 2r = 4r.$$

Uzdevums par skrūves optimālo leņķi

Skrūves lietderības koeficients ir vienāds ar $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+\beta)}$, *kur x – skrūves kāpes slīpuma leņķis, bet* β *– berzes leņķis. Noteikt tādu x, lai y būtu vislielākais.*

Uzdevums formulēts [Lub, 83], kur ar atvasinājuma palīdzību secināts, ka lietderības koeficients būs maksimāls, ja $x = 45^0 - \frac{\beta}{2}$. Uzrādīsim elementāru risinājumu, reducējot trigonometrisko funkciju uz aplūkotā veida funkciju ($t = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{tg}\beta$).

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+\beta)} = \frac{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\beta} = \frac{t(1-tb)}{t+b} = [t + b = u] = \frac{(u-b) - (u-b)^2 b}{u} =$$

$$= \frac{u - b - u^2 b + 2ub^2 - b^3}{u} = -b\left(u + \frac{1+b^2}{u}\right) + 1 + 2b^2.$$

Ekstrēmu punkts ir

$$u = \sqrt{1+b^2} \Rightarrow t = \operatorname{tg} x = \sqrt{1+b^2} - b = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta} - \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta = \frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Tā kā $\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$, tad optimālais slīpuma leņķis ir $x = 45^0 - \frac{\beta}{2}$.

Nevienādība $A \geq H$

Nevienādība starp vidējo aritmētisko un harmonisko ir līdzvērtīga tam, ka $S_n B_n \geq n^2$,

kur $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ un $B_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. Pamatojoties uz nevienādību $x + \frac{1}{x} \geq 2$, vispirms pārliecināmies, ka

$$S_2 B_2 = (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 1 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 1 \geq 4.$$

Tad, lietojot indukciju un atkal nevienādību $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, dabūjam vajadzīgo:

$$S_{n+1}B_{n+1} = (S_n + x_{n+1})\left(B_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) = S_n B_n + \frac{S_n}{x_{n+1}} + x_{n+1}B_n + 1 \geq S_n B_n + 2\sqrt{S_n B_n} + 1 \geq (n+1)^2.$$

<u>1. uzdevums</u>. Novilkt taisni BC caur leņķa A iekšienē dotu punktu, lai iegūtu minimālā laukuma trijstūri ABC.

No punkta P novilksim nogriežņus PE un PD, kas paralēli leņķa malām un to garumus apzīmēsim attiecīgi ar *p* un *q*, sk. 1. zīm. Nogriežņu DC un BE garumus apzīmēsim attiecīgi ar *x* un *y*. Tad no līdzīgiem trijstūriem BEP un PDC:

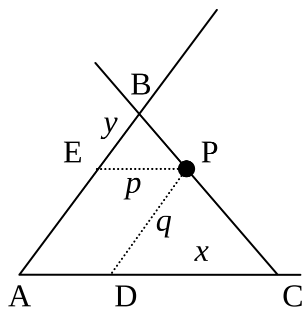
$$\frac{p}{y} = \frac{x}{q} \Rightarrow xy = pq,\ y = \frac{pq}{x} \Rightarrow$$

$$2\,\mathrm{L(ABC)} = (p+x)(q+y)\sin \mathrm{A} = (2pq + py + xq)\sin \mathrm{A}$$

$$2pq + py + qx = 2pq + qx + \frac{p^2 q}{x} \geq 2pq + 2pq = 4pq.$$

Laukumu minimizē punkts $x = p$.

<u>Piezīme</u>. Starp tikko atrisināto uzdevumu un Eiklīda uzdevumu pastāv cieša saistība. Kāda? [4)]



1. zīm.

<u>2. uzdevums</u>. Pierādīt, ka funkciju $\frac{p}{t} + \frac{q}{t+r}$ var reducēt uz aplūkojamā veida funkciju $ax + \frac{b}{x} + c$.

Pārveidosim doto funkciju

$$\frac{p}{t}+\frac{q}{t+r}=\frac{1}{t}\left(p+\frac{q}{1+\frac{r}{t}}\right)=\left[z=\frac{1}{t}\right]=z(p+\frac{q}{1+rz})=[x=1+rz]=$$

$$=\frac{x-1}{r}(p+\frac{q}{x})=\frac{xp}{r}-\frac{q}{rx}+\frac{q-p}{r}.$$

<u>3. uzdevums</u>. Pierādīt, ka funkciju $\sqrt{t^2+1}-kt$ var reducēt uz aplūkojamā veida funkciju $ax+\frac{b}{x}$.

Tiešais ceļš, kad pielīdzinām šīs funkcijas un cenšamies izteikt x vai t, šķiet, ir visai apgrūtinošs. Rīkosimies šādi:

$$\sqrt{t^2+1}=x+t \;\Rightarrow\; t^2+1=x^2+2xt+t^2 \;\Rightarrow\; 1-x^2=2xt \;\Rightarrow$$

$$t=\frac{1-x^2}{2x}.$$

Tagad pēc vienkāršiem pārveidojumiem iegūstam vajadzīgo formu

$$\sqrt{t^2+1}-kt=x+t-kt=x+t(1-k)=x+\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)(1-k)=$$

$$x(1+\frac{k-1}{2})+\frac{1-k}{2x}=\frac{k+1}{2}\cdot x+\frac{1-k}{2x}.$$

<u>4. uzdevums</u>. Atrast minimumu funkcijai $2\sqrt{t^2+1}-t$.

Izmantosim iepriekšējā uzdevuma pārveidojumu, kur k = 0.5. Tad

$$2\sqrt{t^2+1}-t=2(\sqrt{t^2+1}-0.5t)=2\left(0.75x+\frac{0.25}{x}\right)\geq 2\cdot 2\sqrt{\frac{3}{16}}=\sqrt{3}.$$

Noteiksim minimuma punktu:

$$0.75x^2=0.25 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; t=\frac{1-x^2}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

<u>5. uzdevums</u>. Noteikt funkcijas $\sqrt{t^2+1}-kt$ ekstrēmus nogrieznī [0; 1], ja k = 1.

Anniņa. Saskaņā ar 3. uzdevuma pārveidojumu dotā funkcija ir aizstājama ar $\frac{k+1}{2}\cdot x+\frac{1-k}{2x}=x$, jo $k=1$. Tā kā pēdējā ir monotona, tā ekstrēmus sasniedz nogriežņa galapunktos. Aprēķinu dotās funkcijas f vērtības dotā nogriežņa galapunktos un iegūstu, ka $f_{\min}=\sqrt{2}-1$, $f_{\max}=1$.

Jānītis. Pārbaudīsim, vai f ir dilstoša. Ņemsim $x<y$ un salīdzināsim funkcijas vērtības:

$$\sqrt{x^2+1}-kx>\sqrt{y^2+1}-ky$$

$$k(y-x)>\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$$

$$k(y-x)>\frac{y^2-x^2}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$k\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)>y+x.$$

Ja k ir pozitīvs, tad pēdējā nevienādība ir acīmredzama, jo $y^2 + 1 > y^2$ un $x^2 + 1 > x^2$. Tātad f ir dilstoša un Anniņas atbilde ir pareiza.

Jautrīte. Jānītis ir ieguvis dilstošu funkciju visiem pozitīviem k. Ņemšu $k = \frac{1}{2}$. Tad funkcija

$$\frac{k+1}{2} \cdot x + \frac{1-k}{2x} = \frac{1}{4}(3x + \frac{1}{x})$$

nav dilstoša. Vēl vairāk, tā vispār nav monotona, jo, kā jau 3. uzdevumā noskaidrots, tai punktā $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ir minimums.

Kļūda šeit ir diezgan viegli pamanāma. Jānīša spriedums ir pareizs, ja $k \geq 1$, bet ne visiem pozitīviem k.

<u>6. uzdevums</u>. Uzrādīt substitūciju, kas funkciju $\sqrt{kx+l} + \sqrt{m-dx}$, kur k un d pozitīvi skaitļi, pārveido par aplūkojamā veida funkciju $ax + \frac{b}{x} + c$.

<u>7. uzdevums</u>. Uzrādīt substitūciju, kas funkciju $x + k\sqrt{d - x^2}$, kur k un d pozitīvi skaitļi, pārveido par aplūkojamā veida funkciju $ax + \frac{b}{x} + c$.

<u>8. uzdevums</u>. Pierādīt, ka no visiem taisnleņķa trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir vienādsānu taisnleņķa trijstūrim.

Izteiksim hipotenūzu divos veidos, sk. 2. zīmējumu:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, c = a + b - 2r \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 4r(a+b) + 4r^2$$

$$0 = 2ab - 4r(a+b) + 4r^2 = b(2a - 4r) - 4ar + 4r^2 \Rightarrow$$

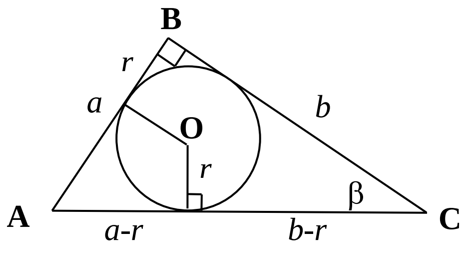
$$b = \frac{2ar - 2r^2}{a - 2r} = \begin{bmatrix} t = a - 2r, \\ a = t + 2r \end{bmatrix} = \frac{2r(t+r)}{t}.$$

Meklēsim minimumu reizinājumam

$$L = \frac{ab}{2} = \frac{(t+2r)(t+r)r}{t} = \left(t + \frac{2r^2}{t} + 3r\right)r \geq (2\sqrt{2r^2} + 3r)r.$$

Tātad

$$t_{\min} = r\sqrt{2} \Rightarrow a_{\min} = r\sqrt{2} + 2r, \; b_{\min} = r\sqrt{2} + 2r \text{ un } L_{\min} = r^2(3 + 2\sqrt{2}).$$



2. zīm.

Sekas. Ja a un b pozitīvi skaitļi un $a+b-\sqrt{a^2+b^2}=2r$, tad reizinājums ab ir minimāls, ja $a = b$, t. i., $\min ab=\left(r(2+\sqrt{2})\right)^2=r^2(6+4\sqrt{2})$.

Arī nākamo četru uzdevumu risinājumi iegūstami kā sekas no aplūkotā uzdevuma.

9. uzdevums. Noteikt minimumu funkcijai $\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$, $x>1$.

Doto funkciju dabū, iepriekšējā uzdevuma risinājumā b izteiksmē ievietojot $a = 2rx$.

$$b=\frac{2ar-2r^2}{a-2r}=\frac{r(2x-1)}{x-1}\ \Rightarrow ab=\frac{2r^2x(2x-1)}{x-1}.$$

$$a_{\min}=r\sqrt{2}+2r\ \Rightarrow\ x_{\min}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tiešu un īsāku risinājumu iegūst, lietojot šādu pārveidojumu:

$$\frac{x(2x-1)}{x-1}=2(x-1)+\frac{1}{x-1}+3\geq 2\sqrt{2}+3.$$

10. uzdevums. Kādam trijstūrim, kurš apvilkts ap doto riņķi, ir vismazākā katešu garumu summa?

11. uzdevums. Kādam trijstūrim, kurš apvilkts ap doto riņķi, ir visīsākā hipotenūza?

Atbilde. Abos uzdevumos optimālais trijstūris ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Tas izriet no formulām (sk. 8. uzdevuma risinājumu):

$$c = a + b - 2r,\ 0 = 2ab - 4r(a + b) + 4r^2\ \Rightarrow\ ab + 2r^2 = 2r(a + b).$$

Tā kā r ir nemainīgs lielums, tad no pēdējās vienādības redzams, ka katešu garumu summa ir minimāla tad un tikai tad, kad minimāls ir to reizinājums.

12. uzdevums. Noteikt funkciju $F_1(\gamma)=\left(1+\mathrm{ctg}\gamma\right)^2\mathrm{tg}2\gamma$, $F_2(\gamma)=\dfrac{1+\mathrm{ctg}\gamma}{\cos 2\gamma}$, $\gamma\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, minimuma punktus.

Atbilde. Abām funkcijām minimuma punkts ir $\beta = 2\gamma = 45^0$. Šīs funkcijas ar precizitāti līdz konstantam reizinātājam izsaka attiecīgi trijstūra ABC laukumu un hipotenūzas BC garumu, sk. 2. zīmējumu:

$$\mathrm{BC}=r+r\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2},\ \ \mathrm{AB}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{tg}\beta,\ \ 2\,\mathrm{L(ABC)}=r^2F_1(\gamma),\ \ \mathrm{AC}=\frac{\mathrm{BC}}{\cos\beta}.$$

13. uzdevums. Noteikt minimumu funkcijai tg$x$ + ctg$x$, ja

a) x ir pirmā kvadranta leņķis; b) $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{8},-\dfrac{\pi}{8}\right]$.

14. uzdevums. Noteikt minimumu funkcijai |tg$x$ + ctg$x$|.

15. uzdevums. Noteikt funkcijas $a$tg$x$ + $b$ctg$x$ monotonitātes intervālus, ja a un b pozitīvi skaitļi. (Izmantot 2. lemmu.)

Olimpiāžu uzdevumi

Aplūkojamā tipa funkcija samērā bieži satopama pēc satura ļoti dažādos olimpiāžu uzdevumos vai to risinājumos.

16. uzdevums. [AZT, 656*. uzd.] Pierādīt nevienādību $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$, ja $xy = 1$ un $x > y$.

17. uzdevums. [AZT, 657. uzd.] Pierādīt nevienādību $\frac{x^2+3x+3}{x+1}+\frac{1}{x} > 4$, ja $x > 0$.

18. uzdevums. Noteikt maksimālo vērtību reizinājumam $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots(1 + x_n)$, ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitīvi skaitļi, kuru reizinājums ir 1.

Grāmatā [AZT, 194] dots šāds asprātīgs risinājums:

$$P^2 = (1+2x_1+x_1^2)(1+2x_2+x_2^2)\cdots(1+2x_n+x_n^2) =$$
$$\frac{1+2x_1+x_1^2}{x_1}\cdot\frac{1+2x_2+x_2^2}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+2x_n+x_n^2}{x_n} =$$
$$\left(2+x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(2+x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geq 4^n.$$

Vēl īsāku risinājumu iegūst, lietojot nevienādību $1+a \geq 2\sqrt{a}$:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq \left(2\sqrt{x_1}\right)\left(2\sqrt{x_2}\right)\cdots\left(2\sqrt{x_n}\right) = 2^n.$$

19. uzdevums. [AZT, 659. uzd.] Pierādīt nevienādību

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc, \text{ ja } a, b, c > 0.$$

20. uzdevums. (21. Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde) Atrisināt vienādojumu

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

21. uzdevums. (32. Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde)

“Vai noteikti $x+\frac{9}{x} > y+\frac{9}{y}$, ja a) $x>y>0$, b) $x>y>3$?”

Funkcija $f(x) = x+\frac{9}{x}$ aug pa labi no tās minimuma punkta $x = 3$, tāpēc dotā nevienādība ir spēkā vienmēr gadījumā b), bet gadījumā a) dotā nevienādība var nebūt spēkā. Piemēram,

$$x = 3 > 1 = y, \text{ bet } f(3) = 6 < f(1) = 10.$$

$$f(x) = x+\frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}} = 6 = f(3).$$

22. uzdevums. (22. starptautiskā matemātikas olimpiāde, 1981, ASV)

Pieņem, ka P – punkts trijstūra ABC iekšienē, bet D, E un F – tā ortogonālās projekcijas attiecīgi uz taisnēm BC, CA un AB. Atrast visus punktus P, kuriem summa

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

minimāla.

“Tika piedāvāts daudz dažādu risinājumu. Droši vien vistipiskākais ir šāds paņēmiens [SMO, 56 – 59]

Jāatrod minimuma punkti trīs argumentu funkcijai

$$f(P)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z},$$

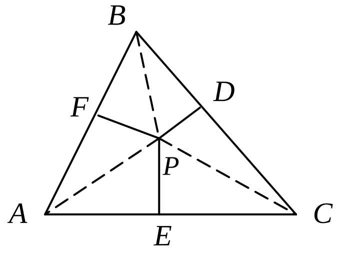
kur $c = BC$, $b = AC$, $a = AB$, $z = PD$, $y = PE$, $x = PF$ (sk. 3. zīm.)
…Tomēr uzdevumu var reducēt uz viena argumenta funkcijas minimuma punktu meklēšanu. Ievērosim vispirms, ka pēc nosacījuma punkts P atrodas trijstūra ABC iekšienē; apzīmējot ar S šī trijstūra laukumu, iegūsim

$$S_{\Delta BPC}+S_{\Delta APC}+S_{\Delta APB}=S,$$

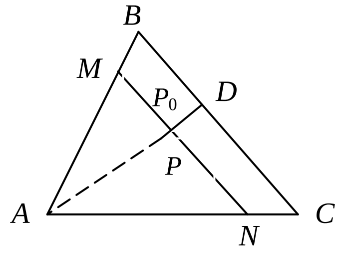
no kurienes izriet, ka

$$ax+by+cz=S\ \ (S \text{ – konstante})$$

(Te S vietā vajadzētu $2S$ vai jaunu apzīmējumu S_1)



3. zīm.



4. zīm.

Ja uzskatītu, ka punkts P pieder nogrieznim MN, kas paralēls malai BC (4. zīm.), tad iegūtu, ka vērtības cz un $\frac{c}{z}$ ir nemainīgas šā nogriežņa punktiem, bet tad uzdevums reducējas uz minimuma meklēšanu jau divargumentu funkcijai $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$. Bet šie mainīgie ir saistīti ar nosacījumu $ax + by = d$, kur $d = S - cz$ – konstante. Tādējādi jāatrod minimums funkcijai

$$f_1(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a}{x}+\frac{b^2}{d-ax}.\text{”}$$

Piezīme. Minimums šai funkcijai ir meklēts ar atvasinājuma palīdzību. Taču to var atrast arī elementārā veidā, sk., piemēram, 1. uzdevumu. Grāmatā [SMO] ir dots arī vienkāršāks risinājums, kurš turklāt saistīts ar aplūkojamā veida funkciju.

Aplūkosim funkciju $Sf(P)$, kur S – trijstūra ABC laukums.

$$Sf(P)=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)=$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right).$$

No zināmās nevienādības $k+\frac{1}{k}\geq 2$ (ja $k > 0$, vienādība ir spēkā tikai gadījumā $k = 1$) izriet, ka

$$Sf(P) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$Sf(P) \geq (a+b+c)^2,\ \ f(P)\geq\frac{(a+b+c)^2}{S},$$

turklāt $f(P)=\dfrac{(a+b+c)^2}{S}$ tikai tad, ja $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{x}=1$. Tas nozīmē, ka $x = y = z$ funkcijas $f(P)$ minimuma punktā P_o, t. i, P_o – riņķa līnijas, kas ievilkta trijstūrī *ABC*, centrs.

23. uzdevums. (37. starptautiskā matemātikas olimpiāde, 1996, Indija)

Pieņem, ka *ABCDEF* – izliekts sešstūris, kuram $AB \parallel ED$, $BC \parallel FE$, un $CD \parallel AF$. Ar R_A, R_C, R_E apzīmēsim rādiusus riņķa līnijām, kas apvilktas attiecīgi ap trijstūriem *FAB, BCD, DEF*, bet ar P – sešstūra perimetru. Pierādīt, ka $R_A + R_C + R_E \geq P/2$.

N. Sedrjakana risinājums [SMO, 157-158] „Apzīmēsim ar *a, b, c, d, e* un *f* attiecīgi malu *AB, BC, CD, DE, EF* un *FA* garumus. Atzīmēsim, ka sešstūra pretējie leņķi ir vienādi ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$). Novilksim perpendikulus *AP* un *DQ* pret *BC*, *AS* un *DR* pret *FE*, (sk. 5. zīmējumu). Tad *PQRS* – taisnstūris un $BF \geq PS = QR$. Tātad $2BF \geq PS + QR$. No šejienes

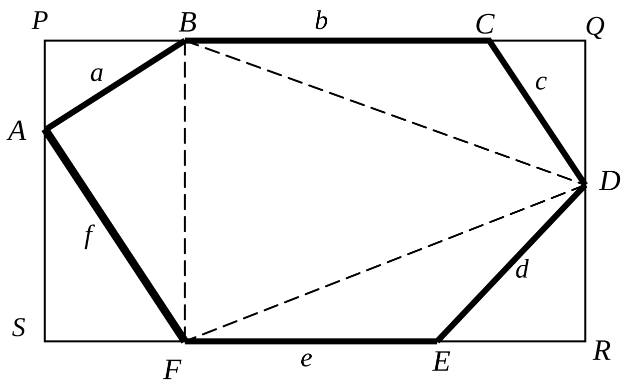
$$2BF \geq (a \sin B + f \sin F) + (c \sin C + d \sin E) =$$

$$= (a \sin B + f \sin C) + (c \sin C + d \sin B).$$

Analoģiski

$$2DB \geq (c \sin A + b \sin B) + (e \sin B + f \sin A),$$

$$2FD \geq (e \sin C + f \sin A) + (a \sin A + b \sin C).$$



5. zīm.

Sakaņā ar sinusu teorēmu

$$R_A=\frac{BF}{2\sin A},\ R_C=\frac{DB}{2\sin C},\ R_E=\frac{FD}{2\sin B}\ ,$$

tāpēc

$$4(R_A+R_C+R_E)\geq\frac{1}{\sin A}(a\sin B+f\sin C+c\sin C+d\sin B)+$$

$$+\frac{1}{\sin C}(c\sin A+b\sin B+e\sin B+f\sin A)+$$

$$+\frac{1}{\sin B}(e\sin C+d\sin A+a\sin A+b\sin C)=$$

$$=(a+d)\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)+(b+e)\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+$$

$$+(c+f)\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)\geq 2(a+d)+2(b+e)+2(c+f)=2P$$

un tas nozīmē, ka $R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}$, kas arī bija jāpierāda.

Vienādība tiek sasniegta tad un tikai tad, kad ∠A = ∠B = ∠C un BF ⊥ BC, …, t. i., kad sešstūris ir regulārs."

<u>24. uzdevums</u>. (Baltijas ceļš, 2003)

Pierādīt nevienādību $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\frac{z}{y}}+\sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right)$, ja $xyz = 1$ un $x, y, z > 0$.

Nevienādības kreisajā pusē atver iekavas:

$$(1 + x + y + xy)(1 + z) = 1 + z + x + xz + y + yz + xy + xyz =$$
$$= 2 + x + y + z + xz + zy + xy.$$

Jāpierāda

$$x+y+z+xz+zy+xy \geq 2\left(\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\frac{z}{y}}+\sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

Saskaņā ar nevienādību $A \geq G$ ir spēkā $\frac{1}{3}\left(y+\frac{1}{x}+1\right) \geq \sqrt[3]{y \cdot \frac{1}{x} \cdot 1}$. Tāpēc pietiek pierādīt, ka

$$x+y+z+xz+zy+xy \geq \frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{x}+1+z+\frac{1}{y}+1+x+\frac{1}{z}+1\right)$$
$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{2}{3}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)+2$$
$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 6. \qquad (*)$$

Nevienādība (*) ir spēkā, jo $t+\frac{1}{t} \geq 2$.

<u>Piezīme</u>. Nevienādība (*) ir līdzvērtīga nevienādībai $3A+\frac{3}{H} \geq 6$, kur A un H ir attiecīgo trīs saskaitāmo vidējais aritmētiskais un harmoniskais. Atzīmēsim, ka jebkuram saskaitāmo skaitam ir spēkā $A+\frac{1}{H} \geq A+\frac{1}{A} \geq 2$.

<u>25. uzdevums</u>. (33. Latvijas atklātā matemātikas olimpiāde).
Dots, ka x, y, un z ir pozitīvi skaitļi.

a) Pieņemsim, ka zināms $x + y + z \leq 3$. Vai noteikti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3$?

b) Pieņemsim, ka zināms: $x + y + z \geq 3$. Vai noteikti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 3$?

Pirmajā gadījumā tā ir, kas izriet no nevienādības $A \geq H$. Otrajā gadījumā viegli uzrādīt pretpiemēru: $z = 3$, $x = y = 0{,}1$.

<u>26. uzdevums</u>. [MO, 56] Atrast visu pozitīvu skaitļu pārus (x, y), kuros funkcija

$$f(x,y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

sasniedz savas minimālās vērtības, un atrast šo minimumu.[5)]

Sofisms

No visiem taisnstūra paralēlskaldņiem ar uzdotu laukumu L un sānu virsmas laukumu S atrast to, kuram šķautņu garumu summa ir vismazākā. Vai optimālais paralēlskaldnis būs kubs?

Anniņa. Šķautņu garumus apzīmēšu ar x, y, z. Tad jāmeklē minimums funkcijai $f = 4(x + y + z)$ pie nosacījumiem $xy = L$, $2(xy + yz + xz) = S$. Izteikšu z.

$$2L + 2(yz + zx) = S \Rightarrow z = \frac{S - 2L}{2(x + y)}$$

Apzīmēšu $t = x + y$. Tad

$$f = 4\left(t + \frac{S - 2L}{2t}\right) \ge 4 \cdot 2\sqrt{t \cdot \frac{S - 2L}{2t}} = 8\sqrt{\frac{S - 2L}{2}}.$$

Šeit es izmantoju nevienādību $A \ge G$. Funkcija minimumu sasniedz tad, kad abi saskaitāmie vienādi:

$$t = \frac{S - 2L}{2t} \Rightarrow t^2 = \frac{S - 2L}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{S - 2L}{2}}\ .$$

Jānītis. Pārbaudīšu, vai iegūtais rezultāts atbilst kubam. Tam visas šķautnes vienādas, tāpēc jābūt:

$$x^2 = L,\ 6x^2 = S$$
$$S - 2L = 4x^2.$$

No vienas puses, $t = x + y = 2x$, bet no otras puses,

$$t = \sqrt{\frac{S - 2L}{2}} = \sqrt{\frac{4x^2}{2}} = \sqrt{2}x\,.$$

Kuba gadījumā būtu $2x = \sqrt{2}x \ \Rightarrow\ 2 = \sqrt{2}$, kas ir absurds. Tātad <u>optimālais paralēlskaldnis nekad nav kubs.</u>

Jautrīte. Tā varētu teikt, ja zinātu, ka Anniņas risinājums ir simtprocentīgi pareizs. Ņemšu $S = 100$, $L = 25$. Tad

$$t = x + y = \sqrt{\frac{100 - 50}{2}} = 5\,.$$

Kāpināšu šīs vienādības abas puses kvadrātā un izmantošu nosacījumu $xy = L$.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2L = x^2 + y^2 + 50 = 25 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = -25\,.$$

Iegūts kaut kāds absurds. Tas nozīmē, ka Anniņa kaut kur ir pieļāvusi kļūdu.

Palīdziet Anniņai aizstāvēties.

Atrisiniet patstāvīgi līdzīgu uzdevumu, kad summas $x + y + z$ vietā ņem kvadrātu summu $x^2 + y^2 + z^2$.

<u>27. uzdevums</u>. No visiem taisnstūra paralēlskaldņiem ar uzdotu laukumu L un sānu virsmas laukumu S atrast to, kuram šķautņu garumu kvadrātu summa ir vismazākā. Vai optimālais paralēlskaldnis būs tas pats, kas iepriekšējā uzdevumā?

2. nodaļa. **Funkcija** $f(x)=\dfrac{a_1x^2+a_2x+a_3}{b_1x^2+b_2x+b_3}$

Noskaidrosim, vai divu otrās pakāpes polinomu dalījumam ekstrēmus var noteikt elementārā veidā. Vairāki funkcijas *f* piemēri ir aplūkoti, piemēram, mācību līdzeklī [VR], sk. arī nodaļu “Vērtību kopas izmantošana” grāmatas 1. daļā.

“Lai noteiktu šāda veida funkcijas ekstrēmus, palīdz prasme noteikt funkcijas vērtību apgabalu. Doto funkcijas vienādojumu pārveidosim par kvadrātvienādojumu attiecībā pret x:

$$(a_2y-a_1)x^2 + (b_2y-b_1)x + (c_2y-c_1)=0$$

Lai šim vienādojuma eksistētu reālas saknes, jābūt $D\geq 0$.” [VR, 28]

Šādas teorētiskās vadlīnijas ne vienmēr būs pietiekamas. Piemēram, kā rīkoties tad, kad esam konstatējuši, ka diskriminants ir nenegatīvs visiem y no kādas mūs interesējošas kopas? Turklāt šī paņēmiena lietošana nenoteiktu koeficientu gadījumā ir visai apgrūtinoša.

Iepazīsimies ar citu metodi, kuras pamatideja ir *f* reducēšana uz jau aplūkotās funkcijas, proti, $at+\frac{b}{t}+c$, ekstrēmu noteikšanu.

1. Funkciju *f* izsaka veidā

$$f=k+\frac{a_4x+a_5}{b_1x^2+b_2x+b_3},$$

kur koeficientus k, a_4, un a_5 nosaka no vienādības

$$k(b_1x^2+b_2x+b_3)+a_4x+a_5=a_1x^2+a_2x+a_3.$$

2. Apzīmējot $t = a_4x + a_5$, pēc vienkāršiem pārveidojumiem dabū

$$f=k+\frac{t}{b_4t^2+b_5t+b_6}=k+\frac{1}{b_4t+\frac{b_6}{t}+b_5},$$

kur koeficienti b_4, b_5 un b_6 nav atkarīgi no t. Tā kā saucējā esošās funkcijas ekstrēmus var noteikt ar elementārām metodēm, tad tas pats sakāms arī par funkciju *f*.

<u>Piezīme</u>. Pieņēmums, ka *f* ir divu otrās pakāpes polinomu dalījums, nozīmē, ka vecākie koeficienti a_1 un b_1 nav nulle. Ja pieļautu, ka a_1 vai b_1 ir 0, tad iegūtu vēl vienkāršāku funkciju. Atkarībā no koeficientu vērtībām ērtāki var būt arī citi paņēmieni.

<u>1. piemērs</u>. Atrast funkcijas $\frac{x^2}{x-1}$ vismazāko vērtību, ja $x > 1$.

Uzdevumu var atrisināt ar vairākiem paņēmieniem.

Lietosim substitūciju $t = x - 1$. Tad pozitīviem t jāmeklē minimums funkcijai

$$\frac{(1+t)^2}{t}=\frac{1+2t+t^2}{t}=\frac{1}{t}+t+2.$$

Minimuma punkts ir $t_{\min} = 1$. Tātad $x_{\min} = 2$. Atbilde: $\min\limits_{x>1}\frac{x^2}{x-1}=4$.

Kādreiz mācību grāmatās tika piedāvāti, šķiet, neskaidri formulēti vingrinājumi. [Ciz, 89]

$$“\, y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}\text{; vietā } x = \frac{1}{2} \;\; f(x) \text{ ir } min. \; y_{\min} = \frac{3}{5}.”$$

Šeit vārda “vietā” tagad mēs rakstītu “punktā”. Vai funkcijas y vismazākā vērtība ir $y_{\min} = \frac{3}{5}$? Viegli pārliecināties, ka nav. Piemēram, $y(2) = -3$. Kāds ir šīs funkcijas minimums? Apzīmēsim funkcijas saucēju ar t. Tad y var izteikt kā

$$y = \frac{2-t}{t} = \frac{2}{t} - 1.$$

Ņemot t vērtības negatīvas un tuvas nullei, var iegūt pēc patikas mazas y vērtības, jeb citiem vārdiem, y tiecas uz mīnus bezgalību. Tas nozīmē, ka minimums nemaz neeksistē. Vēl atliek pārbaudīt, vai apzīmējums $t = 1 + x - x^2$ pieļauj ņemt $t = 0$. Pieļauj, jo vienādojumam

$$1 + x - x^2 = 0$$

ir reālas saknes. Kādu minimumu meklēt bija paredzējis uzdevuma autors? Izmantojot jau lietoto apzīmējumu, funkciju y, pārrakstīsim formā:

$$y = \frac{2}{1+x-x^2} - 1 = \frac{2}{-(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}} - 1. \qquad (*)$$

Saucējs ir maksimāls tad, ja $x = \frac{1}{2}$. Vai no šejienes izriet, ka daļas vērtība ir minimāla tad, kad saucējs ir maksimāls? Neizriet! Jo, kā jau noskaidrots, saucējs var būt arī negatīvs. Šajā uzdevumā bija iecerēts meklēt nevis vismazāko funkcijas vērtību, bet *lokālo* minimumu. Tas nozīmē, ka tiek meklēts tāds punkts x_0, kura apkārtnē $f(x_0) \le f(x)$. Dažreiz šī apkārtne var būt tik plaša, ka sakrīt ar visu funkcijas definīcijas kopu. Aplūkojamajai funkcijai y apkārtnes lomā var ņemt, piemēram, intervālu (0, 1) un sastādīt šādu uzdevumu.

<u>2. piemērs</u>. Atrast funkcijas $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ ekstrēmus intervālā (0, 1).

Risinot šo uzdevumu ar paņēmienu, kad izsaka x kā funkciju no y, dabū:

$$y(1 + x - x^2) = 1 - x + x^2 \Rightarrow x^2(1 + y) - x(1 + y) + 1 - y = 0$$

$$D = (1 + y)^2 - 4(1 + y)(1 - y) = (1 + y)(1 + y - 4 + 4y) = (1 + y)(5y - 3).$$

Nosacījums $D \geq 0$ dod novērtējumu: $y \leq -1$ vai $y \geq \frac{3}{5}$. No šejienes vien vēl nevaram noteikt prasītos ekstrēmus.

Šoreiz ērtāks ir augstāk uzrādītais paņēmiens, kad pārveido funkciju y saskaņā ar (*). Tad nosaka saucējā esošās kvadrātfunkcijas ekstrēmus, ja x pieder norādītajam intervālam (0, 1). Ekstrēmi tiek sasniegti intervāla galapunktos vai kvadrātfunkcijas (parabolas) virsotnē. Aprēķināsim y vērtības šajos punktos:

$$y(0) = y(1) = 1,\; y(0{,}5) = 0{,}6.$$

Tātad $\min y = y(0{,}5) = 0{,}6$, bet maksimuma nav, jo galapunkti nepieder apskatāmajam intervālam (0, 1).

3. nodaļa. Funkcija $F(x)=\dfrac{x^n}{(x-a)^m}$

Aplūkosim dažus saistoša rakstura uzdevumus, kuros parādās funkcija F. Šajā nodaļā bieži lietosim sekas SK (**s**umma **k**onstanta) no nevienādības $G \le A$: *ja pozitīvu lielumu summa ir nemainīgs lielums, tad to reizinājums ir maksimāls, ja tie visi vienādi.*

1. piemērs. Atrast funkcijas $\dfrac{x^2}{x-a}$ minimumu, ja $x > a$.

Lietosim substitūciju $t = x - a$. Tad pozitīviem t jāmeklē minimums funkcijai

$$\frac{(a+t)^2}{t}=\frac{a^2+2at+t^2}{t}=\frac{a^2}{t}+t+2a\,.$$

Minimuma punkts ir $t_{\min} = a$. Tātad $x_{\min} = 2a$. Atbilde. $\min\limits_{x>a}\dfrac{x^2}{x-a}=4a.$

2. piemērs. Atrast funkcijas $\dfrac{x^3}{x-1}$ minimumu, ja $x > 1$.

Apzīmēsim $t = x - 1$. Tad jāmeklē minimums funkcijai

$$\frac{(1+t)^3}{t}=\frac{1+3t+3t^2+t^3}{t}=\frac{1}{t}+3t+t^2+3\,.$$

Labo pusi var pārrakstīt formā:

$$\frac{1}{t}+3t+t^2+3=\left(\frac{3}{4t}+3t\right)+\left(\frac{1}{8t}+\frac{1}{8t}+t^2\right)+3\,.$$

Iekavās iekļautajiem saskaitāmajiem piemīt īpašība – to reizinājums nav atkarīgs no t. Vēl vairāk, abi iekavās iekļautie lielumi savu minimumu sasniedz vienā un tajā pašā punktā, jo:

$$\frac{3}{4t}=3t \Rightarrow t=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{8t}=t^2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}\,.$$

Atbilde. $\min\limits_{x>1}\dfrac{x^3}{x-1}=\dfrac{27}{4}$. Minimums tiek sasniegts punktā $x=\dfrac{3}{2}$.

Sekas. $\min\limits_{t>a}\dfrac{t^3}{t-a}=\dfrac{27}{4}a^2$. Minimums tiek sasniegts punktā $t=\dfrac{3}{2}a$.

Daži saistoši uzdevumi

Uzdevums par tvaikoņa optimālo ātrumu. Enerģija, kas tiek patērēta tvaikoņa kustībai, ir proporcionāla tā ātruma kubam. Atrast visekonomiskāko tvaikoņa ātrumu, ja tvaikonis brauc pret straumi un straumes ātrums ir a km/h. [Sav, 66].

Apzīmēsim tvaikoņa ātrumu ar v. Tad laika vienībā patērētā enerģija E ir vienāda ar kv^3, kur k – proporcionalitātes koeficients. Tātad laikā t patērētās enerģijas daudzums ir kv^3t. No formulas $S = (v - a)t$ izsakām t un iegūstam šādu minimizējamo funkciju:

$$\frac{kSv^3}{v-a}$$

Saskaņā ar sekām visekonomiskākais tvaikoņa ātrums ir 1,5a km/h.

3. piemērs. Kādam vienādsānu trijstūrim, kurš apvilkts ap doto pusriņķi, ir vismazākais laukums? (6. zīm.)

Apvilkta trijstūra ABC augstumu pret pamatu AC apzīmēsim ar h un laukumu rēķināsim pēc formulas

$$L = xh.$$

Pēc Pitagora teorēmas $|BC|^2 = x^2 + h^2$. Iegūsim sakarību starp x un h, izsakot divos veidos trijstūra ABC laukumu (var izmantot arī trijstūru līdzību):

$$xh = r\sqrt{x^2 + h^2}\,, \quad x^2h^2 = r^2(x^2 + h^2)$$

$$x^2 = \frac{r^2h^2}{h^2 - r^2}\,.$$

$$L^2 = x^2h^2 = \frac{r^2h^4}{h^2 - r^2}$$

Apzīmējot $t = h^2$, dabūjam apskatāmā veida funkciju $\dfrac{r^2t^2}{t - r^2}$.

Atsaucoties uz pirmo piemēru, $t_{\min} = 2r^2$. Tātad $h^2 = 2r^2$. Tas nozīmē, ka minimālais laukums būs vienādsānu taisnleņķa trijstūrim.

Sekas. No visiem rombiem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir kvadrātam.

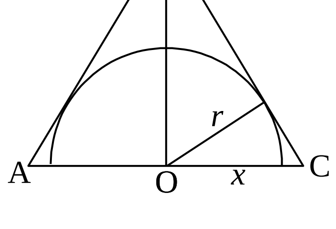
4. piemērs. No visiem vienādsānu trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vienādmalu trijstūrim ir vismazākais laukums un vismazākais perimetrs. [Zet, 69]

Norādījums. Izteikt laukuma kvadrātu $L^2 = \dfrac{r^2x^3}{x - 2r}$, kur x – trijstūra augstums, r- riņķa rādiuss.

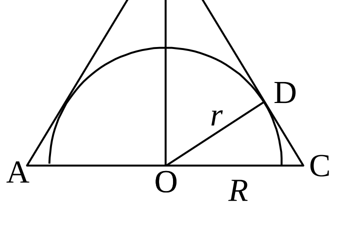
5. piemērs. Ap puslodi apvilkt konusu ar vismazāko tilpumu. Atrast optimālā konusa virsotnes leņķi.

Konusa augstumu apzīmēsim ar h, pamata rādiusu ar R, tilpumu ar V un lodes rādiusu ar r, sk. 7. zīmējumu. Tad

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



6. zīm.



7. zīm.

Starp mainīgajiem R un h pastāv sakarība

$$Rh = r\sqrt{R^2 + h^2}\ .$$

(To iegūst, divos veidos izsakot taisnleņķa trijstūra BOC laukumu, vai, izmantojot trijstūru BOC un BOD līdzību.) Izteiksim h^2:

$$R^2h^2 = r^2(R^2 + h^2) \ \Rightarrow\ h^2 = \frac{R^2r^2}{R^2 - r^2}$$

Apzīmēsim $t = R^2$. Tad

$$V^2 = \frac{1}{9}\pi^2R^4h^2 = \frac{1}{9}\pi^2r^2 \cdot \frac{t^3}{t - r^2}\ .$$

Tilpums būs minimāls, ja $t = \frac{3}{2}r^2$ (sk. Sekas no 2. piemēra). Tātad

$$R^2 = \frac{3}{2}r^2,\ h^2 = 3r^2 \ \Rightarrow\ R = r\sqrt{\frac{3}{2}},\ h = r\sqrt{3}.$$

Ievērosim, ka $h^2 = 2R^2$. Minimālā konusa virsotnes leņķi α var noteikt no laukumu vienādības $2L(ABC) = |BC|^2\sin\alpha = 2Rh$:

$$\sin\alpha = \frac{2Rh}{R^2 + h^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

vai šādi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow\ \alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

<u>1. piezīme</u>. Minimālā konusa virsotnes leņķis, izteikts grādos, ir 70,528… Kā blakus rezultātu esam ieguvuši vienādību:

$$2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

<u>2. piezīme</u>. Izsakot $R^2 = \frac{h^2r^2}{h^2 - r^2}$ un ievietojot to tilpuma izteiksmē, iegūtu funkciju

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h^3}{h^2 - r^2}\ .$$

Tātad no funkcijas $\frac{h^3}{h^2 - r^2}$ ar piemērotas substitūcijas (kādas? - to nosakiet patstāvīgi) palīdzību var pāriet uz funkciju $\frac{t^3}{t - r^2}$.

<u>6. piemērs</u>. Ap lodi ar rādiusu r apvilkt konusu ar vismazāko tilpumu. Atrast minimālā konusa virsotnes leņķi.

Atrast vismazāko tilpumu konusam, kurš apvilkts ap lodi ar rādiusu a. [GK, 114]

Ap lodi apvilkta konusa augstumu apzīmēsim ar h. Tad lodes tilpums

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h^2}{h - 2r}\ .$$

Saskaņā ar 1. piemēru tilpums būs minimāls, ja $h = 4r$. Zinot šo sakarību, viegli noskaidrot, ka minimālā konusa tilpums ir divas reizes lielāks nekā dotās lodes tilpums. Minimālā konusa virsotnes leņķi β var noteikt no sakarības

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{r}{3r}=\frac{1}{3}.$$

Vispārinājums

Tagad 2. piemēra risinājumu vispārināsim patvaļīgam n. Uzskatīsim, ka $t > a$ un pāriesim uz jaunu mainīgo x, kur $t = a(x+ 1)$ un $x > 0$. Tad

$$f(t)=\frac{t^n}{t-a}=a^{n-1}\cdot\frac{(x+1)^n}{x}.$$

Meklēsim minimumu funkcijai

$$g(x):=\frac{(x+1)^n}{x},\ x>0.$$

1. Ja $n = 1$, tad funkcija g ir monotona, jo

$$\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}>1\ .$$

Funkcijai minimuma nav. Funkcijas g vērtības var būt pēc patikas tuvas skaitlim 1, nekad to nesasniedzot, jo $x > 0$.

2. Ja $n = 2$, tad

$$\min g(x) = g(1) = 4, \text{ jo}$$

$$\frac{(1+x)^2}{x}=\frac{1}{x}+x+2\geq 4.$$

3. Ja $n = 3$, tad saskaņā ar 2. piemēra risinājumu

$$\min g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}.$$

4. Ja $n = 4$, tad

$$g(x)=\frac{(x+1)^4}{x}=x^3+4x^2+6x+\frac{1}{x}+4=$$

$$=\left(x^3+\frac{1}{81x}+\frac{1}{81x}+\frac{1}{81x}\right)+\left(4x^2+\frac{4}{27x}+\frac{4}{27x}\right)+\left(6x+\frac{6}{9x}\right)+4.$$

Katrs iekavās iekļautais lielums kļūst minimāls, ja:

$$x^3=\frac{1}{81x},\ \ 4x^2=\frac{4}{27x},\ \ 6x=\frac{6}{9x}.$$

No šejienes $x_{\min}=\frac{1}{3}$ un $\min g(x)=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{256}{27}$.

Vadoties no šiem risinājumiem, kad aplūkojām atsevišķas n vērtības, var izvirzīt hipotēzi, ka funkcija g minimumu sasniedz punktā $x_{\min}=\frac{1}{n-1}$, jeb, ka visiem pozitīviem x un $n > 1$ ir spēkā nevienādība:

$$\frac{(x+1)^n}{x}\geq\frac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}}.$$

Pēc Ņūtona binoma formulas:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k,$$

$$\frac{1}{x}(1+x)^n = \mathrm{C}_n^1 + \frac{\mathrm{C}_n^0}{\mathrm{x}} + \mathrm{C}_n^2 x + \mathrm{C}_n^3 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_n^n x^{n-1}.$$

Labo pusi uzrakstīsim kā $\mathrm{C}_n^1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, kur

$$f_1 = \frac{\mathrm{C}_n^2}{(n-1)^2 x} + \mathrm{C}_n^2 x,\ f_2 = \frac{2\mathrm{C}_n^3}{(n-1)^3 x} + \mathrm{C}_n^3 x^2,\ \ldots,\ f_k = \frac{k\mathrm{C}_n^{k+1}}{(n-1)^{k+1} x} + \mathrm{C}_n^{k+1} x^k.$$

Funkcijas f_1 labās puses saskaitāmo reizinājums nav atkarīgs no x. Tāpēc šo saskaitāmo summa būs minimāla, ja

$$\frac{\mathrm{C}_n^2}{(n-1)^2 x} = \mathrm{C}_n^2 x \Rightarrow x = \frac{1}{n-1}.$$

Līdzīgi spriežam par f_2, vispirms to pārveidojot kā trīs saskaitāmo summu:

$$f_2 = \frac{2\mathrm{C}_n^3}{(n-1)^3 x} + \mathrm{C}_n^3 x^2 = \mathrm{C}_n^3\left(\frac{1}{(n-1)^3 x} + \frac{1}{(n-1)^3 x} + x^2\right).$$

Funkciju f_k uzrakstām kā $k + 1$ saskaitāmo summu, kuru reizinājums nav atkarīgs no x:

$$f_k = \mathrm{C}_n^{k+1}\left(\frac{1}{(n-1)^{k+1} x} + \frac{1}{(n-1)^{k+1} x} \cdots \frac{1}{(n-1)^{k+1} x} + x^k\right).$$

Tā kā katra funkcija $f_1,\ldots,f_n$ minimumu sasniedz vienā un tajā pašā punktā $x = \frac{1}{n-1}$, tad tajā pašā punktā to sasniedz arī funkcija g. Un tomēr pierādījumā viena vieta ir palikusi nepamatota. Vai varat saskatīt, kāda?

Mēs neesam pamatojuši, ka funkcijās $f_1,\ldots,f_n$ ietilpstošo attiecīgo saskaitāmo summa ir vienāda ar $\frac{C_n^0}{x}$, t. i., ka

$$\frac{\mathrm{C}_n^2}{(n-1)^2} + \frac{2\mathrm{C}_n^3}{(n-1)^3} + \cdots + \frac{(n-1)\mathrm{C}_n^n}{(n-1)^n} = 1 \text{ jeb } \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\mathrm{C}_n^k}{(n-1)^k} = 1.$$

Pierādiet šo interesanto sakarību patstāvīgi!

Tagad uzrādīsim citu īsāku un vienkāršāku funkcijas f minimuma atrašanas paņēmienu. Meklēsim maksimumu apgrieztajam lielumam

$$h = \frac{1}{f} = \frac{t-a}{t^n} = \frac{1}{t^{n-1}} - \frac{a}{t^n} = \frac{1}{t^{n-1}}\left(1 - \frac{a}{t}\right).$$

Apzīmēsim $\frac{a}{t} = y$. Tad

$$h = \frac{y^{n-1}}{a^{n-1}}(1-y) = ky^{n-1}(1-y).$$

Ņemot vērā, ka koeficients k neietekmē minimuma punkta atrašanās vietu, aplūkosim reizinājumu

$$y^{n-1}(1-y) = y \cdot y \cdot \ldots \cdot y \cdot [(n-1-(n-1)y]\frac{1}{n-1}.$$

Lietojam SK. Reizinājums ir vislielākais, ja

$$y = n-1-(n-1)y,\ yn = n-1$$

$$y = \frac{n-1}{n}.$$

Tātad $t_{\min} = \dfrac{an}{n-1}$ un $\min\limits_{t>a} \dfrac{t^n}{t-a} = \dfrac{n^n a^{n-1}}{(n-1)^{(n-1)}}$.

Uzrādīsim vēl dažas funkcijas, kurām minimumu vai maksimumu var atrast līdzīgā veidā.

Polinoms $P(x) = x^k(1-x)^n$

Noteikt polinoma P maksimumu pozitīviem x, ja k un n – naturāli skaitļi.

Lai varētu lietot sekas SK, pārrakstām polinomu P formā:

$$Pc^k = (cx)^k(1-x)^n.$$

Izvēlamies c tā, lai $k + n$ reizinātāju summa $kcx + n(1-x) = x(kc-n) + n$ nebūtu atkarīga no x, t. i., $c = \dfrac{n}{k}$. Reizinājums būs maksimāls, ja visi reizinātāji vienādi:

$$cx = 1 - x \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{1+c} = \frac{k}{n+k}.$$

Tātad

$$\max_{x>0} x^k(1-x)^n = \frac{k^k n^n}{(k+n)^{k+n}},\quad x_{\max} = \frac{k}{n+k}.$$

Polinoms $Q(x) = x^k(1-x^n)$

Noteikt polinoma Q maksimumu, ja $x > 0$ un k un m – naturāli skaitļi.
Apzīmēsim $t = x^n$. Tad

$$Q^n = t^k(1-t)^n.$$

Iegūts iepriekšējā punktā izanalizētais polinoms, kuram $t_{\max} = \dfrac{k}{n+k}$. Tātad:

$$\max_{x>0} x^k(1-x^n) = \frac{n}{n+k}\sqrt[n]{\frac{k^k}{(k+n)^k}},\quad x_{\max} = \sqrt[n]{\frac{k}{k+n}}.$$

Aplūkoto piemēru var vispārināt uz gadījumu, kad k un n racionāli skaitļi.

<u>**Sekas**</u>. Polinoma $Q_a(u) = u^k(a^n - u^n)$ maksimuma punkts ir $u_{\max} = a\cdot\sqrt[n]{\dfrac{k}{k+n}}$.

Ņemt $u = ax$. Zinot funkcijas maksimālo vērtību, var iegūt dažādas nevienādības. Piemēram,

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ņemt $k = 1$ un $x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Tad $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \Leftrightarrow \dfrac{n^2-1}{n^2} < \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}}$.

Dalījums $f(t) = \dfrac{t^m}{t^2 - a^2}$.

Noteikt f minimumu, ja $t > a > 0$ un $m > 2$. (Ja $m = 2$, tad funkcija f ir dilstoša un tai apskatāmajā intervālā nav minimuma.) Meklēsim maksimumu apgrieztajam lielumam.

$$\frac{1}{f} = \frac{t^2-a^2}{t^m} = \frac{1}{t^{m-2}} - \frac{a^2}{t^m} = \frac{1}{t^{m-2}}\left(1-\frac{a^2}{t^2}\right).$$

Substitūcija $t = \frac{a}{x}$, $\frac{1}{t} = \frac{x}{a}$, ļauj pāriet uz iepriekšējā punktā aplūkoto polinomu Q:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a^{m-2}} \cdot x^{m-2}(1-x^2),$$

kuram $x_{\max} = \sqrt{\frac{m-2}{m}}$.

Tagad nosakām minimuma punktu t un funkcijas vērtību šajā punktā:

$$t_{\min} = a \cdot \sqrt{\frac{m}{m-2}}, \quad f_{\min} = \frac{a^{m-2}(m-2)}{2} \cdot \left(\frac{m}{m-2}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Dalījums $f(y) = \frac{y^p}{(y-a)^n}$.

Noteikt minimumu, ja $y > a$ un $p > n$ – naturāli skaitļi.
Meklēsim maksimumu apgrieztajam lielumam

$$\frac{(y-a)^n}{y^p} = \frac{1}{y^{p-n}} \cdot \left(\frac{(y-a)}{y}\right)^n = \frac{1}{y^{p-n}}\left(1 - \frac{a}{y}\right)^n$$

Apzīmējam $x := \frac{a}{y}$. Tad $\frac{1}{y} = \frac{x}{a}$ un pēc ievietošanas iegūstam polinomu pret x, kuru pareizinot ar a^{p-n}, dabūjam jau aplūkotā veida polinomu $x^{p-n}(1-x)^n$. Tādējādi minimuma punkts ir

$$y_{\min} = \frac{ap}{p-n} \text{ un } \min_{y>a} \frac{y^p}{(y-a)^n} = a^{p-n}\frac{p^p(p-n)^{n-p}}{n^n}.$$

Funkcija $f(t) = \sqrt[k]{t}(1-\sqrt[m]{t})^n$, k, m un n naturāli skaitļi.
Atrast maksimumu.

Apzīmē $x = \sqrt[m]{t}$, Tad $t = x^m$ un $f = \sqrt[k]{x^m}(1-x)^n$. Kāpinām abas puses k-jā pakāpē un iegūstam iepriekš izanalizēto polinomu P.

Optimālās sijas

Taisnstūrveida sijas stiprība ir proporcionāla tās platuma reizinājumam ar augstuma kvadrātu. Atrast stiprākās sijas izmērus, ja sija ir izzāģēta no cilindriska baļķa ar pamata rādiusu r. [TF, 213]. Citas atsauces, formulējumus sk. [Cib1, 45].

Taisnstūrveida sijas elastība ir proporcionāla tās platuma reizinājumam ar augstuma kubu. Atrast stiprākās sijas izmērus, ja sija ir izzāģēta no cilindriska baļķa ar pamata rādiusu r. [TF, 213]

Sija (taisnstūra paralēlskaldnis) *ar brīvi atbalstītiem galiem ir vienmērīgi noslogota pa visu tās garumu. Sijas izlieces lielums ir apgriezti proporcionāls sijas šķērsgriezuma inerces momentam* $I = \frac{xy^3}{12}$, *kur x un y – sijas izmēri. Noteikt sijas izmērus, ja sijai ir vismazākā izliece un ja tā ir izzāģēta no apaļa baļķa ar diametru d.* [Min, 150].

Jārisina šāds minimizācijas uzdevums:

$$f := \frac{k}{xy^3} \mapsto \min, \quad x^2 + y^2 = d^2.$$

Ievērosim, ka $3x^2 y^6 = (3d^2 - 3y^2) \,.\, y^2 .\, y^2 .\, y^2$. Reizinājums būs maksimāls, ja

$$3d^2 - 3y^2 = y^2 \Rightarrow 4y^2 = 3d^2,\ y = \frac{d\sqrt{3}}{2},\ x = \frac{d}{2}.$$

Tātad optimālās sijas platums x ir vienāds ar baļķa šķērsgriezuma rādiusu.

Funkcija $\frac{(x+a)^m}{x}$, $a > 0$, $x > 0$

Minimuma punkts ir $x_{\min} = \dfrac{a}{m-1}$.

Pārejot uz mainīgo $x = \dfrac{a}{t} - a$, iegūst daļu $\dfrac{a^{m-1}}{t^{m-1}(1-t)}$, kuras saucējs ir jau analizētais polinoms Q ar parametriem $k = m - 1$, $n = 1$ un šādu maksimuma punktu $t_{\max} = \dfrac{m-1}{m}$.

Minēsim vienu ģeometrijas uzdevumu, kurš reducējams uz aplūkotā tipa funkciju.

Regulārā četrstūra piramīdā, kuras sānu skaldnes ar pamata plakni veido leņķi φ, ievilkts cilindrs, kura viens pamats atrodas piramīdas pamata plaknē, bet otra pamata riņķa līnija pieskaras piramīdas sānu skaldnēm. Cilindra pamata rādiuss un augstums ir vienāds ar r. Aprēķināt piramīdas tilpumu. Kādai jābūt leņķa φ vērtībai, lai piramīdas tilpums būtu vismazākais? [KZZ, 166].

Vienkārši iegūt, ka piramīdas tilpums ir vienāds ar $\dfrac{4r^3}{3} \cdot \dfrac{(1+\operatorname{ctg}\varphi)^3}{\operatorname{ctg}\varphi}$. Meklējamais leņķis ir $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. Apzīmējam $\operatorname{ctg}\varphi = x$ un lietojam formulu $x_{\min} = \dfrac{a}{m-1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 2$.

Atrisiniet vispārinājumu, kad cilindra augstums ir vienāds ar patvaļīgu H.

Dazi uzdevumi patstāvīgai risināšanai

1. Atrast funkciju $\dfrac{x^2}{2x+1}$, $\dfrac{10^{2x}}{10^x - 1}$ vismazāko pozitīvo vērtību.

2. Atrast funkcijas $\dfrac{x^2}{2x-1}$ minimumu, ja 1) $x > \dfrac{1}{2}$; 2) $x \geq 1$.

3. Atrast funkcijas $\dfrac{(\lg x + 1)^3}{\lg x}$ minimumu, ja $x > 1$.

4. Ar T_r un T_p apzīmēsim minimālos trijstūrus, kuri apvilkti attiecīgi ap riņķi un pusriņķi. Kuram no šiem trijstūriem ir mazāks laukums, ja zināms, ka riņķis un pusriņķis ir vienlieli?

5. Pierādīt vienu no nevienādībām:

a) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 - \dfrac{1}{n}$; b) $\left(1 - \dfrac{1}{2006^2}\right)^{2006} < 1 - \dfrac{1}{2007}$.

6. Pierādīt, ka funkcijai $\dfrac{\sqrt[3]{x-a}}{x-b}$ ekstrēmus var atrast ar elementāriem paņēmieniem.

4. nodaļa. Funkcija $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$

Vispirms aplūkosim dažus virsrakstā minētās funkcijas piemērus. Izanalizēt vispārīgo gadījumu parasti ir būtiski sarežģītāk nekā atrisināt atsevišķus konkrētus uzdevumus. Taču atsevišķu piemēru risinājumi var saturēt noderīgus paņēmienus, nepieciešamās pamatidejas, kas vajadzīgas vispārīgajā gadījumā.

<u>1. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+4}$ ekstremālās vērtības kopā [–1, 16].

Aplūkojamā funkcija ir augoša, tāpēc tā savas ekstremālās vērtības sasniedz dotā intervāla galapunktos, t. i., $y_{\min} = y(-1) = \sqrt{2}$, $y_{\max} = y(16) = \sqrt{17}+6$.

<u>2. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+4}$ vērtību kopu.

Anniņa. Zemsaknes izteiksmēm jābūt nenegatīvām.

$$(1-x\geq 0,\ \ 2x+4\geq 0)\Rightarrow -2\leq x\leq 1.$$

Aprēķinu funkcijas vērtības intervāla galapunktos: $y(-2)=\sqrt{3}$, $y(1) = \sqrt{6}$. Secinu, ka vērtību kopa ir [$\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$].

Uzrādiet kļūdu Anniņas secinājumā!

Jānītis. Anniņa ir uzskatījusi, acīmredzot iepriekšējo uzdevumu iespaidā, ka funkcija y ir augoša. Otrais saskaitāmais tiešām ir augoša funkcija, bet pirmais – dilstoša. Abi saskaitāmie kopā var nemaz nebūt augoša funkcija. Lai noteiktu, līdz kurai vietai dotā funkcija varētu augt vai dilt, salīdzināšu abus saskaitāmos.

$$\sqrt{1-x}=\sqrt{2x+4}\ \Rightarrow\ 1-x=2x+4\ \Rightarrow 3x=-3\ \Rightarrow\ x=-1.$$

Aprēķināšu $y(-1) = \sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. Tā kā $2\sqrt{2}=\sqrt{8}>\sqrt{6}$, tad vērtību kopa ir [$\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$].

Uzrādiet kļūdu Jānīša risinājumā!

Maijiņa. To izdarīt ir ļoti vienkārši. Funkcijas y vērtība punktā $x = 0$ ir $y(0) = 3 > \sqrt{8}$.

Pēterītis. Atrisināšu šo uzdevumu ar citu metodi. Izteiksmes $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+4}$ abas puses kāpināšu kvadrātā ar mērķi izteikt x.

$$y^2=1-x+2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+4}+2x+4=5+x+2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+4} \qquad (*)$$

$$(y^2-(5+x))^2 = 4(1-x)(2x+4)$$

$$y^4-2y^2(5+x)+(5+x)^2 = 8(1-x)(x+2)$$

$$y^4-10y^2-2xy^2+25+10x+x^2 = 16-8x-8x^2$$

$$9x^2+x(18-2y^2)+y^4-10y^2+9=0.$$

Lai kvadrātvienādojumam attiecībā pret x būtu reālas saknes, tā diskriminantam jābūt nenegatīvam.

$$D = 4(9-y^2)^2-4\cdot 9(y^4-10y^2+9)\geq 0$$

$$(9-y^2)^2-9(y^4-10y^2+9)\geq 0$$

$$-8y^4+72y^2\geq 0$$

$$y^2-9\leq 0\ \Rightarrow\ -3\leq y\leq 3.$$

Kā jau Maijiņa ir nejauši konstatējusi, maksimālā vērtība ir $y = 3$. Bet minimālā vēl jāprecizē, jo y kā divu nenegatīvu lielumu summa nevar būt negatīvs. Saskaņā ar (*)

$$y^2 = 5 + x + 2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+4} \ge 5 + x \ge 5 + (-2) = 3.$$

No šejienes $y \ge \sqrt{3}$. Kā redzams no Anniņas risinājuma, minimālā vērtība tiek sasniegta punktā $x = -2$. Tātad funkcijas y vērtību kopa ir $[\sqrt{3}, 3]$.

Pēterīša risinājums ir garš. Vai varat atrast īsāku risinājumu?

Paijiņa. Varu! $y_{\min} = y(-2) = \sqrt{3}$, $y_{\max} = y(0) = 3$, jo

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{2x+4} \le 3 \iff 5 + x + 2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+4} \le 9 \iff 2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+4} \le 4 - x \iff$$

$$4(1-x)(2x+4) \le (4-x)^2 \iff 16 - 8x - 8x^2 \le 16 - 8x + x^2.$$

$$x \ge -2 \Rightarrow y^2 = 5 + x + 2\sqrt{1-x}\sqrt{2x+4} \ge 5 + x \ge 3 \Rightarrow y \ge \sqrt{3} \iff \sqrt{3} \le y \le 3.$$

Paijiņas risinājums ir īss, taču tas balstās uz jau zināmās atbildes pārbaudīšanu un ir maznoderīgs citu uzdevumu risināšanā.

Kārlītis. Izmantošu to pašu metodi, ko Pēterītis, taču racionālākā izpildījumā: $\sqrt{1-x}$ apzīmēšu ar t. Tad $0 \le t \le \sqrt{3}$, $x = 1 - t^2$ un jānosaka vērtību kopa funkcijai $z = t + \sqrt{6 - 2t^2}$. Sastādīšu kvadrātvienādojumu attiecībā pret t.

$$(z-t)^2 = 6 - 2t^2$$

$$z^2 - 2zt + t^2 = 6 - 2t^2$$

$$3t^2 - 2zt + z^2 - 6 = 0.$$

Diskriminantam jābūt nenegatīvam.

$$4z^2 - 12(z^2 - 6) \ge 0 \Rightarrow 72 - 8z^2 \ge 0 \Rightarrow z^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le z \le 3.$$

Ja $z = 3$, tad

$$3t^2 - 2zt + z^2 - 6 = 3(t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Savukārt, ja $z = -3$, tad

$$3t^2 - 2zt + z^2 - 6 = 3(t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1,$$

kas neatrodas t maiņas intervālā. Funkcijas z vismazāko vērtību noteikšu ar citu paņēmienu:

$$z^2 = 6 - t^2 + 2t\sqrt{6 - 2t^2} \ge 6 - t^2 \ge 6 - 3 = 3 \Rightarrow z \ge \sqrt{3}.$$

Šajā novērtējumā nevienādība kļūst par vienādību, ja $t = \sqrt{3}$.

Funkcijas

$$F(x) = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$$

ekstrēmu punktu atrašanās vieta, vispārīgi runājot, ir atkarīga no reizinājuma ac zīmes. Ja ac pozitīvs, tad funkcija F ekstrēmus sasniedz savas definīcijas kopas galapunktos. Savukārt 2. uzdevumā, kur koeficientu a un c reizinājums negatīvs, situācija bija sarežģītāka, proti, funkcija F minimumu sasniedza definīcijas kopas galapunktā, bet maksimumu – kādā šīs kopas iekšējā punktā. Turpmāk noskaidrosim, kā atrast funkcijas F maksimumu, un to, vai F savu minimumu vienmēr sasniedz definīcijas kopas galapunktā. Vispirms pierādīsim divas lemmas.

1. lemma. Pieņem, ka $a > 0$, $c > 0$, $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = \frac{d}{c}$, $x^* = \frac{a^2d - c^2b}{ac(a+c)}$,

$$f(x) = \sqrt{ax+b} + \sqrt{d-cx},\ x \in [x_1, x_2].$$

Tad $\max f(x) = f(x^*) = \sqrt{(a+c)(\frac{b}{a} + \frac{d}{c})}$.

Pierādījums. Pārveidosim doto funkciju un izmantosim Košī nevienādību

$$xu + yv \le \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Atcerēsimies, ka tā pārvēršas par vienādību tikai tad, ja ir spēkā proporcionalitātes nosacījums $x : y = u : v$ jeb $xv = yu$.

$$f = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + \sqrt{c\left(\frac{d}{c} - x\right)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x + \frac{b}{a}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{d}{c} - x} \le \sqrt{(a+c)\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)}.$$

Ņemot vērā minēto proporcionalitātes nosacījumu, atradīsim punktu x, kurā funkcija f sasniedz savu maksimumu.

$$a\left(\frac{d}{c} - x\right) = c\left(x + \frac{b}{a}\right),\ \frac{ad}{c} - \frac{bc}{a} = x(a+c)$$

$$x = \frac{a^2d - bc^2}{(a+c)ac}.$$

Pārliecināsimies, ka atrastais punkts x pieder funkcijas f definīcijas kopai.

$$\frac{a^2d - bc^2}{ac(a+c)} \le \frac{d}{c} \Leftrightarrow a^2d - bc^2 \le ad(a+c) \Leftrightarrow$$

$$-bc^2 \le adc \Leftrightarrow -bc \le ad \Leftrightarrow -\frac{b}{a} \le \frac{d}{c} \quad (dots).$$

$$-\frac{b}{a} \le \frac{a^2d - bc^2}{ac(a+c)} \Leftrightarrow -bc(a+c) \le a^2d - bc^2 \Leftrightarrow$$

$$-bac - bc^2 \le a^2d - bc^2 \Leftrightarrow -bc \le ad.$$

Lai noteiktu funkcijas f minimumu, izmantosim 2. uzdevumā lietoto paņēmienu (sk. Pēterīša vai Kārlīša risinājumu) – kāpināt funkciju kvadrātā.

2. lemma. Pieņem, ka ir spēkā 1. lemmas nosacījumi. Tad funkcija f sasniedz minimumu definīcijas kopas $D(f) = [x_1, x_2]$ galapunktā x_1 vai x_2.

Pierādījums.

$$f^2(x) = ax + b + d - cx + 2\sqrt{ax+b} \cdot \sqrt{d-cx} \ge (a-c)x + b + d \Rightarrow$$

$$\min f^2(x) \ge \min((a-c)x + b + d).$$

Ja $a > c$, tad funkcija $T(x) = (a-c)x + b + d$ ir augoša, tāpēc tā minimumu sasniedz nogriežņa kreisajā galapunktā x_1. Savukārt, ja $a < c$, tad funkcija T ir dilstoša un minimumu sasniedz galapunktā x_2.

$$a > c \Rightarrow \min T(x) = T(x_1) = (a-c)x_1 + b + d = -(a-c)\frac{b}{a} + b + d = \frac{bc + ad}{a}$$

$$a < c \Rightarrow \min T(x) = T(x_2) = (a-c)x_2 + b + d = (a-c)\frac{d}{c} + b + d = \frac{bc + ad}{c}$$

Tātad

$$\min f^2(x) \geq \min((a-c)x+b+d) = \min\{T(x_1);T(x_2)\}.$$

Tā kā $f^2(x_1) = T(x_1)$ un $f^2(x_2) = T(x_2)$, tad funkcija f^2 un līdz ar to arī f minimumu sasniedz nogriežņa D(f) galapunktā x_1 vai x_2.

Teorēma. Pieņem, ka funkcijas $F = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$ definīcijas kopa ir nogrieznis [m, M] ar galapunktiem $m = -\frac{b}{a}$, $M = -\frac{d}{c}$ Tad

A1. Ja $a \geq 0$ un $c \geq 0$, tad funkcija F sasniedz minimumu punktā m un maksimumu punktā M.

A2. Ja $a \leq 0$ un $c \leq 0$, tad funkcija F sasniedz minimumu punktā M un maksimumu punktā m.

A3. Ja $ac < 0$, tad funkcija F sasniedz minimumu punktā m, ja $a + c \geq 0$ un punktā M, ja $a + c \leq 0$. Ja turklāt $x^* = \dfrac{bc^2 - da^2}{ac(a-c)} \in [m, M]$, tad

$$\max F(x) = F(\mathrm{x}^*) = \sqrt{(a-c)(\frac{b}{a}-\frac{d}{c})}.$$

Apgalvojumu A1 un A2 pareizība izriet no tā, ka F ir monotona – nedilstoša, ja koeficienti a un c ir nenegatīvi, un neaugoša, ja tie abi ir nepozitīvi. Savukārt A3 izriet no iepriekš pierādītajām lemmām. Šo lemmu apgalvojumos noteiktības dēļ pieņemts, ka funkcijas F koeficienti a un c ir pozitīvi. Ievērosim, ka funkcija F sakrīt ar funkciju $f(x) = \sqrt{ax+b} + \sqrt{d-cx}$, ja "$c$" vietā ņem "$-c$".

3. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot, ka $(a-c)(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}) \geq 0$, ja $ac < 0$.

Anniņa. Dotais lielums ir zemsaknes izteiksme teorēmas apgalvojumā A3 un tātad tas ir nenegatīvs.

Jānītis. Ņemšu $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ un $d = -2$. Tad $ac = -2 < 0$, bet dotās izteiksmes vērtība ir negatīva. Tātad apgalvojums nav spēkā.

Kam taisnība? Jānītim! Vai tādā gadījumā teorēmas formulējumā nav pieļauta kāda kļūda? Pārbaudīsim teorēmas nosacījumus funkcijai $\sqrt{2x+1} + \sqrt{-x-2}$ ar Jānīša izvēlētajiem koeficientiem:

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -0{,}5$$
$$-x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2.$$

Redzams, ka nav spēkā teorēmas nosacījums par to, ka funkcijas definīcijas kopai jābūt nogrieznim.

4. uzdevums. Vai apgalvojums A3 paliktu spēkā, ja atteiktos no nosacījuma $ac < 0$?

Izrādās, ka nē! Piemēram, funkcijai $\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+3}$ punkts $x^* = \dfrac{bc^2 - da^2}{ac(a-c)} = \dfrac{8 \cdot 1 - 3 \cdot 4}{2 \cdot 1(2-1)} = -2$ pieder definīcijas kopai $[-3, +\infty)$, bet tomēr tas nav maksimuma punkts, jo funkcija f ir augoša.

5. uzdevums. Atrast funkcijas $\mathrm{f}(x) = \sqrt{3x+6} + \sqrt{42-6x}$ vislielāko un vismazāko vērtību:

1) tās dabīgajā definīcijas kopā D(f) = [– 2, 7];
2) nogrieznī [0, 4].

Anniņa. Vispirms noteikšu teorēmā minētos punktus m, M un x^*:

$$m=-\frac{b}{a}=-2,\quad M=-\frac{d}{c}=7\quad x^*=\frac{bc^2-da^2}{ac(a-c)}=\frac{6\cdot 36-42\cdot 9}{-18\cdot 9}=1.$$

Funkcijas vērtības šajos punktos ir: f(m) = $\sqrt{54}$, f(M) = $\sqrt{27}$ un f(x^*) = 9. Tātad minimālā f vērtība pirmajā gadījumā ir f(M) = $\sqrt{27}$ un maksimālā f(x^*) = 9. Savukārt otrajā gadījumā:

$$f(0)=\sqrt{6}+\sqrt{42}=\sqrt{6}(1+\sqrt{7}),\quad f(4)=\sqrt{18}+\sqrt{18}=6\sqrt{2}.$$

Salīdzināšu f(0) un f(4), kāpinot tos kvadrātā: $6(8+2\sqrt{7})>6\cdot 6\cdot 2\Leftrightarrow\sqrt{7}>2$. Tātad otrajā gadījumā minimālā f vērtība ir f(4) = $6\sqrt{2}$ un maksimālā tāpat kā pirmajā ir f(x^*) = 9.

Vai Anniņas atbilde ir pareiza? Vai viņa korekti lietojusi teorēmu?

Jānītis. Nē! Otrajā gadījumā, kad ekstrēmi jāmeklē nogrieznī [0, 4], funkcijai $f(x)=\sqrt{3x+6}+\sqrt{42-6x}$ atbilstošie teorēmā minētie definīcijas kopas punkti x_1, x_2 nesakrīt ar dotā nogriežņa galapunktiem. Ievērosim, ka teorēmā funkcijas f definīcijas kopa ir plašākā pieļaujamā, ārpus kuras f, vispārīgi runājot, nav definēta. Anniņa acīmredzot ir uzskatījusi, ka īpašība sasniegt minimumu nogriežņa [x_1, x_2] galapunktā automātiski būs spēkā arī jebkuram šī nogriežņa apakšnogrieznim. Uzrādīšu funkciju, sk. 8. zīm., kurai minētā īpašība nav spēkā!

Anniņa. Mana atbilde tomēr ir pareiza. Lūk, pārveidojumi, kas to apstiprina.

$$f(x)=\sqrt{3x+6}+\sqrt{42-6x}\ge 6\sqrt{2}\Leftrightarrow 48-3x+2\sqrt{3x+6}\cdot\sqrt{42-6x}\ge 72\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{3x+6}\cdot\sqrt{42-6x}\ge 24+3x\Leftrightarrow 4\cdot 3\cdot 6(x+2)(7-x)\ge 9(8+x)^2\Leftrightarrow$$

$$8(14+5x-x^2)\ge(64+16x+x^2)\Leftrightarrow 9x^2-24x-48\le 0\Leftrightarrow 3(x-4)(3x+4)\le 0.$$

Tā kā otrajā gadījumā x pieder nogrieznim [0, 4], pierādījums pabeigts.

Monotonitātes intervāli

Vai funkcija $F=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$, kur x pieder kādam nogrieznim savu minimumu vienmēr sasniedz šī nogriežņa galapunktā? Izrādās, ka jā! Ja reizinājums $ac\ge 0$, tad norādītā funkcijas F īpašība uzreiz izriet no F monotonitātes. Funkcija F ir nedilstoša, ja $a\ge 0$ un $c\ge 0$, un neaugoša, ja $a\le 0$ un $c\le 0$. Krietni sarežģītāka ir gadījuma $ac<0$ analīze. Noteiktības dēļ uzskatīsim, ka $a>0$, bet $c<0$. Vēl uzskatīsim, ka $ad-bc>0$. Šis nosacījums nozīmē, ka funkcija F ir definēta nogrieznī $\left[-\frac{b}{a},-\frac{d}{c}\right]$. Pāriesim uz jaunu mainīgo:

$$t=\sqrt{ax+b}\Rightarrow x=\frac{t^2-b}{a}\quad\Rightarrow F=t+\sqrt{\frac{c}{a}t^2+\frac{ad-bc}{a}}=g(t):=t+p\sqrt{q^2-t^2}.$$

Šeit lietoti apzīmējumi $p=\sqrt{\frac{-c}{a}},\quad q=\sqrt{\frac{ad-bc}{-c}}>0$.

Atrisināsim šādu uzdevumu par funkcijas g ekstrēmiem un monotonitātes īpašībām.

6. uzdevums. Pierādīt, ka nogrieznī $[0,q]$ eksistē tāds punkts, pa kreisi no kura funkcija g aug, bet pa labi dilst.

Maksimuma punkta t^* atrašanai lietosim Košī nevienādību.

$$1 \cdot t + p\sqrt{q^2 - t^2} \le \sqrt{1+p^2} \cdot \sqrt{t^2 + q^2 - t^2} = q\sqrt{1+p^2}\ .$$

Vienādība pastāv, ja

$$tp = \sqrt{q^2 - t^2} \ \Rightarrow\ t^2(p^2+1) = q^2 \ \Rightarrow\ t^* = \frac{q}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ņemsim $0 \le x < y \le t^*$ un pārbaudīsim nevienādību $g(x) < g(y)$.

$$x + p\sqrt{q^2 - x^2} < y + p\sqrt{q^2 - y^2} \ \Leftrightarrow$$

$$p(\sqrt{q^2 - x^2} - \sqrt{q^2 - y^2}) < y - x \ \Leftrightarrow$$

$$p(q^2 - x^2 - q^2 + y^2) < (y-x)(\sqrt{q^2 - x^2} + \sqrt{q^2 - y^2}) \ \Leftrightarrow$$

$$p(y^2 - x^2) < (y-x)(\sqrt{q^2 - x^2} + \sqrt{q^2 - y^2}) \ \Leftrightarrow$$

$$p(y+x) < \sqrt{q^2 - x^2} + \sqrt{q^2 - y^2}.$$

Pēdējo nevienādību iegūsim tā:

$$y \le t^* = \frac{q}{\sqrt{1+p^2}} \ \Rightarrow\ y^2(1+p^2) \le q^2 \ \Rightarrow$$

$$y^2p^2 \le q^2 - y^2 \ \Rightarrow\ \ 2py \le 2\sqrt{q^2 - y^2}$$

$$p(x+y) < 2py \le 2\sqrt{q^2 - y^2} = \sqrt{q^2 - y^2} + \sqrt{q^2 - y^2} < \sqrt{q^2 - x^2} + \sqrt{q^2 - y^2}\ .$$

Nevienādības $g(x) > g(y)$, ja $t^* \le x < y \le q$, pārbaude pēc būtības neatšķiras no tikko veiktās pārbaudes.

No šejienes iegūstamas vairākas sekas.

S1. $\min\limits_{t \in [t_1, t_2]} g(t) = \min\{g(t_1); g(t_2)\}$

S2. $\min\limits_{x \in [x_1, x_2]} f(x) = \min\{f(x_1); f(x_2)\}$

S3. Pieņem, ka $a \ge 0$, $b \ge 0$ un $0 \le x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Tad nogrieznī $[x_1, x_2]$ definēta funkcija $a\sin x + b\cos x$ savu minimālo vērtību sasniedz galapunktā x_1 vai x_2.

Funkcijas g izteiksmē mainīgo t aizvietojot ar $q\sin x$, iegūstam $g = q\sin x + qp\cos x$.

<u>Piezīme</u>. Sekas S1-S3 var iegūt, izmantojot citu metodiku, proti – izliektības jēdzienu.

<u>7. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $f(x) = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ vislielāko un vismazāko vērtību.

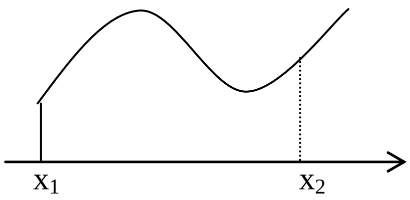
Risinājums ar vektoru palīdzību ir dots Z. Skopeca grāmatā [Sk, 36]. Turklāt tur nav skaidrots, kāpēc funkcija savu minimumu sasniedz definīcijas kopas galapunktā. Īsāks ir šāds risinājums. Maksimumu nosakām pēc Košī nevienādības:

$$f(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{2 - x} \le 3\sqrt{2}\ .$$

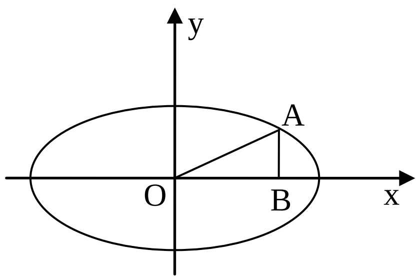
Vienādība pastāv, ja $8x = 2 - x \;\Rightarrow\; x_{\max} = \frac{2}{9}$. Minimums būs definīcijas kopas [0, 2] galapunktā $\min f = f(2) = \sqrt{2}$, sk. teorēmas apgalvojumu A3 vai arī sekas S2.

Ģeometriskā interpretācija

Uzdevumu $extr(\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d})$, kur $a > 0$, $c < 0$, var reducēt uz tāda elipses $\frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2} = 1$, kur $p^2 = \frac{bc - ad}{c}$, $q^2 = \frac{ad - bc}{a}$, punkta A(u, v) noteikšanu, kuram ir 1) vismazākā; 2) vislielākā koordinātu summa, t. i., $u + v \mapsto extr$, sk. 9. zīm.



8. zīm.



9. zīm.

Ģeometriskā interpretācija ļoti uzskatāmi ļauj iegūt uzdevuma min(u + v) atbildi. Nevienādībā $u + v$ = OB + BA $\geq$ OA vienādība var pastāvēt tikai tad, kad punkts A atrodas uz Oy vai Ox ass, t. i., kad u vai v ir nulle. Arī maksimuma atrašana ir vienkārša.

$$u + v = p \cdot \frac{u}{p} + q \cdot \frac{v}{q} \leq \sqrt{p^2 + q^2}\,.$$

Tēma skolēnu patstāvīgiem pētījumiem

Nosakiet ekstrēmus un monotonitātes intervālus funkcijai

$$\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}\,.$$

Kādiem a_k, b_k , k = 1,2,3, funkcijas

$$f(x) = \sqrt{a_1x + b_1} + \sqrt{a_2x + b_2} + \sqrt{a_3x + b_3}$$

ekstrēmus varat atrast ar elementārām metodēm? Aplūkot raksturīgus piemērus:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\,,\;\; \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\,,\;\; \sqrt{x} - 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\,...$$

Atrast tādus p un q, lai funkcijas

$$\sqrt{x} - p\sqrt{x-1} + q\sqrt{x-2}$$

maksimuma vai minimuma punkts būtu naturāls skaitlis.

5. nodaļa. Trigonometriskās funkcijas

Kurš gan var aptvert neaptveramo!

Ekstrēmu uzdevumi, kas saistīti ar trigonometriskām funkcijām, ir ļoti daudzveidīgi. Vienkāršāko un skolas matemātikā pazīstamāko ekstrēmu uzdevumu risināšana pamatojas uz dažu kvadrātfunkcijas īpašību izmantošanu, sk., piemēram, [VR]. Jebkuru trigonometrisko vienādojumu var pārvērst par ekstrēmu uzdevumu, piemēram, prasot atrast vismazāko vai vislielāko vienādojuma sakni kādā nogrieznī. Daudzu "skaistu" trigonometrisko ekstrēmu uzdevumu pamatā ir kāds fizikas vai ģeometrijas uzdevums. Piemēram, funkcija

$$\cos^2 x \sin x \text{ vai } \sin^2 x \cos x$$

parādās uzdevumā par vislabāko apgaismojumu.[1)] Noderīga ir arī pretēja virziena pieeja, kad no iepriekš pierādīta teorētiska rezultāta kā sekas iegūst kādu nevienādību, ģeometrisku interpretāciju, to vai citu apgalvojumu par ģeometriskām figūrām. Šajā nodaļā ir aplūkota samērā neliela daļa no trigonometriskajām funkcijām, kurām ekstrēmus var atrast ar elementārām metodēm. Tomēr tā, cerams, dos zināmu priekšstatu par risināšanas paņēmienu daudzveidību un, iespējams, noderēs, gatavojoties matemātikas olimpiādēm vai izstrādājot kādu konkursa darbu. Vairākiem pazīstamiem uzdevumiem ir uzrādīti citi, īsāki risinājumi, kas turklāt pieļauj viegli saskatāmus vispārinājumus.

Ne vienmēr vienkāršāk ir sastādīt kāda uzdevuma matemātisko modeli nekā pēc tam to atrisināt. Piemēram, kādā leņķī θ jāizšauj artilērijas lode (bulta, utt.), lai tā aizlidotu vistālāk? [2)] Pieņemot, ka uz lodi iedarbojas tikai gravitācijas spēks, iegūst šādu attāluma izteiksmi $d = \frac{2v^2}{g}\sin 2\theta$, kur v ir sākuma ātrums un g – brīvās krišanas paātrinājums. Uzdevums atrisināms elementāri – jāņem $\sin 2\theta = 1$, t. i., lode jāizšauj 45^0 lielā leņķī.

Kādas trigonometriskās funkcijas visbiežāk sastopamas skolēniem paredzētajā mācību literatūrā? Parasti tās ir funkcijas, kuras reducējamas uz kvadrātfunkciju. Savukārt studentiem paredzētajos mācību līdzekļos augstākajā matemātikā vai matemātiskajā analīzē klasisks piemērs ir funkcija $\cos x + \sin x$. Daudzus trigonometriskos ekstrēmu uzdevumus, kurus studenti risina ar diferenciālrēķinu palīdzību, var atrisināt ar elementārām metodēm. Raksturīgs piemērs: *Atrast vislielāko un vismazāko funkcijas* $\sin 2x + 2\sin x$ *vērtību.*

Funkcija $y = a\cos x + b\sin x$

Viens no paņēmieniem, kā atrast funkcijas y ekstrēmus, ir palīgleņķa izmantošana:

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) =$$

$$\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha + x)$$

No šejienes secinām, ka:

$$\max y = \sqrt{a^2+b^2}, \text{ ja } \sin(x+\alpha) = 1, \text{ un } \min y = -\sqrt{a^2+b^2}, \text{ ja } \sin(x+\alpha) = -1.$$

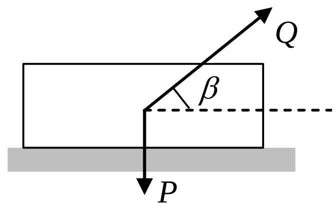
Cits paņēmiens, kas mērķi ļauj sasniegt nedaudz ātrāk, ir Košī nevienādības izmantošana [3)]

$$|y| = |a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$$
$$-\sqrt{a^2+b^2} \le y \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

Sekas. $-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$.

Uzdevums par minimālo spēku

Spēks Q, kas nepieciešams kravas pārvietošanai horizontālā virzienā, tiek aprēķināts pēc formulas $Q = \dfrac{P\cdot k}{\cos\beta + k\sin\beta}$, kur β – leņķis starp horizontu un spēka Q virzienu, k – berzes koeficients (10.zīm.). Kādā leņķī jābūt vērstam spēkam Q, lai tas būtu vismazākais? [Sav, 67]



10. zīm.

Uzdevuma formulējums atrodams daudzos uzdevumu krājumos. Spēka Q formulas izvedums un risinājums ar atvasinājuma palīdzību atrodams rakstā [Kem], kas veltīts ekstrēmu uzdevumiem fizikā. Vēl agrāk tas ir izdarīts (tiesa, citā izklāstā) grāmatā [Lub, 80-81].

Berzes spēks ir atkarīgs no spiediena spēka, kas vērsts perpendikulāri virsmai, t. i., no $P - Q\sin\beta$ un ir vienāds ar $(P - Q\sin\beta)k$. Vilcējspēka Q horizontālajai komponentei *jāpārvar* šis berzes spēks, t. i., $Q\cos\beta = (P - Q\sin\beta)k$. No šejienes izsakot Q, iegūst minēto formulu. Q vērtība būs vismazākā, ja saucējs būs vislielākais.

Pat tad, kad teorija ir pavisam vienkārša, skolēniem tā var sagādāt grūtības, un savukārt skolotājiem pārsteigumus un sarežģījumus var sagādāt skolēnu risinājumi. Iepazīsimies ar divu uzdevumu risinājumiem.

1. uzdevums. Atrast funkcijas $y = 5\sin x + 12\cos x$ vislielāko un vismazāko vērtību.

Anniņa. Tā kā $5^2 + 12^2 = 13^2$, tad y ekstremālās vērtības ir $y_{\max} = 13$ un $y_{\min} = -13$.

Vai Anniņas risinājums ir pareizs?

Jānītis. Jā. Tiesa, tas būtu pilnīgāks, ja saturētu norādes, kādiem x tiek sasniegtas ekstremālās vērtības.

Anniņa. It kā tas nebūtu zināms, ka Košī nevienādība kļūst par vienādību tikai tad, kad ir spēkā proporcionalitātes nosacījums:

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \mathrm{tg} x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}.$$

Tātad ekstremālās vērtības iegūsim, ņemot $x = \pm\,\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} = \pm\,\mathrm{arctg}\dfrac{12}{5}$.

Jānītis. Tomēr pārbaudīšu, vai der atrastais x.

$$x = -\mathrm{arctg}\frac{12}{5} \Rightarrow \mathrm{tg} x = -\frac{12}{5};\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{25}{169} \Rightarrow$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{12}{13};\ \cos x = \pm\frac{5}{13}.$$

Tā kā $5\cdot\frac{12}{13}+12\cdot\frac{5}{13}=\frac{120}{13}<13$, tad … dotajam uzdevumam ekstrēmi laikam neeksistē, vismaz ne tik lieli kā 13.

Kārlītis. Anniņa, kā tas mums dažkārt gadās, ir sajaukusi vietām a ar b. Vajadzēja būt

$$\mathrm{tg}x=-\frac{5}{12};\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{144}{169}\quad\Rightarrow\quad \cos x=\pm\frac{12}{13};\ \sin x=\pm\frac{5}{13}.$$

Izvēloties kosinusu un sinusu abus ar plus zīmi, iegūstam maksimumu y_{max} = 13 un abus ar mīnus zīmi y_{min} = –13.

Jautrīte. Bet abus ņemt ar mīnus zīmi nedrīkst, jo tad tangenss iznāks pozitīvs.

Novērsiet defektus skolēnu risinājumos.

<u>2. uzdevums</u>. Atrast funkcijas y = 5sin$x$ + 12cos$x$ vislielāko un vismazāko vērtību, ja x ir pirmā kvadranta leņķis.

Vislielāko vērtību y_{max} = 13 dod iepriekšējā uzdevumā atrastais $x=\mathrm{arctg}\frac{5}{12}$, bet vērtība "–13" nav iegūstama, jo pirmajā kvadrantā gan sinuss, gan kosinuss ir nenegatīvi. Pierādīsim, ka y_{min} = 5.

$$5\sin x+12\cos x\geq 5\Leftrightarrow 25\sin^2 x+144\cos^2 x+120\sin x\cos x\geq 25\ \Leftrightarrow$$

$$25+(144-25)\cos^2 x+120\sin x\cos x\geq 25\Leftrightarrow (119\cos x+120\sin x)\cos x\geq 0$$

<u>3. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $\sin x-\cos x$ maksimumu, ja x ir pirmā kvadranta leņķis.

<u>4. uzdevums</u>. Vispārināt 4. nodaļā iegūtās sekas S3 patvaļīgām a un b vērtībām un nogrieznim [x_1, x_2].

Funkcija $f = a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x$

Pārejot uz divkāršotu leņķi, iegūsim jau izanalizētā tipa funkciju:

$$y = 2f = a(1+\cos 2x)+b\sin 2x+c(1-\cos 2x) =$$
$$(a-c)\cos 2x+b\sin 2x+a+c.$$

Tātad

$$\max f=\frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right),\quad \min f=\frac{1}{2}\left(a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right).$$

Maksimuma un minimuma punktus var noteikt no proporcionalitātes nosacījuma

$$(a-c):b=\cos 2x:\sin 2x.$$

Tomēr, kā liecina izklāstītie risinājumi, ekstrēmu punktu noteikšanā nepieciešama zināma piesardzība.

<u>5. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $f = 2\cos^2 x + 2\sin x\cos x$ maksimumu, ja $x<\frac{\pi}{8}$.

Anniņa. Dotās funkcijas koeficienti ir: a = 2, b = 2 un c = 0. Pēc formulas

$$\max f=\frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2^2+2^2})=1+\sqrt{2}.$$

Maksimums tiek sasniegts, ja

$$(a-c) : b = \cos 2x : \sin 2x \Leftrightarrow \mathrm{tg} 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}.$$

Tā kā pēc dotā $x < \frac{\pi}{8}$, tad funkcijai f maksimums neeksistē.

Jānītis. Atrisināšu uzdevumu, lietojot Košī nevienādību.

$$f^2 = 4(\cos x \cos x + \sin x \cos x)^2 \leq 4(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x + \cos^2 x) = 8\cos^2 x \leq 8.$$

Maksimālā vērtība $\sqrt{8}$ tiek sasniegta, piemēram, punktā $x = 0$, jo $8\cos^2 0 = 8$.

Anniņa. Nav tiesa! Punktā $x = 0$ funkcijas f vērtība ir 2, kas ir mazāk nekā $\sqrt{8}$, pat mazāk nekā manis piedāvātā.

Jānītis. Dīvaini gan. Vai tad Košī nevienādība var kļūt par vienādību vēl kaut kādos punktos, kuri nav ne maksimuma, ne minimuma punkti? Laikam maksimuma vietā es būšu atradis minimumu.

Jautrīte. Saskaņā ar Jānīša izvedumu funkcija var sasniegt maksimumu tikai tur, kur $\cos^2 x = 1$. Bet, ja $\cos^2 x = 1$, tad $\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$. Ievietojot f izteiksmē $\sin x = 0$, iegūstu, ka f vispār nevar būt vienāda ar $\sqrt{8}$. Atliek piekrist Anniņai, ka maksimuma vispār nav.

Kā uzdevumu risinātu jūs?

Mācību līdzeklī [VR] aplūkotas samērā daudzveidīgas trigonometriskās funkcijas.

$$\sin^2 x + \sin x + 1;\ 2\sin x + \cos 2x + 3;\ \cos^2 x - 2\sin x;\ \sin^3 x - \sin^6 x;$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x};\ \frac{\sin^2 x - 4\sin x + 5}{3 - 2\sin x};\ \frac{\sin\alpha\ + \sin\beta}{1 + \sin\alpha \cdot \sin\beta};\ \sin 2x \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{6});$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x;\ 3\sin x + 3\cos x - 4\sin x \cos x;\ \sin^2 x tgx + \cos^2 x ctgx + \sin 2x;$$
$$\sin^2 \alpha \cos\alpha;\ 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x.$$

Turklāt vairāki uzdevumi piedāvāti patstāvīgai risināšanai. Komentēsim un atrisināsim dažus no tiem.

“Noteikt izteiksmes cosx +sinx lielāko vērtību”

“Aprēķināt lielāko un mazāko vērtību funkcijai: $\sin^4 x+\cos^4 x$, $\sin^6 x+\cos^6 x$”

Turpmāk ir atrisināts uzdevums extr($\sin^n x+\cos^n x$) patvaļīgam naturālam n.

“Atrast funkcijas $y=-\log_4 \cos x$ lielāko un mazāko vērtību.”

Mazākā vērtība ir $y(0) = 0$, jo $\cos x \leq 1$ un $y \geq 0$, bet lielākās vispār nav, jo y tiecas uz $+\infty$, kad $\cos x$ tiecas uz 0.

“Aprēķināt izteiksmes $(\sin x + \cos x)^3 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ mazāko vērtību”

Apzīmēsim doto izteiksmi ar y un novērtēsim no apakšas katru saskaitāmo atsevišķi. Otro saskaitāmo novērtēsim, pamatojoties uz nevienādību $\frac{1}{G^2} \geq \frac{1}{A^2}$. Tad $y \geq (-\sqrt{2})^3 + 4$.

Minimālo vērtību $\min f = -2\sqrt{2} + 4$ var sasniegt, piemēram, punktā $x = \frac{5\pi}{4}$.

“Noteikt izteiksmes $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$ lielāko un mazāko vērtību”.

Ekstremālās vērtības ir (-1) un 1, kas izriet no pārveidojumiem $(u = \sin\alpha,\ v = \sin\beta)$:

$$-1 \le -1 + \frac{(u+1)(1-v)}{1-uv} = \frac{u-v}{1-uv} = 1 - \frac{(v+1)(1-u)}{1-uv} \le 1.$$

"Noteikt funkcijas $\dfrac{1}{x^2+4\pi x+41} + \cos x$ lielāko vērtību." [4)]

Pirmajā brīdī šķiet, ka tas nebūs izdarāms elementāri. Ņemot vērā, ka piemērs *mākslīgs*, pārbaudīsim, vai tas ir sastādīts tā, ka abas funkcijas neatkarīgi viena no otras pieņem maksimālo vērtību vienā un tajā pašā punktā. Tiešām, gan cos*x*, gan pirmais saskaitāmais

$$\frac{1}{x^2+4\pi x+41} = \frac{1}{(x+2\pi)^2+41-4\pi^2}$$

maksimumu sasniedz punktā "– 2π".

6. uzdevums. Atrast funkcijas $2\sin(x+\frac{\pi}{3}) + \cos x - \sqrt{3}\sin x - \sqrt{8}$ vismazāko pozitīvo sakni.

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem

$$2\left(\sin(x+\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) - \sqrt{8} =$$

$$2\left(\sin(x+\frac{\pi}{3}) + \cos(x+\frac{\pi}{3})\right) - \sqrt{8} \le 2\sqrt{2} - \sqrt{8} = 0.$$

Šeit lietota Košī nevienādība. Vienādība tiek sasniegta, ja

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \cos(x+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \ \mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow$$

$$x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \pi k - \frac{\pi}{12}.$$

Mazāko pozitīvo sakni iegūst, ņemot $k=1$, t. i., $x = \dfrac{11\pi}{12}$.

Daudzu trigonometrisku ekstrēmu uzdevumu risināšanā noderīgs šāds rezultāts.

Lemma

Ja *u* un *v* pēc moduļa nepārsniedz 1, tad

$$\max(u-v)v = \frac{1}{4}, \quad \min(u+v)v = -\frac{1}{4}.$$

Pierādījums.

$$(u-v)v \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(v-u)v+1 \ge 0 \Leftrightarrow (2v-u)^2 + 1 - u^2 \ge 0.$$

Maksimums tiek sasniegts tikai tad, kad $u = \pm 1$ un $v = \pm\dfrac{1}{2}$. Līdzīgi secinām, ka $(u + v)v$ minimumu sasniedz tikai tad, kad $u = \pm 1$ un $v = \mp\dfrac{1}{2}$, jo

$$(u+v)v \ge -\frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \ 4(u+v)v+1 \ge 0 \ \Leftrightarrow \ (2v+u)^2 + 1 - u^2 \ge 0.$$

Ņemot vērā to, ka *u* mainās no "–1" līdz "+1", var spriest arī tā:

$$\max\,(u-v)v = \max\,(-u-v)v = -\min\,(u+v)v.$$

7.uzdevums. Noteikt funkcijas $y = (1 + \cos x)\sin x$ maksimumu [5)].

Apzīmēsim $\cos x = t$ un pēc vienkāršiem pārveidojumiem lietosim nevienādību $G \leq A$.

$$3y^2 = 3(1 + t)^2(1 - t^2) = (1 + t)(1 + t)(1 + t)(3 - 3t).$$

Reizinātāju summa nav atkarīga no t, tāpēc reizinājums ir maksimāls, ja $1 + t = 3 - 3t \Rightarrow t = 0{,}5$. Tātad

$$\max(1 + \cos x)\sin x = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

8. uzdevums. Aprēķināt minimālo vērtību funkcijai $\sin x(1+ \cos x)$, ja $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pierādīsim, ka minimālā vērtība tiek sasniegta galapunktā $x = \frac{\pi}{6}$, t. i., ka visiem dotajiem x:

$$4\sin x(1 + \cos x) \geq 2 + \sqrt{3}$$
$$16\sin^2 x(1 + \cos x)^2 \geq 7 + 4\sqrt{3}.$$

Apzīmēsim $t = \cos x$. Tad $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ un jāpierāda, ka $16(1 - t^2)(1 + t)^2 - 7 - 4\sqrt{3} \geq 0$.

Tā kā punktā $t = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nevienādība kļūst par vienādību, tad nevienādības kreiso pusi var sadalīt reizinātājos.

$$4(3 - 4t^2 + 1)(1 + t)^2 - 7 - 4\sqrt{3} = 4(3 - 4t^2)(1 + t)^2 + (4t^2 - 3) + 8t - 4\sqrt{3} \geq 0.$$

$$(2t - \sqrt{3})\{-4(2t + \sqrt{3})(1 + t)^2 + 2t + \sqrt{3} + 4\} \geq 0$$

$$-4(2t + \sqrt{3})(1 + t)^2 + 2t + \sqrt{3} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (2t + \sqrt{3})(1 - 4(1 + t)^2) + 4\} \leq 0$$

$$-(2t + \sqrt{3})(2t + 1)(2t + 3) + 4 \leq 0$$

$$4 \leq (2t + \sqrt{3})(2t + 1)(2t + 3).$$

Labajā pusē ir augoša funkcija (kā trīs augošu funkciju reizinājums). Tā kā šī funkcija savu minimumu sasniedz punktā $t = 0$ un minimums ir lielāks nekā 4, tad vajadzīgais pierādīts.

9. uzdevums. Atrast minimumu izteiksmei $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma$, ja

1) α, β, γ – trijstūra leņķi; 2) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Anniņa. Uzdevums man pazīstams, sk. [AB, 58]. "Pierādīt, ka katrā trijstūrī, kura leņķa lielumi ir α, β un γ, pastāv nevienādība

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma > \frac{3}{4}."$$

Izmantošu tur doto risinājumu (sk. 176. lpp.)

"Ievietojot $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, pārveidojam pierādāmo nevienādību par

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta)) < \frac{1}{4}.$$

Ja $\cos(\alpha + \beta) \leq 0$, tad šī nevienādība ir acīmredzama.

Ja $\cos(\alpha+\beta)>0,$ tad nevienādību pierāda, izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko."

Otrajā gadījumā, kad visu leņķu summa ir π, der tas pats risinājums, jo jebkura trijstūra leņķu summa ir tieši 180 grādu jeb π. Secinu, ka abos gadījumos izteiksmes minimālā vērtība ir 0,75.

Vai Anniņas spriedumi ir korekti?

Jānītis. Kamēr Anniņa nav uzrādījusi konkrētas leņķu vērtības, ar kurām izteiksme kļūst vienāda ar 0,75 tikmēr viņas risinājumu neuzskatu par pareizu.

Anniņa. Der, piemēram, 60, 0 un 120 grādu lieli leņķi, jo

$$\cos^2 60^0+\cos^2 0^0+\cos 120^0=\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Jānītis. Piemērs neatbilst 1. gadījuma prasībai, jo 0 grādu neder kā trijstūra leņķis.

Anniņa. Tam nav būtiskas nozīmes, jo piemēru es varu pielabot, ņemot 0 grādu vietā nedaudz lielāku leņķi un 60 grādu vietā attiecīgi nedaudz mazāku leņķi.

Jānītis. Aprēķināšu izteiksmes vērtību 60, – 60 un 180 grādu lieliem leņķiem. Tā ir vienāda ar "– 0,5". Tas liecina, ka Anniņas risinājums satur kādu rupju kļūdu.

Kārlītis. Nāksies restaurēt izlaistos pārveidojumus:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=1+\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1).$$

Tagad redzams, ka nevienādība $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma>\frac{3}{4}$ tiešām pārveidojama par $\cos(\alpha+\beta)\cdot(1-\cos(\alpha-\beta))<\frac{1}{4}.$ Redzams arī tas, ka šī nevienādība nav pareiza Jānīša uzrādītajiem leņķiem. Pārbaudīšu tās pareizību 1. gadījumā, kad tiek aplūkoti tikai trijstūra leņķi. Ja $\cos(\alpha+\beta)\leq 0$, tad nevienādība ir acīmredzama. Savukārt, ja $\cos(\alpha+\beta)$ ir pozitīvs, tad tas nozīmē, ka trijstūra leņķu summa $\alpha+\beta$ nepārsniedz 90 grādus. Kosinuss ir dilstoša funkcija, tāpēc no $|\alpha-\beta|<\alpha+\beta$ izriet, ka $\cos(\alpha-\beta)>\cos(\alpha+\beta)$. Tātad

$$1-\cos(\alpha-\beta)<1-\cos(\alpha+\beta)\Rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha-\beta))<\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha+\beta))=x(1-x)\leq 0{,}25.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka trijstūra leņķiem vienmēr pastāv stingrā nevienādība

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma>\frac{3}{4}.$$

Tas nozīmē, ka Anniņas it kā ticamais spriedums par piemēra nelielu pielabošanu tomēr nav bijis pareizs.

Pabeidziet uzdevuma risinājumu atlikušajā gadījumā!

Piezīme. Šis uzdevums der kā netriviāls piemērs tam, ka minimums funkcijai var arī neeksistēt. Analoģijai var minēt skolas matemātikā aplūkoto funkciju $y=\frac{1}{x},\ x>0$. Tās vērtības var būt pēc patikas tuvu 0, tomēr to nekad nesasniedz.

Sinusu reizinājums

10. uzdevums. Atrast maksimumu reizinājumam $\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$, ja $2(x+y+z)=\pi$.

Vispirms iepazīsimies ar šāda pazīstama uzdevuma atrisinājumu, sk., piemēram, [Si2, 26, 143].

“Pierādīt: ja *A*, *B*, *C* – trijstūra leņķi, tad $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$. Zināms, ka $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, jeb $\cos A=\frac{1}{2}(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})-\frac{a^2}{2bc}$. Tā kā $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$, tad $\cos A\ge 1-\frac{a^2}{2bc}$, jeb $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$, $\quad 2\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{2bc}$,

$$\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}. \tag{1}$$

Analoģiski

$$\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}, \tag{2}$$

$$\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}. \tag{3}$$

Sareizinot (1), (2) un (3), iegūsim $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$, kas arī bija jāpierāda. Vienādība sasniedzas tikai pie $A = B = C$.”

Uzrādīsim īsāku risinājumu, kurš turklāt derīgs arī tad, ja neatsaucas uz trijstūra leņķiem. Apzīmēsim $u = \cos(x - y)$, $v = \cos(x + y)$. Tad

$$8f = 8\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x + y) = 4[\cos(x - y) - \cos(x + y)]\cos(x + y) =$$

$$4(u - v)v \le 1 \Leftrightarrow 4v^2 - 4uv + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2v - u)^2 + 1 - u^2 \ge 0.$$

Tātad $8f \le 1$. Funkcijas f maksimālā vērtība ir $\frac{1}{8}$ un tā tiek sasniegta, piemēram, tad, kad visi leņķi ir 60 grādu lieli.

Kvadrātu summa

<u>11. uzdevums</u>. Atrast extr($\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$), ja $x + y + z = \pi$.

“Pierādīt: ja α, β, γ – nav šaurleņķa trijstūra leņķi, tad $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le 2$.” [Si2, 27, 146] Iepazīsimies ar minētajā grāmatā doto uzdevuma risinājumu.

“Ir spēkā $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+1-\cos^2\gamma=$

$$=2-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2[\pi-(\alpha+\beta)]=$$

$$=2-\cos(\alpha+\beta)\times\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=2-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=$$

$$=2-\cos(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Tā kā apskatāmajā trijstūrī viens no leņķiem, piemēram α, ir taisns vai plats, tad $\cos\alpha \le 0$, bet $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$. Tātad reizinājums $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le 0$. Tādējādi $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le 2$. Vienādība ir spēkā tad un tikai tad, kad trijstūris ir taisnleņķa."

Apzīmēsim $u = \cos(x - y)$, $v = \cos(x + y)$ un sinusu kvadrātu summu ar S. Tad saskaņā ar augstāk lietotajiem pārveidojumiem $S = 2 - v(u + v)$. Funkcija S sasniedz savu maksimumu tad, kad $v(u + v)$ sasniedz minimumu. Saskaņā ar lemmu $\min v(u + v) = -0{,}25$. Tātad $\max S = \max(2 - v(u + v)) = 2{,}25$. Maksimums sasniedzams, ja visi leņķi ir 60 grādu lieli. Tā kā $S \geq 0$ un $S = 0$, ja $x = y = 0$, tad $\min S = 0$.

Ja pieņem, ka x, y un z ir trijstūra leņķi un leņķis $z \geq 90^0$, tad u un v ir pozitīvi lielumi. Tāpēc šajā gadījumā $\max S = \max(2 - v(u + v)) = 2$.

<u>12. uzdevums</u>. Atrast $\max(\sin x\cdot\sin y + \sin y\cdot\sin z + \sin x\cdot\sin z)$, ja $x + y + z = \pi$.

Lietosim Košī nevienādību un iepriekšējā uzdevuma rezultātu:

$$\sin x\sin y + \sin y\sin z + \sin z\sin x \le \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \le \frac{9}{4}.$$

Maksimums sasniedzams, ja $x = y = z = \dfrac{\pi}{3}$.

<u>Sekas</u>. Ja a, b, c – trijstūra malas un R – apvilktā riņķa rādiuss, tad

$$ab + bc + ca \le 9R^2.$$

<u>Norādījums</u>. Izmantot sinusu teorēmu : $\sin x = \dfrac{a}{2R}$; $\sin y = \dfrac{b}{2R}$; $\sin z = \dfrac{c}{2R}$,

kur x, y, z – attiecīgie trijstūra leņķi.

<u>13. uzdevums</u>. Atrast $\mathrm{extr}(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z)$, ja $x + y + z = \pi$.

Maksimālā vērtība ir 3. To var iegūt, ņemot $x = y = 0$ un $z = \pi$. Minimuma iegūšanā aplūkojam pārveidojumu $f = 3 - (\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z)$ un atsaucamies uz 11. uzdevumu: $\min f = 3 - 2{,}25 = 0{,}75$.

Tangensi

<u>14. uzdevums</u>. Atrast maksimumu funkcijai (tur, kur tā definēta):

$$T = \mathrm{tg}(u + v)\cdot\mathrm{tg}(u - v), \text{ ja } u \text{ un } v \text{ pieder kopai } [0, \frac{\pi}{4}].$$

Pierādīsim nevienādību $T \leq 1$. Ja $v = 0$ un $u = \dfrac{\pi}{4}$, tad pastāv vienādība. Ja $0 < u < \dfrac{\pi}{4}$, pierādīsim stingro nevienādību. Apzīmēsim $p = \mathrm{tg}u$, $q = \mathrm{tg}v$. Tad

$$\frac{p+q}{1-pq}\cdot\frac{p-q}{1+pq} = \frac{p^2-q^2}{1-p^2q^2} < 1 \Leftrightarrow p^2 - q^2 < 1 - p^2q^2 \Leftrightarrow p^2(1+q^2) < 1+q^2.$$

<u>15. uzdevums</u>. Atrast maksimumu funkcijām F un T (tur, kur tās definētas):

$$F = 2\mathrm{tg}u - \mathrm{tg}(u + v) - \mathrm{tg}(u - v), \ u \text{ un } v \text{ pieder kopai } [0, \frac{\pi}{4}];$$

$$T = 2\mathrm{tg}\frac{x+y}{2} - \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y,\ \text{ja } x \text{ un } y \text{ pieder intervālam } [0, \frac{\pi}{2}].$$

1. risinājums. Sk. [Si2, 27, 147], kur aplūkots uzdevums "Pierādīt, ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ un $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, tad $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \le \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{2}$." "Acīmredzami, ka pie $\alpha = \beta$ ir spēkā vienādība. Ja $\alpha \ne \beta$, pierādīsim, ka ir spēkā stingrā nevienādība

$$2\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta < 0. \qquad (1)$$

Tā kā nevienādība (1) ir simetriska attiecībā pret α un β, tad noteiktības dēļ pieņemsim, ka $\beta > \alpha$. Nevienādību (1) pārrakstīsim veidā

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \mathrm{tg}\beta < 0,$$

$$\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha} + \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta} < 0,$$

$$\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\alpha} - \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\beta} < 0,$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta} < 0,$$

$$\cos\beta - \cos\alpha < 0,$$

kas ir acīmredzami, jo $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$."

No šejienes izriet, ka abām funkcijām maksimālā vērtība ir 0.

2. risinājums. Apzīmēsim $p = \mathrm{tg}u$, $q = \mathrm{tg}v$. Tad

$$F = 2p - \frac{p+q}{1-pq} - \frac{p-q}{1+pq} = 2p - \frac{2p(1+q^2)}{1-p^2q^2} = \frac{-2pq^2(1+p^2)}{1-p^2q^2}.$$

Tā kā intervālā $[0, \frac{\pi}{4}]$ ir spēkā nevienādība $1 - p^2q^2 \ge 0$, tad $F \le 0$.

Piezīme. Nevienādībai $\mathrm{tg}\frac{a+b}{2} \le \frac{1}{2}(\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b)$ ir šāda ģeometriska interpretācija: tangensa grafiks atrodas zem hordas, kas savieno grafika punktus, sk. 11. zīmējumu. Precīzāk, ja $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$, AB horda ar galapunktiem A = (a, tg$a$), B = (b, tg$b$), $A_0 = (a, 0)$, $B_0 = (b, 0)$, $C_0 = (c, 0)$, kur c – nogriežņa [a, b] viduspunkts, tad tg$c$ nepārsniedz trapeces ABB_0A_0 viduslīnijas garumu. Funkciju, kuras grafikam piemīt īpašība atrasties zem attiecīgās hordas, matemātikā sauc par izliektu funkciju. Izliektām funkcijām ir svarīga nozīme ekstrēmu uzdevumu teorijā, un tām darba nākamajā daļā ir veltīta atsevišķa nodaļa.

Vērtību kopa – punkts

<u>16. uzdevums</u>. Atrast extr($x + y$), ja x un y ir trijstūra leņķi, kuri apmierina sakarību

$$F := \cos 2x + \cos 2y + 4\cos x \cos y + 2 = 0.$$

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem

$$F = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 y - \sin^2 y + 4\cos x \cos y + 2 = 2(\cos x + \cos y)^2 = 0$$

dabū $\cos x = -\cos y = \cos(\pi - y)$. Tā kā x un y ir trijstūra leņķi, tad $x = \pi - y$ jeb $x + y = \pi$. Tas nozīmē, ka $\max(x + y) = \min(x + y) = \pi$.

<u>17. uzdevums</u>. Atrast extr($x + y + z + t$), ja $0 < x < y < z < t < \frac{\pi}{2}$ un

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2t = 4(\sin x \sin y \sin z \sin t - \cos x \cos y \cos z \cos t)$$

Uzdevums aizgūts no žurnāla *Математика в школе*, 2006, N3.

<u>Risinājums</u>. Lieto pārveidojumus:

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x + y)\cos(x - y) = 2(\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y)$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2t = 2(\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 z \cos^2 t - \sin^2 z \sin^2 t)$$

$$\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 z \cos^2 t - \sin^2 z \sin^2 t =$$

$$=2(\sin x \sin y \sin z \sin t - \cos x \cos y \cos z \cos t)$$

$$(\cos x \cos y + \cos z \cos t)^2 = (\sin x \sin y + \sin z \sin t)^2$$

$$\cos x \cos y + \cos z \cos t = \sin x \sin y + \sin z \sin t$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = -\cos z \cos t + \sin z \sin t$$

$$\cos(x + y) = -\cos(z + t)$$

$$x + y = \pi - (z + t)$$

$$x + y + z + t = \pi.$$

Tas nozīmē, ka prasītā summa var pieņemt tikai vienu vērtību.

Funkcija $\sin^n x + \cos^n x$

Vispirms aplūkosim atsevišķus funkcijas $\sin^n x + \cos^n x$ piemērus.

<u>18. uzdevums</u>. Pierādīt., ka visiem x pastāv nevienādība $\sin^4 x + \cos^4 x \ge \frac{1}{2}$.

(7. atklātā matemātikas olimpiāde, 10. kl.) [AB, 132]

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}.$$

<u>19. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $\sin^6 x + \cos^6 x$ ekstrēmus.

Īsu uzdevuma risinājumu var atrast grāmatā [AZT, 222]:

$$\text{"}(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Tātad lielākā vērtība ir 1, ja $x = \frac{\pi}{2}n$, mazākā $-\frac{1}{4}$, ja $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$."

<u>19. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $\sin^8 x + \cos^8 x$ ekstrēmus.
<u>20. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $\sin^n x + \cos^n x$ ekstrēmus, ja $n = 2^k$.
<u>21. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $\sin^5 x + \cos^5 x$ ekstrēmus.

Uzdevumam "Pierādīt nevienādību $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}$. Kādām α vērtībām tiek sasniegta vienādība?" grāmatā [Si2, 27] doti divi atrisinājumi. Pirmais no tiem:

"Ir spēkā $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$,

bet tā kā $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, tad $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Tālāk $(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha \geq \frac{1}{4}$.

Tā kā $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha$, tad $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}$.

Vienādība sasniedzama tikai tad, ja $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, kur k vesels skaitlis."

Atrisināsim uzdevumu īsāk ar citu metodi.

Apzīmēsim $p = \sin^2 x$, $q = \cos^2 x$. Tad jāmeklē ekstrēmi funkcijai $p^4 + q^4$, ja $p + q = 1$. Minimuma atrašanai lietosim nevienādību $A \leq K$, kur A un K skaitļu p un q attiecīgi vidējais aritmētiskais un kvadrātiskais.

$$A^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \leq K^2 = \frac{p^2+q^2}{2} \leq \sqrt{\frac{p^4+q^4}{2}} \Rightarrow p^4 + q^4 \geq 2A^4 = \frac{1}{8}.$$

Maksimuma noteikšanai ļoti ērts ir novērtējums

$$p^4 + q^4 \leq p + q = 1, \text{ jo } p^4 \leq p \text{ un } q^4 \leq q.$$

Tātad $\frac{1}{8} \leq \sin^8 x + \cos^8 x \leq 1$.

Ar šī novērtējuma palīdzību negaidīti vienkārši var atrisināt 21. uzdevumu. Novērtēsim doto funkciju pēc absolūtās vērtības:

$$|\sin^5 x + \cos^5 x| \leq |\sin x|^5 + |\cos x|^5 \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$
$$-1 \leq \sin^5 x + \cos^5 x \leq 1.$$

Viegli redzēt, ka abas ekstremālās vērtības ir sasniedzamas, piemēram, punktos $x = 0$ un $x = \pi$.

Pirms analizēt vispārīgo gadījumu, vēl aplūkosim uzdevumu $\min(\sin^{10} x + \cos^{10} x)$.

Anniņa. Apzīmējot $p = \sin^2 x$, $q = \cos^2 x$, iegūšu līdzvērtīgu uzdevumu

$$\min(p^5 + q^5) = ?\text{ , ja } p + q = 1.$$

Vispirms minimizējamo izteiksmi sadalīšu reizinātajos:

$$p^5 + q^5 = (p + q)(p^4 - p^3q + p^2q^2 - pq^3 + q^4) =$$
$$p^4 - p^3q + p^2q^2 - pq^3 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 - p^2q^2 - pq(p^2 + q^2)$$

Tā kā $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq$, tad aizvietojot dabūšu vienādību

$$p^5 + q^5 = (1 - 2pq)^2 - p^2q^2 - pq(1 - 2pq).$$

Apzīmējot $pq = t$, iegūšu kvadrātfunkciju

$$(1 - 2t)^2 - t^2 - t(1 - 2t) = 5t^2 - 5t + 1,$$

jeb parabolu ar virsotni punktā $t = \frac{1}{2}$. Aprēķinu vērtību šajā punktā: $\frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{1}{4}$. Tātad $\min(p^5 + q^5) = -\frac{1}{4}$.

Janītis. Tas ir absurds. Tā kā p un q ir pozitīvi, vismaz nav negatīvi, tad $p^5 + q^5$ nevar būt negatīvs.

Atrodiet Anniņas spriedumos kļūdu un pabeidziet risinājumu.

Vispārīgais gadījums

Apzīmēsim $T_n(x) := \sin^n x + \cos^n x$, kur n naturāls skaitlis. Funkcijas T_n ekstremālās vērtības, vispārīgi runājot, ir atkarīgas no n. Šķirosim vairākus gadījumus.

1) $n = 1$.

Ir dažādi paņēmieni, kā atrast $\sin x + \cos x$ ekstrēmus. Viens no vienkāršākajiem – izmantot īpašību $|a| = \sqrt{a^2}$.

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{2}.$$

No šejienes

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}.$$

Abas ekstremālās vērtības ($\pm\sqrt{2}$) sasniedzamas. Piemēram, punktos $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pi + \frac{\pi}{4}$.

2) $n > 1$.

Ievērojot, ka jebkuram $n \geq 2$ ir spēkā nevienādības: $|\sin^n x| \leq \sin^2 x$ un $|\cos^n x| \leq \cos^2 x$, iegūsim novērtējumu

$$|\sin^n x + \cos^n x| \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tātad visiem $n > 1$ ir spēkā

$$-1 \leq \sin^n x + \cos^n x \leq 1.$$

Maksimālā vērtība $\max T_n = 1$ tiek sasniegta, piemēram, punktā $x = 0$.

2a) $n = 2k + 1$, $k \geq 1$.

Minimālā vērtība $\min T_n = -1$ tiek sasniegta, piemēram, punktā $x = \pi$.

2b) $n = 2k$.

Pierādīsim pēc indukcijas, ka $\min T_{2k} = 2^{1-k}$.

Gadījumā $k = 1$ tas ir acīmredzams, jo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 = 2^0$.

Ja $k > 1$, tad, apzīmējot $p = \sin^2 x$, $q = \cos^2 x$, iegūsim šādu minimizācijas uzdevumu

$$\min(p^k + q^k) = ?\text{, ja } p + q = 1,\ p, q \geq 0.$$

Jāpierāda, ka $\min(p^k + q^k) = 2^{1-k}$.

Ja $k = 2m$, tad

$$p^{2m} + q^{2m} = (p^m + q^m)^2 - 2p^m q^m \geq 2^{2(1-m)} - 2p^m q^m.$$

Šeit izmantots induktīvais pieņēmums, ka $p^m + q^m \geq 2^{1-m}$. Ievērosim, ka $pq \leq \frac{1}{4}$, jo $4pq \leq (p+q)^2 = 1$. Tātad $(pq)^m < 2^{-2m}$ un

$$p^{2m} + q^{2m} \geq 2^{2-2m} - 2\cdot 2^{-2m} = 2^{-2m}(4-2) = 2^{1-2m}.$$

Savukārt, ja $k = 2m+1$, tad

$$p^{2m+1} + q^{2m+1} = (p^{m+1} + q^{m+1})(p^m + q^m) - p^m q^m (p+q) \geq$$
$$2^{-m}\cdot 2^{1-m} - p^m q^m \geq 2^{1-2m} - 2^{-2m} = 2^{-2m}(2-1) = 2^{-2m}.$$

Funkcija $\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x}$

Salīdzinājumā ar $a\sin x + b\cos x$ funkcijas $f(x) = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x}$ ekstrēmu noteikšana ir būtiski sarežģītāka. Turpmāk šajā nodaļā uzskatīsim, ka koeficienti a un b ir pozitīvi un $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ievērosim, ka funkcijai f nav maksimuma, jo $\sin x \to 0$, kad $x \to 0$, tāpēc risināsim minimizācijas uzdevumu.

Speciālu gadījumu, kad $a = b = 1$, var atrisināt pavisam īsi, ja izmanto nevienādības, kas saista vidējos lielumus. Apzīmēsim $u = \sin x$, $v = \cos x$, tad

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \mapsto \min, \quad u^2 + v^2 = 1$$
$$\frac{v+u}{uv} = \frac{2A}{G^2} \geq \frac{2}{A} \geq \frac{2}{K} = 2\sqrt{2}.$$

Vienādība pastāv, ja $u = v \Rightarrow x_{\min} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \min\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 2\sqrt{2}.$

<u>**Teorēma**</u>. Intervālā $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcija f minimumu sasniedz punktā $c = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

<u>Pierādījums</u>. Pārveidosim nevienādību $f(x) \geq f(c)$.

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} \geq \frac{a}{\sin c} + \frac{b}{\cos c} \Leftrightarrow a\frac{\sin c - \sin x}{\sin x \sin c} + b\frac{\cos c - \cos x}{\cos x \cos c} \geq 0$$

$$2a\frac{\cos\frac{c+x}{2}\sin\frac{c-x}{2}}{\sin x \sin c} - 2b\frac{\sin\frac{c+x}{2}\sin\frac{c-x}{2}}{\cos x\cos c} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{c-x}{2}\cdot f_1(x) \geq 0, \text{ kur } f_1(x) := \frac{a\cos\frac{c+x}{2}}{\sin x \sin c} - \frac{b\sin\frac{c+x}{2}}{\cos x \cos c}.$$

Apzīmēsim $I_1 = (0, c)$, $I_2 = \left(c, \frac{\pi}{2}\right)$. Pirmajā intervālā $\sin\frac{c-x}{2}$ ir pozitīvs, bet otrajā – negatīvs, tāpēc jāpierāda, ka arī $f_1(x)$ ir pozitīvs intervālā I_1 un negatīvs – I_2.

$$f_1(x) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\frac{c+x}{2} > \frac{b}{a}\operatorname{tg} x \operatorname{tg} c, \; x \in I_1$$

$$f_1(x) < 0 \ \Leftrightarrow \text{ctg}\frac{c+x}{2} < \frac{b}{a}\text{tg}\,x\,\text{tg}\,c,\ x \in I_2$$

Šo nevienādību pareizība izriet no tā, ka punktā c pastāv vienādība, t. i., $\text{ctg}c = \frac{b}{a}\text{tg}^2 c$ un ctg ir dilstoša funkcija, bet tg – augoša funkcija intervālā I.

1. piemērs. [KUK, 354] *Noteikt intervālā* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *funkcijas* $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ *vislielāko un vismazāko vērtību.*

Vismazākā f vērtība ir 0, jo $f(x) \geq 0$ un $f(0) = 0$. Lai noteiktu f vislielāko vērtību, aplūkosim apgriezto lielumu:

$$\frac{1}{f} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin 2x} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2\sqrt{2} = 1.$$

Tātad $\max f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = 1.$

2. piemērs. [Lub, 68] *Atrast tos x, kuriem* $y = \dfrac{\cos x}{4 + \text{ctg}x}$ *vērtības ir vislielākās vai vismazākās.*

Dota šāda atbilde. ”y max pie $\text{tg}x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.”

Ja nav ierobežojumu uz x maiņas intervālu, tad funkcijai y nav ne vislielākās, ne vismazākās vērtības. Tas tāpēc, ka saucējs (4 + ctg$x$) var būt gan pozitīvs, gan negatīvs un pēc patikas maz atšķirties no nulles. Spriežot pēc grāmatā dotās atbildes, autors ir domājis atrast *lokālā* maksimuma punktu. Uzskatīsim, ka x ir pirmā kvadranta leņķis, un aplūkosim apgriezto lielumu.

$$\frac{1}{y} = \frac{4+\text{ctg}x}{\cos x} = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Saskaņā ar teorēmu punkts $c = \text{arctg}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ir funkcijas $\frac{1}{y}$ minimuma un līdz ar to funkcijas y maksimuma punkts.

Ģeometriskā interpretācija

Uzdevums par visgarāko baļķi, kurš var izpeldēt cauri taisnstūrveida kanālam attiecīgi ar platumiem a un b, ir saistošs piemērs, kur parādās aplūkotā funkcija. Pēc grāmatā [Niv] dotā parauga ar nevienādības $A \geq G$ palīdzību tas ir atrisināts darba pirmajā daļā [Cib1, 53]. Uzdevums par baļķi ir formulēts vairākos uzdevumu krājumos, sk. piemēram, [GK, 115; Vil, 172;]. Zinot uzdevuma ģeometrisko saturu, nav grūti saskatīt *labu* substitūciju, kas ļauj šo uzdevumu atrisināt vienkāršāk un vienlaicīgi iegūt teorēmas citu – elegantāku – pierādījumu. Lūk, kāda ir substitūcija:

$$tgx = \frac{a}{t} \ \Rightarrow\ f^2 = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{a}{\text{tg}x} + b\right)^2 = \left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)(t+b)^2 =$$

$$= \left(t^2 + \frac{a^2 b}{t} + \frac{a^2 b}{t}\right) + \left(\frac{a^2 b^2}{t^2} + bt + bt\right) + a^2 + b^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4 b^2} + 3\sqrt[3]{a^2 b^4} + a^2 + b^2,$$

$$t_{\min} = \sqrt[3]{a^2 b} \;\Rightarrow\; x_{\min} = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \;\Rightarrow\; \min f = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ekstrēmu uzdevumi no krājuma [KZZ]

Šajā krājumā 146. lpp. doti šādi četri trigonometriskie ekstrēmu uzdevumi ar vienotu prasību "Atrast funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību intervālā":

$$2\cos x - \sin^2 x,\ [0; 2\pi]$$

$$\cos^3 x \sin x,\ [0; \frac{3\pi}{4}]$$

$$x + \cos^2 x,\ [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x,\ [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}].$$

Gandrīz droši, ka šos uzdevumus iecerēts risināt ar skolēniem mazpazīstamo diferenciālrēķinu palīdzību. Vai tos var atrisināt ar elementāriem paņēmieniem? Var!

<u>Piezīme</u>. Vairāki uzdevumi par trigonometrisko funkciju ekstrēmiem ir doti uzdevumu krājumā [KUK]: *Noteikt funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību intervālā*:

$$x + \cos^2 x,\ x \in [0; \frac{\pi}{2}]; \qquad \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)},\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \qquad \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2},\ [0; \pi];\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x,\ x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right];\ \cos^2 x + \sin x,\ \text{a) } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];\ \text{b) } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

Skaidrs, kā elementāri risināms 1. uzdevums no [KZZ] – tas reducējams uz kvadrātfunkciju

$$y = (\cos x + 1)^2 - 2 \;\Rightarrow\; \min y = -2,\ \max y = 2.$$

Ceturtais uzdevums reducējams uz funkciju $y = t + \frac{1}{t}$. Minimums vienkārši nosakāms no nevienādības $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x} = 2$, bet maksimums sasniedzams galapunktā, turklāt aplūkojamā funkcija abos galapunktos pieņem vienu un to pašu vērtību $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Otrā piemēra funkcija $F = \cos^3 x \sin x$ ir pozitīva intervālā $(0, \frac{\pi}{2})$ un negatīva intervālā $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$. Tāpēc maksimumu meklēsim pirmajā, bet minimumu – otrajā no šiem intervāliem. Intervālā $(0, \frac{\pi}{2})$, kur funkcija F ir pozitīva, aplūkosim tās kvadrātu F^2. Apzīmējam $t = \cos^2 x$, tad

$$3F^2 = (3 - 3t) \cdot t \cdot t \cdot t$$

Reizinājums būs maksimāls, ja visi reizinātāji vienādi, t. i.,

$$3 - 3t = t \Rightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow x_{\max} = \frac{\pi}{6}.$$

Pierādīsim, ka funkcija F minimumu sasniedz galapunktā $\frac{3\pi}{4}$. Pietiek pierādīt, ka pretējas zīmes funkcija

$$-F = -\cos^3 x \sin x = 0{,}5\cos^2 x(-\sin 2x)$$

šajā galapunktā sasniedz maksimumu. Gan $\cos^2 x$, gan $(-\sin 2x)$ intervālā $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ ir pozitīvas un augošas, tātad augošs ir arī šo funkciju reizinājums.

Arī funkcijas $x + \cos^2 x,\ x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ekstrēmus var noteikt elementārā veidā. Tā kā

$$x + \cos^2 x = x + \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(2x + \cos 2x) + \frac{1}{2},$$

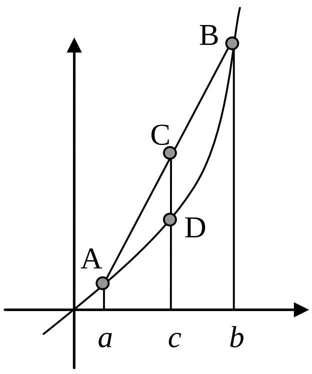
tad dotās funkcijas ekstrēmu noteikšanu var aizstāt ar uzdevumu: extr($x + \cos x$), kur x pieder nogrieznim $[0, \pi]$.

Izmantojot kosinusa ģeometrisko interpretāciju (sk. 12. zīm.), gandrīz vai acīmredzams, ka $x + \cos x$ ir augoša funkcija. Tiešām, ja loka ABC un BC garums ir attiecīgi y un x vienības, tad

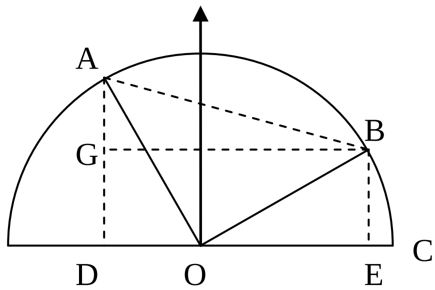
$$\cos y = -|OD|,\ \ \cos x = |OE|,$$

$$\cos x - \cos y = |OE| + |OD| = |DE| = |GB| < |AB| < y - x,$$

Tātad $\cos x + x < y + \cos y$. Tas nozīmē, ka $x + \cos x$ ir augoša funkcija.



11. zīm.



12. zīm.

Maksimālais konusa pilnas virsmas laukums

<u>22. uzdevums</u>. Lodē ievilkts konuss, kuram pilnas virsmas laukums maksimāls. Aprēķināt konusa pamata rādiusa un veidules garuma attiecību.

Aprēķināt augstumu konusam, kas ievilkts lodē ar rādiusu R un ir ar vislielāko pilnas virsmas laukumu. [KZZ, 151]

Ja lodes rādiusu apzīmē ar R, bet leņķi starp konusa augstumu un veiduli l – ar x, tad konusa pilnas virsmas laukums ir vienāds ar

$$\pi R^2 \sin 2x(\sin 2x + 2\cos x),$$

Apzīmējam $\sin x$ ar t. Tad

$$\sin 2x(\sin 2x + 2\cos x) = \sin^2 2x + 2\sin 2x\cos x = 4\cos^2 x\,(\sin^2 x + \sin x) = 4(t^2 + t)(1 - t^2).$$

Viens no paņēmieniem, kā noteikt polinoma $(t^2 + t)(1 - t^2)$ maksimumu intervālā (0, 1), ir izvēlēties pozitīvus koeficientus a un b tā, lai četri reizinātāji būtu vienādi un to summa būtu konstante, un lietot nevienādību $G \le A$, t. i.,

$$(t^2 + t)(1 - t^2) = (t + 1)(t + 1)t(1 - t) = (t + 1)(t + 1)(at)(b - bt)\frac{1}{ab} \le \frac{1}{ab}(at)^4.$$

No vienādībām

$$t + 1 = at = b - bt,\ 2 + a - b = 0,$$

izslēdzot a un b, dabūjam kvadrātvienādojumu t noteikšanai:

$$4t^2 - t - 1 = 0.$$ [6)]

No šejienes

$$t = \sin x = \frac{1+\sqrt{17}}{8},\ a = \frac{1+\sqrt{17}}{2},\ b = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Optimālajam konusam rādiusa un veidules garuma attiecība ir $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$. Optimālā konusa augstums ir $H = l\cos x = 2R\cos^2 x = \frac{R(23-\sqrt{17})}{16}$.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

1. [Si2, 28] Pierādīt: ja $0 \le x \le \pi$ un $0 \le y \le \pi$, tad

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Atrodiet īsāku risinājumu salīdzinājumā ar grāmatā [Si2, 150] doto.

2. Atrast funkcijas $2\sin x + \sin 2x$ maksimumu.

3. Intervālā $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ atrast funkcijas $2\sin x + \sin 2x$ vislielāko un vismazāko vērtību. [Zap]

4. Noteikt funkcijas $\cos x\sqrt{\sin x}$ vislielāko vērtību intervālā $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. [KUK, 355]

5. Atrast vislielāko un vismazāko funkcijas $\sin x \sin 2x$ vērtību [DKN, 48] [7)] .

6. Atrast vislielāko un vismazāko funkcijas $\cos x \cos 2x$ vērtību [DKN, 48].

7. Pierādīt nevienādību $\cos x + \cos y - \cos(x + y) \le \frac{3}{2}$. Kādām x un y vērtībām pastāv vienādība? [Si2, 28] Pierādīt, ka jebkura trijstūra leņķiem ir pareiza nevienādība $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$ [MO, 43 (1965. g.)]

8. Atrast maksimumu reizinājumam $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$, ja $x + y + z = \pi$.

9. [Si2, 27, 146] Pierādīt: ja A, B, C - platleņķa trijstūra leņķi, tad

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1.$$

10. Atrast maksimumu funkcijai $\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}(\cos x + \cos y)$, ja $|x| < \frac{\pi}{2}$ un $y < \frac{\pi}{2}$.

11. Atrast minimumu funkcijai $\sin\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$, ja x un y pieder kopai $[0, \pi]$.

12. [Si2, 27] Pierādīt: ja A, B - platleņķa trijstūra šaurie leņķi, tad $\mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B < 1$.

13. Atrast funkcijas $\sin^7 x + \cos^7 x$ ekstrēmus.

14. Atrast vienādojuma $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ vislielāko negatīvo sakni.
[Iestājeksāmena uzdevums, *Квант*, 1987, N2]

15. Atrast vienādojuma

$$\cos 6x + \cos 12x = 15\cos 3x$$

vislielāko negatīvo sakni grādos. [Iestājeksāmena uzdevums, *Квант*, 1990, N5]

16. Iestājeksāmena uzdevums, sk. [GD]. Atrisiniet vienādojumu

$$4\cos x(2 - 3\sin^2 x) + \cos 2x + 1 = 0.$$

Atrodiet vismazāko attālumu starp tā divām pozitīvajām saknēm.

17. Noteikt funkcijas $\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$ vismazāko vērtību intervālā $(0, \pi)$. [KUK, 355]

18. Pierādīt nevienādību $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \sin^8 x + \cos^8 x$. Kad pastāv vienādība? [AB, 45]

19. Atrast vienādojuma

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+24\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{11}{10}\pi\right)=\sin\frac{4}{5}\pi$$

vismazāko pozitīvo sakni. [Iestājeksāmena uzdevums, *Квант*, 1990, N5]

20. Noteikt minimuma punktu intervālā $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ šādām funkcijām:

a) $(1+\mathrm{ctg}x)^2\,\mathrm{tg}2x$; *b*) $\frac{1+\mathrm{ctg}x}{\cos 2x}$.

21. Atrast funkcijas $\sin^2 2x - 2\cos x\cos 2x + 2\cos x$ maksimuma punktu pirmajā kvadrantā.

22. No visiem konusiem ar dotu pilnas virsmas laukumu S atrast to, kuru var ievietot vismazākajā lodē. Aprēķināt minimālās lodes rādiusu.

23. Ap puslodi apvilkts konuss K_p ar vismazāko pilnas virsmas laukumu un konuss K_s ar vismazāko sānu virsmas laukumu. Puslodes pamats atrodas uz konusa pamata. Noteikt šādu konusu virsotnes leņķi.

24. Noteikt minimumu $\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{tg}2x$, ja x ir šaurs leņķis. Šāda funkcija rodas uzdevumā par minimālā (pēc laukuma) vienādsānu trijstūra apvilkšanu ap vienības riņķi.

25. Nekustīgi nostiprinātā tasītē – puslodē ar rādiusu r ievieto homogēnu stieni ar garumu l, $2r < l < 4r$. Atrast stieņa līdzsvara stāvokli. Līdzsvara stāvoklis raksturojas ar minimālo potenciālo enerģiju, t. i., no visiem pieļaujamiem stāvokļiem stieņa smaguma centram jāatrodas viszemāk.

Uzdevuma matemātiskais modelis ir

$$f(x) = r + \frac{l}{2}\sin x - r\sin 2x \to \min .$$

Izmantojot pirmās un otrās kārtas atvasinājumus, tas ir atrisināts grāmatā [ISS, 266]. Uzdevums atrodams arī grāmatā [GK, 116]. Atrisiniet šo uzdevumu ar elementārām metodēm.

6. nodaļa **Izoperimetriski daudzstūri**

Ar **izoperimetriskām figūrām** (grieķu *isos* nozīmē vienāds, vienlīdzīgs; *perimetros* – plaknes figūras robežas garums) saprot figūras, kuru perimetrs ir nemainīgs lielums. Ar **izoperimetrisku uzdevumu** šajā nodaļā sapratīsim tādu uzdevumu, kurā jāmeklē noteikta tipa daudzstūris ar maksimālo laukumu, ja uzdots tā perimetrs, bet izoperimetriskā uzdevuma atrisinājumu īsāk sauksim par **maksimālo** vai **optimālo** daudzstūri. Izoperimetriski uzdevumi, vispārīgi runājot, ir tādi uzdevumi, kuros jānosaka ekstrēms kādam lielumam, ja aplūko noteiktas klases figūras ar uzdotu perimetru. Šis lielums ne vienmēr ir laukums, tas var būt, piemēram, figūras diametrs, smaguma centra augstums.

Uzdevumi par daudzstūru laukumiem un perimetriem ir aplūkoti gan grāmatās, gan žurnālos, piemēram, [ŠČJ1-2; Ga] Labu, skolēniem piemērotu grāmatu "Izoperimetri" ir uzrakstījis D. A. Križanovskis (1883-1939) [Kr]. Tajā galvenā uzmanība tiek veltīta problēmai: kādai no visām plaknes figūrām ar vienu un to pašu perimetru ir vislielākais laukums? Jau senajā Grieķijā bija zināms, ka riņķim ir lielāks laukums nekā jebkurai citai figūrai ar tādu pašu perimetru, ka lodei ir lielāks tilpums nekā jebkuram citam ķermenim ar tādu pašu virsmas laukumu. Tiesa, zināt vēl nenozīmē prast pierādīt. Pitagora teiciena: *brīnišķīgākais no ķermeņiem ir lode, brīnišķīgākā no plaknes figūrām ir riņķis* pamatā droši vien ir šo figūru optimalitāte. Grieķu matemātiķis Zēnodors maksimālajām figūrām ir veltījis speciālu traktātu "Par figūrām, kurām ir vienāda perifērija". Viņa sacerējums diemžēl nav saglabājies. Par laimi Pappa [1)] (3. gs.) un Aleksandrijas Teona (4. gs.) darbos ir minēti 14 Zēnodora apgalvojumi. Svarīgākie no tiem:

1) no diviem regulāriem daudzstūriem ar vienādu perimetru lielāks būs tas, kam lielāks leņķu skaits;
3) ja riņķim un regulāram daudzstūrim ir vienāds perimetrs, tad riņķis būs lielāks;
11) no visiem daudzstūriem ar vienādu perimetru un vienādu malu skaitu vislielākais būs regulārs daudzstūris;
14) katrs no pieciem regulāriem daudzskaldņiem mazāks par lodi ar tādu pašu virsmas laukumu.

No 3) un 11) Zēnodors secināja, ka no visām figūrām ar vienādu perimetru vislielākais laukums ir riņķim. Stingru riņķa un lodes optimalitātes pierādījumu 1884. gadā uzrādīja vācu matemātiķis Švarcs (Schwarz K. H. A., 1843-1921) [BB2].

Zēnodora uzdevums

(*Zenodorus,* 3 – 2 gs. p. m. ē., sengrieķu matemātiķis.)

No visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru atrast n-stūri ar vislielāko laukumu. [Tih, 16]

Pirms analizēt vispārīgo gadījumu, aplūkosim vairākus atsevišķus uzdevumus un dažādus elementārus paņēmienus, metodes to risināšanā, kā arī sniegsim īsas vēsturiskas ziņas. Ja mērķi var sasniegt, ejot pa vienu ceļu, vai ir vērts iepazīties vēl ar citiem ceļiem? Bieži vien to darīt ir vērts. Vairāku paņēmienu izmantošana, apgūšana viena un tā paša uzdevuma risināšanā var būt noderīga ne tikai redzesloka paplašināšanai vai kā treniņš skolēniem. Svarīgi apzināties, ka kāds no atsevišķā uzdevuma risinājumiem var būt piemērots citu, sarežģītāku uzdevumu risināšanā, var kalpot kā atslēga plašiem vispārinājumiem. Kaut gan Zēnodora uzdevums ir matemātikas "klasika", kuru slīpējuši daudzi izcili matemātiķi, tomēr tā risināšanā vēl var atrast jaunas nianses.

Zēnodora uzdevums trijstūrim

Regulāram trijstūrim piemīt šāda izoperimetriskā īpašība:

Izoperimetriskā teorēma trijstūriem. No visiem trijstūriem ar vienu un to pašu perimetru vislielākais laukums ir regulāram trijstūrim.

Kādreiz šo teorēmu pierādīja tā. Pieņemsim, ka ABC ir maksimālais trijstūris ar perimetru *p*. Tad tā visām malām jābūt vienādām. Tiešām, ja AB nav vienāds ar BC, tad var konstruēt vienādsānu trijstūri AB_1C ar to pašu pamatu AC un to pašu perimetru *p*, bet ar lielāku laukumu nekā maksimālajam trijstūrim. (To, ka vienādsānu trijstūrim AB_1C laukums būs lielāks, garantē turpmāk aplūkotā izoperimetriskā lemma.) Iegūts absurds, proti, ka izoperimetriskajam trijstūrim AB_1C ir vēl lielāks laukums nekā maksimālajam trijstūrim ABC.

Grāmatā [Kr] ir izklāstīti divi šādas izoperimetriskās lemmas pierādījumi [2)].
No diviem dažādiem trijstūriem ar vienādiem pamatiem un vienādām sānu malu summām mazāks laukums ir tam, kuram pieder mazākais un lielākais leņķis no četriem leņķiem pie minētajiem pamatiem.

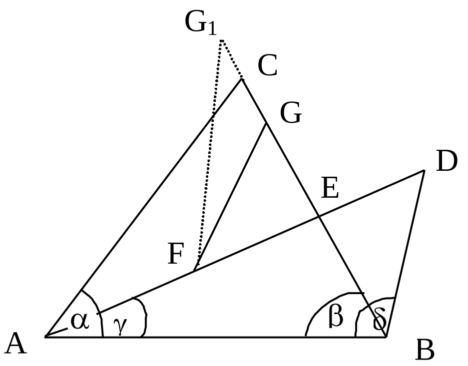
Aplūkosim vairākus lemmas pierādījumus.
1. pierādījums balstās uz lemmas ģeometrisku ilustrāciju, ko dod elipse, kuras fokusos atrodas trijstūru kopējā pamata galapunkti. Elipsi var definēt kā līkni, kuras patvaļīgam punktam attālumu summa līdz diviem dotiem punktiem (fokusiem) ir nemainīgs lielums.

2. pierādījums ir vienkāršs, bet diezgan garš. Tas veikts ar elementārās ģeometrijas līdzekļiem. Turpmāk dotais pierādījums atšķiras no oriģināla [Kr, 28-30] tikai ar nebūtiskām izmaiņām.

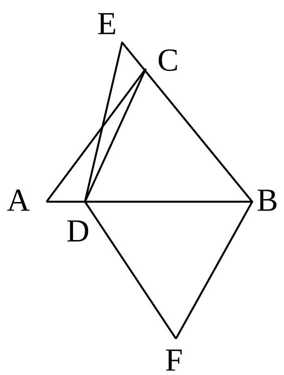
Novietojam trijstūrus ACB un ADB uz kopējā pamata tā, lai garākās abu trijstūru malas izietu no pamata viena un tā paša galapunkta (13. zīm.). Tad attiecīgie trijstūru leņķi ar virsotni A būs mazāki nekā trijstūru leņķi ar virsotni B:

$$\alpha \le \beta,\ \gamma < \delta \quad \text{vai} \quad \alpha < \beta,\ \gamma \le \delta$$

(vienādības zīme attiecas uz to gadījumu, kad viens no trijstūriem ir vienādsānu; abi trijstūri nevar būt vienādsānu, nebūdami tajā pašā laikā kongruenti)



13. zīm.



14. zīm.

Leņķi A un B nevar būt vienādi, jo pretējā gadījumā trijstūri būtu kongruenti. Pieņemsim, ka $\alpha > \gamma$. Tad $\delta > \beta \ge \alpha > \gamma$, jo trijstūra ADB virsotnei D jāatrodas ārpus trijstūra ACB (pretējā

gadījumā perimetri nebūtu vienādi). Tātad pierādīts, ka *vislielākais un vismazākais no četriem leņķiem pie pamata pieder vienmēr vienam un tam pašam trijstūrim*. Pierādīsim, ka tam pašam trijstūrim pieder arī visgarākā un visīsākā mala, t. i., AD > AC $\geq$ BC > BD.
Ja AD = AC, tad arī BC = BD (jo sānu malu summas vienādas); bet šādā gadījumā trijstūri būtu kongruenti, kas pretrunā ar nosacījumu. Tagad pieņemsim, ka AD < AC. Tad, spriežot kā iepriekš, būs BD > BC. Pirmā no šīm nevienādībām parāda, ka leņķis ACD mazāks nekā leņķis ADC, bet otrā – ka leņķis BCD, kas ir tikai leņķa ACD daļa, lielāks nekā leņķis BDC. Bet tas nav iespējams, jo leņķis BDC ir lielāks nekā leņķis ADC. Tātad pierādāmā sakarība starp sānu malām vienmēr patiesa.
Tagad parādīsim, sekojot Šteineram, ka *laukums trijstūrim ADB, kuram saskaņā ar pierādīto, vienlaicīgi ir gan vislielākais un vismazākais leņķis, gan visgarākā un visīsākā mala, ir mazāks nekā laukums trijstūrim* ACB (13. zīm.).

Tā kā $\gamma < \beta$, tad BE < AE. Tāpēc, ja uz EA atliek nogriezni EF = EB, tad F atradīsies starp A un E. Atliksim uz EC nogriezni EG = ED. Punktam G jāatrodas starp E un C. Tiešām, ja G sakristu ar C, tad trijstūri CEF un DEB būtu vienādi un mala CF būtu vienāda ar DB. Bet

$$AC + CB = AD + DB$$

jeb

$$AC + CE + EB = AF + FE + ED + DB;$$

no šejienes, ņemot vērā vienādības

$$CE = ED, \quad EB = EF,$$

dabūjam, ka

$$AC = AF + DB = AF + FC,$$

kas nav iespējams.

Ja punkts G_1, kuram $EG_1 = ED$, atrastos uz EC pagarinājuma punktam C otrā pusē, tad analoģisks spriedums novestu pie absurda rezultāta, ka taisne AC vienāda ar lauztu līniju AFG_1C. Tā kā trijstūri EDB un EFG ir vienādi, tad laukums trijstūrim ADB vienāds ar trijstūru AEB un EFG laukumu summu, kas kopumā ir tikai daļa no trijstūra ACB. Tātad laukums trijstūrim ADB ir mazāks nekā trijstūrim ACB, kas arī bija jāpierāda.

No pierādītā izriet, ka katram trijstūrim, kurš nav vienādsānu, ir vislielākais un vismazākais leņķis, tāpēc tā laukums ir mazāks nekā vienādsānu trijstūra (ar kopēju pamatu un perimetru) laukums.

<u>3. pierādījums</u>. Kombinējot ģeometriskos un algebriskos līdzekļus, uzrādīsim īsāku lemmas pierādījumu, kas izriet no Hērona formulas un nevienādības

$$(p-x)(p-y) \leq (p-x_1)(p-y_1), \tag{1}$$

kur $x + y = x_1 + y_1$ un y_1 atrodas starp skaitļiem x un y.

Izteiksim $x_1 = x + y - y_1$. Tad jāpierāda:

$$(p-x)(p-y) \leq (p-x-y+y_1)(p-y_1)$$

$$(p-x)(p-y-p+y_1) \leq (p-y_1)(y_1-y)$$

$$(y_1-y)\,(p-x-p+y_1) \leq 0$$

$$(y_1-y)(y_1-x) \leq 0.$$

Ja neviens no reizinātājiem nav nulle, tad tie ir ar dažādām zīmēm, jo y_1 atrodas starp skaitļiem x un y.

Apzīmēsim (sk. 13. zīm): AD = x, AB = a, BD = y, AC = x_1, BC = y_1, p un L trijstūra ABD pusperimetrs un laukums. Tad pēc Hērona formulas un (1):

$$L^2\,(ADB) = p(p-a)(p-x)(p-y) \le p(p-a)(p-x_1)(p-y_1) = L^2(ACB),$$

jo y_1 atrodas starp x un y, kas izriet no lemmas pierādījuma pirmajā daļā iegūtās nevienādības $AD > AC \geq BC > BD$.

Piezīme. Ievērosim, ka izoperimetriskās teorēmas pierādījumā tika izmantota nevis pati izoperimetriskā lemma, bet sekas no tās, proti, ka *vienādsānu trijstūrim AB_1C ar to pašu pamatu AC un to pašu perimetru ir lielāks laukums nekā trijstūrim ABC.* Atzīmēsim, ka nevienādību $L(AB_1C) \geq L(ABC)$, kas pastāv starp vienādsānu trijstūri AB_1C un patvaļīgu izoperimetrisku trijstūri ABC, var pierādīt visai īsi un vienkārši, vispār neizmantojot izoperimetrisko lemmu. Taču šai lemmai ir ne tikai vēsturiska nozīme, tā ir noderīga vairāku citu uzdevumu risināšanā.

J. Šteiners iepriekš minēto izoperimetriskās teorēmas pierādījumu esot uzskatījis par pareizu un stingru. Tomēr tas viņu nav apmierinājis pilnībā. Viņš norāda: ja doti divi dažādi izoperimetriski trijstūri, viens vienādmalu, bet otrs nē, tad šāds pierādījums nedod iespēju tieši parādīt, ka lielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim. Šai sakarā D. Križanovskis raksta: "Mēs teiktu, ka uzrādītais pierādījums aizklātā (slēptā) veidā pieņem vislielākā trijstūra ar doto perimetru *eksistenci* un ka tieši šis apstāklis Šteinerā izraisa vajadzību pēc tiešas divu trijstūru – vienādmalu un ne vienādmalu – salīdzināšanas[1])." Komentārā [1]) viņš atzīmē, ka tomēr nav skaidrs, kā Šteiners varēja būt apmierināts ar teorēmas tādu pierādījumu, kurā tiek pieņemta meklējamās maksimālās figūras eksistence.

Neņemos apgalvot, ka maksimāla trijstūra eksistence bija tieši tas, kas izsauca zināmu neapmierinātību ar lemmas pierādījumu. Gandrīz droši, ka diskomfortu Šteineram sagādāja tas, ka trijstūra aizstāšana ar vienādsānu trijstūri var nekad nenovest (pēc galīga soļu skaita) līdz vienādmalu trijstūrim. Iedomāsimies, ka mums dots trijstūris ar malām (3; 5; 6). Pirmajā solī aizstāsim šo trijstūri ar vienādsānu trijstūri (4; 4; 6), saglabājot perimetru, bet palielinot laukumu. Tā turpinot, otrajā solī iegūsim trijstūri (4; 5; 5) ar tādu pašu perimetru, bet lielāku laukumu, trešajā solī – (4,5; 4;5, 5), ceturtajā – (4,5; 4,75; 4,75) utt. Var pierādīt, ka tā konstruētā trijstūru virkne *tiecas* uz vienādmalu trijstūri, turklāt neatkarīgi no sākotnējā trijstūra izvēles. Ideju, kad tiek konstruēta izoperimetrisku vienādsānu trijstūru virkne, katrreiz palielinot (vai vismaz nesamazinot) trijstūra laukumu, ir izmantojis šveiciešu matemātiķis Liljē (L'Huillier S. A. J., 1750-1840). Tā kā te ir darīšana ar bezgalīgu procesu, korektai idejas realizēšanai vajadzētu izmantot nebūt ne elementāro robežas jēdzienu. Par laimi šeit var iztikt ar elementārās matemātikas līdzekļiem. Tāda veida pierādījumus, kuri mūs bezgalīgi tuvina mērķim, bet nekad nenoved pašā mērķī, slavenais vācu matemātiķis L. Dirihlē (Dirichlet P. G. L., 1805-1859) nosauca par *asimptotiskiem* pierādījumiem.

J. Šteiners izdomāja asprātīgu, izteikti ģeometriska rakstura teorēmas pierādījumu, kurā patvaļīgs trijstūris tiek salīdzināts ar vienādmalu trijstūri, un pierādīja, ka pēdējam laukums ir lielāks.

Šteinera pierādījums

Doto trijstūri ar perimetru P pārveido par vienādsānu trijstūri ACB, saglabājot perimetru un ņemot par pamatu AB garāko (vai vienu no garākajām) dotā trijstūra malu, sk. 14. zīm. Tā kā pamats AB ir garāks par katru no sānu malām, tad tas ir garāks par perimetra trešdaļu. Tāpēc, ja uz pamata atliek nogriezni BD, kas vienāds ar perimetra trešdaļu, tad punkts D atradīsies starp A un B. Uz malas BC pagarinājuma vienmēr atradīsies tāds punkts E, ka

$$DE + EC = DA + AC,$$

kas nozīmē, ka trijstūru ABC un DEB perimetri ir vienādi. Tā kā $BC < \frac{1}{3}P$, tad BC < BD un leņķis BCD lielāks nekā leņķis BDC, un tātad leņķis DCE mazāks nekā leņķis ADC, t. i., no diviem izoperimetriskiem trijstūriem ADC un DCE pirmajam ir lielāks leņķis pie kopējā pamata. Pēc izoperimetriskās lemmas laukums trijstūrim ADC ir mazāks nekā trijstūrim DCE. Pieskaitot trijstūra DCB laukumu, dabūjam, ka laukums trijstūrim ACB mazāks nekā laukums trijstūrim DEB. Tagad konstruējam uz pamata BD vienādmalu trijstūri DFB ar to pašu perimetru *P*. Tā laukums ir lielāks nekā izoperimetriskā trijstūra DEB laukums, jo pamats vienāds ar perimetra trešdaļu, bet sānu malas vienādas. Tādējādi trijstūris DFB ir vienādmalu un pēc laukuma pārsniedz patvaļīga cita izoperimetriska trijstūra laukumu. [Kr, 33-34]

Pierādījums, izmantojot Hērona formulu.

Aplūkosim patvaļīgu trijstūri ar uzdotu perimetru. Ja *a, b, c* – trijstūra malas, *p* – pusperimetrs un L – laukums, tad pēc Hērona formulas

$$L^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Reizinātāju $(p-a)(p-b)(p-c)$ summa ir nemainīgs lielums, tāpēc šis reizinājums un līdz ar to arī laukums būs vislielākais, ja tie visi būs vienādi, t. i., $a = b = c$, kas arī bija jāpierāda.

Kā redzams, pierādījums ir ļoti īss. Tiesa, tas kļūtu ievērojami garāks, ja to vajadzētu papildināt ar Hērona formulas un faktiski šeit izmantotās nevienādības $G \leq A$ (starp vidējo ģeometrisko un aritmētisko) pierādījumu.

Piezīme. Uzdevumu "Noteikt trijstūri ar doto perimetru 2p, bet maksimālo laukumu" neparastā veidā – ar Lagranža reizinātāju metodi (!) – risinājis E. Leimanis [Lei, 130]. Turklāt netiek apspriests jautājums, vai ar šo metodi atrastais punkts dod maksimumu.

Zēnodora uzdevums četrstūrim

Jāpierāda, ka no visiem 4-stūriem ar uzdotu perimetru P vislielākais laukums L ir kvadrātam K.

Ģeometrisks risinājums

Pierādījumu veiksim pēc klasiskās shēmas, kurā patvaļīgs 4-stūris pakāpeniski tiek pārveidots par lielāku (pēc laukuma) četrstūri, kamēr iegūst kvadrātu. Nevienādību ķēdītes

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) \leq L(a, a, a_3, a_4) \leq L(a, a, b, b) \leq L(c, c, c, c) \leq L(K)$$

iegūšanas mehānisms balstās uz diviem vienkārši pierādāmiem apgalvojumiem, kuri turklāt tiek izmantoti arī citu uzdevumu risināšanā. Nosauksim tos par lemmām.

1. lemma. No visiem trijstūriem ar uzdotām divām malām vislielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim.

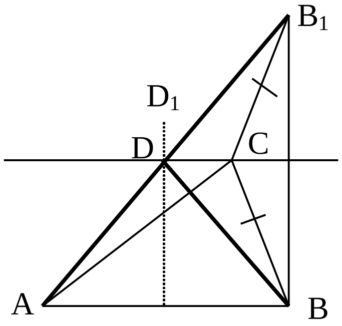
Pierādījums. Apzīmēsim ar a, b un β attiecīgi trijstūra malas un leņķi starp tām. Tad laukums $L = \frac{1}{2}ab\sin\beta$ būs maksimāls, ja $\beta = 90^0$. (Uzrādiet lemmas ģeometrisku pamatojumu.)

2. lemma. No visiem trijstūriem ar uzdotu pamatu un pārējo divu malu summu vislielākais laukums ir vienādsānu trijstūrim.

Pierādījums. Aplūkosim vienādsānu trijstūri AD_1B ar fiksētu pamatu AB un fiksētu sānu malu summu $AD_1 + D_1B$, sk. 15. zīm. Salīdzināsim šī trijstūra laukumu ar cita trijstūra ACB laukumu, ja pēdējam $AC + CB = AD_1 + D_1B$. Novelkam pamatam AB paralēlu taisni DC. Trijstūra laukums vienāds ar tā pamata un augstuma reizinājuma pusi. Tāpēc trijstūra ACB laukums nav atkarīgs no virsotnes C atrašanās vietas uz šīs taisnes. Vienādsānu trijstūrim ADC perimetrs ir mazāks nekā trijstūrim ACB, jo

$$AC + CB = AC + CB_1 > AB_1 = AD + DB_1 = AD + DB.$$

Tagad atliek ievērot, ka vienādsānu trijstūra AD_1B laukums ir lielāks par trijstūra ADB laukumu.



15. zīm.

Algebrisks risinājums, izmantojot 4-stūra laukuma formulu

Pieņem, ka a, b, c un d ir izliekta 4-stūra ABCD malu garumi, β un δ – tā pretējie leņķi un L – laukums, sk. 17. zīm. Tad

$$4L = 2ab\sin\beta + 2cd\sin\delta. \qquad (1)$$

Pēc kosinusu teorēmas

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\beta - 2cd\cos\delta. \qquad (2)$$

Kāpinām (1) un (2) abas puses kvadrātā un saskaitām iegūtās vienādības:

$$16L^2 = 4a^2b^2\sin^2\beta + 8abcd\sin\beta\sin\delta + 4c^2d^2\sin^2\delta$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2\cos^2\beta - 8abcd\cos\beta\cos\delta + 4c^2d^2\cos^2\delta.$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2 - 8abcd(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta) + 4c^2d^2$$

Izmantojam formulu divu leņķu summas kosinusam un veicam vienkāršus pārveidojumus.

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2 - 8abcd\cos(\beta + \delta) + 4c^2d^2$$

$$16L^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\beta + \delta) \qquad (3)$$

$$16L^2 = (2ab + 2cd)^2 - 8abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\beta + \delta)$$

$$16L^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos(\beta + \delta)) =$$

$$= (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}$$

$$16L^2 = [(c + d)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - (c - d)^2] - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}$$

$$16L^2 = (c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}.$$

Apzīmējam $a + b + c + d = 2p$. Tad

$$16L^2 = (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2d) - 16abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}$$

$$L = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\beta+\delta}{2}}. \qquad (4)$$

Iegūta formula četrstūra laukuma aprēķināšanai, kas pēc būtības ir Hērona formulas vispārinājums. No šīs formulas izriet, ka laukums L būs maksimāls tad, kad kosinuss no atbilstošā leņķa būs nulle, t. i.,

$$\cos^2 \frac{\beta+\delta}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \beta + \delta = 180^0.$$

Tātad

$$L \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad (5)$$

Tagad izmantosim nevienādību $G \leq A$, saskaņā ar kuru zemsaknes izteiksme būs maksimāla tad, kad visi 4 reizinātāji vienādi, kas dod :

$$a = b = c = d,$$
$$L \leq (p - a)^2 = (2a - a)^2 = a^2.$$

Līdz ar to esam atrisinājuši Zēnodora uzdevumu 4-stūrim.

Piezīme. Nosacījumu $(\beta + \delta) = 180^0$ varēja iegūt ātrāk, sk formulu (3). Tās labā puse būs maksimāla, ja $\cos(\beta + \delta) = -1$. Formula (4) ir atrodama vairākās grāmatās, sk., piemēram, [Bla, Zet], kur dots arī tās izvedums. Savukārt ļoti akurātais V. Blaške [Bla, 46], pierādot formulu četrstūra laukuma F aprēķināšanai:

$$F^2 = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) - s_1 s_2 s_3 s_4 \cos^2\theta,$$

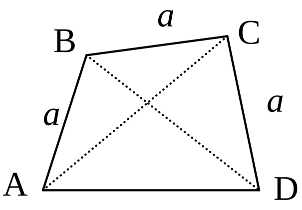
kur $2s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$, bet θ – divu pretējo četrstūra leņķu vidējais aritmētiskais, atsaucas uz 1914. gadā vācu valodā iznākušu grāmatu. Atzīmēsim, ka V. Blaškes (1885-1962) ievērojamā grāmata pirmo reizi iznāca 1916. gadā.

Sekas no četrstūra laukuma formulas (4).

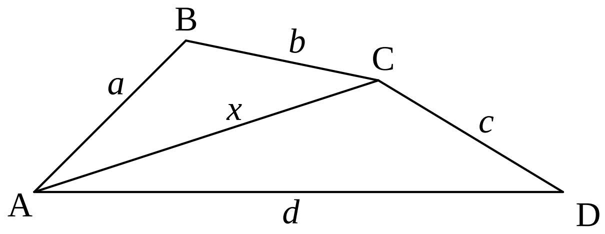
- Hērona formula trijstūrim. (Ņemt $d = 0$).
- No visiem 4-stūriem ar uzdotām malām vislielākais laukums ir tam, ap kuru var apvilkt riņķa līniju. (Vispirms secinām, ka maksimālajam četrstūrim pretējo leņķu summa ir 180^0. Tad atsaucamies uz skolas ģeometrijas faktu: ja 4-stūra pretējo leņķu summa ir 180^0, tad ap to var apvilkt riņķa līniju.)
- No visiem četrstūriem ar kopēju pamatu un trīs vienādām malām vislielākais laukums ir vienādssānu trapecei. (Ja četrstūris ABCD, sk. 16. zīm., ir ievilkts riņķī, tad tam ievilktie leņķi CAD un BDA ir vienādi, jo balstās uz vienādiem lokiem. Tas pats sakāms par leņķiem CAB un BDC.)

Risinājums, izmantojot Hērona formulu un Košī nevienādību

Izteiksim četrstūra laukumu L pēc Hērona formulas kā divu trijstūru laukumu summu, sk. 17. zīm.



16. zīm.



17. zīm.

$$4L_{ABC} = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b)} =$$

$$= \sqrt{[(a+b)^2 - x^2)][(x^2 - (a-b)^2]}$$

$$4L_{ACD} = \sqrt{(c+d+x)(c+d-x)(x+d-c)(x-d+c)} =$$

$$\sqrt{[(c+d)^2 - x^2)][(x^2 - (c-d)^2]}$$

$$4L = \sqrt{[(x^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - x^2)]} + \sqrt{[(c+d)^2 - x^2)][(x^2 - (c-d)^2]}$$

Lietosim Košī nevienādību $xu + yv \le \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2}$:

$$4L \le \sqrt{[(x^2 - (a-b)^2 + (c+d)^2 - x^2)][(a+b)^2 - x^2 + x^2 - (c-d)^2]} = \qquad (*)$$

$$= \sqrt{[(c+d)^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - (c-d)^2]}$$

$$4L \le \sqrt{(c+d+a-b)(c+d-a+b)(a+b+c-d)(a+b-c+d)} \qquad (**)$$

Apzīmējot četrstūra pusperimetru ar *p*, iegūstam

Sekas. $L(a,b,c,d) \le \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Četru reizinātāju summa ir konstants lielums (divkāršots 4-stūra perimetrs), tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja tie visi būs vienādi, t. i., $a = b = c = d$. Košī nevienādība kļūst par vienādību, ja $xv = uy$. Izmantojot šo proporcionalitātes nosacījumu, no (*) dabūjam $x = a\sqrt{2}$, kas nozīmē, ka leņķis starp maksimālā 4-stūra malām AB un BC, kā arī starp CD un DA ir taisns. (Te varēja izmantot arī faktu, ka no trijstūriem ar uzdotām divām malām vislielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim.) Tātad no visiem četrstūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir kvadrātam.

Zēnodora uzdevums sešstūrim

Jāpierāda, ka no visiem izoperimetriskiem 6-stūriem vislielākais laukums L ir regulāram 6-stūrim R.

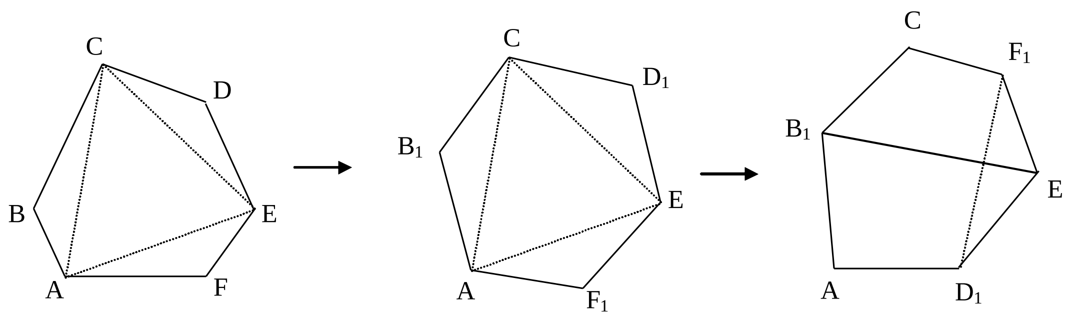
Izoperimetrisko problēmu 6-stūrim risināsim pēc shēmas:

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \le L(a, a, b, b, c, c) \le 2L(a, b, c,) \le L(R).$$

Pirmā nevienādība izriet no 2. lemmas, kuras "realizācija" atspoguļota 18. zīmējumā. No patvaļīga 6-stūra ABCDEF, nepalielinot tā perimetru un saglabājot ar raustīto līniju attēlotos nogriežņus, iegūstam 6-stūri $AB_1CD_1EF_1$, kam $AB_1 = B_1C$, $CD_1 = D_1E$, $EF_1 = F_1A$. Nākamajā solī 6-stūrī $AB_1CD_1EF_1$ apgāžam trijstūri D_1EF_1. Iegūtajam 6- stūrim $AB_1CF_1DE_1$ saglabājas gan laukums, gan perimetrs. Kaut gan laukums nav palielinājies, tomēr tas nenozīmē, ka 2. pārveidojums ir bijis bez jēgas. Pēc šī pārveidojuma tiek iegūts 6-stūris, kas sastāv no diviem vienādiem 4-stūriem. Tas nozīmē, ka ir pamatota otrā nevienādība

$$L(a, a, b, b, c, c) \le 2L(a, b, c).$$

Izoperimetrisko problēmu 6-stūrim esam reducējuši uz tāda maksimālā 4-stūra meklēšanu, kam uzdota trīs malu summa. Tagad pierādīsim lemmu, no kuras izriet, vajadzīgais rezultāts, proti, ka no visiem 6-stūriem ar uzdotu perimetru maksimālais laukums ir regulāram 6-stūrim.



18. zīm.

Lemmas par vienādsānu trapeci

L1. *No visiem* 4-*stūriem ar uzdotu trīs malu summu vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei – regulāra* 6-*stūra pusei.*

L2. *No visiem* 4-*stūriem ar uzdotu pamatu un trīs vienādām malām vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei.*

<u>Algebrisks pierādījums</u>. Meklējamā 4-stūra (17. zīm.) malu garumus apzīmēsim ar a, b, c un d un uzskatīsim, ka dota malu AB, BC un CD summa: $a + b + c = 3s$. Tad saskaņā ar iepriekš iegūtajām Sekām

$$L^2(a, b, c, d) \le (p - a)(p - b)(p - c))(p - d). \qquad (6)$$

Pirmo trīs reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc šī izteiksme būs maksimāla tad, kad tie visi ir vienādi, t. i.,

$$p - a = p - b = p - c \Rightarrow \ a = b = c = s \Rightarrow$$

$$p - a = \frac{3s + d}{2} - s = \frac{s + d}{2}, \quad p - d = \frac{3s - d}{2}$$

$$\mathrm{L}^2 \le (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \le \frac{s+d}{2} \cdot \frac{s+d}{2} \cdot \frac{s+d}{2} \cdot \frac{3s-d}{2} =$$

$$= \frac{1}{48}(s+d)(s+d)(s+d)(9s-3d).$$

Reizinājums būs maksimāls, ja visi reizinātāji būs vienādi:

$$s + d = 9s - 3d \Rightarrow \ 4d = 8s \ \Rightarrow \ d = 2s.$$

$$\mathrm{L}(a, b, c, d) \le \sqrt{\frac{1}{48}(s+d)^2} = \frac{3\sqrt{3}s^2}{4}.$$

Vēl atliek noskaidrot, kādiem četrstūriem ar malām (s, s, s, 2 s) nevienādība (6) kļūst par vienādību. Šī nevienādība tika iegūta, lietojot Košī nevienādību, $xu + yv \le \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2}$, sk. (*), kura kļūst par vienādību tikai tad, ja pastāv proporcionalitātes nosacījums $x : u = y : v$. (ar x apzīmēts diagonāles AC garums, sk. 17. zīm.). Lai vienlaicīgi iegūtu arī L2 pierādījumu, pārbaudīsim proporcionalitātes nosacījumu četrstūriem ar malām (a, a, a, d):

$$x : u = y : v \Leftrightarrow xv = yu \Leftrightarrow x^2v^2 = y^2u^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2[x^2 - (a - d)^2] = [(a + d)^2 - x^2](4a^2 - x^2)$$

$$x^4 - x^2 (a - d)^2 = (a + d)^2 (4a^2 - x^2) - 4a^2x^2 + x^4$$

$$- x^2 (a - d)^2 = (a + d)^2 (4a^2 - x^2) - 4a^2x^2$$

$$x^2 [4a^2 + (a + d)^2 - (a - d)^2] = 4a^2 (a + d)^2$$

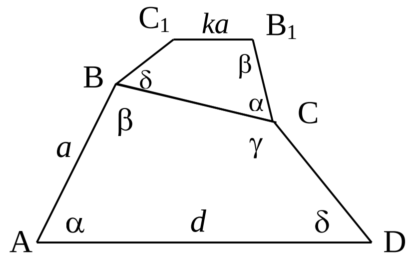
$$x^2 (4a^2 + 4ad) = 4a^2 (a + d)^2$$

$$x^2 = a (a + d).$$

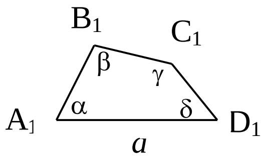
Tagad atliek ievērot, ka 4-stūris, kuram četras malas ir a, a, a, d un diagonāle $\mathrm{AC} = x = \sqrt{a(a+d)}$, nosakāms viennozīmīgi. Šis 4-stūris nav nekas cits kā vienādsānu trapece. Ja $a = s$ un $d = 2s$, tad $x^2 = 3a^2$. Tas nozīmē, ka vienādsānu trapeces leņķis starp malām AB un BC ir 120^0, t. i., šī trapece ir regulāra sešstūra puse. Tātad vienādsānu trapece ir vienīgais maksimālais četrstūris abās lemmās.

L2 ģeometrisks pierādījums.

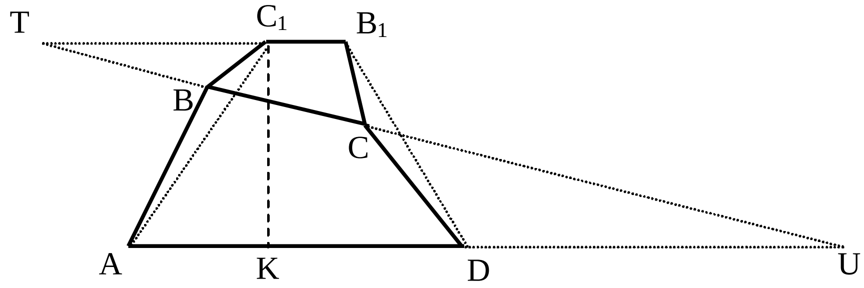
Četrstūri ABCD papildināsim līdz vienādsānu trapecei AC_1B_1D, veicot šādu konstrukciju (19.-21. zīm.):



19. zīm.



20. zīm.



21. zīm.

1) Izveidojam ABCD samazinātu kopiju $A_1B_1C_1D_1$ tā, lai garākā mala AD pēc samazināšanas sakristu ar BC. Citiem vārdiem, ņemam četrstūrim ABCD līdzīgu četrstūri $A_1B_1C_1D_1$ ar malām *kd, ka , ka, ka*, kur līdzības koeficients *k* izraudzīts tā, lai $kd = a$.

2) Četrstūri $A_1B_1C_1D_1$ pievienojot sākotnējam četrstūrim ABCD, iegūstam daudzstūri ABC_1B_1CD. Malas AD un C_1B_1 ir paralēlas, jo krustleņķi T un U, kādos taisne BC krusto taisnes AD un B_1C_1, ir vienādi (ar $180^0 - \alpha - \beta$).

3) Trijstūri ABC_1 un DCB_1 ir vienādi, jo tiem starp divām vienādām malām atrodas vienādi leņķi: leņkis $B_1CD = 360^0 - \alpha - \gamma = \beta + \delta$.

Trapecei laukums vienāds ar pamatu pussumas (viduslīnijas) un augstuma *h* reizinājumu. Trapecei AC_1B_1D viduslīnijas garums $\frac{d+ak}{2}$ ir nemainīgs lielums. Lai iegūtu maksimālo laukumu, jāņem iespējami liels augstums *h*. Ievērosim, ka, palielinot vienādsānu trapeces sānu malas garumu, vienlaicīgi palielinās arī augstums. Tā kā AC_1 garums nepārsniedz malu AB un BC_1 garumu summu, tad maksimālo malas garumu trapecei AC_1B_1D dabū, "iztaisnojot" leņķi ABC_1, t. i., ņemot $\beta + \delta = 180^0$.

Piezīme. Šo secinājumu var iegūt arī, lietojot Pitagora teorēmu un kosinusu teorēmu:

$$h^2 = |AC_1|^2 - |AK|^2$$

$$h^2 = a^2 + (ka)^2 - 2ka^2\cos(\beta+\delta) - \left(\frac{d-ka}{2}\right)^2$$

No šejienes redzams, ka trapeces augstums *h* būs maksimāls, ja $\cos(\beta + \delta) = -1$.

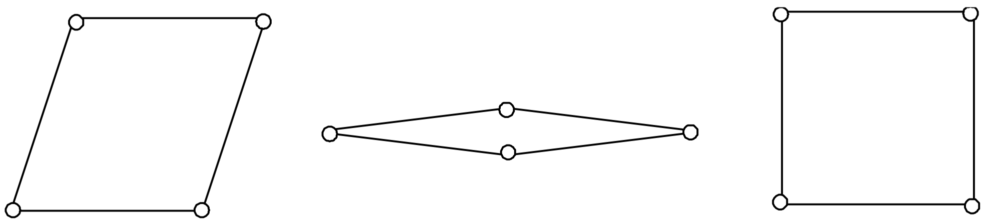
Tātad maksimālajam četrstūrim pretējo leņķu summas ir vienādas un līdz ar to ap maksimālo četrstūri var apvilkt riņķa līniju. Nosacījums, ka pretējo leņķu summas ir vienādas, kopā ar nosacījumu, ka četrstūrim trīs malas ir vienādas, dod vajadzīgo rezultātu, ka ABCD būs vienādsānu trapece.

Pamēģiniet šo ģeometrisko pierādījumu piemērot vispārīgam gadījumam, lai pierādītu, ka no visiem četrstūriem ar uzdotiem malu garumiem vislielākais laukums ir tam, ap kuru var apvilkt riņķa līniju.

Četru šarnīru metode

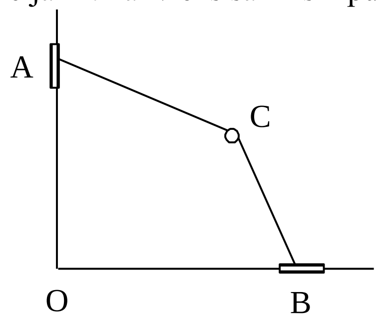
Mehānikā ar šarnīru (locīklu) saprot kāda mehānisma atsevišku daļu tādu savienojumu, ka viena daļa var rotēt attiecībā pret otru. Kā piemērus, kur lieto šarnīra savienojumus, var minēt logu, durvju viras; šķēres, dažādus cirkuļus, satvērējus utt.

Kā ļoti vienkāršu konstrukciju ar četriem šarnīriem varam iztēloties rombu, kur šarnīru lomā būs tā virsotnes (22. zīm.). Trijstūri var viennozīmīgi uzdot ar trīs malām, bet pārējo daudzstūru viennozīmīgai raksturošanai ar malu garumiem vien vēl nepietiek. Nemainot malu garumus, bet mainot leņķus, var iegūt dažādas formas rombus (22. zīm.). Kā zināms, maksimālo rombu (pēc laukuma) iegūst tad, ja visi tā leņķi kļūst taisni. Turpmāk aplūkotajā šarnīru metodē taisnam leņķim ir būtiska nozīme.



22. zīm.

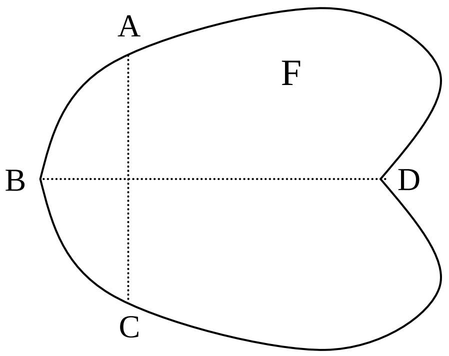
Nav jādomā, ka kustīgās konstrukcijās jābūt vismaz četriem šarnīriem. Piemēram, 23. zīmējumā redzamajā konstrukcijā ir tikai viens šarnīrs – punktā C.



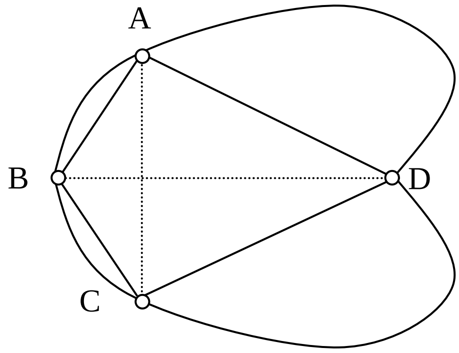
23. zīm.

Turklāt uzdevums noteikt leņķi starp malām AC un BC, lai laukums OACB būtu maksimāls, nebūt nav triviāls. Atrisiniet uzdevumu, pieņemot, ka leņķis O taisns un ka stieņu AC un BC, kas savienoti ar šarnīru punktā C, gali A un B var slīdēt attiecīgi pa taisnēm OA un OB.

Šteiners ieteica vienkāršu ģeometrisku konstrukciju, kura ļauj palielināt plaknes figūras (ja vien tā nav riņķis) laukumu, saglabājot tās perimetru. Tā kā šajā konstrukcijā izmanto četrus šarnīrus, to mēdz saukt par *četru šarnīru Šteinera metodi*. Tās saturu ilustrēsim, aplūkojot kādu simetrisku figūru F, piemēram, kā 24. zīmējumā. Uz figūras F robežas izvēlas kādu punktu A, lai leņķis BAD nebūtu taisns. Tad simetrijas ass galapunktos, punktā A un tam simetriskajā (pret BD) punktā C "novieto" šarnīrus (25. zīm.). Mainot šarnīru četrstūrim leņķus, mainās tā laukums, bet apskatāmās figūras F daļai ārpus šī četrstūra saglabājas gan laukums, gan perimetrs. Četrstūra ABCD laukums palielinās vienlaicīgi ar trijstūra ABD laukumu. Bet trijstūrim BAD ar fiksētām malām AB un AD laukums būs vislielākais tad, ja leņķis A būs taisns. Tātad, tiklīdz no kāda punkta figūras simetrijas ass redzama leņķī, kas nav taisns, tā figūras laukumu iespējams palielināt.



24. zīm.



25. zīm.

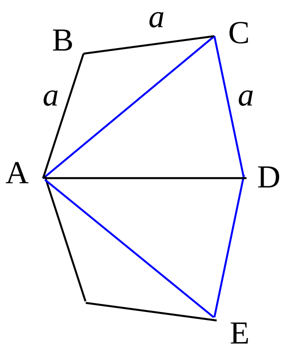
Piezīme. Kā rīkoties, ja sākotnējai figūrai nav nevienas simetrijas ass? Pavisam vienkārši. Šādā gadījumā veic nelielus priekšdarbus. Figūru pārveido par simetrisku figūru, saglabājot perimetru un palielinot tās laukumu. Pēc Šteinera figūras simetrizāciju veic, izvēloties uz līknes (figūras robežas) divus punktus, kuri perimetru sadala vienādās daļās, un savieno šos punktus ar hordu. Horda figūru F sadala divās daļās, kas var atšķirties pēc laukuma. Izvēlas to daļu, kurai laukums lielāks, un izveido simetrisku figūru, kura sastāv no izvēlētās daļas un tās spoguļattēla. Šteinera figūras laukuma palielināšanas metode ir publicēta darbā [Steiner, Gesammelte Werke, Berlin, 1882, 2. sēj.]

Izmantojot četru šarnīru metodi un nevienādību $G \leq A$, uzrādīsim vēl vienu lemmas L2 pierādījumu. Ievērosim, ka no L2 kā sekas izriet šāds apgalvojums:

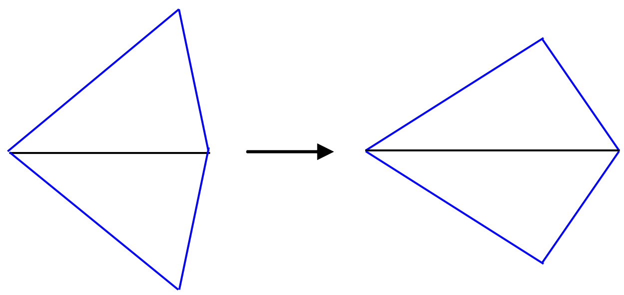
No visiem vienādmalu sešstūriem ar uzdotu malu vislielākais laukums ir regulāram sešstūrim.

Pierādījums. Ja četrstūris ABCD nav vienādsānu trapece, tad tam vismaz viens no leņķiem ABD vai ACD nav taisns. (Ja abi šie leņki ir taisni, tad trijstūri ABD un ACD ir vienādi kā taisnleņķa trijstūri ar vienādām katetēm. Līdz ar to leņķi BAD un CDA ir vienādi). Attēlosim četrstūri ABCD simetriski pret pamatu AD (26. zīm.). Uzskatīsim, ka leņķis ACD nav taisns. Tad iedomāsimies, ka četrstūra ACDE virsotnēs ir šarnīri. Kādā stāvoklī jāatrodas četrstūra ACDE malām, lai tā laukums būtu vislielākais? Tā kā trijstūrim ar divām fiksētām malām (AC un CD) laukums ir vislielākis tad, kad leņķis starp šīm malām ir taisns, tad ACDE (tas sastāv no diviem vienādiem trijstūriem) būs maksimāls, ja leņķis ACD ir taisns (27. zīm.) Pēc šāda pārveidojuma jaunajam sešstūrim malu garumi ir tie paši, bet laukums lielāks. Turklāt jaunais sešstūris ir "tuvāks" regulāram (salīdzinājumā ar iepriekšējo) tai ziņā, ka leņķi ACD un AED ir taisni. (Ievilkti leņķi, kas balstās uz riņķa līnijas diametru, ir taisni.)

Ja leņķis ABD nav taisns, tad aprakstīto procedūru principā var atkārtot vēlreiz. Diemžēl tas "izbojās" iepriekš saniegto – leņķis ACD vairs nebūs taisns.



26. zīm.



27. zīm.

Tagad risināsim uzdevumu:

No visiem četrstūriem ABCD *ar trīs vienādām malām un taisnu leņķi* ACD *atrast maksimālo.*

Apzīmēsim leņķa B pusi ar β un cosβ ar u. Tad

$$L = L_{ABCD} = L_{ABC} + L_{CDA}$$

$$L = \frac{1}{2}a^2 \sin B + a^2 \sin\frac{B}{2} = a^2(\sin\beta\cos\beta + \sin\beta)$$

Lai noteiktu funkcijas g := sinβcosβ + sinβ = sinβ(cosβ + 1) maksimumu, ērti aplūkot tās kvadrātu. (Funkcija g sasniedz maksimumu turpat, kur g^2, jo visiem pieļaujamiem argumentiem $g \geq 0$).

$$g^2 = \sin^2\beta(\cos\beta + 1)^2 = (1 - u^2)(u + 1)^2 = (1 - u)(1 + u)^3$$

$$3g^2 = (3 - 3u)(1 + u)(1 + u))(1 + u).$$

Četru pozitīvu reizinātāju summa ir nemainīgs lielums, tāpēc reizinājums būs maksimāls, ja tie visi vienādi.

$$3 - 3u = 1 + u$$

$$u = \cos\beta = 0{,}5.$$

Tā kā β ir šaurs leņķis, tad tas ir 60 grādu liels. Tātad leņķis B ir 120 grādu liels, kas arī bija vajadzīgs.

Zēnodora uzdevums piecstūrim

Jāpierāda, ka no visiem izoperimetriskiem 5-stūriem vislielākais laukums L ir regulāram 5-stūrim R.

Aplūkojamais uzdevums piecstūrim salīdzinājumā ar sešstūri, šķiet, ir “cietāks rieksts”, vismaz ar iepriekš lietotajiem paņēmieniem vien to neizdodas pārkost.

Pirmkārt, ja pierādījumu veic pēc shēmas

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \leq L(a_6, a_6, a_3, a_4, a_5) \leq L(a_6, a_6, a_7, a_7, a_5) \leq$$

$$\leq L(b, b, b, b, c) \leq L(a, a, a, a, a) \leq L(R),$$

tad nepieciešama jauna ideja, lai pamatotu, ka maksimālajam piecstūrim visas malas būs vienādas. Aizstājot divas blakusesošās malas ar divām vienādām malām (saglabājot to summu), mēs varam iegūt piecstūri ar četrām vienādām malām (piemēram, pēc 18. zīm. dotā parauga). Šāds malu vienādošanas process, vispārīgi runājot, var nenovest līdz mērķim – vienādmalu daudzstūrim. Sešstūrim problēmu izdevās atrisināt elementārā veidā, jo sešstūri varējām aizstāt ar diviem vienādiem noteikta tipa četrstūriem, sk. L1-L2 .

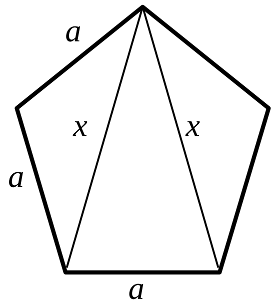
Otrkārt, arī tad, ja mēs zinām, ka piecstūrim visas malas ir vienādas, vēl ir jāpārvar grūtības, lai pierādītu, ka arī visiem leņķiem jābūt vienādiem.

Nevienādības L(a, a, a, a, a) $\leq$ L(R) pierādījums

Vispirms ievērosim, ka pietiek aplūkot tikai tādus vienādmalu piecstūrus, kuriem leņķi pie pamata vienādi, jo
No visiem četrstūriem ar fiksētu pamatu un trīs vienādām malām vislielākais laukums ir vienādsānu trapecei. (sk. L2)

Izteiksim piecstūra (sk. 28. zīm.) laukumu L kā trīs trijstūru laukumu summu.

$$\mathrm{L}(a,a,x)=\frac{x}{4}\sqrt{4a^2-x^2} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{L}=\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}+\frac{a}{4}\sqrt{4x^2-a^2}\,.$$



28. zīm.

Novērtēsim laukuma L izteiksmes katru locekli, izmantojot ļoti vienkāršu nevienādību.

$$2uv \leq u^2+v^2$$

$$4\mathrm{L}=2x\sqrt{4a^2-x^2}+a\sqrt{4x^2-a^2}=2(px)\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{p}+aq\cdot\frac{\sqrt{4x^2-a^2}}{q}\leq$$

$$\leq (px)^2+\frac{4a^2-x^2}{p^2}+\frac{a^2q^2}{2}+\frac{4x^2-a^2}{2q^2}=\left(p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{q^2}\right)x^2+\left(\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)a^2.$$

Izvēlēsimies šādus p un q:

$$p^2=\sqrt{5-\sqrt{20}}$$
$$q^2=\sqrt{5+\sqrt{20}}\,.$$

Kāpēc tāda nebūt ne acīmredzama, ja ne mistiska, izvēle? Noslēpums drīz tiks atklāts. Pirmkārt, skaitļi p un q ir ņemti tā, lai koeficients pie x^2 būtu nulle. Ievērosim, ka

$$p^2q^2=\sqrt{5}\,,\quad q^4=5+\sqrt{20}\,,\quad \frac{q^2}{p^2}=\frac{q^4}{p^2q^2}=2+\sqrt{5}$$

un veiksim vienkāršu pārbaudi

$$p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{q^2}=0 \;\Leftrightarrow\; p^2+\frac{2}{q^2}=\frac{1}{p^2} \;\Leftrightarrow\; p^2q^2+2=\frac{q^2}{p^2}=2+\sqrt{5}\,.$$

Otrkārt, skaitļus p un q vajadzētu izraudzīties tā, lai izdarītais novērtējums būtu precīzs jeb, lai loceklis

$$\left(\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)a^2$$

sakristu ar regulāra piecstūra laukumu. Vai to vispār var panākt? Jā, var! Par to liecina samērā vienkārša pārbaude. Ir spēkā

$$\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}=\frac{5}{p^2}.$$

Tiešām,

$$\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}=\frac{1}{p^2} \Leftrightarrow \frac{q^4-1}{2q^2}=\frac{1}{p^2} \Leftrightarrow q^4-1=\frac{2q^2}{p^2}=2(2+\sqrt{5}).$$

Vēl jāpierāda, ka $\dfrac{5a^2}{p^2}=4\mathrm{L(R)}$, t. i., ka vienādības kreisā puse nav nekas cits kā regulāra piecstūra laukums. Aprēķināsim L(R) kā piecu vienādu trijstūru laukumu summu. Ja trijstūra pamats ir *a* un augstums *h,* tad

$$\mathrm{L}=5\cdot\frac{ah}{2},\ h:\frac{a}{2}=\mathrm{ctg}36^0 \Rightarrow h=\frac{a}{2}\mathrm{ctg}36^0 \Rightarrow \mathrm{L(R)}=\frac{5a^2\mathrm{ctg}36^0}{4}=\frac{5a^2}{4\mathrm{ctg}54^0}.$$

No vienādības $\dfrac{5a^2}{p^2}=\dfrac{5a^2}{\sqrt{5-\sqrt{20}}}=\dfrac{5a^2}{\mathrm{ctg}54^0}$ secinām, ka jābūt $\mathrm{ctg}54^0=\sqrt{5-\sqrt{20}}$.

Kā pārliecināties par iegūtās sakarības $\mathrm{ctg}54^0=\sqrt{5-\sqrt{20}}$ pareizību? "Pārliecība", ko dos kalkulators vai dators, izskaitļojot abiem lielumiem vairākus ciparus aiz komata (0,7265425280...), vēl nav stingrs pierādījums. Formulu krājumos trigonometrisko funkciju vērtības, kā likums, tiek dotas tikai leņķiem, kuri ir 15 grādu daudzkārtņi (30, 45, 60, 75, 90). Ir arī *izņēmumi*, piemēram, formulu krājums [CC]. Tajā [107. lpp.] ir dotas visu četru trigonometrisko funkciju (sin, cos, tg un ctg) vērtības 18, 36, 54, 72 grādu lieliem leņķiem. To skaitā:

$$\sin 54^0=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \cos 54^0=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\quad \mathrm{tg}54^0=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\quad \mathrm{ctg}54^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Vienkārši pārbaudīt, ka $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5-\sqrt{20}}$. Kā redzams, formulu krājumos ne vienmēr ir dotas vienkāršākās izteiksmes.

Zēnodora problēmas risinājums vēl nav pilnīgs, jo tika pieņemts, ka piecstūrim visas malas ir vienādas. Lemma par malu vienādību tiks pierādīta pēc komentāriem, turklāt vispārīgā gadījumā.

Risinot izoperimetrisko problēmu piecstūrim, kā blakus rezultātu esam ieguvuši vienkāršāku, "kompaktāku" formulu $\mathrm{ctg}54^0=\sqrt{5-\sqrt{20}}$ salīdzinājumā ar iepriekš aplūkoto.

Komentāri. Ir vairāki paņēmieni, kā ar kvadrātsakņu palīdzību izteikt trigonometrisko funkciju vērtības leņķiem, kuri ir 18 grādu daudzkārtņi. Viens no īpaši skaistiem paņēmieniem ir saistīts ar zelta griezumu.

Zelta griezuma izmantošana. Zelta griezuma skaitlis $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (lieto arī citus apzīmējumus) ir viena no matemātikas fundamentālajam konstantēm, kurai ir veltītas pat veselas grāmatas, sk., piemēram, [Vas]. Šeit aprobežosimies tikai ar vienu šī slavenā skaitļa izmantošanas aspektu. Aplūkosim trijstūri, kāds redzams 29. zīmējumā. Tāds zīmējums, nepamatojot tā korektumu, ir dots grāmatā [Vas]. Ja pamata garums ir Φ un leņķi pie pamata 72 grādi lieli, tad kāpēc DE = 1?

Novelkot leņķa A bisektrisi AE, iegūst vienādsānu trijstūri ABE. Tā kā AE = EB un AE = AC = Φ , tad arī AE = AC = Φ. DE, kas novilkts paralēli pamatam AC, garumu apzīmēsim ar v. Tad no trijstūru ABC un DBE līdzības

$$\frac{\Phi}{v} = \frac{v+\Phi}{\Phi} \Rightarrow \Phi^2 = v^2 + v\Phi .$$

No šejienes un vienādības

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

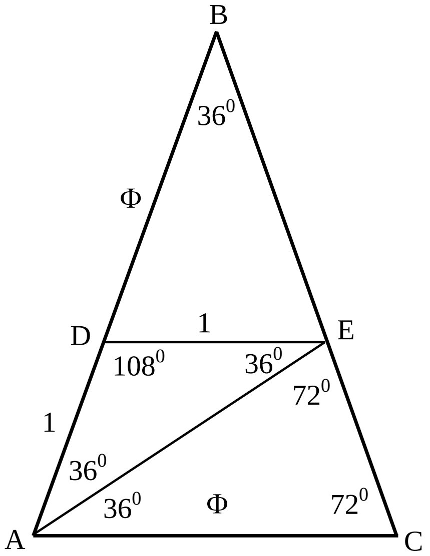
izriet

$$v^2 + v\Phi - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow (v-1)(v+\Phi) = 0.$$

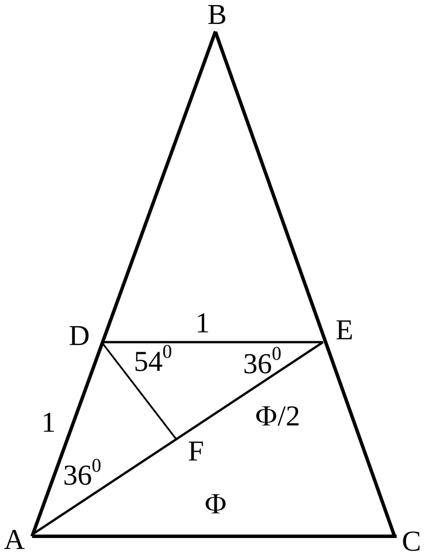
Tā kā v + Φ > 0, tad v = 1, kas arī bija jāpamato.

Papildinām 29. zīmējumu, novelkot tajā DF perpendikulāri AE (30. zīm.) Tad

$$\frac{FE}{DE} = \cos 36^0 \Rightarrow \frac{\Phi}{2} = \cos 36^0 .$$



29. zīm.



30. zīm.

Vēl pierādīsim, ka $\mathrm{ctg}54^0 = \sqrt{5-\sqrt{20}}$. Ērtākai aprēķinu veikšanai lietderīgi izmantot pārveidojumus:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \Rightarrow \frac{1}{\Phi^2} = (\Phi-1)^2 = 2-\Phi$$

$$\mathrm{ctg}^2 54^0 = \frac{DF^2}{FE^2} = \frac{1-FE^2}{FE^2} = \frac{4}{\Phi^2} - 1 = 4(2-\Phi) - 1 = 7 - 4\Phi = 5 - 2\sqrt{5} .$$

Funkcija, kas izsaka piecstūra laukumu, nav vienkārša. Tiem skolēniem vai studentiem, kuri zina atvasinājumu, ieteicams izmēģināt savus spēkus šīs funkcijas maksimuma atrašanā.

Trijstūrus ar leņķiem (36^0, 36^0, 108^0) un (36^0, 72^0, 72^0) mēdz saukt par zelta trijstūriem. No zelta trijstūra nogriežot zelta trijstūri, atkal var iegūt zelta trijstūri.

Zinot trigonometrisko funkciju vērtības 15 un 18 grādu daudzkārtņiem, var iegūt šo funkciju vērtības 3 grādu daudzkārtņiem.

Par minimizācijas uzdevumu

$$\min\left(\frac{4}{p^2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)=?\text{, pie nosacījuma } p^2-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{q^2}=0.$$

Tiešā ceļā sasniegt šo mērķi ar mūsu rīcībā esošajiem līdzekļiem būtu visai apgrūtinoši. Tāpēc izmantosim "mazas viltības", zinot, ka uzdevums radies no 5-stūra laukuma novērtējuma. Ievērosim, ka 68. lpp. lietotā nevienādība $2uv \le u^2 + v^2$ pārvēršas par vienādību tikai tad, kad $u = v$. Tas nozīmē, ka laukuma izteiksmes novērtējumā vienādība varēs pastāvēt tikai tad, kad

$$(px)^2=\frac{4a^2-x^2}{p^2},\quad \frac{a^2q^2}{2}=\frac{4x^2-a^2}{2q^2} \Rightarrow$$

$$p^2x=\sqrt{4a^2-x^2},\quad aq^2=\sqrt{4x^2-a^2}.$$

Regulāram piecstūrim leņķis starp malām ir 108 grādi. Tāpēc (sk. 28. zīm.)

$$\frac{x}{2}:a=\sin 54^0 \Rightarrow x=2a\sin 54^0.$$

Tagad skaitļus p un q var noteikt pavisam vienkārši:

$$p^2=\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{x}=\frac{\sqrt{4a^2(1-\sin^2 54^0)}}{2a\sin 54^0}=\mathrm{ctg}54^0$$

$$q^2=\frac{\sqrt{4x^2-a^2}}{a}=\sqrt{16\sin^2 54^0-1}.$$

Vēl daži netriviāli ekstrēmu uzdevumi.

- Atrisināt minimizācijas uzdevumu

$$\min\left(\frac{4}{p}+\frac{q}{2}-\frac{1}{2q}\right)=?,\quad \text{ja}\quad p-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=0,\ \ p,\,q>0.$$

- Atrast minimumu funkcijai

$$f(x)=\frac{15-10x^2-x^4}{4x(1-x^2)},\quad 0<x<1.$$

  Uzdevums iegūts no iepriekšējā uzdevuma, izsakot q un ievietojot to minimizējamās funkcijas izteiksmē.

- Atrast maksimālo vērtību izteiksmei $8uv+\sqrt{16u^2-1}$, ja $u^2+v^2=1$.
- Atrast maksimumu funkcijai: a) $4\sin 2t+\sqrt{16\sin^2 t-1}$; b) $4\sin t+\sqrt{7-8\cos t}$.

Lemma par vienādmalu n-stūri

Malu vienādība ir nepieciešams nosacījums, lai n-stūrim ar uzdotu perimetru būtu vislielākais laukums.

Citiem vārdiem, optimālais n-stūris jāmeklē starp vienādmalu n-stūriem.

Dažkārt lieto arī šādu (neprecīzu) formulējumu: *No visiem izoperimetriskiem n-stūriem lielāks laukums ir tam, kuram visas malas vienādas*. Formulējums var radīt divdomības. Piemēram, taisnstūrim ar malām 1 un 3 laukums ir 3 un perimetrs 8. Bet vienādmalu četrstūrim (rombam) ar tādu pašu perimetru laukums var būt arī mazāks.

Lemmu var pierādīt negaidīti vienkārši. Pierādījums balstās uz divu trijstūru laukumu salīdzināšanu: no diviem trijstūriem ar malām (x, y, c) un (x_1, y_1, c), kur $x + y = x_1 + y_1$ un y_1 atrodas starp skaitļiem x un y, lielāks laukums ir otrajam trijstūrim. Izteiksim laukumu pēc Hērona formulas. Tad jāpierāda nevienādība

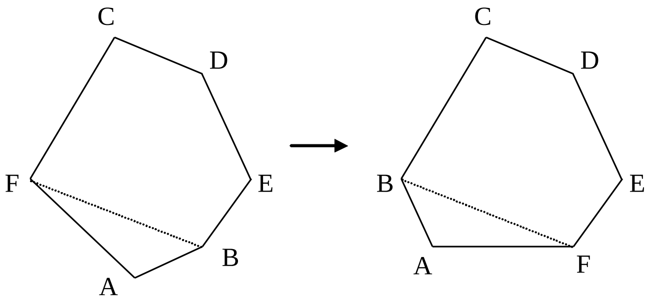
$$p(p-x)(p-y)(p-c) < p(p-x_1)(p-y_1)(p-c).$$

jeb

$$(p-x)(p-y) < (p-x_1)(p-y_1)$$

Pēdējā nevienādība ir pierādīta iedaļā **Zēnodora uzdevums trijstūrim**, sk. (1).

Aplūkosim patvaļīgu n-stūri. Ar M, m un A apzīmēsim attiecīgi tā malu maksimālo, minimālo un vidējo garumu (A = perimetrs/n). Pieņemsim, ka šim n-stūrim ne visas malas ir vienāda garuma (pretējā gadījumā vajadzīgais būtu pierādīts). Tad m < A < M. Novietojam īsāko un garāko malu blakus vienu otrai. To var izdarīt, nemainot n-stūra ne perimetru, ne laukumu. Malu pārkārtošanas shēma parādīta 31. zīmējumā.



31. zīm.

Ja FC un AB ir attiecīgi visgarākā un visīsākā mala, tad pēc trijstūra FBA "apgāšanas" vajadzīgās malas BC un AB nonāks blakus.

Pēc tam, kad malas ar garumu m un M ir novietotas blakus, aizstājam tās ar šāda garuma malām A un m + M – A. Ņemot vērā iepriekš pierādīto, ir spēkā:

$$L(M, m, c) \leq L(A, M + m - A, c).$$

Tas nozīmē, ka iegūts jauns n-stūris ar to pašu perimetru, bet ar lielāku laukumu. Turklāt jaunajam n-stūrim vismaz viena mala vienāda ar aritmētisko vidējo A. Šādu malu vienādošanas procedūru atkārto tik ilgi, kamēr visas n-stūra malas kļūst vienādas ar A. Mērķa sasniegšanai būs jāveic ne vairāk kā n-1 aizvietošanas operācija:

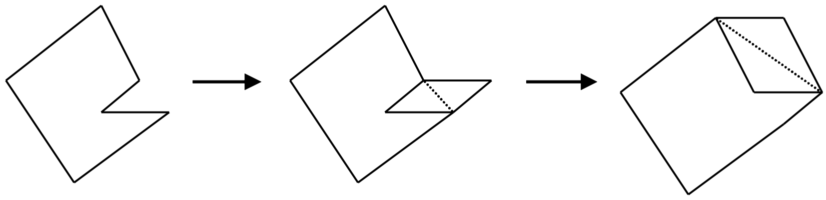
$$m \to A, \quad M \to (M + m - A).$$

Der atzīmēt, ka tieši uz šādu aizvietošanas operāciju balstās viens no visīsākajiem un “visskaistākajiem” nevienādības $G \le A$ pierādījumiem. Sk., piemēram, [Cib2]. Izrādās, ka malu aizvietošanu ar aritmētisko vidējo ir lietojis jau R. Šturms (1841-1919, vācu matemātiķis) savā grāmatā “Maxima und minima in der elmentaren Geometrie, Teubner, 1910.” D. Križanovskis [Kr, 57] piezīmē, ka šis interesantais paņēmiens maksimumu un minimumu pētīšanā agrāk acīm redzot nav ticis lietots, kaut gan R. Šturms par to ir ziņojis jau 1884. gadā (Journal fur Mathematik, 97)

Zēnodora teorēma

No visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim.

Pierādījums. Pietiek aplūkot tikai izliektus n-stūrus. Ja n-stūris nav izliekts, tad, nepalielinot perimetru, no tā varētu iegūt izliektu n-stūri ar lielāku laukumu, piemēram, pēc 32. zīm. parādītā parauga.



32. zīm.

Meklējamo n-stūri, kuram ir vislielākais laukums un uzdots perimetrs, īsāk sauksim par **maksimālo** n-stūri. Saskaņā ar lemmu par vienādmalu daudzstūri maksimālais n-stūris būs vienādmalu n-stūris. Līdz mērķim vēl atlicis tikai “viens” solis – pierādīt, ka arī visiem leņķiem jābūt vienādiem. Vārds “viens” pēdiņās likts apzināti, jo šī soļa veikšanu, tēlaini izsakoties, var salīdzināt ar Gordija mezgla atšķetināšanu. Atkarībā no izvēlētā pierādījuma pēdējais “solis” var sastāvēt, vispārīgi runājot, no bezgalīgi daudziem sīkākiem soļiem. Ja neiedziļinās “sīkumos”, tad šo Gordija mezglu var pārcirst ar vienu vēzienu. Lūk, kā! Ja maksimālajam n-stūrim būtu divi dažādi leņķi, tad varētu uzkonstruēt jaunu n-stūri, kuram ir tāds pats perimetrs, bet laukums lielāks. Iegūta pretruna, jo maksimālais n-stūris jau pēc definīcijas ir tāds, par kuru lielāka (pēc laukuma) vairs nav. Tātad pieņēmums par leņķu dažādību ir aplams.

Daži paņēmieni, kā pierāda maksimālā daudzstūra leņķu vienādību

1. Hērona uzdevuma izmantošana. [Tih, 19]

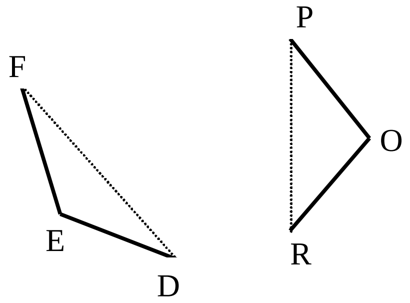
Ja maksimālajam n-stūrim ne visi leņķi ir vienādi tad starp tiem noteikti būs divi tādi, kas atrodas viens otram blakus un nav vienādi. Ja $n > 4$, tad būs arī divi tādi, kuri neatrodas viens otram blakus un nav vienādi. Tiešām, ņemsim viens otram sekojošus leņķus, α, β, γ, δ, ε, kur $\alpha \ne \beta$. Tad, apgalvojums pareizs, ja $\alpha \ne \gamma$ vai $\beta \ne \delta$. Atliek analizēt situāciju α, β, α, β, ε. Tā kā 1. un 4. leņķis ir dažādi, mērķis sasniegts. Tādējādi no aplūkojamā n-stūra var izvēlēties divus dažādus vienādsānu trijstūrus, kuriem nav kopēju iekšēju punktu. Pieņemsim, ka tie ir FED un POR (33. zīm.). Noteiktības dēļ uzskatīsim, ka leņķis E ir lielāks nekā leņķis O. Pārvietosim šos divus trijstūrus, kā parādīts 34. zīm. Tagad atcerēsimies iepriekš risināto Hērona uzdevumu. Kur jāatrodas punktam H uz taisnes TU, lai attālumu summa PH + HF būtu vismazākā? Kā zināms, attālumu summu minimizē tāds punkts H, ka leņķis PHF vienāds ar leņķi FHU. Tādējādi trijstūrus FED un POR var aizstāt attiecīgi ar FHD un PHR, "ietaupot" perimetru. Vēl vairāk, arī laukumu summa ir pieaugusi, t. i.,

$$L_{FED} + L_{POR} < L_{PHR} + L_{FHD}.$$

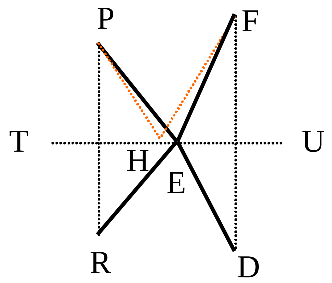
Tiešām, aizstājot trijstūri POR ar PHR, laukumu esam samazinājuši par $2L_{PHE}$, toties, aizstājot trijstūri FED ar FHD, laukumu esam palielinājuši par $2L_{FHE}$. Viegli saprast, ka

$$2L_{PHE} < 2L_{FHE}.$$

Tā kā trijstūriem PEH un FEH ir kopējs pamats, tad lielāks laukums ir tam, kuram lielāks augstums, t. i, : $L_{PHE} < L_{FHE}$.



33. zīm.



34. zīm.

Tātad uzrādītais paņēmiens dod iespēju palielināt apskatāmā n-stūra (ja vien tam ir dažādi leņķi) ar uzdotu perimetru p_0 laukumu, pat samazinot tā perimetru. Skaidrs, ka no n-stūra ar perimetru p_1 var iegūt jaunu n-stūri ar perimetru $p_0 > p_1$, nesamazinot pirmā laukumu.

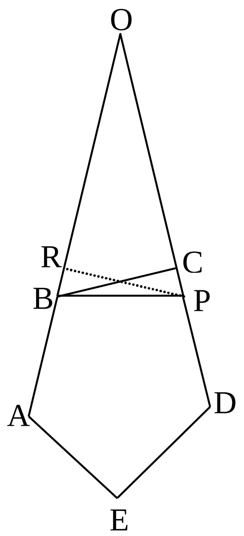
2. Izmanto malu pagarināšanu. [Kr, 61]

Šis paņēmiens, manuprāt, nav tik elegants kā pirmais. Aplūko vienādmalu daudzstūri, kurš nav regulārs. Tam būs divi dažādi leņķi, kuri atrodas blakus. Pieņemsim, ka tie ir leņķi ABC un BCD un ka pirmais no tiem ir lielāks. Malas AB un CD pagarina līdz krustpunktam O. Pastāv trīs iespējas, sk. 35.-37. zīmējumu, kur vienādmalu n-stūra lomā ņemts piecstūris ABCD. Krustpunkts O var atrasties vienā vai otrā malas BC pusē (35.-36. zīm.), vai arī malas AB un CD ir paralēlas (37. zīm). Gadījumā, kad malas AB un CD nav paralēlas, samainām vietām malas OB un OC tā, ka B un C nonāks attiecīgi punktos P un R. Tā iegūstam jaunu daudzstūri ARPDE. Ja malas AB un CD ir paralēlas, tad jauno n-stūri ARPDE konstruējam pēc 37. zīmējumā dotā parauga. (Punktu P iegūst kā punkta B ortogonālu projekciju uz taisni CD un punktu R – kā punkta C ortogonālu projekciju uz taisni AB.)

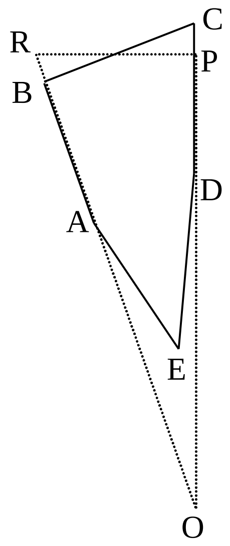
Tā kā pēc pieņēmuma leņķi ABC un BCD ir dažādi, tad taisnes CB un PR nevar sakrist, un tajā pašā laikā ir spēkā

$$BR = CP,\ \ BC = PR$$

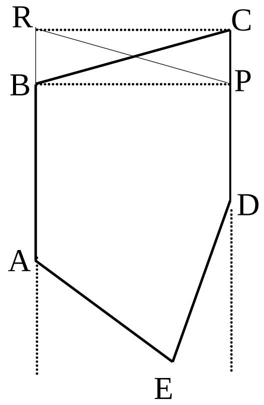
un trijstūru BCP un BPR laukumi ir vienādi. Tātad n-stūrim ARPDE ir tāds pats laukums un perimetrs kā sākotnējam n-stūrim ABCDE. Bet, tagad jaunajam n-stūrim malas AR un RP nav vienādas. Aizstājot trijstūri ARP ar vienādsānu trijstūri, saglabājot to pašu pamatu AP, mēs palielināsim laukumu, nepalielinot perimetru R. Tādējādi neregulārs n-stūris nevar būt maksimālais pat tad, kad tam visas malas vienādas. Abi šie paņēmieni pēc leņķu vienādošanas "izbojā" malu garumus. Ja sākumā n-stūrim visas malas bija vienādas, tad pēc pārveidojuma dažu malu garumi var nebūt vienādi. Nākamajā punktā uzrādīts paņēmiens, kuram šis trūkums nepiemīt.



35. zīm.



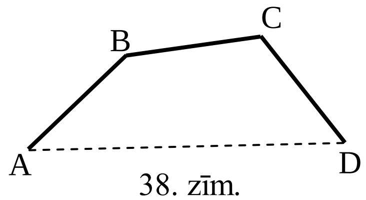
36. zīm.



37. zīm.

3. Izmanto lemmu par vienādsānu trapeci.

Ja vienādmalu n-stūris nav regulārs, tam būs divi dažādi leņķi, kuri atrodas blakus jeb kuriem ir kopēja mala. Pieņemsim, ka tie ir leņķi B un C (38. zīm.). Tad saskaņā ar lemmu par vienādsānu trapeci četrstūrim ABCD ar fiksētu pamatu AD un trīs vienāda garuma malām vislielākais laukums būs tad, kad tas kļūs par vienādsānu trapeci. Vienādsānu trapecei leņķi pie pamatiem ir vienādi, kas arī vajadzīgs.



38. zīm.

Piezīme. Uzrādītajam pierādījumam piemīt defekts. Kāds? Nav pamatota maksimālā n-stūra eksistence. Var precizēt, ka eksistences problēma izvēlētajā pierādījuma shēmā attiecas tikai uz vienādmalu daudzstūriem. Visu trīs iepriekš aprakstīto leņķu vienādošanas paņēmienu lietojums ir šāds: ja vienādmalu maksimālais n-stūris nav regulārs, tad var iegūt jaunu n-stūri ar lielāku laukumu un to pašu perimetru. Šāda tipa defekts – ne tik viegli pamanāma, “smalka kļūda”, grāmatā [RT, 166] raksturota kā ļoti rupja loģiska kļūda, kura esot palikusi nepamanīta divus gadsimtus un kura pirmoreiz esot atklāta tikai 19. gs. otrajā pusē. Kļūdas atklājējs ir slavenais vācu matemātiķis K. Veierštrāss. (Weierstrass, 1815- 1897). Eksistences pamatošana bieži vien ir saistīta ar neelementāru līdzekļu izmantošanu. Ekstrēmu uzdevumu teorijā viens no šādiem pamatlīdzekļiem ir Veierštrāsa teorēma. Vienkāršākā gadījumā tā apgalvo, ka nogrieznī definēta nepārtraukta funkcija sasniedz savas ekstremālās vērtības.

Par eksistences problēmu

Kamēr neiedziļinās “sīkumos”, problēmas bieži vien nerodas, netiek pat apzinātas. Lai nu kur, bet matemātikā eksistences jautājumiem jāpievērš un arī tiek pievērsta īpaša uzmanība. Daudzu citu profesiju pārstāvjiem eksistences jautājumi vispār nesagādā raizes vai pat, un ne bez pamata, šķiet traucējoši (viņu arguments: mēs analizējam, aprakstām, pētām tikai to, kas eksistē). Pārlieku detalizēta katra soļa pamatošana var stipri aizkavēt vai pat padarīt par neiespējamu mērķa sasniegšanu. Ir pazīstams trāpīgs salīdzinājums, ka tīrā matemātika pēta tā, kā vajadzīgs to, ko var, bet lietišķā to, kas vajadzīgs, tā, kā var.

Divu izcilu fiziķu teicieni:
- *Es kategoriski uzskatu, ka no matemātikas, ko māca fiziķiem, jāizmet visādas eksistences teorēmas, pārlieku stingri pierādījumi utt.* (Nobeļa prēmijas laureāts (1962) fizikā Ļevs Landau)
- *Normālam cilvēkam nav nekā atbaidošāka kā klīniska definīciju, aksiomu un teorēmu secība, kuru radījuši tīro matemātiķu darbi. Loģiskā stingrība, kas sasniegta ar tamlīdzīgiem pētījumiem, ir ārkārtīgi vērtīga, taču tā nez vai var parādīties, pirms mēs esam uztvēruši pašu ideju* (D. Zaimens).

Senie grieķi rēķināja garumus, laukumus, tilpumus, dažkārt visai sarežģītām ģeometriskām konstrukcijām, bet jautājums par tādu lielumu pastāvēšanu viņiem neradās. Zēnodoram, vēlāk Šteineram un daudziem citiem maksimālā n-stūra eksistence bija pati par sevi saprotama.

Dirihlē esot nesekmīgi centies pārliecināt savādnieku Šteineru par viņa pierādījumu nepietiekamību. Tomēr apgalvot, ka Šteiners eksistences jautājumu ir ignorējis pilnībā, būtu nepatiesi. Vienā vietā [Steiner, Gesammelte Werke, Berlin, 1882, 2. sēj. 197. lpp.] viņš ir piezīmējis "…tiešām, pierādījums veicams ļoti īsi, ja pieņem, ka vislielākā figūra eksistē" [Bla, 13]

Pārdomu vērta ir it kā paradoksālā situācija, ka "pliks" pieņēmums par maksimālā n-stūra eksistenci ir tik auglīgs. Šāda situācija, kad pieņēmums par kāda ekstremālā elementa eksistenci dod iespēju sasniegt mērķi ātrāk, vienkāršāk nekā ar citiem paņēmieniem, novērojama ne tikai ekstrēmu uzdevumos. Matemātikā tas nav nekas neparasts. Eksistences pieņēmumu var izmantot (un to arī izmanto), lai iepriekš prognozētu, kāds varētu būt meklējamais elements, objekts. Pieņēmumi, kas balstās uz ticamību vai aklu pārliecību, ne vienmēr ir pareizi.

Turpmāk piedāvāti vairāki piemēri, kuros maksimālais vai minimālais elements neeksistē.

Perrona piemērs

Lai ilustrētu defektu pierādījumos, kuros eksistences pieņēmumu uzskata par pašsaprotamu, Perrons (1880-1975, vācu matemātiķis) piedāvāja ļoti vienkāršu, taču pamācošu piemēru.

Apzīmēsim ar N vislielāko naturālo skaitli. (Analoģijai – apzīmēsim ar P maksimālo n-stūri). Pierādīsim, ka $N = 1$. Tiešām, ja pieņem, ka $N > 1$, tad

$$M = N \cdot N > N.$$

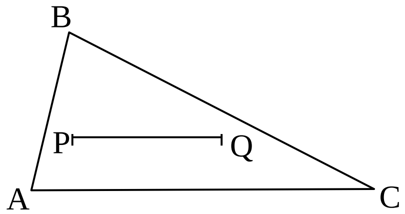
Iegūta pretruna, proti, M ir lielāks par vislielāko skaitli N. Tātad pieņēmums, ka $N > 1$ nav pareizs. No šejienes izriet, ka $N = 1$.

Grāmatā [Han, 48] šis piemērs nosaukts par Perrona paradoksu.

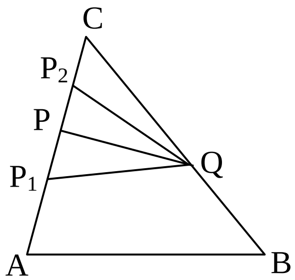
Maksimālais attālums starp punktiem

Piemērs no [RT, 164], kuru autori izvēlējušies kā "galēji" vienkāršu, lai īpaši ērti varētu izgaismot jautājuma principiālo pusi. Autori ir devuši ļoti detalizētu analīzi.

"Dots trijstūris (iztēlosimies, ka tas izgriezts no kartona.) *Kādi divi trijstūra punkti P un Q* (*ieskaitot malas*) *atrodas vistālāk viens no otra*? (39. zīm.) Uzminēt atbildi šeit ir pavisam vienkārši: tie būs visgarākās trijstūra malas galapunkti. Bet, kā to pierādīt? Visiem šāda veida pierādījumiem ir viena kopēja recepte, kas ātri dod rezultātu. Spriež tā: ja viens no punktiem P un Q, piemēram, P atrodas trijstūra iekšienē, tad attālums starp tiem nebūs maksimālais, jo uz nogriežņa PQ turpinājuma ir vēl punkts P_1, kas atrodas no Q vēl tālāk un tomēr vēl aizvien trijstūra iekšienē. Ja abi punkti atrodas uz trijstūra malām, bet tā, ka viens no tiem, piemēram, P, nesakrīt ar trijstūra virsotni, tad gluži tāpat uz tās pašas malas var atrast punktu P_1, kurš no Q atrodas tālāk kā P. Par to viegli pārliecināties ar elementāru spriedumu palīdzību, gan gadījumā, kad nogrieznis PQ perpendikulārs tai trijstūra malai, uz kuras atrodas P (40. zīm.), gan arī gadījumā, kad tas nav perpendikulārs (41. zīm.) Tādējādi maksimums iespējams tikai tajā gadījumā, kad abi punkti ir trijstūra virsotnes. Tāpēc nogrieznim PQ jābūt trijstūra malai turklāt, dabiski, visgarākajai.

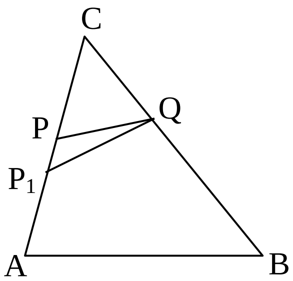


39. zīm.

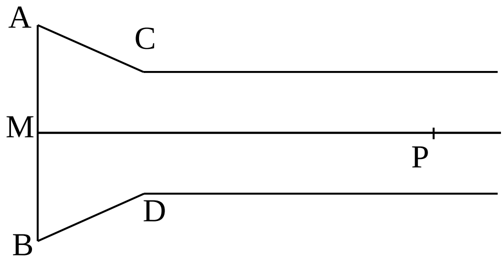


40. zīm.

Kļūda, kuru satur tikko izklāstītais risinājums, kļūs acīmredzama, ja mēs mēģināsim lietot mūsu metodi šādai ārkārtīgi vienkāršai figūrai (42. zīm.). Skaidrs, ka šai figūrai, kas turpinās līdz bezgalībai, nevar uzrādīt tādu punktu pāri, kuri būtu viens no otra maksimālā attālumā; jo tālāk, piemēram, punkts P pavirzās pa labi, jo lielāks būs attālums MP. Neskatoties uz to, spriešanas metode, ko mēs tikko esam aprakstījuši, ir lietojama arī šai figūrai.



41. zīm.



42. zīm.

Lai kur arī atrastos punkti P un Q, figūras iekšienē vai uz tās perimetra, pat tad, kad P un Q atrodas kādās divās no četrām figūras virsotnēm, var atrast tādu punktu P_1 punkta P tuvumā, kurš atrodas no Q vēl tālāk, izņemot vienu vienīgu gadījumu, kad PQ ir nogrieznis AB. Mēs lietojām šeit to pašu principu; visiem punktu pāriem, izņemot A, B, atrodam tādu pāri, kuram attālums kļūst lielāks; neviens pāris, izņemot A, B, nevar dot maksimumu. No šejienes, stingrā atbilstībā ar iepriekšējo pierādījumu, mums vajadzētu secināt, ka šis maksimums ir AB. Acīmredzami, ka pēc formas šis izvedums ir pilnīgi analoģisks iepriekšējam. Bet šeit tas noved pie nepareiza rezultāta. No kurienes gan mums zināms, ka tas dod drošu rezultātu iepriekšējos gadījumos?”

Maksimālais pirmskaitlis
Ne tik "caurspīdīgs" ir jautājums par maksimālā pirmskaitļa eksistenci. Kāpēc gan, tas nevarētu eksistēt? Lūk, cik asprātīgi sprieda Eiklīds! Pieņemsim, ka p_1, p_2, …, p_k ir visi iespējamie pirmskaitļi. Aplūkosim visu šo pirmskaitļu reizinājumu un pieskaitīsim tam 1. Tad

$$p = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$$

ir jauns pirmskaitlis. Tas tāpēc, ka p nedalās ne ar vienu no pirmskaitļiem un bez tam nesakrīt ne ar vienu no tiem. Tātad pieņēmums, ka pirmskaitļu skaits ir galīgs, dod pretrunu. Tas nozīmē, ka maksimālā pirmskaitļa nemaz nav.

Iepriekšējie piemēri var radīt iespaidu vai pat pārliecību, ka kopas maksimālais elements neeksistē tāpēc, ka kopas elementi nav ierobežoti no augšas. Vārds J. Šteineram: "*Ja figūrām ar dotu perimetru var būt dažādi laukumi, un ja tiem tomēr nav iespēju bezgalīgi pieaugt, tad starp figūrām jāeksistē vai nu vienai maksimālajai, vai vairākām dažādu formu maksimālajām figūrām, t. i., figūrām, kuru formas ir dažādas un laukumi vienādi un kuras pārspēj visu citu figūru laukumus*". [KR, 18]. Salīdzināšanai līdzīgs apgalvojums: ja izoperimetrisku daudzstūru laukumi ir ierobežoti no apakšas, tad jāeksistē minimālajam daudzstūrim. Apgalvojums ir nepatiess, jo gandrīz vai acīmredzami, ka minimālais daudzstūris neeksistē. Savādi, ka J. Šteiners šādam salīdzinājumam nav pievērsis uzmanību.

Ar to vien, ka kopa ir ierobežota no augšas, nepietiek, lai tajā eksistētu maksimālais elements.

Ierobežota kopa, kurai neeksistē ne maksimālais, ne minimālais elements
Kopai, kas sastāv no visiem racionāliem skaitļiem q, kuri atrodas intervālā (0, 1), nav ne maksimālā, ne minimālā elementa.

Bezgalīga summa
Ar ko vienāda summa

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots ?$$

Anniņa. Skaidrs, ka S = 0.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0.$$

Jānītis. Rindas elementus, sākot no otrā, ievietoju iekavās.

$$S = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots = 1.$$

Jautrīte. Pārrakstu S izteiksmi šādi

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots).$$

Lielums, kas atrodas iekavās nav nekas cits kā S, ko nosaku no sakarības $S = 1 - S$. Tātad $S = \dfrac{1}{2}$.

Kam taisnība?

Kādreiz šādi pārveidojumi likās paši par sevi saprotami pat rūdītiem matemātiķiem. Piemēram, Pizas universitātes profesors Gido Grandi (1671-1742) esot uzskatījis, ka veids, kā no $S = 0$ var iegūt $S = 1$, ir pamatojums tam, kā Dievs no nekā radīja kaut ko. Savukārt vienādību $S = \frac{1}{2}$ esot atzinis par pareizu plaša profila izcilais vācu zinātnieks Leibnics (1646-1716). Viņa pamatojums balstījās uz ģeometrisko progresiju

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{1}{1+x}.$$

Ņemot $x = 1$, iegūst $S = \frac{1}{2}$.

Trijstūris ar maksimālo laukumu
Šis ļoti pamācošais piemērs (sofisms) ir izklāstīts grāmatas 1. daļā.

Trijstūris ar minimālo perimetru
Dotajā trijstūri ievilkt trijstūri ar minimālo perimetru. Vai uzdevumam eksistē atrisinājums, ja trijstūris nav šaurleņķu?

Sofisms

Atrast izteiksmes $ab\sin\alpha + cd\sin\beta$ vislielāko vērtību, ja a, b, c un d pozitīvi skaitļi, kuru summa $a + b + c + d = S$.

Anniņa. Dotā izteiksme man ir pazīstama – tā nav nekas cits kā divkāršots četrstūra laukums.

$$2L = ab\sin\alpha + cd\sin\beta \leq ab + cd \leq \frac{S}{4}\cdot\frac{S}{4} + \frac{S}{4}\cdot\frac{S}{4} = \frac{S^2}{8}.$$

Šeit es izmantoju faktu, ka sinuss nepārsniedz 1, kas, starp citu, nozīmē, ka atbilstošie leņķi ir taisni, kā arī zināšanas par to, ka no visiem četrstūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir kvadrātam. Ja perimetrs ir S, tad kvadrāta malas garums acīmredzami ir $\frac{S}{4}$.

Jānītis. Aplūkošu gadījumu, kad

$$S = 4, \; a = b = 0, \; c = d = 2.$$

Tad $ab + cd = 4$, kas ir vairāk nekā $\frac{S^2}{8} = \frac{16}{8} = 2$. Tātad Anniņai kaut kur ir kļūda.

Anniņa. Piemērs nav korekts, jo dots, ka a, b, c un d pozitīvi skaitļi.

Jānītis. Labi, lai tā būtu. Manu piemēru var uzlabot. Ņemšu

$$S = 4, \; a = b = \frac{1}{2}, \; c = d = \frac{3}{2}.$$

Tad

$$ab + cd = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} > 2.$$

Redzams, ka arī visiem pozitīviem a, b, c un d var iegūt lielāku 2L vērtību nekā tas bija izdevies Anniņai.

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Riņķī ievilktu un ap riņķi apvilktu daudzstūru ekstremālās īpašības

Ar Zēnodora uzdevumu cieši saistīti uzdevumi, kuros jāmeklē optimālais daudzstūris, kas ievilkts dotajā riņķī vai apvilkts ap doto riņķi. Ekstrēmu uzdevumos riņķim ir īpaša nozīme. Iesāksim ar sofismu.

Sofisms

Kādam trijstūrim, kas ievilkts riņķī ar rādiusu R, ir vislielākais laukums?

Anniņa. Izsaku trijstūra ABC laukumu kā vienādsānu trijstūru AOB, BOC un COA laukumu summu (43. zīm.). Šo trijstūru leņķus ar virsotni riņķa centrā O apzīmēšu attiecīgi ar α, β un γ. Katram no tiem laukumu aprēķināšu pēc formulas: $L=\frac{1}{2}xy\sin\varphi$. Tā kā visas sānu malas ir vienādas ar apvilktā riņķa rādiusu, tad

$$L=\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

Pēc kosinusu teorēmas iegūstu sakarības starp malām un leņķiem.

$$|AC|^2=a^2=2R^2(1-\cos\alpha)$$
$$|AB|^2=b^2=2R^2(1-\cos\beta)$$
$$|BC|^2=c^2=2R^2(1-\cos\gamma).$$

Izsaku leņķus

$$\cos\alpha=1-\frac{a^2}{2R^2},\quad \cos\beta=1-\frac{b^2}{2R^2},\quad \cos\gamma=1-\frac{c^2}{2R^2}.$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(1-\frac{a^2}{2R^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{R^2}-\frac{a^4}{4R^4}}=\frac{a}{2R^2}\sqrt{4R^2-a^2}.$$

Pēc analoģijas

$$\sin\beta=\frac{b}{2R^2}\sqrt{4R^2-b^2},\quad \sin\gamma=\frac{c}{2R^2}\sqrt{4R^2-c^2}.$$

Tagad pēc sinusu aizvietošanas iegūstu, ka

$$L=\frac{1}{4}\left(a\sqrt{4R^2-a^2}+b\sqrt{4R^2-b^2}+c\sqrt{4R^2-c^2}\right)$$

Novērtēšu laukuma izteiksmi, lietojot nevienādību $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$:

$$L\le\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+4R^2-a^2}{2}+\frac{b^2+4R^2-b^2}{2}+\frac{c^2+4R^2-c^2}{2}\right)=\frac{3R^2}{2}.$$

Nevienādība pārvēršas par vienādību, ja $a=b=c$. Tātad vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim.

Jānītis. Tavs risinājums ir pārāk garš. Aprēķināšu laukumus trijstūriem AOB, BOC un COA pēc vienkāršākas formulas: pamats reiz augstums dalīts ar divi. Augstumus šiem trijstūriem var aprēķināt pēc Pitagora teorēmas.

$$h_a = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2} \, .$$

Analoģiski

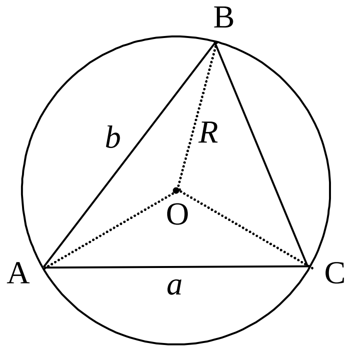
$$h_b = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - b^2} \, , \quad h_c = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c^2} \, .$$

Tātad

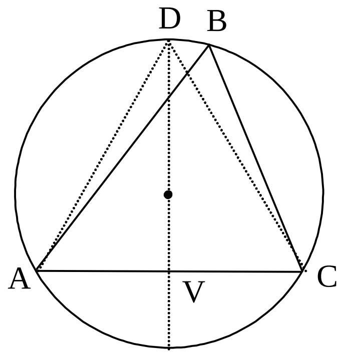
$$L = \frac{1}{2}(h_a + h_b + h_c) \, ,$$

kas izvērstā veidā ir tā pati izteiksme, ko ieguva Anniņa.

Maijiņa. Pierādīšu, ka maksimālajam trijstūrim visi leņķi ir vienādi. Pieņemsim, ka tā nav. Tad var uzskatīt, ka atšķirīgie leņķi atrodas pie pamata AC, sk. 44. zīm. Aplūkoju patvaļīgu dotajā riņķī ievilktu trijstūri ABC. Fiksēju pamatu AC un meklēju punkta B stāvokli uz riņķa līnijas, lai ABC laukums būtu maksimāls. Laukums ir puse no pamata un augstuma reizinājuma. Tā kā pamats fiksēts, tad augstums būs maksimāls tad, ja punkts B būs AC vidusperpendikula galapunkts. Pieņēmums, ka maksimālajam trijstūrim ir dažādi leņķi dod pretrunu. Tātad maksimālais trijstūris ir vienādmalu.



43. zīm.



44. zīm.

Pēterītis. Maijiņas pierādījums ir īss un skaists. Tomēr tas man ne visai patīk. Iedomāsimies trijstūri ar 10, 40 un 130 grādu lieliem leņķiem. Tad pēc pirmās leņķu vienādošanas Maijiņa var iegūt vienādsānu trijstūri ar 70 grādu leņķiem pie pamata. Pēc otrās vienādošanas iegūtu vienādsānu trijstūri ar leņķiem 55^0, 55^0 un 70^0. Tā viņa pamazām tuvotos vienādmalu trijstūrim, nekad to precīzi nesasniedzot.

Es piedāvāšu vēl īsāku pierādījumu. Tā kā trijstūra malu garumi ir proporcionāli loku garumiem, kuri balstās uz šīm malām, un loku garumu summa ir $2\pi R$, t. i., tā nav atkarīga no malu garumiem, tad mums faktiski ir jārisina izoperimetriskais uzdevums. Labi zināms, ka no visiem trijstūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim.

Atrodiet kļūdas vai nepilnības iepriekš izklāstītajos risinājumos.

Kārlītis. Regulāra trijstūra ar malu a laukums ir $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ja tas ir ievilkts riņķī ar rādiusu R, tad $a^2 = 3R^2$. Tātad $L(R) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Salīdzinu šo lielumu ar Anniņas iegūto novērtējumu.

$$L(R) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} < \frac{3R^2}{2}$$

$$\sqrt{3} < 2\,.$$

Pārsteidzoši, ka Anniņai tomēr ir iegūts lielāks laukums.

Jānītis. Tas nav nekas pārsteidzošs, jo Anniņas novērtējums nav precīzs.

Anniņa. Kā nav? Pats vari pārliecināties, ka mans novērtējums

$$L \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2 + 4R^2 - a^2}{2} + \frac{b^2 + 4R^2 - b^2}{2} + \frac{c^2 + 4R^2 - c^2}{2}\right) = \frac{3R^2}{2}$$

ir precīzs. Vienādību iegūstam, ņemot $a = b = c$.

Jānītis. Man pagaidām nav ko iebilst.

Kārlītis. Bet man ir! Galu galā jāuzrāda konkrētās a, b un c vērtības, kurām nevienādība pārvēršas par vienādību. Anniņa "pa ceļam" lietoja vēl vienu nevienādību

$$xy \le \frac{x^2 + y^2}{2},$$

nepārbaudot, vai tā var kļūt par vienādību.

Anniņa. Pārbaudīsim! Šī nevienādība kļūst par vienādību tad, kad $x = y$. Nevienādība tika lietota, lai novērtētu trīs reizinājumus

$$a\sqrt{4R^2 - a^2},\ b\sqrt{4R^2 - b^2},\ c\sqrt{4R^2 - c^2}$$

Zinot, ka $a = b = c$, pietiek pārbaudīt tikai nosacījumu

$$a = \sqrt{4R^2 - a^2}\,.$$

Nosaku a:

$$a^2 = 4R^2 - a^2 \Rightarrow 2a^2 = 4R^2 \Rightarrow a^2 = 2R^2 \Rightarrow a = R\sqrt{2}\,.$$

Jānītis. Pārbaudīsim, vai šāds a ir pieļaujams. Riņķī ievilkta regulāra trijstūra malas garums ir vienāds ar $R\sqrt{3}$, kas ir lielāks nekā Anniņas piedāvātais malas garums $a = R\sqrt{2}$. Kaut kāda mistika, ka ar īsākām malām var iegūt lielāku laukumu!

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Teorēmas par riņķī ievilktiem daudzstūriem

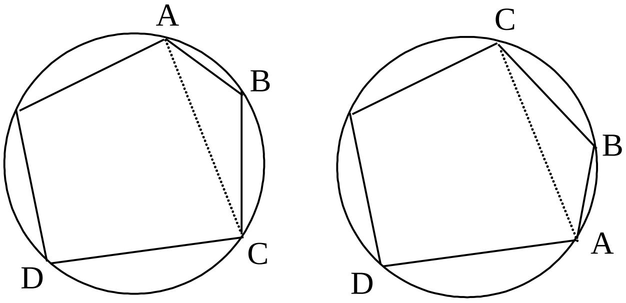
T1. *No visiem n-stūriem, kas ievilkti riņķī, vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim.*

T2. *No visiem n-stūriem, kas ievilkti riņķī, vislielākais perimetrs ir regulāram n-stūrim.*

Piezīme. Pirmās teorēmas apgalvojumu var raksturot kā pašu par sevi saprotamu, jo no visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim un to var ievilkt riņķī. Taču otrais apgalvojums pirmajā brīdī var samulsināt, jo no visiem n-stūriem ar uzdotu laukumu regulāram n-stūrim ir nevis vislielākais, bet, gluži otrādi, vismazākais perimetrs.

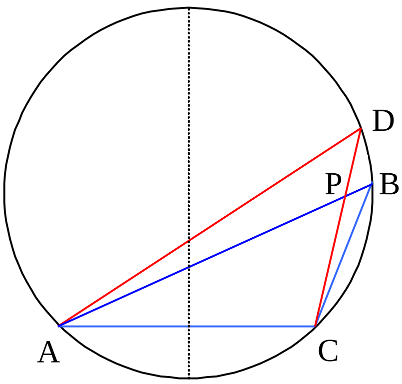
Pierādījums. Abas teorēmas var pierādīt ar vienu un to pašu metodi.

Izmantosim jau iepriekš lietoto paņēmienu par malu vienādošanu. Aplūkosim patvaļīgu n-stūri. Ar *M* un *m* apzīmēsim attiecīgi tā malu maksimālo un minimālo garumu, bet ar *h* dotajā riņķī ievilkta regulāra n-stūra malas garumu (*h* ir tādas hordas garums, kura savelk riņķa līnijas loka n-to daļu). Pieņemsim, ka šim n-stūrim ne visas malas ir vienāda garuma (pretējā gadījumā vajadzīgais būtu pierādīts). Tad $m < h < M$. Pārkārtojam n-stūra malas tā, lai īsākā un garākā mala būtu blakus vienu otrai. To var izdarīt, nemainot ne n-stūra perimetru, ne laukumu, kā arī neizejot ārpus dotā riņķa. Malu pārkārtošanas shēma parādīta 45. zīmējumā. Ja DC un AB ir attiecīgi visgarākā un visīsākā mala, tad pēc trijstūra ABC “apgāšanas” vajadzīgās malas AB un DC nonāks blakus (45. zīm.).



45. zīm.

“Lemmas par vienādmalu n-stūri” pierādījumā malas ar garumu *m* un *M* tika aizstātas ar malām, kuru garumi ir *A* un $m + M - A$, t. i., lai saglabātos malu summa. Tagad, kad n-stūris ir ievilkts riņķī, šis paņēmiens neder, jo mums jāraugās, lai pēc malu aizstāšanas to galapunkti atkal atrastos uz dotās riņķa līnijas. Uzskatīsim, ka pēc malu pārkārtošanas n-stūra garākā mala ir AC, bet īsākā – CB (46. zīm.). Trijstūri ABC aizstāsim ar trijstūri ADC, saglabājot pamatu AC. Riņķa līnijas punkts D ir izvēlēts tā, ka DC ir šajā riņķī ievilkta regulāra n-stūra mala. Saskaņā ar apzīmēto $m = |CB| < |CD| = h < M$. Jāpierāda, ka trijstūris ADC *pārspēj* trijstūri ABC gan pēc laukuma, gan pēc perimetra. Tas, ka $L_{ADC} > L_{ABC}$, ir gandrīz vai acīmredzams. Abiem trijstūriem ir kopējs pamats, bet pirmajam ir lielāks augstums.



46. zīm.

Citu pamatojumu nevienādībai $L_{ADC} > L_{ABC}$ var gūt no sprieduma par perimetriem. Lai pierādītu, ka arī starp perimetriem pastāv nevienādība $Per_{ADC} > Per_{ABC}$, izmantosim trijstūru ADP un CBP līdzību. Šiem trijstūriem visi leņķi ir vienādi, jo leņķi ADP un ABC ir vienādi kā ievilkti leņķi, bet leņķi APD un CPB – kā krustleņķi.

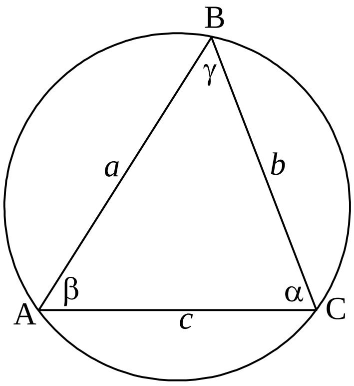
Līdzīgiem trijstūriem malas ir proporcionālas, t. i., AD = k·BC, DP = k·PB, PA = k·PC.

Tā kā AD > BC, tad k > 1. Salīdzināsim summu AD + DC ar AB + BC. Pēc vienkāršiem un līdzvērtīgiem pārveidojumiem secinām, ka pirmā summa ir lielāka

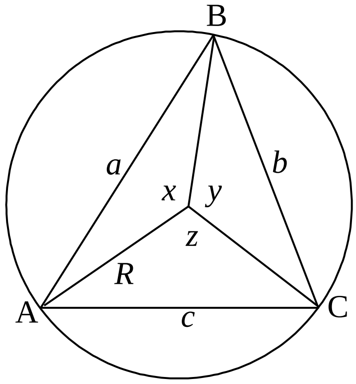
AD + DC > AB + BC
AD + DP + PC > AP + BP + BC
k·BC + k·PB + PC > k·PC + BP + BC
(k – 1)BC + (k – 1)PB > (k – 1)PC
BC + PB > PC.

Piezīme. Pierādījumus var atrast, piemēram, [JB]. Tur trijstūru perimetru salīdzināšana veikta nedaudz garāk ar citu paņēmienu, izmantojot zīmējuma papildināšanu.

No visiem trijstūriem, kas ievilkti riņķī (47. zīm.) vislielākā malu summa ir regulāram trijstūrim. Vai šis rezultāts saglabāsies, ja malu summu aizvietosim ar malu kvadrātu summu?



47. zīm.



48. zīm.

Riņķī ievilkts trijstūris. Kādā gadījumā malu kvadrātu summa ir vislielākā? [VR, 43].

Citētajā darbā dots risinājums, izmantojot sinusu teorēmu. Uzrādīsim racionālāku risinājumu, izmantojot kosinusu teorēmu:

$$a^2 = 2R^2(1-\cos x),\ b^2 = 2R^2(1-\cos y),\ c^2 = 2R^2(1-\cos z),$$

kur – x, y un z leņķi, ko veido apvilktā riņķa rādiusi, sk. 48. zīmējumu. No šejienes

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R^2(3-\cos x-\cos y-\cos z).$$

Pierādīsim, ka $\cos x+\cos y+\cos z \geq -\frac{3}{2}$. Apzīmēsim: $x = u + v$, $y = u - v$. Tad

$$\cos x+\cos y = 2\cos u\cos v,\ \cos z = \cos(x+y) = \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$$

$$2\cos u\cos v + 2\cos^2 u - 1 \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\cos u\cos v + 4\cos^2 u + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\cos u + \cos v)^2 + 1 - \cos^2 v \geq 0.$$

Piezīme. Saskaņā ar pierādījumu nevienādība

$$\cos x+\cos y+\cos z \geq -\frac{3}{2}$$

ir spēkā ne tikai trijstūra leņķiem, bet patvaļīgiem leņķiem, kuru summa ir 180 grādu.

Teorēmas par riņķim apvilktiem daudzstūriem

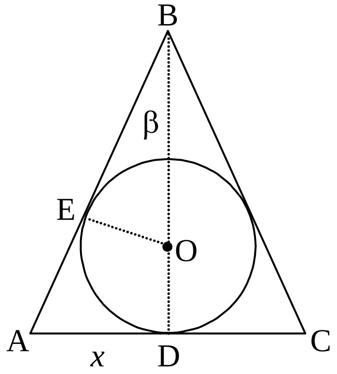
T3. *No visiem n-stūriem, kas apvilkti ap riņķi, vismazākais laukums ir regulāram n-stūrim.*

T4. *No visiem n-stūriem, kas apvilkti ap riņķi, vismazākais perimetrs ir regulāram n-stūrim.*

Ievērosim, ka šīs teorēmas ir līdzvērtīgas. Tas izriet no formulas $L = pr$, saskaņā ar kuru, minimizējot laukumu, vienlaicīgi tiek minimizēts perimetrs, un otrādi, minimizējot perimetru, vienlaicīgi tiek minimizēts laukums.

Vispirms aplūkosim apvilktus trijstūrus.

<u>1. uzdevums</u>**.** No visiem vienādsānu trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, atrast to, kuram ir vismazākais laukums.



49. zīm.

Apzīmēsim dotā riņķa rādiusu ar r, apvilktā vienādsānu trijstūra pamata AC garumu ar $2x$, trijstūra ABC virsotnes leņķa lielumu ar 2β un augstumu pret AC ar h (49. zīm.) Tad

$$\mathrm{L} = xh.$$

Pēc Pitagora teorēmas

$$|\mathrm{EB}|^2 = |\mathrm{OB}|^2 - |\mathrm{OE}|^2 = (h-r)^2 - r^2 = h^2 - 2rh.$$

Sakarību starp x un h iegūsim no trijstūru ADB un OEB līdzības

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EB}} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{r}{\mathrm{EB}} \Rightarrow x = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}.$$

Ievietojot atrasto x laukuma izteiksmē, dabūjam

$$\mathrm{L} = \frac{rh^2}{\sqrt{h^2 - 2hr}}.$$

Pierādīsim, ka $\mathrm{L}^2 \geq 27r^4$ jeb

$$h^4 \geq 27r^2(h^2 - 2hr) \Leftrightarrow h^3 - 27r^2h + 54r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(h^2 - 6hr + 9r^2)(h + 6r) \geq 0 \Leftrightarrow (h - 3r)^2(h + 6r) \geq 0.$$

No šejienes secinām, ka laukums būs minimāls tikai tad, ja $h = 3r$. Tas nozīmē, ka $\mathrm{OB} = 2r$, $\beta = 30^0$ un divreiz lielākais leņķis ABC vienāds ar 60^0. Ja vienādsānu trijstūrim viens leņķis ir 60^0, tad tas ir regulārs trijstūris. Tātad no visiem vienādsānu trijstūriem, kas apvilkti ap riņķi, regulāram trijstūrim ir vismazākais laukums.

2. uzdevums. No visiem trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, atrast to, kuram ir vismazākais laukums.

Vispirms iepazīsimies ar šāda uzdevuma risinājumu:
No visiem trijstūriem ar dotu leņķi α, kuri apvilkti ap doto riņķi, atrast trijstūri ar vismazāko perimetru un tādējādi ar vismazāko laukumu [Zet, 93]
"Izsakot trijstūra pusperimetru ar ievilkta riņķa rādiusu r, dabūjam:

$$p = r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} =$$
$$= r\left[\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\left(90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$
$$= r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\left(90^0 - \frac{x+\beta}{2}\right) = r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Perimetram vismazākā vērtība ir vienlaicīgi ar $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, t. i., ja $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.
[Te autors atsaucas uz iepriekš atrisinātu šādu uzdevumu: *Kādam x funkcijai*

$$y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha+x}{2}$$

ir vismazākā vērtība, ja α – šaurs leņķis (nemainīgs)?]
Ir spēkā:

$$y = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha+x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\alpha+x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right) + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)}}{1 + \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)}}$$

Pieaugot pozitīvam lielumam $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)$, daļas skaitītājs aug, saucējs dilst, tāpēc y, pieaugot pozitīvam $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)$, aug. Tādēļ y vērtība ir vislielākā vienlaicīgi ar vislielāko $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)$ vērtību, t. i., kad $\frac{\alpha}{2}+x = 90^0$; no šejienes $x = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Vislielākā y vērtība ir

$$\mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{ctg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{4}\right) = \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Un tā meklējamais trijstūris ir vienādsānu ar doto virsotnes leņķi α."

Ģeometrisks risinājums.
Aplūkosim vienādsānu trijstūri ABC, kurš apvilkts ap doto riņķi un kuram viens leņķis fiksēts (50. zīm. tas ir leņķis B). Pierādīsim, ka jebkuram citam trijstūrim EBD, kurš apvilkts ap šo riņķi, laukums ir lielāks. Uzskatīsim, ka BE īsāka par BD; ED

krustpunktus ar AC un bisektrisi apzīmēsim attiecīgi ar K un M. Tad pēc bisektrises īpašības

$$\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} \Rightarrow \mathrm{EM} < \mathrm{MD}.$$

Salīdzināsim trijstūra KCD un KAE laukumu. Šiem trijstūriem leņķis CKD ir vienāds ar leņķi AKE. Tā kā EK < KD un AK < KC, tad $L_{KAE} < L_{KCD}$.
Tas nozīmē, ka $L_{ABC} < L_{EBD}$.

Tātad no visiem trijstūriem ar fiksētu leņķi, kuri apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir vienādsānu trijstūrim. Atzīmēsim, ka vienlaicīgi ar laukumu tiek minimizēts arī trijstūra perimetrs P, kas ir tiešas sekas no laukuma formulas L = pr.

No šejienes un iepriekšējā uzdevuma izriet

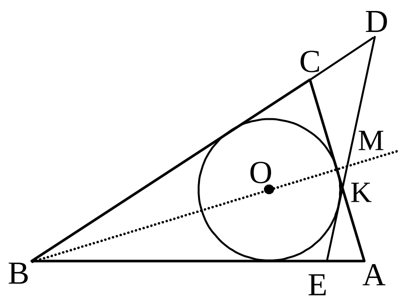
Teorēma. *No visiem trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums un vismazākais perimetrs ir regulāram trijstūrim.*

Kur kļūda?

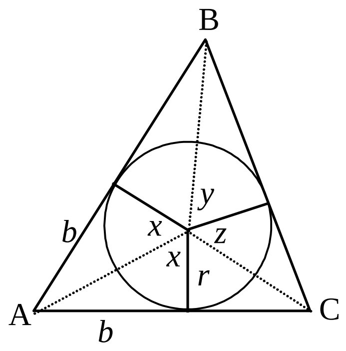
Zināms, ka x, y un z ir šaurleņķa trijstūra leņķi. Noteikt minimumu izteiksmei

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z.$$

Anniņa. Apgalvoju, ka dotās izteiksmes minimuma meklēšana ir līdzvērtīga jau aplūkotajam uzdevumam par riņķim ar rādiusu r apvilkta minimālā trijstūra meklēšanu, sk. 51. zīm.



50. zīm.



51. zīm.

Pamatošu savu apgalvojumu. Trijstūra ABC laukumu var izteikt kā sešu taisnleņķa trijstūru laukumu summu. Divu vienādu taisnleņķa trijstūru ar katetēm b un r laukums ir br. Tā kā $b = r\mathrm{tg}x$, tad $br = r^2\mathrm{tg}x$. Saskaitot trīs šāda tipa lielumus, iegūstu, ka trijstūra ABC laukums L izsakāms kā

$$\mathrm{L} = r^2(\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z).$$

Vēl jāpārbauda dotais nosacījums par leņķu summu. Tas ir spēkā, jo summa $2x + 2y + 2z$ vienāda ar 360 grādiem. Zināms, ka no visiem trijstūriem, kas apvilkti ap uzdotu riņķi, minimālais laukums ir regulāram trijstūrim. Tam ir spēkā:

$$2x = 2y = 2z = 120^0 \Rightarrow x = y = z = 60^0 \Rightarrow$$
$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z = 3\sqrt{3}.$$

Jānītis. Jebkuram trijstūrim leņķu summa ir 180 grādu. Izteikšu z.

$$z = 180^0 - (x + y) \Rightarrow \text{tg } z = -\text{tg}(x + y).$$

Jārisina minimizācijas uzdevums:

$$T := \text{tg}x + \text{tg}y - \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y} = (\text{tg}x + \text{tg}y)\left(1 - \frac{1}{1 - \text{tg}x\text{tg}y}\right) \to \min$$

$$T = (\text{tg}x + \text{tg}y)\frac{-\text{tg}x\text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y}.$$

Ja $x = y$, tad $T = \dfrac{-2\text{tg}^3 x}{1 - \text{tg}^2 x}$. Pārbaudei ņemšu $x = 60^0$:

$$\frac{-2\text{tg}^3 60^0}{1 - \text{tg}^2 60^0} = \frac{-2(\sqrt{3})^3}{1 - 3} = 3\sqrt{3}.$$

Šajā gadījumā iegūta tāda pati vērtība kā Anniņai. Tagad ņemšu $x = 30^0$. Tad

$$\frac{-2\text{tg}^3 30^0}{1 - \text{tg}^2 30^0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \ \ ???$$

Tas nozīmē, ka Anniņa nav ieguvusi minimumu. Viņai jāmeklē kļūda.

Anniņa. Tev pašam jāmeklē kļūda, jo negatīvas vērtības vispār nevar rasties. Katrs no saskaitāmajiem tg$x$, tg$y$ un tgz taču ir pozitīvs, nu vismaz nenegatīvs.

Maijiņa. Izmantošu formulu $\text{tg}x + \text{tg}y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$. Tad

$$\text{tg}x + \text{tg}y - \text{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} - \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} =$$

$$= \sin(x+y)\left(\frac{1}{\cos x \cos y} - \frac{1}{\cos(x+y)}\right) =$$

$$= \sin(x+y)\frac{\cos(x+y) - \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos(x+y)} = \sin(x+y)\frac{-\sin x \sin y}{\cos x \cos y \cos(x+y)} =$$

$$= -\text{tg}(x+y)\text{tg}x \ \text{tg}y \to \min.$$

Saskaņā ar Anniņu vajadzētu būt nevienādībai

$$-\text{tg}(x+y)\text{tg}x \ \text{tg}y \geq 3\sqrt{3},$$

par kuras pareizību es stipri šaubos. Jo, ņemot $x = 0$, iegūtu absurdu: $0 \geq 3\sqrt{3}$.

Anniņa. Es savukārt šaubos, par tavas izvēles pareizību. Manuprāt, $x = 0$ nav šaurs leņķis.

Maijiņa. Es vēl neesmu beigusi savu spriedumu. Ja jau nevienādība ir nepareiza ar $x = 0$, tad tā būs nepareiza arī nulles tuvumā. Citiem vārdiem, ņemot $x > 0$, bet tuvu nullei, iegūsim, ka nevienādības kreisā puse arī būs tuva nullei.

Atrodiet kļūdu!

Dosim vēl vienu pierādījumu tam, ka no visiem trijstūriem, kas apvilkti ap doto riņķi, vismazākais laukums ir regulāram trijstūrim.

Izmantosim laukumu formulu (sk. 51. zīm., kā arī *Anniņas* un *Jānīša* risinājumu):

$$L = r^2(\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tgz}).$$

Izsakot $z = 180^0 - (x + y)$, iegūsim:

$$T := \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z = \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y - \mathrm{tg}(x+y) = \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y - \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}.$$

$$T = \frac{(\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y)\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y - 1} \geq \frac{2\sqrt{\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y}\,\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y - 1} \tag{1}$$

Te lietota nevienādība $A \geq G$. Saucējs ir pozitīvs lielums, jo tāds ir T un tam turklāt skaitītājs ir pozitīvs. Apzīmē reizinājumu tg$x$tg$y$ ar t^2. Tad

$$T \geq \frac{2t^3}{t^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}.$$

Pēdējās nevienādības pareizība izriet no parastiem pārveidojumiem:

$$2t^3 \geq 3\sqrt{3}(t^2 - 1) \iff 2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} \geq 0 \iff$$

$$(t^2 - 2\sqrt{3}t + 3)(2t + \sqrt{3}) \geq 0 \iff (t - \sqrt{3})^2(2t + \sqrt{3}) \geq 0.$$

Redzam, ka vienādība tiek sasniegta, ja $t = \sqrt{3}$. Savukārt nevienādība (1) kļūst par vienādību, ja tg$x$ = tg$y$. Tas nozīmē, ka visi seši taisnleņķa trijstūri (51. zīm.) ir vienādi un ka trijstūris ABC ir regulārs, kas arī bija jāpierāda.

Grāmatā [Tot] 1. nodaļas 3. paragrāfā “Regulāru daudzstūru ekstremālās īpašības” konspektīvā formā dots ļoti skaists **T3** pierādījums, kuru varētu raksturot kā matemātikas pērli jeb, kā mīlēja teikt slavenais Pauls Erdešs (1913-1996), tas ir pierādījums no Grāmatas.

Pieņem, ka:
k – uzdots riņķis;
Q – ap riņķi k apvilkts regulārs n-stūris;
P – patvaļīgs n-stūris, kas apvilkts ap riņķi k;
K – ap Q apvilkts riņķis.
Sk. 52. zīmējumu, kas atbilst gadījumam n = 4.

“Segmentus, ko no K atšķeļ P malas, kas ņemtas cikliskā secībā, apzīmēsim ar $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Laukuma P daļu, kas atrodas riņķa K iekšienē, var izteikt šādā veidā:

$$PK = K - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + s_1s_2 + s_2s_3 \ldots + s_n s_1;$$

pietiek ievērot, ka

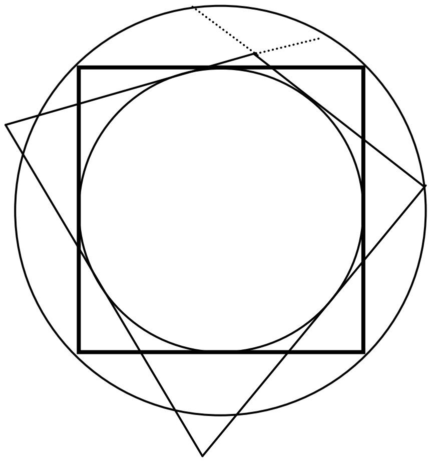
$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n - (s_1s_2 + s_2s_3 \ldots + s_n s_1)$$

izsaka visu to K daļu kopējo laukumu, kuras ir ārpus P, Tādējādi

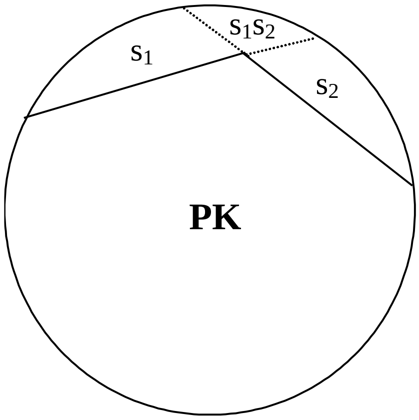
$$PK \geq K - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = Q$$

un vienādība tiek sasniegta tikai tad, kad neviena no P virsotnēm neatrodas K iekšienē. Tā kā pēdējais nosacījums ir spēkā tikai gadījumā P = Q, pierādījums līdz ar to ir pabeigts pilnībā.” [Tot, 26]

Komentāri par pierādījumu. Pierādījumā lietotie apzīmējumi var radīt divdomības. Īsāku pierakstu dēļ mēs dažkārt vienu un to pašu apzīmējumu lietojam dažādās nozīmēs. Piemēram, ar AB saprotam gan nogriezni, trijstūra malu, gan tā garumu. Pierādījumā apzīmējums “PK” nozīmē divu figūru P un K kopējo laukumu. Ar $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tiek saprasts gan pats segments, gan tā laukums, ar “reizinājumu” s_1s_2 tiek saprasts divu aplūkoto segmentu kopējais laukums.



52. zīm.



53. zīm.

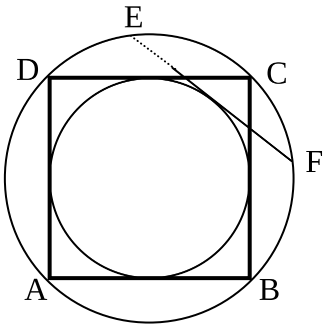
Kāpēc vienādībā

$$PK = K - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + s_1s_2 + s_2s_3\ldots + s_n\, s_1$$

parādās lielumi s_1s_2 , s_2s_3, …, s_n? Atskaitot no lielā riņķa laukuma “K” segmentu s_1 un s_2 laukumus, mēs divas reizes esam atskaitījuši šo segmentu kopējo laukumu “s_1s_2”, sk. 53. zīm. Lai saglabātu vienādību, tas jāpieskaita. Kāpēc

$$K - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = Q?$$

Vienādība acīmredzama gadījumā, ja s_1, s_2, …, s_n ir lielā riņķa K segmenti, kurus veido šai riņķī ievilkta regulāra n-stūra malas un tām atbilstošie loki (54. zīmējumā regulārais n-stūris ir kvadrāts ABCD, kura malas no K atšķeļ 4 segmentus). Tā kā visas lielā riņķa hordas, kuras pieskaras mazajam riņķim ir vienādas (pēc garuma) ar regulāra n-stūra malu, sk. 54. zīmējumu, kur |AB| = |EF|, tad visi segmenti s_1, s_2 , …, s_n ir vienādi (pēc laukuma) ar segmentu, ko no lielā riņķa atšķeļ ap mazo riņķi apvilkts regulārs n-stūris.



54. zīm.

Tēmas skolēnu patstāvīgiem pētījumiem

Vai varat atrisināt Zēnodora problēmu, izmantojot tikai elementārās matemātikas līdzekļus?

Risinājumi, kuros izmanto bezgalīgus procesus, robežpārejas, šeit netiek uzskatīti par elementāriem. Pietiek pierādīt, ka no visiem vienādmalu n-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram n-stūrim.

Vai varat atrast ģeometriska rakstura pierādījumu tam, ka no visiem četrstūriem ABCD ar uzdotām malām AB = BC = CD = a un AD = $b \neq a$ vislielākais laukums ir trapecei?

D. Križanovska grāmatā ir iekļauts redaktora papildinājums "Liljē uzdevums un Krāmera uzdevums". Tajā aplūkotas divas ievērojamas teorēmas, kurām ir ciešs sakars ar klasisko izoperimetrisko uzdevumu. [3)]

Liljē teorēma
No visiem (izliektiem) n-stūriem ar dotiem leņķiem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *un malu summu, kas vienāda ar p, vislielākais laukums ir tam, kuru var apvilkt ap riņķa līniju.*

Krāmera teorēma.
No visiem (izliektiem) n-stūriem ar dotām malām $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *(un doto leņķu summu, kas vienāda ar* $2d(n-2)$*) vislielākais laukums ir tam, kuru var ievilkt riņķa līnijā.*

<u>Piezīme</u>. Nosacījums par leņķu summu $2d(n-2)$ ir lieks. Šīs teorēmas var formulēt nedaudz īsāk:

No visiem izliektiem n-stūriem ar dotiem leņķiem un perimetru maksimālais laukums ir tam, kura malas pieskaras riņķa līnijai.

No visiem n-stūriem ar dotām malām vislielākais laukums ir tam, kura virsotnes atrodas uz riņķa līnijas.

Formulēsim Liljē un Krāmera uzdevumu vienkāršākajā gadījumā:

<u>Liljē uzdevums</u>. *Pierādīt, ka no visiem izliektiem četrstūriem ar uzdotiem leņķiem un uzdotu perimetru vislielākais laukums ir tam, kurā var ievilkt riņķa līniju.*

<u>Krāmera uzdevums</u>. *Pierādīt, ka no visiem izliektiem četrstūriem ar uzdotiem malu garumiem vislielākais laukums ir tam, ap kuru var apvilkt riņķa līniju.*

Ar šiem pēc formulējuma vienkāršajiem uzdevumiem ir nodarbojušies daudzi cilvēki. Ir atrasti dažādi risinājumi, sk. piemēram, [JB, Zet, Pal, Lusterniks]. Starp tiem ir arī tādi, kuros izmantoti tikai elementāŗās matemātikas līdzekļi.

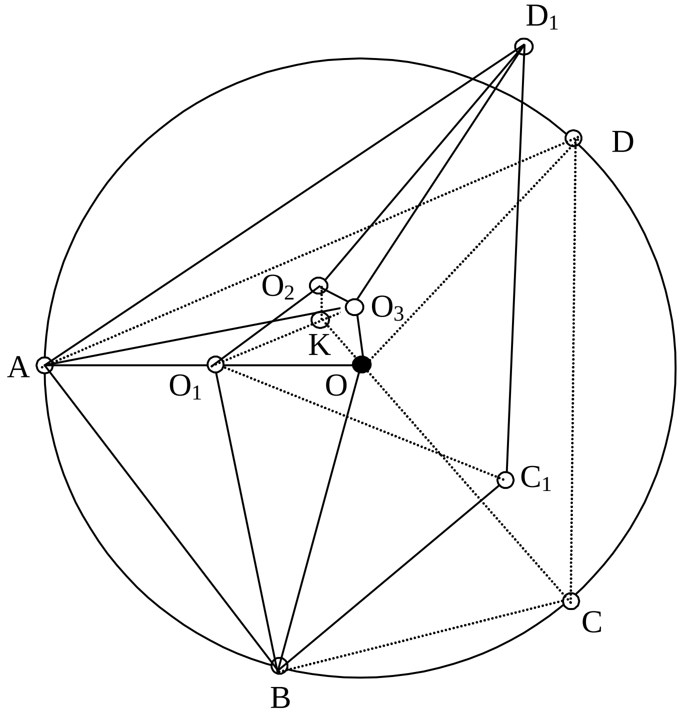
Īpašu ievērību ir pelnījis Viktora Palamodova (dz. 1938. g. Ribinskā) risinājums, kurš grāmatā [Kr, 103] raksturots kā ļoti elegants. Viņš abu uzdevumu tīri ģeometriskus risinājumus esot piedāvājis 1952. gadā. Tas nozīmē, ka viņam tad bija tikai 14 gadu. Skolēns (no Maskavas) vēlāk savu risinājumu ir publicējis augstvērtīgā krājumā *Математическое просвещение*, [Pal] kas tagad ir kļuvis par bibliogrāfisku retumu. Diemžēl minētais krājums ir piedzīvojis tikai sešus sējumus. V. Palamodovs ir kļuvis par ievērojamu matemātiķi, doktora ("lielā" jeb habilitētā) grādu ieguvis 28 g vecumā, veicis pētījumus diferenciālvienādojumu, funkciju teorijā.

Vai, vadoties pēc autora risinājumā izmantotās konstrukcijas (55. zīm.), kurā tiek salīdzināti divu četrstūru laukumi, jūs varētu atrisināt Krāmera uzdevumu? Manuprāt,

V. Palamodova risinājums [Pal] ir samērā garš un diezgan grūti pārskatāms. Vismaz tāds iespaids radās pēc pirmā lasījuma. Lai lasītājs novērtētu risinājuma elegantumu, protams, vajadzētu iepazīties ar pirmavotu.

Vai gadījumā, kad četrstūrim trīs malas ir vienādas, jūs varētu atrast vienkāršāku risinājumu?

Vēl viens Krāmera uzdevuma risinājums, kurā izmanto figūru līdzību un arī algebriskus pārveidojumus ir dots grāmatā [ŠČJ2, 241.-243; JB].



55. zīm.

Vai varat atrast riņķī ievilkta n-stūra laukuma formulu, ja tam ir uzdoti visu malu garumi?

<u>Uzdevums</u>. Pēc četrām malām noteikt riņķī ievilkta četrstūra laukumu. [Zet, 178] Pieņem, ka riņķī ievilkts četrstūris ABCD ar malām AB = *a*, BC = *b*, CD = *c* un DA = *d*. (56. zīm.) Apzīmēsim BF ar *x*, CF ar *y*. Tad, ņemot vērā, ka leņķis BCA vienāds ar leņķi BAD (riņķī ievilktiem četrstūriem pretējo leņķu summas ir vienādas ar 180 grādiem), iegūsim

$$\frac{a+x}{y}=\frac{d}{b};\quad \frac{c+y}{x}=\frac{d}{b};\quad ab+bx=dy;$$

$$bc+by=dx;\quad bx-dy=-ab;\quad dx-by=bc\,.$$

Tagad veicam pārveidojumus:

$$x=\frac{b(dc+ab)}{d^2-b^2};\qquad y=\frac{b(bc+ad)}{d^2-b^2};$$

$$a + b + c + d = 2p;\quad x + y + b = 2p;$$

$$p'=\frac{b(c+b+a-b)}{2(d-b)}=\frac{b(p-b)}{d-b}$$

$$p'-x=\frac{b(a+b+d-c)}{2(b+d)}=\frac{b(p-c)}{b+d}$$

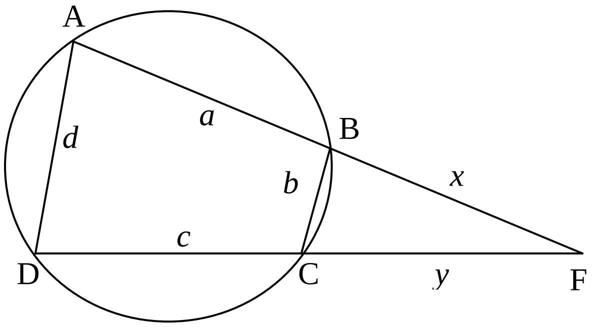
$$p' - y = \frac{b(b+c+d-a)}{2(b+d)} = \frac{b(p-a)}{b+d}$$

$$p' - b = \frac{b(b+a+c-d)}{2(d-b)} = \frac{b(p-d)}{d-b}$$

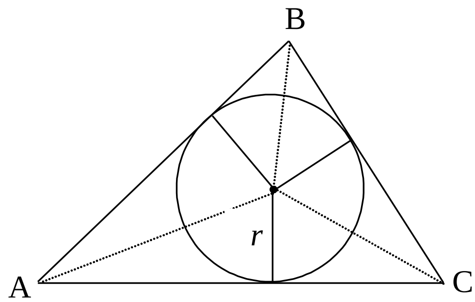
$$S_{BFC} = \frac{b^2}{d^2-b^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$S_{AFD} = \frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$



56. zīm.



57. zīm.

Pierādiet, ka katram trijstūrim ABC ir spēkā nevienādība

$$r \le \frac{\sqrt{\sqrt{3}L}}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{9}p \le \frac{1}{2}R,$$

kur r un R ir trijstūrī ABC (57. zīm.) attiecīgi ievilktas un ap to apvilktas riņķa līnijas rādiuss, L – trijstūra ABC laukums un p – pusperimetrs.

Pierādiet vienkāršāku nevienādību

$$r \le \frac{1}{2}R,$$

kāda pastāv starp ievilkta un apvilkta riņķa rādiusiem. Kādā gadījumā pastāv vienādība? Kā mainās konstante $\frac{1}{2}$, ja visu trijstūru klasi sašaurina uz taisnleņķa trijstūriem? Atzīmēsim, ka "vidējā" nevienādība

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}L}}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{9}p \text{ jeb } L \le \frac{\sqrt{3}}{36}(2p)^2$$

ir tā saucamā slavenā *izoperimetriskā nevienādība*. Tā dod atbildi uz jautājumu, kāds var būt vislielākais laukums figūrai (konkrētajā gadījumā trijstūrim) ar uzdotu perimetru. Šāda tipa uzdevumiem ir praktiska interese. Kādu vislielāko zemes gabalu var ierobežot, ja mūsu rīcībā esošais materiāls ļauj uzcelt žogu ar garumu $2p$ un ja mums jābūvē noteiktas formas žogs (piemēram, trijstūris vai četrstūris)? Kā mainās risinājums, ja uzdevuma noteikumi paredz kādus citus ierobežojumus? Piemēram, zemes gabals var atrasties pie kādas ēkas sienas, upes un ne visur tā ierobežošanā jāizmanto žogam paredzētais izejmateriāls, sk. [Kr, ŠČJ1].

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

1. Atrast maksimālo vērtību funkcijai

$$3\sin 2\alpha + 2\sqrt{3}\sin^2\alpha.$$

2. Pierādīt nevienādību

$$\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin\alpha\sqrt{4\sin^2\beta - \sin^2\alpha} \le 3\sqrt{3}.$$

3. Pierādīt nevienādību, ja α, β, un γ šauri leņķi:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + 2\sqrt{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)} \times$$

$$\times\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma)(\sin\beta - \sin\alpha + \sin\gamma)} \le 3\sqrt{3}.$$

4. Atrast maksimālo vērtību funkcijai

$$3x\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{3}x^2.$$

5. Pierādīt nevienādību

$$x\sqrt{1-x^2} + 2y\sqrt{1-y^2} + x\sqrt{4y^2 - x^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6. Pierādīt nevienādību

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y-x+z)} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Šie seši uzdevumi ir sastādīti, izmantojot izoperimetrisku 6-stūru ekstremālo īpašību, proti, no visiem 6-stūriem ar uzdotu perimetru vislielākais laukums ir regulāram 6-stūrim.

7. Noteikt maksimālo vērtību summai $ab + cd$, ja a, b, c un d pozitīvi skaitļi, kuriem

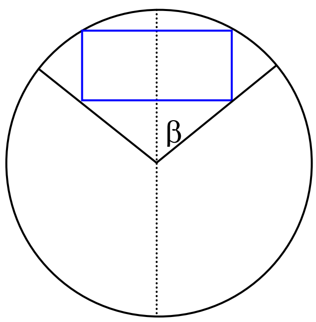
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

8. Aprēķināt maksimālo vērtību funkcijai

$$f(x) = 2r\sin x(r\cos x - a)$$

ja a un r ir fiksēti skaitļi. Dot uzdevuma ģeometrisku interpretāciju, ja x ir šaurs leņķis un $0 < a < r$.

9. Sektorā ar centra leņķi 2β ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu, sk. 58. zīm. Kādiem β maksimālo laukumu varat noteikt ar elementāriem paņēmieniem?



58. zīm.

10. Atrast maksimumu reizinājumam $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}+x)\,\mathrm{tg}x$, ja x ir 1. kvadranta leņķis.

11. Atrast minimumu summai $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\frac{y}{2}+\mathrm{ctg}\frac{z}{2}$, ja $x + y + z = \pi$. Vai summas minimums būs tas pats, ja x, y un z ir trijstūra leņķi?

12. Atrast minimumu summai $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma$, ja $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ un neviens no leņķiem nav plats.

13. Atrast maksimumu reizinājumam $\mathrm{tg}(x+y)\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y$, ja x un y ir pirmā kvadranta leņķi un $x+y\geq\frac{\pi}{2}$.

14. Atrast pozitīvu minimumu funkcijai $\frac{2\mathrm{tg}^3x}{\mathrm{tg}^2x-1}$.

15. Pierādīt vai atspēkot nevienādību $3\sqrt{3}+\mathrm{tg}(x+y)\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y\leq 0$, ja x un y ir pozitīvi un to summa lielāka nekā $\frac{\pi}{2}$.

16. Atrast maksimumu funkcijai $\sin^2x(1-\sin^3x)$ ja x ir 1. kvadranta leņķis.

17. Atrast minimumu funkcijai $(\mathrm{tg}^6t-1)\mathrm{tg}^4t$, ja $0\leq t\leq\frac{\pi}{4}$.

18. Cilindrs, kura augstums ir H un pamata rādiuss r, ievilkts konusā. Noteikt konusa aksiālā šķēluma leņķi pie virsotnes, ja konusa tilpums ir minimālais. [KZZ, 151]

19. [Kor, 35]. Pieņem, ka $p > 1$ un q ir racionāli skaitļi, kas apmierina vienādību $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Pierādīt, ka visiem pozitīviem x un y ir spēkā

$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

<u>Norādījums</u>. Izmantot nevienādību $f(x) := x^r - ax \geq f(x_{\min})$. Ievietot tajā $r = p$, $a = py$. Viena no iespējām, kā elementārā veidā atrast minimuma punktu $x_{\min}=\sqrt[r-1]{\frac{a}{r}}$, ir atsaukties uz 25. lpp. aplūkoto funkciju $Q_a(u)=u^k(a^n-u^n)$, kurai $u_{\max}=a\cdot\sqrt[n]{\frac{k}{k+n}}$.
Ņemt $n = r - 1$ un $k = 1$, jo $x^r - ax = x(x^{r-1} - a)$.

20. [Kor, 35] Atrast vislielāko vērtību funkcijai

$$\frac{x^3}{x^4+5},\quad x^6-0{,}6x^{10}.$$

21. Kādai a vērtībai funkcijas $\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}$ vismazākā vērtība ir vienāda ar 2,5? [Kor, 35]

Komentāri

1. nodaļa

1) (7. lpp.) Tā kā dotās izteiksmes skaitītājs ir pozitīvs, bet saucējs var būt arī negatīvs, tad iegūtā vērtība nav vismazākā. Īstenībā var iegūt vērtības, kas ir mazākas par jebkuru uzdotu skaitli, jo lg$x$ tiecas uz mīnus bezgalību, kad x tiecas uz 0. Uzdevuma formulējumā vajadzētu prasīt, ka $x > 1$ vai, ka jāmeklē vismazākā pozitīvā vērtība. Šāds precizējums būtu vajadzīgs arī 4. uzdevuma formulējumā [VR, 26]

2) (8. lpp.) Citā izpildījumā uzdevums ir atrisināts [VR, 21]

3) (8. lpp.) Uzdevums latviešu valodā izdotajā literatūrā ir atrodams jau 1947. g. [Oz, 161].

4) (9. lpp.) Aplūkotajā uzdevumā tika atrasts minimālā laukuma trijstūris, kas satur paralelogramu ADPE, savukārt Eiklīda uzdevumā jānosaka maksimālā laukuma paralelograms, kurš ievilkts dotajā trijstūrī, t. i., starp šiem uzdevumiem pastāv *dualitāte*.

5) (16. lpp.) Funkciju pārraksta formā

$$f = (t^2 - 1)^2 + (\frac{1}{t^2} - 1)^2 + (t - \frac{1}{t})^2 + t + \frac{1}{t} \geq 2, \ t = \frac{x}{y}.$$

5. nodaļa

1) (35. lpp.) Uzdevums par vislabāko apgaismojumu visai bieži atrodams literatūrā [GK, Ant, Cib1], [TF, 213]. Mazāk pazīstams uzdevums, kurā arī parādās minētā veida trigonometriskā funkcija ir uzdevums par kuģa griezes momentu [Sav, 67]. Griezes moments, ko iegūst tvaikonis, ja tā stūri pagriež par leņķi φ, izsakāms ar formulu $M = k\sin^2\varphi\cos\varphi$. Noteikt, kādam pagrieziena leņķim φ , tvaikoņa griezes moments būs vislielākais. [Sav, 67]

2) (35. lpp.) Uzdevums pazīstams ar nosaukumu *Galileja uzdevums*. [Cib1, 17]

3) (35. lpp.) Abi minētie paņēmieni vienkopus ir aplūkoti uzdevumu krājumā [KUK, 8-9]

4) (39.lpp) Uzdevums droši vien aizgūts no vidusskolēniem paredzētā uzdevumu krājuma [UK, 27]. Tur dotais formulējums: *Atrodiet vislielāko un vismazāko funkcijas* $f(x) = \max_R \left(\frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x \right)$ *vērtību* ir divdomīgs, jo pieraksts maxF(x) nozīmē kādu konstanti (funkcijas F maksimālo vērtību). Citiem vārdiem, f ir konstante un tādai funkcijai maksimālā un minimālā vērtība sakrīt. Savukārt uzdevumam *atrast vismazāko vērtību funkcijai* $F(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x$ atrisinājuma nav. Pirmkārt, ir spēkā novērtējums $F(x) > -1$ un, otrkārt, var uzrādīt x, kuriem $F(x)$ pēc patikas maz atšķiras no (– 1), piemēram, der $x = \pi(2n + 1)$, kur $n \to +\infty$. Mācību līdzeklī [Uk, 28] ir dots vēl viens līdzīga tipa uzdevums. Atrodiet funkcijas

$f(x) = 2x + \dfrac{18\pi^2}{x} + \cos x$ minimālo vērtību intervālā (0; 10). Risinājuma pamatideja ir tā, ka $2x + \dfrac{18\pi^2}{x}$ minimuma punkts ir 3π un arī kosinuss minimumu sasniedz šajā punktā.

5) (40. lpp.) Funkcija $(1 + \cos x)\sin x$ rodas, piemēram, no šāda ģeometriska ekstrēmu uzdevuma. No visām vienādsānu trapecēm ar 3 vienāda garuma malām atrast to, kurai laukums ir vislielākais. Uzdevums *Vienādsānu trapeces sānu mala vienāda ar mazāko pamatu. Tās garums ir a. Kādiem jābūt trapeces leņķiem, lai tā laukums būtu maksimāls* (Latvijas atklātā 2. matemātikas olimpiāde, 10. kl.) grāmatā [AB, 108] risināts ar atvasinājuma palīdzību.

Uzdevums par maksimālo trapeci sastopams ļoti daudzās mācību grāmatās un dažādās praktiska rakstura interpretācijās. Sk., piemēram, [Sav, 66; Lan, 107; TF, 214; Zap, 128; Nag, 49; Š1; Cib1]

6) (52. lpp.) Šāds kvadrātvienādojums parādās arī citos ģeometrijas uzdevumos. Piemēram, *Vienādsānu trijstūra perimetrs ir 2p. Cik garām jābūt tā sānu malām, lai tilpums ķermenim, kas rodas, trijstūrim rotējot ap sānu malu, būtu vislielākais?* [KZZ, 151.] Atbilde. $\dfrac{p(1+\sqrt{17})}{8}$.

7) (52. lpp.) Grāmatā [Mar, 139] uzdevums atrisināts ar atvasinājuma palīdzību. Elementārā veidā uzdevums – atrast funkcijas $\sin x \sin 2x$, kā arī funkcijas $\cos x \cos 2x$, vislielāko vērtību – atrisināts mācību līdzeklī [Kor]. Šis vidusskolēniem paredzētais mācību līdzeklis ir neliels pēc apjoma, bet ir īpaši vērtīgs pēc satura.

6. nodaļa

1) Rakstība *Papps* aizgūta no [Tai], grāmatā [FL] lietots vārds *Paps* (angl. Pappus).

2) (55. lpp.) Lemmu savā 1. metodē, pierādot riņķa izoperimetrisko īpašību izmantoja, vācu matemātiķis J. Šteiners (Steiner J., 1796-1863). Viņš līdz 18 gadu vecumam nebija ieguvis faktiski nekādu izglītību, pat rakstīja ar grūtībām un tomēr, kā uzsver D. Križanovskis, kļuva par ģeometrijas ģēniju. Labs apstiprinājums teicienam: *mācīties nekad nav par vēlu*.

3) (91. lpp) L'Huillier S. A. J., 1750-1840; Cramer G., 1704-1752, šveiciešu matemātiķi.

Literatūra

[AB] Andžāns A., Bērziņš A., *Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1998, 224 lpp.

[Ant] Anton H., *Calculus, with analytic geometry,* Second ed., USA, John Wiley & Sons, 1984,1108+A121+Index9.

[AZT Andžāns A., Ziļicka T., Treilibs, *Uzdevumi matemātikas olimpiādēs*, Rīga, Zvaigzne, 1977, 390 lpp.

[Bla] Бляшке В., *Круг и шар*, Москва, Наука, 1967, 232 с.

[BB2] Бородин А. И., Бугай А. С., *Биографический словарь деятелей в области математики*, Киев «Радянська школа», 1979, 608 с.

[Cib1] Cibulis A., *Ekstrēmu uzdevumi*, 1. daļa, Rīga, Mācību grāmata, 2003, 106 lpp.

[Cib2] Cibulis A., *Skaitlis e,* "Zvaigžņotā debess", 1996, Rudens, 51. – 54. lpp.

[Ciz] Cizarevičs J., *Diferenciālrēķini un integrālrēķini,* Latvijas valsts izdevniecība, Rīga, 1946, 548 lpp.

[CC] Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г., *Математические формулы,* Москва, Наука, 1985, 128 с.

[DKN] Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н., *Сборник задач по математическому анализу,* Москва, Учпедгиз, 1953, 196 с.

[EV] *Энциклопедический словарь юного математика,* Москва, Педагогика,1989, 352с.

[Ga] Гашков С. Б., *Неравентсва для площади и периметра выпуклого многоугольника*, Квант, 1985, N10, 15-19 с.

[GK] Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О., *Сборник задач по высшей математике, том 1,* ГИТТЛ, Москва, 1957, 282 с. (1. izd. 1912. g.)

[GD] Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф., *Сборник конкурсных задач по математике,* М., 1983, 384.с

[GL] Грэнвиль В., Лузин Н., *Курс дифференциального и интегрального исчисления, часть 1*, Москва -Ленинград, ГТТИ, 1933, 586 с. (12. izdevums.)

[Han] Hansen V. L., *Shadows of the Circle. Conic sections, Optimal Figures and Non-Euclidean Geometry,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998, 112 p.

[ISS} Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ 1,* Издательство Московского Университета, 1985, 660 с.

[JB] Яглом И. М., Болтянский В. Г., *Выпуклые фигуры,* Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1951, 344 с.

[Kem] Кембровский Г., *Экстремумы в задачах по физике*, Квант, 1993, 3/4, 59-62 с.

[Kip] Кипнис И. М., *Сборник прикладных задач на неравенства,* Москва, Учпедгиз,1961,104 с.

[Kor] Коровкин П. П., *Неравентсва*, Москва – Ленинград, ГИТТЛ, 1951, 56 с.

[Kr] Крыжановский Д. А., *Изопериметры*, Физматгиз, 1959,116 с.

[KR] Курант Р., Роббинс Г., *Что такое математика?,* Москва, Просвещение, 1967, 558 с.

[KUK] *Konkursa uzdevumu krājums matemātikā augstskolu reflektantiem*, M. Skanavi redakcijā, Rīga, Zvaigzne, 1990, 490 lpp. (Kr. val. izdots 1977. g.)

[KZZ] Kriķis D., Zariņš P., Ziobrovskis V., *Diferencēti uzdevumi matemātikā, 1. daļa,* Rīga, Zvaigzne ABC, 1991 (1. izdevums), 390 lpp.

[Lan] Lang S., *A first course in calculus,* Second edition,
Addison-Wesley Publishing Company, 1968, 337 p.
[Lei] Leimanis E., *Ievads augstākā matemātikā, I daļa. Diferenciālrēķini*,
Rīgā, 1943, Univ. Studentu padomes grāmatnīca, 130 lpp.
[Lub] Любек О., *Дифференциальное исчисление,*
Издание Т-ВА ГЛИКСМАН, Берлин, 1922, 136 с.
[Mar] Марон И. А., *Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах,* Москва, Наука, 1970, 400 с.
[Min] Минорский В. П., *Сборник задач по высшей математике,*
Москва, Физматгиз, 1959, 360 с. (5. izdevums.)
[MO] *Зарубежные математические олимпиады*, Москва, Наука,1987, 416 с.
[Nag] Нагибин Ф. Ф., *Экстремумы*, Москва, Просвещение,1969, 120 с.
[Niv] Niven I., *Maxima and Minima Without Calculus* – Dolciani Mathematical Expositions, Math. Association of America, No. 6, 1981.
[Oz] Ozols O., *Ievads augstākā matemātikā,*
Latvijas valsts izdevniecība, Rīga, 1947, 326 lpp.
[Pal] Паламодов В. П., *О двух геометрических задачах на максимум,*
Математическое просвещение, Вып. 5, Москва, 1960, 179-184 с.
[RT] Радемахер Г., Теплиц О., *Числа и фигури*, Москва, Наука, 1966, 264 с.
[Sav] Савчук П. М., *Сборник задач по высшей математике,*
Госуд. изд. физико-математической лит., Москва, 1956, 132 с.
[Si2] Сивашинский И. Х., *Неравенства в задачах*, Москва, Наука, 1967, 304 с.
[Sk] Скопец З. А., *Геометрические миниатюры*,
Москва, Просвещение, 1990, 224 с.
[SMO] *Международные математические олимпиады*,
Москва, Издательский дом, Дрофа,1998,160 с.
[Š1] Šteiners K., *Matemātiskās analīzes elementi*, Rīga, Zvaigzne, 1993, 320 lpp.
[ŠČJ1] Шклярский Д. О.,Ченцов Н. Н., Яглом И. М., *Геомерические неравенства, и задачи на максимум и минимум*, Москва, Наука,1970, 335 с.
[ŠČJ2] Шклярский Д. О.,Ченцов Н. Н.,Яглом И. М., *Геомерические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*, Москва, Наука, 1974, 384 с.
[ŠČJ3] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., *Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч.* 2. *Геометрия* (*планиметрия),*
М., ГИТТЛ, 1952, 380 с.
[Tai] Taimiņa D., *Matemātikas vēsture*, Rīga , Zvaigzne, 1990, 200 lpp.
[Tih] Тихомиров В. М., *Рассказы о максимумах и минимумах,*
Москва, Наука, 1986, 190 с.
[Tot] Тот Л. Ф., *Расположения на плоскости на сфере и в пространстве,*
Москва, Госуд. изд. физико-математической лит., 1958, 364 с.
[TF] Thomas G. B., Finney R. L., *Calculus and analytic geometry,* Addisson-Wesley Publishing, USA, sixth edition, 1984, xxiii+1041pp+A89+I11 (1.izd. 1951. g.)
[UK] Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа,
Москва, Просвещение, 1990, 48 с.
[Vas] Васютинский Н., *Золотая пропорция,*
Москва, Молодая гвардия, 1990, 240 с.

[Vil] *Задачник по курсу математического анализа, ч.1*, под ред. Н. Я. Виленкина, Москва, Просвещение, 1971, 350 с.
[VR] Vasiļevska A., Ramāna L., *Ekstrēmu uzdevumi risināšanas metodes*, Rīga, LU, 1997, 66 lpp.
[Zap] Запорожец Г. И., *Руквodство к решению задач по математическому анализу*, Москва, Высшая школа, 1964, 480 с.
[Zet] Зетель С. И., *Задачи на максимум и минимум*, Москва-Ленинград, ГИТТЛ,1948, 224 с.

Grāmatā [Cib1] pamanītās kļūdas

Lpp.	Nodrukāts	Jābūt
5	”[EV, ...] minēts ... uzdevumu, ...”	uzdevums
14	”f(x) < f(x_0)”	f(x) > f(x_0)
24	Sk. 10. zīm., kur I nodrukāts bez indeksiem	Pa kreisi no R_1, R_2 jābūt nevis apzīmējumam I, bet attiecīgi I_1 un I_2
29	”…, ja *a* > 0, …, ja *a* < 0.”	”…, ja *a* < 0, …, ja *a* > 0.”
32	”$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$”	$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$
57	Sk. 47. uzd. (…[AB, 100. lpp]	(…[AB, 100. lpp])
59	Sk 170. uzd. ”…labajā pusē…”	”…labajā un kreisajā pusē…”
86	Sk. 3. rindu ”$2r^2$”	r^2
97	7. rinda no augšas – ”Lai gan Nivens aplūko tas…”	tās
104	”Выготский”	Выгодский

Sērija „LAIMA” matemātikā

Redakcijas padome:	A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja	L. Kalniņa

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

Sērijas „LAIMA” grāmatas

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Andžāns, L. Egle, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
5. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
7. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
8. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
12. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
13. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
14. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
17. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
18. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2.daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.