Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9. klase

9.1. Vai eksistē 5 dažādi naturāli skaitļi ar īpašību, ka to vidējais aritmētiskais ir: **a)** tieši 3 reizes lielāks; **b)** tieši 2 reizes lielāks nekā visu šo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs?

Atrisinājums. a) Jā, tādi skaitļi ir 1; 2; 3; 4; 5. To vidējais aritmētiskais ir $(1+2+3+4+5):5=15:5=3$ un lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

b) Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē un to lielākais kopīgais dalītājs ir d. Tādā gadījumā skaitļi ir a_1d; a_2d; a_3d; a_4d; a_5d. Līdz ar to jāizpildās vienādībai:

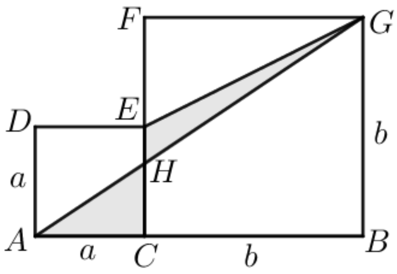
$$\frac{a_1d+a_2d+a_3d+a_4d+a_5d}{5}=2d;$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10.$$

Tā kā pat piecu vismazāko dažādo naturālo skaitļu summa ir vairāk nekā 10, tad šādi skaitļi neeksistē.

9.2. Uz nogriežņa AB atlikts iekšējs punkts C tā, ka $AC<CB$ un uz vienu pusi no AB konstruēti divi kvadrāti $ADEC$ un $CFGB$. Nogriežņi AG un CE krustojas punktā H. Pierādīt, ka trijstūru ACH un HEG laukumi ir vienādi!

Atrisinājums. Apzīmējam kvadrātu malu garumus ar $AC=a$ un $BC=b$ (skat. 1. att.).



1. att.

Aprēķinām trapeces $CEGB$ un trijstūra AGB laukumu:

- $S_{CEGB}=\frac{EC+BG}{2}\cdot BC=\frac{(a+b)b}{2}$;
- $S_{AGB}=\frac{AB\cdot BG}{2}=\frac{(a+b)b}{2}$.

Tātad $S_{CEGB}=S_{AGB}$ un, atņemot no abām pusēm vienādu lielumu (trapeces $CHGB$ laukumu), vienādība saglabāsies:

$$S_{CEGB}-S_{CHGB}=S_{AGB}-S_{CHGB} \quad\Rightarrow\quad S_{HEG}=S_{ACH}.$$

9.3. Datorklasē ir n $(n\geq 3)$ datori, daži no tiem ir savienoti savā starpā. Zināms, ka katrs dators ir savienots ar vismaz diviem citiem datoriem. Ik pa brīdim kāds no datoriem, kurš pirms tam vēl neko nav sūtījis, nosūta ziņojumu visiem datoriem, ar ko tas ir savienots. Pierādīt, ka jebkurā laika brīdī var atrast divus datorus, kuri ir saņēmuši vienādu ziņojumu skaitu!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka kādā brīdī katrs dators ir saņēmis dažādu ziņojumu skaitu. Tas nozīmē, ka datoru saņemto ziņojumu skaits ir $0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1$ (kaut kādā secībā). Tālāk datorus attiecīgi apzīmēsim ar $D_0;\ D_1;\ \ldots, D_{n-1}$ atbilstoši saņemto ziņojumu skaitam, tas ir, dators D_i ir saņēmis tieši i ziņojumus. Tā kā D_{n-1} ir saņēmis $n-1$ ziņojumu, tad tad tas ir savienots ar visiem pārējiem datoriem un pie tam visi pārējie datori ir nosūtījuši tam ziņas. Dators D_0 nevienu ziņu nav saņēmis, bet tā kā tas vēl bez D_{n-1} ir savienots vismaz ar vienu citu datoru, tad tam no šī datora būtu bijis jāsaņem ziņojums. Iegūta pretruna. Tātad jebkurā laika brīdī var atrast divus datorus, kuri ir saņēmuši vienādu ziņojumu skaitu.

9.4. Uz tāfeles uzrakstīta izteiksme $\overline{abc} \cdot \overline{def} \cdot \overline{ghi} \cdot \overline{jkl}$, kas ir četru trīsciparu skaitļu reizinājums. Katrā gājienā Gustavs izvēlas kādu nenulles ciparu un Maruta to ieraksta kāda burta vietā (Gustavs redz, kurā). Pierādīt, ka Maruta vienmēr var panākt, ka pēc 12 gājieniem iegūtās izteiksmes vērtība dalās ar 9.

Atrisinājums. Maruta var rīkoties tā:

- ciparus, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1 (cipari 1; 4; 7), rakstīt pirmajā skaitlī;
- ciparus, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (cipari 2; 5; 8), rakstīt otrajā skaitlī;
- ciparus, kas dalās ar 3 (cipari 3; 6; 9), rakstīt trešajā skaitlī.

Kad kādā no skaitļiem visi cipari ir aizpildīti, tad šo ciparu kategoriju Maruta var turpināt rakstīt ceturtajā skaitlī. Šādi viņa var panākt, ka vismaz divos skaitļos visi trīs cipari dod vienu un to pašu atlikumu, dalot ar 3, tātad to summa dalās ar 3. Līdz ar to vismaz divi no šiem četriem trīsciparu skaitļiem dalīsies ar 3, tātad visu skaitļu reizinājums dalīsies ar 9.

9.5. Kims grib naturālos skaitļus no 1 līdz 2024 uzrakstīt pa apli tā, ka katrs skaitlis ir uzrakstīts tieši vienu reizi un katriem trīs pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem a, b, c izpildās īpašība, ka skaitlis $a + c$ dalās ar $b + 1$. Vai Kims to var izdarīt?

Atrisinājums. Nē, Kims nevar uzrakstīt skaitļus prasītājā veidā.

Vispirms pamatosim, ka, ja skaitļus varētu uzrakstīt, tad pāra un nepāra skaitļi pa apli būtu uzrakstīti pamīšus. Ja tā nebūtu, tad kaut kur blakus būtu uzrakstīti divi nepāra skaitļi. Ejot tālāk pa apli līdz tuvākajam pāra skaitlim, mēs atradīsim vietu, kur skaitļi ir uzrakstīti secībā n, n, p (n ir nepāra un p – pāra skaitlis). Esam ieguvuši pretrunu jo $n + p$ ir nepāra skaitlis un nevar dalīties ar $n + 1$, kas ir pāra skaitlis.

Aplūkojam skaitli 2024, tam abās pusēs blakus ir uzrakstīti nepāra skaitļi. To summa ir pāra skaitlis, kas dalās ar 2025. Mazākais šāds pāra skaitlis ir 4050, bet lielākais skaitlis, ko var iegūt, saskaitot kādus divus dotos nepāra skaitļus ir $4044 = 2023 + 2021$, kas ir mazāks nekā 4050. Esam ieguvuši, ka skaitlim 2024 nevar atrast skaitļus, ko uzrakstīt blakus. Tātad skaitļus pa apli prasītajā veidā nevar uzrakstīt.

10. klase

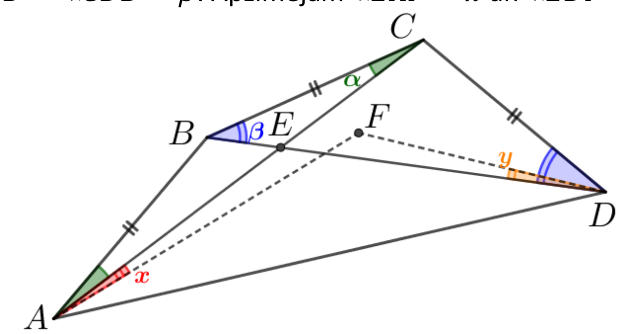
10.1. Vai var izvēlēties **a)** 50; **b)** 51 tādus dažādus naturālus skaitļus, kas nepārsniedz 100, lai jebkuriem diviem izvēlētajiem skaitļiem to starpība (no lielākā skaitļa atņemot mazāko) nebūtu vienāda ar to lielāko kopīgo dalītāju?

Atrisinājums. a) Jā, var. Ja izvēlas 50 nepāra skaitļus, tad visas to starpības ir pāra skaitļi, bet nepāra skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir nepāra skaitlis.

b) Nē, nevar. Ja būtu izvēlēts 51 skaitlis, tad noteikti būs izvēlēti divi blakus esoši skaitļi x un $x + 1$, bet šo skaitļu starpība ir $(x + 1) - x = 1$ un $LKD(x + 1; x) = 1$.

10.2. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram $AB = BC = CD$. Četrstūra diagonāles krustojas punktā E, bet leņķu BAD un ADC bisektrises krustojas punktā F. Pierādīt, ka $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EDF$.

1. atrisinājums. Tā kā $AB = BC = CD$, tad trijstūri BCD un ABC ir vienādsānu un to pamata pieleņķi ir vienādi: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$ un $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = \beta$. Apzīmējam $\sphericalangle EAF = x$ un $\sphericalangle EDF = y$ (skat. 2. att.).



2. att.

Pēc dotā AF un DF ir leņķu bisektrises, tātad iegūstam:

- $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EAF + \sphericalangle FAD = x + (\alpha + x) = \alpha + 2x$;
- $\sphericalangle EDA = \sphericalangle FDA - \sphericalangle FDE = (\beta - y) - y = \beta - 2y$.

Tā kā krustleņķi ir vienādi, tad $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 180° - \sphericalangle BCE - \sphericalangle EBC = 180° - \alpha - \beta$. Aplūkojot trijstūra AED iekšējo leņķu summu, iegūstam:

$$180° = 180° - \alpha - \beta + (\alpha + 2x) + (\beta - 2y);$$
$$180° = 180° + 2x - 2y.$$

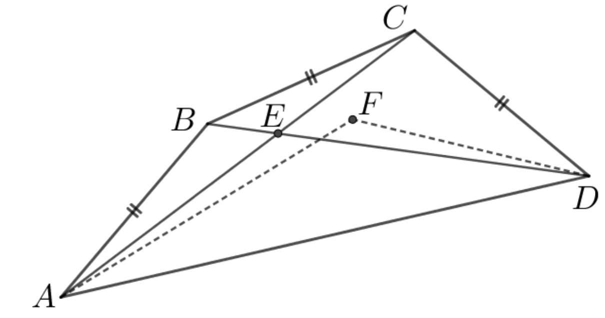
Līdz ar to esam ieguvuši, ka $2x = 2y$ jeb $x = y$, kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Citiem punktu E un F izkārtojumiem risinājums ir analoģisks.

2. atrisinājums. Tā kā pēc dotā $AB = BC = CD$ (skat. 3. att.), tad:

- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \alpha$, jo trijstūris BAC ir vienādsānu;
- $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = \beta$, jo trijstūris BCD ir vienādsānu.

Tātad $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 180° - \alpha - \beta$ (trijstūra BEC iekšējo leņķu summa), no kā iegūstam, ka $\sphericalangle EAD + \sphericalangle EDA = 180° - \sphericalangle AED = \alpha + \beta$.



3. att.

No četrstūra $ABCD$ un trijstūru ABC un BCD iekšējo leņķu summas iegūstam, ka

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = 360° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCD = 360° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = 2(\alpha + \beta).$$

Izmantojot bisektrises definīciju, iegūstam, ka

$$\sphericalangle FAD + \sphericalangle FDA = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD + \frac{1}{2}\sphericalangle CDA = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA) = \alpha + \beta.$$

Esam ieguvuši, ka $\sphericalangle EAD + \sphericalangle EDA = \sphericalangle FAD + \sphericalangle FDA$, tad

$$\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAD - \sphericalangle FAD = \sphericalangle FDA - \sphericalangle EDA = \sphericalangle EDF.$$

Piezīme. Uzdevuma beigās var arī izmantoto, ka ap četrstūri $AEFD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EDF$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku EF.

10.3. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2y^2 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2z^2 \\ z + \dfrac{1}{z} = 2x^2 \end{cases}$$

1. atrisinājums. Vienādojot vienādojumu kreiso pušu izteiksmju saucējus, iegūstam

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x} = 2y^2 \\ \dfrac{y^2 + 1}{y} = 2z^2 \\ \dfrac{z^2 + 1}{z} = 2x^2 \end{cases}$$

Tā kā pirmā vienādojuma labās puses izteiksme $2y^2 \geq 0$ un kreisās puses daļas skaitītājs $x^2 + 1 > 0$, tad arī daļas saucējs $x > 0$. Līdzīgi no pārējiem vienādojumiem iegūstam, ka $y > 0$ un $z > 0$.

No katra vienādojuma, izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$\begin{cases} 2y^2 = x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ 2z^2 = y + \frac{1}{y} \geq 2 \\ 2x^2 = z + \frac{1}{z} \geq 2 \end{cases}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $x, y, z \geq 1$.
Saskaitot visus dotos vienādojumus, iegūstam

$$\frac{x^2+1}{x} + \frac{y^2+1}{y} + \frac{z^2+1}{z} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2;$$

$$\frac{2x^3 - x^2 - 1}{x} + \frac{2y^3 - y^2 - 1}{y} + \frac{2z^3 - z^2 - 1}{z} = 0.$$

Tā kā $2x^3 - x^2 - 1 = x^3 - x^2 + x^3 - 1 = x^2(x-1) + (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(2x^2+x+1)$, tad iegūstam

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x} + \frac{(y-1)(2y^2+y+1)}{y} + \frac{(z-1)(2z^2+z+1)}{z} = 0.$$

Ņemot vērā, ka $x, y, z \geq 1$, un ievērojot, ka $2x^2 + x + 1 > 0$, $2y^2 + y + 1 > 0$ un $2z^2 + z + 1 > 0$ (jo $D < 0$ un atbilstošās kvadrātfunkcijas zari vērsti uz augšu), iegūstam, ka vienādojuma un dotās sistēmas vienīgais atrisinājums ir $x = y = z = 1$.

Piezīme. Alternatīvi pēc tam, kad ir iegūts, ka $x, y, z \geq 1$, šo atrisinājumu var pabeigt šādi.
Simetrijas dēļ pieņemsim, ka lielākais no skaitļiem ir x ($x \geq y$ un $x \geq z$). Aplūkojam vienādojumu $2x^2 = z + \frac{1}{z}$.
Ievērojam, ka, ja $x > 1$, tad $x^2 > x \geq z$ un $x^2 > 1 \geq \frac{1}{z}$, tātad $2x^2 = x^2 + x^2 > z + \frac{1}{z}$, iegūta pretruna. Tātad $x = 1$ un tā kā tas ir lielākais no skaitļiem, tad arī $y = 1$ un $z = 1$.

2. atrisinājums. Līdzīgi kā 1. atrisinājumā, iegūstam, ka $x, y, z \geq 1$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka x ir vislielākā vai viena no lielākajām vērtībām, tas ir, $x \geq z$ un $x \geq y$. Pierādīsim, ka tādā gadījumā

$$x + \frac{1}{x} \geq z + \frac{1}{z}.$$

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{z^2+1}{z};$$

$$zx^2 + z \geq xz^2 + x;$$

$$(zx-1)(x-z) \geq 0.$$

Tā kā $x, z \geq 1$ un $x \geq z$, tad iegūta patiesa nevienādība un arī pirmā nevienādība ir patiesa, jo tika veikti ekvivalenti pārveidojumi. Izmantojot nevienādību, iegūstam

$$x + \frac{1}{x} \geq z + \frac{1}{z} = 2x^2;$$

$$0 \geq \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x};$$

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x} \leq 0.$$

Tā kā $2x^2 + x + 1 > 0$, tad nevienādība ir patiesa tikai tad, ja $x = 1$. Tādā gadījumā $y = z = 1$, jo $x \geq z$ un $x \geq y$. Tātad dotā vienādojuma atrisinājums ir $x = y = z = 1$.

10.4. Skolas 10. klašu olimpiādē piedalījās 10.a un 10.b klases skolēni. Pirmo reizi saskaitot rezultātus, tika noskaidrots, ka 10.a klases skolēnu vidējais rezultāts ir 37 punkti, bet 10.b klases skolēnu vidējais rezultāts ir 11 punkti. Pārskatot darbus, atklājās, ka viens skolēna darbs bija pielikts pie nepareizās klases. Pārrēķinot vidējo rezultātu, izrādījās, ka abās klasēs tas ir palielinājies tieši par 1 punktu (un tagad ir attiecīgi 38 un 12 punkti). Cik skolēnu kopā piedalījās šajā olimpiādē?

Atrisinājums. Olimpiādē pavisam piedalījās 26 skolēni.

Vispirms pamatosim, ka sajauktais darbs vispirms tika pierēķināts 10.a klases rezultātam, bet pēc tam to pārlika pie 10.b klases darbiem. Pieņemsim pretējo, ka sajauktais darbs no sākuma bija pielikts pie 10.b klases, bet beigās to pielika pie 10.a klases. Tā kā 10.b klases vidējais punktu skaits, noņemot šo darbu, palielinājās, tad šī darba punktu skaitam jābūt mazākam nekā klases vidējais punktu skaits, tas ir, punktu skaits ir mazāks nekā 11. Līdzīgi, tā kā, pieliekot to pie 10.a klases darbiem, to vidējais punktu skaits palielinājās, tad darba punktu skaitam jābūt lielākam nekā 10.a klases vidējais punktu skaits, tas ir, vairāk nekā 37 punktiem. Iegūta pretruna. Tātad sajauktais darbs beigās tika pārlikts pie 10.b klases darbiem.

Ar n un m apzīmēsim attiecīgi 10.a un 10.b klases skolēnu skaitu, kas piedalījās olimpiādē un kuru darbi netika sajaukti. Vēl ir viens skolēns, kuru sākumā pieskaitīja pie 10.b klases, bet tam jābūt pie 10.a klases, tā punktu skaitu apzīmēsim ar z. Tātad kopējais skolnieku skaits, kas piedalījās olimpiādē, ir $n+m+1$.

Apzīmējam punktu summu bez sajauktā darba 10.a klasē ar X. Tā kā kopā ar sajaukto darbu vidējais punktu skaits bija 37, bet bez tā – 38, tad iegūstam divus vienādojumus:

$$\frac{X+z}{n+1}=37 \quad \text{un} \quad \frac{X}{n}=38;$$

$$X+z=37n+37 \quad \text{un} \quad X=38n.$$

Ievietojot otro vienādojumu pirmajā, iegūstam, ka $z=37-n$.

Līdzīgi, apzīmējot punktu summu bez sajauktā darba 10.b klasē ar Y, iegūstam divus vienādojumus:

$$\frac{Y}{m}=11 \quad \text{un} \quad \frac{Y+z}{m+1}=12,$$

$$Y=11m \quad \text{un} \quad Y+z=12m+12.$$

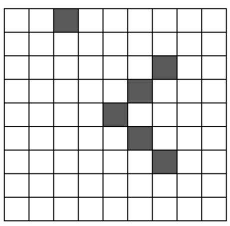
Ievietojot pirmo vienādojumu otrajā, iegūstam, ka $z=m+12$.

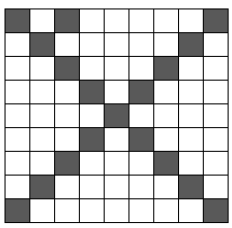
No abām sakarībām iegūstam, ka $37-n=m+12$ jeb $m+n=25$. Tātad kopējais skolēnu skaits ir $m+n+1=26$.

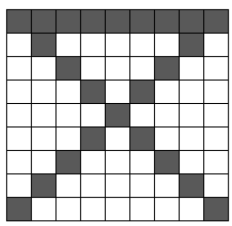
Piezīme. Parādīsim piemēru, ka šāda situācija ir iespējama. Pieņemsim, ka $n=2$ un $m=23$, abiem "nesajauktajiem" 10.a klases skolēniem ir 38 punkti, visiem "nesajauktajiem" 10.b klases skolēniem ir 11 punkti. Sajauktajam darbam ir 35 punkti.

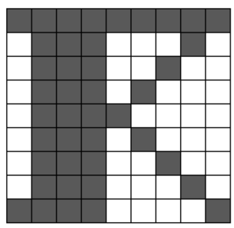
10.5. Tabulā ar izmēriem 9×9 rūtiņas dažas rūtiņas ir iekrāsotas, bet pārējās ir neiekrāsotas. Rūtiņu iekrāsošanai izmanto šādus gājienus: ja kādā rindā, kolonnā vai uz kādas no divām galvenajām diagonālēm ir iekrāsotas vismaz trīs rūtiņas, tad vienā gājienā var iekrāsot visas atlikušās šīs rindas, kolonnas vai diagonāles rūtiņas. Kāds ir mazākais iespējamais sākumā iekrāsoto rūtiņu skaits, pie kura var gadīties, ka ar aprakstītajiem gājieniem var iekrāsot visas tabulas rūtiņas?

Atrisinājums. Mazākais sākotnēji iekrāsoto rūtiņu skaits ir 6, piemēram, skat. 4. att. Parādīsim, kā ar atļautajiem gājieniem iekrāsot visu tabulu. Vispirms iekrāsojam abas diagonāles (skat. 5. att.), jo katrā ir 3 iekrāsotas rūtiņas. Pēc šīs iekrāsošanas varam iekrāsot pirmo rindu (skat. 6. att.), jo tajā ir iekrāsotas 3 rūtiņas. Pēc tam iekrāsojam 2., 3., 4. kolonnu (skat. 7. att.), beigās iekrāsojam visas atlikušās vēl neiekrāsotās rindas.


4. att.


5. att.

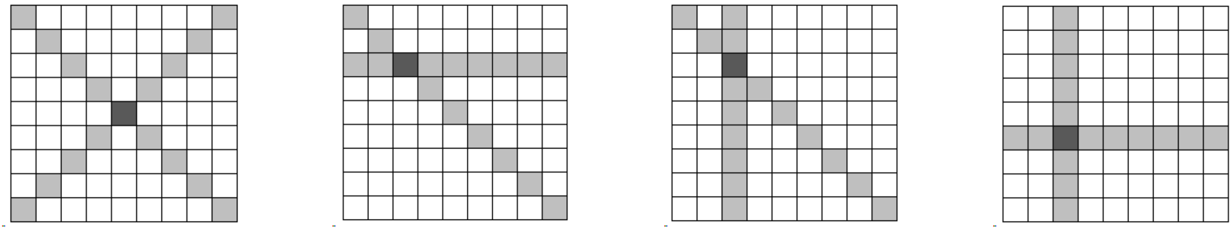

6. att.


7. att.

Pierādīsim, ka ar mazāku sākotnēji iekrāsoto rūtiņu skaitu nepietiek.

Lai kādu rindu, kolonnu vai diagonāli varētu iekrāsot, nepieciešams, lai uz tās jau būtu iekrāsotas vismaz trīs rūtiņas. Lai varētu izdarīt otro gājienu, atkal nepieciešamas vismaz trīs iekrāsotas rūtiņas, no kurām ne vairāk kā viena var būt tāda, kas tika izmantota pirmajā gājienā (ja būtu vismaz divas, tad tā būtu tā pati rinda, kolonna vai diagonāle).

Pieņemsim, ka šāda rūtiņa bija. Tad pēc diviem gājieniem ir izmantotas piecas iekrāsotās rūtiņas un iekrāsojuma varianti ir šādi: divas diagonāles (kopīga centrālā rūtiņa, skat. 8. att., kur ar gaiši pelēku iekrāsotas tās rūtiņas, kur var atrasties 4 iekrāsotās rūtiņas), diagonāle un rinda (skat. 9. att.), diagonāle un kolonna (skat. 10. att.), rinda un kolonna (skat. 11. att.). Nevienā no šiem salikumiem nav iespējams izdarīt vēl kādu gājienu (nevienā neaizpildītajā rindā, kolonnā vai uz diagonāles nav vairāk kā divu iekrāsotu rūtiņu), tādēļ ir nepieciešama vēl vismaz viena sākotnēji iekrāsota rūtiņa.



8. att. *9. att.* *10. att.* *11. att.*

11. klase

11.1. Atrast visus reālu skaitļu pārus $(a; b)$, kuriem ir spēkā nevienādība:

$$4a + 4b^2 + \sqrt{4a - 4b^2 - 1} \leq 1.$$

1. atrisinājums. Zemsaknes izteiksmei $4a - 4b^2 - 1$ jābūt nenegatīvai, tāpēc $4a - 4b^2 - 1 \geq 0$ jeb

$$4a \geq 4b^2 + 1.$$

Tā kā kvadrātsaknes vērtības ir nenegatīvas, tad no dotās nevienādības iegūstam, ka $4a + 4b^2 \leq 1$ jeb

$$1 \geq 4a + 4b^2.$$

Saskaitot abas iegūtās nevienādības, iegūstam, ka $0 \geq 8b^2$. Tātad vienīgā derīgā vērtība ir $b = 0$. Līdz ar to iegūstam nevienādības:

$$4a \geq 1 \text{ un } 1 \geq 4a.$$

Tātad $a = \frac{1}{4}$. Esam ieguvuši, ka vienīgais derīgais skaitļu pāris ir $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

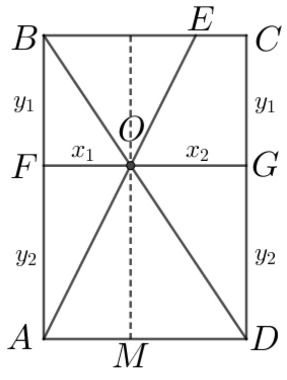
2. atrisinājums. Ja $a = \frac{1}{4}$ un $b = 0$, tad nevienādība ir spēkā, jo $4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 0 + \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot 0 - 1} = 1 \leq 1$.

Pamatosim, ka nevienādības vienīgais atrisinājums ir $a = \frac{1}{4}$ un $b = 0$. Aplūkosim trīs gadījumus.

- Ja $a < \frac{1}{4}$, tad $4a < 1$ un zemsaknes izteiksme $4a - 4b^2 - 1 = 4a - 1 - 4b^2$ ir negatīva, jo $4a - 1 < 0$ un $-4b^2 < 0$. Tādā gadījumā izteiksme nav definēta un atrisinājuma nav.
- Ja $a > \frac{1}{4}$, tad $4a > 1$. Tā kā $4b^2 + \sqrt{4a - 4b^2 - 1} \geq 0$, tad $4a + 4b^2 + \sqrt{4a - 4b^2 - 1} > 1$, tātad nevienādībai nav atrisinājuma.
- Ja $a = \frac{1}{4}$, tad nevienādību var pārrakstīt šādi: $1 + 4b^2 + \sqrt{-4b^2} \leq 1$ jeb $4b^2 + \sqrt{-4b^2} \leq 0$. Lai zemsaknes izteiksme būtu definēta, vienīgā derīgā vērtība ir $b = 0$.

11.2. Taisnstūrī $ABCD$ uz malas BC atlikts punkts E. Nogrieznis AE krusto taisnstūra diagonāli BD punktā O. Taisne, kas novilkta caur punktu O paralēli BC, krusto malas AB un CD attiecīgi punktos F un G. Zināms, ka trijstūra BOF laukums ir 4, bet trijstūra AOD laukums ir 63. Aprēķināt četrstūra $OECG$ laukumu!

Atrisinājums. Apzīmējam nogriežņu garumus $OF = x_1, OG = x_2, BF = CG = y_1, AF = DG = y_2$ (skat. 12. att.).



12. att.

Tā kā $\sphericalangle BFO = \sphericalangle DGO = 90°$ un $\sphericalangle BOF = \sphericalangle DOG$, tad $\Delta OFB \sim \Delta OGD$ pēc pazīmes $\ell\ell$. Tātad $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$ un $\frac{S_{OFB}}{S_{OGD}} = k^2$, no kā iegūstam, ka $S_{OGD} = \frac{4}{k^2}$.

Apskatām trijstūru laukumu attiecību:

$$\frac{S_{OFB}}{S_{OFA}} = \frac{\frac{1}{2}OF \cdot BF}{\frac{1}{2}OF \cdot AF} = \frac{BF}{AF} = \frac{y_1}{y_2} = k \quad \Rightarrow \quad S_{OFA} = \frac{4}{k}.$$

Apskatām trijstūri AOD (skat. 12. att., kur OM ir trijstūra AOD augstums):

$$S_{ODA} = S_{OMA} + S_{OMD} = S_{OFA} + S_{OGD} = \frac{4}{k} + \frac{4}{k^2} = 63.$$

Atrisinot iegūto kvadrātvienādojumu $63k^2 - 4k - 4 = 0$, iegūstam:

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 4 \cdot 63}}{126} = \frac{4 \pm 32}{126};$$

$$k_1 = \frac{36}{126} = \frac{2}{7} \quad \text{un} \quad k_2 = -\frac{28}{126} \text{ (neder)}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $S_{OFA} = \frac{4}{k} = 4 : \frac{2}{7} = 14$ un $S_{OGD} = \frac{4}{k^2} = 4 : \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 49$.

Tā kā $\Delta BOE \sim \Delta DOA$ pēc pazīmes $\ell\ell$, tad $\frac{S_{BOE}}{S_{DOA}} = \left(\frac{OB}{OD}\right)^2 = k^2$ un

$$S_{BOE} = S_{DOA} \cdot k^2 = 63 \cdot \frac{4}{49} = \frac{36}{7}.$$

Izmantojot laukuma īpašības, iegūstam:

- $S_{ABD} = S_{BOF} + S_{OFA} + S_{DOA} = 4 + 14 + 63 = 81$;
- $S_{ABD} = S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$;
- $S_{OECG} = S_{BCD} - S_{BOE} - S_{OGD} = 81 - \frac{36}{7} - 49 = 32 - \frac{36}{7} = \frac{188}{7} = 26\frac{6}{7}$.

11.3. Datorklasē ir n ($n \geq 3$) datori, daži no tiem ir savienoti savā starpā. Ik pa brīdim kāds no datoriem, kurš pirms tam vēl neko nav sūtījis, nosūta ziņojumu visiem datoriem, ar ko tas ir savienots. Pierādīt, ka jebkurā laika brīdī var atrast divus datorus, kuri ir saņēmuši vienādu ziņojumu skaitu!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka kādā brīdī katrs dators ir saņēmis dažādu ziņojumu skaitu. Tas nozīmē, ka datoru saņemto ziņojumu skaits ir $0;\ 1;\ 2;\ \dots;\ n-1$ (kaut kādā secībā). Tālāk datorus attiecīgi apzīmējam ar $D_0;\ D_1;\ \dots;\ D_{n-1}$ atbilstoši saņemto ziņojumu skaitam, tas ir, dators D_i ir saņēmis tieši i ziņojumus. Tā kā D_{n-1} ir saņēmis $n-1$ ziņojumu, tad tas ir savienots ar visiem pārējiem datoriem, turklāt visi pārējie datori ir nosūtījuši tam ziņas. Dators D_0 ziņojumus nav saņēmis, tātad tā kā tas ir savienots ar D_{n-1}, tad D_{n-1} ziņojumus vēl nav izsūtījis. Ne ar vienu citu datoru (izņemot D_{n-1}) dators D_0 nav savienots (citādi tas būtu no tā saņēmis ziņojumu).

Visbeidzot aplūkojam datoru D_{n-2}. Tā kā dators D_{n-1} ziņojumus vēl nav sūtījis, tad šis dators ir savienots ar visiem pārējiem $n-2$ datoriem (un saņēmis no tiem ziņojumus). Tātad tas ir savienots arī ar datoru D_0. Bet tā ir pretruna, jo D_0 ir savienots tikai ar D_{n-1}.

11.4. Kādām naturālām n vērtībām var atrast $2n+1$ naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus) ar īpašību, ka, izvēloties jebkuru $n+1$ no tiem, to summa dalīsies ar atlikušo n skaitļu summu?

Atrisinājums. Ja $n=1$, tad skaitļiem $1;\ 1;\ 1$ izpildās uzdevuma nosacījumi (jebkuru divu izvēlēto skaitļu summa dalās ar atlikušo skaitli). Ja $n=2$, tad skaitļiem $2;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1$ izpildās uzdevuma nosacījumi.

Pamatosim, ka pie $n \geq 3$ neeksistē $2n+1$ skaitļi, kam izpildās uzdevuma nosacījumi. Pieņemsim pretējo, tas ir, dotam n, kas ir vismaz 3, var atrast $2n+1$ naturālus skaitļus, lai jebkuru $n+1$ izvēlēto skaitļu summa dalītos ar atlikušo n skaitļu summu. Dotos skaitļus sakārtosim nedilstošā secībā un apzīmēsim ar $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n+1}$, kā arī apzīmēsim summas $S_A = a_2 + \cdots + a_{n+1}$ un $S_B = a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}$. No pieņēmuma izriet, ka $S_A + a_1$ dalās ar S_B un $S_B + a_1$ dalās ar S_A.

Tas nozīmē, ka $S_A + a_1 \geq S_B$. Tā kā S_B satur n lielākos skaitļus, tad $S_B \geq S_A$. Turklāt a_1 ir naturāls skaitlis, līdz ar to $S_B + a_1 > S_A$, bet $S_B + a_1$ dalās ar S_A, tāpēc iegūstam, ka

$$S_B + a_1 \geq 2S_A;$$
$$S_A + a_1 \geq S_B.$$

Saskaitot abas nevienādības, iegūstam, ka $S_A + S_B + 2a_1 \geq 2S_A + S_B$ jeb $2a_1 \geq S_A$. Tā kā $n \geq 3$, tad S_A satur vismaz 3 saskaitāmos, kas nav mazāki kā a_1 jeb $S_A \geq 3a_1$. Rezultātā iegūstam, ka $2a_1 \geq S_A \geq 3a_1$. Veidojas pretruna ar to, ka a_1 ir naturāls skaitlis. Tātad pieņēmums, ka pie $n \geq 3$ eksistē prasītie skaitļi, ir aplams.

11.5. Dots naturāls skaitlis n, ar M apzīmēsim pirmo $2n$ naturālo skaitļu kopu $M = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 2n\}$. Divi spēlētāji A un B spēlē spēli. Katrā gājienā vispirms spēlētājs A no kopas M izvēlas skaitli a, pēc tam spēlētājs B no kopas M izvēlas skaitli b, turklāt skaitļi a un b nav vienādi un nesakrīt ne ar vienu no iepriekš izvēlētajiem skaitļiem. Gājiena beigās tiek izveidota kvadrātfunkcija $y = x^2 - ax + b$ un uzrakstīta uz lapas. Pēc n gājieniem ir izvēlēti visi skaitļi no kopas M un iegūtas n kvadrātfunkcijas. Tālāk tiek aplūkoti visi iespējamie šo kvadrātfunkciju pāri. Katram pārim tiek aprēķinātas to grafiku visu krustpunktu y koordinātas, visas šādi iegūtās y koordinātas tiek saskaitītas. Pierādīt, ka spēlētājs B var panākt, lai iegūtā summa būtu tieši $n^3 - n$.

Atrisinājums. Ja spēlētājs A izvēlas skaitli i, tad spēlētājam B jāizvēlas skaitli $2n+1-i$. Aplūkojam divu iegūto funkciju krustpunktus, ja spēlētājs A izvēlas skaitļus i un j:

$$x^2 - ix + (2n+1-i) = x^2 - jx + (2n+1-j);$$
$$-(i-j) = x(i-j);$$
$$x = -1.$$

Tādā gadījumā funkcijas vērtība ir $y = (-1)^2 + i + 2n + 1 - i = 2(n+1)$. Tā kā pavisam ir $\frac{n(n-1)}{2}$ dažādu kvadrātfunkciju pāru, tad y koordinātu summa ir

$$2(n+1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n^2-1) = n^3 - n.$$

12. klase

12.1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = y + z \\ y + \dfrac{1}{y} = x + z \\ z + \dfrac{1}{z} = x + y \end{cases}$$

Atrisinājums. No pirmā vienādojuma atņemot otro, iegūstam:

$$x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = y - x;$$
$$2(x-y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad 2(x-y) = \frac{x-y}{xy}.$$

Aplūkojam gadījumu, kad $x = y$. Tad no sistēmas pirmā vienādojuma izriet, ka $\frac{1}{x} = z$. No trešā sistēmas vienādojuma iegūstam, ka

$$\frac{1}{x} + x = x + x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Līdz ar to esam ieguvuši atrisinājumus $(1; 1; 1)$ un $(-1; -1;\ -1)$.

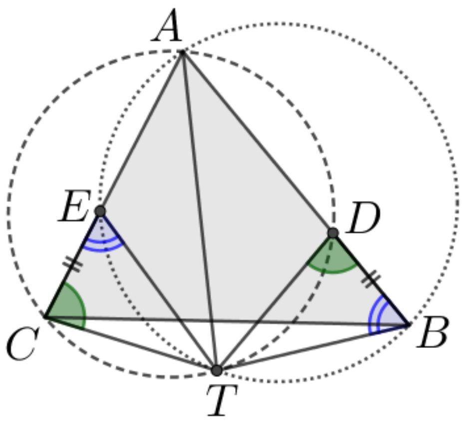
Ja $x \neq y$, tad $xy = \frac{1}{2}$. Analogi, saskaitot sistēmas 2. un 3. vienādojumu, kā arī saskaitot sistēmas 1. un 3. vienādojumu, iegūstam, ka $yz = xz = xy = \frac{1}{2}$. Taču, ja $yz = xz$, $xz = xy$, $yz = xy$ un neviens no x, y, z nav nulle (pēc definīcijas kopas), tad $y = x, z = y, z = x$, tāpēc $x = y = z$, kas ir jau apskatītais gadījums.

12.2. Uz dažādmalu trijstūra ABC malām AB un AC attiecīgi izvēlēti tādi punkti D un E, ka $BD = CE$. Trijstūriem ABE un ACD apvilktās riņķa līnijas krustojas vēl arī punktā T. Pierādīt, ka AT ir leņķa BAC bisektrise!

Atrisinājums. Izmantojot ievilkta četrstūra īpašību un blakusleņķu īpašību, iegūstam:

- $\sphericalangle ABT = 180° - \sphericalangle AET = \sphericalangle CET$ (no četrstūra $ABTE$);
- $\sphericalangle ACT = 180° - \sphericalangle ADT = \sphericalangle BDT$ (no četrstūra $ADTC$).

Ņemot vērā, ka $BD = EC$ pēc dotā, iegūstam, ka $\Delta BTD = \Delta ETC$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ (skat. 13. att.). Tā kā vienādu trijstūru atbilstošie augstumi ir vienādi, tas ir, $h_{BD} = h_{EC}$, tad punkts T atrodas vienādos attālumos no leņķa BAC malām, tātad punkts T atrodas uz šī leņķa bisektrises jeb AT ir leņķa BAC bisektrise.



13. att.

12.3. Uz galda traukā ir 200 konfektes. Brālītis un Karlsons pēc kārtas izdara gājienus, Brālītis sāk. Vienā gājienā var paņemt no trauka un apēst vai nu vienu, vai divas konfektes. Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo konfekti. Kurš uzvarēs pareizi spēlējot, ja papildus zināms, ka katrs no viņiem var apēst ne vairāk kā **a)** 140; **b)** 110 konfektes? (Gadījumā, ja spēlētājs vairs nevar izdarīt gājienu, viņš zaudē).

Atrisinājums. a) Vienmēr var uzvarēt Brālītis. Šajā gadījumā 140 ir pietiekami liels skaitlis un neietekmē spēles gaitu, var spēlēt tā it kā šāda ierobežojuma nebūtu. Tādā gadījumā pirmā spēlētāja stratēģija ir klasiska: vajag atstāt pretiniekam konfekšu skaitu, kas dalās ar 3. Tas nozīmē, ka pirmajā gājienā Brālītim jāapēd 2 konfektes, pēc tam katrā nākamajā gājienā, ja Karlsons ēd vienu konfekti, tad Brālītim jāēd divas, bet, ja Karlsons ēd divas konfektes, tad Brālītim jāēd vienu. Tādējādi pēc pirmā Brālīša gājiena traukā paliks 198 konfektes (198 dalās ar 3) un pēc katra nākamā Brālīša gājiena konfekšu skaits traukā samazināsies par 3 un pēc $198 : 3 = 66$ gājieniem kļūs vienāds ar 0. Kopā Brālītis būs izdarījis $1 + 66 = 67$ gājienus un katrā gājienā apēdis ne vairāk kā 2 konfektes, tātad kopā viņš būs apēdis ne vairāk kā $67 \cdot 2 = 134$ konfektes.

b) Vienmēr var uzvarēt Karlsons. Šajā gadījumā iepriekšējā stratēģija vairs nedarbojas, jo, ja Brālītis mēģinās to pielietot un Karlsons katrā gājienā ēdīs vienu konfekti, tad Brālītim būs jāņem divas un jau pēc 55 gājieniem viņš būs pārēdies un vairāk ēst nevarēs, kaut gan apēstas būs tikai $2 + 54 \cdot 3 = 164$ konfektes.

Aprakstīsim stratēģiju, ar kuru Karlsons var uzvarēt. Pirmajos 70 gājienos viņš katrā ēd vienu konfekti. Pēc šiem gājieniem būs apēstas vismaz 140 konfektes, tātad atlikušas 60 vai mazāk konfekšu. Ja pirms viņa 71. gājiena konfekšu skaits nedalās ar 3, tad viņš jau var pielietot a) gadījuma stratēģiju, katrā atlikušajā gājienā paņemot attiecīgi 1 vai 2 konfektes, lai pēc viņa gājiena atlikušais konfekšu skaits dalītos ar 3. Tā kā viņš vēl var apēst $110 - 70 = 40$ konfektes, tad ar to viņam pietiek vēl vismaz 20 gājieniem un gājienu skaits noteikti nebūs lielāks, jo ar šo stratēģiju katrā gājienā konfekšu skaits samazinās par 3, tātad vairām par 20 gājieniem vajadzētu vairāk par 60 konfektēm.

Interesantāka ir situācija, ja pirms Karlsona 71. gājiena konfekšu skaits dalās ar 3. Tādā gadījumā tas ir 57 vai mazāks. Tagad katrā savā gājienā Karlsons var turpināt ēst vienu konfekti, līdz pēc kāda viņa gājiena konfekšu skaits traukā dalās ar 3 (un tad tālāk viņš var lietot atkal klasisko stratēģiju). Pierādīsim, ka šāds brīdis, kad pēc Karlsona gājiena konfekšu skaits traukā dalās ar 3, noteikti pienāks. Lai to nepieļautu, Brālītim katrā gājienā būtu jāņem 2 konfektes. Tādā gadījumā, kad traukā būs palikušas 0 konfektes, Karlsons būs apēdis ne vairāk kā $70 + 57 : 3 = 89$ konfektes un tātad Brālītis būs apēdis vismaz $200 - 89 = 111$ konfektes, kas ir pretrunā ar to, ka viņš nevar apēst vairāk kā 110 konfektes.

12.4. Profesors Cipariņš iedomājās naturālu skaitli n un uz tāfeles vienu aiz otra bez atstarpes uzrakstīja skaitļus 2^n un 14^n (tieši šādā secībā), uzrakstīto skaitli apzīmēsim ar C (piemēram, ja $n = 2$, tad $C = 4196$). Vai iespējams, ka skaitlis $C - 1$ ir pirmskaitlis?

Atrisinājums. Pamatosim, ka $C - 1$ nevar būt pirmskaitlis. Pieņemsim pretējo, ka ir dots tāds naturāls skaitlis n, ka $C - 1$ ir pirmskaitlis. Skaitļa 2^n ciparu summa pēc moduļa 3 ir $(-1)^n$. Līdzīgi arī skaitļa 14^n ciparu summa pēc moduļa 3 būs $(-1)^n$. Tas nozīmē, ka skaitļa C ciparu summa pēc moduļa 3 ir $(-1)^n + (-1)^n$. Ja skaitlis n ir nepāra, tad skaitļa $C - 1$ ciparu summa dalās ar 3, jo $(-1)^n + (-1)^n - 1 \equiv -1 - 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Tātad secinām, ka n jābūt pāra skaitlim.

Tagad apskatām skaitļa C pēdējo ciparu. To viennozīmīgi noteiks skaitļa 14^n pēdējais cipars. Tā kā mūs interesē tikai pēdējais cipars, tad varam pētīt skaitļa 4^n pēdējo ciparu.

n	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
4^n (mod 10)	6	6	6	6	6

Ievērojam, ka skaitļa C pēdējais cipars vienmēr būs 6, ja n ir pāra skaitlis. Tas nozīmē, ka skaitļa $C - 1$ pēdējais cipars būs 5 jeb skaitlis $C - 1$ dalīsies ar 5. Iegūstam pretrunu ar pieņēmumu, ka $C - 1$ ir pirmskaitlis.

12.5. Atrast lielāko reālo skaitli A ar īpašību, ka $3x^2 + y^2 + 1 \geq A(x^2 + xy + x)$ visiem reāliem skaitļiem x un y.

1. atrisinājums. Vispirms ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$$(3 - A)x^2 + y^2 - Axy - Ax + 1 \geq 0;$$
$$\left(y - \frac{A}{2}x\right)^2 + \left(3 - A - \frac{A^2}{4}\right)x^2 - Ax + 1 \geq 0.$$

Tā kā saskaitāmais $\left(y - \frac{A}{2}x\right)^2$ vienmēr būs nenegatīvs, un pie atbilstošas y izvēles vienāds ar 0, tad mums atliek atrast tādu lielāko A vērtību, lai nevienādība

$$\left(3 - A - \frac{A^2}{4}\right)x^2 - Ax + 1 \geq 0$$

būtu patiesa visiem reāliem skaitļiem x. Tātad atbilstošās kvadrātfunkcijas zariem jābūt vērstiem uz augšu, tas ir, $\left(3 - A - \frac{A^2}{4}\right) \geq 0$ jeb $A^2 + 4A - 12 \leq 0$, un diskriminantam jābūt nepozitīvam, tas ir,

$$A^2 - 4\left(3 - A - \frac{A^2}{4}\right) = 2A^2 + 4A - 12 \leq 0.$$

Ievērojam, ka $A^2 + 4A - 12 \leq 2A^2 + 4A - 12$, tāpēc jebkuram A, kam izpildās diskriminanta nosacījums, atbilstošās kvadrātfunkcijas zari būs vērsti uz augšu. Maksimālais A būs tad, kad $2A^2 + 4A - 12 = 0$, jo tad ir iespējams, ka sākotnējā nevienādība pārvēršas par vienādību, tas ir, esam atraduši lielāko A. Lielākā vienādojuma $2A^2 + 4A - 12 = 0$ sakne ir $\sqrt{7} - 1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka lielākā A vērtība ir $\sqrt{7} - 1$.

2. atrisinājums. Apskatām trīs tādus pozitīvus skaitļus α, β, γ, kuriem $\alpha + \beta + \gamma = 3$. Tad, lietojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$3x^2 + y^2 + 1 = (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + y^2 + 1 = \alpha x^2 + (\beta x^2 + y^2) + (\gamma x^2 + 1) \geq \alpha x^2 + 2\sqrt{\beta}xy + \sqrt{\gamma}x.$$

Tā kā pierādāmajā nevienādībā labās puses izteiksmes saskaitāmo koeficientiem jābūt vienādiem, tad izvēlamies tādas α, β un γ vērtības, lai $\alpha = 2\sqrt{\beta} = 2\sqrt{\gamma}$, kas ir ekvivalents ar

$$2\alpha^2 = 4\beta + 4\gamma;$$
$$2\alpha^2 = 4(3 - \alpha);$$
$$\alpha^2 + 2\alpha - 6 = 0;$$
$$\alpha = -1 \pm \sqrt{7}.$$

Tātad $\alpha = \sqrt{7} - 1$, jo α ir pozitīvs. Tātad $\beta = \gamma = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}$. Paņemot šādus koeficientus sanāk, ka

$$3x^2 + y^2 + 1 \geq \left(\sqrt{7} - 1\right)(x^2 + xy + x)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y, kas nozīmē, ka skaitlim $\sqrt{7} - 1$ izpildās dotā nevienādība. Turklāt, ja izvēlamies skaitļus x un y ar īpašību, ka

$$\beta x^2 = y^2 = 1;$$
$$\left(2 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)x^2 = 1;$$
$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}, \qquad y = 1.$$

tad nevienādība kļūs par vienādību, no kā secinām, ka visas skaitļa A vērtības lielākas nekā $\sqrt{7} - 1$ neapmierina uzdevuma nosacījumus, no kā var secināt, ka lielākais skaitlis A ar prasīto īpašību ir $\sqrt{7} - 1$.