1. KONKURSS 4. KLASĒM „TIK VAI... CIK?”

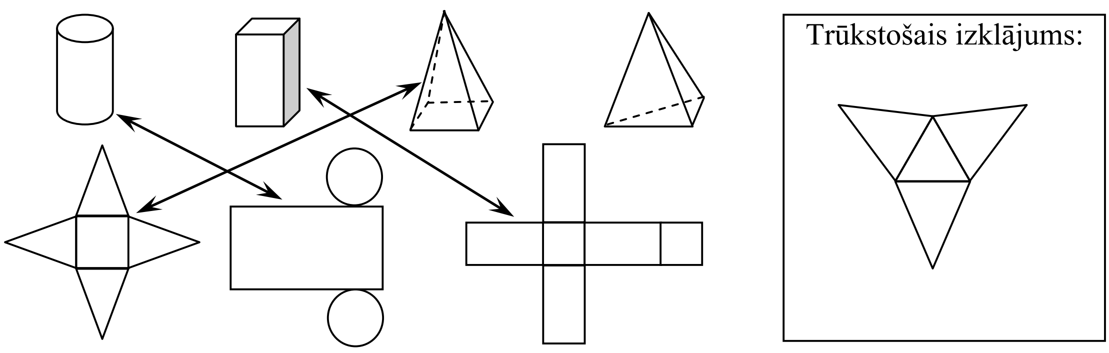
2006./2007. MĀCĪBU GADS

1.1. PIRMĀ KĀRTA

1.1.1. **C**
1.1.2. **C;** zinot kvadrātiņa perimetru, aprēķinām, ka vienas malas garums ir 1 cm un saskaitām malas
1.1.3. **D**
1.1.4. **C**
1.1.5. **C;** $2+6+12+20+30=70$
1.1.6. **B**
1.1.7.
1.1.7.1. A
1.1.7.2. A
1.1.7.3. D
1.1.8. **E;** $20\cdot 20=400$
1.1.9. **B**
1.1.10. C
1.1.11. E; rudens mēneši ir septembris, oktobris un novembris
1.1.12. A
1.1.13. B

1.2. OTRĀ KĀRTA

1.2.1. **B**
1.2.2. **A;** trijstūrim visām trim malām jābūt taisnes nogriežņiem, bet šajā zīmējumā neviens trijstūris neveidojas.
1.2.3. **C;** Jānītim vēl vajadzīgi 120-64=56 santīmi, bet 56:9=6, atl. 2. Tātad pēc 6 dienām vēl nebūs sakrāta pietiekamā summa, bet pēc 7 dienām krājkasītē jau būs vairāk nekā 1 Ls 20 sant., tātad pietiekami, lai nopirktu vāzīti.
1.2.4. **C;** tā kā abu figūru kontūras tika izlocītas no vienas un tās pašas stieples (stieples garums nemainījās), abu iegūto figūru perimetri ir vienādi ar šīs stieples garumu.
1.2.5. **1)** 65 min.=1 h 300 sek.< 1 h 500 sek.
2) 1 t-900 kg=100 kg; 30 kg 300 g·3=90 kg 900 g, tātad 1 t-900 kg > 30 kg 300 g·3
1.2.6. Trūkstošajam izklājumam par pareizu uzskatāms jebkurš zīmējums, kas attēlo 4 pareizi savienotus trijstūrus (sk. A1. zīm.); malu garumiem nav jāpievērš vērība.



A1. zīm.

1.2.7. Mandarīnus Jūlija ēda $4x$ minūtes, ābolus $3y$ minūtes, tātad ēšanai pavisam Jūlija veltīja $4x+3y=20$ minūtes. Uzdevumu risināšanai viņa patērēja $2z=2\cdot 9=18$ min. Tātad līdz filmai vēl atlika 40-20-18=**2 minūtes**.

1.2.8. Šajā uzdevumā iespējamas vairākas pareizas atbildes. Pietiek, ja skolēns katrā gadījumā uzrādījis vienu pareizu piemēru.

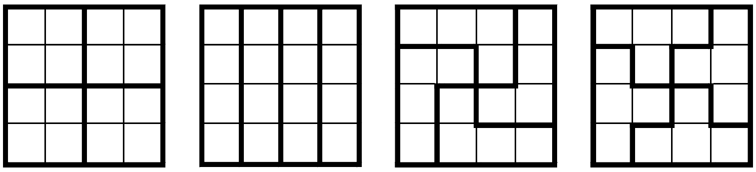
a) Piemēram, 1000-999=1.

Pavisam šajā gadījumā var atrast 45 pareizas vienādības. Četrciparu skaitlis nevar būt lielāks par 1008; trīsciparu skaitlis nevar būt mazāks par 991.

b) Jebkuru divciparu skaitli reizinot ar 0, iegūst 0, bet divciparu skaitli reizinot ar citu (naturālu) skaitli, iegūst vismaz divciparu skaitli. Tātad pirmajās divās rūtiņās var būt ierakstīti jebkuri cipari (pirmajā nedrīkst būt 0), bet trešajā un ceturtajā rūtiņā jābūt 0.

1.2.9. Strīpaino runču ir 3:3=1, tātad balto ir vairāk nekā 1, bet mazāk nekā 3; tātad ir 2 baltie runči. Pavisam kopā ir 1+2+3=6 runči, no kuriem bez strīpām ir 3+2=5 runči, un tie sastāda $\frac{5}{6}$ no visiem runčiem.

1.2.10. Doto kvadrātu 4 vienādās daļās var sadalīt 4 veidos, lai iegūtās daļas katrā veidā būtu citas formas. (Figūriņas un uzskatām par vienādām.)



A2. zīm.

Eksistē tikai viena 4 rūtiņu figūra , kas A2.zīmējumā nav izmantota kā daļa. Viegli pārbaudīt, ka no 4 šādām figūrām kvadrātu salikt nevar.

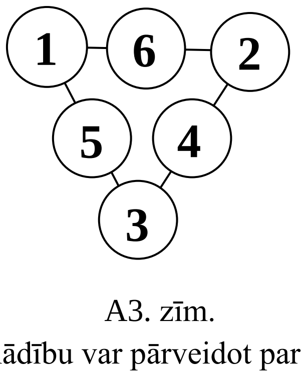
1.3. TREŠĀ KĀRTA

1.3.1 $1000w = 1000$=> $w = 1$

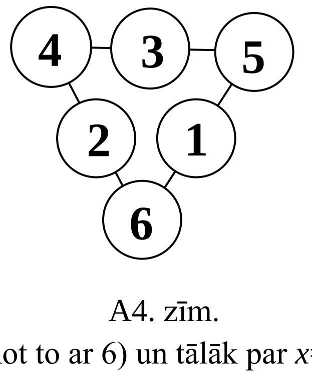
1.3.2. $2\,cm + 3\,cm = 5\,cm$

$24\,g < 25\,g$

1.3.3. Skatīt, piemēram, A3. un A4. zīm.



A3. zīm.

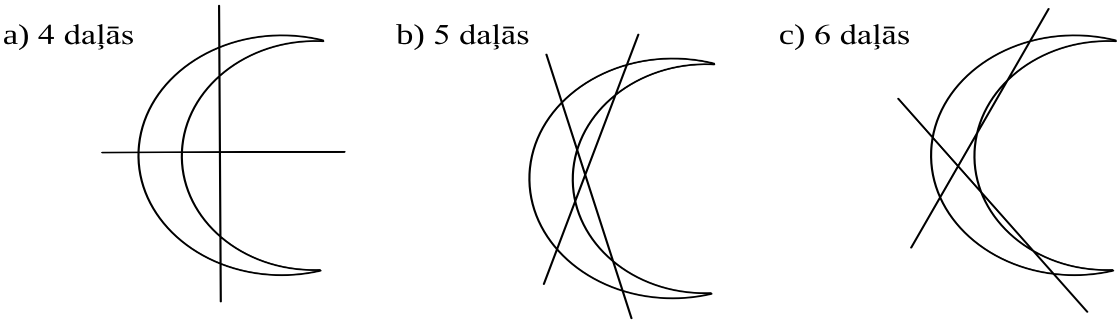


A4. zīm.

1.3.4. a) $x=0$; vienādību var pārveidot par $3x=2x$ (reizinot to ar 6) un tālāk par $x=0$.

b) x var būt jebkurš skaitlis, jo kādu skaitli gan reizinot gan dalot ar 1, iegūstam to pašu skaitli.

1.3.5. **Jā, var.** Skatīt A5. zīm.



A5.

1.3.6. Ievērojam, ka lielā kvadrāta malas garums ir vienāds ar 3 riņķa līnijas rādiusu garumiem. Aprēķinām kvadrāta malu $36:4=9\,cm$ un rādiusu $9:3=3\,cm$. Tā kā riņķa līnijas diametrs ir vienāds ar divu rādiusu garumu, iegūstam, ka diametrs ir $6\,cm$.

1.4. CETURTĀ KĀRTA

1.4.1. **a)** 999 · (998 · 2 – 2 · 997) : 2 = 999·2:2 = **999**
b) (90807 – 30201) : 6 – 100 = 60606:6-100 = 10101-100 = **10001**

1.4.2. Atbilde: 5 · 9 + 24 : **(**4 – 3**)**=69.

1.4.3. 25 t 50 kg + 13 t 950 kg – (24 t 8 c – 18 t 3 kg) = 39 t -6 t 797 kg = **32 t 203 kg**

1.4.4. A = 1000-482=**518;** B = 900-518=**382**; C = 1000-900=**100**

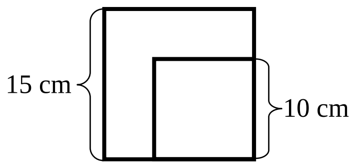
1.4.5. **48**

1.4.6. Risinājums: 76+73+81+70=300 (gr. kopā)
300:3=100 (gr. katrā plauktā)
100-73=**27** (gr. paņemtas no apaksējā plaukta)
100-81=**19** (gr. paņemtas no vidējā plaukta)
100-70=**30** (gr. paņemtas no augšējā plaukta)

1.4.7. Risinājums: 15-11=4 (par tik kladēm vairāk viņa pirktu)
50+70=120 (sant. maksā 4 klades)
120:4=30 sant. maksā 1 klade)
11·30+50=380 sant.=**3 Ls 80 sant.** (tik naudas bija Ritai)

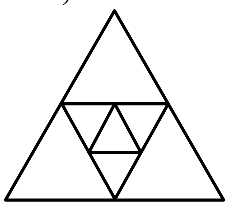
1.4.8. Katrā skaldnē ir 4 taisni leņķi, taisnstūra paralēlskaldnim ir 6 skaldnes, kopā ir 4·6=**24** taisni leņķi.

1.4.9. Sk. A6.zīm.



A6. zīm.

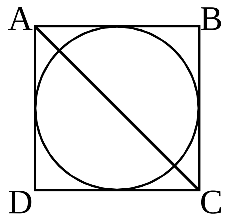
1.4.10. Risinājums (sk. A7. zīm.):
a) 6 : 3=2 (cm gara mazākā trijstūra mala);
2 · 2=4 (cm gara vidējā trijstūra mala);
4 · 2=8 (cm gara lielākā trijstūra mala);
8 · 3=**24** (cm lielākā trijstūra perimetrs).



A7. zīm.

b) 1 vidējais trijstūris satur 4 mazākos trijstūrīšus, tātad vidējā trijstūra laukums ir 4 reizes lielāks nekā vismazākā trijstūra laukums. Vislielākais trijstūris sastāv no 4 vidējiem trijstūriem, tātad tā laukums ir 4 reizes lielāks nekā vidējā trijstūra laukums. Tātad vislielākā trijstūra laukums ir 4 · 4=**16 reizes** lielāks nekā vismazākā trijstūra laukums.

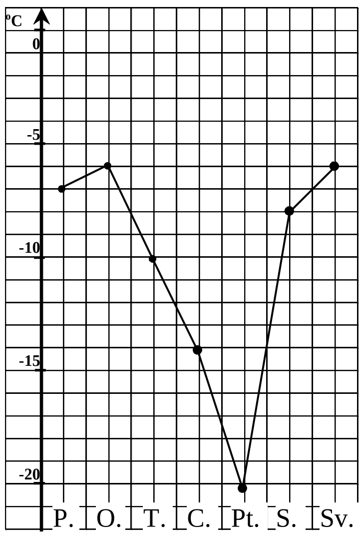
1.4.11. Risinājums (sk. A8.zīm.):
2 · 2=4 (cm kvadrāta malas garums, jo tā vienāda ar riņķa diametru)
4 · 4=16 (cm^2 kvadrāta laukums)
16 : 2=**8** (cm^2 trijstūra ABC laukums)



A8. zīm.

1.4.12. Risinājums: 4 · 9=36 (tik kubiņi jau izmantoti)
2 · 9=18 (tik kubiņus vēl pievienotu)
36+18+3=**57** (kubiņi pavisam ir Lienei)

1.4.13. **a)** pirmdien: **-7 °C;**
otrdien: **-6 °C;**
trešdien: **-10 °C;**
ceturtdien: **-14 °C;**
piektdien: **-20 °C;**
sestdien: **-8 °C;**
svētdien: **-6 °C.**
b) sk. A9. zīm.



A9. zīm.

2. JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2.1. PIRMĀ KĀRTA

2.1.1. Vispirms ievērosim, ka A>O, jo, A reizinot ar skaitli ROMA, iegūst piecciparu skaitli, bet O reizinot ar ROMA – tikai četrciparu skaitli, pie tam O≠1, jo starpreizinājums TZOA nesakrīt ar reizinātāju ROMA. Tātad O≥2 un A>2. Reizinājums A·A beidzas ar to pašu ciparu A; tātad A varētu būt 1 (neder, jo A>2), 5 vai 6. Arī O·A beidzas ar ciparu A un 1<O<A, tāpēc neder A=6. Tātad **A=5** un **O=3**. Iegūstam sekojošu piemēru:

$$\begin{array}{r} R\mathbf{3}M\mathbf{5} \\ \cdot\quad \mathbf{5\,3\,5} \\ \hline GGTR\mathbf{5} \\ TZ\mathbf{3\,5} \\ GGTR\mathbf{5} \\ \hline GR\mathbf{5}M\mathbf{5}T\mathbf{5} \end{array}$$

Tālāk noskaidrosim, kāds cipars atbilst burtam R. Reizinot 5 ar četrciparu skaitli R3M5, jāiegūst 5-ciparu skaitlis. Bet, reizinot 5 ar skaitli, kas mazāks nekā 1999, iegūst četrciparu skaitli (jo pat 5·1999=9995 – četrciparu skaitlis), tātad R≥2. Savukārt reizinot 3 ar skaitli R3M5, jāiegūst 4-ciparu skaitlis. Bet, reizinot 3 ar skaitli, kas lielāks nekā 4000, reizinājums būs 5-ciparu skaitlis (jo jau 3·4000=12000 – piecciparu skaitlis), tātad R<4. Dotajā piemērā dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, tātad R≠3. Atliek iespēja **R=2**.

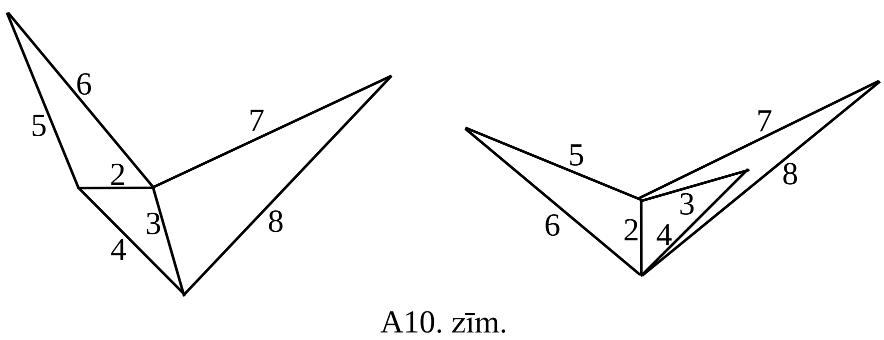
Reizinot 5 ar 4-ciparu skaitli, kura pirmais cipars ir 2, reizinājuma pirmais cipars būs 1 (jo, apskatot mazākā un lielākā šāda skaitļa reizinājumu ar 5, redzam: 2000·5=**1**0000 un 2999·5=**1**4995; pārējie šādi reizinājumi būs lielāki par 10000 un mazāki nekā 14995 – tātad pirmais cipars būs 1) jeb **G=1**.

Zinot, ka R=2, no starpreizinājumu summas iegūstam **T**=2+5=**7**.

Izdalot 11725 ar 5, iegūstam 11725:5=2345, no kurienes **M=4**. Tālāk izpildot reizināšanu, atrodam **Z=0,** un šifrētais reizināšanas piemērs izskatās sekojoši:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,4\,5 \\ \cdot\quad 5\,3\,5 \\ \hline 1\,1\,7\,2\,5 \\ 7\,0\,3\,5 \\ 1\,1\,7\,2\,5 \\ \hline 1\,2\,5\,4\,5\,7\,5 \end{array}$$

2.1.2. Tā kā 3 trijstūriem kopā ir 9 malas, bet doti tikai 7 stienīši, tātad 2 stienīši būs kopīgas malas 2 trijstūriem vai 1 stienītis būs kopīga mala visiem 3 trijstūriem. No dotajiem stienīšiem 3 trijstūrus izveidot var daudz dažādos veidos, piem., skat. A10. zīmējumu. Lai no trīs stienīšiem varētu izveidot trijstūri, stienīšu garumiem jāapmierina *trijstūra nevienādības*, t.i., **jebkuru divu trijstūra malu garumu summa ir lielāka par trešās malas garumu**.



A10. zīm.

2.1.3. Apzīmēsim katram dēlam pienākošos dukātu daudzumu šādā veidā: Jānim – j, Pēterim – p, Miķelim – m, Kārlim – k, Dāvim – d, Ansim – a. Tad no uzdevuma nosacījumiem iegūstam šādas vienādības:

$j=6a=3k,\ p=3d,\ m=3a$

Tātad $k=2a$, un visi brāļi kopā mantoja

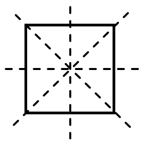
$j+p+m+k+d+a=6a+3d+3a+2a+d+a=12a+4d$ (≤ 50)

dukātus. Tā kā Jānis saņēma lielāko mantojumu, tad $p<j$ jeb $3d<6a$, tātad $d<2a$. Ņemot vērā nosacījumu, ka visi brāļi saņēma dažādu daudzumu dukātu, secinām, ka $a\neq 1$ (pretējā gadījumā jābūt $d<2\cdot 1=2$ un $d\neq 1$, bet tādu naturālu skaitļu nav). Tātad $a\geq 2$. Ja $a\geq 4$ (un $d\geq 1$), tad $12a+4d\geq 12\cdot 4+4\cdot 1=52>50$, tātad $a<4$. Atliek apskatīt gadījumus, kad $a=2$ vai $a=3$ un $d<2a$, $d\neq a$. Apkoposim tos tabulā.

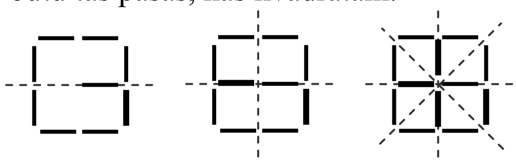
a	d	$k=2a$	$m=3a$	$p=3d$	$j=6a$	kopā	
2	**1**	**4**	**6**	**3**	**12**	28	
2	**3**	**4**	**6**	**9**	**12**	36	
3	1	6	9	3	18		neder, jo $p=a$
3	2	6	9	6	18		neder, jo $k=p$
3	4	6	9	12	18	52>50	neder
3	5	6	9	15	18	56>50	neder

Tātad iespējami divi varianti: pavisam bija 28 zelta dukāti vai 36 zelta dukāti, kas tika sadalīti tā, kā redzams tabulā.

2.1.4. Figūras simetrijas ass ir taisne, kas sadala figūru divās daļās, kuras ir viena otras spoguļattēli attiecībā pret šo taisni. Kvadrātam ir 4 simetrijas asis (skat. A11.zīm.). Tā kā dotajai figūrai jau ir kvadrāta forma (bez 1 sērkociņa uz kontūra), acīmredzot sērkociņi jāpievieno tā, lai iegūtajai figūrai simetrijas asis būtu tās pašas, kas kvadrātam.



A11.zīm.



a) b) c)

A12.zīm

a) Dotajai figūrai nav nevienas simetrijas ass. Tātad, lai iegūtu figūru ar vienu simetrijas asi, jāpievieno vismaz 1 sērkociņš. Ar viena sērkociņa pievienošanu pietiek, skat. A12a zīm.

b) Pievienojot tikai vienu sērkociņu, nevar iegūt figūru ar 2 simetrijas asīm (aplūkojiet visus gadījumus!); pievienojot 2 sērkociņus tā, kā parādīts A12b zīmējumā, iegūstam figūru ar 2 simetrijas asīm.

c) Lai iegūtu figūru, kurai ir 4 simetrijas asis (tādas kā kvadrātam), ir jāpievieno vismaz 4 sērkociņi (skat. A12c zīm.).

2.1.5. Uzvarēs tā meitene, kas pēc sava gājiena iegūs 1. Skaitlim 1 ir tikai viens dalītājs 1, tātad nākamajai spēlētājai atliek viens vienīgs gājiens – „1-1=0", tātad viņa zaudēs. Vēl ievērosim, ka nepāra skaitlim ir tikai nepāra dalītāji, tātad pēc nepāra skaitļa noteikti tiks iegūts pāra skaitlis (nepāra skaitlis – nepāra skaitlis = pāra skaitlis). Savukārt pāra skaitlim ir gan pāra dalītāji, gan nepāra dalītāji (vismaz dalītājs 1), tātad pēc pāra skaitļa var iegūt gan pāra, gan nepāra skaitli. Tātad uzvarēt var tā meitene, **pirms** kuras gājiena uz tāfeles ir pāra skaitlis: atņemot no tā nepāra dalītāju, viņa iegūs nepāra skaitli, savukārt otra meitene pēc sava gājiena var iegūt tikai pāra skaitli. Tā kā uzrakstītie skaitļi ar katru gājienu samazinās, kādreiz noteikti tiks iegūta 0.

Ja sākumā ir uzrakstīts 105 – nepāra skaitlis, tad Anita pēc sava gājiena noteikti iegūst pāra skaitli, un **Laima uzvarēs**, ja pēc katra sava gājiena atstās nepāra skaitli.

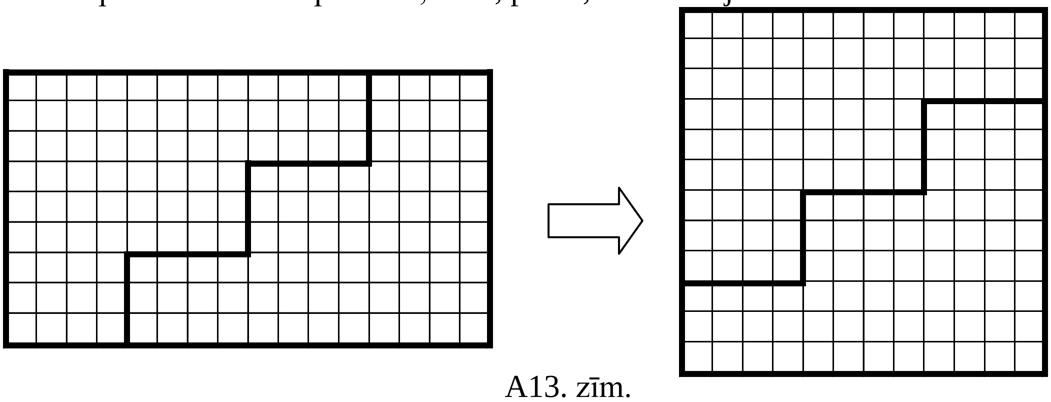
2.2. OTRĀ KĀRTA

2.2.1. Apskatām mazākos naturālos skaitļus, kuru decimālajā pierakstā ir tikai cipari „3”, un pārbaudām to dalāmību ar 7. Redzam, ka skaitļi 3, 33, 333, 3333, 33333, nedalās ar 7, bet skaitlis 333333 dalās ar 7. Tātad meklējamais skaitlis ir **333333**.

Ievērosim, ka $333333=3\cdot 111111$ un skaitļiem 3 un 7 nav kopīgu dalītāju, tātad 111111 dalās ar 7. Tātad ar 7 dalās visi sešciparu skaitļi, kuru decimālajā pierakstā visi cipari ir vienādi.

2.2.2. Sagriežot taisnstūri vairākās daļās un tās pārkārtojot savādāk bez pārklāšanās un tukšumiem, iegūtās figūras laukums būs vienāds ar taisnstūra laukumu. Tātad iegūstamā kvadrāta laukums ir $9\cdot 16=144$ rūtiņas, un tā malas garums ir $\sqrt{144}=12$ rūtiņas.

Kā var izpildīt uzdevuma prasības, skat., piem., A13.zīmējumā.



A13. zīm.

2.2.3. **Atbilde:** dotie skaitļi tabulā jāieraksta tā, kā parādīts A14. zīmējumā.

12	24		270
20	**1**	**4**	**5**
54	**3**	**2**	**9**
	8	**7**	**6**

A14. zīm.

12	24		270
20	**A**	**B**	**C**
54	**D**	**E**	**F**
	G	**H**	**I**

A15.zīm.

Risinājums. Apzīmēsim rūtiņas ar burtiem kā parādīts A15.zīm.

Tā kā $270=2\cdot 3^3\cdot 5$ un $54=2\cdot 3^3$, tad gan 3. kolonnā, gan 2. rindiņā jābūt ierakstītiem skaitļiem, starp kuru pirmreizinātājiem sastopami tieši trīs „3”. No dotajiem skaitļiem ar 3 dalās tikai $3=3^1$, $6=2\cdot 3^1$ un $9=3^2$. Tātad vienīgā iespēja, kā iegūt tieši trīs pirmreizinātājus „3”, ir ņemt skaitli 9 un vienu no skaitļiem 3 vai 6. Tātad rūtiņā F jāraksta skaitlis 9.

$20=2^2\cdot 5$ un $270=2\cdot 3^3\cdot 5$ dalās ar 5, bet starp skaitļiem no 1, 2, ..., 9 vienīgi skaitlis 5 satur pirmreizinātāju 5, tātad 5 jāraksta rūtiņā C.

Tālāk izrēķinām, ka rūtiņā I jāraksta $270:(5\cdot 9)=6$. Ievērosim, ka $12=6\cdot 2$ un $54=9\cdot 6$, tāpēc rūtiņās A un E ierakstīto skaitļu reizinājumam jābūt 2 (tas ir iespējams vienīgi tad, ja viens no šiem skaitļiem ir 1 un otrs – 2), savukārt rūtiņās D un E ierakstīto skaitļu reizinājumam jābūt 6, pie tam neviens no šiem skaitļiem nav 6 (tas ir ierakstīts rūtiņā I). Tātad rūtiņās E un D jāieraksta skaitļi 2 un 3.

Tātad rūtiņā E jāraksta 2, rūtiņā A – 1 un rūtiņā D – 3. Tālāk iegūstam, ka rūtiņā B jāieraksta 4 (jo $20=1\cdot 5\cdot 4$) un rūtiņā G jāraksta 8 (jo $24=1\cdot 3\cdot 8$). Neierakstīts palicis skaitlis 7, ko tad ierakstām rūtiņā H.

2.2.4. **Atbilde:** 12 cimdi.

Neviens pāris neveidosies, ja būs paņemti:

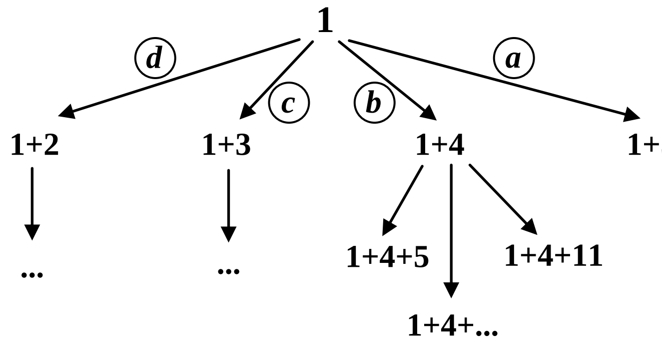
1) **tikai** labās rokas cimdi (pavisam tādu ir 10)
2) **tikai** kreisās rokas cimdi (pavisam tādu ir 9)
3) labās rokas cimdi – tikai zili un kreisās rokas cimdi – tikai sarkani (kopā tādu ir 8)
4) labās rokas cimdi – tikai sarkani un kreisās rokas cimdi – tikai zili (kopā tādu ir 11).

Tātad, ja no kastes tiks izvilkti 11 vai mazāk cimdi, var būt kāds no „sliktajiem” gadījumiem un neviens pāris neveidosies. Taču, paņemot vismaz **12** cimdus, noteikti varēs izveidot vismaz vienu pāri.

2.2.5. Atbilde: Kārlis var uzvarēt.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, kāda var būt spēles beigu situācija (t.i., kādas kaudzītes var palikt uz galda, kad nevienu vairs nevar sadalīt daļās atbilstoši uzdevuma nosacījumiem). **Vismazākajā** kaudzītē var būt 1 vai 2 konfektes (ja mazākajā kaudzītē būtu 3 (vai n>3) konfektes, to varētu sadalīt kaudzītēs ar 1 un 2 (vai 1 un n-1) konfektēm). Ja vismazākajā kaudzītē ir 2 konfektes, tad katrā nākamajā (pēc konfekšu daudzuma) kaudzītē jābūt tieši par 1 konfekti vairāk nekā iepriekšējā. Gadījumā, ja kāda kaudzīte ir par 2 vai vairāk konfektēm lielāka nekā iepriekšējā (t.i., ir šāda situācija: 2; 3; ...; k; $\geq k+2$; ...), tad šo kaudzīti varam sadalīt divās daļās – 1 un k+1. Iegūstam pretrunu, jo pieņēmām, ka apskatām beigu situāciju. Tā kā 2+3+4+5=14<16, bet 2+3+4+5+6=20>16, tad 16 konfektes šādi sadalīties nevar, un beigās mazākajā kaudzītē būs 1 konfekte.

Izspriedīsim, kādas situācijas varam iegūt spēles beigās, zinot, ka mazākajā kaudzītē būs 1 konfekte. Apskatīsim, kāda var būt otrā lielākā kaudzīte (sk.A16.zīm).



A16.zīm.

Otra lielākā kaudzīte var būt 2, 3 vai 4 konfektes liela, jo tās vairs nevar sadalīt divās kaudzītēs atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Ja tajā būtu 5 vai vairāk konfektes (sk. *a* gadījumu A16.zīmējumā), tad tā nebūtu beigu situācija, jo šo kaudzīti varētu sadalīt divās mazākās kaudzītēs (5=2+3).

Tālāk apskatīsim *b* gadījumu. Šeit trešajā lielākajā kaudzītē nevar būt 5 konfektes, jo 5=2+3. Tāpat trešajā kaudzītē nevar būt maksimāli iespējamās 11 konfektes (1+4+11=16), jo šo kaudzīti varētu sadalīt, piemēram, 2 un 9 konfektes lielās kaudzītēs. Nav iespējams arī, ka trešajā kaudzītē būtu no 6 līdz 10 konfektēm, jo tad vēl summa būtu mazāka par 16, bet, tā kā nākošajai kaudzītei jābūt lielākai par iepriekšējo, kopā būtu vairāk nekā 16 konfektes. Tātad gadījums, kad otrajā lielākajā kaudzītē ir 4 konfektes, nav iespējams.

Līdzīgi apskatām arī gadījumus *c* un *d*, tādējādi noskaidrojot, ka spēles beigās **var** tikt iegūtas šādas trīs situācijas: 16=1+2+3+4+6=1+3+5+7=1+2+5+8.

Tā kā katrā gājienā kaudzīšu skaits palielinās tieši par 1, un sākumā bija viena kaudzīte, tad pirmajā gadījumā uzvar Kārlis (jo tiek izdarīti 4 – pāra skaits- gājieni), otrajā un trešajā – Rūdis (tiek izdarīti 3 – nepāra skaits- gājieni).

Ievērosim, ka abās Rūda *uzvarošajās situācijās* ir kaudzīte ar 5 konfektēm, bet tādas kaudzītes nav Kārļa *uzvarošajā situācijā*. Savukārt Kārļa uzvarošajā situācijā ir kaudzītes ar 4 un 6 konfektēm, bet tādu kaudzīšu nav Rūda uzvarošajās situācijās.

Tagad apskatīsim visus iespējamos Rūda pirmos gājienus un kā uz tiem var atbildēt Kārlis, lai panāktu savu uzvaru.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1. Rūdis	1+15	2+14	3+13	4+12	5+11	6+10	7+9
2. Kārlis	1+**4**+**11**	2+**3**+**11**	3+**4**+**9**	4+**1**+**11**	**2**+**3**+11	6+**1**+**9**	**3**+**4**+9

Ja Rūdis uzvarētu, tad nākamajā gājienā viņam jāiegūst kāda no savām *uzvarošajām situācijām*. To būtu iespējams izdarīt, ja pēc 2. gājiena uz galda **jau atrastos** 2 kaudzītes ar

Rūdim *vajadzīgo* konfekšu skaitu tajās, tad sadalot trešo audzīti vajadzīgajās daļās, viņš uzvarētu. Taču Kārlis ir pacenties pēc sava gājiena atstāt tādas 3 kaudzītes, starp kurām nav divu tādu, kas ietilpst **vienā** Rūda *uzvarošajā situācijā*. Tāpēc ar vienu gājienu Rūdis savu uzvaru panākt nevarēs. Bet tas nozīmē, ka Kārlis vēl **varēs** izdarīt vienu gājienu. Tā kā beigās vispār var iegūt ne vairāk kā 5 kaudzītes (jo jau sešās mazākajās iespējamajās kaudzītēs kopā ir 1+2+3+4+5+6=21>16 konfekte), tad spēlē pavisam var tikt izdarīti ne vairāk kā 4 gājieni, tātad, izdarot 4. gājienu, Kārlis uzvarēs.

2.3. TREŠĀ KĀRTA

2.3.1. Atbilde: piemēram, 15317, 30617, 61217, 107117, 1530000000000017 u.c..

Risinājums. Meklējamo skaitli x varam uzrakstīt kā $x = \overline{\mathrm{A}17} = 100 \cdot \mathrm{A} + 17$, kur A – naturāls skaitlis.

Tā kā $x = 100 \cdot \mathrm{A} + 17$ dalās ar 17 un 17 dalās ar 17, tad arī $100 \cdot \mathrm{A}$ jādalās ar 17. Tā kā 17 ir pirmskaitlis un 100 nedalās ar 17, tad A jādalās ar 17.

Skaitļa x ciparu summai jābūt 17, un pēdējie divi cipari 1 un 7 summā dod 8, tātad skaitļa A ciparu summai jābūt 17-8=9.

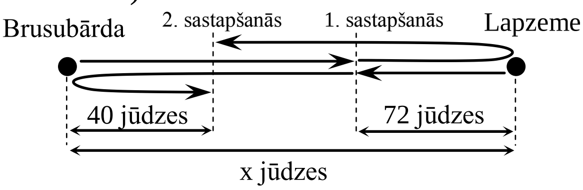
Tātad jāmeklē tāds skaitlis A, kas dalās ar 17 un kura ciparu summa ir 9. Tādi skaitļi ir, piemēram, 153, 306, 612, 1071 u.c.

„Iespraužot" skaitlī $\overline{\mathrm{A}17}$ starp A un 17 vairākas nulles (piem., $\overline{\mathrm{A}00...017}$), joprojām iegūsim skaitli, kas dalās ar 17 ($\overline{\mathrm{A}\underbrace{00...0}_{\text{n nulles}}17} = \mathrm{A} \cdot 1\underbrace{00...0}_{\text{n+2 nulles}} + 17$, A dalās ar 17, 17 dalās ar 17, tātad arī $\overline{\mathrm{A}00...017}$ dalās ar 17), kura pēdējie cipari ir 17, ciparu summa joprojām ir 17 (jo, pieskaitot nulles, summa nemainās) un kura decimālajā pierakstā ir vajadzīgais skaits ciparu.

Meklējamais 17-ciparu skaitlis varētu būt, piemēram, 1530000000000017.

2.3.2. Atbilde: 176 jūdzes.

Risinājums. Līdz pirmajam sastapšanās brīdim abi ziņneši kopā veica visu attālumu starp abām pilīm (apzīmēsim to ar x), savukārt līdz otrajam sastapšanās brīdim šis attālums tikai veikts trīsreiz (skat. A17.zīm.).



A17. zīm.

Tā kā abu ziņnešu ātrumi ir nemainīgi, tad līdz otrajam sastapšanās brīdim ziņneši ceļā pavadīja trīsreiz vairāk laika nekā līdz pirmajam sastapšanās brīdim (abi ziņneši - vienādu laiku). Tā ziņneša ātrums ir nemainīgs, tad trīsreiz ilgākā laika posmā viņš noiet trīsreiz garāku ceļa gabalu, tātad arī **katrs** ziņnesis atsevišķi līdz pirmajam sastapšanās brīdim nogāja trīsreiz mazāku attālumu nekā līdz otrajam sastapšanās brīdim.

Apskatot Lapzemes ziņneša noietos attālumus, iegūstam: $3 \cdot 72 = x + 40$, no kurienes $x = 176$ (jūdzes).

2.3.3. Atbilde: 49 tenisisti.

Risinājums. Tā kā tenisā nav neizšķirtu, tad katrā spēlē viens ir uzvarētājs un viens – zaudētājs, kurš no turnīra izstājas. Tātad pavisam var notikt ne vairāk kā 99 spēles, jo pēc pēdējās spēles paliek 1 neizstājies dalībnieks – šīs spēles uzvarētājs. Tātad visa turnīra laikā tiks izcīnītas ne vairāk kā 99 uzvaras, un pa divām uzvaram var izcīnīt ne vairāk kā 49 tenisisti (jo $50 \cdot 2 = 100 > 99$).

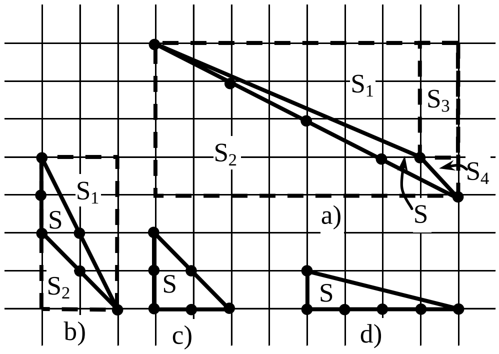
49 tenisisti pa 2 uzvarām izcīna, ja turnīrs ir noticis sekojoši: vispirms visi 100 tenisisti sadalās 50 pāros un katrā pārī noskaidro uzvarētāju. Pēc tam turnīrā ir palikuši 50 tenisisti, katram no kuriem ir tieši 1 uzvara (apzīmēsim tos ar A_1, A_2, ..., A_{50}). Pēc tam divi tenisisti A_1

un A_2 spēlē savā starpā; zaudētājs A_1 izstājas, bet uzvarētājs A_2 spēlē ar nākamo spēlētāju A_3, un šajā spēlē zaudē A_2. Tad A_3 spēlē ar nākamo tenisistu un zaudē, utt. (Shematiski tas attēlots zīmējumā, kur $B \to A$ nozīmē, ka B ir uzvarējis A).

$$A_1 \longleftarrow A_2 \longleftarrow A_3 \longleftarrow A_4 \longleftarrow \dots\dots \longleftarrow A_{49} \longleftarrow A_{50}$$

Turnīra beigās 50 tenisisti nebūs izcīnījuši nevienu uzvaru, tenisists A_1 būs izcīnījis 1 uzvaru un 49 tenisisti A_2, A_3, ..., A_{50} būs izcīnījuši pa 2 uzvarām.

2.3.4. Skat., piemēram, A18.zīmējumu (iespējami arī citi trijstūri, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem).



A18. zīm.

Visiem šiem trijstūriem laukums ir 2 rūtiņas. To var aprēķināt, apvelkot trijstūriem taisnstūrus, kuru malas iet pa rūtiņu malām, un atņemot „lieko” taisnleņķa trijstūru vai taisnstūru laukumus.

Piemēram, a) piemērā $S + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 \cdot 8 = 32$, $S_1 = (3 \cdot 7) : 2 = 10{,}5$, $S_2 = (4 \cdot 8) : 2 = 16$, $S_3 = 1 \cdot 3 = 3$, $S_4 = (1 \cdot 1) : 2 = 0{,}5$ tātad $S = 32 - 10{,}5 - 16 - 3 - 0{,}5 = 2$ rūtiņas;

b) piemērā $S + S_1 + S_2 = 2 \cdot 4 = 8$, $S_1 = (2 \cdot 4) : 2 = 4$, $S_2 = (2 \cdot 2) : 2 = 2$, tātad $S = 8 - 4 - 2 = 2$ rūtiņas;

c) piemērā $S = (2 \cdot 2) : 2 = 2$ rūtiņas;

d) piemērā $S = (1 \cdot 4) : 2 = 2$ rūtiņas.

Piezīme. Rūtiņu režģī uzzīmētiem daudzstūriem, kuru virsotnes atrodas režģa punktos, laukumu S var aprēķināt pēc t.s. Pīka formulas: $S = \frac{r}{2} + i - 1$, kur r ir režģa punktu skaits uz daudzstūra kontūra (ieskaitot virsotnes), i – režģa punktu skaits daudzstūra iekšpusē. No šīs formulas redzam, ka visiem uzdevumā minētajiem trijstūriem laukumi ir vienādi, un tas ir $\frac{6}{2} + 0 - 1 = 2$ laukuma vienības (1 laukuma vienība ir 1 rūtiņa).

2.3.5. **a)** Nē, nevar.

Pamatojumā izmantosim *pierādījumu no pretējā*. Pieņemsim, ka tā var gadīties. Tad abu uz vienas (<u>katras</u>) kartītes uzrakstīto skaitļu summa dalās ar 3. Tātad visu 10 šādu summu summa arī dalās ar 3. Bet tā ir vienāda ar visu 20 uzrakstīto skaitļu summu,t.i.:

(1+99)+(2+98)+(3+97)+(4+96)+(5+95)+(6+94)+(7+93)+(8+92)+(9+91)+(10+90)=
=10·100=1000.

Bet 1000 ar 3 nedalās, tātad mūsu pieņēmums ir aplams un nevar būt tā, ka katrai kartītei abās pusēs uzrakstīto skaitļu summas dalās ar 3.

b) Jā, tā var gadīties. A19.zīmējumā parādīts viens gadījums, kad tas izpildās (uz katras kartītes uzrakstīto skaitļu summa ir 100, tātad dalās ar 5). Iespējami arī citi varianti.

dzeltenā puse ⟶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zaļā puse ⟶	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90

A19.zīm.

2.4. CETURTĀ KĀRTA

2.4.1. **a)** Apzīmēsim trīsciparu skaitli ar $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ (*a* ir simtu cipars, *b* – desmitu cipars, *c* – vienu cipars). Tad ir jāmeklē tāds skaitlis, lai $\overline{abc} \cdot 8 = \overline{bca}$. Lai trīsciparu skaitli reizinot ar 8, iegūtu trīsciparu skaitli, reizinātāja simtu ciparam jābūt 1 (pretējā gadījumā reizinājums būs vismaz 200·8=1600 – četrciparu skaitlis). No otras puses, reizinot ar 8 – pāra skaitli, reizinājumā tiek iegūts pāra skaitlis. Bet $\overline{bc1}$ ir nepāra skaitlis, tātad prasītais trīsciparu skaitlis neeksistē.

b) Šoreiz jāmeklē tāds trīsciparu skaitlis, lai izpildās vienādība $\overline{abc} = 8 \cdot \overline{bca}$ jeb

$100a + 10b + c = 800b + 80c + 8a$

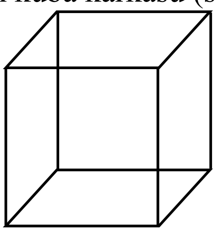
$92a = 790b + 79c$

$92a = 79(10b + c)$

Tātad izteiksmei 92·*a* jādalās ar 79. Tā kā 79 ir pirmskaitlis un 92 nedalās ar 79, tad *a* jādalās ar 79. Bet $a \leq 9$ (cipars, kas atšķirīgs no 0, jo *a* ir trīsciparu skaitļa pirmais cipars), tātad *a* nedalās ar 79, un šāda vienādība cipariem *a*, *b*, *c* nevar pastāvēt. Tātad arī šādi trīsciparu skaitļi neeksistē.

2.4.2. Tā kā atšķirība starp Aivara pulksteņa un Kārļa pulksteņa rādījumiem ir 9 minūtes, bet neviena pulksteņa rādījums no pareizā laika neatšķiras vairāk kā par 5 minūtēm, tad Aivara pulkstenis atpaliek, bet Kārļa pulkstenis steidzas. Pie tam 9=4+5, tātad pareizs laiks tobrīd bija vai nu 23:47 (Aivara pulkstenis atpaliek 4 min., Kārļa pulkstenis steidzas 5 min.), vai 23:48 (Aivara pulkstenis atpaliek 5 min., Kārļa pulkstenis steidzas 4 min.). Ja pareizs laiks būtu bijis 23:47, tad Pētera pulkstenis būtu steidzies 4 min., bet tā būt nevar, jo Aivara pulkstenis kļūdās 4 min. Tātad pareizs laiks tobrīd bija **23:48**, Edgara pulkstenis atpaliek 2 min. un Pētera pulkstenis steidzas 3 min.

2.4.3. No dotajiem stienīšiem izveidojam kuba karkasu (skat. A20.zīm.).



A20.zīm.

2.4.4. Apskatīsim, cik dažādos veidos skaitli 8 var izteikt kā saskaitāmo 1, 2 un 3 summu un cik veidos katru no šīm summām var uzrakstīt, ja svarīga saskaitāmo secība. Saskaitot šos veidus, noskaidrojam, ka Zigis pa kāpnēm var uzkāpt **81 veidā**.

8=	***Cik veidos***
1+1+1+1+1+1+1+1	1
1+1+1+1+1+1+2	7
1+1+1+1+2+2	15
1+1+2+2+2	10
2+2+2+2	1
1+1+1+1+1+3	6
1+1+3+3	6
1+1+1+2+3	20
1+2+2+3	12
2+3+3	3
veidi kopā	**81**

2.4.5. Apskatām pirmo vienādību: veicot kādu darbību (saskaitīšanu vai reizināšanu) ar diviem vienādiem skaitļiem, rezultātā šo pašu skaitli var iegūt tikai 0+0=0 vai 1·1=1. Tā kā $m \neq 0$, tad ***m*=1** un „$\Diamond$” apzīmē reizināšanu. Tātad $\otimes$ apzīmē saskaitīšanu. No otrās vienādības iegūstam $k = n+1$ un trešā vienādība izsaka $n \cdot (n+1) = p$. Tā kā *n* un *p* ir **cipari**, pie tam *n*>1, der tikai gadījums ***n*=2** un ***p*=6** (ja $n \geq 3$, tad $p \geq 3 \cdot (3+1) = 12$ - nav cipars). Tad ***k*=3** un meklējamās izteiksmes vērtība ir $(1+2)\cdot(3+6) = 27$.

2.5. PIEKTĀ KĀRTA

2.5.1. **Atbilde**: 2.

Apzīmēsim $2005\frac{5}{11} = a$. Tad dotā skaitliskā izteiksme tiek aizstāta ar algebrisku izteiksmi $(a+1)(a+2) - a(a+3)$. Vienkāršojot šo izteiksmi, iegūstam

$$(a+1)(a+2) - a(a+3) = a^2 + 2a + a + 2 - (a^2 + 3a) = a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a = 2.$$

Iegūstam, ka pie visām *a* vērtībām (arī, ja $a = 2005\frac{5}{11}$) šīs izteiksmes vērtība ir **2**, tātad

$$2006\frac{5}{11} \cdot 2007\frac{5}{11} - 2005\frac{5}{11} \cdot 2008\frac{5}{11} = 2.$$

2.5.2. Skat., piem. A21. zīm. Iespējami daudzi citi risinājumi.

X					X
	X			X	
X					X
	X			X	
		X	X		
		X	X		

A21. zīm.

2.5.3. **Atbilde:** 11 cm.

Pieņemsim, ka trijstūra sānu malas garums ir *x* cm, bet pamata malas garums ir *y* cm (vienādsānu trijstūrī abas vienādās malas sauc par sānu malām, bet trešo malu sauc par pamata malu). Tātad trijstūra perimetrs $P_\Delta=2x+y$.

Paralelograma perimetru veido 2 trijstūra sānu malas un 2 trijstūra pamati, tātad $P_p=2x+2y$.

$P_p-P_\Delta=(2x+2y)-(2x+y)=y=3$ cm (trijstūra pamats ir 3 cm).

Romba perimetru veido 4 trijstūra sānu malas, tātad $P_r=4x$.

$P_r-P_\Delta=4x-(2x+y)=2x-y=5$ cm. Tā kā $y=3$ cm, iegūstam: $2x-3=5$; $2x=5+3=8$; $x=4$ cm (trijstūra sānu malas garums ir 4 cm) un trijstūra perimetrs ir

$P_\Delta=2\cdot4+3=11$ cm.

2.5.4. Pavisam ir 11 tādi skaitļi: 81, 135, 189, 225, 297, 315, 351, 375, 441, 459, 495.

Meklējamo skaitļu pirmreizinātājiem jābūt četriem nepāra pirmskaitļiem (jo jāmeklē nepāra skaitļi ar *„garumu”* 4). Ievērosim, ka 5·5·5·5=625>500, tātad vismaz vienam pirmreizinātājam jābūt mazākam nekā 5, t.i., 3. Apskatot visus iespējamos četru nepāra pirmskaitļu reizinājumus, atrodam visus meklējamos skaitļus, kas mazāki nekā 500.

Vispirms atradīsim tos skaitļus, starp kuru pirmreizinātājiem ir vismaz trīs „3”:

3·3·3·3=81 3·3·3·5=135 3·3·3·7=189

3·3·3·11=297 3·3·3·13=351 3·3·3·17=459

3·3·3·19=513>500; tas neder. Tagad meklēsim skaitļus, kuri satur divus pirmreizinātājus „3”:

3·3·5·5=225 3·3·5·7=315 3·3·5·11=495 3·3·7·7=441

Vēl derīgs ir skaitlis 3·5·5·5=375. Visi citi skaitļi, kurus veido četri nepāra pirmreizinātāji, ir lielāki nekā 500, tātad atrastie 11 skaitļi ir vienīgie, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.5.5. **Atbilde:** Nē, tā nevar būt.

Mašīnas uz ceļa var izkārtoties 6 dažādos veidos:

ABC **ACB** **BAC** **BCA** **CAB** **CBA**

Sadalīsim šos veidus divās grupās:

I	ABC	BCA	CAB
II	ACB	BAC	CBA

Ievērosim, ka vienas apdzīšanas rezultātā mašīnu izkārtojums mainās no vienas grupas uz otru (piem., ja mašīnas brauca secībā ABC (I grupa) un A apdzina B, tad pēc apdzīšanas tās izkārtojās secībā BAC (II grupa); līdzīgi var izsekot visām pārējām apdzīšanām).

Uzdevumā ir dots, ka sākumā mašīnas bija izkārtojušās secībā $\xrightarrow{\mathbf{C\ B\ A}}$ (II grupa), bet galamērķi sasniedza secībā $\xrightarrow{\mathbf{A\ C\ B}}$ (II grupa). Taču izdarot 1, 3, ..., 13 apdzīšanas, mašīnu izkārtojums mainās no vienas grupas uz otru, šajā gadījumā beigās jābūt I grupas izkārtojumam. Tātad nevar būt, ka Liepājā vispirms iebrauca B, pēc tam - C un pēc tam – A.

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS

3.1. PIRMĀ NODARBĪBA

3.1.1. Dosim divus šī uzdevuma atrisinājumus.

1. risinājums. Nav grūti pārliecināties, ka $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$, $120\cdot 6=720$, $720\cdot 7=5040$, $5040\cdot 8=40320$, $40320\cdot 9=362880$, $362880\cdot 10=3628800$, $3628800\cdot 11=39916800$, $39916800\cdot 12=479001600$ un
$479001601:13=36846277$.

Tomēr skaidrs, ka šādu „metodi” būs grūti vai pat neiespējami lietot gadījumos, kad tiks apskatīti lielāki skaitļi.

2. risinājums. Sagrupēsim reizinātājus pa pāriem, pierakstot reizinājumus mums izdevīgā formā:

$1\cdot 12=13-1$

$2\cdot 7=14=13+1$

$3\cdot 9=27=2\cdot 13+1$

$4\cdot 10=40=3\cdot 13+1$

$5\cdot 8=40=3\cdot 13+1$

$6\cdot 11=66=5\cdot 13+1$

Tātad mums jānoskaidro, vai izteiksme
$I=(3-1)(3+1)(2\cdot 13+1)(3\cdot 13+1)(3\cdot 13+1)(5\cdot 13+1)+1$ dalās ar 13.

Padomāsim, kas notiks, ja sešu iekavu reizinājumā atvērsim iekavas. Radīsies summa (apzīmēsim to ar S), kas sastāvēs no daudziem saskaitāmajiem. Katrs saskaitāmais būs reizinājums, kas saturēs 6 reizinātājus - pa vienam no katras iekavas visās iespējamās kombinācijās.

Ievērosim, ka katrās iekavās viens no saskaitāmajiem dalās ar 13. Ja 6 reizinātāju reizinājumā **kaut viens** no reizinātājiem dalās ar 13, tad arī pats reizinājums dalās ar 13. Tātad summā S gandrīz visi saskaitāmie dalās ar 13, izņemot vienu - to, kurš veidojas kā $(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ (ņemot no katras iekavas otro saskaitāmo un tos sareizinot savā starpā). Šī saskaitāmā vērtība ir (-1), un tas saīsinās ar izteiksmē I ietilpstošo saskaitāmo (+1). Tātad I izsakās kā to S locekļu summa, kuri dalās ar 13; tātad I dalās ar 13.

Piezīme. Līdzīgā ceļā, tikai izdarot apvienošanu pāros nevis ar konkrētu piemēru, bet „vispārīgā veidā” (tāda iespēja apvienot reizinātājus prasa īpašu pamatojumu), var pierādīt **Vilsona teorēmu:**

Ja p-pirmskaitlis, tad $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2)(p-1)+1$ dalās ar p.

3.1.2. a) jā, var. Piemērs:

1. grupa - {9; 6}
2. grupa - {8; 7}
3. grupa - {1; 2; 3; 4; 5}.

b) nē, nevar. Pieņemsim pretējo - apvienošana izdarīta, un katras grupas skaitļu summa ir *S*. Tad visās 3 grupās iegūto skaitļu summa ir $S+S+S=3\cdot S$. No otras puses, šī summa ir $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Tātad jāpastāv vienādībai $3\cdot S=55$, no kurienes $S=18\frac{1}{3}$. Bet tas nav iespējams, jo *S* ir veselu skaitļu summa, tātad vesels skaitlis. Tātad iegūta pretruna, un sākotnējais pieņēmums ir nepareizs.
c) Skaidrs, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas pie *n* = 1 un pie *n* = 2 (vispār nevar izveidot nekādas trīs grupas), pie *n* = 3 (grupa, kurā ir skaitlis 3, ir ar tikpat lielu summu kā abas pārējās grupas **kopā** - vienā no tām ir skaitlis 1, otrā - skaitlis 2) un pie *n* = 4 (jo $1+2+3+4=10$, bet 10 nedalās ar 3; spriežam kā b) gadījumā). Savukārt pie *n* = 5 uzdevuma prasības ir izpildāmas - var veidot grupas {1; 4}, {2; 3}, {5}. Atliek apskatīt gadījumus $n\geq 6$. Spriežot kā b) gadījumā, varam secināt: lai sadalīšana būtu iespējama, **noteikti nepieciešams**, lai summa $S=1+2+3+\ldots+n$ dalītos ar 6. Noskaidrosim, kurām *n* vērtībām šī īpašība izpildās.
Uzrakstām summu *S* divas reizes, vienreiz rakstot saskaitāmos augošā, bet otrreiz - dilstošā secībā:

$$S=1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$
$$S=n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1$$

Saskaitīsim šīs vienādības, labajā pusē grupējot pāros saskaitāmos, kas uzrakstīti viens zem otra:

$$\begin{aligned}2S=&(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+(4+(n-3))+\ldots+\\&+((n-2)+3)+((n-1)+2)+(n+1)\end{aligned}\qquad(*)$$

Redzam, ka katra šeit **uzrakstītā** pāra summa ir *n* + 1: $1+n=n+1$, $2+(n-1)=n+1$, $3+(n-2)=n+1$ utt. Viegli saprast, ka tā ir arī pāros, kas iegūti, saskaitot ar daudzpunktiem apzīmētos saskaitāmos: katrs nākošais saskaitāmais pirmajā rindā par 1 lielāks nekā iepriekšējais, bet katrs nākošais saskaitāmais otrajā rindā par 1 mazāks nekā iepriekšējais, tāpēc to abu summa ir tāda pati kā abu iepriekšējo saskaitāmo summa. Tātad visu saskaitāmo summa vienādības (*) labajā pusē ir $n\cdot(n+1)$, jo tur pavisam ir *n* pāru summas, katrai no kurām vērtība ir *n*+1.

Tātad (*) pārveidojas par $2S=n(n+1)$, no kurienes $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

Skaidrs, ka $n(n+1)$ dalās ar 2, jo vai nu *n*, vai *n* + 1 ir pāra skaitlis. Lai *S* dalītos ar 3, nepieciešams, lai vai nu *n*, vai *n* + 1 dalītos ar 3. **Jau šeit varam secināt: ja ne *n*, ne *n* + 1 nedalās ar 3, tad uzdevumā prasītā sadalīšana nav iespējama.**
Tālāk parādīsim: **ja $n\geq 6$ un vai nu *n*, vai $n+1$ dalās ar 3, tad skaitļus var sadalīt tā, kā uzdevumā prasīts.** (Tam vajadzīgs pamatojums, jo mēs jau redzējām, ka, piemēram, sadalīšana nav iespējama pie *n*=2 , kaut arī 2+1 dalās ar 3, un pie *n*=3, kaut arī 3 dalās ar 3.)
A. Apskatīsim vispirms skaitļus $n\geq 6$, kas dalās ar 3. Tie ir 6; 9; 12;... .
Skaitļus no 1 līdz 6 var sadalīt, piemēram, šādi:

I grupa	II grupa	III grupa
1; 6	2; 5	3; 4

Lai sadalītu skaitļus no 1 līdz 9, nupat parādītais sadalījums jāpapildina ar skaitļiem 7; 8; 9. Darīsim to šādi:

- **lielāko** no pievienojamiem skaitļiem (šai gadījumā 9) pievienojam grupai, kurā patlaban ir skaitlis 1, t.i., I grupai;
- skaitli 1 pārceļam uz kādu no abām pārējām grupām un turpat pievienojam mazāko no pievienojamiem skaitļiem (šai gadījumā skaitli 7) – pieņemsim, tas notiek ar II grupu;
- vidējo no pievienojamiem skaitļiem (šai gadījumā 8) pievienojam grupai, kam pagaidām nekas nav pievienots – šai gadījumā III grupai.

Tagad I grupas skaitļu summa palielinājusies par 9-1=8; II grupas skaitļu summa palielinājusies par 7+1=8; III grupas skaitļu summa palielinājusies par 8.
Tā kā grupu summas bija vienādas **pirms** šim operācijām un tās palielinājušās par vienādiem lielumiem, tad tās ir vienādas arī tagad.
Tagad izveidotās grupas ir šādas:

I grupa	II grupa	III grupa
6; 9	1; 2; 5; 7	3; 4; 8

Lai sadalītu skaitļus no 1 līdz 12, šim sadalījumam jāpievieno skaitļi 10; 11; 12. To izdara tāpat, kā nupat redzējām: skaitli 12 pievieno II grupai, skaitli 1 pārceļ uz I grupu un I grupai pievieno arī skaitli 10, bet III grupai pievieno skaitli 11. Līdzīgi turpinot, pakāpeniski veido sadalījumus skaitļiem no 1 līdz 15; no 1 līdz 18; no 1 līdz 21 utt.
B. Tagad apskatīsim skaitļus $n \geq 6$, kam piemīt īpašība „n+1 dalās ar 3”. Tie ir skaitļi 8; 11; 14; 17; ... . Mums svarīgākais ir tas, ka arī šo skaitļu virknē, tāpat kā nupat apskatītajā skaitļu virknē 6; 9; 12;..., katrs nākošais skaitlis ir par 3 lielāks nekā iepriekšējais.
Vispirms sadalām grupās skaitļus no 1 līdz 8:

I grupa	II grupa	III grupa
4; 8	5; 7	1; 2; 3; 6

Sadalījumu skaitļiem no 1 līdz 11 iegūstam no šī sadalījuma tāpat kā iepriekš: pievienojam III grupai skaitli 11, pārceļam 1 uz I grupu un I grupai pievienojam arī skaitli 9, bet II grupai pievienojam skaitli 10. Iegūstam sadalījumu:

I grupa II grupa	III grupa	
1; 4; 8; 9	5; 7; 10	2; 3; 6; 11

Līdzīgi no šī sadalījuma iegūstam sadalījumu skaitļiem no 1 līdz 14, no tā – sadalījumu skaitļiem no 1 līdz 17, utt.
Līdz ar to uzdevums atrisināts.

3.1.3. Apzīmēsim kvadrāta centru ar O. Pierādīsim, ka vasarnīca jāceļ punktā O.
Apskatīsim **jebkuru** citu punktu X. Tas nepieder vismaz vienai no taisnēm AC un BD (ja X piederētu **gan** AC, **gan** BD, tad X būtu AC un BD krustpunkts un sakristu ar O). Pieņemsim, ka X nepieder taisnei AC. Tad punkti A, C, X ir trijstūra virsotnes. Saskaņā ar trijstūra nevienādību

AX+CX>AC (1)

Katriem 3 punktiem B, D, X izpildās nevienādība

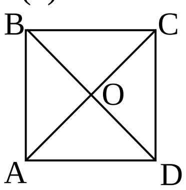
$BX + DX \geq BD$ (2)

No (1) un (2) acīmredzami seko

AX+BX+CX+DX>AC+BD (3)

Savukārt (skat. A22. zīm.)

AO+BO+CO+DO=AC+BD (4)



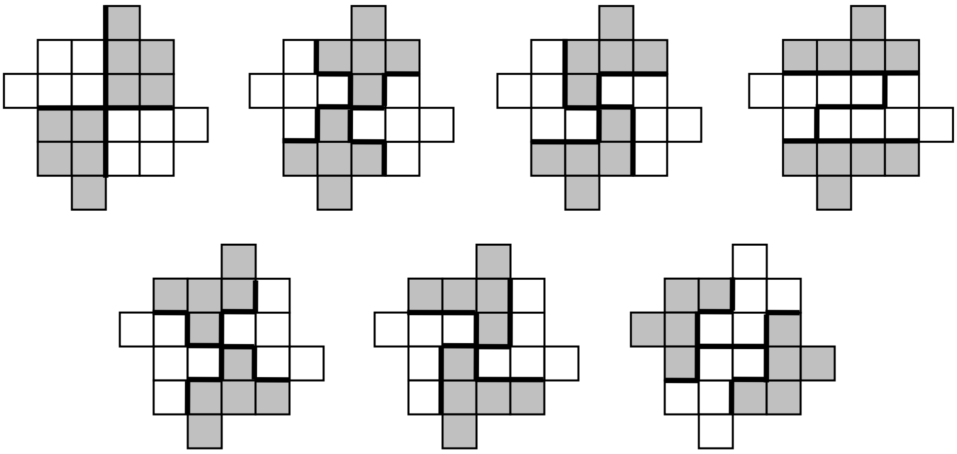
A22. zīm.

No (3) un (4) seko, ka O attālumu summa līdz punktiem A, B, C, D ir lielāka nekā X attālumu summa līdz punktiem A, B, C, D.
Līdzīgu secinājumu tādā pašā ceļā iegūstam, ja X gan pieder taisnei AC, bet nepieder taisnei BD.
Tātad Cipariņa vasarnīca jāceļ punktā O.

3.1.4. **Atbilde**: **a)** jā, eksistē; **b)** nē, neeksistē.
Risinājums. **a)** piemēram, var ņemt skaitļus 39 un 40.
b) atceramies dalāmības pazīmi ar 3: naturāls skaitlis n dalās ar 3 tad un tikai tad, ja *n* ciparu summa dalās ar 3. Ja eksistētu tādi divi skaitļi, par kādiem jautāts uzdevumā, tad tie abi

dalītos ar 3. Bet katri divi skaitļi, kas abi dalās ar 3, atšķiras viens no otra vismaz par 3. Tātad tādu divu skaitļu, par kādiem jautāts uzdevumā, nevar būt.

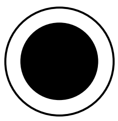
3.1.5. Skat. A23. zīm.



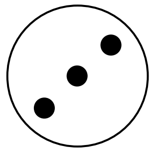
A23. zīm.

3.1.6. Pareizi spēlējot, Andris var uzvarēt, kaut arī Bruno censtos viņam traucēt.

Ar pirmo gājienu Andris noliek monētu tieši galda centrā. Palikusī vēl neaizņemtā galda daļa ir simetriska attiecībā pret galda centru. **Ja** Bruno var nolikt monētu galda neaizņemtajā daļā (tas nebūtu iespējams, ja galds būtu ļoti mazs – tikai nedaudz lielāks par 1 santīma monētu, skat. A24. zīm.), tad Andris var nolikt monētu simetriski Bruno noliktajai monētai attiecībā pret galda centru. Brīvā galda virsma pēc šī Andra gājiena atkal ir simetriska (skat. A25. zīm.)



A24. zīm.

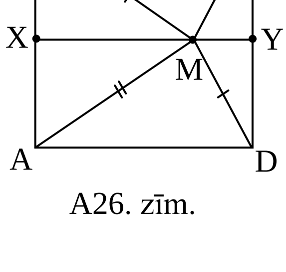


A25. zīm.

Ja Bruno var nolikt savu kārtējo monētu, tad minētās simetrijas dēļ Andris var atkal atbildēt viņam ar simetrisku gājienu; pēc tam brīvā galda virsma atkal ir simetriska, utt. Tātad, **ja** Bruno var izdarīt savu kārtējo gājienu, **tad**, šādi spēlējot, Andris var viņam atbildēt ar savu kārtējo gājienu. Tātad Andrim gājienu nepietrūks. Tā kā **kādam** gājienu **noteikti** pietrūks, jo uz galda var novietot tikai galīgu skaitu monētu, lai tās nesaskartos, tad gājienu pietrūks Bruno. Šai brīdī Andris būs uzvarējis.

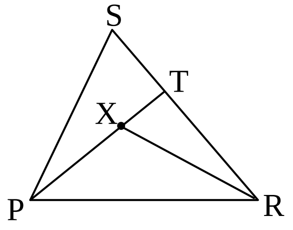
3.1.7. Ievērosim, ka $5\cdot5\cdot5=125$ un $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243$. Tāpēc 300 skaitļu „5” reizinājums vienāds ar 100 skaitļu „125” reizinājumu, bet 500 skaitļu „3” reizinājums vienāds ar 100 skaitļu „243” reizinājumu. Tagad skaidrs, ka otrais reizinājums ir lielāks.

3.1.8. Apzīmēsim malu AB un CD viduspunktus attiecīgi ar X un Y. Kvadrāts ABCD ir simetrisks attiecībā pret taisni XY (skat. A26. zīm.)



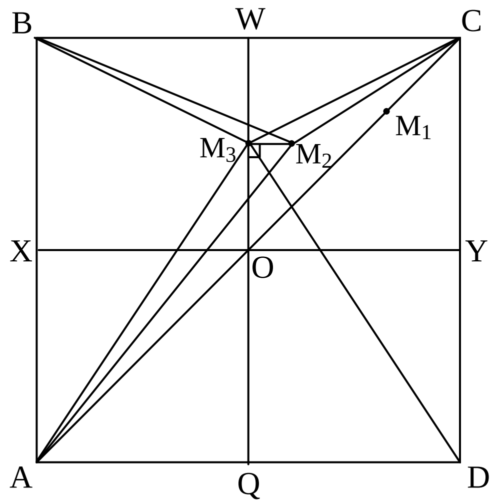
A26. zīm.

Tāpēc, ja Maijiņa uzcels savu mājiņu M jebkurā vietā nogriežņa XY iekšpusē, tad izpildīsies sakarības MA=MB un MC=MD ; tāpēc MA+MC=MB+MD , un uzdevuma prasības būs izpildītas.
Līdzīgi pierāda, ka Maijiņa var uzcelt savu mājiņu jebkurā vietā tā nogriežņa iekšpusē, kas savieno malu BC un AD viduspunktus.
Pierādīsim, ka nevienā cita vietā Maijiņa savu mājiņu uzcelt nevar.
Lemma. Ja punkts X atrodas trijstūra PRS iekšpusē, tad PX+XR<PS+SR.



A27. zīm.

Tiešām (skat. A27. zīm.), pagarinām PX līdz krustpunktam T ar malu SR. Tad saskaņā ar trijstūra nevienādību
PX+XR<PX+(XT+TR)=(PX+XT)+TR=PT+TR<(PS+ST)+TR=PS+(ST+TR)=
=PS+SR , un vajadzīgais pierādīts.
Apzīmēsim ar X, W, Y, Q kvadrāta ABCD malu viduspunktus (skat. A28. zīm.)



A28. zīm.

Ja Maijiņa uzceltu savu mājiņu M citur, nevis uz kāda no nogriežņiem XY un WQ, tad M atrastos vienā no daļām, kurās šie nogriežņi sadala ABCD; varam pieņemt, ka M atrodas daļā OWCY (skat. A28. zīm.).
Ja M ir uz nogriežņa OC (piem., punkts M_1), tad
$M_1A+M_1C=AC=BD<M_1B+M_1D$ (saskaņā ar trijstūra nevienādību); tātad attālumu summa no M_1 līdz votivapām mazāka nekā attālumu summa no M_1 līdz šillišallām, bet tā nedrīkst būt. Ja punkts M neatrodas uz AC, tad tas atrodas vienā no trijstūriem OWC vai OYC; varam pieņemt, ka tas atrodas trijstūrī OWC (piem., punkts M_2).
Novelkam $M_2M_3 \perp WQ$ (skat. A28. zīm.). Tad saskaņā ar lemmu:

$M_2B+M_2D> M_3B+M_3D$ (1) un
$M_2A+M_2C< M_3A+M_3C$ (2)

Bet risinājuma sākumā mēs pamatojām, ka $M_3B+M_3D= M_3A+M_3C$.
Tāpēc no (1) un (2) seko, ka $M_2B+M_2D> M_2A+M_2C$. Tātad atkal attālumu summa no M_2 līdz votivapām ir mazāka nekā attālumu summa no M_2 līdz šillišallām, bet tā nedrīkst būt.
Tātad Maijiņa tiešām nevar uzcelt savu mājiņu kvadrāta iekšpusē nekur citur kā uz viena no nogriežņiem XY vai WQ.

Līdzīgi pierāda, ka uz kvadrāta kontūra Maijiņa varētu uzcelt savu mājiņu tikai kādā no punktiem X; W; Y; Q.

Jautājumu par to, kur Maijiņa varētu uzcelt savu mājiņu **ārpus** kvadrāta, atstājam lasītājiem izpētīt patstāvīgi.

3.1.9. Jā, eksistē. Tādi ir, piemēram, skaitļi

$$\underbrace{111...1}_{1998}7\underbrace{999...9}_{223} \text{ un } \underbrace{111...1}_{1998}8\underbrace{000...0}_{223};$$

to ciparu summas ir attiecīgi $1998 \cdot 1 + 7 + 223 \cdot 9 = 2005 + 2007 = 2 \cdot 2006$ un $1998 \cdot 1 + 8 = 2006$.

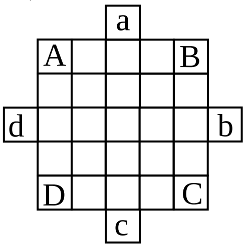
Lasītājs pats patstāvīgi var mēģināt pierādīt šādu rezultātu: ja *n* – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 3, tad eksistē tādi divi viens otram sekojoši naturāli skaitļi, katram no kuriem ciparu summa dalās ar *n*.

3.1.10. **Atbilde**: 5 taisnstūros.

Pierādījums. Piecus taisnstūrus varam iegūt, piemēram, nogriežot figūrai 4 vienu rūtiņu lielās „ļipiņas”. Iegūsim 4 kvadrātus ar izmēriem 1×1 un 1 kvadrātu ar izmēriem 5×5.

Pierādīsim, ka figūru nevar sagriezt mazāk nekā 5 taisnstūros.

Apskatīsim 4 ļipiņas *a, b, c, d*. Ja katra no tām pieder **citam** taisnstūrim, tad taisnstūru ir vairāk nekā 4, jo nevienam no **šiem** 4 taisnstūriem nepieder, piemēram, neviena no stūra rūtiņām *A, B, C, D* (skat. A29. zīm.).



A29. zīm.

Ja divas ļipiņas pieder vienam taisnstūrim, tad tās var būt tikai **pretējas** ļipiņas, piemēram, *a* un *c*. Tad rūtiņas *d, A, B, b* katra pieder citam taisnstūrim, un taisnstūru pavisam atkal ir vismaz 5.

3.2. Otrā nodarbība

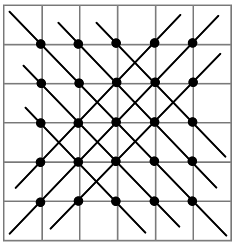
3.2.1. **Atbilde**: vairāk ir to skolēnu, kuri neapmeklē pulciņu.

Risinājums. Tā kā klasē ir arī meitenes, tad zēnu – pulciņa dalībnieku ir mazāk nekā trešdaļa visu skolēnu (apzīmējot zēnu skaitu klasē ar *z*, bet meiteņu skaitu klasē ar *m*, ir spēkā nevienādība $\boldsymbol{\frac{1}{3}z < \frac{1}{3}(z+m)}$, jo *m*>0). Līdzīgi meiteņu – pulciņa dalībnieču ir mazāk nekā sestdaļa visu skolēnu (nevienādība $\boldsymbol{\frac{1}{6}m < \frac{1}{6}(z+m)}$, jo *z*>0). Tā kā trešdaļa un sestdaļa kopā ir puse, tad skolēnu – pulciņa dalībnieku ir **mazāk nekā puse** no kopīgā skolēnu daudzuma (saskaitot izceltās nevienādības, iegūstam

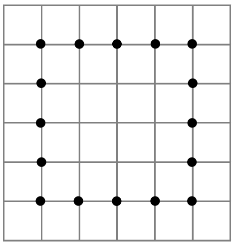
$$\frac{1}{3}z + \frac{1}{6}m < \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)(z+m) = \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right)(z+m) = \frac{3}{6}(z+m) = \frac{1}{2}(z+m) \quad).$$

Pārējie skolēni, kuru ir **vairāk nekā puse**, pulciņu neapmeklē. Tātad tādu skolēnu, kuri neapmeklē pulciņu, ir vairāk nekā tādu skolēnu, kuri to apmeklē.

3.2.2. Skaidrs, ka to var izdarīt ar 8 taisnēm (skat. A30. zīm.).



A30. zīm.



A31. zīm.

Parādīsim, ka ar mazāk taisnēm nepietiek.

Apskatīsim tos 16 punktus, kas atrodas gar režģa malu (skat. A31. zīm.). Taisne, kas nav paralēla nevienai no režģa malām, var krustot augstākais divus no šiem 16 punktiem; tāpēc jau šo punktu krustošanai vien nepieciešamas vismaz 16:2=8 taisnes.

3.2.3. Apzīmēsim daļas skaitītāju ar *a*, bet saucēju - ar *b*; skaitli, kuru pieskaita skaitītājam, apzīmēsim ar *n*. Tad no uzdevuma nosacījumiem iegūstam:

(1) *a* un *b* lielākais kopīgais dalītājs ir 1;

(2) $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 1$

(3) $\frac{a+n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$

No (3) pakāpeniski iegūstam

$$\frac{a+n}{n} = a$$

$$a + n = na$$

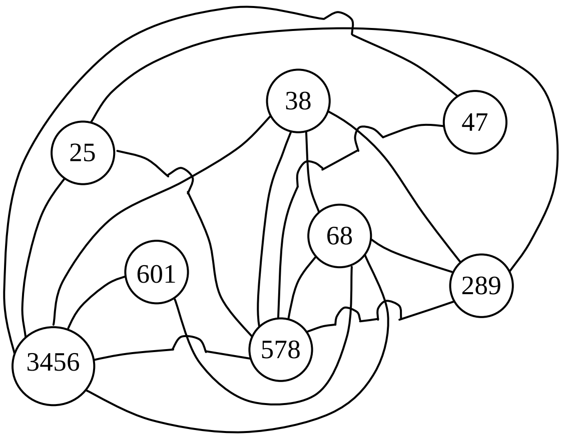
$$na - n - a + 1 = 1$$

$$(n-1)(a-1) = 1 \qquad (4)$$

Skaitli 1 var izteikt kā divu veselu skaitļu *n*-1 un *a*-1 reizinājumu tikai divos veidos: $1 \cdot 1$ un $(-1) \cdot (-1)$. Tā kā *n* ir naturāls skaitlis, tad jābūt $n \geq 1$; tāpēc *n*-1 nevar būt (-1). Tātad *n*-1=1 un *a*-1=1, no kurienes seko *n*=2 un *a*=2. No (2) redzam, ka $3 \leq b < 6$, tāpēc jāpārbauda tikai iespējamās vērtības 3; 4; 5. No (1) seko, ka *b*=4 neder. Vērtības *b*=3 un *b*=5 der; tiešām, $\frac{2+2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ un $\frac{2+2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

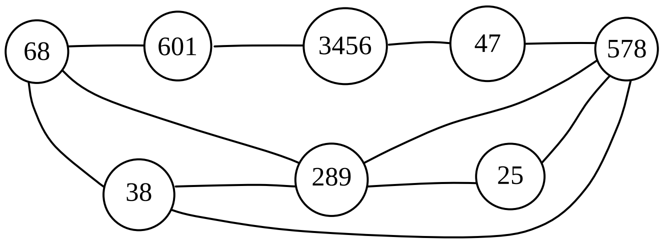
Atbilde: $\frac{2}{3}$ un $\frac{2}{5}$.

3.2.4. Ierakstīsim skaitļus aplīšos un savienosim ar līnijām tos aplīšus, kuros ierakstītajiem skaitļiem ir kopīgs cipars (skat. A32. zīm.) :



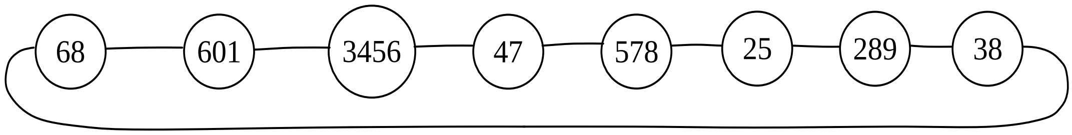
A32. zīm.

No šī zīmējuma redzam, ka skaitlim 47 meklējamajā aplī var būt tikai kaimiņi 3456 un 578, bet skaitlim 601 – tikai kaimiņi 3456 un 68. Tātad skaitlim 3456 noteikti jāatrodas kaimiņos ar 47 un 601. Iegūstam šādu ainu (skat. A33.zīm.), kur izvēlēties var vairs tikai starp „apakšējām" līnijām:



A33. zīm.

Viegli redzēt, ka vajadzīgo apli var pabeigt tikai vienā veidā (skat. A34. zīm.)



A34. zīm.

3.2.5. Uzdevumu varam atrisināt, piemēram, šādi:

Ūdens daudzums 5 *l* traukā	Ūdens daudzums 7 *l* traukā	Ko darām
0	0	Pielejam pilnu 5 *l* trauku
5	0	Pārlejam ūdeni no 5 l trauka 7 *l* traukā
0	5	Pielejam pilnu 5 *l* trauku
5	5	No 5 *l* trauka pielejam pilnu 7 *l* trauku
3	7	Iztukšojam 7 *l* trauku
3	0	Pārlejam ūdeni no 5 *l* trauka 7 *l* traukā
0	3	Pielejam pilnu 5 *l* trauku
5	3	No 5 *l* trauka pielejam pilnu 7 *l* trauku
1	7	Iztukšojam 7 *l* trauku
1	0	Pārlejam ūdeni no 5 *l* trauka 7 *l* traukā
0	1	Pielejam pilnu 5 *l* trauku
5	1	Pārlejam ūdeni no 5 *l* trauka 7 *l* traukā
0	6	Neko

Iesakām lasītājam patstāvīgi padomāt, kā veikt pārliešanas, lai

- kopīgais pārliešanu skaits būtu mazākais iespējamais,
- kopīgais pārlejamais ūdens daudzums būtu mazākais iespējamais,
- kopīgais „velti pasmeltais" ūdens daudzums būtu mazākais iespējamais (mūsu risinājumā mēs divas reizes iztukšojām 7 *l* trauku, tātad „zaudējām" 14 litrus ūdens).

3.2.6. Dosim vairākus šī uzdevuma atrisinājumus.

1. atrisinājums. Apzīmēsim uzdevumā minētos veselos skaitļus ar x, y un z. Ja x+y+z=0, tad z=-(x+y) . Tāpēc

$$x^3+y^3+z^3 = x^3+y^3+(-x-y)^3 = x^3+y^3+(-1(x+y))^3 = x^3+y^3+(-1)^3\cdot(x+y)^3 =$$
$$= x^3+y^3-(x+y)^3 = x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = -3x^2y-3xy^2 = -3xy(x+y)$$

Tā kā x un y ir veseli skaitļi, tad dalījums $-3xy(x+y):3=-xy(x+y)$ ir vesels skaitlis. Tāpēc tiešām $x^3+y^3+z^3$ dalās ar 3.

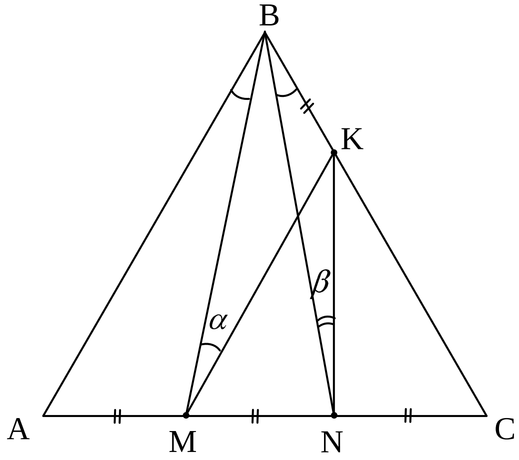
2. atrisinājums. Atkal apzīmēsim apskatāmos veselos skaitļus ar x, y un z. Tad x+y+z=0. Izmantojot kubu summas formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, iegūstam

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(-x-y)^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)+\left[(-1)(x+y)\right]^3=$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)^3=(x+y)\left[x^2-xy+y^2-(x+y)^2\right]=$$
$$=(x+y)\left[x^2-xy+y^2-x^2-2xy-y^2\right]=-3(x+y)xy\,,$$

no kurienes, tāpat kā pirmajā risinājumā, seko, ka $x^3+y^3+z^3$ dalās ar 3.

3. atrisinājums. Lasītājs var pats pārbaudīt, ka visiem x, y, z pastāv vienādība
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$
(to ir vērts atcerēties, jo šī vienādība ievērojami atvieglo daudzu uzdevumu risinājumus). Ja x, y, z – veseli skaitļi un x+y+z=0, no šejienes iegūstam
$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ un $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Tātad $x^3+y^3+z^3$ dalās ar 3, jo dalījums ir xyz – vesels skaitlis.

3.2.7. Apzīmējam $\angle BMK=\alpha$ un $\angle BNK=\beta$ (sk.A35.zīm.). Mums jāaprēķina $\alpha+\beta$.



A35. zīm.

Tā kā ΔABC ir regulārs, tad CB=CA; saskaņā ar doto arī KB=MA. Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam CK=CM. Atceramies, ka $\angle BCA=60°$. Tātad trijstūrī KCM virsotnes leņķis C ir 60º un CK=CM; tātad tas ir regulārs. Tāpēc $\angle CKM=60°=\angle CBA$; tātad KM|| BA. Tāpēc $\angle ABM=\angle BMK=\alpha$.

Ievērojam, ka AB=CB (jo ΔABC ir regulārs), AM=CN (saskaņā ar doto) un $\angle BAM=60°=\angle BCN$ (jo ΔABC - regulārs). Tāpēc $\Delta ABM=\Delta CBN$ (pazīme mlm); iegūstam, ka $\angle CBN=\angle ABM=\alpha$.

Tā kā ΔBKN iekšējo leņķu lielumu summa ir 180º, tad $\alpha+\beta=\angle KBN+\angle KNB=180°-\angle BKN=\angle CKN$. Mēs jau pierādījām, ka ΔCKM ir regulārs; KN ir šī trijstūra mediāna, tāpēc arī bisektrise. Tātad $\angle CKN=\frac{1}{2}\angle CKM=30°$.

Tātad $\angle BMK+\angle BNK=\alpha+\beta=\angle CKN=30°$.

3.2.8. Apzīmēsim šos skaitļus no kreisās uz labo pusi ar *a*; *b*; *c*; *d*; *e*; *f*; *g*. Lai izteiksmes vērtība dalītos ar 10, tai jādalās ar 2 un ar 5.

A. Ja kāds no skaitļiem *a* un *b* ir pāra skaitlis, ievietojam starp *a* un *b* reizināšanas zīmi; ja gan *a*, gan *b* ir nepāra skaitļi, ievietojam starp *a* un *b* saskaitīšanas zīmi. Tā kā mēs nezinām, kuru zīmi nāksies ievietot, apzīmēsim to ar *. Izteiksmi *a***b* iekļaujam iekavās. Tad (*a***b*) noteikti dalās ar 2.

B. Tagad parādīsim, kā no atlikušajiem 5 skaitļiem izveidot izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 5.

Ja kaut viens no skaitļiem *c*; *d*; *e*; *f*; *g* dalās ar 5, tad $(c\times d\times e\times f\times g)$ dalās ar 5.

Ja neviens no šiem skaitļiem ar 5 nedalās, apskatām piecas izteiksmes:

c
$c+d$
$c+d+e$
$c+d+e+f$
$c+d+e+f+g$

Ja kaut viena no tām dalās ar 5, izveidojam to, iekļaujam iekavās un „piereizinām klāt" pārējos skaitļus. Piemēram, ja $c+d+e$ dalās ar 5, izveidojam $(c+d+e)\cdot f\cdot g$.

Ja neviena no tām nedalās ar 5, apskatām atlikumus, kādus dod šīs izteiksmes, dalot ar 5. Atlikumu vērtības mūsu apskatāmajā gadījumā var būt tikai 1; 2; 3; 4 (nav atlikuma 0, jo neviena no apskatāmajām 5 izteiksmēm nedalās ar 5). Tā kā izteiksmju ir piecas, bet dažādi atlikumi – tikai četri, tad atradīsies tādas divas izteiksmes, kam atlikumi, dalot ar 5, ir vienādi; bet tad šo izteiksmju starpība dalās ar 5. (Piemēram, ja $c+d+e+f$ un c dod vienādus atlikumus r, dalot ar 5, tad $(c+d+e+f)-c=(5A+r)-(5B+r)=5(A-B)$). Ievērosim, ka nupat minētā starpība **noteikti** ir vairāku pēc kārtas rindā uzrakstīto skaitļu summa. Iekļaujam šo summu iekavās un sareizinām ar pārējiem skaitļiem (mūsu apskatāmajā gadījumā izveidojam izteiksmi $c\times(d+e+f)\times g$); iegūtās izteiksmes vērtība dalās ar 5.

C. Sareizinot pirmo divu skaitļu veidoto izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 2, un pēdējo piecu skaitļu veidoto izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 5, iegūstam izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 10.

3.2.9. Sadalām visus divciparu naturālos skaitļus 50 grupās:

10 un 90
11 un 89
12 un 88
13 un 87
:
49 un 51
50
91
92
93
:
99

Tātad ir 40 grupas, kas katra satur divus naturālus skaitļus, un 10 grupas, kas katra satur vienu naturālu skaitli.

Tā kā 51>50, tad, izvēloties jebkuru 51 divciparu naturālu skaitli, atradīsies tādi divi izvēlētie skaitļi, kas ir vienā grupā. (Ja no katras grupas izvēlētos augstākais vienu skaitli, tad izvēlēto skaitļu būtu ne vairāk kā grupu, t.i., ne vairāk kā 50.) Bet, ja divi skaitļi ir vienā grupā, tad to summa ir 100 – tieši ar tādu domu grupas ir veidotas.

Ja izvēlamies tikai 50 naturālus skaitļus, tad var gadīties, ka nekādu divu izvēlētu skaitļu summa nav 100. Piemēram, mēs varam izvēlēties skaitļus no 50 līdz 99 ieskaitot. Tā kā pat divu mazāko izvēlēto skaitļu summa 50+51=101>100, tad **jebkuru** divu izvēlētu skaitļu summa ir **lielāka** par 100.

3.2.10. **Atbilde**: ar diviem jautājumiem.

Atrisinājums. Vispirms parādīsim, kā Andris var iztikt ar diviem jautājumiem.

Ar savu pirmo jautājumu Andris nosauc Dzintaram skaitļus a=1; b=1; c=1; d=1; e=1. Dzintara atbilde ir $1\cdot A+1\cdot B+1\cdot C+1\cdot D+1\cdot E$ - visu iedomāto skaitļu summa. Pieņemsim, ka šī atbilde ir n-ciparu skaitlis. Tātad nevienam Dzintara iedomātajam skaitlim nav vairāk par n cipariem. Ar savu otro jautājumu Andris nosauc Dzintaram skaitļus a=1; $b=10^n$; $c=10^{2n}$; $d=10^{3n}$; $e=10^{4n}$. Dzintara atbilde būs 5n-ciparu skaitlis. Šajā skaitlī A aizņems pēdējos n ciparus, B - priekšpēdējos n ciparus, utt. (varbūt dažiem no skaitļiem A, B, C, D, E priekšā būs nulles.)

Piemērs. Iedomāsimies, ka Dzintars iedomājies skaitļus 7; 13; 32; 45; 89 (bet Andris to, protams, nezina). Uz pirmo Andra jautājumu Dzintars sniedz atbildi $1\cdot 7+1\cdot 13+1\cdot 32+1\cdot 45+1\cdot 89=186$. Tā kā 186 – trīsciparu skaitlis, tad ar otro jautājumu Andris nosauc Dzintaram skaitļus 1; 1 000; 1 000 000; 1 000 000 000;
1 000 000 000 000 . Dzintara atbilde būs:

$$1\cdot 7+1\,000\cdot 13+1\,000\,000\cdot 32+1\,000\,000\,000\cdot 45+1\,000\,000\,000\,000\cdot 89=$$

$$7+13\,000+32\,000\,000+45\,000\,000\,000+89\,000\,000\,000\,000=89\,045\,032\,013\,007,$$

un Andris šajā atbildē uzskatāmi redz Dzintara iedomātos skaitļus.

Tagad pierādīsim, ka ar vienu jautājumu Andrim nepietiek.

Tā kā pirms jautājuma uzdošanas Andris neko nezina par Dzintara iedomātajiem skaitļiem, viņam savs jautājums jāuzdod uz labu laimi. Apzīmēsim Andra nosauktos naturālos skaitļus ar a; b; c; d; e (kur $a\le b\le c\le d\le e$) un iedomāsimies, ka viņš no Dzintara uzzina atbildi, kuras vērtība ir $10abcde$. Šādu atbildi Andris no Dzintara var saņemt vismaz divos gadījumos:

a) ja Dzintars iedomājies skaitļus $2bcde$; $2acde$; $2abde$; $2abce$; $2abcd$ - tiešām, $a\cdot 2bcde+b\cdot 2acde+c\cdot 2abde+d\cdot 2abce+e\cdot 2abcd=10abcde$

b) ja Dzintars iedomājies skaitļus $2bcde+b$; $2acde-a$; $2abde$; $2abce$; $2abcd$ - tiešām, $a\cdot(2bcde+b)+b\cdot(2acde-a)+c\cdot 2abde+d\cdot 2abce+e\cdot 2abcd=$

$$=2abcde+ab+2abcde-ab+2abcde+2abcde+2abcde=10abcde.$$

Pārbaudīsim, vai Dzintars drīkstēja iedomāties augšminētos skaitļus un, ja drīkstēja, vai šie skaitļu komplekti ir dažādi. Skaidrs, ka pirmais minētais komplekts sastāv no naturāliem skaitļiem. Otrajā komplektā vienīgās šaubas var radīt skaitlis $2acde-a$. Bet $2acde-a=a(2cde-1)$, un $2cde-1$ ir pozitīvs skaitlis, jo $2cde\ge 2$; tātad $2acde-a$ ir naturāls skaitlis, un Dzintars tādu būtu drīkstējis iedomāties.

Pirmajā minētajā komplektā vislielākais (vai viens no vislielākajiem, ja tādi ir vairāki) ir skaitlis $2bcde$ (jo $a\le b\le c\le d\le e$). Bet otrā komplekta pirmais skaitlis $2bcde+b$ pirmajā komplektā noteikti nav. Tātad abi mūsu apskatāmie skaitļu komplekti noteikti ir dažādi.

Vienīgā informācija, uz kuru Andris var balstīties, cenšoties noskaidrot Dzintara iedomātos skaitļus, ir Dzintara atbilde uz vienīgo Andra uzdoto jautājumu. Tā kā abu minēto komplektu gadījumos Dzintara atbildes ir vienādas, tad, saņemot šādu atbildi, Andrim nav nekādas iespējas izvēlēties jau starp abiem minētajiem komplektiem vien (un varbūt vēl starp kādiem citiem, kuru gadījumā Dzintara atbilde **varbūt** arī ir tāda pati – mēs par to neesam pat domājuši!) Tātad Andris nevar nekļūdīgi noskaidrot Dzintara iedomātos skaitļus.

3.3. TREŠĀ NODARBĪBA

3.3.1. Apzīmēsim tukšajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus, kā parādīts A36.zīm., bet vienas rindiņas (kolonnas, diagonāles) skaitļu summu ar S.

16	a	b	c
11	13	d	e
f	8	9	15
g	h	14	12

A36.zīm.

16	10	b	c
11	13	d	e
18	8	9	15
5	19	14	12

A37.zīm.

Tad no lejupejošās diagonāles iegūstam, ka S=16+13+9+12=50. Tālāk no 3.horizontāles f=S-(8+9+15)=50-32=18; no 1.vertikāles g=S-(16+11+18)=50-45=5; no 4.horizontāles h=S-(5+14+12)=50-31=19; no 2.vertikāles a=S-(13+8+19)=50-40=10. Esam ieguvuši

A37.zīmējumā attēloto ainu, kur abās pirmajās vertikālēs, abās pēdējās horizontālēs un lejupejošajā diagonālē ierakstīto skaitļu summas ir 50.

Lai izpildās uzdevuma nosacījumi, jāizvēlas skaitļi $b;c;d;e$ tā, ka vienlaicīgi pastāv vienādības:

$b+c=24$ (1);

$d+e=26$ (2);

$b+d=27$ (3);

$c+e=23$(4);

$d+c=37$ (5).

Atņemot no (3) vienādību (1), iegūstam $d-c=3$ (6); saskaitot (6) un (5), iegūstam $2d=40$; $d=20$. Tālāk no (5) $c=37-d=17$; no (4) $e=23-c=6$; no (3) $b=27-d=7$. Pārbaude parāda, ka arī (2) un (1) izpildās; tiešām, $d+e=20+6=26$ un $b+c=7+17=24$. Tātad vienīgais uzdevuma atrisinājums redzams A38.zīmējumā.

16	10	7	17
11	13	20	6
18	8	9	15
5	19	14	12

A38.zīm.

3.3.2. Pakāpeniski pārveidojam doto vienādību:

$$a^7b^5+a^5b^7=a^9b^3+a^3b^9$$

$$a^3b^3\left(a^4b^2+a^2b^4\right)=a^3b^3\left(a^6+b^6\right)$$

$$a^3b^3\left(a^4b^2+a^2b^4-a^6-b^6\right)=0$$

$$a^3b^3\left(a^4\left(b^2-a^2\right)-b^4\left(b^2-a^2\right)\right)=0$$

$$a^3b^3\left(a^4-b^4\right)\left(b^2-a^2\right)=0$$

$$a^3b^3\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)\left(b^2-a^2\right)=0 \qquad (1)$$

Ja vairāku skaitļu reizinājums ir 0, tad vismaz viens no šiem skaitļiem ir 0. Saskaņā ar doto $a\neq 0$. Tā kā $a^2>0$ un $b^2\geq 0$, tad $a^2+b^2>0$; tātad $a^2+b^2\neq 0$. Tāpēc no (1) izriet divas iespējas:

1) $b^3=0$; tad $b=0$.

2) $\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-a^2\right)=0$; no šejienes seko, ka $a^2-b^2=0$ jeb $\left(a-b\right)\left(a+b\right)=0$.

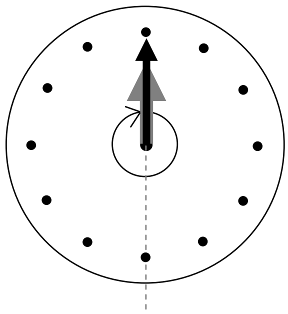
Tas iespējams divos gadījumos:

1) $a-b=0$; tad $b=a=2007$;

2) $a+b=0$; tad $b=-a=-2007$.

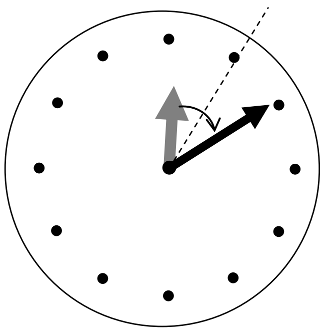
Atbilde: b ir viens (jebkurš) no skaitļiem 0; 2007; – 2007.

3.3.3. Uzdevuma atbilde atkarīga no tā, kā saprast jēdzienu „leņķis, ko veido pulksteņa stundu un minūšu rādītāji”. Atceramies: saskaņā ar skolas mācību grāmatas definīciju leņķa lielums noteikti lielāks par 0° un nepārsniedz 360° (pilnam leņķim). Stingri pieturoties pie šīs definīcijas, diennakts sākuma momentā (00st.00min.) abi rādītāji vispār var veidot tikai pilnu leņķi; tad šī leņķa bisektrise ir stars, kas no ciparnīcas centra iet uz iedaļu, kura atbilst laika momentam 06st.00min., skat.A39.zīm.

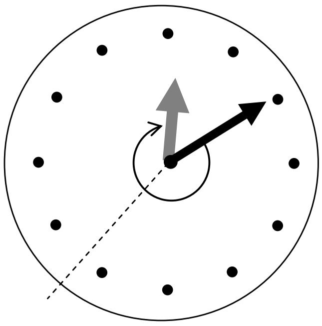


A39.zīm.

Tikko minūšu rādītājs aizvirzīsies no stundu rādītāja, radīsies jau divi leņķi, ko veido rādītāji; atbilstoši būs arī divas bisektrises (skat. A40. un A41. zīm.), un nav skaidrs, par kuru no tiem uzdevumā jādomā. Domājot par A40.zīmējumā attēloto gadījumu,



A40.zīm.

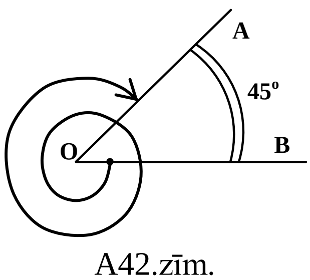


A41.zīm.

būtu jāpieņem, ka bisektrise ir izdarījusi „lēcienu" par 180^o; nav skaidrs, uz kuru pusi tas izdarīts. Domājot par A41.zīm. attēloto gadījumu, līdzīga situācija radīsies brīdī, kad minūšu rādītājs pirmo reizi „apdzīs" stundu rādītāju; tā kā leņķa lielums nav 0^o, tad tam „lēcienveidīgi" jākļūst vienādam ar 360^o (pilns leņķis), un bisektrisei no pozīcijas, kurā tā sakrīt ar abiem rādītājiem, lēcienveidīgi jāieņem pretēja pozīcija. Atkal nav skaidrs, vai jāuzskata, ka tā šo lēcienu izdarījusi pulksteņa rādītāju virzienā vai pretēji tam.

Tātad, **stingri pieturoties pie deviņgadīgās skolas mācību grāmatā dotajām definīcijām, uzdevums ir sastādīts nekorekti un vispār nav atrisināms.**

Vidusskolā lieto citu leņķa jēdzienu; leņķa lielums var būt arī lielāks par 360^o (piem., A42.zīm. viens no leņķiem AOB ir 45^o liels, bet otrs - $360^o + 315^o = 675^o$ liels). Izmantojot šo izpratni, uzdevumam ir sekojošs atrisinājums.



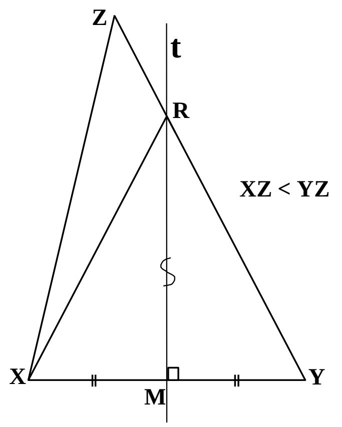
A42.zīm.

Diennakts laikā minūšu rādītājs veic 24 apgriezienus ap centru (katru stundu – vienu). Stundu rādītājs veic divus apgriezienus ap centru. Tātad minūšu rādītājs apsteidz stundu rādītāju par $24 - 2 = 22$ pilniem apgriezieniem. Tā kā bisektrise attiecībā pret stundu rādītāju kustas divas reizes lēnāk nekā minūšu rādītājs, tad tā apsteigusi stundu rādītāju 11 reizes. Atceroties, ka stundu rādītājs veicis 2 pilnus apgriezienus, iegūstam: apskatāmā bisektrise diennakts laikā veikusi 2+11=**13 apgriezienus.**

3.3.4. Uzdevuma risinājums balstīts uz diviem cieši saistītiem faktiem.

I. Nogriežņa XY vidusperpendikuls sastāv tieši no visiem tiem punktiem Z, kam izpildās sakarība XZ=YZ.

II. Ja punkts Z atrodas tai pašā pusē no nogriežņa XY vidusperpendikula t, kurā atrodas X, tad XZ<YZ (skat. A43.zīm.).



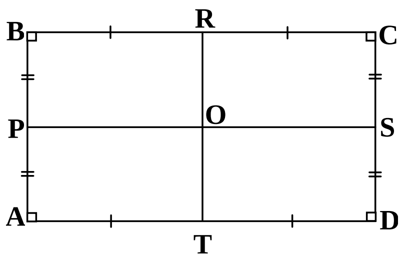
A43.zīm

Fakts I pierādīts skolas mācību grāmatā. Pamatosim faktu II.

Ja X un Z atrodas vienā pusē no t, tad Y un Z atrodas dažādās pusēs no t. Tad nogrieznis ZY krusto t; apzīmēsim krustpunktu ar R. Tad $\Delta XMR=\Delta YMR$ (kk), tāpēc XR=YR. No trijstūru nevienādības XZ<XR+RZ=YR+RZ=YZ, k.b.j.

Tagad atrisināsim mūsu uzdevumu.

Apzīmēsim ar P, R, S, T taisnstūra ABCD malu viduspunktus (skat.A44.zīm). Tad $\Delta BCS=\Delta ADS$ (kk), tāpēc BS=AS. No I seko, ka S atrodas uz AB vidusperpendikula, tātad $PS\perp AB$. Līdzīgi $PS\perp CD$; $RT\perp AD$; $RT\perp BC$. Tātad ABCD sadalīts 4 vienādos taisnstūros.

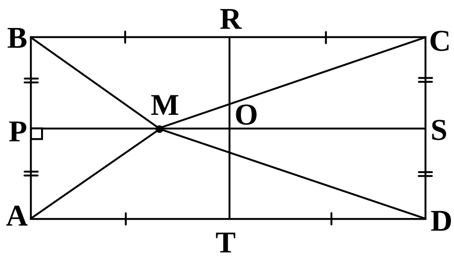


A44.zīm.

Tālāk šķirosim dažādas punkta M atrašanās iespējas.

1) M sakrīt ar O. Tad AO=BO=CO=DO, jo vienādos taisnstūros diagonāles ir vienādas; no jebkuriem trim no šiem nogriežņiem var izveidot vienādmalu trijstūri.

2) M pieder kādam no nogriežņiem PO, RO, SO, TO, bet nesakrīt ar O. Pieņemsim, ka M ir nogriežņa PO iekšējs punkts (A45.zīm.).

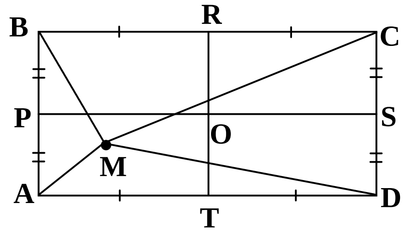


A45.zīm.

Tā kā PS un RT ir ABCD malu vidusperpendikuli, tad no I un II seko: AM=BM<CM=DM. No šīm sakarībām viegli iegūt: katri divi no garumiem CM, DM, BM kopā lielāki par trešo.

No skolas kursa zināms, ka tādā gadījumā eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar BM, CM un DM.

3) M nepieder nevienam no nogriežņiem PO, RO, SO, TO. Tad tas atrodas kādā no taisnstūriem, kuros sadalīts ABCD (A46.zīm). Varam uzskatīt, ka M atrodas taisnstūrī APOT (citus gadījumu apskata līdzīgi).



A46.zīm.

Apskatīsim nogriežņus BM, CM, DM. No II seko, ka CM>BM un CM>DM. Tāpēc CM+DM>BM (1); CM+BM>DM (2). Ja mēs vēl prastu pierādīt, ka BM+DM>CM (3), tad no nevienādībām (1), (2), (3) tāpat kā 2) gadījumā sekotu: eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar BM, CM un DM.

Taisnstūra diagonāļu garumi ir lielāki par jebkuriem citiem attālumiem starp taisnstūra punktiem; tāpēc CM<BD. Savukārt no trijstūra nevienādības seko, ka BM+DM≥BD (patiesībā pat BM+DM>BD, jo M neatrodas uz diagonāles BD, bet mums tas šeit nav nepieciešams, tāpēc to nepierādīsim). Iegūstam, ka BM+DM≥BD>CM, no kurienes seko (3).

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

3.3.5. **Atbilde:** jā, var.

Risinājums.

Mēģināsim vispirms noskaidrot, vai varētu gadīties, ka visiem šiem 33 skaitļiem ir vienādi ciparu daudzumi. Dalām 2006 ar 33: 2006:33=60 atl.26

Tātad 33 pēc kārtas ņemtos 60-ciparu skaitļos kopā būtu par 26 cipariem mazāk, nekā mums nepieciešams. Ja no šiem 33 skaitļiem 26 skaitļi būtu nevis 60-ciparu, bet 61-cipara skaitļi, vajadzīgais būtu sasniegts.

Tāpēc meklējamos skaitļus var izvēlēties šādi: ņemt **pirmos 26** skaitļus, kas satur 61 ciparu katrs, un **pēdējos** 33-26=**7** skaitļus, kas satur 60 ciparus katrs. Skaidrs, ka šie 33 skaitļi ir pēc kārtas sekojoši.

Lieku reizi pārliecināsimies, ka kopējais ciparu skaits ir vajadzīgais: $7\times 60+26\times 61=420+1586=2006$.

Tā kā gan 60-ciparu skaitļu, protams, ir **vairāk** nekā septiņi, gan 61-cipara skaitļu ir **vairāk** nekā divdesmit seši, tad augšminētā izvēle ir iespējama.

3.3.6. **Atbilde**: jā, eksistē.

Risinājums.

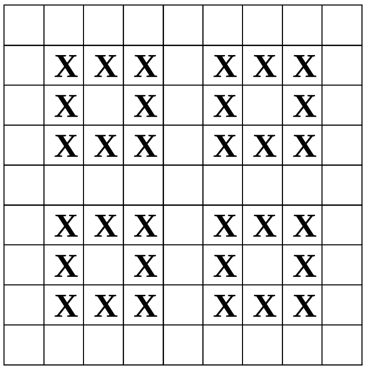
Ievērosim, ka $1024=2^{10}$. Par meklējamo skaitli var ņemt, piemēram, skaitli 42010000001024.

Tiešām, $42010000001024=4201\underbrace{0000000000}_{10\,\text{nulles}}+1024=4201\cdot 2^{10}\cdot 5^{10}+2^{10}=$

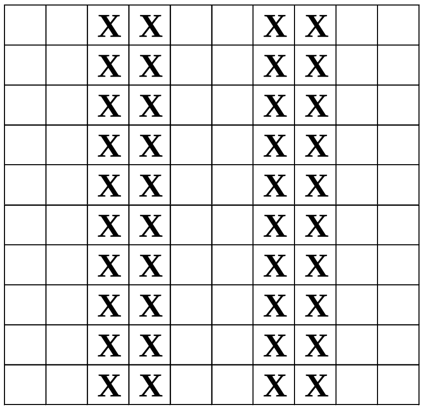
$=2^{10}\left(4201\cdot 5^{10}+1\right)$, kas, protams, dalās ar $2^{10}=1024$.

3.3.7. **Atbilde:** a) 32 rūtiņas; b) 40 rūtiņas.

A. Piemērus ar 32 rūtiņām 9x9 rūtiņu kvadrāta gadījumā un ar 40 rūtiņām 10x10 rūtiņu kvadrāta gadījumā skat. A47. un A48. zīm.



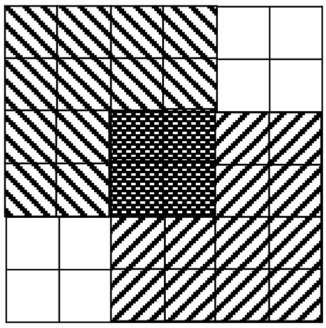
A47.zīm.



A48.zīm.

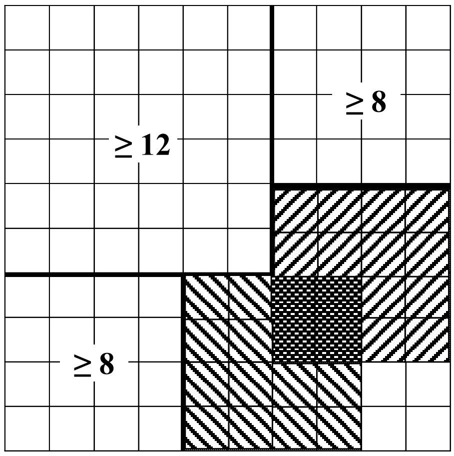
B. 9x9 rūtiņu kvadrātā viegli iezīmēt četrus 4x4 rūtiņu kvadrātus bez kopīgām rūtiņām; katrā no tiem jābūt vismaz 8 melnām rūtiņām. Tātad 9x9 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 8x4=32 melnām rūtiņām.

Lai pierādītu, ka 10x10 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 40 melnām rūtiņām, vispirms apskatīsim 6x6 rūtiņu kvadrātu (skat.A49.zīm). Katrā no abiem slīpi iesvītrotajiem 4x4 rūtiņu kvadrātiem jābūt vismaz 8 melnām rūtiņām. Ne vairāk kā četras melnās rūtiņas var būt gan vienā, gan otrā no tiem. Tātad katrā 6x6 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 8+8-4=12 melnām rūtiņām.



A49.zīm.

Līdzīgi spriežot, abos A50.zīm. iesvītrotajos 4x4 rūtiņu kvadrātos kopā jābūt vismaz 8+8-4=12 melnām rūtiņām; tāpēc visā 10x10 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 12+8+8+12=40 melnām rūtiņām.



A50.zīm.

3.3.8. Atbilde: 12 fotogrāfijas.

Risinājums.

A. Attēlosim katru prezidentu ar punktu un savienosim katrus divus punktus ar līniju. No katra punkta iziet 7 līnijas, tātad tajā sanāk kopā 7 līniju gali. Tātad pavisam ir $8 \cdot 7 = 56$ līniju gali. Tā kā katrai līnijai ir 2 gali, tad līniju ir $56 : 2 = 28$. Tātad pavisam ir 28 prezidentu pāri; katram no šiem pāriem jābūt redzamam uz kādas fotogrāfijas.

Ja uz fotogrāfijas ir 2 prezidenti, tad tā satur vienu prezidentu pāri; ja uz fotogrāfijas ir 3 prezidenti, tad tā satur trīs prezidentu pārus (ja, piemēram, uz tās ir prezidenti A, B, C, tad tā satur prezidentu pārus AB, AC, BC).

Apzīmēsim divu prezidentu fotogrāfiju skaitu ar x, bet triju prezidentu fotogrāfiju skaitu ar y. Tā kā katram divu prezidentu pārim jābūt redzamam tieši uz vienas fotogrāfijas, tad

$$x + 3y = 28 \qquad (1)$$

Katram prezidentam jābūt redzamam kopā ar 7 citiem. Tā kā katrā 3 prezidentu fotogrāfijā viņš redzams kopā ar diviem citiem, tad katram prezidentam jāparādās uz vismaz vienas divu prezidentu fotogrāfijas. Tā kā pavisam ir 8 prezidenti, tad jābūt vismaz $8 : 2 = 4$ divu prezidentu fotogrāfijām jeb

$$x \geq 4 \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka $3y = 28 - x \leq 28 - 4 = 24$, tāpēc

$$y \leq 8 \qquad (3)$$

No (1) un (3) seko, ka $x + y = (x + 3y) - 2y = 28 - 2y \geq 28 - 2 \cdot 8 = 28 - 16 = 12$.

Tātad vismaz 12 fotogrāfijas ir nepieciešamas.

B. Ja prezidentus apzīmēsim ar A, B, C, D, E, F, G, H, tad viegli pārbaudīt, ka fotogrāfijas ABC, CDE, EFG, GHA, BEH, ADF, HFC, BDG, AE, BF, CG, DH apmierina uzdevuma prasības.

Šis piemērs iegūts, attēlojot prezidentus kā regulāra 8-stūra virsotnes un veidojot 8 trijstūrus un 4 nogriežņus ar virsotnēm šī astoņstūra virsotnēs tā, lai būtu novilktas visas astoņstūra malas un diagonāles.

3.3.9. Apzīmēsim rindā novietotās figūriņas no kreisās uz labo pusi ar F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7. Pirmajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F3 un F4, uz labā – F7. Apskatām trīs iespējamos gadījumus.

A. Kreisais kauss ir smagāks. Tad rindā nav 1kg, 2kg vai 3kg smagās figūriņas (pārbaudiet paši visas iespējas un pārliecinieties par to). Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F1 un F2, uz labā – F3. Ja kreisais kauss ir smagāks, rindā nav 1kg smagās figūriņas; ja kausi ir līdzsvarā, rindā nav 2kg smagās figūriņas; ja labais kauss ir smagāks, rindā nav 3kg smagās figūriņas.

B. Kausi ir līdzsvarā. Tad rindā nav 4kg vai 8kg smagās figūriņas (pārliecinieties paši, pārbaudot visas iespējas). Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F1 un F3, uz labā – F4. Ja rindā trūkst 4kg smagās figūriņas, smagāks ir labais kauss; ja rindā trūkst 8kg smagās figūriņas, svari ir līdzsvarā.

C. Labais kauss ir smagāks. Tad rindā nav 5kg, 6kg vai 7kg smagās figūriņas (pārliecinieties paši, pārbaudot visas iespējas). Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F4 un F7, uz labā – F5 un F6. Ja rindā trūkst 5kg smagās figūriņas, uz leju nosveras labais kauss; ja trūkst 6kg smagās figūriņas, svari ir līdzsvarā; ja trūkst 7kg smagās figūriņas, uz leju nosveras kreisais kauss.

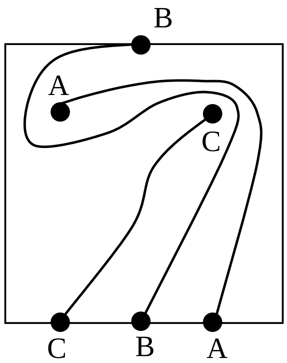
3.3.10. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Risinājums.

Sareizinot divniekus, pieciniekus un septītniekus, iegūst skaitli, kas nedalās ar 3. Bet 2007 dalās ar 3, tātad skaitlis, kura ciparu summa ir 2007, dalās ar 3. No šejienes seko minētā atbilde.

3.4. Ceturtā nodarbība

3.4.1. Jā, var. Skat., piem., A51.zīm.



A51.zīm.

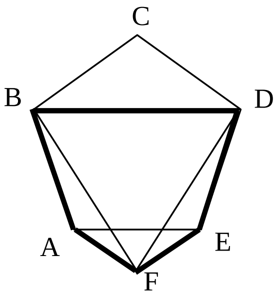
3.4.2. **Atbilde:** nē, nav taisnība.

Risinājums: līdzīgām figūrām **visu** atbilstošo garumu attiecības ir vienādas (šo attiecību kopējo vērtību sauc par figūru līdzības koeficientu). Piemēram, ja ΔABC malas ir divas reizes garākas par atbilstošajām ΔMNK malām, tad arī ΔABC mediānas, bisektrises, attālums starp ievilktās un apvilktās riņķa līnijas centriem utt. ir divas reizes garāks par ΔMNK mediānām, bisektrisēm, attālumu starp ievilktās un apvilktās riņķa līnijas centriem utt.

Skaidrs, ka 2*l* pudele ir lielāka par 0,5*l* pudeli, jo tām ir dažādi tilpumi (tas jau redzams arī „ar neapbruņotu aci"). Tāpēc pudeļu līdzības gadījumā 2*l* pudelē **visiem** garumiem jābūt lielākiem par atbilstošajiem garumiem 0,5*l* pudelē. **Bet korķi šīm pudelēm ir vienādi** (acīmredzot, ražošanas vienkāršošanas nolūkos). Tāpēc pudeles nav savā starpā līdzīgas (matemātiskā izpratnē).

3.4.3. Jā, eksistē. Turklāt eksistē gan izliekts, gan ieliekts piecstūris, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Sniegsim piemēru katram no tiem.

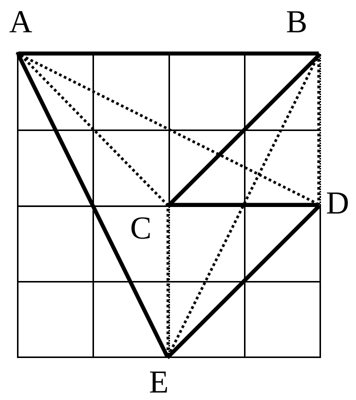
Viens **izliekta** piecstūra piemērs redzam A52.zīmējumā. Tas izveidots no regulāra piecstūra ABCDE un regulāra trijstūra BDF.



A52.zīm.

Šeit $AE = AB$ (jo ABCDE ir regulārs piecstūris, kuram tātad visas malas vienādas), $BF = BD$ un $DF = BD$ (jo BDF ir regulārs trijstūris, kuram tātad visas malas vienādas), $AD = BD$ un $BE = BD$ (jo ABCDE ir regulārs piecstūris, kuram tātad visas diagonāles vienādas).

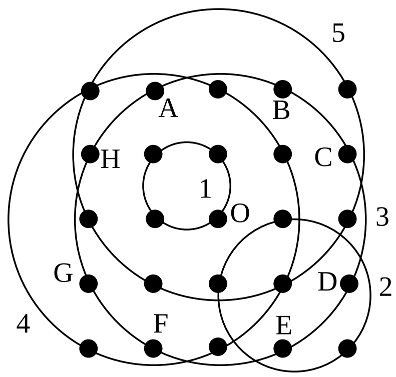
Uzdevuma nosacījumiem atbilstoša **ieliekta** piecstūra piemērs redzams A53.zīmējumā.



A53.zīm.

Redzams, ka AD=EB=AE, AC=ED, CE=BD=CD.

3.4.4. Jā, var. Skat., piem., A54.zīm.



A54.zīm.

Pamatosim šī zīmējuma pareizību:

1. četri punkti, caur kuriem iet līnija 1, ir kvadrāta virsotnes un tātad **atrodas** uz vienas riņķa līnijas,

2. trīs punkti, caur kuriem iet līnija 2, nav uz vienas taisnes un tātad atrodas uz vienas riņķa līnijas,

3. punkti A,B,C,D,E,F,G,H visi atrodas attālumā $\sqrt{5}$ no režģa centra O un tātad atrodas uz vienas riņķa līnijas (zīmējumā līnija 3; pieņemam, ka attālums starp diviem blakus punktiem šajā režģī ir 1),

4. riņķa līnijas 4 resp. 5 iegūstamas no līnijas 3, pabīdot to par attālumu 1 pa kreisi resp. uz augšu.

3.4.5. **Atbilde:** 1004 skaitļus. Turklāt ir vismaz divi atšķirīgi veidi, kā šos skaitļus izvēlēties.

1. Risinājums.

A. Ja izvēlamies 1004 skaitļus 1004; 1005; 1006; ... ;2006; 2007, pat divkāršots mazākais skaitlis $2004+2004=2008$ ir lielāks par lielāko no izvēlētajiem skaitļiem. Tāpēc šie skaitļi apmierina uzdevuma prasības.

B. Parādīsim, ka vairāk par 1004 skaitļiem izvēlēties nevar. Pieņemsim, ka kaut kāda skaitļu sistēma apmierina uzdevuma prasības. Pastāv divas iespējas.

B1. Lielākais no izvēlētajiem skaitļiem ir pāra skaitlis 2n, n - naturāls. Tā kā $2n \le 2007$, tad $n \le 1003\frac{1}{2}$, tāpēc $n \le 1003$. Neviens no skaitļiem, kas lielāki par 2n, nav izvēlēts. Skaitļus, kas mazāki par 2n un atšķiras no n, sadalām pāros ar summu 2n. Šādu pāru ir n-1:

1; 2n-1

2; 2n-2

3; 2n-3

.

.

.
n-1; *n*+1.

No katra pāra var būt izvēlēts ne vairāk kā viens skaitlis. Tā kā ir izvēlēts arī skaitlis 2*n* un **varbūt** ir izvēlēts skaitlis *n*, tad izvēlēto skaitļu daudzums nepārsniedz (*n* - 1) + 1 + 1 = *n* + 1. Tā kā $n \le 1003$, tad šis daudzums nepārsniedz 1004.

B2. Lielākais no izvēlētajiem skaitļiem ir nepāra skaitlis 2*n*+1, *n* – naturāls. Tā kā $2n+1 \le 2007$, tad $2n \le 2006$ un $n \le 1003$. Neviens no skaitļiem, kas lielāki par 2*n*+1, nav izvēlēts. Skaitļus, kas mazāki par 2*n*+1, sadalām pāros ar summu 2*n*+1. Šādu pāru ir *n*:

1 un 2*n*
2 un 2*n*-1
3 un 2*n*-2
.
.
.
n un *n*+1.

No katra pāra var būt izvēlēts augstākais viens skaitlis. Tā kā **ir** izvēlēts arī skaitlis 2*n*+1, tad izvēlēto skaitļu daudzums nepārsniedz *n*+1. Tā kā $n \le 1003$, tad šis daudzums nepārsniedz 1004.

2.risinājums.

A. Izvēloties visus nepāra skaitļus, kas atrodas intervālā no 1 līdz 2007 ieskaitot, tiks izpildītas uzdevuma prasības, jo divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis. Nepāra skaitļu dotajā intervālā ir 1004.

B. To, ka vairāk par 1004 skaitļiem izvēlēties nevar, pierāda tāpat kā 1.risinājumā.

3.4.6. **Atbilde**: jā, eksistē. Piemēram, tādi ir skaitļi 2874009600; 5748019200; 8622028800; 11496038400; 14370048000. Lasītājs, kas nav slinks, var viegli pārbaudīt, ka tie apmierina uzdevuma prasības ☺

Parādīsim, kā šie skaitļi iegūti.

Pieņemsim, ka x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - patvaļīgi atšķirīgi naturāli skaitļi. Apskatīsim to summas pa trīs. Tādu summu ir 10:

$x_1+x_2+x_3$, $x_1+x_2+x_4$, $x_1+x_2+x_5$, $x_1+x_3+x_4$, $x_1+x_3+x_5$,

$x_1+x_4+x_5$, $x_2+x_3+x_4$, $x_2+x_3+x_5$, $x_2+x_4+x_5$, $x_3+x_4+x_5$.

Apzīmēsim ar R visu šo summu reizinājumu un apskatīsim skaitļus $x_1 \cdot R$; $x_2 \cdot R$; $x_3 \cdot R$; $x_4 \cdot R$; $x_5 \cdot R$. Šie skaitļi apmierina uzdevuma prasības. Apskatīsim, piemēram, trīs skaitļus $x_1 \cdot R$; $x_2 \cdot R$; $x_3 \cdot R$. To reizinājums ir $(x_1x_2x_3)\cdot R^3$, bet to summa ir $(x_1+x_2+x_3)\cdot R$. Ievērojam, ka $\frac{(x_1x_2x_3)\cdot R^3}{(x_1+x_2+x_3)\cdot R} = \frac{R}{x_1+x_2+x_3}\cdot(x_1x_2x_3)\cdot R$. Skaitļi R un $x_1x_2x_3$ ir naturāli; R pēc definīcijas dalās ar $x_1+x_2+x_3$, tātad arī $\frac{R}{x_1+x_2+x_3}$ ir naturāls skaitlis. Tāpēc $(x_1R)(x_2R)(x_3R)$ dalās ar $x_1R+x_2R+x_3R$. Citiem skaitļu trijniekiem prasīto pārbauda tieši tāpat.

Mūsu norādītajā piemērā $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$; $x_5=5$. Summas pa trim ir 6; 7; 8; 8; 9; 10; 9; 10; 11; 12. Šo summu reizinājums ir $42\cdot64\cdot81\cdot132\cdot100 = 2688\cdot10692\cdot100 = 2874009600$, no kā arī iegūts augšminētais komplekts.

Lasītājs pats var sastādīt un atrisināt līdzīgus uzdevumus, kur skaitļi „5” un „3” aizstāti ar citiem.

3.4.7. **Atbilde:** uzvar Andris

Risinājums: Atstājot Bruno kaudzīti ar 7 konfektēm, Andris uzvar. Tiešām, tālāk spēle var risināties šādi:

Bruno ņem	Andris ņem
1	3
2	5
3	4
4	3
5	2

Četros pēdējos gadījumos spēle jau beigusies; pirmajā gadījumā Bruno palikusi kaudzīte ar 3 konfektēm, bet viņš to visu apēst nedrīkst. Tāpēc viņš ēd 1 vai 2 konfektes, un Andris ar nākošo gājienu uzvar.

Tagad parādīsim, ka Andris uzvar, atstājot Bruno kaudzīti ar 13 konfektēm. Ja tādā situācijā Bruno ņem 1; 2; 4 vai 5 konfektes, Andris ņem attiecīgi 5; 4; 2 vai 1 konfekti un reducē spēli uz jau apskatīto gadījumu. Ja turpretī Bruno no 13 konfekšu kaudzītes ņem 3 konfektes, tad Andris ņem 5 konfektes; paliek 5 konfekšu kaudzīte, ko Bruno visu apēst nedrīkst. Tāpēc Andris ar savu nākošo gājienu uzvarēs.

Tagad parādīsim, ka Andris uzvar, atstājot Bruno kaudzīti ar 20 konfektēm. Tiešām, ja šādā situācijā Bruno ēd x konfektes, kur $x \neq 1$, tad Andris ēd (7-x) konfektes un reducē spēli uz jau apskatīto 13 konfekšu gadījumu. Ja turpretī Bruno ēd 1 konfekti, tad Andrim paliek kaudzīte ar 19 konfektēm, un viņš ēd 3 konfektes, atstājot Bruno kaudzīti ar 16 konfektēm. Bruno nevar ēst 3 konfektes, tāpēc pēc viņa gājiena Andrim paliks kaudzīte, kurā konfekšu skaits būs viens no skaitļiem 15; 14; 12; 11, un Andris ar nākošo gājienu varēs atstāt Bruno attiecīgi 13; 13; 7; 7 konfektes; saskaņā ar iepriekšējo tas nodrošina Andrim uzvaru.

Tagad parādīsim, ka Andris uzvar, atstājot Bruno kaudzīti ar 26 konfektēm. Viņš rīkojas tāpat kā 13 konfekšu kaudzītes gadījumā. Ja Bruno ēd 1; 2; 4 vai 5 konfektes, Andris reducē spēli uz jau aprakstīto 20 konfekšu kaudzītes gadījumu; ja Bruno ēd 3 konfektes, Andris ēd 5 konfektes un atstāj Bruno kaudzīti ar 18 konfektēm. Bruno var ēst augstākais 4 konfektes, tāpēc Andris ar savu nākošo gājienu atstāj Bruno kaudzīti ar 13 konfektēm un saskaņā ar iepriekšējo uzvar.

Tieši tāpat parāda, ka Andris uzvar, ar savu pirmo gājienu apēdot 2 konfektes un atstājot Bruno kaudzīti ar 33 konfektēm. Ja Bruno šādā situācijā ēd x konfektes ($x \neq 1$), tad Andris ēd (7-x) konfektes, atstājot Bruno kaudzīti ar 26 konfektēm, un uzvar saskaņā ar iepriekšējo. Ja turpretī Bruno ēd 1 konfekti, tad Andris ēd 3 konfektes un atstāj Bruno kaudzīti ar 29 konfektēm. Tālākās tabulā norādītās Andra atbildes uz Bruno iespējamiem gājieniem (Bruno nevar ēst 3 konfektes) reducē spēli uz situācijām, par kurām jau pierādīts, ka tās nodrošina uzvaru Andrim:

Bruno ņem	Andris ņem	Paliek
1	2	26
2	1	26
4	5	20
5	4	20

3.4.8. Viegli ievērot, ka viena no saknēm ir 1. Tiešām, ievietojot $x = 1$ vienādojuma kreisajā pusē, iegūstam:

$$118 \cdot 1^2 - 2125 \cdot 1 + 2007 = (18 + 2007) - 2125 = 2125 - 2125 = 0.$$

Pārveidosim vienādojumu reducētā formā: $x^2 - \dfrac{2125}{118}x + \dfrac{2007}{118} = 0.$

Apzīmēsim otro sakni ar x_2. Pēc Vjeta teorēmas $1 \cdot x_2 = \dfrac{2007}{118}$, tāpēc $x_2 = \dfrac{2007}{118}$.

Tātad vienādojuma sakņu kopa ir $\left\{1;\frac{2007}{118}\right\}$.

3.4.9. **Atbilde:** 9 skaitļi.

Piemērs. Skaitļi 110; 60; 55; 55; 55; 55; 55; 55; 50 apmierina uzdevuma prasības (to summa ir 550).

Pierādījums: Pierādīsim, ka citāds skaitļu daudzums nav iespējams. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas secībā ar $x_1; x_2; ...; x_n$, bet to summu ar S. Tad $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq ... \geq x_n$.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem arī

$x_1 = \frac{S - x_1}{4}$, tātad $x_1 = \frac{S}{5}$;

$x_3 = \frac{S - x_3}{9}$, tātad $x_3 = \frac{S}{10}$;

$x_n = \frac{S - x_n}{10}$, tātad $x_n = \frac{S}{11}$.

No šejienes iegūstam:

$$S = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + ... + x_{n-1} + x_n) \geq x_1 + (x_3 + x_3) + (x_n + ... + x_n + x_n) =$$

$$= \frac{S}{5} + 2 \cdot \frac{S}{10} + (n-3)\frac{S}{11};$$ no nevienādības $S \geq \frac{S}{5} + \frac{2S}{10} + \frac{(n-3)S}{11}$ seko (jo S>0)

$1 \geq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{n-3}{11}$, $\frac{n-3}{11} \leq \frac{3}{5}$, $n - 3 \leq 6\frac{3}{5}$, $n \leq 9\frac{3}{5}$.

Tā kā n – naturāls skaitlis, tad $n \leq 9$.

Līdzīgi

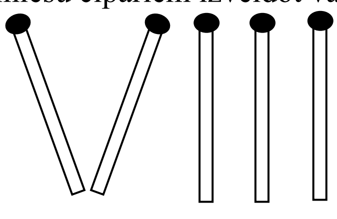
$$S = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + ... + x_{n-1}) + x_n \leq 2x_1 + (n-3)x_3 + x_n < 2x_1 + (n-2)x_3 =$$

$= \frac{2S}{5} + \frac{(n-2)S}{10}$, no kurienes seko $1 < \frac{2}{5} + \frac{n-2}{10}$, $\frac{n-2}{10} > \frac{3}{5}$, $n - 2 > 6$, $\boldsymbol{n > 8}$.

No abiem izceltajiem apgalvojumiem seko n = 9, k.b.j.

3.4.10. Uzdevums zināmā mērā jāuztver kā joks. Vārdam „kubs” matemātikā ir vismaz divas dažādas nozīmes: a) ģeometriska figūra, b) skaitļa trešā pakāpe.

Skaidrs, ka kubu („piepildītu” ķermeni) no 5 sērkociņiem bez laušanas izveidot nevarēs, jo sērkociņš ir garāks par vajadzīgā kuba šķautnes garumu. Nevarēs izveidot arī kuba karkasu (tikai šķautnes), jo tādu ir 12, un nekādas divas no tām neatrodas uz vienas taisnes. Turpretī skaitļa $2^3 = 8$ pierakstu ar romiešu cipariem izveidot var:



A55.zīm.

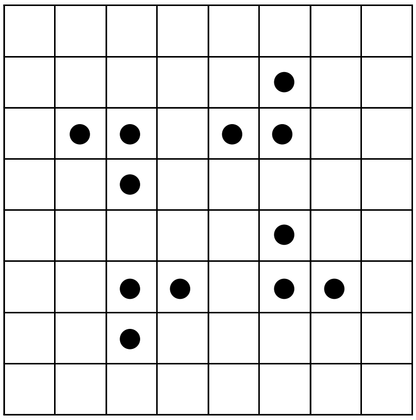
Lasītājs pats var veidot arī dažādu kubu pierakstus ar arābu cipariem.

3.5. PIEKTĀ NODARBĪBA

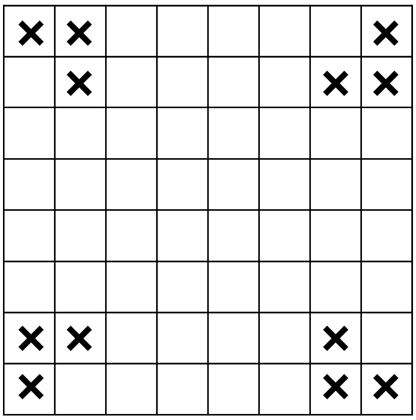
3.5.1. **Atbilde:** 12 zirdziņus.

Risinājums:

A. 12 zirdziņu izkārtojuma piemērs redzams A56. zīm.



A56.zīm.



A57.zīm.

B. Pierādīsim, ka vismaz 12 zirdziņi ir vajadzīgi.

Apskatīsim A57. zīm. Nekādas divas no tur atzīmētajām rūtiņām nevar apdraudēt ar vienu un to pašu zirdziņu, un neviens zirdziņš, kas atrodas uz kādas no šīm rūtiņām, neapdraud nevienu citu no šīm rūtiņām. Tāpēc to zirdziņu, kas vai nu atrodas uz šīm rūtiņām, vai tās apdraud, kopā ir vismaz 12.

3.5.2. Atbilde: 9 biedrības.

A. Apzīmēsim zēnus ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 14. Uzdevuma nosacījumus apmierina šāda biedrību sistēma:

1; 2; 3
4; 5; 6
7; 8; 9
10; 11; 12
13; 14; 1
2; 3; 4
5; 6; 7
8; 9; 10
11; 12; 13

B. Pierādīsim, ka vairāk par 14 biedrībām nevar būt. Pieņemsim, ka katra biedrība nodibinājusi savas apliecības. Tā kā neviens no 14 zēniem nav vairāk kā 2 biedrībās, tad kopā nav vairāk par $14 \cdot 2 = 28$ apliecībām.

Ja biedrību būtu vairāk par 9, tad to būtu vismaz 10; tad kopā būtu vismaz $10 \cdot 3 = 30$ apliecības. Tā ir pretruna.

3.5.3. Atbilde: $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$.

Risinājums: Pārrakstām vienādojumu formā

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = 3 + \frac{5}{21}$$

$$x - 3 = \frac{5}{21} - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}$$

Tā kā y un z – naturāli skaitļi, tad labajā pusē gan mazināmais, gan mazinātājs ir robežās starp 0 un 1. Tāpēc arī labā puse pēc moduļa (absolūtās vērtības) ir **mazāka par 1.** Tā kā x ir naturāls skaitlis, tad $x - 3$ ir vesels skaitlis. Vienīgais veselais skaitlis, kas pēc moduļa mazāks par 1, ir 0. Tāpēc $x-3=0$ (no šejienes seko, ka $x=3$) un $\frac{5}{21}=\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$. No šīs vienādības iegūstam $y+\frac{1}{z}=\frac{21}{5}$ un tālāk $y+\frac{1}{z}=4+\frac{1}{5}$.

Tāpat kā iepriekš secinām, ka $y=4$ un $z=5$.

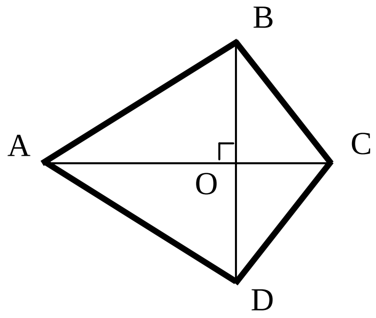
3.5.4. Ievērojam, ka

$ab-bc+cd-da=(ab-ad)+(cd-cb)=a(b-d)-c(b-d)=(a-c)(b-d)=$
$=(c-a)(d-b).$

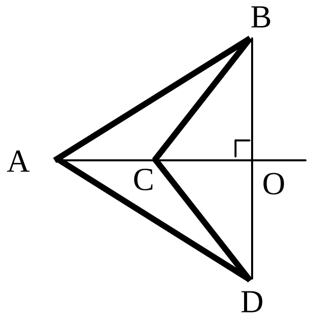
Saskaņā ar doto $c-a$ un $d-b$ ir pozitīvi skaitļi. To reizinājums ir lielākais iespējamais, ja katrs reizinātājs ir lielākais iespējamais. Reizinātājs $c-a$ būs lielākais iespējamais tad, ja c būs iespējami liels, bet a – iespējami mazs, t.i., ja $c=5$ un $a=2$; tad $c-a=3$. Savukārt $d-b$ būs iespējami liels, ja d=6 un b=3; tad $d-b=3$.

Tātad izteiksmes lielākā iespējamā vērtība ir $3\cdot 3=9$.

3.5.5. Apzīmēsim apskatāmo četrstūri ar ABCD.



A58.zīm.



A59.zīm.

Ja tas ir izliekts (skat. A58.zīm.) un tā diagonāļu krustpunkts ir O, tad no Pitagora teorēmas seko, ka

$AB^2=OA^2+OB^2$ (1)

$CD^2=OC^2+OD^2$ (2)

$BC^2=OB^2+OC^2$ (3)

$AD^2=OA^2+OD^2$ (4)

Saskaitot (1) un (2), iegūstam

$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$ (5)

Saskaitot (3) un (4), iegūstam

$BC^2+AD^2=OB^2+OC^2+OA^2+OD^2$ (6)

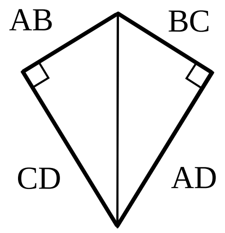
No (5) un (6) seko, ka

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$ (7)

Līdzīgi vienādību (7) iegūst gadījumā, ja ABCD ir ieliekts četrstūris (skat. A59.zīm.)

Tagad izveidojam divus taisnleņķa trijstūrus. Vienam no tiem katešu garumi ir AB un CD, otram – BC un AD. Saskaņā ar (7) no Pitagora teorēmas seko, ka šiem trijstūriem hipotenūzu garumu kvadrāti ir vienādi; tāpēc vienādas ir arī hipotenūzas.

Saliekot šos trijstūrus hipotenūzām kopā, iegūstam vajadzīgo četrstūri (A60.zīm.).

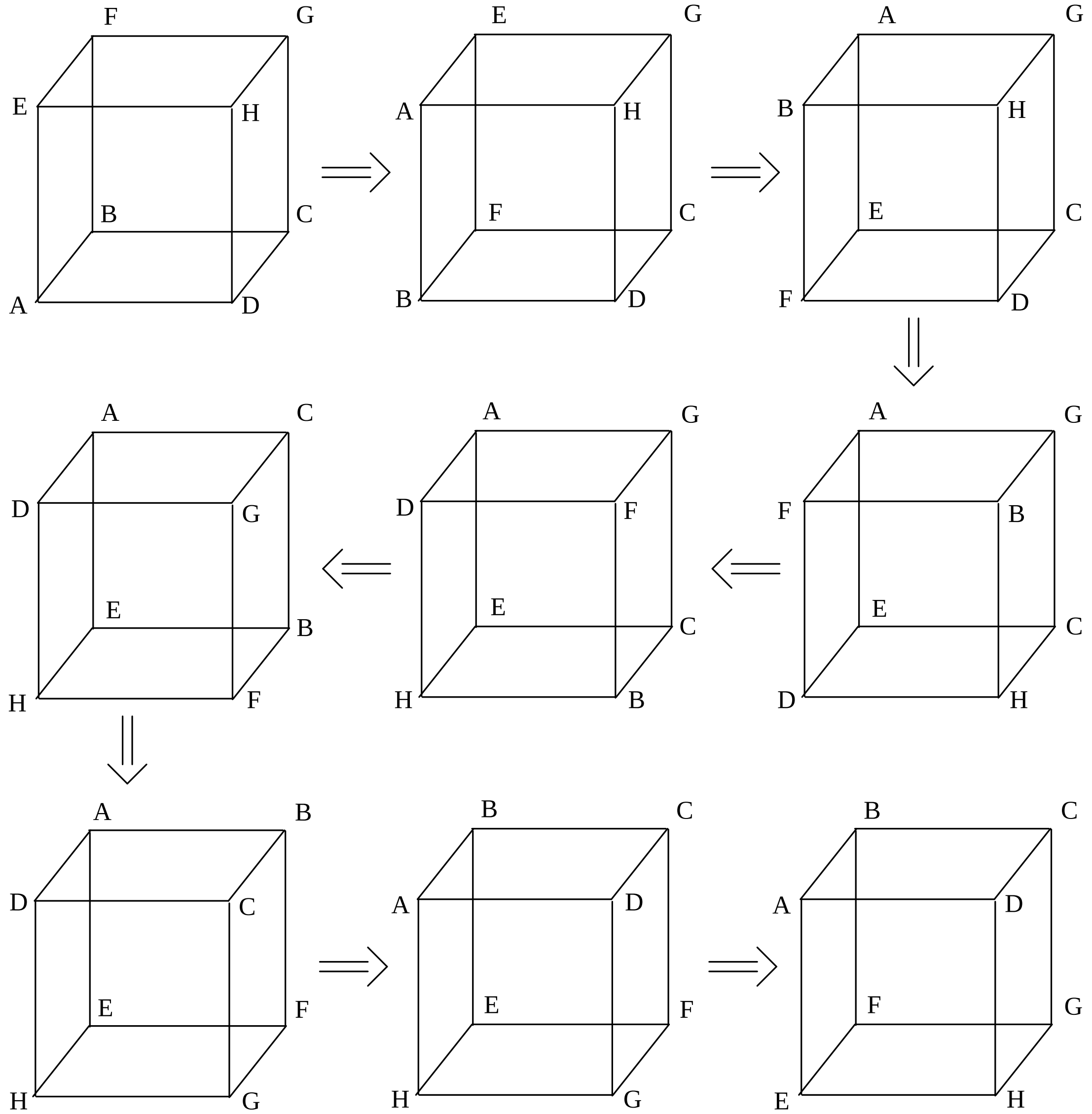


A60.zīm.

3.5.6. **Atbilde**: jā, tā var gadīties.

Sauksim par gājienu tādu 4 skudru pārvietošanos, kuras atrodas vienā skaldnē un vienlaicīgi ar vienādiem ātrumiem rāpo katra pa citu šīs skaldnes šķautni.

Tad prasīto var sasniegt ar 8 gājieniem (skat. A61.zīm.)



A61.zīm.

Lasītājs var patstāvīgi mēģināt samazināt skudru kopējo noieto ceļu (šai risinājumā tas ir $32 \cdot a$, kur a – kuba šķautnes garums), kā arī izpētīt, kādi skudru izvietojumi kuba virsotnēs vispār ir sasniedzami.

3.5.7. Apskatīsim jebkuru 4 rūtiņu veidotu kvadrātu ar tajā ierakstītiem skaitļiem (skat. A62.zīm.)

b	c
a	d

A62.zīm.

Saskaņā ar uzdevumā doto $a+c=b+d$, no kurienes seko, ka $c-d=b-a$.

y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

A63.zīm.

Apskatīsim divas blakus esošas rūtiņu rindas un tajās ierakstītos skaitļus (A63.zīm). Pielietojot iepriekš iegūto rezultātu jebkuram 4 rūtiņu kvadrātam, kas atrodas šajās rindās, iegūstam $y_1-x_1=y_2-x_2$, $y_2-x_2=y_3-x_3$, . . . , $y_7-x_7=y_8-x_8$. Apzīmēsim šo starpību kopējo vērtību ar *d*. Tad $y_1-x_1=d$, $y_2-x_2=d$, . . . , $y_8-x_8=d$ un tāpēc $y_1=x_1+d$, $y_2=x_2+d$, . . . , $y_8=x_8+d$, t.i., y rindiņas skaitļi iegūstami no *x* rindiņas atbilstošajiem skaitļiem, pieskaitot tiem vienu un to pašu lielumu *d*.

Skaidrs, ka tas attiecas uz **jebkurām divām blakus esošām rindiņām.** Tad tas attiecas arī uz **jebkurām divām (ne noteikti blakus esošām) rindiņām.** Tiešām, apskatīsim *i*-to un *j*-to rindiņu, $i<j$. Apzīmēsim ar d_i starpību starp *i*-tās un (*i*+1)-ās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem; ar d_{i+1} - starpību starp (*i*+1)-ās un (*i*+2)-ās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem; . . . ; ar d_{j-1} - starpību starp (*j*-1)-ās un *j*-tās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem. Tad starpība starp *i*-tās un *j*-tās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem ir $d_i+d_{i+1}+...+d_{j-1}$ - viena un tā pati visiem skaitļu pāriem, kas atrodas *i*-tā un *j*-tā rindiņā vienā kolonnā.

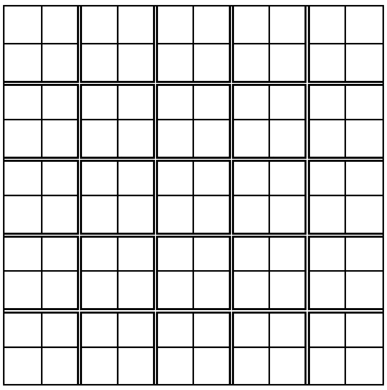
Apskatīsim patvaļīgu no rūtiņām sastāvošu taisnstūri un tā četras stūra rūtiņas ar tajās ierakstītajiem skaitļiem (skat. A64.zīm.).

b	...	c
...	...	...
a	...	d

A64.zīm.

Saskaņā ar nupat pierādīto, eksistē tāds skaitlis *D*, ka $b-a=c-d=D$. Tad $b=a+D$ un $c=d+D$, tātad $a+c=a+d+D$ un $b+d=a+D+d$, tātad $a+c=b+d$, k.b.j.

3.5.8. Ievērosim, ka, dalot naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot ar 4, tieši 25 reizes radīsies katrs no atlikumiem 0; 1; 2; 3. Varam rūtiņās rakstīt šos atlikumus, nevis pašus skaitļus. Tad blakus rūtiņās (t.i., rūtiņās ar kopīgu malu vai kopīgu stūri) nedrīkst būt 0 un 0; 2 un 2; 1 un 3.



A65.zīm.

Sadalām kvadrātu 25 mazākos kvadrātos, kas katrs sastāv no 2x2 rūtiņām (skat. A65.zīm). Nevienā no tiem nedrīkst būt 2 nulles vai 2 divnieki. Tā kā pavisam jāizvieto 25 nulles un 25 divnieki, tad **katrā kvadrātā jābūt tieši vienai nullei un vienam divniekam.** Abās atlikušajās rūtiņās nevienā kvadrātā nedrīkst būt 1 un 3, tāpēc tajās **katrā kvadrātā ir vai nu 2 vieninieki, vai 2 trijnieki.** Bet tad iznāk, ka pavisam **lielajā kvadrātā jābūt pāra skaitam vieninieku un pāra skaitam trijnieku.** Tā ir pretruna ar to, ka gan vieninieku, gan trijnieku ir tieši 25. Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

3.5.9. Apzīmēsim $5n = A$. Ievērosim, ka $2 \cdot A = 2 \cdot 5n = 10n$ un skaitļiem n un $10n$ ir vienādas ciparu summas. Tātad n ciparu summa vienāda ar $2 \cdot A$ ciparu summu. Reizinot A ar 2, katrs cipars rada pārnesumu 1 uz nākošo šķiru, bez tam piecinieks pats par sevi veido reizinājumā ciparu 0, bet sešinieks – ciparu 2 (gan nullei, gan divniekam visās šķirās, izņemot pēdējo, tiek pieskaitīts pārnesums 1, tāpēc tie kļūst par 1 resp. 3). Tāpēc $2A$ ciparu summa ir $10 \cdot 0 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 40$.

3.5.10. Atbilde: jā, var.

Piemēram, viņi var vienoties par šādu stratēģiju:

Andris izsaka minējumu, ka viņam paredzēta tāda pati ceļazīme kā Maijai, bet Maija – ka viņai paredzēta citāda ceļazīme nekā Andrim.

Pārbaudīsim, ka visos gadījumos mērķis ir sasniegts.

Andrim paredzēts braukt uz	Maijai paredzēts braukt uz	Andris saka, ka viņam paredzēts braukt uz	Maija saka, ka viņai paredzēts braukt uz	Pareizi uzmin
Parīzi	Parīzi	Parīzi	Romu	Andris
Parīzi	Romu	Romu	Romu	Maija
Romu	Parīzi	Parīzi	Parīzi	Maija
Romu	Romu	Romu	Parīzi	Andris

3.6. SESTĀ NODARBĪBA

3.6.1. a) Apskatāmā skaitļa ciparu summa ir $2007 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2007 + 9$. Skaitļa 2007 ciparu summa ir 9, tātad 2007 dalās ar 9. Tāpēc arī $2007 + 9$ dalās ar 9. Tāpēc arī apskatāmais skaitlis dalās ar 9.

b) Apskatīsim dalīšanas procesa sākumu:

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ... : 9 = 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 ...
  9
  2 1
  1 8
    3 1
    2 7
      4 1
      3 6
        5 1
        4 5
          6 1
          5 4
            7 1
            6 3
              8 1
              8 1
                0 1
                0 0
                  1 1
                    9
                    2 ...
```

Redzam, ka pēc pirmo deviņu vieninieku izmantošanas esam ieguvuši dalījumā ciparu virkni 12345679 un atlikumā nulli. Sākot „apstrādāt" nākošo ciparu (tas apvilkts ar aplīti), mēs it kā no jauna sākam dalīt no daudziem vieniniekiem sastāvošu skaitli. Tāpēc šāds process atkārtosies vēlreiz, vēlreiz, vēlreiz..., kamēr pietiks vieninieku.

Ievērosim, ka 2007 dalās ar 9: $2007:9=223$. Tāpēc, kad būsim „apstrādājuši" visus vieniniekus, dalījumā būsim 223 reizes ieguvuši ciparu virkni 12345679, kas viena no otras atdalītas ar nullēm. Tātad būsim arī ieguvuši 223 četriniekus. Dalīšanas procesa beigas risināsies šādi:

```
. . . 3 3 3 : 9 = ...  0 3 7
    .
    .
    .
    0 3
    0 0
      3 3
      2 7
        6 3
        6 3
```

Kā redzams, tur jauni četrinieki neparādās.

Tātad apskatāmajā dalījumā būs 223 četrinieki.

3.6.2. Apskatīsim divus atrisinājumus.

1.risinājums. Apzīmēsim apskatāmo skaitli ar *S*. No tā, ka $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$ un katrā iekavā ir pozitīvs skaitlis, seko, ka $S>0$. Savukārt no tā, ka $S=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)-\frac{1}{100}$ un katrā iekavā ir pozitīvs skaitlis, seko, ka $S<1$. Tātad $0<S<1$. Bet starp nulli un vieninieku veselu skaitļu nav. Tātad *S* nav vesels skaitlis.

2.risinājums. Iedomāsimies, ka esam „noveduši daļas pie kopsaucēja", turklāt pie mazākā iespējamā. Tad katrai daļai ir kāds papildreizinātājs (katrai savs), ar kuru jāpareizina gan tās skaitītājs, gan saucējs, lai visi saucēji kļūtu vienādi. No visiem skaitļiem 2, 3, 4, 5, ... , 99, 100 skaitlis 64 dalās ar vislielāko daudzumu divnieku – ar sešiem (tiešām, $64=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$), bet visi citi skaitļi satur mazāku daudzumu reizinātāju 2. Tātad mazākajā iespējamā kopsaucējā jābūt sešiem reizinātājiem 2. Tāpēc skaitļa $\frac{1}{64}$ papildreizinātājs būs nepāra skaitlis, bet visiem citiem skaitļiem 1, $\frac{1}{2}$, ... , $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{65}$, $\frac{1}{66}$, ... , $\frac{1}{100}$ papildreizinātāji būs pāra skaitļi. Tāpēc, uzrakstot summu ar vienu daļsvītru, **saucējā būs pāra skaitlis**, bet skaitītājā būs 99 pāra saskaitāmie un viens nepāra saskaitāmais; tātad **skaitītājā būs nepāra skaitlis**. Tā kā nepāra skaitlis nedalās ar pāra skaitli, tad daļas vērtība nav vesels skaitlis.

3.6.3. **Atbilde:** no jebkura.

Risinājums: skaidrs, ka no jebkura vairākciparu naturāla skaitļa, pakāpeniski svītrojot tā ciparus no beigām, var iegūt naturālu viencipara skaitli: Apskatīsim sekojošu pārveidojumu virkni:

$\mathbf{1}\to\mathbf{2}\to\mathbf{4}\to\mathbf{8}\to 16\to 32\to\mathbf{3}\to\mathbf{6}\to 12\to 24\to 48\to 96\to\mathbf{9}\to 18\to 36\to 72\to$
$\to\mathbf{7}\to 14\to 28\to 56\to\mathbf{5}\to 10\to\mathbf{1}$

No šīs virknes redzams, ka, „kustoties pa apli", no jebkura naturāla viencipara skaitļa var iegūt skaitli 56.

Tāpēc, ja parādīsim, ka no 56 var iegūt 27, mūsu atbilde būs pamatota.

To, ka no 56 var iegūt 27, parāda pārveidojumu virkne:
$56 \rightarrow 112 \rightarrow 11 \rightarrow 22 \rightarrow 44 \rightarrow 88 \rightarrow 176 \rightarrow 17 \rightarrow 34 \rightarrow 68 \rightarrow 136 \rightarrow 272 \rightarrow 27$.
Līdz ar to uzdevums atrisināts.

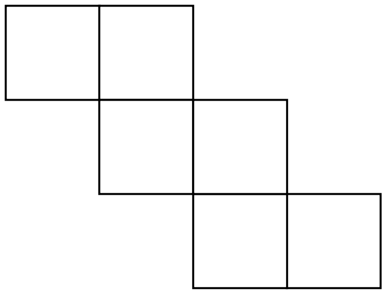
3.6.4. Galvenās grūtības šī uzdevuma risinājumā rada tas, ka 8 minētās taisnes var plaknē novietoties ļoti dažādos veidos, un nepieciešams dot risinājumu, kas aptvertu visas iespējas.
Apskatīsim kvadrātisku tabulu, kas sastāv no 8x8 rūtiņām, un tās rindas apzīmēsim ar burtiem *a*; *b*; *c*; *d*; *e*; *f*; *g*; *h*. Ar šiem pašiem burtiem apzīmēsim arī kolonnas (skat. A66.zīm.).

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		7	6	5	4	3	2	1
b	7		5	4	3	2	1	6
c	6	5		3	2	1	7	4
d	5	4	3		1	7	6	2
e	4	3	2	1		6	5	7
f	3	2	1	7	6		4	5
g	2	1	7	6	5	4		3
h	1	6	4	2	7	5	3	

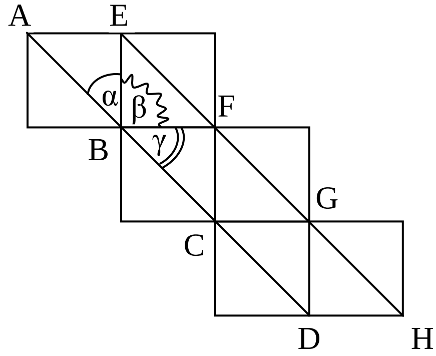
A66.zīm.

Ievērosim, ka
1) katrā rindiņā sastopami visi skaitļi no 1 līdz 7, katrs vienu reizi,
2) katrā kolonnā sastopami visi skaitļi no 1 līdz 7, katrs vienu reizi,
3) ja rūtiņa atrodas rindiņā un kolonnā, kas apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad šajā rūtiņā nekāds skaitlis nav ierakstīts,
4) skaitļi tabulā ir ierakstīti simetriski attiecībā pret neaizpildīto diagonāli, t.i.: ja x un y – dažādi burti, tad rindas x un kolonnas y kopējā rūtiņā ierakstīts tāds pats skaitlis kā rindas y un kolonnas x kopējā rūtiņā.
Šī tabula parāda, kā var pierakstīt skaitļus taišņu krustpunktiem.
Apzīmēsim taisnes ar burtiem *a*; *b*; *c*; *d*; *e*; *f*; *g*; *h*. Ja x un y – dažādi burti, tad taišņu x un y krustpunktam pierakstām tādu pašu skaitli, kāds ierakstīts tabulas „x-tās rindiņas” un „y-ās kolonnas” kopējā rūtiņā.
Īpašība 1) garantē to, ka uz katras taisnes visi skaitļi būs dažādi; īpašība 3) atspoguļo to, ka taisnes pati sevi nekrusto; īpašība 4) garantē to, ka katram krustpunktam pieraksta tikai vienu skaitli (taisnes x krustpunktam ar taisni y paredzēts tas pats skaitlis, kas taisnes y krustpunktam ar taisni x). Īpašība 2) izsaka to pašu, ko 1); tā automātiski seko no 1) un 4).

3.6.5. Viegli saprast, ka, salokot no 6 vienādiem kvadrātiem sastāvošo A67.zīm. attēloto figūru, iegūst kuba virsmu.

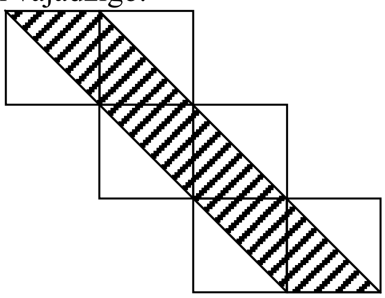


A67.zīm.



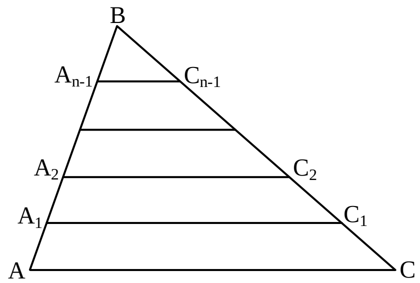
A68.zīm.

Novelkam katrā kvadrātā pa diagonālei, kā parādīts A68.zīm. Katrs kvadrāts sadalās divos vienādos vienādsānu taisnleņķa trijstūros. Tāpēc $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 45^\circ$. Tātad $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, t.i., abas diagonāles BA un BC savā starpā veido izstieptu leņķi. Tātad punkti A, B, C ir uz vienas taisnes. Līdzīgi iegūstam, ka uz vienas taisnes ir punkti B, C un D. Tā kā caur B un C iet tikai viena taisne, tad visi 4 punkti A, B, C, D ir uz vienas taisnes (uz tās, kas iet caur B un C). Līdzīgi pierāda, ka visi četri punkti E, F, G, H ir uz vienas taisnes. **Tātad nogriežņi AE, EF, FG, GH, HD, DC, CB, BA veido četrstūri.** Pierādīsim, ka tas ir paralelograms. Tiešām, $AE \perp BE$ un $BF \perp BE$; tāpēc **AE||BF**. Līdzīgi **BF||CG** un **CG||DH**. No izceltajām sakarībām seko, ka AE||DH. Tā kā bez tam AE=DH (visi 6 kvadrāti ir vienādi), tad malas AE un DH ir savstarpēji paralēlas un vienādas; tāpēc AEHD ir paralelograms. Tas satur tieši pusi no katra kvadrāta laukuma.
Uzlīmējot šādu paralelogramu uz kuba virsmas izklājuma (skat. A69.zīm.) un pēc tam šo izklājumu salokot, iegūstam vajadzīgo.

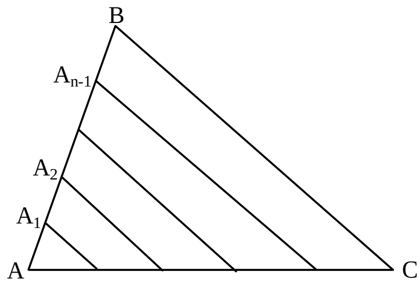


A69.zīm.

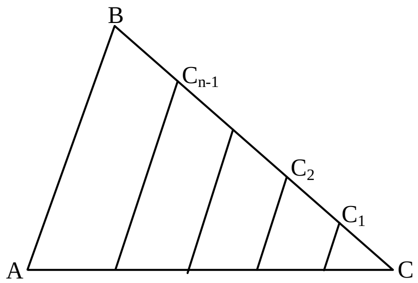
3.6.6. Apskatām patvaļīgu trijstūri ABC un sadalām katru no tā malām AB un BC n vienādās daļās. Pēc Talesa teorēmas taisnes A_1C_1, A_2C_2, ... , $A_{n-1}C_{n-1}$ paralēlas pamatam AC (skat. A70.zīm.).



A70.zīm.

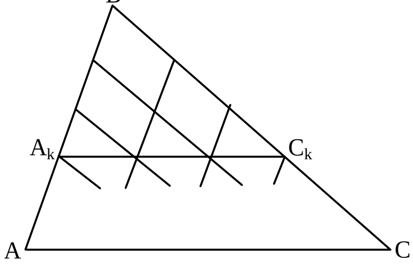


A71.zīm.

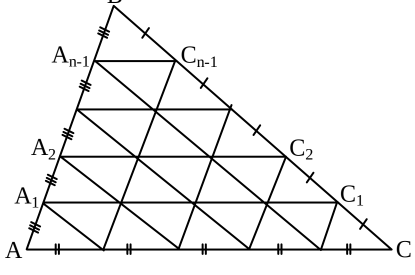


A72.zīm.

Ja caur punktiem A_1, A_2, ... , A_{n-1} velk taisnes paralēli malai BC, tās sadala AC n vienādās daļās (skat. A71.zīm.). Tāpat notiek, ja caur punktiem C_1, C_2, ... , C_{n-1} velk taisnes paralēli BA (skat. A72.zīm.). Arī tas seko no Talesa teorēmas.
No šejienes seko, ka taisnes, kas redzamas 6. un 7.zīmējumā, krusto katru no nogriežņiem AC, A_1C_1, A_2C_2, ... , $A_{n-1}C_{n-1}$ **vienos un tajos pašos punktos**, kas dala šo nogriezni attiecīgā skaitā vienādu daļu (skat. A73.zīm.): apskatām trijstūrus ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3 utt.

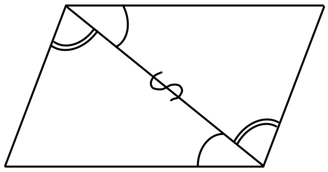


A73.zīm.



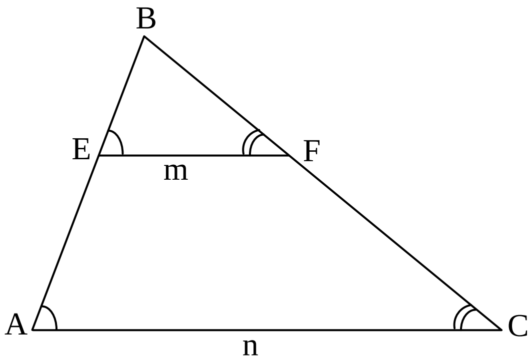
A74.zīm.

Tāpēc, novelkot visas taisnes, kas redzamas 5., 6. un 7. zīmējumā, trijstūris ABC sadalās mazos trijstūrīšos, kam malas paralēlas ΔABC malām un kas viens ar otru saskaras vai nu pa veselu malu, vai tikai ar vienu virsotni, vai arī nesaskaras nemaz (skat. A74.zīm.).
Katriem diviem blakus trijstūrīšiem viena mala ir kopīga, bet citas – pa pāriem paralēlas (skat. A75.zīm.). No malu paralelitātes seko iekšējo šķērsleņķu vienādība. Tāpēc šie trijstūri ir vienādi pēc pazīmes *lml*.



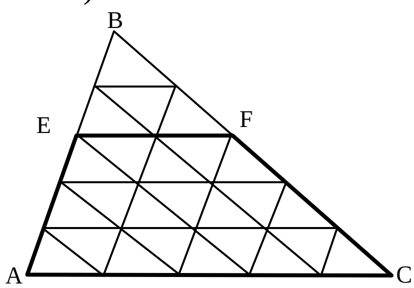
A75.zīm.

Tā kā vienādi ir **katri** divi blakus esoši trijstūrīši, tad **visi** mazie trijstūrīši, kas redzami 9.zīm., ir savā starpā vienādi.
Apskatīsim tagad uzdevumā minēto trapeci *AEFC*. Pieņemsim, ka *AC*=*n*, *EF*=*m* un *n*>*m* (skat.A76.zīm.).



A76.zīm.

Pagarinām trapeces sānu malas līdz krustpunktam *B*. Sadalām katru Δ*ABC* malu *n* vienādās daļās un novelkam līnijas, kā parādīts 9.zīm. **Tad *EF* ir viena no līnijām, kas vilktas paralēli *AC*.** Tiešām, Δ*EBF*~Δ*ABC*, tāpēc $\frac{BE}{BA}=\frac{EF}{AC}=\frac{m}{n}$, tātad $BE=\frac{AB}{n}\cdot m$; tas nozīmē, ka *BE* satur tieši *m* nogrieznīšus, kas veidojas uz malas *AB*. Līdzīgi spriež par *BF*.
Tā kā viss trijstūris *ABC* ar novilktajām līnijām sadalīts vienādos trijstūros, tad tāpat sadalīta arī trapece *AEFC* (skat.A77.zīm.).



A77.zīm.

3.6.7. Ja, piemēram, $a\geq 2$, tad $2-a\leq 0$ un $c(2-a)\leq 0<1$. Līdzīgi apskata gadījumus, kad $b\geq 2$ vai $c\geq 2$.
Atliek apskatīt gadījumu, kad $0<a<2$, $0<b<2$ un $0<c<2$.
Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad

$$\begin{aligned} &a(2-b)>1 \\ &b(2-c)>1 \qquad\qquad (1) \\ &c(2-a)>1 \end{aligned}$$

Visām nevienādībām (1) abās pusēs ir pozitīvi skaitļi. Tāpēc tās drīkst sareizināt savā starpā. Sareizinot un samainot iegūtajā nevienādībā reizinātājus vietām, iegūstam

$[a(2-a)]\cdot[b(2-b)]\cdot[c(2-c)]>1$ (2)

Ievērosim, ka patvaļīgam x ir spēkā nevienādība

$x(2-x)=2x-x^2=1-(x^2-2x+1)=1-(x-1)^2$, tāpēc

$x(2-x)\le 1$ (3)

Ievērojot (3), iegūstam

$a(2-a)<1$ (4)

$b(2-b)<1$ (5)

$c(2-c)<1$ (6)

Tā kā mēs apskatām gadījumu, kad 0< a, b, c <2, tad visām nevienādībām (4), (5), (6) abās pusēs ir pozitīvi skaitļi. Tāpēc tās drīkst reizināt savā starpā. Iegūstam

$[a(2-a)]\cdot[b(2-b)]\cdot[c(2-c)]<1$ (7)

Bet nevienādības (2) un (7) „runā pretī" viena otrai. Tātad iegūta pretruna un mūsu pieņēmums, ka neviena no uzdevumā minētajām nevienādībām nav pareiza, ir aplams. Tātad vismaz viena no tām ir pareiza, k.b.j.

3.6.8. Vispirms pierādīsim, ka $\boldsymbol{x+y+z>11}$. Tiešām, ja būtu $x+y+z\le 11$, tad $28\cdot x+30\cdot y+31\cdot z<31\cdot x+31\cdot y+31\cdot z=31(x+y+z)\le 341<365$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad tiešām $x+y+z>11$.

Tagad pierādīsim, ka $\boldsymbol{x+y+z<13}$. Tiešām, ja būtu $x+y+z\ge 13$, tad
$28\cdot x+30\cdot y+31\cdot z=28\cdot x+28\cdot y+28\cdot z+2\cdot y+3\cdot z=$
$28(x+y+z)+2y+3z\ge 28\cdot 13+2y+3z=$
$=364+2y+3z\ge 364+2+3=369>365$ (jo $y\ge 1$ un $z\ge 1$). Tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad tiešām $x+y+z<13$.

No abiem izceltajiem apgalvojumiem seko, ka vienīgā **varbūt iespējamā** $x+y+z$ vērtība ir 12, jo $x+y+z$ ir naturāls skaitlis un citu naturālu skaitļu, kas vienlaicīgi būtu gan lielāki par 11, gan mazāki par 13, nav. Piemērs x=1; y=4; z=7 parāda, ka vienādība $x+y+z=12$ tiešām ir iespējama (atcerieties par dienu skaitu dažādos mēnešos parastā gadā!).

3.6.9. **Atbilde:** nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim pretējo, ka tā ir gadījies. Tad eksistē veiksmīgs olimpiādes dalībnieks V, kurš nav atrisinājis nevienu vieglo uzdevumu. Tātad viņš ir atrisinājis tikai grūtus uzdevumus (varbūt pat ne pilnīgi visus grūtos uzdevumus!). Tā kā V ir veiksmīgs, tad ir vairāk tādu uzdevumu, kurus viņš ir atrisinājis, nekā tādu uzdevumu, kurus viņš nav atrisinājis. Tātad **grūto uzdevumu ir vairāk nekā vieglo** (jo pat tikai to grūto uzdevumu, kurus V ir atrisinājis, ir vairāk nekā vieglo uzdevumu un to grūto uzdevumu, kurus V nav atrisinājis, kopā).

Bet tādā gadījumā dalībnieks, kas ir atrisinājis visus grūtos uzdevumus (un varbūt vēl dažus vieglos), nevar būt neveiksmīgs, jo viņa atrisināto uzdevumu ir vairāk nekā neatrisināto, tātad vairāk nekā puse visu uzdevumu. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

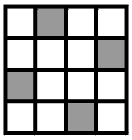
3.6.10. Cipariņš var pārgriezt katru tableti uz pusēm un no rīta iedzert pa vienai pusītei no katras tabletes, bet vakarā – atlikušās pusītes.

Ievērosim, ka, šādi rīkojoties, Cipariņš praktiski izmanto saskaitīšanas komutativitāti: lai kādā kārtībā saskaitītu 4 saskaitāmos, no kuriem divi ir $\frac{1}{2}x$ un divi ir $\frac{1}{2}y$, iegūst summu $x+y$.

4. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE

4.5. Piektā klase

4.5.1. Jā, var. Skat., piemēram, A78. zīm.



A78. zīm.

4.5.2. Nē, nevar. Lai, saskaitot piecus (nepāra daudzumu) skaitļus, iegūtā summa būtu pāra skaitlis (2006), vismaz vienam no saskaitāmajiem ir jābūt pāra skaitlim.

Ja vismaz viens no skaitļiem ir pāra skaitlis, tad visu piecu skaitļu reizinājums nevar būt nepāra skaitlis. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

4.5.3. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Apskatot vienu šķiru, secinām, ka I=0. Tā kā dažādi burti atbilst dažādiem cipariem, tad $E \neq I$. Tātad E=1 (vieninieks, kas rodas pārnesumā no desmitu šķiras). Uz tūkstošu šķiru pārnesuma nav, jo I=0 un I+I=0. Tāpēc jābūt vai nu D=0 (pretruna, jo tad D=I), vai arī D=5 (arī pretruna, jo šādā gadījumā P=1, tātad P=E). Tātad nevar būt, ka 2+2=5. ☺

4.5.4. Andris atdala 2 monētas un apgriež tās otrādi. Tagad starp šīm divām monētām ir tikpat monētu ar ciparu uz augšu, cik starp pārējām.

Lai to pierādītu, apskatīsim visas trīs iespējamās iegūtās situācijas.

Pieņemsim, ka sākumā starp atdalītajām divām monētām nav nevienas monētas ar ciparu uz augšu. Tātad starp atlikušajām monētām ir tieši 2 monētas ar ciparu uz augšu. Apgriežot otrādi atdalītās divas monētas, Andris panāk, ka gan starp tām, gan starp pārējām monētām ir tieši 2 monētas ar ciparu uz augšu.

Ja sākumā starp Andra atdalītajām monētām abas divas ir ar ciparu uz augšu, tad, apgriežot tās otrādi, viņš panāk, ka gan starp paņemtajām divām, gan atlikušajām monētām nav nevienas monētas ar ciparu uz augšu.

Atliek apskatīt gadījumu, kad starp atdalītajām divām monētām ir tieši viena monēta ar ciparu uz augšu. Tātad starp atlikušajām monētām arī ir viena tāda, kas ir ar ciparu uz augšu. Apgriežot abas izvēlētās monētas otrādi, tā monēta, kas bija ar ciparu uz augšu, tagad ir ar ģerboni uz augšu, savukārt tā, kas bija ar ģerboni uz augšu, tagad ir ar ciparu uz augšu. Tātad atkal gan starp izvēlētajām monētām, gan starp pārējām ir tieši viena monēta ar ciparu uz augšu.

Tātad redzam, ka uzdevuma nosacījumi izpildās.

4.5.5. Atbilde: astoņus skaitļus.

Risinājums. **a)** Varam uzrakstīt, piemēram, skaitļus 1234; 123; 124; 134; 234; 12; 13; 14.

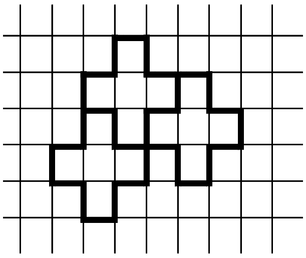
b) Visus iespējamos skaitļus sadalām 8 grupās:

1234;
123 un 4;
124 un 3;
134 un 2;
234 un 1;
12 un 34;
13 un 24;
14 un 23.

Viens no uzdevuma nosacījumiem paredz, ka katriem diviem uzrakstītajiem skaitļiem ir vismaz viens kopīgs cipars. Bet, tā kā diviem skaitļiem vienā grupā nav kopīgu ciparu, tad no katras grupas varam paņemt augstākais vienu skaitli. Tātad vairāk par 8 skaitļiem paņemt nevar.

4.6. Sestā klase

4.6.1. Jā, var. Skat., piem., A79. zīm.



A79.zīm.

4.6.2. Tā kā skaitlis n ir pāra skaitlis, tad $\frac{n}{2}$ ir vesels skaitlis. Tad $\frac{n}{2}\cdot 10 = 5n$. Tātad, pareizinot $\frac{n}{2}$ ar 10, ieguvām skaitli $5n$ ar tādu pašu ciparu summu (pareizinot veselu skaitli ar 10, tam vienkārši labajā pusē pieraksta nulli, kas ciparu summu neietekmē).

4.6.3. Kad būs nokrāsoti 24 pilni spirāles loki, nenokrāsotas būs palikušas tikai rūtiņas 25. un 26. rindā (skaitot no augšas), un kreisās no tām būs 25. kolonnā (skatot no kreisās puses). Tāpēc kā pēdējo nokrāsos rūtiņu, kas atrodas 26. rindā no augšas un 25. kolonnā no kreisās puses.

4.6.4. Atbilde: a) var; **b)** nevar.

Risinājums. a) piemēram, tā:

$\{1;10,11,20\};\{2;9,12,19\};\{3;8,13,18\};\{4;7,14,17\};\{5;6,15,16\}$.

b) visu skaitļu summa ir $1+2+...+20+21=231$, kas nedalās ar 5, tāpēc prasītais nav iespējams.

4.6.5. a) Apzīmēsim skolēnu iesniegto atrisinājumu daudzumus ar x_1, x_2... x_8 . Saskaņā ar doto $x_1 \le 5; x_2 \le 5 ...; x_8 \le 5$ un $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 5\cdot 8 = 40$. Tāpēc $x_1=x_2=...=x_8=5$ (ja kaut viens $x_i<5$, tad $x_1+...+x_8<40$) .

b) Pieņemsim, ka viens no skolēniem atrisinājis uzdevumus A, B, C, D, E. Apzīmēsim pēdējos 3 uzdevumus ar F, G, H. Ja neviens no pārējiem 7 skolēniem nav atrisinājis F, G un H, tad katrs no viņiem atrisinājis ne vairāk kā divus no šiem uzdevumiem, tātad katrs no viņiem atrisinājis vismaz trīs no uzdevumiem A, B, C, D, E. Tāpēc uzdevumiem A, B, C, D, E kopā iesniegti vismaz $7\cdot 3+5=26$ atrisinājumi – pretruna, jo katru no tiem atrisināja tieši 5 skolēni.

4.7. SEPTĪTĀ KLASE

4.7.1. Pretpiemērs: 1989 vai, piemēram, 135135126 nedalās ar 27.

4.7.2. Skat. A80.zīmējumu. Tā kā $adg\cdot beh=1\cdot 1=1$ un $degh=2$, tad $ab=\frac{adg\cdot beh}{degh}=\frac{1}{2}$. Līdzīgi $cf=ih=gd=\frac{1}{2}$. Visu 9 skaitļu reizinājums ir 1 (kā triju vieninieku reizinājums). Skaitli e varam izteikt kā dalījumu: $e=\frac{abc\cdot def\cdot ghi}{ab\cdot cf\cdot ih\cdot gd}$.

Tāpēc $e=\frac{abc\cdot def\cdot ghi}{ab\cdot cf\cdot ih\cdot gd}=\frac{1\cdot 1\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

A80.zīm.

4.7.3. Skaidrs, ka visu pieskaitīšanu rezultātā skaitlis palielinājās ne vairāk kā par 300 (jo 30 reizes pieskaitīja naturālus skaitļus, kas nav lielāki par 10). Visu 31 skaitļu virknē (sākotnējais un iegūtie) jābūt vai nu vismaz 16 skaitļiem, kas dalās ar 22, vai vismaz 16 skaitļiem, kas dalās ar 25. Pirmajā gadījumā katrs nākošais no šiem skaitļiem pārsniedz iepriekšējo par vismaz 22, tāpēc starpība starp pirmo un pēdējo no tiem ir vismaz $15\cdot 22 = 330 > 300$ - pretruna. Savukārt otrajā gadījumā starpība starp pirmo un pēdējo no skaitļiem ir vismaz $15\cdot 25 = 375 > 300$ - arī pretruna. Tātad nevar gadīties, ka gan sākotnējais skaitlis, gan katrs iegūtais rezultāts dalās vai nu ar 22, vai ar 25.

4.7.4. Piemēram,

$$1:((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10)))=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{2}{3}:\dfrac{4:\left(\left(\dfrac{5}{6}\right):\left(\dfrac{7}{8}\right)\right)}{\dfrac{9}{10}}}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{2\cdot\dfrac{9}{10}}{3\cdot\left(4:\dfrac{5\cdot 8}{6\cdot 7}\right)}}=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot\dfrac{6\cdot 7}{5\cdot 8}}{2\cdot\dfrac{9}{10}}=$$

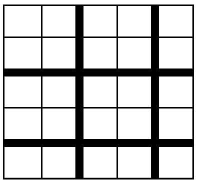
$$=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 9\cdot 5\cdot 8}=7\,.$$

4.7.5. Atbilde: 9.

Risinājums. **a)** Piemēru skat. A81. zīm.

a	b	a	b	a
d	c	d	c	d
a	b	a	b	a
d	c	d	c	d
a	b	a	b	a

A81.zīm.

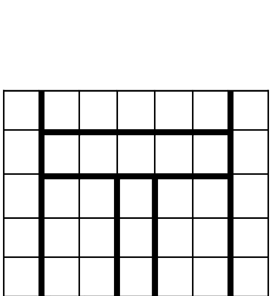


A82.zīm.

b) Nevienā no A82.zīm. redzamajām 9 daļām nedrīkst būt vairāk par vienu burtu *a*, jo pretējā gadījumā kādā no 2x2 rūtiņu kvadrātiem būs vismaz divi *a* burti. Taču uzdevuma nosacījumos teikts, ka katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā visi burti ir dažādi. Tāpēc burtu *a* kopskaits nevar pārsniegt 9.

4.8. ASTOTĀ KLASE

4.8.1. Jā, var. Skat., piem., A83.zīm.



A83. zīm.

4.8.2. Atbilde: nē.

Risinājums. Apzīmēsim Dzintara uzrakstītos skaitļus ar *a*, *b*, *c*, *d*. Pieņemsim, ka minētās summas var iegūt; varam uzskatīt, ka $a+b+c=4$ un $a+b+d=5$ (**katrām** divām summām ir 2 kopīgi saskaitāmie, kurus mēs te apzīmējam ar *a* un *b*). Tad

$$9=4+5=(a+b+c)+(a+b+d)=2a+2b+c+d>a+b+c+d>9,$$

jo visu uzrakstīto skaitļu summa lielāka par to 3 skaitļu summu, kas vienāda ar 9; tātad esam ieguvuši pretrunu.

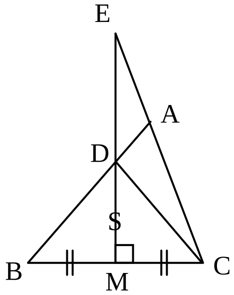
4.8.3. Atbilde: nē.

Risinājums. Ja n ir nepāra skaitlis, tad arī $n+2$ ir nepāra skaitlis, un tad $n\cdot(n+2)$ ir nepāra skaitlis un nevar beigties ar pāra ciparu 6.

Ja n ir pāra skaitlis, tad arī $n+2$ ir pāra skaitlis un šo skaitļu reizinājums arī ir pāra skaitlis. Tā kā gan n, gan $n+2$ dalās ar 2, tad $n\cdot(n+2)$ dalās ar 4.

Bet skaitlis 200720052006 ar 4 nedalās, jo tā divu pēdējo ciparu veidotais skaitlis nedalās ar 4.

4.8.4. Sk. A84.zīm. Tā kā $\Delta BMD=\Delta CMD$ (*mlm*), tad $\angle EDA=\angle BDM=\angle CDM>\angle CEM$ (ārējais leņķis trijstūrī CDE). Bet ΔEDA pret lielāko malu atrodas lielākais leņķis, tāpēc $AE>AD$.



A84.zīm.

4.8.5. Uzliekam uz katra no kausiem pa 100 monētām. Vai nu uz smagākā kausa (ja viens nosveras uz leju), vai uz katra no kausiem (ja tie ir līdzsvarā) nav vairāk par 3 viltotām monētām. Ņemam šo monētu simtnieku un uzliekam pa 50 monētām uz katra no kausiem; līdzīgi kā iepriekš noskaidrojam, starp kurām 50 monētām nav vairāk par 1 viltotu. Ņemam šīs 50 monētas un uzliekam pa 25 monētām uz katra no kausiem. Gadījumā, ja kausi ir līdzsvarā, tad visas šīs 50 monētas ir īstas un varam ņemt jebkuras 25 no tām. Ja kausi nav līdzsvarā, tad uz vieglākā kausa atrodas viltotā monēta, tāpēc varam ņemt monētas no smagākā kausa.

4.9. DEVĪTĀ KLASE

4.9.1. No dotā seko, ka

$$\frac{-p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\geq 6+\frac{-p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\geq 6-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{p^2-4q}}{2}\geq 6$$

$$\sqrt{p^2-4q}\geq 6$$

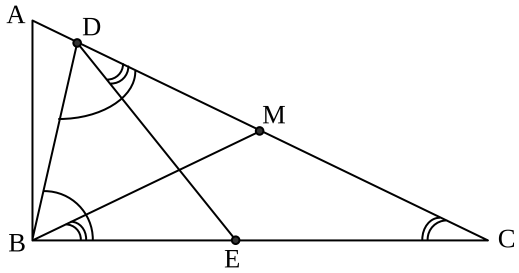
$$p^2-4q\geq 36.$$

Starpība starp otrā kvadrātvienādojuma saknēm ir

$$\sqrt{4p^2-12q}=\sqrt{p^2+3(p^2-4q)}\geq\sqrt{3\cdot 36}=\sqrt{108}>10.$$

4.9.2. Pieņemsim, ka Andrim bija a konfekšu un viņš apēda x konfektes; tad Maija apēda $8x$ konfektes, un $a-x=9(a-8x)\Rightarrow 8a=71x$. Tātad $8a$ dalās ar 71. Tā kā LKD(8, 71)= 1, tad a dalās ar 71, kas bija jāpierāda.

4.9.3. Skat. A85. zīm.



A85. zīm.

1) Apzīmējam hipotenūzas *AC* viduspunktu ar *M*.
2) Tad $MA = MB = MC$.
3) Tāpēc $\angle MBC = \angle MCB = \angle DCE = \angle EDC$ (vienādsānu trijstūru leņķi pie pamata).
4) No vienādsānu trijstūra *BCD* seko $\angle BDC = \angle DBC$.
5) Tāpēc $\angle BDE = \angle BDC - \angle EDC = \angle DBC - \angle MBC = \angle DBM$.
6) Tāpēc $\Delta EBD = \Delta MDB$ (*lml*), tātad $EB = MD$ un $ED = MB$.
7) Tāpēc $AD + BE = AD + DM = AM = BM = DE$, k.b.j.

4.9.4. Atbilde: 5 krāsas.

Piemēru ar 5 krāsām skat. A86. zīm. Skaidrs, ka šajā gadījumā uzdevuma nosacījumi izpildās.

a	b	d
c	e	a
b	d	c

A86. zīm.

Piedāvājam divus veidus, kā var pierādīt, ka vairāk krāsu būt nevar.

1. risinājums. Ja krāsu būtu vismaz 6, tad arī dažādu krāsu pāru būtu vismaz 15:

ab	ac	ad	ae	af	...
	bc	bd	be	bf	...
		cd	ce	cf	...
			de	df	...
				ef	...
					...

Tomēr 3x3 rūtiņu kvadrāta iekšpusē ir tikai 12 rūtiņu malas, pa kurām rūtiņas var saskarties. Tātad vairāk par 5 dažādām krāsām nevar būt.

2. risinājums. Ja būtu sešas (vai vairāk) krāsas, tad atrastos vismaz viena tāda krāsa, kurā būtu nokrāsota tikai viena rūtiņa, jo kvadrātā pavisam ir tikai 9 rūtiņas, bet $9 < 2 \cdot 6$. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, **katrai** krāsai „kaimiņos” jābūt vēl vismaz 5 krāsām. Bet tai krāsai, kurā ir izkrāsota tikai viena rūtiņa, „kaimiņos” var atrasties augstākais 4 krāsas. Tātad rodas pretruna, un var būt ne vairāk par 5 dažādām krāsām.

4.9.5. Izdarāmo gājienu rezultātā lielums $\frac{abc}{xyz}$ (skat. A87. zīm.) nemainās, jo gan *abc*, gan *xyz* satur tieši vienu mainīgo no katras rindiņas un katras kolonnas. Tā kā sākotnējā un iegūstamajā tabulā lielumam $\frac{abc}{xyz}$ ir dažādas vērtības (attiecīgi $\frac{24}{25}$ un $\frac{25}{24}$), prasītā pārveidošana nav iespējama.

	a	z
x		b
c	y	

A87. zīm.

5. RAJONA OLIMPIĀDE

5.5. PIEKTĀ KLASE.

5.5.1. **Atbilde:** Jā, var.

Risinājums: Lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek parādīt vienu veidu, kā var salikt taisnstūri, kuram abas malas ir garākas par 1 *cm*. Skat., piem., A88. zīm, kur strēmelītes iekšpusē norādīts tās garums centimetros.

2007	
1	2006
2	2005
3	2004
. . .	
1003	1004

A88. zīm.

5.5.2. Var ņemt, piemēram, 13 kartiņas ar skaitļiem 1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5, kur izpildās visas prasītās īpašības.

Parādīsim, ka 13 ir **mazākais** iespējamais kartiņu skaits. Pieņemsim, ka a un b – divi mazākie **dažādi** skaitļi, $a < b$. Tā kā summai $a + b$ jāizsakās vēl citādi, jābūt vēl pa vienam eksemplāram gan a, gan b, jo summu $a+b$ nav iespējams izteikt ar citām kartiņām: $a+a<a+b$, bet $b+b>a+b$ un $b+c>a+c>a+b$, ja c- skaitlis, kas atšķiras (tātad ir lielāks) gan no a, gan no b. Lai summu $a + a$ varētu izsacīt ar citām kartiņām, jābūt vēl diviem a eksemplāriem, jo nav cita veida kā izteikt summu $a+a$: visas citas summas ir lielākas par $a+a$, jo a – vismazākais skaitlis. Līdzīgi konstatē, ka lielākajai vērtībai d jābūt vismaz uz 4 kartiņām un otrai lielākajai vērtībai c – vismaz uz 2 kartiņām. Tā kā jābūt vismaz 5 dažādiem skaitļiem, tad nepieciešama vēl 13. kartiņa. Tās vērtību izvēlamies tādu, lai ar tās palīdzību varētu izteikt summas $b+b$ un $c+c$.

5.5.3. Jā, var. Lai atrisinātu šo uzdevumu, pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt. Skat., piem., A89. zīm. Iespējami arī citi veidi.

X			X		
	X			X	
X			X		
	X			X	

A89. zīm.

5.5.4. **a) Atbilde:** Nē, nevar.

Risinājums: Neviena meitene nav garāka par visgarāko zēnu. Tiešām, visgarākā meitene dejā „Alfa" dejo ar zēnu, kurš ir garāks par šo meiteni. Ja zēns ir garāks par garāko meiteni, tad viņš ir garāks par visām meitenēm, un starp pārējām neatradīsies neviena meitene, kura ir garāka par šo zēnu.

b) Atbilde: Jā, var.

Risinājums: Izveidosim tabulu, kur doti dejotāju augumi centimetros. Tad sadalīsim visus bērnus pāros tā, ka četros pāros meitene ir garāka par zēnu. Secinām, ka uzdevumā prasītais ir iespējams.

Zēni	Meitenes
170	169
168	167
166	165
164	163
162	161

„Alfa”

Zēni	Meitenes
170	161
168	169
166	167
164	165
162	163

„Gamma”

5.5.5. Atbilde: 10248

Risinājums:

Pirmkārt, atrodam mazāko iespējamo piecciparu naturālu skaitli, kam visi cipari ir dažādi. Lai to izdarītu, ņemam iespējami mazu pirmo ciparu, tas ir 1. Kā otro ciparu varam ņemt nulli, kā trešo 2 utt. Iegūstam, ka mazākais iespējamais piecciparu skaitlis ar dažādiem cipariem ir 10234.

Otrkārt, virzoties no 10234 uz augšu, uzdevuma atbildi atrod mēģinājumu ceļā, katru piecciparu skaitli (sākot no 10234), kuram visi cipari ir dažādi, dalot ar 61:

$10234 : 61 = 167.77...$

$10235 : 61 = 167{,}78...$

$10236 : 61 = 167{,}8...$

$10237 : 61 = 167{,}81...$

$10238 : 61 = 167{,}83...$

$10239 : 61 = 167{,}85...$

$10243 : 61 = 167{,}91...$

$10245 : 61 = 167{,}95...$

$10246 : 61 = 167{,}96...$

$10247 : 61 = 167{,}98...$

$10248 : 61 = 168$

5.6. SESTĀ KLASE

5.6.1. Atbilde: divi meļi.

Lai šis uzdevums būtu atrisināts, mums pietiek parādīt vienu piemēru, kad izpildās uzdevuma nosacījumi, un tad pierādīt, ka tas ir vienīgais pareizais atrisinājums.

a) Piemērs: Alfa un Beta – meļi, Gamma – patiess rūķītis; pirmo frāzi saka Gamma, otro – Alfa.

b) ja meļu būtu ne vairāk par vienu, tad vismaz vienu no abiem apgalvojumiem ir izteicis patiess rūķītis. Bet tad ir patiesība, ka meļu ir vismaz divi – pretruna. Ja visi rūķīši būtu meļi, tad abas frāzes ir patiesas, un tās teikuši meļi – atkal pretruna.

5.6.2. a) Atbilde: Nē.

Risinājums: Vienā kolonnā ar 4 var atrasties tikai 5, un vienā kolonā ar 11 arī var atrasties tikai 5 (to iegūstam, pārbaudot visus iespējamos skaitļus). Bet 5 nevar reizē atrasties 2 kolonnās.

b) Atbilde: Jā, skat. A90. zīm.

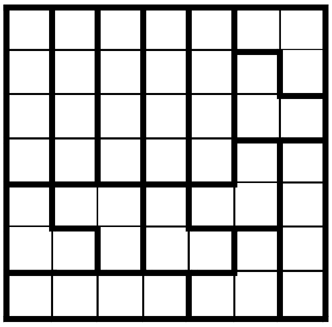
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

A90. zīm.

5.6.3. **a) Atbilde:** Nē, nevar.

Risinājums: Lielākais rūtiņu skaits, ko var nosegt ar 12 figūriņām, ir $12 \cdot 4 = 48 < 7 \cdot 7$.

b) Atbilde: Jā, skat., piem., A91. zīm. Iespējami arī citi veidi.



A91. zīm.

5.6.4. **Atbilde:** Nē, neeksistē.

Pierādījums: Izmantosim pierādījumu no pretējā. Pieņemsim, ka eksistē tāds desmitciparu naturāls skaitlis, kuram visi cipari ir dažādi un kuru var iegūt, sareizinot savā starpā vairākus divniekus, pieciniekus un septītniekus.

Pavisam ir tikai 10 dažādi cipari. Tāpēc tādam desmitciparu naturālam skaitlim, kuram visi cipari ir dažādi, ciparu summa ir $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Tā kā 45 dalās ar 9, tad arī pats desmitciparu skaitlis dalās ar 9=$3 \cdot 3$; bet starp tā dotajiem pirmreizinātājiem 2,5 un 7 nav neviena trijnieka. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un tāda skaitļa, par kādu runāts uzdevumā, nav.

5.6.5. Uzdevuma apgalvojumu pierādīsim divos soļos. Vispirms pierādīsim, ka ir divi bērni, kuriem sakrīt vismaz divu nopirkto sieriņu nosaukumi. Taču šis fakts neizmantos to, ka visi bērni samaksāja vienādu naudas daudzumu. Otrajā daļā pierādīsim, ka arī trešā sieriņa nosaukums šiem diviem bērniem sakrīt.

Pirmkārt, ja Gunāram un Dzintaram nav divu kopēju nosaukumu sieriņu, tad viņiem ir kopīgs ne vairāk kā viena nosaukuma sieriņš. Gunāram ir trīs dažādu nosaukumu sieriņi un Dzintaram ir ne vairāk kā viens sieriņš ar tādu pašu nosaukumu kā Gunāram, tad viņam ir vismaz divi citu nosaukumu sieriņi, tātad kopā viņiem abiem ir vismaz $3+2=5$ dažādu nosaukumu sieriņi, tas nozīmē, ka viņiem abiem kopā ir visu nosaukumu sieriņi. Nav tāda nosaukuma sieriņa, kura nebūtu ne Gunāram, ne Dzintaram, tāpēc arī Maijai nav tāda nosaukuma sieriņa, kura nebūtu kādam no abiem puišiem. Tas nozīmē, ka viņiem pa abiem ir visu triju Maijas nopirkto nosaukumu sieriņi. Tāpēc no trim Maijas sieriņu nosaukumiem vismaz diviem ir jābūt arī vai nu Gunāram, vai Dzintaram (pretējā gadījumā Maijai varētu būt augstākais divu nosaukumu sieriņi - pa vienam „no Gunāra" un „no Dzintara").

Apskatīsim tos divus bērnus, kam divi sieriņu nosaukumi sakrīt. Tā kā par pirkumu viņi ir samaksājuši vienādi, tad arī par trešo sieriņu viņi samaksājuši vienādus naudas daudzumus. Mēs zinām, ka visu sieriņu cenas ir dažādas, tāpēc arī trešo viņu nopirkto sieriņu nosaukumi sakrīt.

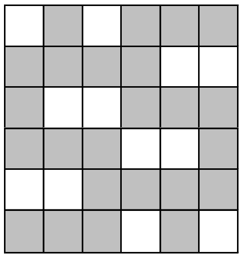
5.7. SEPTĪTĀ KLASE

5.7.1. Šādā formā var izsacīt jebkuru naturālu skaitli *n*. Skatīt sekojošos pārveidojumus: $n = n^{10} : n^9 = \left(n^2\right)^5 : \left(n^3\right)^3$.

5.7.2. **a)** 7; -4; -4; 7; -4; -4; 7; -4; -4; 7; -4; -4; 7

b) pozitīviem jābūt skaitļiem 1., 4., 7., 10., 13. pozīcijās. Uz katru pusi no katra no šiem skaitļiem esošo citu skaitļu skaits dalās ar 3; sadalot tos grupās pa 3, iegūstam, ka uz katru pusi no katra no šiem skaitļiem A esošo skaitļu summa ir negatīva. Lai visu skaitļu summa būtu pozitīva, jābūt $A>0$.

5.7.3. Jā, var. Lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek parādīt kaut vienu veidu, kā izkrāsot dažas no rūtiņām, lai vienlaicīgi būtu apmierinātas visas prasības. Skat., piem., A92. zīm.



A92. zīm.

5.7.4. Meklējamo skaitli apzīmēsim ar n. Naturāla skaitļa **iespējamie** pozitīvie dalītāji (dilstošā secībā) ir $n; \frac{n}{2}; \frac{n}{3}; \frac{n}{4}; \ldots$, (katram konkrētam n šajā virknītē atstājam tikai tās vērtības, kas ir veseli skaitļi; skaidrs, ka tās joprojām izkārtosies dilstošā secībā, jo vienu un to pašu skaitli dalot ar lielāku skaitli, dalījums kļūs mazāks).

Skaidrs, ka neviens no apskatāmajiem 3 dažādajiem dalītājiem nevar būt n: ja skaitlim n vēl kaut ko pozitīvu pieskaitīs, tad iegūtā summa būs lielāka par n. Ja lielākais no apskatāmajiem dalītājiem nav $\frac{n}{2}$, tad apskatāmo triju dalītāju summa nepārsniedz $\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}=\frac{47}{60}n<n$, bet šī summa ir n. Tāpēc viens no šiem dalītājiem ir $\frac{n}{2}$, un abu pārējo summa ir $\frac{n}{2}$. Ja lielākais no šiem abiem pārējiem dalītājiem ir $\frac{n}{3}$, tad trešais dalītājs ir $\frac{n}{2}-\frac{n}{3}=\frac{n}{6}$. Ja otrs lielākais skaitļa n dalītājs ir mazāks par $\frac{n}{3}$, tad to abu summa nepārsniedz $\frac{n}{4}+\frac{n}{5}=\frac{9}{20}n<\frac{n}{2}$, pretrunā ar to, ka otrā un trešā dalītāja summa ir $\frac{n}{2}$. Tāpēc vienīgā iespēja ir, ka meklētie skaitļa n dalītāji ir $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ un $\frac{n}{6}$. Lai tādi dalītāji eksistētu, nepieciešams un pietiekams, lai n dalītos ar 6.

5.7.5. Var rīkoties, piemēram, šādi:

1. Iedodam burvim 3 monētas; to, uz kuru viņš norāda, apzīmējam ar A, pārējās – ar B un C.
2. Iedodam burvim 3 citas monētas; to, uz kuru viņš norāda, apzīmējam ar D, pārējās - ar E un F.
3. Iedodam burvim 3 citas monētas; to, uz kuru viņš norāda, apzīmējam ar G, pārējās – ar H un I.
4. Iedodam burvim A, D, G. Pieņemsim, ka viņš norāda uz A (citus gadījumus analizē tieši tāpat).

Pierādīsim, ka A ir viltota. Tiešām, vismaz viena viltota monēta starp jau pārbaudītajām deviņām ir, jo, tā kā Profesors Cipariņš burvim iedeva pārbaudīt deviņas no desmit monētām, tad mazāk kā viena viltota monēta starp šīm deviņām atrasties nevar. Tātad vismaz viena no A, D, G ir viltota. Tā kā 4. solī burvis norādīja uz monētu A, tad A ir viltota.

5.8. ASTOTĀ KLASE

5.8.1. Visi skolēni, kas uzrakstīja „gas”, kļūdījās. Daži no 22 skolniekiem, kam bija jāraksta „galds”, uzrakstīja „gals”, pārējie – „gads”. Tātad no 15+15=30 atbildēm „gads” un „gals” 22 atbildes ir nepareizas, bet 30-22=8 atbildes – pareizas.

5.8.2. **1. risinājums.** Veicam sekojošus ekvivalentus pārveidojumus ar doto vienādojumu:

$$x^3(x^2-7)^2-36x=0$$
$$x(x^6-14x^4+49x^2-36)=0$$
$$x(x^6-5x^4+4x^2-9x^4+45x^2-36)=0$$
$$x(x^2(x^4-5x^2+4)-9(x^4-5x^2+4))=0$$
$$x(x^2-9)(x^4-5x^2+4)=0$$
$$x(x^2-9)(x^4-x^2-4x^2+4)=0$$
$$x(x^2-9)(x^2(x^2-1)-4(x^2-1))=0$$
$$x(x^2-9)(x^2-4)(x^2-1)=0$$

Tāpēc atrisinājumu kopa ir {0; 1; -1; 2; -2; 3; -3}

2. risinājums. Izmantojam saīsinātās reizināšanas formulu – kvadrātu starpību:

$$x^3(x^2-7)^2-36x=0$$
$$x(x^2(x^2-7)^2-6^2)=0$$
$$x\left((x(x^2-7))^2-6^2\right)=0$$
$$x\left(x(x^2-7)-6\right)\left(x(x^2-7)+6\right)=0$$
$$x(x^3-7x-6)(x^3-7x+6)=0$$

Triju reizinātāju reizinājums ir 0 tad, ja viens no reizinātājiem ir 0. Apskatām katru reizinātāju atsevišķi:

1) $x_1=0$

2) $x^3-7x-6=0$

$$(x^3+x^2)-(x^2+x)-(6x+6)=0$$
$$x^2(x+1)-x(x+1)-6(x+1)=0$$
$$(x+1)(x^2-x-6)=0$$
$$(x+1)(x+2)(x-3)=0$$

- $x+1=0$ $\quad x_2=-1$
- $x+2=0$ $\quad x_3=-2$
- $x-3=0$ $\quad x_4=3$

3) $x^3-7x+6=0$

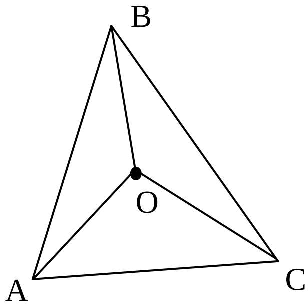
$$(x^3-x)-(6x-6)=0$$
$$x(x^2-1)-6(x-1)=0$$
$$x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$$
$$(x-1)(x(x+1)-6)=0$$
$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$
$$(x-1)(x-2)(x+3)=0$$

- $x-1=0$ $\quad x_5=1$
- $x-2=0$ $\quad x_6=2$
- $x+3=0$ $\quad x_7=-3$

Atrisinājumu kopa ir {0; 1; -1; 2; -2; 3; -3;}

5.8.3. **Atbilde:** nē, nevar.

Risinājums: Skatīt A93.zīmējumu. Trijstūrī pret lielāku malu atrodas lielāks leņķis. Tāpēc no uzdevumā minētajām sakarībām, apskatot $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COA$, sekotu OB>OA, OC>OB, OA>OC, no kā seko OB>OB – pretruna.



A93. zīm

5.8.4. No 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz viens dalās ar 5, vismaz viens – ar 7, vismaz viens – ar 8, vismaz viens – ar 9 un vismaz viens – ar 11. Meklējamajam skaitlim A jādalās ar 5; 7; 8; 9; 11. Tā kā šie skaitļi ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad A jādalās ar to reizinājumu $5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11$= 27 720. Tātad $A \geq 27\ 720$. Skaidrs, ka skaitlis 27 720 dalās ar 1;2;3;...;11;12. Tātad meklējamais skaitlis ir 27 720.

5.8.5. Katrā griežot iegūtajā kvadrātā vienas krāsas rūtiņu ir par 1 vairāk nekā otras krāsas rūtiņu, un vairākums rūtiņu ir tajā krāsā, kurā ir centrālā rūtiņa. „Vairākumu nodrošinošo” balto rūtiņu jābūt tikpat, cik „vairākumu nodrošinošo” melno rūtiņu, jo lielajā kvadrātā melno un balto rūtiņu ir vienāds daudzums.

5.9. DEVĪTĀ KLASE

5.9.1. Šādi pirmskaitļi var būt, piemēram, 23; 41; 59; 67. To summa ir 190. Tā nevar būt citāda, jo cipari 2; 4; 5; 6 nevar būt saskaitāmo pirmskaitļu vienu cipari; tāpēc tie ir desmitu cipari, un meklējamā summa noteikti ir $10(2+4+5+6)+(1+3+7+9)=10\cdot17+20=190$.

5.9.2. Pierādāmo nevienādību $2x^2+2y^2 \leq 5xy$ pārveidojam:

$2x^2+2y^2-5xy \leq 0$;

$5xy$ izsakām kā $xy+4xy$

$2x^2-xy-4xy+2y^2 \leq 0$;

Kreiso pusi sadalām reizinātājos ar grupēšanas paņēmienu:

$(2x^2-xy)-(4xy-2y^2) \leq 0$

$x(2x-y)-2y(2x-y) \leq 0$

$(2x-y)(x-2y) \leq 0 \quad |:2y^2$

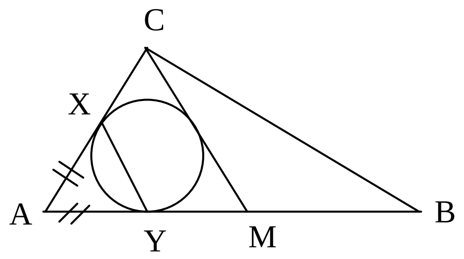
$$\frac{2x-y}{2y}\cdot\frac{x-2y}{y} \leq 0$$

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-2\right) \leq 0$$

Novērtēsim $\frac{x}{y}$. Šīs izteiksmes mazākā vērtība būs, ja x pieņems mazāko pieļaujamo vērtību, bet y – lielāko. Tātad $\frac{x}{y} \leq \frac{6}{3} = 2$. Lielāko iespējamo vērtību $\frac{x}{y}$ sasniegs, kad x pieņems lielāko iespējamo vērtību, bet y – mazāko, tātad $\frac{x}{y} \le \frac{6}{3} = 2$. No tā seko, ka $\frac{x}{y} - \frac{1}{2} \ge 0$, bet $\frac{x}{y} - 2 \le 0$, tāpēc $\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - 2\right) \le 0$ visām pieļaujamajām x, y vērtībām.

5.9.3. (Sk. A94.zīm.)

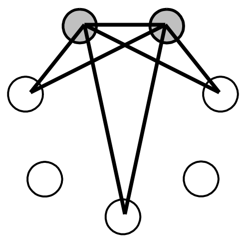
1) mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, tāpēc MA=MC;
2) $\Delta AMC \sim \Delta AYX$, jo $\angle A$ kopīgs un $\angle AXY = \angle ACM$ kā kāpšļu leņķi (trijstūru līdzības pazīme – ll);
3) tā kā MA=MC, tad YA=YX;
4) pieskaru vienādības dēļ YA=XA;
5) tāpēc ΔAYX ir regulārs, $\angle A = 60°$ un $\angle B = 30°$.



A94.zīm.

5.9.4. **a)** Pieņemsim, ka katrs iespējamais policistu trijnieks ir kopā nostrādājis tieši vienu reizi. Tad noteikti katri divi policisti kopā ir strādājuši ar katru no pieciem atlikušajiem policistiem, tātad katrs pāris kopā strādājis tieši piecas reizes. Tātad var būt n=5.

b) Attēlosim policistus ar regulāra 7-stūra virsotnēm. Izvēlamies divus policistus (iekrāsoti pelēki). Dežūras izveidojam tā, lai pa reizei dežūrē tie policistu trijnieki, kuru atbilstošās virsotnes veido vienādsānu trijstūri. Analoģiski apskatām pārējos policistu pārus. Tādā veidā mēs esam panākuši situāciju n=3.



A95.zīm

5.9.5. a) Katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā var būt ne vairāk kā viens pāra skaitlis. Zinot to, ka 10×10 rūtiņu kvadrātā ir 25 tādi 2×2 rūtiņu kvadrāti, nepāra skaitļi ierakstīti vismaz $25\times3=75$ reizes. Nepāra skaitļu pavisam ir pieci – 1; 3; 5; 7 un 9, tātad vismaz viens no nepāra skaitļiem ierakstīts vismaz $75:5=15$ reizes.

b) Katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā var būt ne vairāk kā viens no skaitļiem 3;6;9, jo tiem ir kopīgs dalītājs. Tāpēc katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā ir vismaz 2 skaitļi no kopas $\{1;5;7\}$; tātad to pavisam ir vismaz $25\cdot2=50$. Tā kā $3\cdot16<50$, iegūstam b) risinājumu.

6.9. REPUBLIKAS OLIMPIĀDE

6.9. DEVĪTĀ KLASE

6.9.1. Sniegsim divus variantus, kā pierādīt prasīto.

1. Doto vienādību pārveido par $x^2 - y^2 = 2007(x-y)$ un tālāk par $(x-y)(x+y) = 2007(x-y)$. Tā kā $x \neq y$, tad varam abas puses izdalīt ar $x-y$. Tādējādi iegūstam, ka $x+y=2007$.

2. Tā kā gan $x^2 - 2007x$, gan $y^2 - 2007y$ vērtības ir vienādas, tad varam tās apzīmēt, piemēram, ar *k*. Apskatām kvadrātvienādojumu $t^2 - 2007t = k$ jeb $t^2 - 2007t - k = 0$. No dotā un tā, ka $x \neq y$, seko, ka vienādojumam $t^2 - 2007t - k = 0$ ir divas dažādas saknes *x* un *y*. Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam, ka $x + y = 2007$.

6.9.2. Jā, var gadīties. Varam ņemt, piemēram, *p*=-1, *q*=-2. Ar šiem parametriem visiem kvadrātvienādojumiem abas saknes ir veseli skaitļi:

- Vienādojumam $x^2 - x - 2 = 0$ ir saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 2$.
- Vienādojumam $x^2 - 1 = 0$ ir saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 1$.
- Vienādojumam $x^2 + x = 0$ ir saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 0$.
- Vienādojumam $x^2 - 2x - 3 = 0$ ir saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 3$.
- Vienādojumam $x^2 - 3x - 4 = 0$ ir saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 4$.

Komentārs. Ievērojam, ka visiem šiem vienādojumiem ir viena kopīga sakne: $x = -1$. Apskatīsim, kāda sakarība saista šos vienādojumus.

No uzdevuma nosacījumiem labi redzam, ka visi vienādojumi iegūti, pirmajam vienādojumam - $x^2 + px + q = 0$ - pieskaitot vienādojumu $ax + a = 0$, kur *a* ir attiecīgi 0, 1, 2, -1, -2. Izmantojot mūsu parametrus *p*=-1 un *q*=-2, redzam, ka vienādojumam $x^2 - x - 2 = 0$ tiek pieskaitīts $ax + a = 0$. Un, tā kā katram no šiem vienādojumiem atsevišķi ir sakne $x = -1$, tad arī „kopējam" vienādojumam $x^2 + (a-1)x + (a-2) = 0$ ir viena sakne $x = -1$, savukārt otra sakne ir $x = 2 - a$.

6.9.3. Skatīt A96. zīm.

1) Tā kā ΔBNC ir taisnleņķa, tad tajā mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, t.i., *NM*=*MC*.

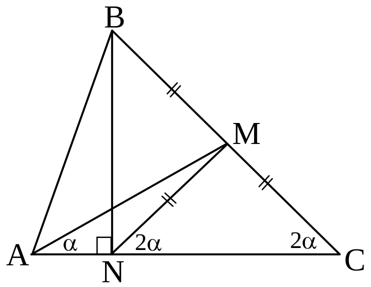
2) Tāpēc $\angle MNC = 2\alpha$.

3) $\angle ANM = \angle ANB + \angle BNM = 90^0 + 90^0 - 2\alpha = 180^0 - 2\alpha$.

4) Tad $\angle AMN = 180^0 - \angle MAN - \angle ANM = 180^0 - \alpha - (180^0 - 2\alpha) = \alpha$.

5) Tātad ΔANM – vienādsānu.

6) Tāpēc *AN*=*NM*=*MC*, no kurienes seko vajadzīgais.



A96. zīm.

6.9.4. Atbilde: 0; 4; 6; 8; 10; ...; 38; 40; 42.

Risinājums. Tā kā katrā rindā ir pāra skaits melno rūtiņu, tad a) tas nepārsniedz 6, un tādēļ kopējais melno rūtiņu skaits nepārsniedz 6·7=42, b) kopējais melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis. Viegli saprast, ka 0 melno rūtiņu var būt, bet 2 melnas rūtiņas – nē, jo tādā gadījumā vai nu vienā kolonnā, vai arī vienā rindā (var gadīties, ka gan rindā, gan kolonnā) būs tikai viena melna rūtiņa.

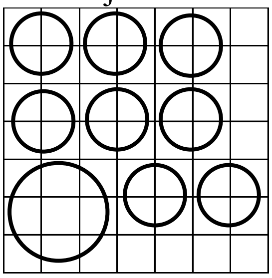
Atliek parādīt, kā iegūt 4; 6; 8; ...; 40; 42 melnas rūtiņas. Mēs to panāksim, izvietojot melnās rūtiņas divu veidu blokos: kvadrātos ar izmēriem 2*k*×2*k* rūtiņas, kur **katra** rūtiņa ir melna, un kvadrātos ar izmēriem $(2k+1)\times(2k+1)$ rūtiņas, kur melnas ir visas rūtiņas, **izņemot vienu diagonāli**.

1) Vērtības 4; 8; 12; ...; 32; 36 tiek iegūtas, izmantojot attiecīgi 1; 2; 3; ...; 9 kvadrātus ar izmēriem 2×2.

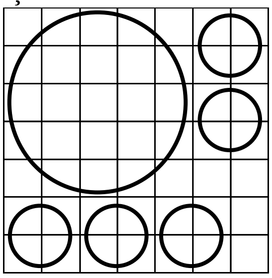
2) Vērtība 6 tiek iegūta, izmantojot kvadrātu 3×3 (ievietojam to lielā kvadrāta stūrī); vērtības 10; 14; 18; ...; 38 tiek iegūtas, pievienojot tam attiecīgi 1; 2; 3; ...; 8 kvadrātus ar izmēriem 2×2 (skat. A97.zīm.).

3) Vērtība 40 tiek iegūta ar vienu 5×5 rūtiņu kvadrātu un pieciem 2×2 rūtiņu kvadrātiem (skat. A98.zīm.).

4) Vērtība 42 tiek iegūta, izmantojot visu 7×7 rūtiņu kvadrātu.



A97.zīm.



A98.zīm.

6.9.5. a) jā, var. Skat., piem., A99. zīm.

8	3	9
1	5	6
7	2	4

A99. zīm.

b) nē, nevar. Apskatīsim pirmskaitļus 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79. Tā kā tie visi lielāki par $\frac{1}{2}\cdot 81$, tad neviens cits ierakstāmais skaitlis ne ar vienu no tiem nedalās. Tāpēc šiem skaitļiem jābūt uz diagonāles (ja kāds pirmskaitlis sastopams rindiņas elementu reizinājumā, tad aritmētikas pamatteorēmas dēļ tam jābūt sastopamam arī atbilstošās kolonnas elementu reizinājumā). Šo pirmskaitļu pavisam ir 10, bet tie jāizvieto 9 vietās. Tātad rodas pretruna un prasītais nav iespējams.

7. ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE

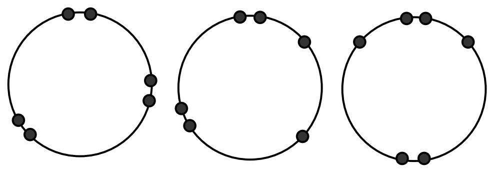
7.5. PIEKTĀ KLASE

7.5.1. **Atbilde:** 5; 6; 7; 8; 9.

Risinājums. Ja atvērtas mazāk par 5 kastēm, tad pat tad, ja visās atvērtajās ir pa ābolam, noskaidrotas augstākais 4 ābolu atrašanās vietas, un nav skaidrs, kur ir pārējie āboli, kuri vēl nav atrasti un kuri kaut kā sadalīti pa vismaz 6 neatvērtajām kastēm. **Var gadīties**, ka visi āboli atrasti pēc 5; 6; 7; 8 kastu atvēršanas; visos šajos gadījumos pirms pēdējā ābola atrašanas pilnīgas skaidrības vēl nebija. Ja pēc astoņu kastu atvēršanas atrasti 4 āboli, tad vēl nav skaidrs, kurā no atlikušajām divām kastēm ir piektais ābols; savukārt pēc deviņu kastu atvēršanas viss ir skaidrs (neatkarīgi no tā, vai atrasti 4 vai 5 āboli), un desmitā kaste nemaz nav jāatver.

7.5.2. **Atbilde:** 0, 1 vai 2.

Risinājums. Piemērus skat. A100. zīm.



A100. zīm.

Ievērosim, ka 4 vai vairāk vārdus divas reizes nosaukt nevar, jo tad pavisam notiktu vismaz $4 \cdot 2 = 8$ nosaukšanas, bet to ir tikai 6. Atliek pamatot, kāpēc 2 reizes nevar nosaukt 3 vārdus. Pieņemam, ka tas noticis. Tā kā šie trīs vārdi kopā nosaukti 6 reizes, tad trīs citi vārdi vispār nav nosaukti. Pieņemsim, ka vārds X nosaukts 2 reizes; tad to nosaukuši abi X kaimiņi Y un Z. Bērns X nosauks vai nu Y, vai Z; varam pieņemt, ka X nosauks Y. Vārdu Y nosaucis vēl kāds bērns. Tāpēc blakus stāvošie X un Y nosaukti divas reizes, pie tam abi nosaukuši viens otru. Līdzīgi spriežot, trešajam divreiz nosauktajam bērnam E atradīsies kaimiņš F, kas arī nosaukts divas reizes, pie tam E un F nosaukuši viens otru – pretruna.

7.5.3. **Atbilde:** 2007.

Risinājums. Tā kā jāvar tulkot **uz katru** no 2007 valodām, tad ar mazāk kā 2007 vārdnīcām noteikti nepietiek.

Ja vārdnīcas ļauj tulkot "pa apli", kā redzams A101. zīm., tad ar 2007 vārdnīcām pietiek.

$$\to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to 2006 \to 2007$$

A101. zīm.

7.5.4. Izdarām svēršanas, kā parādīts A102. zīm.

A102. zīm.

Ja svari nav līdzsvarā tikai pirmajā svēršanā, īpašā lodīte ir 1, jo no 2.svēršanas secinām, ka lodītes 3, 4 un 7 ir „pareizas".

Ja svari nav līdzsvarā tikai otrajā svēršanā, īpašā lodīte ir 7, jo no 1.svēršanas secinām, ka lodītes 1, 3 un 4 ir „pareizas".

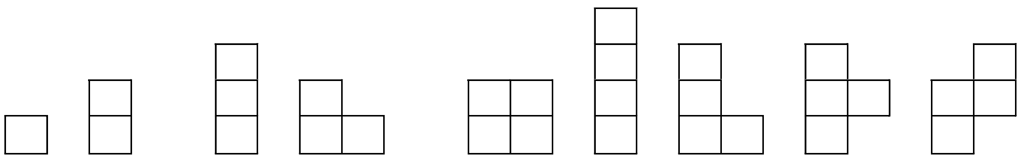
Gadījumā, ja nevienā no svēršanām svari nav līdzsvarā, skaidrs, ka īpašā lodīte ir vai nu 3, vai 4.

Ja **abās** svēršanās uz leju nosveras kreisais kauss, īpašā lodīte ir 3, jo šī ir vienīgā lodīte, kas abās svēršanās atrodas uz viena un tā paša kausa. To pašu secinām arī, ja **abās** svēršanās uz leju nosveras labais kauss.

Ja svēršanās uz leju nosveras dažādi kausi (vienā svēršanā viens, otrā - otrs), tad īpašā lodīte ir 4, kura ir vienīgā, kas pirmajā svēršanā atrodas uz viena kausa, savukārt otrajā – uz cita.

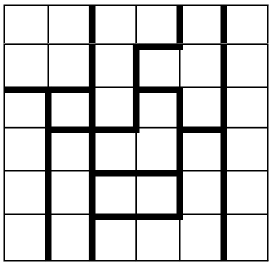
7.5.5. **Atbilde:** 10.

Risinājums. Dažādu iespējamo gabalu skaits, kas sastāv no 1; 2; 3; 4 rūtiņām, ir attiecīgi 1; 1; 2; 5 (skat. A103. zīm.)



A103. zīm.

Pat 11 vismazākie gabali kopā saturētu $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 39 > 36$ rūtiņas. Tātad 11 gabalu nevar būt. Tas, ka 10 gabali var būt, redzams A104. zīm.



A104. zīm.

7.6. SESTĀ KLASE

7.6.1. Tā kā uzdevuma nosacījumi noformulēti ar „tad un tikai tad”, tad atceramies, ka jāpierāda divi apgalvojumi:

a) Ja skaitlis $\overline{abc}$ dalās ar 7, tad arī izteiksme $2a+3b+c$ dalās ar 7.

b) Ja skaitlim $\overline{abc}$ izteiksme $2a+3b+c$ dalās ar 7, tad arī pats skaitlis dalās ar 7.

Risinājums.

Ievērojam, ka $\overline{abc}=100a+10b+c=(98a+7b)+(2a+3b+c)=7(14a+b)+(2a+3b+c)$.

a) Skaidrs, ka $7(14a+b)$ dalās ar 7. No tā, ka $\overline{abc}$ dalās ar 7, secinām, ka arī izteiksmei $2a+3b+c$ jādalās ar 7, jo $2a+3b+c=\overline{abc}-7(14a+b)$.

b) Dots, ka $2a+3b+c$ dalās ar 7. No tā, ka $7(14a+b)$ noteikti dalās ar 7, secinām, ka arī summa $7(14a+b)+(2a+3b+c)$ dalās ar 7. Bet šī summa ir vienāda ar skaitli $\overline{abc}$. Tātad $\overline{abc}$ dalās ar 7.

7.6.2. **Atbilde: a)** 11, **b)** var būt jebkurš skaits, kas lielāks par 1.

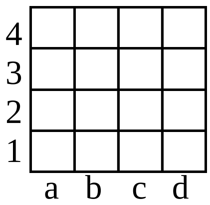
Risinājums. a) Tā kā visi uzrakstītie skaitļi ir pozitīvi, tad katrs no tiem vienāds ar vienpadsmito daļu no **visu** skaitļu summas. Tāpēc tie visi ir vienādi, un mēs varam katru no tiem apzīmēt, piemēram, ar *a*. Tā kā katrs no skaitļiem ir vienāds ar vienpadsmito daļu no visu skaitļu summas, varam rakstīt, ka $a=\frac{a\cdot x}{11}$, kur *x* ir skaitļu kopējais skaits. No dotā zinām, ka $a\neq 0$, tātad $x=11$.

b) Tā kā starp uzrakstītajiem skaitļiem var būt arī nulle, iepriekšējais spriedums mums neder un mēs nevaram apgalvot, ka uzrakstīto skaitļu skaits ir skaidri nosakāms. Skaitļu sistēmas (0;0), (0;0;0), (0;0;0;0) utt. apmierina uzdevuma prasības.

7.6.3. **Atbilde: a)** jā, **b)** nē, **c)** nē.

Risinājums. a) piemēram, izdarot šādus gājienus, visi skaitļi kļūs vienādi ar 6 (sk. A105.zīm.).:

a4a3, a3a2, b3c3, d4d3, d4d3, b1b2, b1b2, c1c2, c2d2, c2d2.



A105. zīm.

b) Sākumā visu ierakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis, jo nepāra skaitā rūtiņu ierakstīti nepāra skaitļi. Ar katru gājienu visu skaitļu summa palielinās par 2, tātad paliek nepāra skaitlis. Bet, ja visi skaitļi kļūtu vienādi ar *n*, tad to summa 16*n* būtu pāra skaitlis. Iegūstam pretrunu, tātad prasītais nav iespējams.

c) Ievērojam, ka visu ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis. Izmantojot iepriekšējo pierādījuma metodi, pretruna netiktu iegūta, tomēr tas uzreiz nenozīmē, ka prasītais ir iespējams. Izmantosim citu paņēmienu.

Izkrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Tad melnajās un baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summas nav vienādas. Ar katru gājienu par 1 palielinās gan viena, gan otra summa, tātad tās joprojām paliek dažādas. Bet, ja visi skaitļi kļūtu vienādi, tad abām šīm summām arī būtu jākļūst vienādām.

7.6.4. **Atbilde:** 9 rūtiņas.

Risinājums. To, ka ar 9 rūtiņām pietiek, skat.A106. zīm.

	x			x			x
	x			x			x
	x			x			x

A106. zīm.

No otras puses, ja kādā no 9 apgabaliem, kas redzami 7.zīm., nebūtu **nevienas** atzīmētas rūtiņas, tad **neatzīmētajai** rūtiņai, kurā patlaban redzams krustiņš, nebūtu ne kopīgas malas, ne kopīga stūra ne ar vienu atzīmēto.

Tātad vismaz 9 rūtiņas (pa vienai katrā apgabalā) jāatzīmē.

7.6.5. **Atbilde:** 4 dienas.

Risinājums. To, ka ar 4 dienām pietiek, skat. A107.zīm., kur parādīts, kurās dienās katrs no 6 rūķīšiem sēž mājās.

	A	B	C	D	E	F
1.diena	x	x	x			
2.diena	x			x	x	
3.diena		x		x		x
4.diena			x		x	x

A107. zīm.

Tagad pamatosim, kāpēc ar mazāku dienu daudzumu nepietiek. Pavisam jāizdara $6 \cdot 5 = 30$ apciemojumi. Noskaidrosim, kāds ir maksimālais apciemojumu skaits vienā dienā atkarībā no tā, cik rūķīšu sēž mājās un cik - iet ciemos.

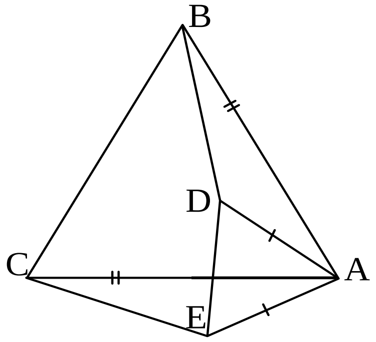
Mājās sēž	Iet viesos	Iespējamo apciemojumu skaits
0	6	$0 \cdot 6 = 0$
1	5	$1 \cdot 5 = 5$
2	4	$2 \cdot 4 = 8$
3	3	$3 \cdot 3 = 9$
4	2	$4 \cdot 2 = 8$
5	1	$5 \cdot 1 = 5$
6	0	$6 \cdot 0 = 0$

Redzam, ka vienā dienā nevar notikt vairāk par 9 apciemojumiem, bet $9 \cdot 3 = 27 < 30$, tātad ar 3 dienām nepietiek, lai izdarītu visus vajadzīgos apciemojumus.

7.7. SEPTĪTĀ KLASE

7.7.1. Acīmredzot, nedrīkst rakstīt ne pāra ciparus, ne 5, jo gan pāra skaitļi, gan skaitļi, kas beidzas ar 5, nav pirmskaitļi. Atliek cipari 1; 3; 7; 9. Ja tos uzrakstītu visus, tad devītniekam vismaz vienā pusē būtu vai nu 3, vai 1; bet 93 dalās ar 3 un 91 dalās ar 7, tātad nav pirmskaitļi. Tāpēc nedrīkst rakstīt arī 9. Ciparus 1; 3; 7 var izrakstīt jebkurā secībā, jo visi skaitļi 13; 31; 17; 71; 37; 73 ir pirmskaitļi.
Atbilde: 3 ciparus.

7.7.2. **Pierādījums:** (sk. A108.zīm).
1) Tā kā trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad AE = AD un AC = AB.
2) $\angle EAC = 60^o - \angle CAD = \angle DAB$.
3) Tāpēc $\Delta EAC = \Delta DAB$ (pēc pazīmes **mlm)**, no kā seko, ka EC = DB.

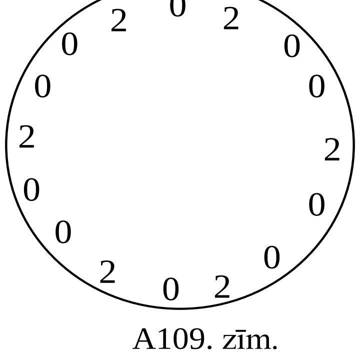


A108. zīm.

7.7.3. Apskatām sekojošus skaitļu pārus:
105 un 106; 160 un 161; 167 un 168; 175 un 176; 223 un 224; 231 un 232.
Katrā no šiem **blakus esošu** skaitļu pāriem katrs skaitlis ir tāds, kuru Maija var nodzēst, jo katrā pārī viens skaitlis pats dalās ar 7, savukārt otram skaitlim tā ciparu summa dalās ar 7.
Neviens Andra skaitlis augšanas procesā nevar "pārlekt pāri" nevienai no šīm barjerām, tāpēc ka Andris var pieskaitīt skaitlim tikai 1 vai 2, bet, lai „pārlektu pāri" kādam no dotajiem skaitļu pāriem, būtu jāpieskaita vismaz 3. Tāpēc Maija tos visus pakāpeniski varēs nodzēst (ja tas nebūs noticis jau agrāk).

7.7.4. Izvēlēsimies divus pazīstamus cilvēkus A un B. Katrs no tiem pazīst vēl sešus citus. Tā kā 6+6>10, tad starp pārējiem 10 cilvēkiem atradīsies tāds, kas ietilpst gan A "pārējo 6 paziņu" grupā, gan B "pārējo 6 paziņu" grupā. Šo cilvēku varam ņemt par C.

7.7.5. **Atbilde:** 2.
Risinājums. Tas, ka starpība var būt 2, redzams A109.zīm.



A109. zīm.

Pierādīsim, ka tā nevar būt lielāka par 2. Apzīmēsim skaitļus rakstīšanas kārtībā ar x_1; x_2; x_3;...; x_{16}; to summu apzīmēsim ar S.

$S = x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7) + (x_8 + x_9 + x_{10}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (x_{14} + x_{15} + x_{16})$.

No tā, ka nekādu triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nav mazāka par 2, seko, ka $S \geq x_1 + 5 \cdot 2$ jeb $\boldsymbol{S \geq x_1 + 10}$. Savukārt no tā, ka nekādu piecu pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nav lielāka par 4 un ka summu S var uzrakstīt arī kā $S = x_2 + (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + (x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}) + (x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_1)$, secinām, ka $S \leq x_2 + 3 \cdot 4$ jeb $\boldsymbol{S \leq x_2 + 12}$. Tā kā $x_1 + 10 \leq S$ un $S \leq x_2 + 12$, tad $x_1 + 10 \leq x_2 + 12$ un tālāk seko, ka $x_1 - x_2 \leq 2$, k.b.j.

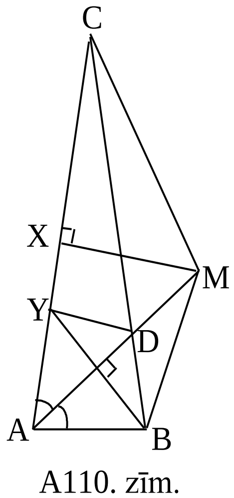
7.8. ASTOTĀ KLASE

7.8.1. Padomāsim, kāpēc var gadīties, ka nav tādas x vērtības, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses ir vienādas savā starpā. Apskatīsim, kas būtu tādā gadījumā, ja tās būtu savā starpā vienādas. Tā kā ar apskatāmo x vērtību gan $x^2 + px + q = 0$, gan arī $x^2 + ax + b = 0$, tad varētu rakstīt, ka $x^2 + px + q = x^2 + ax + b$. Sagrupējot nezināmos, iegūtu vienādojumu $(p-a)x = b - q$. Tā kā dots, ka nav tādas x vērtības, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses būtu vienādas savā starpā, tad šim vienādojumam nav atrisinājuma. Lai vienādojumam nebūtu atrisinājuma, $p - a = 0$ jeb $p = a$ (un $b \neq q$, bet tas mums nav svarīgi), jo, ja $p - a$ nebūtu 0, tad, izsakot $x = \dfrac{b-q}{p-a}$, mēs iegūtu tādu x vērtību, ar kuru abu vienādojumu kreisās puses būtu vienādas. Taču, saskaņā ar uzdevumā doto, tā nevar būt.

Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam, ka $x_1 + x_2 = -p$ un $x_3 + x_4 = -a$. Mēs jau noskaidrojām, ka $p = a$, tātad $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, kas arī bija jāpierāda.

7.8.2. a) sk. A110. zīm.

1) skaidrs, ka ∠CAB=∠CBA=$\frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$
2) tātad ∠CAM=∠BAM=40°.
3) tā kā AM=CM (M atrodas uz AC vidusperpendikula), tad ΔAMC – vienādsānu.
4) tāpēc ∠ACM=∠CAM=40° $>$ 20° = $\angle ACB$ no šejienes **∠MCB=40°-20°=20°**.



A110. zīm.

b) 1) novelkam BY⊥AD. Tā kā ΔYAB leņķa A bisektrise ir arī augstums,
2) tad ΔYAB – vienādsānu, AY=AB.
3) tāpēc ΔAYD=ΔABD (*mlm*).
4) tā kā ∠ADB=180°-40°-80°=60°, tad arī ∠YDA=60° un ∠YDC=180°-60°-60°=60°; arī ∠MDC=60°, jo ∠MDC=∠ADB

5) tātad ΔMDC=ΔYDC (*lml*), tāpēc YD=MD.
6) tā kā YD=BD, tad MD=BD, t.i., ΔMDB – vienādsānu
7) tā kā ∠MDB=180°-60°=120°, tad $\angle \mathbf{MBC} = \mathbf{\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°}$

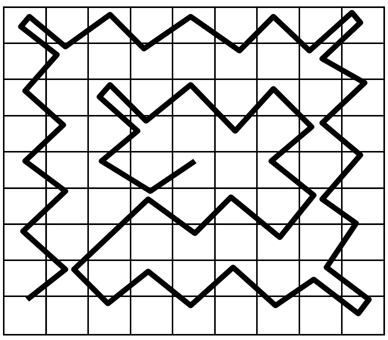
7.8.3. **Atbilde:** 143.
Risinājums. Sadalām skaitli 1716 reizinātājos un ievērojam, ka $1716 = 11 \cdot 12 \cdot 13$.
Tā kā 11 un 13 ir vairākciparu pirmskaitļi un tātad nevar būt ne cipari, ne ciparu dalītāji, šie reizinātāji Juliatas iegūtajā reizinājumā radušies kā paša iedomātā skaitļa dalītāji. Tātad Juliatas iedomātais skaitlis noteikti dalās ar $11 \cdot 13 = 143$. Tā kā šis iedomātais skaitlis dalās ar 143, tad varam to apzīmēt ar 143x, x – naturāls skaitlis. Tātad šī skaitļa ciparu reizinājums izsakās kā $\frac{1716}{143x} = \frac{12}{x}$, tātad iedomātā skaitļa ciparu reizinājums ir kāds no skaitļa 12 naturāliem dalītājiem – 1; 2; 3; 4; 6 vai 12.
Pārbaudām, kuras x vērtības der:

- ja $x = 1$, tad Juliata iedomājās skaitli 143, sareizināja tā ciparus $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli, iegūstot $12 \cdot 143 = 1716$;
- ja $x = 2$, tad Juliata iedomājās skaitli $143 \cdot 2 = 286$, sareizināja tā ciparus $2 \cdot 8 \cdot 6 = 96$ un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli, iegūstot $96 \cdot 28 = 27456$;
- ja $x = 3$, tad Juliata iedomājās skaitli $143 \cdot 3 = 429$, sareizināja tā ciparus $4 \cdot 2 \cdot 9 = 72$ un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli, iegūstot $72 \cdot 429 = 30888$;
- ja $x = 4$, tad Juliata iedomājās skaitli $143 \cdot 4 = 572$, sareizināja tā ciparus $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$ un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli, iegūstot $70 \cdot 572 = 40040$;
- ja $x = 6$, tad Juliata iedomājās skaitli $143 \cdot 6 = 858$, sareizināja tā ciparus $8 \cdot 5 \cdot 8 = 320$ un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli, iegūstot $320 \cdot 858 = 274560$;
- ja $x = 12$, tad Juliata iedomājās skaitli $143 \cdot 12 = 1716$, sareizināja tā ciparus $1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 6 = 42$ un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli, iegūstot $42 \cdot 1716 = 72072$.

Pārbaudot visas iespējamās x vērtības, redzam, ka der tikai $x = 1$, tātad Juliata iedomājās skaitli 143.

7.8.4. Triku var organizēt dažādi. Apskatīsim vienu iespēju.
Ievērosim, ka uz kartītēm ir tieši divi skaitļi, kas beidzas ar 0; tieši divi skaitļi, kas beidzas ar 1; ...; tieši divi skaitļi, kas beidzas ar 9. Starp 11 kartītēm, ko skatītājs atdod Gunāram, noteikti atradīsies divas, uz kurām esošie skaitļi beidzas ar vienu un to pašu ciparu (teiksim, ar a). Tieši **šādas divas kartītes** Gunārs atdod skatītājam. Skaitlis, ko skatītājs pievieno šīm divām, noteikti nebeidzas ar ciparu a (jo trešās tādas kartītes vispār nav). Tāpēc Dzintars, saņemot 3 kartītes no skatītāja, redz, ka uz divām no tām skaitļiem pēdējie cipari ir vienādi savā starpā, bet uz trešās pēdējais cipars ir citāds. Šo kartīti Dzintars arī norāda.

7.8.5. **Atbilde:** 48 gājieni.
Risinājums. Tas, ka ar 48 gājieniem pietiek, redzams A111.zīm.



A111.zīm.

x		x		x		x		x
	o		o		o		o	
x		x		x		x		x
	o		o		o		o	
x		x		x		x		x
	o		o		o		o	
x		x		x		x		x
	o		o		o		o	
x		x		x		x		x

A112.zīm.

Pierādīsim, ka ar mazāk gājieniem nepietiek:

1) kopā **jāieiet** 40 melnās rūtiņās (pavisam to ir 41)

2) ieviešam papildus apzīmējumus melnajām rūtiņām, apzīmējot tās ar aplīšiem un krustiņiem, lai nekādiem diviem krustiņiem savā starpā nebūtu kopīgu stūru un nekādiem diviem aplīšiem savā starpā nebūtu divu kopīgu stūru – tā, kā parādīts A112. zīmējumā.

3) secinām, ka melnajās rūtiņās, kas attēlotas ar krustiņu, var ieiet tikai no tām rūtiņām, kas apzīmētas ar aplīšiem

4) redzam, ka krustiņu ir 25, aplīšu – 16

5) šķirojam divas iespējas:

a) **maršruts sākas "krustiņā".**

Tātad jāieiet vēl 24 krustiņos. Jau zinām, ka krustiņā iespējams ieiet vienīgi no aplīša, bet, tā kā aplīšu ir mazāk nekā krustiņu, tad noteikti būs tādi aplīši, kuros būs jāieiet atkārtoti. Aprēķinām, cik reizes ir jāieiet aplītī, kurā ir jau būts: tas jādara $24-16=8$ reizes. Tāpēc pavisam jāveic vismaz 40+8=48 gājieni.

b) **maršruts sākas aplītī.**

Tad jāieiet 25 krustiņos. Vienā no tiem ieiet no sākuma pozīcijas, tātad paliek vēl 24 krustiņi, kuros ir jāieiet; lai realizētu atlikušās 24 ieiešanas, atkal vajag ieiet dažos no aplīšiem atkārtoti, jo aplīšu ir mazāk nekā krustiņu, taču jebkurā krustiņā ir iespēja ieiet tikai un vienīgi no aplīša. Tas nozīmē, ka jāveic vismaz 24-16=8 "lieki" gājieni, līdz ar to kopējais gājienu skaits ir vismaz 40+8=48.

7.9. DEVĪTĀ KLASE

7.9.1. Atbilde: nē.

Risinājums. Pieņemsim, ka tā noticis, un apskatīsim gadījumu, kad vienīgais skaitlis, kas nedalās ar 3, ir izveidots no kādas kolonnas cipariem.

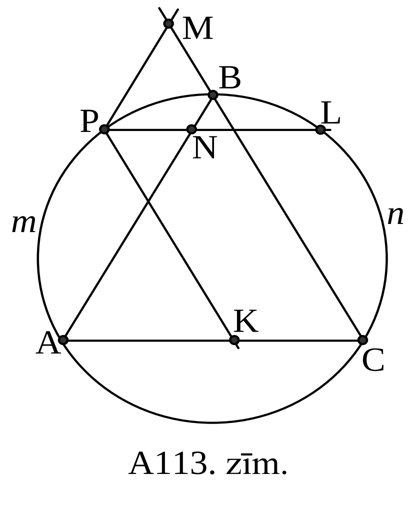
Tas nozīmē, ka visās pārējās deviņās kolonnās un pilnīgi visās rindiņās izveidotie skaitļi dalās ar 3. Izmantosim dalāmības pazīmi – ar 3 dalās visi tie skaitļi, kuriem ciparu summa dalās ar 3. Zinot to, ka katrs no rindiņām izveidotais skaitlis dalās ar trīs, secinām, ka arī katras rindiņas ciparu summa dalās ar 3, līdz ar to arī visu rindiņu visu ciparu summa dalās ar trīs, tātad visu ciparu summa, kuri atrodas dotajās simts rūtiņās, dalās ar 3.

Savukārt katrā no deviņām kolonnām esošo ciparu summa dalās ar 3, bet vienas kolonnas ciparu summa – nē. No tā secinām, ka visu to ciparu summa, kas atrodas dotajās simts rūtiņās, ar 3 nedalās.

Iegūta pretruna, kas pierāda: nevar gadīties, ka tieši 19 no izveidotajiem skaitļiem dalās ar 3.

Līdzīgi apskatām gadījumu, ja vienīgais skaitlis, kas nedalās ar 3, ir izveidots no kādas rindiņas cipariem.

7.9.2. Pierādījums: skat. A113. zīm.



A113. zīm.

Atliekam punktu L tā, ka $L \in$ apv. r.l. un $L \in$ taisnei PN

1) $\angle MPN = \angle BAC = 60^0$, jo $PL \parallel AC$ un $PM \parallel AB$.

2) $\angle BMP = \angle CBA = 60^0$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm PM un AB.

3) *PMBN* – vienādsānu trapece, jo pamata malas *BN* un *PM* paralēlas pēc uzdevuma nosacījumiem un leņķi pie pamata *PM* vienādi.

4) $\angle BMN = \angle BPN$ pēc vienādsānu trapeces diagonāļu īpašības.

5) *PMCK* – vienādsānu trapece, jo pamata malas *MC* un *PK* paralēlas pēc uzdevuma nosacījumiem un leņķi pie pamata *MC* ir 60^0 un ir vienādi ($\angle BMP = 60^0$ no 2) un $\angle BCA = 60^0$, jo dotais trijstūris *ABC* ir regulārs).

6) $\angle BMK = \angle BCP$ pēc vienādsānu trapeces diagonāļu īpašības.

7) Mums jāpierāda, ka $\angle BMN = \angle BMK$; ņemot vērā 4) un 6), mums jāpierāda, ka $\angle BPN = \angle BCP$.

8) $\angle BPN$ un $\angle BCP$ - ievilkti leņķi, kas balstās attiecīgi uz lokiem *BL* un *BP*.

9) Lai pierādītu, ka $\angle BPN = \angle BCP$, pietiek pierādīt, ka loki *BL* un *BP* ir vienādi, jo ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi.

10) $\cup APB = \cup CLB = \angle 120^0$, jo $\angle ACB$ un $\angle BAC$ ir ievilkti leņķi, un $\angle ACB = \angle BAC = 60^0$.

11) $\cup AmP = \cup CnL$ kā loki starp paralēlām hordām *AC* un *PL*.

12) $\cup PB = \cup BL$, jo, atņemot no vienādiem lokiem $\cup APB = \cup CLB$ vienādus lokus $\cup AmP = \cup CnL$, arī iegūtie loki ir vienādi.

13) Tātad $PB = BL$. No tā seko, ka $\angle BPN = \angle BCP$, un no tā seko, ka $\angle BMN = \angle BMK$, kas arī bija prasīts.

7.9.3. a) Dots, ka katrs no diviem naturāliem skaitļiem a un b ir izsakāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa, tāpēc mēs varam apzīmēt a un b sekojoši: $a = x^2 + y^2$ un $b = z^2 + t^2$, kur x, y, z un t ir veseli skaitļi. Tātad a un b reizinājums izsakās kā $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$. Veicam identiskus pārveidojumus:

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) =$$
$$= x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 =$$
$$= (x^2z^2 + 2xyzt + y^2t^2) + (x^2t^2 - 2xyzt + y^2z^2) =$$
$$= ((xz)^2 + 2\cdot(xz)\cdot(yt) + (yt)^2) + ((xt)^2 - 2\cdot(xt)\cdot(yz) + (yz)^2) =$$
$$= (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$$

Zinot to, ka katrs no skaitļiem x, y, z un t ir vesels skaitlis, iegūstam, ka arī $xz + yt$ un $xt - yz$ ir veseli skaitļi.

Esam pierādījuši, ka reizinājums $a \cdot b$ ir izsakāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa.

b) Apskatām vispirms reizinājumu $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$. To var uzrakstīt kā $(x^2 + 1^2)(x^2 + 2^2)$. Atceramies punktā a) iegūto. Ja mēs tur x vietā rakstītu x, y vietā rakstītu 1, z vietā rakstītu x un t vietā rakstītu 2, tad

$$(x^2 + 1^2)(x^2 + 2^2) =$$
$$= (x\cdot x + 1\cdot 2)^2 + (x\cdot 2 - 1\cdot x)^2 = (x^2 + 2)^2 + x^2$$

Līdzīgi ievērojam, ka $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = ((x+1)^2 + 1^2)((x-1)^2 + 1^2)$. Izmantojam punktā a) iegūto un tur x vietā rakstām $x + 1$, y vietā rakstām 1, z vietā rakstām $x - 1$ un t vietā rakstām 1. Iegūstam:

$$((x+1)^2+1^2)((x-1)^2+1^2)=$$
$$=((x+1)\cdot(x-1)+1\cdot 1)^2+((x+1)\cdot 1-1\cdot(x-1))^2=$$
$$=(x^2-x+x-1+1)^2+(x+1-x+1)^2=(x^2)^2+2^2.$$

Esam ieguvuši izteiksmi, kas sastāv nevis no 4 iekavu reizinājuma, bet gan no divu iekavu reizinājuma, pie tam katrā iekavā ir divu kvadrātu summa.

Izteiksim iegūto reizinājumu kā divu kvadrātu summu. Izmantojam atkal punktā a) iegūto identitāti un tur x vietā rakstām x^2+2, y vietā rakstām x, z vietā rakstām x^2 un t vietā rakstām 2. Iegūstam:

$$((x^2+2)^2+x^2)((x^2)^2+2^2)=$$
$$=((x^2+2)\cdot x^2+x\cdot 2)^2+((x^2+2)\cdot 2-x\cdot x^2)^2=$$
$$=(x^4+2x^2+2x)^2+(-x^3+2x^2+4)^2$$

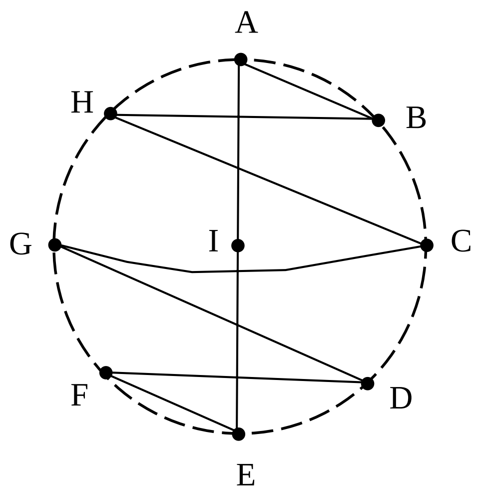
Esam atraduši divus tādus polinomus ar veseliem koeficientiem, ka visiem x pastāv uzdevumā prasītā vienādība.

7.9.4. **Atbilde:** a) nē, b) jā.

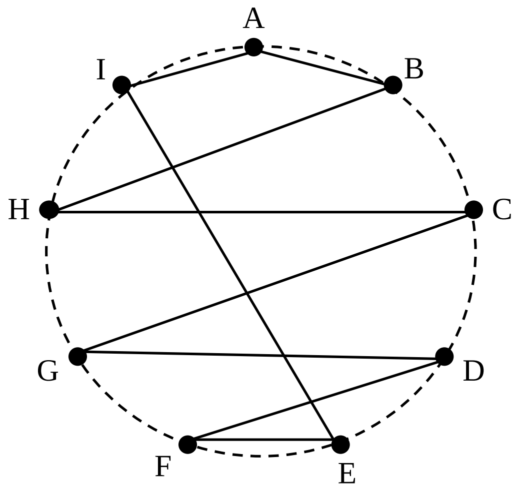
Risinājums. a) katrai no slēgtajām lauztajām līnijām katrā virsotnē ir pāra skaits posmu. No pirmā punkta iziet pirmais posms, un pēdējais posms atgriežas šajā punktā. Katrā no pārējiem septiņiem punktiem viens posms ieiet un nākošais – iziet. Bet no katras astoņstūra virsotnes kopā iziet nepāra skaits nogriežņu - 2 malas un 5 diagonāles, tātad nepāra skaits posmu. Septiņi nav pāra skaitlis. Iegūta pretruna.

b) pavisam varam novilkt 36 līnijas, kas savieno katru punktu ar katru – no pirmā punkta uz citiem varam novilkt 8 līnijas, no otrā punkta – 7 līnijas, ..., no pēdējā punkta mēs nevaram vairs novilkt nevienu līniju. Tātad novilktas pavisam $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ līnijas.Tā kā katra lauzta līnija sastāv no tieši deviņiem posmiem, tad mēs novilksim 4 lauztas līnijas.

Deviņstūra virsotnes attēlosim kā regulāra astoņstūra virsotnes un centru (to darām tāpēc, lai varētu izveidot „simetrisku" zīmējumu). Atbilstošās virsotnes apzīmēsim ar vienādiem burtiem un izveidosim lauztu līniju, kas savienos attiecīgos punktus astoņstūrī (skat. A114a. zīm).



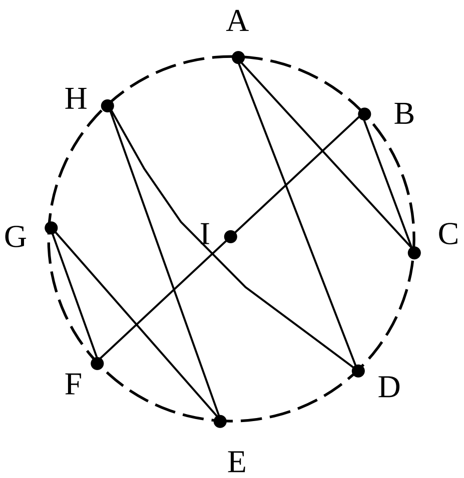
A114a. zīm.



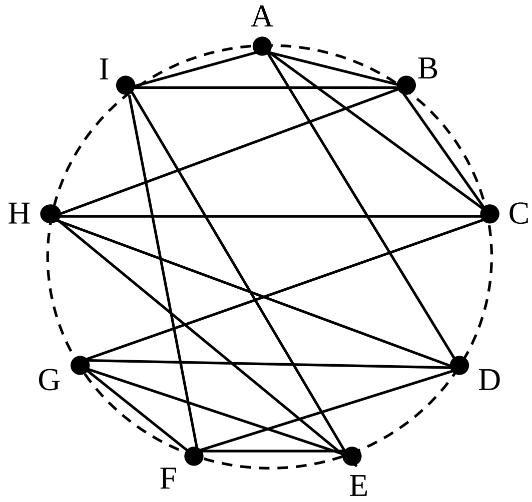
A114b. zīm.

Savienojot atbilstošās virsotnes deviņstūrī, iegūsim vienu no meklētajām lauztajām līnijām (skat. A114b. zīm).

Lai izveidotu otru lauzto līniju, mums nepieciešams zīmējumā A114a attēloto lauzto līniju pagriezt pulksteņrādītāja virzienā tā, lai punkts A attēlotos punktā B, punkts B – punktā C utt (skat. A114c. zīm). Neviens no pagrieziena rezultātā iegūtajiem lauztās līnijas posmiem nesakrīt ar sākotnējās lauztās līnijas posmu. Tāpēc, arī šo lauzto līniju atbilstoši attēlojot deviņstūrī, iegūsim jaunu „derīgu" lauztu līniju.



A114c. zīm.



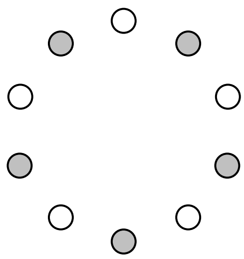
A114d. zīm.

Līdzīgi attēlojam arī trešo un ceturto lauzto līniju. Viegli pārliecināties, ka, attēlojot visas četras lauztās līnijas vienā un tajā pašā deviņstūrī, no katra punkta uz katru citu iziet tieši viens lauztas līnijas posms.

7.9.5. **Atbilde:** 8 monētas.

Risinājums. Ja apgriežam divus monētu četriniekus bez kopējiem elementiem, tad uz augšu ir tieši 8 ģerboņi. Tātad 8 ģerboņus uz augšu var iegūt.

Pierādīsim, ka šis ir lielākais monētu daudzums, kas vienlaicīgi var atrasties ar ģerboni uz augšu. Lai to izdarītu, izvēlamies 5 monētas, no kurām nekādas divas neatrodas blakus, iekrāsojam tās pelēkas (sk. A115. zīm.).



A115. zīm.

Katrs gājiens aizskar tieši divas no tām, jo:

1) starp jebkurām četrām pēc kārtas sekojošām monētām tieši divas ir pelēkas;

2) katrā pēc kārtas sekojošu piecu monētu virknē neatkarīgi no tā, vai virkne sākas vai beidzas ar pelēko monētu vai nē, katrā no malējo monētu pāriem noteikti tieši viena monēta ir pelēka.

Starp pelēkajām monētām sākumā ar „lasi” uz augšu atrodas tieši piecas monētas, tātad nepāra skaits monētu. Katrā gājienā „lašu” skaits starp pelēkajām monētām vai nu nemainās, vai mainās par divi:

1) ja pirms gājiena ar „lasi” uz augšu ir divas monētas, tad pēc gājiena nav monētu ar „lasi” uz augšu, tātad „lašu” skaits ir samazinājies par 2;

2) ja pirms gājiena ar „lasi” uz augšu nav neviena no divām monētām, tad pēc gājiena ir divas monētas ar „lasi” uz augšu, tātad „lašu” skaits ir palielinājies par 2;

3) ja pirms gājiena viena no monētām bija ar „lasi” uz augšu, bet otra – nē, tad pēc gājiena pirmā monēta vairs nebūs ar „lasi” uz augšu, bet otrā – būs, tātad „lašu” skaits nav mainījies.

Tā kā „lašu” skaits vai nu nemainās vai mainās par divi, tad „lašu” vienmēr būs nepāra skaits, tātad pelēko monētu pieciniekā vienmēr paliks vismaz viens „lasis”. Tas pats attiecas arī uz „balto” monētu piecinieku, tātad noteikti uz augšu paliks vismaz divi „laši”.