Punktiņš. Patiesi, nepatiesi, nenoteikti apgalvojumi
27.11.2020

Atrisinājumi

Novērtē, vai apgalvojums ir patiess!

Atzīmēsim, ka ***apgalvojums ir*** *Patiess, Nepatiess vai Nenoteikts*

1. Trīs secīgu naturālu skaitļu summa dalās ar 3

Patiess. Apzīmēsim trīs secīgus skaitļus

$$n-1;\ \ n;\ \ n+1$$

Tad to summa dalās ar 3, jo iegūst

$$(n-1)+n+(n+1)=3n$$

2. Četru secīgu naturālu skaitļu summa dalās ar 4

Nepatiess. Aplūkosim 4 secīgu skaitļu summu

$$(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=4n+2=2(2n+1)$$

Iegūst nepāra skaitļa reizinājumu ar 2, kas ar 4 nedalās, tāpēc četru secīgu skaitļu summa nedalās ar 4.

3. Kvadrāts nav taisnstūris

Nepatiess. Kvadrāts ir taisnstūru speciālgadījums.

4. Ja daļskaitļa skaitītāju un saucēju pareizina ar vienu un to pašu skaitli, tas palielinās

Nepatiess, jo

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

5. Ja figūrai ir 3 malas, tad tas ir trijstūris

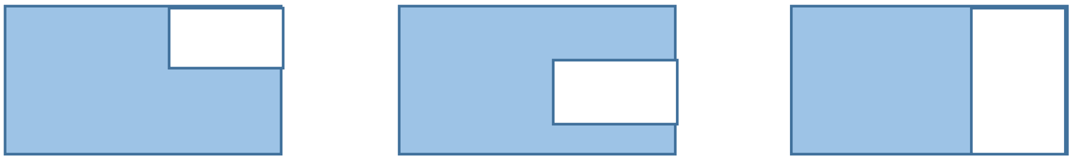
Nenoteikts, jo figūras malas var būt arī liektas līnijas. Trijstūris ir *daudzstūris*, kuram ir 3 virsotnes.

6. Ja uz šaha dēlīša novieto 9 bandiniekus, tad vismaz 2 bandinieki būs novietoti viena rindā

Patiess. Apgalvojums ir pamatojams ar Dirihlē principa palīdzību. Ja 8 rindās izvieto 9 bandiniekus, tad vismaz vienā rindā ir vismaz 2 bandinieki. Ja mēs pieņemam, ka katrā rindā ir ne vairāk kā 1 bandinieks, tad izvietoto bandinieku skaits ir tikai 8.

7. Ja no taisnstūra izgriež mazāku taisnstūri, tad dotā taisnstūra perimetrs samazinās

Nenoteikts. Iegūst figūru, kurai var būt tāds pats perimetrs kā dotajam taisnstūrim (ja no taisnstūra izgriež tādu taisnstūri, kas satur tieši vienu dotā taisnstūra stūri), vai lielāks (piemēram, taisnstūri izgriež pie kādas malas tā, ka tas nesatur dotā taisnstūra stūrus). Perimetrs samazinās, ja nogriežam veselu sleju – taisnstūri, kura vienas malas garums vienāds ar dotā taisnstūra malas garumu



8. Ja nodzēš desmitstūra 3 malas, tad iegūst 3 lauztās līnijas

Nenoteikts, jo var, piemēram, nodzēst 3 malas pēc kārtas.

9. Izpārdošanā preces cenu samazināja par 25%. Kad izpārdošana beidzās, tās preces cenu atkal pacēla par 25%, tā iegūstot preces sākotnējo cenu.

Nepatiess. Ja preces cena sākotnēji bija A, tad pēc samazināšanas tās cena bija 0.75A. Pēc cenas palielināšanas

$$0.75A + 0.25 \cdot 0.75A \approx 0.94A \neq A$$

Mājas darba uzdevumi

Novērtē, vai apgalvojums patiess, nepatiess vai nenoteikts! Pamato, kāpēc tu tā domā.

1. Ja taisnstūri sagriež divās daļās, tad iegūst divus trijstūrus

Nenoteikts

Diānas skaidrojums: "Tāpēc, ka viss ir atkarīgs no griezienа. Veicot to no viena stūra uz otro - 2 trijstūri. Ja no malas uz malu - 2 četrstūri. Un ja no malas uz stūri - trijstūris un četrstūris".

Piebilde. Var arī iegūt trijstūri un piecstūri.

2. Ja šaha zirdziņš stāv uz melnā lauciņa, tad pēc 4 gājieniem tas stāvēs uz baltā lauciņa.

Nepatiess

Tomasa paskaidrojums: "jo pēc katra gājiena zirdziņš noteikti maina lauciņa krāsu, tad pēc 1. gājiena tas būs uz baltā lauciņā, pēc 2. uz melnā, pēc 3. uz baltā un pēc 4. uz melnā."

3. Trīs pirmskaitļu summa ir pāra skaitlis.

Nenoteikts. Ja saskaita pirmskaitļus, kas lielāki par 2, tad suma ir nepāra skaitlis.

Diāna: "Jo, piemēram, 2 + 3 + 7 = 12 (pāra skaitlis), bet 3 + 5 +7 = 15 (nepāra skaitlis)

4. Darbinieka algu pagājušajā gadā palielināja par 5%, šogad par 15%. Tad divu gadu laikā alga ir palielinājusies par 20%.

Nepatiesi. Divu gadu laikā alga ir palielinājusies par 20,75%.

Anastasija skaidro: "Piemēram: ja darbinieka alga sākumā bija 100 eiro, pēc 2 gadiem viņa alga būs 120.75, bet 20% no 100 ir 20."

5. Ja daļskaitlim gan skaitītājā, gan saucējā piekaita vienu un to pašu skaitli, tad daļskaitlis palielinās

Nenoteikts. Daļskaitlis ir daļa no skaitļa 1. Tāpēc daļskaitļa skaitītājs ir mazāks nekā saucējs. Ja pieskaita pozitīvu skaitli gan skaitītājam, gan saucējam, dotais daļskaitlis palielinās. Aplūkosim algebrisku izteiksmi

$$\frac{a}{b}; \quad a < b$$

$$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}, \qquad ja\ c > 0$$

Veiksim "krustisku" reizināšanu

$$(a+c)b > a(b+c)$$

$$ab + bc > ab + ac \quad jeb\ bc > ac$$

Pēdējā nevienādība pareiza, jo $b > a$.

Ja daļai pieskaita negatīvu skaitli gan skaitītājam, gan saucējam, var gadīties, ka iegūst mazāku skaitli, piemēram, ja dota daļa

$$\frac{3}{4}$$

Un skaitītājam un saucējam pieskaitām (-2), tad

$$\frac{3+(-2)}{4+(-2)} = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

6. Ja turnīrā katra no 7 komandām sacentās ar katru citu tieši vienu reizi, tad izspēlēto spēļu skaits bija 42 spēles.

Nepatiess. Kopējais izspēlēto spēļu skaits bija

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

7. Ja veselu skaitli dala ar vienu pusi, tad dalījums ir divas reizes lielāks par šo skaitli.

Patiess

Aleksandrs: "Jo dalīt ar 1/2 ir tas pats kā reizināt uz 2."

8. Anete zem spilvena paslēpa konfekti. Kāds cits konfekti apēda. Anete jautāja, kurš paņēmis konfekti?

a) Alberts teica, ka Alfrēds, bet Alfrēds teica, ka Alberts. Tātad viens no viņiem melo;
b) Alberts teica, tas nebiju es; Alfrēds teica, tas nebiju es. Tātad viens no viņiem melo.

a) *Patiess*. Ja, piemēram, Alberts apēda konfekti, tad viņš melo. Ja konfekti apēda kāds trešais (jo uzdevumā nav teikts, ka konfekti apēda Alberts vai Alfrēds), tad melo abi divi.

Gadījumu skaidro Emīls: "Konfekte tomēr bija paņemta, tātad kaut kas tomēr to paņēma. Kā arī kaut kas to apēda, jo viens no viņiem vainu saprot un pārmet uz citu."

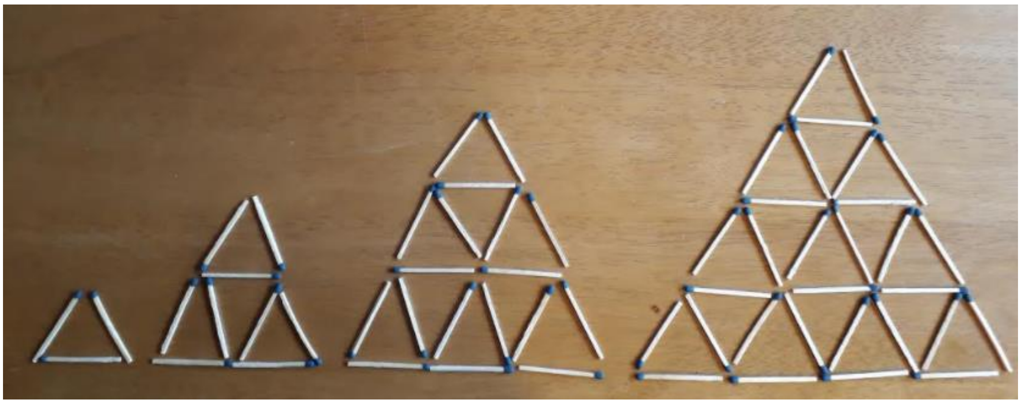
b) *Nenoteikts*. Ja, piemēram, Alberts ir apēdis konfekti, tad viņš melo. Ja konfekti apēdis kāds trešais, tad abi zēni saka patiesību.

Gadījumu skaidro Rafaels: "Iespējams, ka viens no viņiem melo, bet nav teikts, ka tiešām - ne Alfrēds, ne Alberts nav apēdis konfekti - to ir apēdis kāds pavisam cits bērns. Tāpēc domāju, ka šis apgalvojuma patiesums, vai nepatiesums ir nenoteikts."

Punktiņš. Trijstūru konstrukcijas
13.11.2020

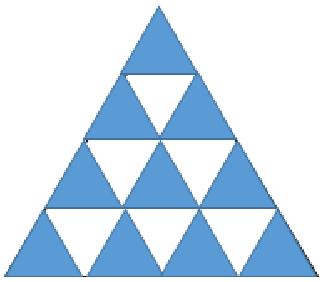
Atrisinājumi

Punktiņš no sērkociņiem salika vairākas figūras, kas sastāv no maziem trijstūrīšiem:



1. Cik sērkociņu ir desmitajā figūrā?

Atrisinājums. Ievērosim, ka pirmajā figūrā ir 3 sērkociņi. Otrā figūrā papildus konstruēti vēl 2 trijstūrīši apakšējā rindā (skaitām tos trijstūrīšus, kuri vērsti ar virsotni uz augšu, skat. zīmējumu 1, kurā attēlota ceturtā figūra, tie ir trijstūrīši zilā krāsā). Kopumā otrajā figūrā ir 4 trijstūrīši – 3 ar virsotni uz augšu, centrā viens ar virsotni uz leju. Izmantoto sērkociņu skaits ir $3 + 2 \cdot 3 = 9$.



Zīmējums 1.

Trešā figūra iegūta, to papildinot ar vēl 3 trijstūrīšiem. Sērkociņu skaits figūrā ir $9 + 3 \cdot 3 = 18$. Tā katra nākamā figūra tiek iegūta, papildinot iepriekšējo figūru ar vēl vienu trijstūrīšu rindu. Desmitajai figūrai apakšējā rindā ir pievienoti 10 trijstūrīši. Šajā figūrā ir $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ trijstūrīši, kuri vērsti ar virsotni uz augšu. Tad desmitajā figūrā ir $55 \cdot 3 = 165$ sērkociņi.

2. Kāda ir sērkociņu aprēķināšanas formula, lai varētu aprēķināt jebkurai šīs virknes figūrai izmantoto sērkociņu skaitu?

Atrisinājums. Izkrāsosim figūru līdzīgi kā šaha dēlīti (skat. zīm. 1). Ievērosim, ka katrai figūrai apakšējās rindas zilo trijstūrīšu skaits sakrīt ar figūras kārtas numuru. Piemēram, ceturtajai figūrai apakšējā rindā ir 4 zilie trijstūrīši. Trijstūrīšu skaits katrā rindā veido naturālu skaitļu virkni. Skaitot no augšējās rindas, zilo trijstūrīšu skaits figūrā ir $1+2+3+\cdots$. Figūrai ar kārtas numuru *n*, zilo trijstūrīšu skaits ir

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Katra zilā trijstūrīša konstruēšanai nepieciešami 3 sērkociņi. *n*-tās figūras sērkociņu skaita *s* aprēķināšanas formula ir

$$s=\frac{3n(n+1)}{2}$$

Komentārs. Naturālo skaitļu saskaitīšanas formulu var iegūt sekojošā veidā – pieraksta visus naturālos skaitļu no 1 līdz *n*, otrā rindā pieraksta tos pašus naturālos skaitļus otrādā secībā:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3\ldots.. & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2\ldots. & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Tad saskaita skaitļu summu katrā pārī, tā ir (1+ *n*), (2 + *n* – 1) = *n* + 1, … Visos pāros skaitļu summa ir *n* + 1. Pāru skaits ir *n*, tad visu skaitļu kopējā summa ir $n\cdot(n+1)$. Bet te katrs naturālais skaitlis ir pieskaitīts 2 reizes. Tāpēc *n* naturālu skaitļu virknes summa ir

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

3. Vai septīto figūru var izjaukt un no šiem sērkociņiem salikt divas mazākas figūras?

Atrisinājums. Aprēķināsim sērkociņu skaitu septītajā figūrā:

$$s=\frac{3n(n+1)}{2}=\frac{3\cdot 7(7+1)}{2}=84$$

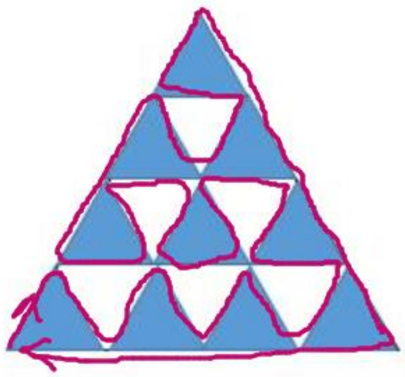
Uzrakstīsim visus sērkociņu skaitus, kas nepieciešami pirmās, otrās, trešās un visu pārējo figūru salikšanai līdz pat septītajai figūrai:

Figūras	Pirmā	Otrā	Trešā	Ceturtā	Piektā	Sestā	Septītā
Sērkociņi	3	9	18	30	45	63	84

Tagad jautājumu var pārformulēt citādi – vai kādu divu doto skaitļu summa ir 84? Viegli pārbaudīt, ka tabulā divus tādu skaitļus atrast nevar. Var atrast trīs skaitļus, kuru summa ir 84. Izjaucot septīto figūru, no 84 sērkociņiem var salikt pirmo, trešo un sesto figūru.

4. Skudriņa rāpo pa ceturtā trijstūra sērkociņiem. Vai skudriņa var rāpot tā, lai pārrāpotu katram sērkociņam tieši vienu reizi un nonāktu sākuma punktā, no kura viņa sāka savu ceļu?

Atrisinājums. Jā, var:

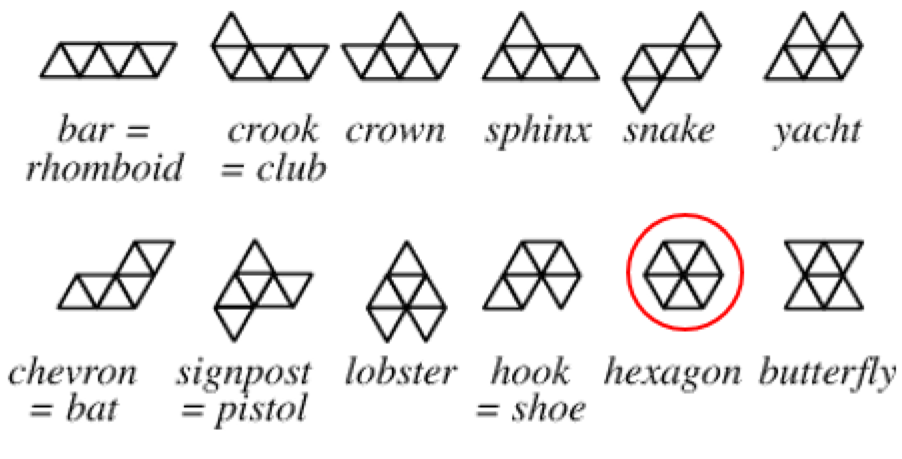


Zīmējums 2.

Mājas darba uzdevumi:

1. Saliec no 13 sērkociņiem visas iespējamās dažādās figūras, kas sastāv no mazajiem trijstūrīšiem (vajadzēs, protams, vairāk kā 13 sērkociņu, lai tās saliktu). Cik tādu ir? Uzzīmē vai nofotografē tās!

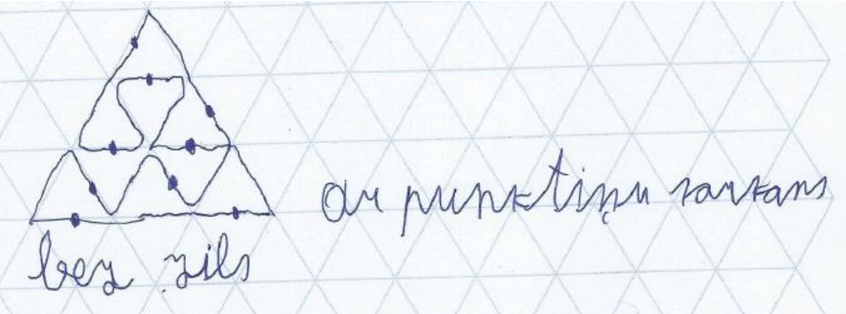
Atrisinājums. No 13 sērkociņiem var salikt 11 figūras, kuras sastāv no mazajiem trijstūrīšiem. Der tikai tādas figūras, kur katram trijstūrītim ir vismaz viena kopīga mala ar citu trijstūrīti. Par dažādām figūrām uzskatīsim tādas, kuras nevar vienu no otras iegūt tās pagriežot vai apgriežot (kā spoguļattēlu). Plašāk šādas figūras ir pazīstamas kā *poliamondi*. Izmantojot 13 sērkociņus, var izveidot figūras, kas sastāv no 6 trijstūrīšiem. Tādas sauc par *heksiamondiem*. Tās ir tik populāras, ka figūrām pat piešķirti nosaukumi. Vienīgā figūra, kas atšķiras, ir sešstūris no sešiem trijstūriem un 12 sērkociņiem (attēlā apvilkta ar sarkanu apli).



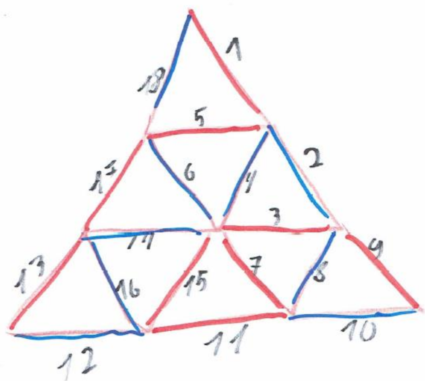
Zīmējums 3

2. Skudriņa rāpoja pa attēlā redzamo ceturto trijstūri un vienlaikus krāsoja sērkociņus – vienu sarkanu, otru zilu, sarkanu, zilu, …. Viņa pārrāpoja visiem sērkociņiem, katram tieši vienu reizi. Izrādījās, ka vienam trijstūrītim visas malas vienā krāsā. Vai skudriņa var rāpot tā, lai katram mazajam trijstūrītim viena mala ir atšķirīgā krāsā?

Kārļa atrisinājums



Aleksandra atrisinājums



3. Nodarbības pirmajā uzdevumā runājām par desmito figūru. No cik mazajiem trijstūrīšiem tā sastāv? Iedomāsimies, ka tā ir uzzīmēta uz papīra. Kāds ir lielākais rombu skaits, ko var izgriezt no šīs figūras? Kāpēc tas ir lielākais skaits? (Rombs sastāv no diviem blakusesošiem trijstūrīšiem.)

Atrisinājums. Apskatīsim pirmo zīmējumu, kur trijstūrīši izkrāsoti divās krāsās. Ievērosim, ka katrā rindā balto trijstūrīšu skaits ir par 1 mazāks, nekā zilo trijstūrīšu skaits. Kopējo trijstūrīšu skaitu aprēķināsim, ievērojot nodarbības otrajā uzdevumā atrasto formulu zilo trijstūrīšu skaita aprēķināšanai. Desmitās figūras trijstūrīšu skaits ir

$$\frac{(10+1)\cdot 10}{2}+\frac{(9+1)\cdot 9}{2}=55+45=100$$

Vislielākais rombu skaits, ko var izgriezt no trijstūra, būs tad, ja izgriezīsim vismazākos rombus. Mazākais rombs sastāv no diviem trijstūrīšiem – balta un zila. Desmitajā figūrā ir tikai 45 baltie trijstūrīši. Tāpēc vairāk kā 45 rombus izgriezt nevar.

Punktiņš. Saskaitīsim dažādos veidos
6.11.2020

Atrisinājumi

1. Doti skaitļi 5, 6, 7, 8, 9, 10. Vai vari šos skaitļus ierakstīt trijstūra virsotnēs un pie malām tā, lai katras malas skaitlis ir malas blakusesošo virsotņu summas puse?

Atrisinājums. Lai varētu izvietot visus naturālus skaitļus, virsotnēs var ierakstīt tikai vienādas paritātes skaitļus. No šiem nekādu divu skaitļu summas puse nav vienāda ar 10. Nekādu divu doto skaitļu summas puse nav vienāda ar 5.

Izvietot dotos skaitļus prasītajā veidā nevar.

2. Rindā nostājušās 10 meitenes un 10 zēni. Katrs zēns saskaita bērnus pa labi no viņa un katra meitene saskaita bērnus pa kreisi no viņas. Paskaidro, kāpēc summa no visu zēnu saskaitītajiem bērniem un summa no visu meiteņu saskaitītajiem bērniem ir vienādas!

Atrisinājuma ideja. Ja kāda meitene rindā stāv pa labi no zēna, tad zēns stāv pa kreisi no meitenes. Viņi abi viens otru pieskaita saskaitāmo bērnu skaitam.

3. Susurs paņēma 10 kartiņas un katras kartiņas visos 4 stūros uzrakstīja pa vienam skaitlim no 1 līdz 4 kaut kādā secībā. Mija visas kartiņas salika glītā kaudzītē. Viņa sasummēja visus skaitļus, kas atradās visu kartiņu vienā stūrī, tad visus skaitļus, kas atradās kartiņu otrā stūrī, tāpat trešā un ceturtā. Vai varēja gadīties, ka visas četras summas ir 24? Vai varēja gadīties, ka visas summas ir vienādas?

Atrisinājums. Ja visos stūros skaitļu summa ir 24, tad uz visām kartiņām kopējā skaitļus summa būtu 96. Bet uz katras vienas kartiņas visu skaitļu summa ir $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Kopējā skaitļu summa uz visām 10 kartiņām ir 100. Tātad prasītais nav iespējams.

Varēja gadīties, ka visas summas ir vienādas ar 25. Piemēram, ja kartiņas viena virs otras atradās šādi (izrakstām skaitļus, kas atrodas stūros, vienā rindiņā):

1, 2, 3, 4

4, 3, 2, 1

1, 2, 3, 4

4, 3, 2, 1

1, 2, 3, 4

4, 3, 2, 1

1, 2, 3, 4

4, 3, 2, 1

1, 2, 3, 4

4, 3, 2, 1

4. Pie finanšu konsultanta kabineta durvīm rindā ir 12 tukši krēsli. Ik pēc brīža atnāk kāds apmeklētājs un apsēžas. Tai pašā brīdī viens no viņa kaimiņiem (ja tāds ir) pieceļas un aiziet. Kāds lielākais apmeklētāju skaits var sēdēt rindā?

Atrisinājums. Vienlaikus rindā var sēdēt 11 apmeklētāji. Tas var būt noticis tā: atnāk pirmais apmeklētājs un apsēžas pirmajā krēslā, otrais apmeklētājs apsēžas trešajā krēslā. Tad trešais apmeklētājs apsēžas otrajā krēslā un otrais apmeklētājs aiziet, tas ir, atbrīvo trešo krēslu. Tā process turpinās. Nākamais apmeklētājs apsēžas vienu krēslu izlaižot. Vēl nākamais apsēžas brīvajā krēslā starp diviem cilvēkiem. Pēdējais no rindas aiziet. Priekšpēdējā situācijā ir cilvēki 10 vietās pēc kārtas un vēl viens divpadsmitajā krēslā. Var atnākt vēl viens apmeklētājs, bet tad viens no blakussēdētājiem aizies.

Mājas darbs.

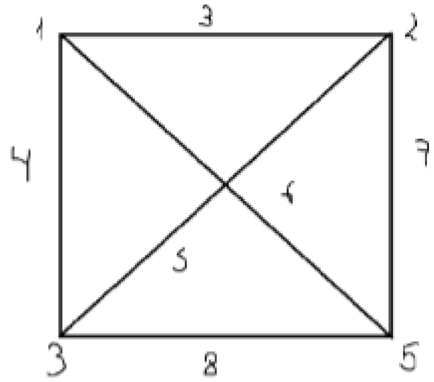
1. Dots kvadrāts, kurā novilktas arī diagonāles. Katrā kvadrāta virsotnē ierakstīja naturālu skaitli, visus dažādus. Katrai malai un diagonālei pierakstīja blakus esošo virsotņu skaitļu summu. Tad skaitļus virsotnēs nodzēsa, bet skaitļus pie visām malām un diagonālēm saskaitīja. To summa bija 33. Vai vari pateikt, kādi skaitļi bija ierakstīti kvadrāta virsotnēs?

Atrisinājums. Ja skaitlim 33 pieskaita arī tos 4 skaitļus, kuri ierakstīti virsotnēs, tad šo skaitļu kopējai summai ir jādalās ar 4. Katrs virsotnes skaitlis tiek ieskaitīts arī pie 3 līnijām (divām malām un diagonāles).

Ja sešu skaitļu summa ir 33, tad vidējā skaitļu vērtība ir 5,5. Kā summas pie līnijām varētu būt izmantoti skaitļi 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ja virsotnēs ierakstīti dažādi naturāli skaitļi, tad vienīgais veids, kā izveidot summu 3 ir $1 + 2$, bet $4 = 1 + 3$. Ievērojot iepriekšējo spriedumu, ceturtais skaitlis virsotnē nevar būt 4, jo skaitlis $33 + 1 + 2 + 3 + 4 = 43$, tas nedalās ar 4. Ceturtais skaitlis varētu būt 5.

Vai varētu būt citu sešu skaitļu summa 33? Tādi varianti ir 4, 4, 5, 6, 7, 7 vai 4, 5, 5, 6, 6, 7, vai 3, 5, 5, 6, 7, 7, vai 5, 5, 5, 6, 6, 6. Skaitli 4 kā divu dažādu naturālu skaitļu summu var izteikt tikai vienā veidā, tāpēc pirmais variants neder. Skaitli 5 var izteikt divos dažādos veidos kā naturālu skaitļu summu, bet tas nozīmē, ka virsotnēs būtu jāieraksta skaitļi 1, 2, 3, 4. Šādu variantu jau apskatījām. Līdz ar to virknē trīs skaitļi 5 arī nevar būt. Atrastais ir vienīgais risinājums.

Emīla risinājums:



2. Uz katras no trijstūrveida lapiņām katrā no stūriem ierakstīja vienu no skaitļiem 1, 2 un 4. Tad lapiņas salika vienu virs otras. Visus vienā lapiņu stūrī esošos skaitļus saskaitīja. Vai var gadīties, ka visas trīs summas ir vienādas ar 55?

Atrisinājums. Nē, nevar gadīties. Ja katrā lapiņu vienā stūrī saskaitīto skaitļu suma būtu 55, tad visu skaitļu kopējā summa būtu 165. Uz katras lapiņas skaitļu summa ir 7. Tas nozīmē, ka visu skaitļu summa dalīsies ar 7. Bet 165 ar 7 nedalās.

3. Rindā pie zobārstu kabineta stāv 10 bērni – 5 zēni un 5 meitenes. Sākot no pulksten 8.00 ik pēc piecām minūtēm kāds bērns rindas kārtībā ieiet zobārstu kabinetā. Tieši pirms atveras kabineta durvis, katrs zēns, aiz kura stāv meitene, palaiž meiteni pa priekšu. Vai tad, kad pagājušas 32 minūtes, rindā vēl ir kāds zēns, aiz kura stāv meitene?

Atrisinājums. Rindā stāvēja 10 bērni. Pulksten 8.30 zobārstu kabinetā iegāja septītais bērns. Trīs bērni palika aiz durvīm. Apskatīsim 10 bērnu rindā esošo pašu pēdējo zēnu. Ja viņš ir pēdējais, tad viņš kabinetā ieies kā pēdējais. Ja aiz viņa stāv kaut viena meitene, tad 5 gājienu laikā viņš būs palaidis garām visas meitenes, cik vien aiz viņa ir stāvējušas. Apskatīsim zēnu, kurš bija priekšpēdējais zēns rindā. Ievērojot, ka katrs zēns, palaiž garām meiteni, kas stāv aiz viņa, sešu gājienu laikā priekšpēdējais no zēniem būs palaidis garām visas meitenes, cik vien aiz viņa bijušas. Tāpat var spriest par trešo zēnu – septiņu gājienu laikā viņš būs palaidis garām visas meitenes. Pulksten 8.32 rindā pie zobārstu kabineta stāv 3 zēni.