Punktiņš. (B Grupa) Skaitļu dalāmības īpašības
10.01.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

Skaitļu dalāmības pazīme ar 7:
Skaitlis dalās ar 7, ja skaitlis, ko iegūst no dotā skaitļa nodzēšot pēdējo ciparu un atņemot no tā dotā skaitļa pēdējo ciparu pareizinātu ar 2, dalās ar 7.

Piemēram, skaitlis 245 dalās ar 7, jo $24 - 2 \cdot 5 = 14 = 2 \cdot 7$

Kā pamatot šo pazīmi? Dots skaitlis $\overline{Ab}$, kura pēdējais cipars ir b, bet tā pirmā daļa A var sastāvēt no vairākiem cipariem. Ir zināms, ka skaitlim piemīt īpašība

$$\bar{A} - 2b = 7n$$

Aplūkosim doto skaitli un pārveidosim to, izmantojot doto īpašību:

$$\overline{Ab} = \bar{A} \cdot 10 + b = (7n + 2b) \cdot 10 + b =$$

$$= 70n + 21b = 7 \cdot (10n + 3b)$$

Redzams, ka dotais skaitlis dalās ar 7.

1. Pārbaudi, vai skaitļi dalās ar 7: 364; 5705; 45031

Atrisinājums.

1) Skaitlis 364 dalās ar 7, jo $36 - 2 \cdot 4 = 28$. Ir izpildīta dalāmības ar 7 īpašība.

2) Skaitlis 5705 dalās ar 7, jo $570 - 2 \cdot 5 = 560$ un skaitlis 560 dalās ar 7.

3) Skaitlis 45031 arī dalās ar 7. To pamato, vairākas reizes pielietojot dalāmības īpašību:

$$4530 - 2 = 4528$$

$$452 - 16 = 436$$

$$43 - 12 = 21$$

Rezultāts 21 dalās ar 7 tāpēc dotais skaitlis 45031 arī dalās ar 7.

2. Vai skaitlis 205527 dalās ar 21?

Atrisinājums. Ja skaitlis dalās ar 21, tad tas dalās gan ar 3, gan ar 7, jo $21 = 3 \cdot 7$. Dotais skaitlis dalās ar 3, jo tā ciparu summa 21 dalās ar 3. Dotais skaitlis dalās arī ar 7 saskaņā ar dalāmības pazīmi, jo

$$20552 - 14 = 20538$$

$$2053 - 16 = 2037$$

$$203 - 14 = 189$$

Skaitlis 189 dalās ar 7, jo 189:7 = 27, tāpēc dotais skaitlis 205527 dalās ar 21.

3. Pamato, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ dalās ar 7, ja $2a + 3b + c$ dalās ar 7!

Atrisinājums. Doto skaitli $\overline{abc}$ apzīmēsim ar *A*, bet izteiksmi $2a + 3b + c$ apzīmēsim ar *B*. Apskatīsim starpību *A* – *B*. Ja šī starpība dalās ar 7, tad arī skaitlis *A* dalās ar 7. Izteiksim skaitli *A* decimālajā pierakstā un veiksim pārveidojumus:

$$A - B = \overline{abc} - B = 100a + 20b + c - 2a - 3b - c =$$

$$= 98a + 7b = 7 \cdot (14a + b)$$

Ieguvām, ka starpība *A* – *B* dalās ar 7, tāpēc arī dotais skaitlis $A = \overline{abc}$ dalās ar 7.

4. Atrodi tādu lielāko 5 – ciparu skaitli, kas dalās gan ar 5, gan 7! Atrodi arī tādu sešciparu skaitli!

Atrisinājums. Lielākais piecciparu skaitlis ir 99999, bet tas nedalās ne ar 5, ne ar 7. Aplūkojam lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 5. Tas ir skaitlis 99995. Pārbaudām, ka tas dalās ar 7. Lielākais piecciparu skaitlis, kas dalās ar 35, ir atrasts.

Līdzīgi var aplūkot lielāko sešciparu skaitli 999999, kas dalās ar 7, bet nedalās ar 5. Tātad jāatņem tāds mazākais skaitlis, kas dalās ar 7 un beidzas ar 4 (jo 9 – 4 = 5) vai beidzas ar 9. No skaitļa 999999 jāatņem 14 vai 49, tad rezultāts dalīsies ar 35. Lielākais skaitlis, kas dalās ar 35 ir 999985.

5. Četrciparu skaitļa ciparu summa ir 14. Zināms, ka divu vidējo ciparu summa ir 9, bet tūkstošu cipars mīnus vienu cipars ir 1, un skaitlis dalās ar 11. Kāds ir šis skaitlis?

Atrisinājums. Saskaņā ar uzdevuma noteikumiem pirmais skaitļa cipars ir 3, bet pēdējais ir 2. Var secināt, ka dalot skaitli ar 11, iegūst trīsciparu skaitli, kura pirmais cipars ir 3, bet pēdējais ir 2. Tad doto skaitli var izteikt $\overline{3(3+n)(2+n)2} : 11 = \overline{3n2}$

Zināms, ka 3 +*n* + 2 + *n* = 9, tāpēc *n* = 2 un dotais skaitlis ir 3542.

6. Pierādi, ka skaitlis, kas sastāv no 27 vieniniekiem, dalās ar 27!

Piezīme. Te jāsaprot, ka, ja skaitļa ciparu summa ir 27, tas vēl nenozīmē, ka skaitlis dalās ar 27. (Atrodi tādu piemēru, kur skaitļa ciparu summa ir 27, bet pats skaitlis ar 27 nedalās!)

Atrisinājums. Jāpierāda, ka skaitlis dalās ar 9 un skaitļa dalījums ar 9 dalās arī ar 3. Aplūkojam mazāku skaitli, kas sastāv no deviņiem vieniniekiem un dalām to ar 9:

$$111111111 : 9 = 12345679$$

Rezultāts nedalās ar 3, jo dalījuma ciparu summa ir 37. Dotajam skaitlim ir trīs tādas vieninieku grupas, tāpēc visa dotā skaitļa dalījums satur katru no iegūtā dalījuma cipariem 3 reizes. (Dotā skaitļa dalījums satur 3 grupas ar skaitļiem 12345679, kur pa vidu starp blakus esošām grupām ir nulle.) Dotā 27 ciparu skaitļa dalījuma ar 9 ciparu summa ir $3 \cdot 37$, tāpēc tas dalās ar 3 un viss dotais skaitlis dalās ar 27.

7. Atrodi tādu skaitli, kuru reizinot pašu ar sevi, iegūst skaitli, kas beidzas ar 444! Pamato, ka šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz!

Piezīme. Skaitļa reizinājums pašam ar sevi tiek saukts par <u>skaitļa kvadrātu</u> $a \cdot a = a^2$

Atrisinājums. Meklētais skaitlis varētu būt divciparu skaitlis, kas beidzas ar 2 vai 8. Apskatīsim skaitli $\overline{a2} = 10a + 2$.

Skaitļa kvadrāts ir $(10a + 2) \cdot (10a + 2) = 100a^2 + 40a + 4$

Lai kvadrāta otrais cipars no beigām ir 4, ciparam a ir jābūt 1 vai 6. Aprēķināsim skaitļu kvadrātus $12 \cdot 12 = 144$; $62 \cdot 62 = 3844$. Neviens no abiem skaitļiem neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Apskatīsim skaitli $10a + 8$. Tā kvadrāts ir

$$(10a + 8) \cdot (10a + 8) = 100a^2 + 16a + 64$$

Lai otrais cipars no beigām būtu 4, ir jāizpildās $6a + 6 = \overline{b4}$.

Tas iespējams, ja $a = 3$ vai $a = 8$ ($6+18 = 24$; $6 + 46 = 54$). Pārbaudām abus skaitļus

$$38 \cdot 38 = 1444; \quad 88 \cdot 88 = 7744$$

No šiem abiem derīgs skaitlis ir 38.

Vai var atrast arī citus skaitļus ar minēto īpašību? Te aplūkojām visas iespējas starp divciparu skaitļiem. Var atrast skaitļus, kuri ir lielāki. Tie būs formā

$$\overline{Ab12}; \ \overline{Ab62}; \ \overline{Ab38}; \ \overline{Ab88}$$

Aplūkosim vienu piemēru no šiem un tā kvadrātu:

$$\overline{Ab38} \cdot \overline{Ab38} = \bar{A}^2 \cdot 1000 \cdot 1000 + 2\bar{A} \cdot \overline{b38} \cdot 1000 + \overline{b38}^2$$

Pirmie divi saskaitāmie neietekmē pēdējos 3 ciparus, no kā var secināt, ka skaitļa sākums $\bar{A}$ var būt jebkura ciparu virkne. Sīkāk aplūkosim pēdējo saskaitāmo:

$$\overline{b38} \cdot \overline{b38} = 100 \cdot 100b^2 + 76 \cdot 100b + 1444$$

Lai trešais cipars no beigām būtu 4, ir jāizpildās

$$6b + 4 = \overline{c4}$$

Tas iespējams tad, ja $b = 0$ vai $b = 5$. Pārbaudīsim skaitli 538

$$538 \cdot 538 = 289444$$

Dotā uzdevuma nosacījumiem atbilst jebkurš skaitlis, kas beidzas ar 038 vai 538. Ir atrodami arī citi skaitļi (te aplūkojām vienu no 4 iespējām).

Punktiņš. (B grupa) Konstrukcijas no kubiem

17.01.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. **Bloks ir taisnstūra paralēlskaldnis, kas salikts no vienādiem kubiem. Cik dažāda veida blokus var izveidot no 36 kubiem?**

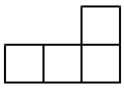
Atrisinājums. Uzdevuma risinājumā izmanto skaitļa 36 visus iespējamos sadalījumus trīs skaitļu reizinājumā:

$$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4$$

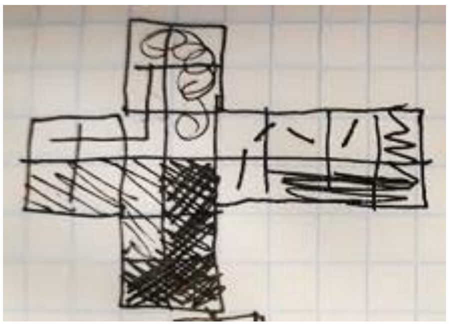
Kopumā no 36 kubiem var salikt 8 dažādus paralēlskaldņus.

2. Kuba katra skaldne sadalīta 4 vienādās kvadrātiskās rūtiņās. Vai kuba virsmu var pilnībā aplīmēt ar sešām tādām figūrām, kāda parādīta zīmējumā?



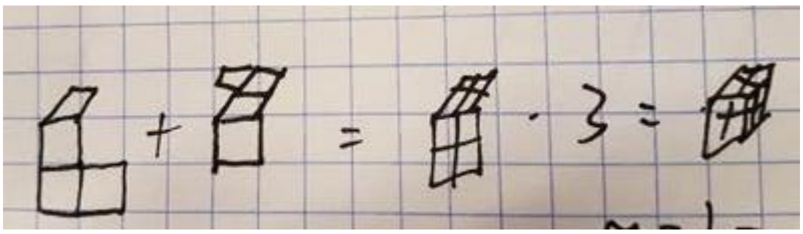
Skolēnu atrisinājumi:

1. *atrisinājums*



Te izveidots kuba izklājums, kur ar dažāda veida iesvītrojumu parādīts kā aplīmēt kuba virsmu.

2. *atrisinājums*.



Te parādīts, kā aplīmēt divas blakus esošas skaldnes. Uz kuba virsmas ir 3 tādi pāri:

3.atrisinājuma komentārs – var parādīt, ka iespējams aplīmēt 3 redzamās skaldnes, tad tādā pašā veidā var aplīmēt arī 3 atlikušās skaldnes.

3. No kubiņiem ir izveidota sekojoša konstrukcija: vispirms kubus salīmē pāros pa divi, tad salīmē šos pārus tā, lai katrs kubiņš ir salīmēts ne vairāk kā ar diviem citiem kubiņiem un nesalīmētās skaldnes nesaskaras ar citu kubiņu skaldnēm. Kādu visgarāko konstrukciju tu vari izveidot, lai to var ielikt kastē ar izmēru 4 x 4 x 4?

Komentārs. Uzdevums domāts kā telpiskās iztēles vingrinājums. Risinājumu var attēlot pa slāņiem. Jāņem vērā, ka blakus esošos slāņos divi bloki 1 x 1 x 2 nevar atrasties viens virs otra. Var salikt vismaz 15 šādus blokus.

4. Kastīti var aplīmēt ar 72 vienības kvadrātiņiem. Kādi ir kastītes izmēri?

Komentārs. Uzdevums līdzīgs pirmajam šīs nodarbības uzdevumam, tomēr jābūt uzmanīgiem – paralēlskaldņa virsmas laukumu aprēķina citādi.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka kastītes izmēri ir $a \cdot b \cdot c$. Tad tās virsmas laukumu var aprēķināt

$$2ab + 2ac + 2bc = 72 \quad \text{jeb} \quad ab + ac + bc = 36$$

Skaitlis 36 ir triju saliktu skaitļu summa. Aplūkosim gadījumus:

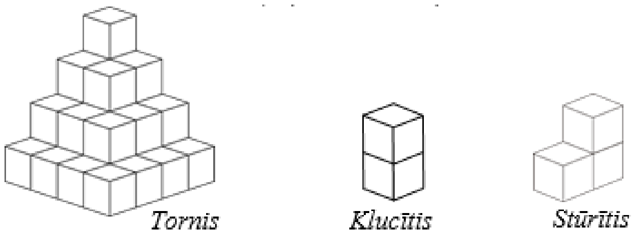
1) Vai var gadīties, ka visi 3 skaitļi *a*, *b* un *c* ir vienādi? Tad
$$a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 = 36$$
$$a^2 = 12$$
No kurienes seko, ka *a* nav vesels skaitlis.
2) Vai var gadīties, ka divi skaitļi ir vienādi? Piemēram *a* = *c*, tad
$$ab + ab + a^2 = 36$$
$$a(2b + a) = 36$$
Abi reizinātāji *a* un *2b* + *a* ir pārskaitļi (pamato, kāpēc!). Apskatām skaitļa 36 sadalījumu reizinātājos, kur vienīgais iespējamais divu pārskaitļu reizinājums ir 2 · 18 Tātad *a* = *2*, bet *b* = *8*. Te kastītes izmēri ir 2 · 2 · 8.
3) Gadījumā, ja visi 3 skaitļi ir dažādi, var novērtēt, ka izteiksmē $ab + ac + bc = 36$ ir divi nepāra un viens pāra saskaitāmais, vai arī visi 3 saskaitāmie ir pāra skaitļi (pamato!). Pieņemsim, ka izteiksmes
$$a(b + c) + bc = 36$$
saskaitāmais *bc* ir pāra skaitlis. Varam izvēlēties dažādas *bc* vērtības, lai atrisinātu uzdevumu. Piemēram, ja *bc* = 12, tad
$$12 = 2 \cdot 6; \quad a(2 + 6) + 12 = 36, \text{ no kurienes } a = 3.$$
Atrodam, ka kastītes izmērs ir 2 · 3 · 6.
Pavisam ir 17 dažādas reizinājuma *bc* pāra vērtības, kas mazākas par 36. Tās pārbaudot, nonākam pie secinājums, ka vienīgais derīgais atrisinājums ir jau atrasts.

Kopumā ir iespējami divi atrisinājumi – kastītes izmēri ir 2 x 2 x 8 vai 2 x 3 x 6.

5. *Tornis* ir salikts no vienādiem kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1{\times}1{\times}1$: apakšējā slānī ir 16 kubiņi, otrajā slānī ir 9 kubiņi, trešajā slānī 4 kubiņi un augšā – viens kubiņš. Vai šo *torni* var salikt no

a) *klucīšiem* ar izmēru $1{\times}1{\times}2$?

b) *stūrīšiem,* ko veido 3 kubiņi?



Atrisinājums.
a) gadījums. Torņa kubiņus izkrāso pēc šaha dēlīša principa – jebkuri divi kubiņi, kas piegul viens otram ar skaldnēm, ir dažādā krāsā. Saskaitot ievērojam, ka melnu un balto kubiņu skaits atšķiras, tāpēc šādu torni salikt no klucīšiem nav iespējams.
b) gadījumā ir iespējams atrisinājums. Sanumurēsim stūrīšus no 1 līdz 10 (torni var salikt no 30 kubiņiem, tāpēc var izmantot 10 stūrīšus). Attēlosim stūrīšu izvietojumu pa slāņiem:

8	8	4	7
6	8	7	7
6	9	5	10
9	9	10	10

3	3	4
2	3	4
6	5	5

1	1
2	2

1

Punktiņš. (B Grupa) Sakārtosim!

24.01.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Uz galda viena virs otras ir kaudzītē sakārtotas astoņas burtnīcas, kuru vāciņi ir sarkani, zili, balti, melni, oranži, strīpaini, rūtaini un ar fotogrāfiju, skaitot no augšas. Ansis ņem augšējās trīs burtnīcas un noliek kaudzītes apakšā, nemainot to kārtību. Viņš turpina šo darbību vairākas reizes. Tad viņš aizdomājas – kādas krāsas burtnīca būs kaudzītes augšpusē, ja viņš šo darbību atkārtos 117 reizes?

Atrisinājums. Sanumurēsim dažādās burtnīcas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Secīgi kārtojot burtnīcas, pēc 8 gājieniem esam ieguvuši to pašu secību. Tad pēc 117 gājieniem būs tāda pati burtnīcu secība, kā pēc pirmajiem pieciem gājieniem, jo $117 = 8 \cdot 14 + 5$:

$$(1,2,3,4,5,6,7,8) \to (4,5,6,7,8,1,2,3) \to (7,8,1,2,3,4,5,6) \to (2,3,4,5,6,7,8,1)$$
$$\to (5,6,7,8,1,2,3,4) \to (8,1,2,3,4,5,6,7)$$

Kaudzītes augšpusē būs burtnīca ar fotogrāfiju uz vāka.

2. Uz galda viena virs otras secīgi ir saliktas 100g, 200g, 300g, 400 g un 500 g smagas ripas. Atļauts ņemt divas vai trīs augšējās ripas un, nemainot to kārtību, novietot kaudzītes apakšā, vai arī drīkst visu kaudzīti apgriezt otrādi. Vai var pēc dažiem gājieniem panākt sakārtojuma secību 200 g, 300 g, 500 g, 400 g, 100 g?

Atrisinājums. Vienkāršības pēc ripas apzīmēsim 1, 2, 3, 4, 5. Izpildot norādītās darbības, skaitļu cikliskā secība nemainās. Savukārt skaitļu 2, 3, 5, 4, 1 cikliskā secība ir cita, tāpēc šādu sakārtojumu panākt nevar.

Komentārs. Var iztēloties, ka skaitļus 1, 2, 3, 4 un 5 izkārto uz apļa, kuram ir pielikts fiksēts rādītājs. Sākumā tas norāda uz skaitli 1. Ja izpilda darbības ar ripām, piemēram, pārvieto pirmās 3 ripas kaudzītes apakšā (iegūst secību 4, 5, 1, 2, 3), tad analoga darbība ar apli ir pagriezt to, lai rādītājs norāda uz skaitli 4. Kaudzītes apgriešana otrādi atbilst analogai darbībai ar apli – novietot to otrādi. Skaitļu secība uz apļa nemainās.

3. Zane konfektes salika 2 kaudzītēs, bet Fēlikss atnāca un no jauna tās sadalīja 4 kaudzītēs. Pamato, ka starp visām konfektēm ir vismaz 3 tādas konfektes, kuras nonāca kaudzītēs ar mazāku skaitu konfekšu, nekā iepriekš!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka Zane sadalīja konfektes kaudzītēs, kurās konfekšu skaits ir A un B un pieņemsim ka $A \leq B$. Fēlikss konfektes salika kaudzēs ar konfekšu skaitu C, D, E un F. Aplūkosim gadījumus:

Ja $C \leq D \leq E \leq F < A \leq B$, tad tas nozīmē, ka visas konfektes pārvietotas 4 kaudzītēs, kurās visās ir mazāks konfekšu skaits nekā iepriekš. Vismaz 4 konfektes ir nonākušas kaudzītēs ar mazāku konfekšu skaitu.

Ja gadījies, ka $C \geq A$, tad $B \geq E + D + F$. Tas norāda, ka vismaz 3 konfektes nonākušas kaudzītēs ar mazāku konfekšu skaitu. Te iespējami dažādi gadījumi, piemēram, tikai viena kaudzīte sadalīta 3 mazākās kaudzītēs, vai arī abas kaudzītes ir sadalītas vairākās daļās (aplūko dažādās iespējas!)

Ja gadījies $C \geq A$ un $D \geq A$, tad $B \geq E + F$. Seko, ka kaudzītē $B = A + x$ konfektes un tās no kaudzītes B ir nonākušas vismaz 3 dažādās kaudzītēs.

Līdzīgi var spriest, ja konfektes kaudzītēs C, D un E ir ne mazāk kā kaudzītē A, tad konfektes no B kaudzītes tiek sadalītas vismaz trīs citās kaudzītēs

4. No rītiem 13 rūķīši apsēžas ap apaļo galdu kaut kādā secībā. Vai var krēslus nokrāsot trīs dažādās krāsās tā, lai gadītos, ka divas dienas pēc kārtas katrs no rūķiem būtu sēdējis uz divu dažādu krāsu krēsliem?

Atrisinājums. Krēslus nokrāsosim zilā, baltā un sarkanā krāsā. Rūķus apzīmēsim R1, R2, …, R13, bet krāsas apzīmēsim Z, B un S. Tad divu dienu laikā var gadīties šāda situācija:

Krāsa	Z	B	S	Z	B	S	Z	B	S	Z	B	S	Z
1.diena	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13
2.diena	R1	R2	R13	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12

5. Ir pieci burgeri, kas jāuzsilda uz pannas no abām pusēm. Uz vienas pannas vienlaikus var uzlikt ne vairāk kā 3 burgerus. Vienas burgera puses uzsildīšanai vajag 2 minūtes. Kāds ir mazākais laiks, lai to izdarītu?

Atrisinājums.

Visiem burgeriem kopā ir 10 puses, tāpēc to uzsildīšanai mazākais laiks ir 20 minūtes. Ja uz pannas vienlaikus var uzlikt 3 burgerus, tad kopējam sildīšanas laikam ar 6 minūtēm nepietiek. Bet ar 7 minūtēm pietiek, ja burgerus silda sekojošā kārtībā (sanumurēsim burgerus 1, 2, 3, 4, 5):

1.minūte	1	2	3
2.minūte	1	4	5
3.minūte	2	3	4
4.minūte	5	1	2
5.minūte	3	4	1
6.minūte	2	4	5
7.minūte	3	5	

6. Grāmatplauktā ir 8 sējumi, sakārtoti pretējā secībā. Ir atļauts ņemt jebkuras divas blakusesošas grāmatas un, nemainot to secību, tās abas kopā novietot jebkurā vietā šajā grāmatu rindā. Cik gājienos to var izdarīt?

Atrisinājums. Var uzskatīt, ka viena grāmata ir novietota "vietā", tas ir, attiecībā pret šo grāmatu jāpārceļ katra no 7 grāmatām vismaz vienu reizi – nepieciešami vismaz 7 gājieni.

Lai panāktu, ka vismaz divi sējumi ir pēc kārtas, nepieciešami divi gājieni, piemēram, pārceļam 4 un 3 sējumus ai septītā: $(8,7,6,5,4,3,2,1) \rightarrow (8,7,4,3,6,5,2,1)$

Pārceļam 7. un 4. sējumus aiz sestā: $(8,3,6,7,4,2,1)$

Redzams, ka tikai 4 sējumi nav secībā. Tie ir 8., 3, 2. un 1. sējumi. Lai pirmo sējumu noliktu pirmajā vietā (vai arī 8. pēdējā vietā), ir nepieciešami 2 gājieni:

$$(8,3,6,7,4,5,2,1) \rightarrow (6,7,4,5,2,1,8,3) \rightarrow (1,8,6,7,4,5,2,3)$$

Trijos gājienos jau sakārtotos pārus (6, 7), (4, 5), (2, 3) novieto atbilstošās pozīcijās. Kopumā veikti 7 gājieni.