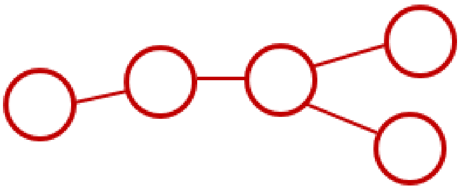
Punktiņš. (A Grupa) “Kukaiņu” aritmētika

3.04. 2020

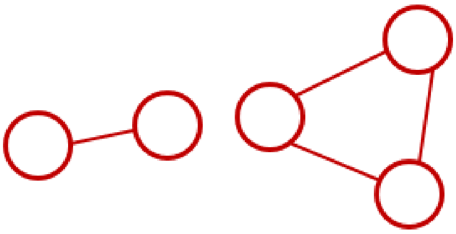
Nodarbības mērķis: netiešā veidā iepazīties ar grafiem – kokiem. Izmantot kombinatoriskas skaitļu īpašības.

1. “Kukainis” ar radziņiem ir attēlots a) piemērā. Tas sastāv no 5 posmiem (aplīšiem) un 4 savienojumiem. Katrā aplītī jāieraksta viens nepāra skaitlis 1, 3, 5, 7 vai 9. Katram savienojumam pieraksta blakusesošo skaitļu starpību, no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Skaitļi jāieraksta tā, lai visas starpības būtu dažādas. Pēc tam tāpat risini arī gadījumus b) un c).

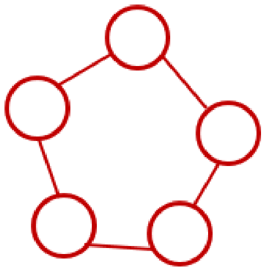
a)



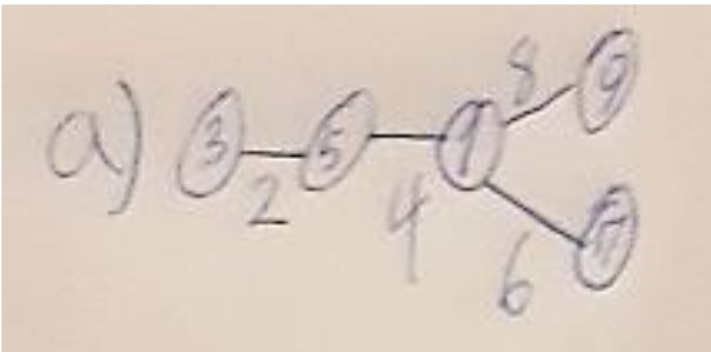
b)



c)



Atrisinājums. Gadījumu a) atrisinājis Kriss:



b) gadījums. Visas dažādās starpības, ko var iegūt no dotajiem skaitļiem ir 2, 4, 6 un 8. Pierakstīsim, kā var iegūt katru no starpībām:

$$8 = 9 - 1$$

$$6 = 9 - 3 = 7 - 1$$

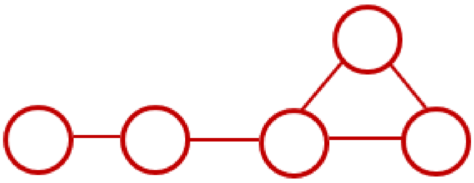
$$4 = 9 - 5 = 7 - 3 = 5 - 1$$

$$2 = 9 - 7 = 7 - 5 = 5 - 3 = 3 - 1$$

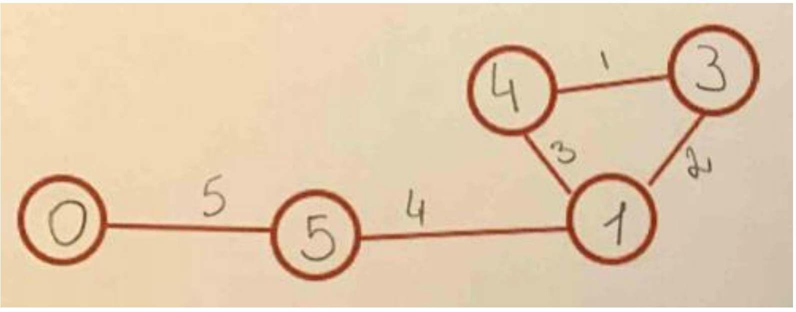
Ir četri savienojumi, tāpēc skaitļi 1 un 9 ir jāieraksta savienotajos aplīšos. Ja ieraksta tos divos atsevišķajos aplīšos, tad "trijstūra" aplīšos jāraksta 3, 5 un 7, bet diviem pāriem no tiem ir starpība 2. Ja 1 un 9 ieraksta "trijstūrī", tad trešais skaitlis, ko tiem pievienot, ir jebkurš no atlikušajiem 3 skaitļiem. Tas nevar būt skaitlis 5, jo 5 veido vienādas starpības ar 1 un 9. Izvēloties skaitli 3, ievērojam, ka 5 un 7, kurus rakstīt divos atsevišķajos aplīšos, veido tādu pašu starpību kā 1 un 3. Līdzīgi var spriest par skaitli 7: 9 – 7 = 5 – 3 = 2. Tāpēc doto uzdevumu izpildīt nav iespējams.

c) gadījums. Dotajam "kukainim" ir 5 savienojumi, bet dotajā uzdevumā ir iespējamas tikai 4 dažādas starpības. Lai kā arī neizvietotu piecus dotos skaitļu, vismaz divas starpības būs vienādas.

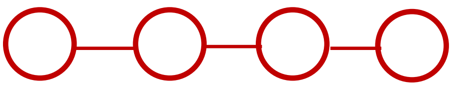
2. Dotajam "kukainim" aplīšos jāieraksta pieci dažādi skaitļi no dotajiem sešiem skaitļiem 0; 1; 2; 3; 4; 5 tā, lai starpības pie savienojumiem būtu visi skaitļi 1, 2, 3, 4, 5.



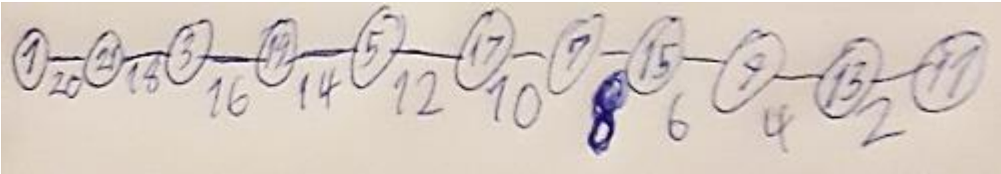
Atrisinājums. Ievērosim, ka uzdevumā prasīto starpību 5 var iegūt tikai vienā veidā 5 = 5 – 0. Ir iespējami vairāki atrisinājumi. Šo piemēru iesūtīja Zane:



3. "Sliekai" ir 11 posmi. Katrā no aplīšiem jāieraksta visi secīgi nepāra skaitļi, sākot no 1; 3; 5; …. Skaitļi jāieraksta kaut kādā secībā tā, lai visas starpības būtu dažādas. Piemērā redzama "slieka", kurai ir 4 posmi.

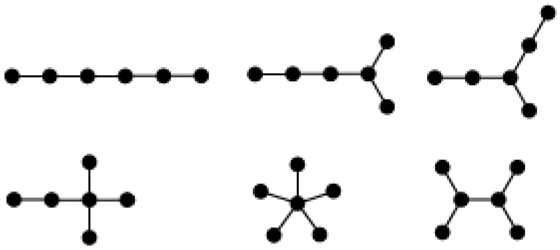


Atrisinājums. "Sliekas" posmus var aizpildīt visai asprātīgā veidā – sākot ar pirmo aplīti katrā otrajā aplītī ierakstām visus secīgus nepāra skaitļus 1, 3, 5, 7, 9, 11, tad pretējā virzienā tukšajos aplīšos pēc kārtas rakstām 13, 15, 17, 19, 21. Izmantojot šo paņēmienu, var aizpildīt jebkura garuma “slieku”. Visas starpības ir dažādas, kā to var redzēt Krisa atrisinājumā:

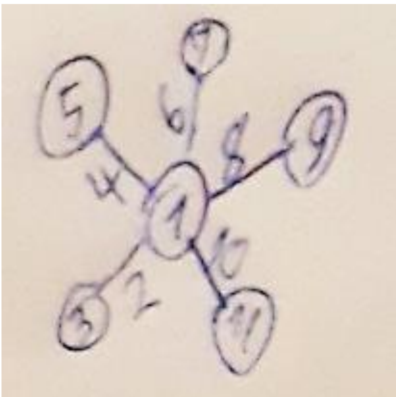


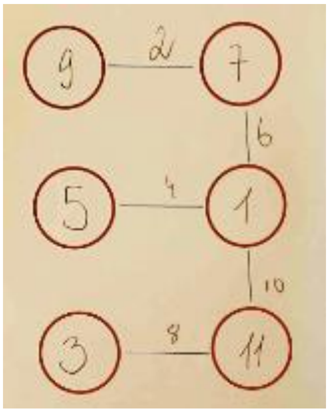
4. Uzzīmē kaut kādas formas “kukaini”, kuram ir 6 posmi (jeb aplīši) un izvieto aplīšos visus skaitļus 1; 3; 5; 7; 9; 11 tā, lai pie savienojumiem visas starpības ir dažādas. Cik veidu “kukaiņu” tu vari izgudrot?

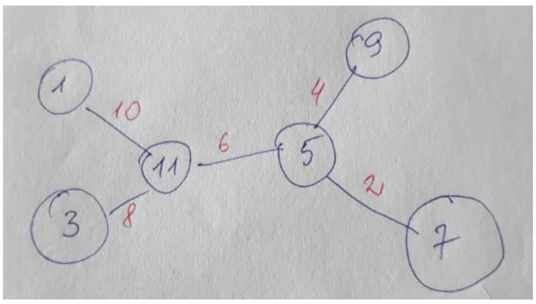
Atrisinājums. Ir sastopami seši “kukaiņu” veidi, kuriem ir seši posmi (te shematisks) zīmējums. Vienkāršākie gadījumi ir “slieka”, ko aplūkojām iepriekšējā gadījumā, un zvaigznīte. Visos no šiem veidiem var izvietot skaitļus saskaņā uzdevumā prasībām.



Te daži piemēri





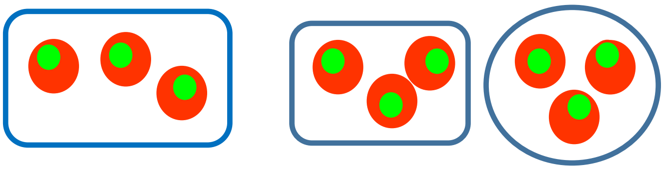


Punktiņa uzdevumi Lieldienām (A Grupa)

9.04.2020

Nodarbības mērķis: aplūkot dažādus atjautības un jautrus uzdevumus; rosināt skolēnu iztēli.

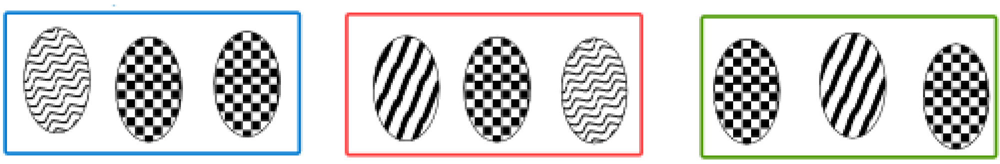
1. Zaķu māmiņa Lieldienām izcepa neaprakstāmi gardās burkānu kūciņas un ielika tās trīs kastītēs katrā pa trim kūciņām:



Zaķis Fiksis, nevaldāmais kārumnieks, iezagās virtuvē un apēda trīs kūciņas. Izrādījās, ka joprojām katrā no 3 kastītēm ir trīs kūciņas. Kā tas var būt?

Atrisinājums. Šis ir atjautības uzdevums. Fiksis apēda kūciņas no lielākās kastītes un tajā ielika vidējo kastīti ar trim kūciņām.

2. Toms, būdams ļoti labi audzināts un pieklājīgs zēns, vēlējās arī savai māmiņai Lieldienās pasniegt nelielu dāvanu – šokolādes olu. Viņš devās uz veikalu, bet izrādījās, ka šokolādes olas ir iepakotas sainīšos pa trim:



Pirmās 3 šokolādes olas maksāja 5.50 eiro, otrās 6 eiro, bet trešās maksāja 5 eiro. "Nekas," teica pārdevēja, "vari nopirkt arī vienu olu." Cik maksāja katra šokolādes ola?

Atrisinājums. Ievērosim, ka pirmajā un pēdējā kastītē ir 2 rūtainās olas, tāpēc varam aprēķināt strīpainās un viļņotās olu cenu starpību

$$5,50 - 5 = 0,50$$

Tātad viļņotā ola ir par 50 centiem dārgāka nekā strīpainā. Tagad ievērosim, ka vidējā kastītē ir visu trīs veidu olas. Saliksim kopā pirmo un pēdējo kastīti. Kopā būs 4 rūtainas, viena strīpaina un viena viļņota ola. To kopējā cena ir 10,50 eiro. Atņemot vidējās kastītes cenu, uzzināsim, cik maksā 3 rūtainās olas

$$10,50 - 6 = 4,50$$

Tad viena rūtainā ola maksā 3 reizes mazāk, tas ir, 1,50 eiro.

Aprēķinām, cik maksā viļņotā ola

$$5,50 - 3 = 2,50 \text{ eiro.}$$

Bet strīpainā ola maksā

$$5 - 3 = 2 \text{ eiro.}$$

3. Lieldienu zaķis krāsoja olas. Katra no tām bija nokrāsota tieši vienā no krāsām – sarkanā, dzeltenā, zilā. Zināms, ka 20% jeb 40 olas bija sarkanas, $\frac{3}{4}$ no atlikušajām bija dzeltenas, bet pārējās – zilas. Cik bija zilo un cik dzelteno olu? Cik procenti no visām olām bija dzeltenās olas?

Atrisinājums. Ja 20% olu jeb viena piektā daļa bija sarkanas, tad visu olu skaits ir piecas reizes lielāks

$$40 \cdot 5 = 200$$

Zilo un dzelteno olu skaits ir 160. Trīs ceturtdaļas no 160 ir dzeltenas, tas ir

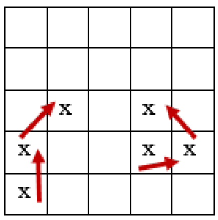
$$\frac{3}{4} \cdot 160 = 120$$

Zilo olu skaits ir 40. Izsakot dzelteno olu skaitu procentos, iegūstam

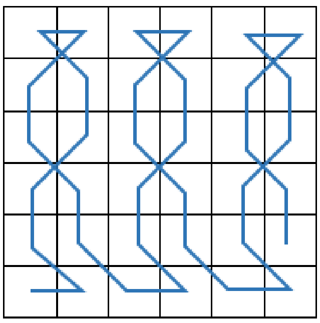
$$\frac{160}{200} = \frac{80}{100} = 80\%$$

4. Ir zināms, ka zaķi skrien cilpām vien, cilpām vien. Zaķis Tibis cilpoja pa rūtiņu kvadrātu. Vienu lēcienu viņš izdarīja uz kaimiņu rūtiņu, ar kuru dotajai rūtiņai bija kopīga mala, bet otru lēcienu uz rūtiņu, kurai ar šo rūtiņu bija tikai kopīgs stūris (skaties piemēru!). Tā viņš cilpoja taisni, slīpi, taisni, slīpi. Katrā rūtiņā Tibis ielēca ne vairāk kā vienu reizi un katrā rūtiņā, kurā viņš bijis, viņš atstāja konfekti. Kāds ir lielākais konfekšu skaits, ko Tibis atstāja rūtiņu kvadrātā, ja kvadrāta izmērs ir 6 x 6 rūtiņas, un Tibis sāka cilpot no kvadrāta apakšējās kreisās rūtiņas?

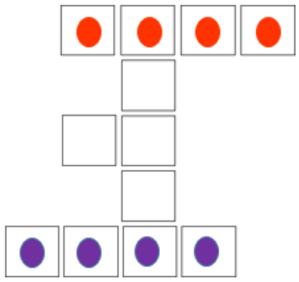
Te parādīti divu iespējamo lēcienu varianti:



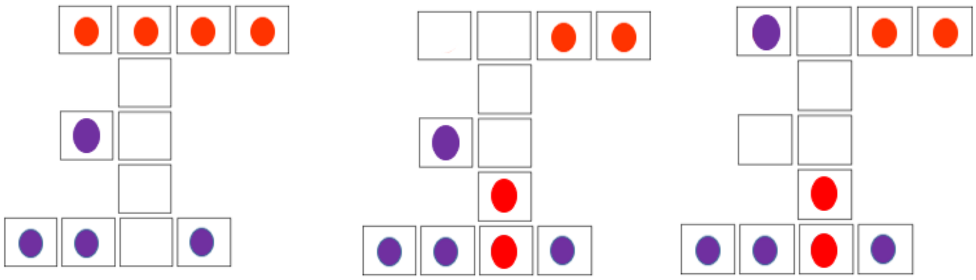
Atrisinājums. Iespējams, ka Tibis atstāja 36 konfektes:



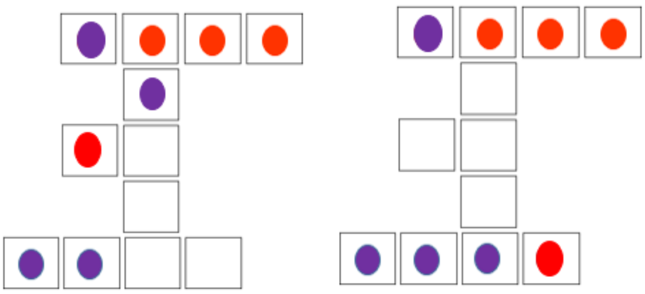
5. Zaķis Zibis krāsoja olas sīpolu mizās, bet zaķis Tibis olas krāsoja melleņu ievārījumā. Zibim izdevās marmorainas, brūnīgas olas, bet Tibim izdevās iegūt mākoņaini violetas olas. Zaķi Tev uzdod šādu uzdevumu (skaties attēlu). Augšējā rindā novietotas 4 sīpolu krāsas olas, bet apakšējā rindā 4 melleņu krāsas olas. Ar ripināšanas palīdzību olas ir jāsamaina vietām – apakšējā ar augšējo rindu. Vienā laika momentā drīkst pārvelt tieši vienu olu uz tukšo blakus kvadrātu.



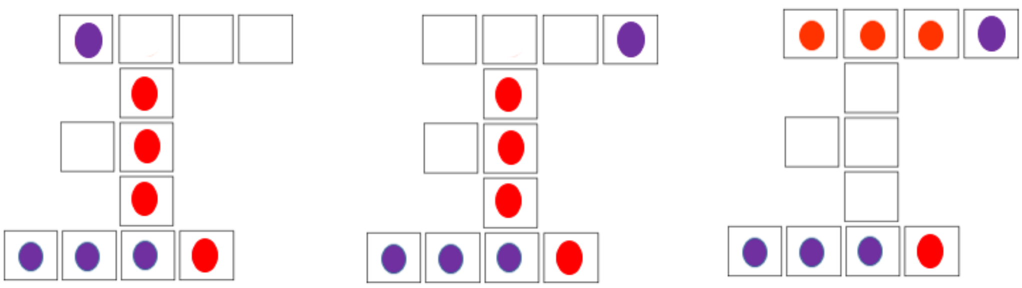
Atrisinājums. Vispirms pārvietosim violeto olu



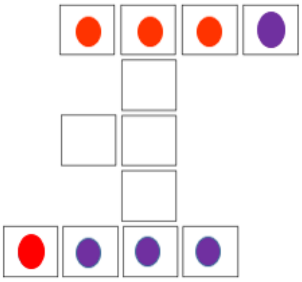
Līdzīgi arī brūno olu pārvietosim uz leju



Tagad pārvietosim violeto olu augšā uz labējo pozīciju



Līdzīgi pārvieto arī apakšējo brūno olu pa kreisi



Tad veic līdzīgus gājienus kā sākumā, līdz visas olas pārvietotas.

Punktiņš. (AGrupa) Samērosim!
17.04.2020

Nodarbības mērķis: nostiprināt zināšanas par lielumu samērošanu. Pielietot kombinatoriskus principus uzdevumu risināšanā.

1. Ķengurēns Kiks sacentās ar zaķēnu Justu tāllēkšanā. Kika lēciens sasniedza 3/8 daļas no pieauguša ķengura lēciena, bet Justa lēciens sasniedza 7/11 no pieauguša zaķa lēciena. Kurš no viņiem aizlēca tālāk, ja pieauguša zaķa lēciens ir 5/7 daļas no pieauguša ķengura lēciena?

Atrisinājums. Lai varētu salīdzināt Kika un Justa lēcienu garumus, nepieciešams ir kopīgs atskaites mērs. Aprēķināsim, kādu daļu no pieaugušā ķengura lēciena izpildīja Justs

$$\frac{7}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{11}$$

Justs veica piecas vienpadsmitās daļas no pieaugušā ķengura lēciena, bet Kiks veica trīs astotās daļas. Lai noteiktu, kurš aizlēca tālāk, jāsalīdzina šie daļskaitļi

$$\frac{3}{8}\ ?\ \frac{5}{11}$$

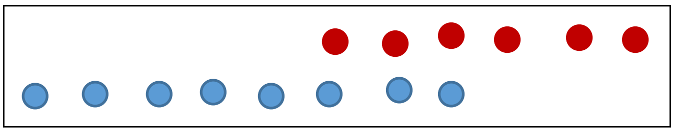
Vienādosim saucējus

$$\frac{33}{88}<\frac{40}{88}$$

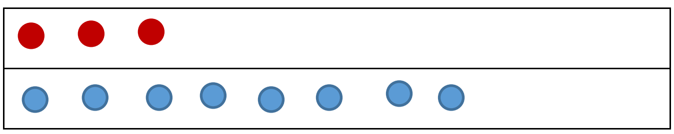
Tā šoreiz gadījās, ka Justs aizlēca tālāk.

2. Divas tūristu grupas bija nonākušas pie trošu tilta pretējās pusēs. Tūristi kāpa uz tilta pa vienam pēc kārtas. Tikai tad, kad vienas grupas 5 tūristi jau bija uz tilta, tiem pretī pa vienam sāka nākt otras grupas tūristi. Tūristi gāja pāri tiltam ar vienādu lēnu ātrumu. Kura grupā ātrāk tika pāri tiltam, ja pirmajā grupa bija 12 tūristi, bet otrajā astoņi?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka divi tūristi var viens otram paiet garām.



Ja viņi visi iet ar vienādu ātrumu, var iztēloties, ka ir divi tilti, kas viens otram ir blakus. Uz pirmā tilta uzkāpuši 5 cilvēki, vēl 7 kāps, bet otrā grupā ir 8 cilvēki. Septiņi pirmās grupas un septiņi otrās grupas cilvēki ies pāri tiltiem vienlaikus.



Otrajā grupā ir astotais tūrists, kas no otrā tilta nokāps pēdējais, kad pirmās grupas cilvēki būs jau nokāpuši no tilta. Tāpēc pirmā grupa tika pāri tiltam ātrāk.

3. Desmit jaunie sportisti nostājās divās rindās – pirmajā rindā tie pieci jaunieši, kuriem bija 13 gadu, bet otrajā rindā tie pieci, kuriem bija 15 gadu. Izrādījās, ka katram otrās rindas sportistam priekšā stāvēja augumā īsāks sportists. Tad pirmās rindas sportisti sastājās rindā pēc auguma un tāpat arī otrās rindas sportisti. Pamato, ka katram otrās rindas jaunietim arī tagad priekšā stāv īsāka auguma jaunietis!

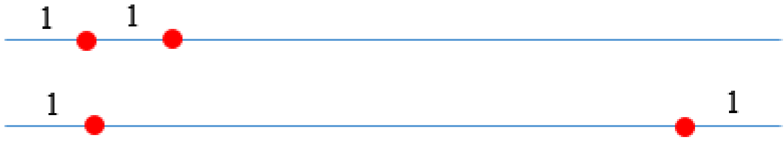
Atrisinājums. Pieņemsim, ka otrajā rindā pēc kārtas stāv sportisti *A, B, C, D, E* bet pirmajā pēc kārtas stāv 13 gadus vecie sportisti *a, b, c, d, e*. Palūgsim, lai otrās rindas jaunieši sastājas rindā pēc auguma un lai viņiem katram līdzi iet arī jaunietis no pirmās rindas. Piemēram, ja sportists *D* otrajā rindā ir garākais, tad viņš nostājas kā pirmais un līdz ar viņu pirmajā rindā pirmais ir sportists *d*. Pieņemsim, ka otrās rindas sportisti jau ir sastājušies rindā pēc auguma prasītajā veidā. Apzīmēsim garāko 15 gadus veco sportistu ar *X*, bet viņa 13 gadus veco pārinieku ar *x*. Tagad palūgsim, lai rindā pēc auguma sastājas arī 13 gadus vecie sportisti. Jebkurš 13 gadus vecais jaunietis ir īsāks par kādu 15 gadus veco jaunieti, kurš nav garāks par garāko otrās rindas sportistu *X*. Tāpēc garākais pirmās rindas sportists, apzīmēsim viņu ar *y*, būs augumā īsāks nekā otrās rindas garākais sportists *X*. Vai var gadīties, ka sportists *x* ir garāks par jebkuru otrās rindas sportistu? Tas var gadīties tikai tad, ja viņš garāks par visiem saviem vienaudžiem pirmajā rindā un tad viņš ir pirmais un savu vietu nav mainījis (tad $x = y$). Līdzīgi spriež par atlikušajiem gadījumiem.

4. Laurim ir 8 centu monētas, bet Almai ir 10 monētas. Vai noteikti Almai ir vairāk naudas nekā Laurim, ja viņiem katram naudas vērtība mazāka kā 50 centi?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka Almai ir vislielākā iespējamā naudas summa, tas ir, 49 centi. Tas ir iespējams, viņai var būt monētas 20, 20, 2 centu vērtībā un 7 monētas pa 1 centam. Vai Laurim noteikti ir mazāk naudas? Vai no 8 monētām var sastādīt naudas summu 49 centi? Var gan, ja Laurim ir 20, 20 un 3 monētas pa 2 centi un 3 monētas pa 1 centam. Tātad ne noteikti Almai ir lielāka naudas summa.

5. Uz 13 cm garas aukliņas ir jāatliek 4 punkti tā, lai ar aukliņu var nomērīt jebkuru veselu centimetru garumu no 1 līdz 12. Mērot, aukliņu drīkst pielikt tikai vienu reizi.

Atrisinājums. Lai varētu nomērīt 12 centimetrus, viens centimetrs noteikti ir jāatliek aukliņas galā. Lai varētu atlikt 11 cm, diviem centimetriem jābūt aukliņas galā. To var izdarīt divos veidos:

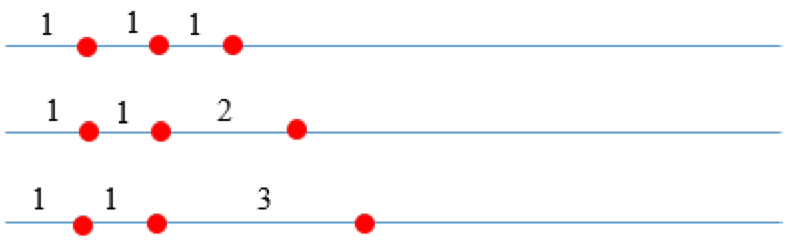


Aplūkosim skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ja uz aukliņas, skaitot no viena gala, ir iespējams nomērīt minēto skaitu centimetru, tad aukliņas otrā pusē ir otra daļa nepieciešamo mērvienību:

$$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$$

Aplūkojot divus iepriekšējos variantus, jāsecina, ka otrais gadījums ir simetrisks, ar to var atlikt 1, 12 un 11 cm. Bet Ar pirmo aukliņu var atlikt 1, 2, 12 un 11 cm, tātad vairāk iespēju, tāpēc turpmāk aplūkosim pirmo variantu.

Lai varētu atlikt 3 un 10 cm, var pievienot nogriezni garumā 1 vai nogriezni garumā 2, vai nogriezni garumā 3 cm.



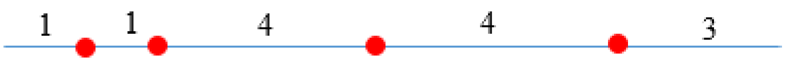
Visizdevīgākais ir trešais variants, jo ar šādu aukliņu var nomērīt 1, 2, 3, 4, 5 cm un atbilstoši 12, 11 un 8 cm. Atliek jautājums, kā nomērīt 10 cm. Tad jāatliek labajā pusē nogrieznis garumā 1,2 vai 3 cm.

Ja labajā pusē atliks 1 cm, tad aukliņa tiks sadalīta nogriežņos 1; 1; 3; 7; 1 centimetri un nevarēs nomērīt 6 cm nogriezni.

Ja labajā pusē atliks 2 cm, tad aukliņa iedalīsies 1; 1; 3; 6; 2 cm, nevarēs nomērīt 7 cm.

Ja labajā pusē atliks 3 cm, tad iedaļas 1; 1; 3; 5; 3 nedod iespēju nomērīt ne 6, ne 7 cm. No tā jāsecina, ka atlikt trīs īsākos nogriežņus vienā aukliņās pusē nav izdevīgi.

Veicot tālākus pārspriedumus, atrodam sekojošu aukliņas iedalījumu:



Pārbaudi, vai visus prasītos mērījumus ir iespējams veikt!

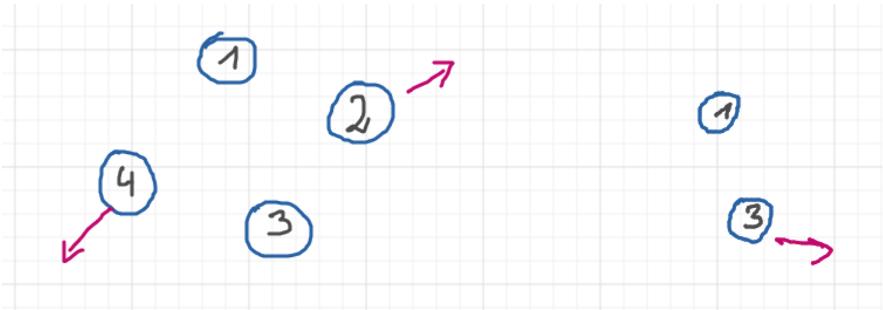
6. Bērni spēlē sekojošu spēli – visi sastājas aplī un skaita uz 1 un 2. No apļa izstājas katrs otrais bērns, līdz aplī palicis tikai viens no viņiem. a) Kur jānostājas Inetai, lai viņa paliktu pēdējā, ja aplī nostājās 21 bērns? b) Cik bērni var nostāties aplī, lai pirmais, no kura sāk skaitīšanu, paliktu pēdējais?

Atrisinājums. Aplūkosim gadījumu b). Katram bērnam izsniegsim numuru, sākot no 1.

Iesākumā aplūkosim gadījumus, kad bērnu skaits ir pāra skaitlis.

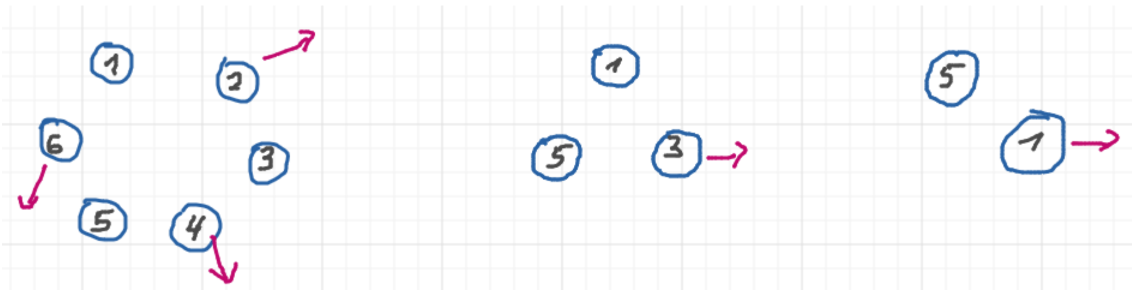
Ja aplī nostājas divi bērni, tad bērns ar Nr2 izstājas no apļa.

Ja aplī nostājas 4 bērni, tad vispirms no apļa izstājas Nr2 un Nr4, un skaitīšanu atkal sāk no Nr1. Tāpēc izstājas Nr3, un aplī pēdējai paliek bērns ar Nr1.



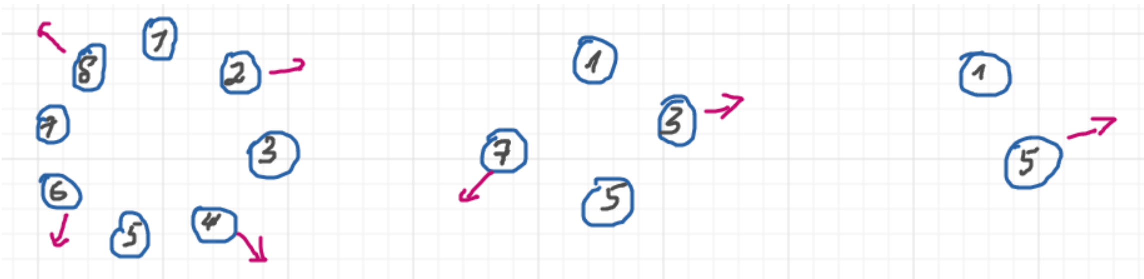
Pirmais cikls Otrais cikls

Ja aplī nostājušies 6 bērni, tad pirmajā skaitīšanas ciklā no apļa izstājas Nr2, Nr4, Nr6, bet paliek Nr1, Nr3 un Nr5. Skaitot no Nr1, izstājas Nr3, paliek Nr5, bet izstājas Nr1.



Pirmais cikls Otrais cikls Trešais cikls

Ja aplī nostājušies 8 bērni, tad pirmajā skaitīšanas ciklā no apļa izstājas Nr2, Nr4, Nr6, Nr8, bet paliek Nr1, Nr3, Nr5, Nr7. Otrajā ciklā bērns Nr1 atkal ir pirmais; skaitot no Nr1, izstājas Nr3 un Nr7. Trešajā ciklā izstājas Nr5, bet paliek Nr1.



Pirmais cikls Otrais cikls Trešais cikls

Ja aplī bērnu skaits ir pāra skaitlis, tad, uzsākot jaunu skaitīšanas ciklu, bērns ar Nr1 atkal ir pirmais. Tātad pēdējais aplī paliks bērns ar NR1, ja aplī nostāsies 2; 4; 8; 16 un jebkurš tāds skaits bērnu, kur šis skaits ir izsakāms kā vienīgi divnieku reizinājums (matemātikā saka: skaitlis ir *divnieka pakāpe*)

a) Gadījums. Ineta stājas aplī līdz ar vēl 20 bērniem. Bērnu skaits 21 ir nepāra skaitlis, tāpēc otrajā skaitīšanas ciklā bērns NR1 izstāsies. Pirmajā skaitīšanas ciklā izstāsies visi tie bērni, kuru numuri ir pāra skaitļi. Pēdējais pāra skaitlis ir Nr20, tad Nr21 jāskaita kā pirmais un te sākas otrais skaitīšanas cikls, kurā Nr1 tiek pieskaitīts kā otrais un izstājas no apļa. Otrajā ciklā no apļa izstājas Nr1, Nr5, Nr9, Nr13, Nr17 un Nr21. Tad trešajā ciklā pirmais bērns ir

Nr3. Turpinot skaitīšanu, atklājam, ka aplī pēdējais paliek bērns ar Nr11. Noskaidrojām, ka Inetai aplī ir jānostājas 11 vietā.

Punktiņš. (A Grupa) Lielākais kopīgais dalītājs un mazākais kopīgais dalāmais
24.04.2020

Nodarbības mērķis: Nostiprināt zināšanas par divu vai vairāku skaitļu lielāko kopīgo dalītāju, mazāko kopīgo dalāmo; par skaitļa sadalīšanu pirmreizinātājos.

1. Apskatīsim skaitļus

   a) 30 un 42;

   b) 32, 48, 12

   un noteiksim to lielāko kopīgo dalītāju un mazāko kopīgo dalāmo.

   Patstāvīgi risini:

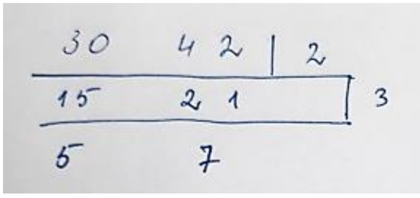
   c) 126 un 132

   d) 108, 252 un 450

   e) 22, 143 un 63

Atrisinājums. Lai atrastu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju, aplūkosim "trepīti", tas ir, meklēsim skaitļu kopīgos dalītājus:

a)



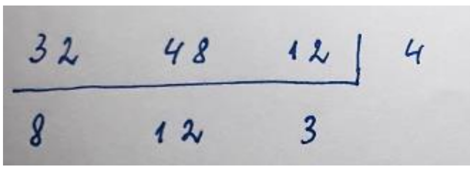
Vispirms ievērojam, ka abi skaitļi dalās ar 2. Rakstām šo dalītāju blakus, bet zemāk rakstām abu skaitļu dalījumu ar 2. Dalījuma skaitļi 15 un 21 dalās ar 3. Rakstām 3 pa labi, bet dalījumu zemāk. Iegūti pirmskaitļi 5 un 7, kuriem nav kopīgu dalītāju (izņemot 1). Esam atraduši ka dotie skaitļi dalās gan ar 2, gan 3, tātad ar 6. Abu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs LKD = 6.

Skaitli 30 var izteikt kā $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Skaitli 42 var izteikt kā $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

No tā seko, ka abu skaitļu mazākais kopīgais dalāmais ir skaitlis, kas dalās ar 6 (abu skaitļu LKD), kā arī ar 5 un ar 7. Mazākais kopīgais dalāmais MKD = $6 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

b) Aplūkojam visus trīs skaitļus un ievērojam, ka visi dalās ar 4



Savukārt dalījumiem nav tāda kopīga dalītāja, kas derētu visiem trim skaitļiem, tāpēc LKD = 4. Aplūkosim doto skaitļu sadalījumu reizinātājos

$$32 = 4 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \cdot 2$$

$$48 = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 4 \cdot 3$$
$$12 = 4 \cdot 3$$

No skaitļu sadalījuma reizinātājos secinām, ka MKD = $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$

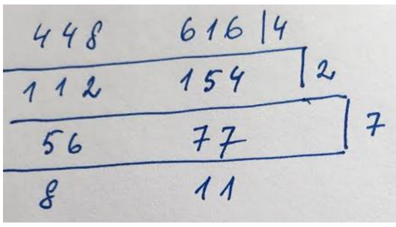
Atbildes piemēriem c), d) un e):

c) LKD = 6; MKD = $2 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 22 = 2772$
d) LKD = 18; MKD = $18 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 = 18900$
e) LKD = 1.

Skaitļus, kuriem lielākais kopīgais dalītājs ir 1, sauc par *savstarpējiem pirmskaitļiem*. Dotie skaitļi nav pirmskaitļi, jo $22 = 2 \cdot 11$; $143 = 11 \cdot 13$; $63 = 7 \cdot 9$
MKD = $2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = 18018$

2. Divas auklas garumā 448 un 616 dm ir jāsagriež vienāda garuma auklās, kas arī izteiktas veselos dm. Kāds būs vismazākais auklu skaits?

Atrisinājums. Lai noteiktu vismazāko auklu skaitu, jāatrod vislielākais iespējamais auklas gabala garums, lai abas auklas var sagriezt tādos vienādos gabalos. Skaitliski – jāmeklē doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs:



LKD = 56

Auklas jāsagriež 56 dm garos gabalos, gabalu skaits ir 8 + 11 = 19.

3. Emīlija uz papīra lapas līmē krāsainus vienāda izmēra kvadrātus. Lapas izmērs ir 72 x 90 cm. Kvadrāti pilnībā noklāj lapu un nekur nepārklājas. Kāds var būt vislielākais iespējamais kvadrāta izmērs?

Atrisinājums. Arī šajā uzdevumā runa ir par LKD – uz lapas malām ir jāatzīmē vienādi, iespējami visgarākie nogriežņi. Skaitļu 72 un 90 visliekākais kopīgais dalītājs ir 18. Papīra lapu var aplīmēt ar 18 x 18 cm lieliem kvadrātiem. Pie malas, kura ir 90 cm gara, var pielikt 5 kvadrātus, bet pie malas, kura ir 72 cm gara, var pielikt 4 šādus kvadrātus. Visu papīra lapu var aplīmēt ar $5 \cdot 4 = 20$ kvadrātiem.

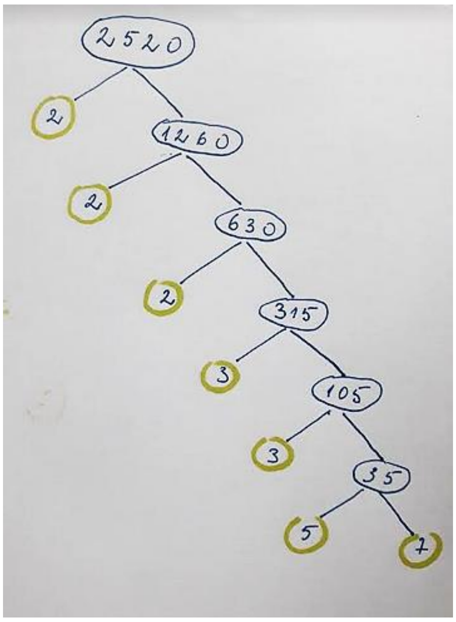
4. Auto A trekam apkārt var apbraukt 28 sekundēs, bet auto B 24 sekundēs. Pēc cik sekundēm tie atkal satiksies starta pozīcijā, ja vienlaikus uzsāk braucienu?

Atrisinājums. Tā kā auto B brauc ātrāk, tas veiks vairāk apļu nekā auto A. Kad abi auto atkal satiksies starta pozīcijā, tie būs braukuši vienādu laika sprīdi. "Pārtulkojot" uzdevumu "skaitļu valodā", mums ir jāmeklē abu skaitļu mazākais kopīgais dalāmais. Skaitļi sastāv no šādiem reizinātājiem $28 = 4 \cdot 7$; $24 = 4 \cdot 6$. Tad MKD = $4 \cdot 7 \cdot 6 = 168$. Abi auto pie starta satiksies pēc 168 sekundēm jeb 2 minūtēm un 48 sekundēm.

5. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi *x, y* un *z*, ka *x* un *y* lielākais kopīgais dalītājs ir 104, *y* un *z* lielākais kopīgais dalītājs ir 106 un *x* un *z* lielākais kopīgais dalītājs ir 108?

Atrisinājums. Lai atrisinātu šo uzdevumu, aplūkosim visu skaitļu *x, y* un *z* lielāko kopīgo dalītāju 104, 106 un 108 sadalījumu pirmskaitļu reizinājumā.

Dotā skaitļa visus pirmskaitļu reizinātājus var samērā vienkārši atrast, izveidojot speciālu struktūru, kuru sauc par *koku*. Aplūkosim piemēru, sadalīsim skaitli 2520 pirmskaitļu reizinātājos:



Katrā solī norādām, kādos divos reizinātājos skaitli var sadalīt, kā vienu no reizinātājiem izvēloties mazāko iespējamo pirmskaitli. Visi pirmskaitļu reizinātāji struktūrā parādās kā koka "lapiņas" (te zaļā krāsā). Skaitļa sadalījums pirmskaitļu reizinātājos ir nolasāms no zīmējuma

$$2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Pēc šī parauga var atrast meklētos sadalījumus

$$104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$

$$106 = 2 \cdot 53$$

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

No dotā seko ka *x* un *y* dalās ar 4, *x* un *z* arī dalās ar 4, tad seko, ka *y* un *z* dalās ar 4, tas nozīmē, ka *y* un *z* lielākais kopīgais dalītājs dalās ar 4, bet dots, ka to LKD ir 106, kas dalās tikai ar 2. Tā ir pretruna.

Tādus trīs skaitļus, kas atbilst dotajām prasībām, atrast nevar.