Punktiņš. (B Grupa) Dažādas grāmatvežu problēmas
1.02.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Ir dotas divas tabulas ar izmēru 3 x 3 rūtiņas. Katrā tabulā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 9 kaut kādā secībā. Trešajā tabulā ar izmēru 3 x 3 rūtiņas raksta pirmo divu tabulu starpību, tas ir, no pirmām divām tabulām ņem abus skaitļus, kuri atrodas vienādās pozīcijās, no lielākā skaitļa atņem mazāko, rezultātu ieraksta trešās tabulas atbilstošajā pozīcijā. Vai var gadīties, ka trešā tabula saturēs visus deviņus secīgus skaitļus?

Atbilde. Ir iespējams, ka trešajā tabulā būs visi skaitļi no 0 līdz 8:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5	9	8
6	4	3
7	2	1

4	7	5
2	1	3
0	6	8

2. Grāmatvedis saņēma 126 iepirkuma kvītis. Izrādījās, ka kvītīs atzīmētās cenas ir visi secīgi veselie skaitļi. Grāmatvedis izvēlējās 10 kvītis, lai tās sasummētu un reģistrētu. Te viņš aizdomājās – ja šī summa ir pirmskaitlis, vai visu atlikušo kvītu kopējā summa arī ir pirmskaitlis? Noskaidro šo jautājumu!

Atrisinājums. Ja 10 kvītu kopējā summa ir pirmskaitlis, tad tas ir nepāra skaitlis. Tad starp šīm kvītīm ir nepāra skaits nepārskaitļu. Starp 126 secīgiem skaitļiem ir vienāds skaits pāra un nepāra skaitļu – ir 63 nepāra skaitļi un 63 pāra skaitļi. Starp 10 izvēlētajām kvītīm ir nepāra skaits pārskaitļu, tātad ir atlicis pāra skaits pārskaitļu. Tāpat arī atlicis pāra skaits nepārskaitļu. Tāpēc atlikušo kvītu summa ir pāra skaitlis.

3. Ir doti seši naturāli skaitļi $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6$, kuru visu summa ir 10 un arī septiņi skaitļi $b_1;\ b_2;\ b_3;\ b_4;\ b_5;\ b_6;\ b_7$, kuru summa ir 13. No šiem skaitļiem izveidoja divas tabulas. a) Tabulai ir 6 rindas un 7 kolonas. Pirmajā rindā ir visas divu skaitļu summas, kuras iegūst pie a_1 pēc kārtas pieskaitot visus b_i skaitļus. Otrajā rindā b_i skaitļus pēc kārtas pieskaita skaitlim a_2. Un tā turpina, veicot darbības ar visiem atlikušajiem skaitļiem. Kāda ir tabulas visu skaitļu summa? b) Veido tabulu, kurā ir 6 rindas un 7 kolonas. Līdzīgi pirmajā rindā raksta visus reizinājumus, kurus iegūst a_1 reizinot pēc kārtas ar visiem b_i skaitļiem. Tabulas pārējās rindas aizpilda līdzīgi. Kāda ir visu tabulas skaitļu summa?

Atrisinājums.

a) Ievērosim, ka katrā rindā kopumā ir saskaitīti visi skaitļi b_i, tātad to kopējā summa ir $6 \cdot 13 = 78$

Savukārt katrā kolonā kopumā ir saskaitīti visi skaitļi a_i, to kopējā summa ir 70. Tātad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir 78 + 70 = 148.

b) Ievērosim, ka pirmās rindas summā var paņemt pirms iekavām a_1:

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + a_1b_5 + a_1b_6 + a_1b_7 =$$

$$= a_1(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7) = a_1 \cdot 13$$

Katrā rindā ir kāds kopīgs reizinātājs, tad visas tabulas summa

$$a_1 \cdot 13 + a_2 \cdot 13 + a_3 \cdot 13 + a_4 \cdot 13 + a_5 \cdot 13 + a_6 \cdot 13 =$$

$$= 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 13 \cdot 10 = 130$$

4. Papīra fabrika bija saražojusi lielu skaitu rūtiņu burtnīcu. To skaits bija skaitlis, kas sastāv no 100 vieniniekiem - 1111…111. Visas burtnīcas bija vienādā skaitā jāizved uz 99 veikaliem. Tomēr grāmatvedis aprēķināja, ka zināms atlikums paliks fabrikas noliktavā. Kāds tas ir? Vai situācija mainīsies, ja burtnīcas būs jāved uz 88 veikaliem?

Atrisinājums. Vai vest burtnīcas uz 88 veikaliem ir izdevīgāk nekā uz 99 veikaliem? Mazākais no dotā veida skaitļiem (sastāv tikai no 1111…), kurš dalās ar 99, sastāv no 18 vieniniekiem. Vienā simtā ietilpst 5 šādas grupas. Dalot doto skaitli ar 99, beigās jādala atlikusī daļa - skaitlis, kas sastāv no 10 vieniniekiem: 1111111111. Dalot šo skaitli ar 99, rodas atlikums 55.

Ja doto skaitli dala ar 88, tad atlikumi veidojas periodiski ar periodu 2:

```
1 1 1 1 1 1 1 1….. : 88 = 126262626…..2
 8 8
 2 3 1
 1 7 6
   5 5 1
   5 2 8
     2 3 1 …
```

Atlikums, dalot doto skaitli ar 88, ir 55.
Kā redzams, vedot burtnīcas uz 88 vai 99 veikaliem, fabrikas noliktavā paliks viens un tas pats atlikums.

5. Ir doti 18 secīgi trīsciparu skaitļi. Pamato, ka starp tiem būs vismaz viens skaitlis, kurš dalās ar savu ciparu summu!

Atrisinājums. Starp trīsciparu skaitļiem, kuri dalās ar 9, to ciparu summas var būt 9, vai 18, vai 27. Vienīgais skaitlis, kura ciparu summa ir 27, ir 999. Ja dotā skaitļu virkne satur 999, tad tas ir meklētais skaitlis: 999 : 27 = 37.

Ja skaitļu virkne nesatur 999, tad tā 18 skaitļu virkne satur divus skaitļus, kuri dalās ar 9, viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra, saskaņā ar pāra - nepāra īpašībām. Ja meklētā skaitļa ciparu summa ir 9, tad tas dalās ar 9. Ja skaitļa ciparu summa ir 18 un tas ir nepāra skaitlis, tad šajā virknē jāizvēlas otrs skaitlis, kurš dalās ar 9 un ir pāra skaitlis. Ja tā ciparu summa ir 18, tad šis skaitlis dalīsies ar 9 un ar 2 kā pāra skaitlis, tātad dalīsies ar 18.

Punktiņš (B Grupa) stāsta par vecās mājas bēniņos atrasto noslēpumaino lādi.

08.02.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Pirmais, ko bērni atrada noslēpumainajā lādē, bija metāla kaste ar 10 maisiņiem, kuros bija sudraba monētas. Uz maisiņiem kādreiz bija pielīmētas zīmītes, bet tagad tās visas atradās kastes apakšā. Uz 9 zīmītēm bija rakstīts "10 gramu sudraba monētas", bet uz vienas – "viltotās 9 gramu monētas". Kā uz svariem, kas rāda precīzo svaru, noteikt, kurā maisiņā ir viltotās monētas, sverot tikai vienu reizi?

Atrisinājums. Saliekam visus maisiņus rindā. No pirmā maisiņa ņem 1 monētu, no otrā – divas, no trešā – 3, …. , no desmitā maisiņa ņem 10 monētas, kopā 55 monētas. Visas paņemtās monētas liek uz svariem. Ja viltotā monēta bija pirmā maisiņā, tad monētu kopējais svars būs 549 grami (viena monēta 9 grami, bet 54 monētas 10 grami). Ja no otrā – tad ir divas monētas pa 9 grami, kopā 18 grami, bet pārējās 53 monētas svērs 530 grami, kopā 548 grami. Ja viltotās monētas no pēdējā maisiņa, tad visu monētu kopējais svars būs 540 grami. Tad te kopumā ir 10 iespējas. Kopējais monētu svars var būt 549, 548, 547, … 541 un 540 grami. Katrs no šiem svariem nosaka tieši cik viltotās monētas ir starp nosvērtajām, tad zinām arī maisiņu, no kura tās ņemtas.

2. Antons lādē atrada 1000 marmora lodītes un izlika tās garā rindā. Izrādījās, ka katrām divām blakus esošām lodītēm masas atšķiras tieši par 1 gramu. Antons vēlējās lodītes sadalīt divās vienādās daļās godīgi, lai pusi atdotu savai māsai Helēnai. Palīdzi viņam – kā sadalīt lodītes, lai abās daļās vienāds ir arī lodīšu kopējais svars!

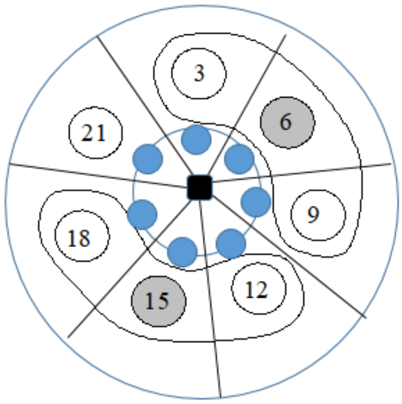
Atrisinājums. Sadalām visas lodītes pēc kārtas pa pāriem. Katrā pārī ir viena smagāka un otra vieglāka lodīte, ar svaru a un a+1. Tad ņemam divus pārus, kuru svari ir (a; a + 1) un (b; b + 1) un samainām lodītes ar vieglāko svaru, iegūstot (b, a + 1) un (a; b + 1). Abos pāros lodīšu kopējais svars ir a + b + 1. Vienu pāri liekam pa labi, otru pāri pa kreisi un tā turpinām ar nākošajiem diviem pāriem. Tā kā lodīšu skaits ir 1000, tas dalās ar 4, tāpēc lodīšu sadalīšana divās daļas saskaņā ar minētajiem nosacījumiem, ir iespējama.

3. Amēlijai izņēma dārgumu kastīti, kurā bija 49 rubīni, 49 smaragdi un viens 1 dimants. Klāt bija pievienots apraksts: "Dārgakmeņu masas ir 1 g, 2 g, 3 g, … , 99 g. Zināms, ka visi rubīni kopā sver par 2450 g vairāk nekā visi smaragdi kopā." Nebija saprotams, kāds ir katra dārgakmeņa svars. Cik sver dimants?

Atrisinājums. Visu dārgakmeņu kopīgais svars ir 4950 gramu. Apzīmēsim rubīnu kopējo svaru ar *r,* smaragdu kopējo svaru ar *s*. Tad $r - s = 2450$ g, kas ir gandrīz puse no visu dārgakmeņu kopējā svara. Šo svara starpību var sadalīt reizinātājos $2450 = 49 \cdot 50$. Secinām, ka šāda starpība iespējama tikai gadījumā, ja rubīnu masas ir no 51 g līdz 99 g, bet smaragdu masas - no 1 g līdz 49 g. Paskaidrosim sīkāk – var izveidot 49 pārus, kur rubīna un smaragda starpība ir tieši 50 gramu: (51 – 1); (52 – 2); (53 – 3); ….. (99 – 9). Tad smaragdu kopējais svars ir 1225, bet rubīnu svars ir 3675 g, kopā 4900 g. Tāpēc dimants sver 50 gramu.

4. (*Uzdevums variants ņemts no saita МЦНМО кружки*) Lādē atradās apaļa kaste ar sekojošu mehānisku rotaļlietu – tas bija disks ar septiņiem sektoriem. Ja disku pagriež, tad katrā sektorā parādās kāds vesels skaitlis, bet tuvāk diska ārējai malai parādās skaitļi, kuri ir dotā sektora un tam blakus esošo sektoru skaitļu summa. Šobrīd skaitļu summas ir 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Kāds skaitlis atrodas katrā sektorā?

Atrisinājums. Uz diska atrodas 14 skaitļi – 7 skaitļi katrā sektorā ir tuvāk centram (sauksim tos par *iekšējiem* skaitļiem), bet 7 – tuvāk diska ārpusei (sauksim tos par *malējiem*). Aprēķinām visu malējo skaitļu kopējo summu 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = 84. Katrs iekšējais skaitlis šajā summā ir ieskaitīts 3 reizes, tāpēc iekšējo skaitļu summa ir 28. Aplūkosim 2 grupas, kurās ir pa trim malējiem skaitļiem pēc kārtas:



Tad pirmo sešu iekšējo skaitļu summa ir 6 + 15 = 21. Septītajā sektorā ir skaitlis 28 – 21 = 7. Līdzīgi atrodam pārējos skaitļus. Nākamo sektoru (no 2 līdz 7) iekšējo skaitļu summa ir 9 + 18 = 27, tāpēc pirmajā sektorā iekšējais skaitlis ir 1. Otrajā sektorā ir -5; trešajā ir 10; ceturtajā ir 4; piektajā ir -2; sestajā ir 13.

5. Helēna lādē atrada īstu pērļu virkni, kura bija savērta uz izturīga linu diega. Te bija baltās un ļoti retās sārtās pērles. Vienā virtenes galā bija baltā pērle, bet otrā – sārtā pērle. Helēna iedomājās – cik vietās šajā virknē atrodas blakus baltās un sārtās pērles? Nosaki, vai vietu skaits, kur blakus ir dažādu krāsu pērles, ir pāra vai nepāra skaitlis?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka virknē ir 2 pērles – balta un sārta. Tad tās virknē blakus ir tieši vienā vietā. Ja starp tām novietosim baltu pērli, tad vienā vietā blakus būs divas baltas pērles, bet dažādo pērļu skaits blakus joprojām atradīsies tikai vienā vietā. Tāpat var spriest, ja virknē starp balto un sārto pērli būtu novietota sārta pērle. Ja starp divām baltām pērlēm ievieto sārto, tad vietu skaits, kur blakus atrodas dažādu krāsu pērles, palielināsies par 2. Līdzīgi var turpināt spriedumu. Tātad vietu skaits, kur blakus atrodas dažādu krāsu pērles, šajā konstrukcijā palielināsies sekojoši 1 + 2 + 2 +… .Secinām, ka šo vietu skaits būs nepāra skaitlis.

Komentārs. Uzdevumu var risināt arī citādi, ne tikai induktīvi. Piemēram, var iztēloties, ka no virknes izņem tās pērles, kuras ir vairākas vienādas krāsas pērles pēc kārtas, atstājot šādas apakšvirknes vietā vienu pērli. Tad izveidojas virkne balta – sārta – balta – sārta - …pērles. Te ir pāra skaits pērļu un nepāra skaits “savienojumu”.

6. Pašā lādes apakšā bija vēl viena kaste ar 1001 zelta monētu. Uz kastes bija rakstīts “Trīs no šīm monētām ir viltotas – ar vieglāku svaru!” Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem var atrast 200 īstās monētas?

Atrisinājums. uzliekam svaru abos kausos 500 un 500 monētas, vienu monētu atstājot malā. Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad malā noliktā monēta ir viltotā un katrā svaru kausu pusē ir tieši pa vienai viltotais monētai. Ņemam no vien kausa 500 monētas un dalām tās uz pusēm – katrā svaru kausā liekam pa 250 monētām. Tas svaru kauss, kas saturēs viltoto monētu, būs vieglāks. No otra kausa (kurš nosvēries uz leju) varam ņemt 200 īstas monētas.

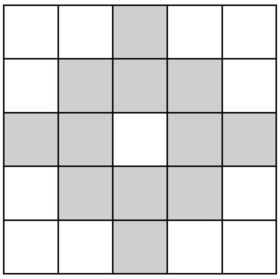
Ja kausi ar 500 monētām nav līdzsvarā, tad vieglākajā kausā ir 2 vai visas 3 viltotās monētas. Ņemam monētas no smagākā kausa un rīkojamies kā iepriekš.

Punktiņš konstruē. (B grupa) Cik liela daļa no figūras ir iekrāsota?
15.02.2019

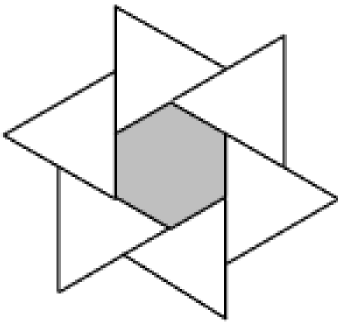
Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Nosaki iekrāsotās daļas laukuma attiecību pret visu figūras laukumu! Figūra b) sastāv no regulāriem trijstūriem, kuru malas garums ir 2 cm, bet regulārā sešstūra malas garums ir 1 cm

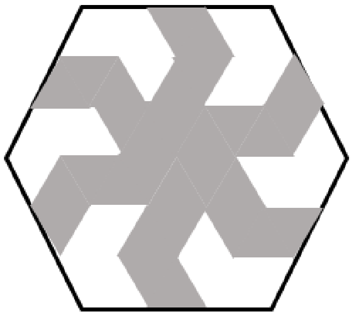
   Atrisinājums. Gadījumā a) figūru sadala vienādos kvadrātiņos.



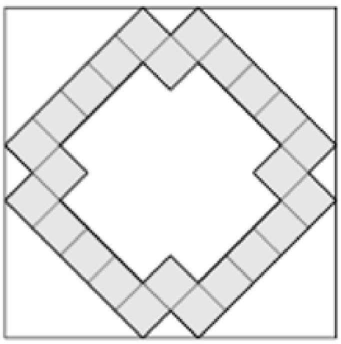
a)



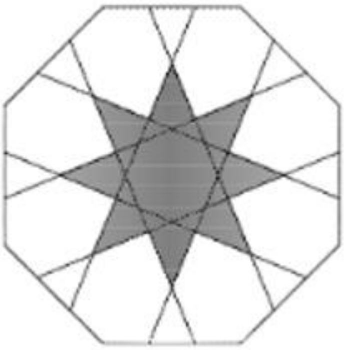
b)



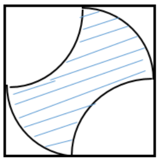
c)



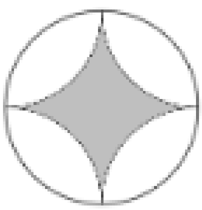
d)



e)

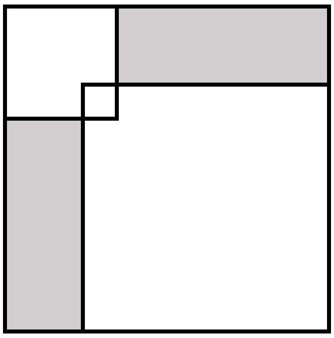


f)

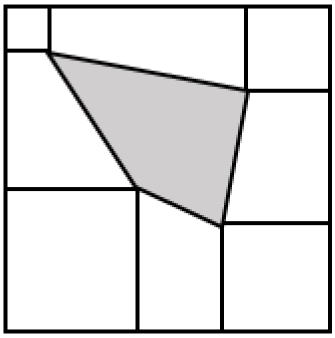


g)

2. Kvadrāta laukums ir 196 cm^2. Tā iekšpusē ir konstruēti divi kvadrāti, kuri pārklājas. Lielākais kvadrāts ir 4 reizes lielāks nekā mazākais. Pārklāšanās kvadrāta laukums ir 1 cm^2. Cik liela ir iekrāsotā daļa?



3. Kvadrāta mala ir 12 cm. Stūros ir kvadrāti, kuru malu garumi ir 1, 2, 3, 4 cm. Cik liela ir iekrāsotā daļa?



Punktiņš. (B grupa) Kas vēl ir atlicis mūsu groziņā?
22.02.2019.

Īsi atrisinājumi un komentāri.

1. Ar kādu skaitli vajag dalīt 113, lai atlikums būtu divciparu skaitlis? Atrodi tādu vismazāko dalītāju! Ar kādu skaitli dalot 113 tu vari iegūt vislielāko atlikumu?

Atrisinājums. Lai dalījuma atlikums būtu divciparu skaitlis, dalītājam pašam ir jābūt vismaz divciparu skaitlim. Piemēram, ja skaitli 113 dala ar 100, tad atlikums ir 13.

Ja skaitli 113 dalot ar kādu skaitli *n*, rodas dalījums *A* un atlikums a, tad skaitli 113 var pierakstīt:

$$113 = A \cdot n + a$$

Lai dalīšanas atlikums a būtu divciparu skaitlis, dalītājam ir jābūt ne mazākam par 11. Apskatīsim vismazāko divciparu skaitli 10. Ja skaitlis 10 ir dalīšanas atlikums, tad $A \cdot n$ var aprēķināt kā

$$A \cdot n = 113 - 10 = 103$$

Bet skaitlis 103 ir pirmskaitlis, to nevar sadalīt citādos reizinātājos, kā vien $103 \cdot 1$. Tāpēc, 113 dalot ar kādu divciparu skaitli, nevar iegūt atlikumu 10. Ja atlikums ir 11, tad tādu dalītāju atrast var:

$$113 - 11 = 102$$

Skaitlis 102 dalās ar 6: $102 = 6 \cdot 17$

No tā iegūstam, ka, 113 dalot ar 17, atlikums ir 11. Varam pārbaudīt, ka atlikumi, dalot 113 ar skaitļiem 10; 11; 12; 13; 14; 15 un 16, veido viencipara atlikumus.

Ja meklēsim vislielāko atlikumu, tad tas veidosies tad, ja skaitli 113 dalīsim ar tādu skaitli, kas skaitlī 113 ietilpst tikai vienu reizi. Jo mazāks būs šis skaitlis, jo lielāku atlikumu iegūsim. Skaitli 113 var izteikt kā

$$113 = 56 + 56 + 1 = 56 + 57$$

Dalot skaitli 113 ar 57, iegūsim vislielāko atlikumu 56.

2. Arņa tētis saņēma lielu prēmiju, ko var pierakstīt kā četrciparu skaitli. Kad Arnis jautāja, cik liela tā ir, tētis atbildēja: "Pirmo trīs ciparu summa ir mazākais trīsciparu skaitlis, kura ciparu summa ir 24. Ja visu skaitli dala ar 4, tad atlikums ir 2, bet ja dala ar 7, tad atlikums ir 5." Cik liela bija prēmija?

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim, kādi 3 cipari summā ir vienādi ar 24. Tie var būt 8; 8; 8 vai 7; 8; 9, vai 6; 9; 9. Tātad vismazākais šāds trīs ciparu skaitlis ir 699. Visu prēmijas skaitli var pierakstīt kā 6990 + a, kur a ir pēdējais skaitļa cipars. Skaitli 6990 dalot ar 4, iegūst atlikumu 2. Skaitli 6990 dalot ar 7, iegūst atlikumu 4. Tāpēc pēdējais skaitļa cipars nevar būt 0. Ņemot vērā atlikumus, kādi rodas, skaitli dalot ar 4, pēdējais cipars varētu būt 4 vai 8. Pārbaudām abus gadījumus – skaitli 6994 dalot ar 7, atlikumā iegūst 1, bet skaitli 1998 dalot ar 7, atlikumā iegūst 5. Tātad Arņa tēva prēmija bija 6998 eiro liela.

3. Tilērijas pavalstī ir tikai divu nomināciju naudas monētas – 3 tilleri un 5 tilleri. Pierādi, ka iespējams samaksāt jebkuru naudas summu, kas lielāka par 7 tilleriem!

Atrisinājums. Naudas monētas apzīmēsim 3T un 5T. Ja izdosies izteikt 8; 9; 10; 11; 12; 13; 15 un 15 naudas summas, tad jebkuras citas summas var izteikt kā doto skaitļu summas (piemēram, 16 = 8 + 8; 17 = 8 + 9; 19 = 9 + 10 un visas pārējās var iegūt no dotajām, pieskaitot attiecīgo reižu skaitu 10).

$$8T = 3T + 5T;\ 9T = 3 \cdot 3T;\ \ 10T = 2 \cdot 5T;\ 11T = 2 \cdot 3T + 5T;\ 12T = 4 \cdot 3T;$$

$$13T = 3T + 2 \cdot 5T; \;\; 14T = 3 \cdot 3T + 5T; \;\; 15T = 3 \cdot 5T$$

Esam pamatojuši, ka iespējams samaksāt jebkuru naudas summu, kas lielāka par 7 tilleriem.

4. Dārzniekam parkā bija jāizveido skaista, ģeometriska puķudobe. Viņš izdomāja visus puķu stādus izvietot vienādos attālumos divās rindās, bet viens stāds palika pāri. Tad viņš mēģināja stādus izvietot 3 rindās, atkal viens palika pāri. Tad dārznieks centās izvietot stādus 4, 5 un 6 rindās, bet katru reizi viens stāds palika pāri. Viņam izdevās stādus izvietot 7 rindās. Kāds varēja būt mazākais stādu skaits?

Atrisinājums. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, ir jāatrod tāds skaitlis N, kuru dalot ar 2; 3; 4; 5 un 6, rodas atlikums 1. Pats skaitlis dalās ar 7. Ja mēs no N atņemsim 1, tad $N - 1$ dalīsies ar 2; 3; 4; 5 un 6. Mazākais skaitlis, kurš dalās ar nosauktajiem ir 60. Bet 61 nedalās ar 7. Tātad meklētais skaitlis $N = 60 \cdot k + 1$. Aplūkojam skaitļus 121; 181; 241; 301. Pēdējais dalās ar 7:

$$301 : 7 = 43.$$

Tātad mazākais stādu skaits, kāds varēja būt dārzniekam, ir 301 stāds.

5. Trīs brāļi nolēma agri no rīta doties ceļojumā – katrs savā virzienā. Līdzi ņemšanai viņi sakaltēja sausiņus, ko nolēma no rīta sadalīt vienādi. Nakts vidū viens no brāļiem sajutās izsalcis un devās paņemt savu sausiņu daļu. Viņš sadalīja tos 3 vienādās kaudzītēs, bet viens sausiņš palika pāri, ko viņš apēda, kā arī vienu kaudzīti paņēma līdzi. Tad vēlāk naktī pamodās otrs brālis un gāja paņemt savu daļu. Nezinot, ka pirmais brālis jau sausiņus paņēmis, viņš darīja to pašu, un lieko sausiņu apēdis, paņēma savu kaudzīti. Arī trešais brālis jau pirms rītausmas rīkojās tāpat, un no rīta bija palikuši 22 sausiņi. Cik sausiņi bija sagatavoti?

Atrisinājums. No rīta atrastie 22 sausiņi bija atstāti pirmajam un otrajam brālim. Trešais brālis katram bija iedalījis 11 sausiņus, bet pats paņēma 12. Otrais brālis abiem saviem brāļiem bija atstājis 34 sausiņus, 17 katram, bet pats paņēma18 sausiņus. Tātad pirmais brālis bija atstājis 52 sausiņus, bet pats paņēmis 27. Iesākumā kopā bija 79 sausiņi.

6. (* - grūtāks uzdevums) Kādiem naturāliem skaitļiem n izteiksme $n^3 + 11n$ dalās ar 6?

Atrisinājums. Izteiksmi var sadalīt reizinātājos $n(n^2 + 11)$. Viegli pamatot, ka izteiksme dalās ar 2 – ja n ir pārskaitlis, tad tas dalās ar 2, bet, ja n ir nepāra skaitlis, tad ar 2 dalās skaitlis iekavās, kas ir divu nepārskaitļu summa. Dalāmībai ar 3 var aplūkot 3 gadījumus:

a) $n = 3k$, tad izteiksme $3k(9k^2 + 11)$ dalās ar 3.

b) $n = 3k + 1$, tad izteiksme ir

$$(3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 11) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 12),$$

otrajās iekavās visi saskaitāmie dalās ar 3, tātad dotā izteiksme dalās ar 3.

c) $n = 3k + 2$, tad

$$(3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 11) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 15),$$

kur summa otrajās iekavas dalās ar 3.

Tātad, dotā izteiksme dalās ar 6 jebkuram naturālam skaitlim n.