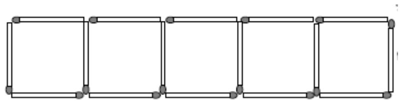
Punktiņš. (B grupa) Sērkociņu uzdevumi

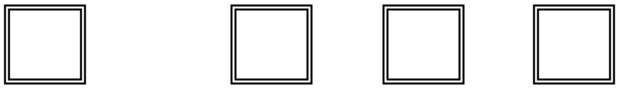
05.10.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri

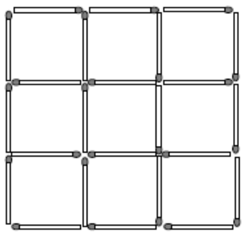
1. (*Iesildīšanās uzdevums*) Pārvieto 4 sērkociņus tā, lai izveidojas 4 vienādi kvadrāti!



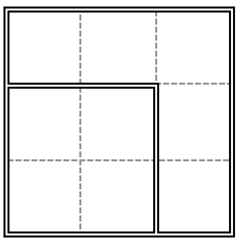
Atrisinājums. Kopumā te ir 16 sērkociņi. Tad no tiem iespējams izveidot 4 kvadrātus ar malas garumu 1:



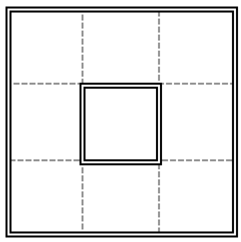
2. (*Iesildīšanās uzdevums*) Marks no sērkociņiem salika šo figūru. Noņem 8 sērkociņus tā, lai paliek 2 kvadrāti!



Atrisinājums. Iespējamas vairākas atbildes. Piemēram:

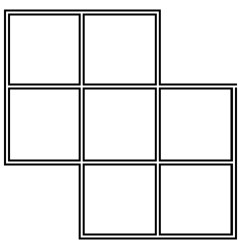


vai



3. (*Iesildīšanās uzdevums*) Kādu vislielāko kvadrātu skaitu tu vari izveidot no 20 sērkociņiem?

Atbilde. Var izveidot 9 kvadrātus, piemēram:



4. Cik sērkociņus ir jāizmanto, lai uz galda saliktu rūtiņu taisnstūri, kuram ir 48 rūtiņas?

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, kāds var būt rūtiņu taisnstūra izmērs:

$$48 = a \cdot b = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

Redzams, ka var konstruēt 5 dažādus taisnstūrus. Lai konstruētu šādus taisnstūrus, sērkociņu skaitu aprēķina sekojoši:

$$a \cdot (b+1) + b \cdot (a+1),$$

kur a un b ir rūtiņu taisnstūra izmēri.

Izveidosim tabulu, kur norādīsim izmantojamo sērkociņu skaitu:

Taisnstūra izmērs	**Sērkociņu skaits**
1 x 48	145
2 x 24	122
3 x 16	115
4 x 12	112
6 x 8	110

5. Kāds ir rūtiņu taisnstūra izmērs, ja tas salikts no 85 sērkociņiem?

Atrisinājums. Izmantosim iepriekšējā uzdevumā izveidoto formulu:

$$a \cdot (b+1) + b \cdot (a+1),$$

kur a un b ir rūtiņu taisnstūra izmēri, pieņemsim, ka ir a rūtiņu rindas un b rūtiņu kolonas. Lai izveidotu rūtiņu taisnstūri, ir jāizliek $a + 1$ sērkociņu rinda kā arī $b + 1$ sērkociņu kolona.

Pārveidosim doto formulu:

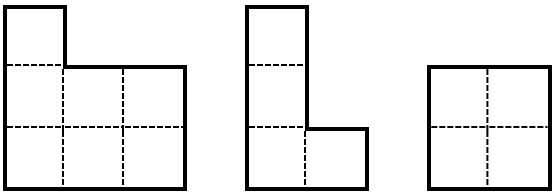
$$a \cdot (b+1) + b \cdot (a+1) = 85$$

$$2ab + a + b = 85$$

Ieguvām vienādojumu ar diviem nezināmiem. Pārbaudot dažādās iespējas, atrodam divus atrisinājumus:

Rūtiņu taisnstūra izmērs var būt 1 x 28 rūtiņas, vai arī 4 x 9 rūtiņas.

6. No sērkociņiem ir salikts rūtiņu taisnstūris, kuram ir 5 x 6 rūtiņas. Noņēma vairākus sērkociņus. Uz galda palika taisnstūra sadalījums, kurā redzamas sekojošās figūras:



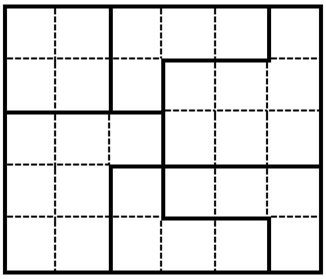
Cik sērkociņus noņēma?

Atrisinājums. Aplūkosim dotās figūras. Lielās figūras iekšpusē bija izvietoti 8 sērkociņi. L-figūras iekšpusē bija 3 sērkociņi, kvadrātiņa iekšpusē bija 4 sērkociņi. Noteikti noņēma vismaz 15 sērkociņus, jo visas šīs 3 figūras bija redzamas. Kopumā tās satur 15 rūtiņas. Kvadrāta izmērs ir 30 rūtiņas, tas nozīmē, ka rezultātā bija izveidojušās vairāk kā 3 no dotajām figūrām. Ievērojot, ka lielajā figūrā ir 7 rūtiņas, kas ir nepāra skaits, bet abās pārējās figūrās ir pāra skaits rūtiņu, secinām, ka taisnstūris satur 2 lielās figūras. 4 tādas figūras nevar būt, jo kopumā tās aizņemtu 28 rūtiņas, nevienu mazāko figūru divās rūtiņās izvietot nevar.

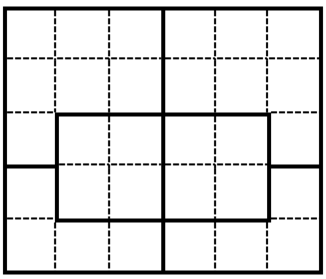
Vispirms jāatrod dotā taisnstūra iespējamo sadalījumu dotajās figūrās. Ievērojot, ka divas lielās figūras aizņem kopumā 14 rūtiņas, atlikušajās 16 rūtiņās var izvietot 4 mazākās figūras. Atkarībā no šo figūriņu skaita un veida, jānoņem atšķirīgs sērkociņu skaits.

Var izvietot vienu, divus vai 3 kvadrātiņus.

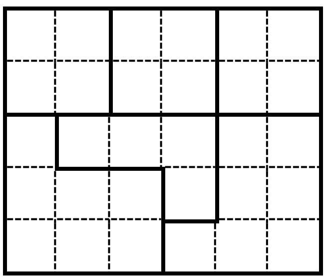
Izveidots 1 kvadrātiņš, kopumā noņemti 29 sērkociņi:



Izveidoti 2 kvadrātiņi, kopumā noņemti 30 sērkociņi:



Izveidoti 3 kvadrātiņi, kopumā noņemti 31 sērkociņš:



Punktiņš. (B grupa) Lūdzu iepazīsimies – skaitļi!

12.10.2018.

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Divciparu skaitlim blakus pierakstīja tādu pašu skaitli. Cik reizes dotais skaitlis palielinājās? Aplūko vairākus piemērus un paskaidro sakarību starp izvēlēto divciparu skaitli un iegūto četrciparu skaitli!

Atrisinājums. Lietosim skaitļa pierakstu algebriskā formā. Ir iegūts 4 – ciparu skaitlis:

$$\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101(10a + b) = 101\overline{ab}$$

Tātad iegūtais skaitlis ir 101 reizi lielāks kā izvēlētais.

2. Dots divciparu skaitlis A. Otru skaitli B uzrakstīja, dotā skaitļa A ciparus pierakstot otrādā secībā. Abus skaitļus saskaitīja. Uzraksti vairākus variantus! a) Aprēķini, cik pavisam ir tādu skaitļu A, kurus saskaitot ar B, iegūst divciparu skaitli! b) Atrodi šo rezultātu (A un B summas) kopīgu īpašību un pamato to!

Atrisinājums.

a) Var aplūkot skaitļu grupas. Vismazākais divciparu skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir 10. Padsmitu grupā vēl ietilpst skaitļi 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18 (skaitlis 19 neder, jo 19 + 91 = 110).

Nākamā grupa sākas ar 20, tā varam turpināt:

10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	21	31	41	51	61	71	81	
12	22	32	42	52	62	72		
13	23	33	43	53	63			
14	24	34	44	54				
15	25	35	45					
16	26	36						
17	27							
18								

Šo skaitļu kopējais skaits pa grupām ir 45.

b) Apskatīsim summu

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$$

Skaitļu A un B summa dalās ar 11.

3. Dots divciparu skaitlis A. Otru skaitli B uzrakstīja, dotā skaitļa A ciparus pierakstot otrādā secībā. No lielākā skaitļa atņēma mazāko. Uzraksti vairākus piemērus! Kāda kopīga īpašība piemīt šo skaitļu starpībām? Pamato!

Atrisinājums. Rezultāts dalās ar 9, jo

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$$

4. Trīs skaitļu A, B un C summa ir 72. Skaitlis A ir par 9 mazāks nekā B, bet skaitlis C ir par 15 lielāks nekā B. Atrodi skaitļus A, B, C!

Atrisinājums. Aprakstīsim uzdevuma dotos algebriski:

$$\begin{cases} A + B + C = 72 \\ B - A = 9 \\ C - B = 15 \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu, atrodam, ka A = 13; B = 22; C = 37. (Sistēmu var atrisināt, piemēram, ar ievietošanas metodi: no otrā vienādojuma izsaka A, no trešā C un ievieto pirmajā vienādojumā, lai noteiktu skaitli B.)

5. Trīs ciparu skaitlim pieskaitīja tā ciparu summu. Ieguva skaitli 328. Kāds bija dotais skaitlis? Atrodi visus atrisinājumus!

Atrisinājums. Aplūkosim dotā trīs ciparu skaitļa un tā ciparu summu:

$$\overline{abc} + a + b + c = 101a + 11b + 2c = 328$$

No dotās izteiksmes seko, ka a nevar būt lielāks par 3. Tātad a varētu būt 1 vai 2, vai 3.

Ja a = 2, tad $11b + 2c = 328 - 202 = 126$. Lielākās b un c vērtības var būt 9, tad

$$11b + 2c = 99 + 18 = 117 < 126$$

No tā secinām, ka skaitlis a = 3. Tad $11b + 2c = 25$.

Ievērojot, ka b noteikti ir nepāra skaitlis, aprēķinām, ka uzdevumam ir iespējama tikai viena atbilde dotais skaitlis ir 317.

6. Naturālu skaitli A pareizināja ar skaitli 5 un ieguva 5A. Skaitļa 5A ciparu summa ir 22. Kāda ir skaitļa A ciparu summa, ja skaitlis A satur tikai ciparus 0, 1 un 2?

Atrisinājums. Ievērosim, ka $1 \cdot 5 = 5$ un $2 \cdot 5 = 10$. Saskaņā ar doto, skaitlis A satur vismaz vienu ciparu 1 un vismaz vienu ciparu 2. Nulles skaitļa ciparu summu neietekmē. Ja A = 102, tad 5A = 510. Ja A = 120, tad 5A = 600. Ja pieņemsim, ka skaitlim A ir n vieninieki un m divnieki, tad skaitļa A ciparu summa S(A) = $n + 2m$, bet skaitļa 5A ciparu summa ir S(5A) = $5n + m$.

Zināms, ka S(5A) = 22. Tad skaitlis 5A var saturēt 1 vai 2, vai 3, vai 4 ciparus 5 (vai ciparus 6). Tas nozīmē, ka dotajā skaitlī ir atbilstošs vieninieku skaits. Cipars 6 skaitlī 5A nozīmē, ka dotajā skaitlī ir cipars 1 un cipars 2. Izveidosim tabulu:

n	m = S(5A) – $5n$	S(A) = $n + 2m$
1	17	35
2	12	26
3	7	17
4	2	8

No tabulas redzams, ka ir iespējamas vairākas atbildes.

Punktiņš. (B grupa) Izvietošana aplī

19.10.2018

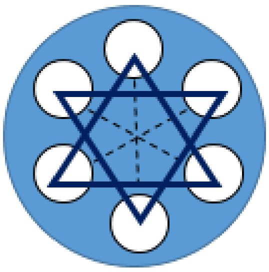
Īsi atrisinājumi un komentāri.

1. Alekša dzimšanas dienā bērni sastājās aplī. Katram zēnam blakus bija viena meitene. Aplī bija nostājušās 8 meitenes. Cik zēnu varētu būt nostājušies aplī? Atrodi visas iespējas!

Atrisinājums. Ja katram zēnam blakus bija meitene, tad otrā pusē zēnam blakus bija nostājies zēns. Tātad zēni stāvēja pa divi blakus, no kurienes seko, ka zēnu skaits bija pāra skaitlis. Aplī var būt nostājušies 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, vai 16 zēni. Divi zēni aplī ir tad, ja visas meitenes nostājušās pēc kārtas. Lielākais zēnu skaits 16 ir tad, ja bērni izvietojušies sekojoši – meitene, divi zēni, meitene, 2 zēni, meitene, 2 zēni un tā joprojām.

2. Uz kādu darba vietas pasākumu bija ieradušies 3 vīri ar savām sievām. Viņiem visiem bija jāsēž pie viena apaļa galda, pie kura bija tieši 6 vietas. Sievas bija sastrīdējušās ar saviem vīriem un negribēja viņiem sēdēt blakus, ne arī tieši pretī pie galda. Kā šos cilvēkus apsēdināt?

Atrisinājums. Pie galda ir 3 vietas, kur vienu strīdnieku ģimeni apsēdināt, trešā vieta šajā “trijstūrī” paliek brīva. Pie galda ir divi šādi “trijstūri”, tā var apsēdināt 2 pārus.



Katrā trijstūri paliek pa vienai brīvai vietai – tās būs blakus vai tieši pretī. Tāpēc šos 6 cilvēkus vēlamajā veidā apsēdināt nevar.

3. Anna, Baiba, Centis, Dace un Ervīns skolas pusdienlaikā apsēdās ap apaļu galdu. Nākamajā dienā viņi pusdienoja pie tā paša galda un izrādījās, ka nevienam no viņiem nav blakus tie paši abi galda biedri. Nākamajās dienās atkal bērni bija samainījušies vietām. Cik dienas pēc kārtas bērnu izvietojums pie galda var būt atšķirīgs (katram bērnam nevienu dienu nav viens un tas pats galda biedru pāris)?

Atrisinājums. Īsuma pēc apzīmēsim bērnus A, B, C, D, E. Pieņemsim, ka bērni ap apaļo galdu sēdēja šādā secībā: A, B, C, D, E, (A). Pirmajā dienā A blakus sēdēja B un E. Kopumā blakus A var sēdēt 6 dažādi bērnu pāri: BC, BD, BE, CD, CE, DE. Tad dažāds bērnu pāris blakus A var sēdēt ne vairāk kā 6 dienas. Sešas dienas bērni var sēdēt, piemēram, šādi:

ABCDE(A)

ABECD(A)

ABDEC(A)

ACBED(A)

ACDBE(A)

ADBCE(A)

Piezīme. Lai atrastu visas izvietojuma iespējas, var sastādīt iespējamo galda biedru pārus katram pusdienu dalībniekam. Tad pie katra izvietojuma var atzīmēt, kuri galda biedru pāri jau izmantoti.

4. Atpūtas telpā aplī izvietoti 20 krēsli. Ik pa brīdim nāk kāds un apsēžas uz brīva krēsla. Ja blakus esošais vai esošie krēsli aizņemti, tad viens no šiem krēsliem uzreiz tiek atbrīvots. Kāds vislielākais aizņemto krēslu skaits var būt kādā laika momentā?

Atrisinājums. Iesākumā visi krēsli ir brīvi. Ienāk pirmais un apsēžas jebkurā vietā. Nākošo varētu apsēsties vienu vietu izlaižot. Kad ienāks trešais, viņš apsēžas tieši starp abiem jau sēdošajiem. Viens no iepriekš atnākušajiem aiziet. Nāk nākamais un apsēžas vienu vietu izlaižot no abiem blakus sēdošiem. Nāk nākamais un apsēžas brīvajā vietā starp diviem un vienu jau sēdošo, kur šis pēdējais pieceļas un aiziet. Paliek sēžot 3 cilvēki pēc kārtas. Pēc tāda paša principa sēdina visus citus ienākošos, līdz blakus sēž 18 cilvēki pēc kārtas. Atlikuši divi brīvi krēsli. Ja ienāk deviņpadsmitais sēdētājs, tad viņa blakus sēdētājs ir spiests piecelties un aiziet. Tad sēž pēc kārtas 17 cilvēki un viens, kuram abās pusēs ir brīva vieta. Ja vēl kāds ienāk, tad izveidojas atkal tāda pati situācija, kur 18 cilvēki sēž pēc kārtas un ir 2 brīvas vietas.

Vislielākais aizņemto krēslu skaits var būt 18.

5. Cipari no 1 līdz 9 jāizvieto aplī. Sakārto šos skaitļus tā, lai, skatoties pulksteņa rādītāja virzienā, katrs divciparu skaitlis, kas veidots no diviem blakus esošiem cipariem, dalītos ar 13, 17 vai 23!

Atrisinājums. Apskatīsim visus divciparu skaitļus, kuri dalās ar dotajiem skaitļiem:

13	17	23
26	34	46
39	51	69
52	68	92
65	85	
78		
91		

Apskatīsim tos ciparus, kuri šajā sarakstā ir visretāk. Tie ir cipari 4, 7 un 8. No šiem var izveidot ciparu virknītes 178 un 346, kuras satur skaitļus 17 un 78 un vēl 34 un 46, lasot no kreisās puses. Sarakstā ir divi skaitļi, kas beidzas ar ciparu 3. No tiem derēs 23. Ir divi skaitļi, kas beidzas ar 1 – tie ir 51 un 91. Izvēlēsimies 51. Tad var veidot virkni 5178. Atliek pievienot ciparu 6 pirms 5, 8 jau ir atradis savu vietu, izveidojas 23465178. Pievienojot ciparu 9, redzam, ka 92 ir viens no derīgiem skaitļiem, bet sarakstā nav 89. Tāpēc izvēle 51 neder. Izvēlamies 91 un izveidojam rezultātu 917852346 (9).