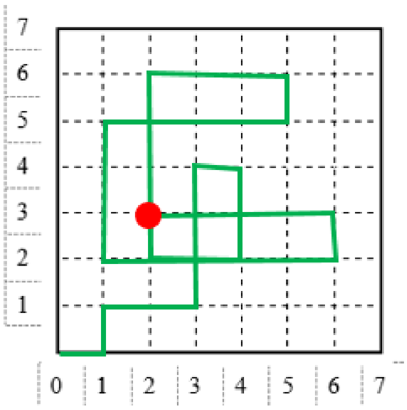
**Punktiņš.** (B grupa) Koordinātu noteikšana

02.11.2018

*Īsi atrisinājumi un komentāri*

1. Robotiņš atrodas rūtiņu kvadrāta 7 x 7 iekšpusē un viņš staigā tikai pa rūtiņu līnijām. Robotiņš sāk savu gaitu no pozīcijas 0 (kreisā apakšējā stūra), pirmo gājienu izdarīdams pa labi. Katra gājiena galapunktā viņš mainīja virzienu – no horizontāla uz vertikālu, bet no vertikāla uz horizontālu. Automātiskā iekārta viņa ceļu aprakstīja sekojoši: 1, 1, 2, 3, 1, -2, -2, 4, 3, -1, -4, -3, 5, 1, -4.
   Pozitīvie skaitļi nozīmē, ka robotiņš gāja pa labi vai uz augšu atbilstošo soļu skaitu, skaitļi ar mīnusa zīmi nozīmē, ka viņš gāja pa kreisi vai uz leju. Kurā punktā viņš nonāca?

*Atrisinājums.* Galapunkta koordinātes ir (2; 3):




2. Uzzīmē 5 – staru zvaigzni visus tās punktus izvēloties rūtiņu līniju krustpunktos. Apzīmē šos 10 punktus ar burtiem a, b, c,….. Uzraksti robotiņam instrukciju, kā pēc kārtas nonākt visos desmit zvaigznes punktos, sākot no punkta a, ja robots iet tikai pa rūtiņu līnijām.

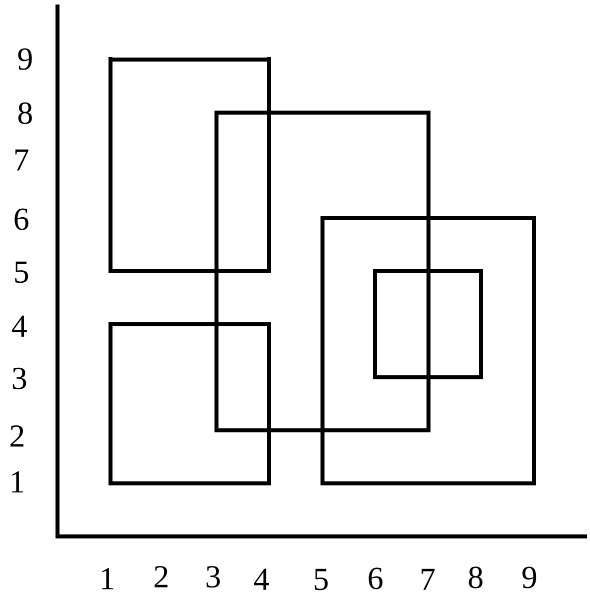
*Komentārs.* Šis ir iepriekšējā uzdevuma variants, kur skolēniem patstāvīgi ir jāizveido robotiņa pārvietošanās instrukcija. Skolēni drīkst izveidot arī atšķirīgu instrukciju no iepriekšējā uzdevumā dotās, bet ne kā tekstuālu aprakstu.

3. Citplanētietis ir paslēpies kādā taisnstūra apgabalā. Ir zināmas tikai šo apgabalu stūra koordinātes un ir zināms tas, ka citplanētietis ir taisnstūra iekšpusē vienīgajā brīvajā pozīcijā, tas ir, neatrodas uz kāda cita taisnstūra robežas un pozīciju var izteikt ar veselām koordinātēm. Atrodi citplanētieša atrašanās koordinātes, ja te ir iegūto taisnstūru koordināšu saraksts (visu taisnstūru malas ir horizontālas un vertikālas) un katrs punkts ir tieši viena taisnstūra virsotne:

   (6; 5), (8; 3), (1; 9), (4; 5), (5; 6), (7; 8), (9; 1), (4; 4), (3; 8), (7; 2), (8; 5), (1; 1), (5; 1), (6; 3), (4; 1), (3; 2), (1; 5), (1; 4), (9, 6), (4, 9)

*Atrisinājums.* Te izmantota taisnleņķa koordinātu sistēmas pozitīvā daļa, veidojot zināmu līdzību ar spēli "Jūras kauja" – tur tiek kodētas rūtiņas horizontāli ar cipariem, bet vertikāli -

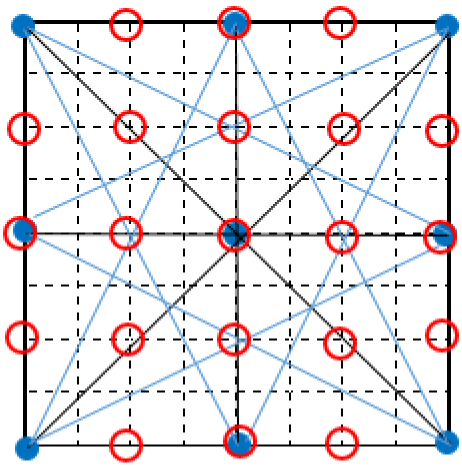
ar burtiem (KARTUPELIS). Te, savukārt, kodētas tiek horizontālās un vertikālās līnijas ar cipariem. 20 dotie punkti definē 5 taisnstūrus.




Te ir tikai viena pozīcija, kur citplanētietis var paslēpties, tā ir (8; 2).

4. Robotiņš saņēma sekojošo punktu koordinātu sarakstu (0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2) kāda kvadrāta iekšpusē. Viņam tika dots uzdevums atrast visus iespējamos punktu pārus un atzīmēt atbilstošo nogriežņu viduspunktus. Cik punktus viņš atzīmēja?

*Atrisinājums.* Situācija kļūst labāk pārskatāma, ja izvēlamies lielāku mērogu, piemēram, lai viena vienība ir 4 rūtiņas liela. Savienojot doto punktu visus iespējamos pārus, redzam, ka šie nogriežņi iet pa rūtiņu līnijām, bet slīpo nogriežņu viduspunkti atrodas tieši rūtiņu krustpunktos:

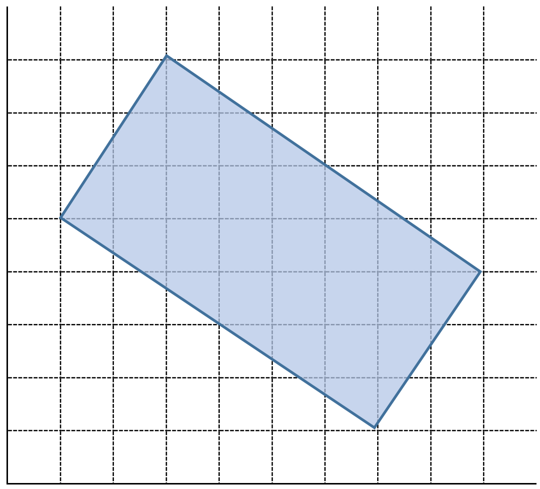


Pavisam atrodam 21 viduspunktu (zīmējumā tie ir sarkanie aplīši).

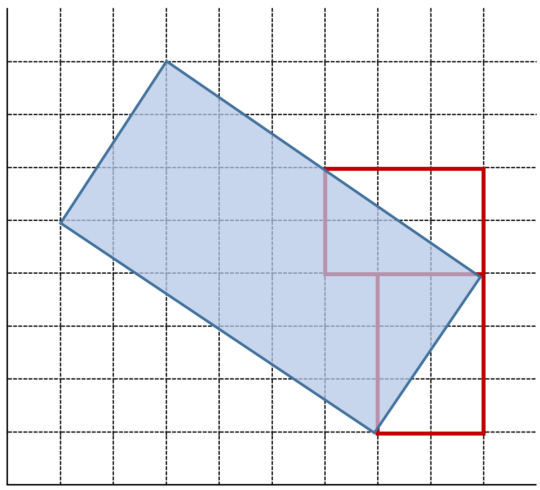
5. Kā tu nosauktu četrstūrus, kurus uzzīmēja robots, ja to virsotņu koordinātes ir
   a) (1; 5), (3; 8), (7; 1), (9; 4);
   b) (2; 1), (3; 8), (4; 4), (8; 5)?

   Paskaidro, kādas ir šo četrstūru īpašības!

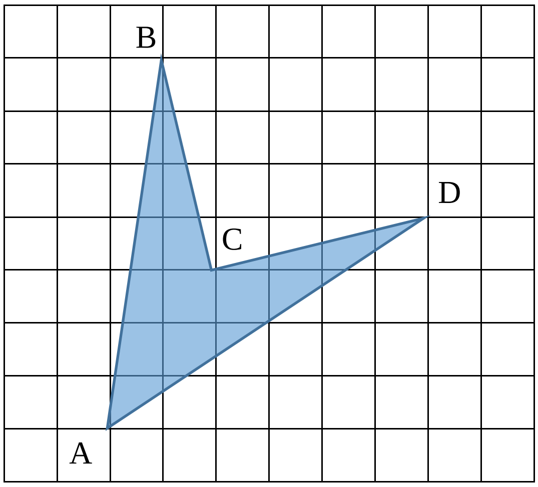
*Atrisinājums.* a) dotais četrstūris ir taisnstūris:



Šī četrstūra īsākās malas ir viena garuma, jo tās ir tāda taisnstūra diagonāles, kura izmērs ir 2 x 3 rūtiņas. Savukārt abas garākās malas ir divas reizes garākas par īsajām malām, jo ir diagonāles taisnstūriem no 4 x 6 rūtiņām. Īsās malas ir perpendikulāras attiecībā pret garākajām. To var ievērot, aplūkojot atbilstošos perpendikulāri novietotas taisnstūrus:

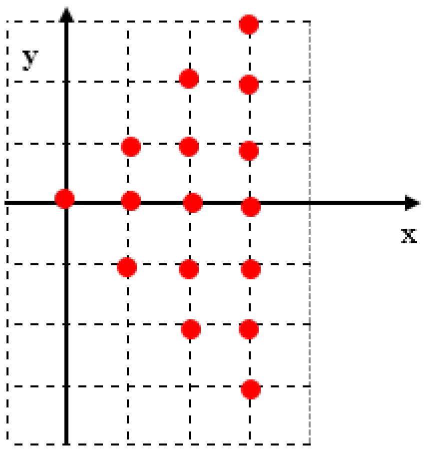


b) Šeit izveidojas ieliekts četrstūris. Ja dotos punktus secīgi apzīmē A, B, C, D, tad tas ir četrstūris, kurš līdzīgs bultas galam. Aplūkojot atbilstošos rūtiņu taisnstūrus, kuru diagonāles ir dotā četrstūra malas, atrodam, ka BC un CD ir vienādas un perpendikulāras. Pārbaudiet, kāpēc malas AB un AD nav vienāda garuma!

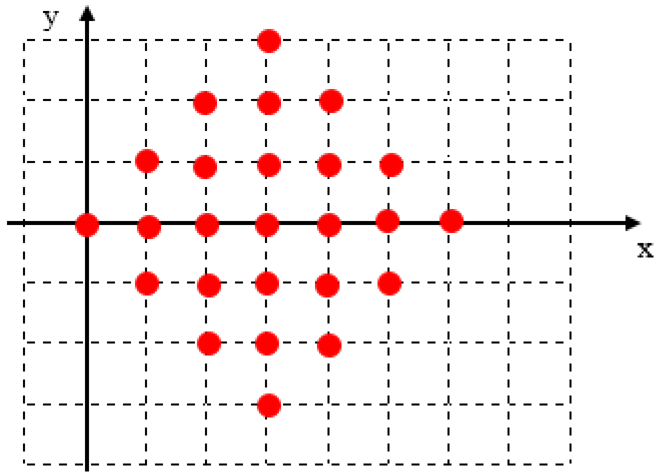



6. * (8. klasei)  Atrast visus tos koordinātu plaknes punktus (x; y) ar veselām koordinātēm, kuru koordinātes vienlaikus izpilda sekojošās prasības: $y+x\geq 0$;   $y-x\leq 0$;  $y-x+6\geq 0$;   $y+x-6\leq 0$.

*Atrisinājums*. No otrās nevienādības seko, ka $x\geq y$ . Tādā gadījumā abi skaitļi *x* un *y* ir nenegatīvi, jo dots, ka $y+x\geq 0$. No šīm divām nevienādībām secinām: ja *x* = 0, tad arī *y* = 0. Ja *x* = 1, tad *y* vērtības var būt 1 vai 0, vai -1. Ja *x* = 2, tad *y* var būt 2, vai 1, vai 0, vai -1, vai -2. Tā veidojas punktu kopa, kas ir simetriska pret *x*-asi.:




Aplūkosim otras divas nevienādības. Te redzam, ka koordināšu summa $x+y\leq 6$. Tad *x* lielākā vērtība var būt 6. Atbilstoši *y* varētu būt nulle vai negatīvs skaitlis -1, vai -2,… , vai -6. No otras puses atlikusī nevienādība nosaka, ka $y\geq x-6$, tāpēc, gadījumā, ja *x* = 6, ir tikai viena iespēja: *y* = 0. Līdzīgi, ja *x* = 5, tad *y* var būt 1, vai 0, vai -1, jo $y\geq x-6=5-6=-1$. Ja *x* = 4,  tad $2\geq y\geq -2$. Tā uzdevuma nosacījumiem atbilst 25 punkti.




*Piezīme.* Uzdevumu var atrisināt arī citādi, konstruējot taisnes $y = x$, $y = -x$, $y = 6 - x$ un $y = x - 6$. Šīs taisnes ierobežo plaknes kvadrātu. Kā atbilde der visi tie punkti ar veselām koordinātēm, kas atrodas uz kvadrāta malām un tā iekšpusē.

**Punktiņš.** (B grupa) Atrodi pārskaitļus un nepārskaitļus!

9.11.2018

*Īsi atrisinājumi un komentāri*

1. (*Iesildīšanās uzdevums*) Māris sareizināja divus skaitļus ar abu skaitļu summu un ieguva 819. Mārtiņš teica, ka Māris ir kļūdījies. Kuram ir taisnība?

*Atrisinājums.* Divu skaitļu A un B summa būs nepāra skaitlis, ja skaitļiem A un B būs atšķirīga paritāte. Bet tad viens no tiem būs pārskaitlis. Ja A un B ir abi nepāra skaitļi, tad to summa būs pārskaitlis. Jebkurā gadījumā dotā reizinājuma $A \cdot B \cdot (A + B)$ rezultāts būs pārskaitlis, kas nevar būt 819.

2. (*Iesildīšanās uzdevums*) Emīls uz tāfeles uzrakstīja tādus 345 naturālus skaitļus, kuru summa ir pāra skaitlis. Vai Miķelis var nodzēst vienu skaitli tā, lai atlikušo 344 skaitļu summa arī ir pāra skaitlis? Ja Miķelim tas izdevās, vai Emīls tagad arī var nodzēst vienu skaitli tā, lai atlikušo 343 skaitļu summa ir pārskaitlis?

*Atrisinājums.* Ja visu skaitļu summa ir pārskaitlis, tad starp tiem ir vismaz viens pārskaitlis. Miķelis var nodzēst pārskaitli, atlikušo skaitļu summa joprojām būs pārskaitlis. Ja Emīls ir uzrakstījis tikai vienu pārskaitli, tad pēc Miķeļa gājiena būs atlikuši visi tikai nepāra skaitļi. Nodzēšot vienu no nepāra skaitļiem, paliks nepāra skaits nepāra skaitļu. To summa būs nepārskaitlis.

3. Atrodi 4 dažādus naturālus skaitļus, ka jebkuru šo skaitļu izlases summa dalās ar izlases skaitu. Piemēram, ja izvēlas 3 skaitļus, tad to summa dalās ar 3.

*Atrisinājums.* Vienkāršu piemēru var iegūt, ja izvēlas visus 4 pārskaitļus, tādus, kas dalās ar 3. Piemēram, 6, 12, 24, 48.

Izaicinājums ir iekļaut šajā komplektā vismaz vienu nepāra skaitli. No dotā seko, ka visiem 4 skaitļiem ir vienāda paritāte ( jo jebkuru divu skaitļu summa dalās ar 2). Ja ņemsim visus tādus nepāra skaitļus, kas dalās ar 3, uzdevums ir atrisināts. Piemēram, izvēlēsimies 15, 21, 27 un 33. To summa ir 96, kas dalās ar 4.

Vai var izvēlēties tādus nepāra skaitļus, kas nedalās ar 3? Vadoties pēc skaitļu dalāmības ar 3, tos var iedalīt 3 grupās:

Skaitļi, kuri dalās ar 3 :  3, 6, 9, 12 , 15, ….

Skaitļi, kuru atlikums, dalot ar 3, ir 1:  1, 4, 7, 10, 13, …

Skaitļi, kuru atlikums, dalot ar 3, ir 2:  2, 5, 8, 11, 14, …

Jebkuru 3 skaitļu summa no vienas grupas dalās ar 3. Pamatosim to algebriski.

Ir 3 skaitļi, piemēram, no otrās grupas, kurus var izteikt sekojoši:

$3a + 1$;  $3b + 1$;  $3c + 1$. To summa  $3a + 1 + 3b + 1 + 3c + 1 = 3(a + b + c) + 3$.

Summa dalās ar 3. Līdzīgi arī aplūkojot skaitļus no trešās grupas.

Ja aplūkojam doto 4 skaitļu visas izlases pa 3, tad skaidrs, ka šos skaitļus ir jāizvēlas no vienas grupas, piemēram, 1, 7, 13, 19. To summa ir 40, kas dalās ar 4. Vai, piemēram, 5, 11, 17, 23 (to summa ir 56, kas dalās ar 4).

4. Pierādi, ka nepāra skaitļa kvadrāta summa ar pāra skaitli ir nepāra skaitlis!

*Atrisinājums.* Nepāra skaitli apzīmēsim $2n + 1$, bet pāra skaitli apzīmēsim $2m$. Tad darbība ir

$$(2n+1)^2 + 2m = 4n^2 + 4n + 1 + 2m = 2(2n^2 + 2n + m) + 1 = 2(N) + 1$$

Iegūtais rezultāts ir nepāra skaitlis.

5. Kādiem naturāliem skaitļiem *n* ir spēkā apgalvojums, ka katru *n* pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa dalās ar *n*?

*Atrisinājums.* Aplūkosim *n* naturālu skaitļu summu no 1 līdz *n*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n$$

Šī summa dalīsies ar *n* tikai tad, ja *n* ir nepāra skaitlis, jo skaitlim $(n + 1)$ jābūt pārskaitlim.

Ja summē *n* secīgus naturālus skaitļus, sākot ar skaitli $m = a + 1$, tad to summa

$$(a+1) + (a+2) + (a+3) + \cdots + (a+n) = n \cdot a + \frac{n+1}{2} \cdot n$$

arī dalīsies tikai tad, ja *n* ir nepāra skaitlis.

6. Mazā blusiņa lec pa rūtiņu taisni. Pirmais lēciens ir 1 rūtiņa, otrais lēciens ir 2 rūtiņas, trešais 3, un ar katru nākamo lēcienu tas pagarinās par vienu rūtiņu. Vai ir iespējams, a) ka pēc 110 (vai *13*) lēcieniem blusiņa nonāk sākuma punktā? b) pēc 111 (vai *12*) lēcieniem?

*Piezīme.* Ja skaitļi 110 un 111 šķiet pārāk lieli, lai izpildītu uzdevumu, to vietā var izvēlēties mazākus skaitļus 13 un 12.

*Atrisinājums.* a) Ar 110 lēcieniem blusiņa nevar nonākt sākuma punktā. Lai tas būtu iespējams, lēcienu kopējam garumam vienā virzienā ir jāsakrīt ar lēcienu kopējo garumu otrā virzienā. No tā seko, ka visu lēcienu garumu kopējā summa ir pāra skaitlis. Bet skaitļu summa no 1 līdz 110 ir nepāra skaitlis: 1 + 2 + 3 + …+ 110 = 6105 (skat. 5. uzdevuma formulu)

b) Ar 111 lēcieniem blusiņa var nonākt sākuma punktā. Skaitļu summa no 1 līdz 111 ir 6216. Tad kopējais lēcienu garums vienā virzienā ir 3108 un otrā virzienā arī ir 3108. Ievērosim, ka skaitļu summa no 1 + 2 + 3 +…+79 = 3160. Bet atlikušo lēcienu kopējais garums ir 3056. Lai blusiņa varētu atgriezties sākuma punktā, viņai ir vairākas reizes jāmaina lēkšanas virziens. Piemēram, viņa lec uz priekšu, tad 34-to lēcienu lec atpakaļ, tad atkal uz priekšu, tad 70-to lēcienu atpakaļ, tad uz priekšu. Pēc 79-tā lēciena blusiņa būs 3056 rūtiņu attālumā no sākuma punkta. Sākot ar 80 lēcienu blusiņa lec tikai atpakaļ.

Var pamatot, ka blusiņai jāmaina virziens vairāk kā vienu reizi. Pieņemsim pretējo, ka blusiņa iesākumā lec tikai uz priekšu, tad tikai atpakaļ un nonāk izejas punktā. Tad lēcienu kopējais garums uz priekšu sakrīt ar lēcienu garumu atpakaļ. Ja viņa lec *n* lēcienus uz priekšu, tad

$$\frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+1+111}{2} \cdot (11-n)$$

Iegūstam kvadrātvienādojumu

$$2n^2 + n - 111 \cdot 112 = 0$$

Šim kvadrātvienādojumam nav reālu sakņu. Tāpēc blusiņai vairākas reizes jāmaina lēkšanas virziens, lai nonāktu sākuma punktā pēc 111 lēcieniem.

7. Doti četri naturāli skaitļi, kas a>b>c>d. Pierādi, ka reizinājums

   (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) dalās ar 12.

*Atrisinājums.* Jānovērtē skaitļu starpību pāra un nepāra īpašības. Ja visi dotie skaitļi ir ar vienādu paritāti, reizinājums dalās ar 4. Ja diviem skaitļiem ir vienāda paritāte un otriem diviem ir otra paritāte, tad reizinājums dalās ar 4. Ja ir viens skaitlis, kuram ir citāda paritāte nekā 3 atlikušajiem, tad šie 3 skaitļi ar vienādu paritāti, tie veido 3 pārus, tāpēc 3 starpības būs pāra skaitļi, tātad reizinājums dalās ar 4.

Dalāmībai ar 3 aplūkosim sekojošas grupas (kā trešajā uzdevumā):

1) Skaitļi kuri dalās ar 3: 3, 6, 9, 12, 15, …
2) Skaitļi, kurus dalot ar 3, iegūst atlikumu 1: 1, 4, 7, 10, 13, ….
3) Skaitļi, kurus dalot ar 3, iegūst atlikumu 2: 2, 5, 8, 11, 14, …

No dotajiem četriem skaitļiem vismaz divi būs no vienas šādas grupas. Viņu starpība dalīsies ar 3.

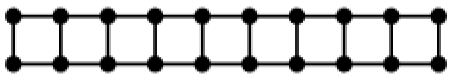
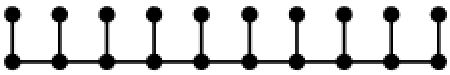
**Punktiņš. (B grupa)** Matemātiskās spēles. *Īsi atrisinājumi un komentāri*

16.11.2018

1. Marta un Anna spēlē skaitļu spēli. Marta nosauc skaitli 1 vai 2, vai 3, vai 4. Tad Anna pieskaita šim skaitlim arī vienu skaitli no 1 līdz 4, tad Marta izvēlas skaitli no 1 līdz 4, tad Anna un tā turpina. Spēle beidzas, kad viena no meitenēm nosauc skaitli 40. Kura no meitenēm var uzvarēt pareizi spēlējot?

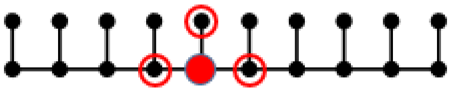
*Atrisinājums.* Uzdevumu risina "no otra gala", aplūkojot spēles beigu situāciju. Ja nosauktais skaitlis ir viens no skaitļiem 36, 37, 38 vai 39, tad tā meitene, kurai ir gājiens, ir uzvarētāja. Kurš skaitlis bija nosaukts, lai no minētajiem skaitļiem ( no 36 – 39) nevarētu izvairīties? Acīmredzot, tas ir skaitlis 35. Līdzīgi spriežot, atrodam, ka "slikto" skaitļu virkne ir 35, 30, 25, …., visi tie skaitļi, kuri ir skaitļa 5 daudzkārtņi. Pirmā meitene Marta nevar nosaukt skaitli 5, tātad uzvarošā stratēģija ir Annai. Viņa secīgi var nosaukt skaitļus 5, 10, 15, … un 40.

2. Iekarotāji ieņem pilsētas. Divi spēlētāji pēc kārtas izvēlas pilsētu ("iekaro" to), ja tā nav savienota ar ceļu ar pretinieka iekaroto pilsētu. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kuram no spēlētājiem ir uzvarošā stratēģija? Ir dotas 2 kartes

a)  b) 

*Komentārs.* Pirmajā a) gadījumā var uzvarēt otrais spēlētājs, izvēloties pilsētas simetriski attiecībā pret kartes centru, kad pirmais spēlētājs savu izvēli ir izdarījis. Ja pirmajam spēlētājam ir gājiens, tad arī otrajam tāds ir. Gadījumā b) uzvarēt var pirmais spēlētājs, ja iesākumā izvēlas vienu no apakšējām vidējām pilsētām. Spēles gaitā pirmais spēlētājs ievēro tādu pašu spēles stratēģiju, kā aprakstīts a) gadījumā.

Attēlā parādīts, kā jāuzsāk spēli b) gadījumā. Sarkanie aplīši norāda, ka tās pilsētas otrais spēlētājs nevar izvēlēties.



3. Uz galda ir *a* āboli, *b* bumbieri un *c* cepumi. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem tieši divus dažādus gardumus. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš uzvarēs, pareizi spēlējot, ja

a) $a = 1, b = 2, c = 3$;   b) $a = 1, b = 4, c = 4$;   c) $a = 2, b = 4, c = 6$;   d) $a = 7, b = 9, c = 15$

*Atrisinājums.*

a) Pirmais spēlētājs ņem ābolu un cepumu. Tad otram spēlētājam jāņem bumbieris un cepums, tad vēl viens pāris bumbieris un cepums paliek pirmajam spēlētājam – viņš uzvarējis.

b) Apskatīsim vispārīgu gadījumu, kad 3 kaudzītēs ir priekšmeti 1 un 2n un 2n. Šajā gadījumā uzvarēs otrais spēlētājs, neatkarīgi no pirmā spēlētāja izvēles. Ja pirmais spēlētājs ņem vienīgo priekšmetu 1 un vienu no priekšmetiem 2n, tad atliek divas kaudzītes, kurās ir 2n un 2n-1 priekšmets. Līdz ar to ir nepāra skaits gājienu, tāpēc pēdējo gājienu izdarīs otrais spēlētājs. Ja pirmais spēlētājs pēc pirmā gājiena atstāj 3 kaudzītes, tad otrais spēlētājs atstāj 2n-2 un 2n-1 priekšmetu. Te ir pāra skaits gājienu (2n – 2), tāpēc atkal uzvar otrais spēlētājs. (Līdzīgi spriežot, ja 3 kaudzītēs ir 1 un 2n+1, un 2n+1 priekšmeti, tad uzvarēs pirmais spēlētājs.)

4. Viesnīcā ir 10 numuri, kur katrs no tiem ir sešvietīgs. Katrā numurā dzīvo pa vienam viesim. Divi spēlētāji pēc kārtas pārvieto visus vienas istabas viesus uz citu numuru tā, lai atbrīvotu istabas, kur veikt remontu. Vairāk kā 6 cilvēki vienā numurā nedrīkst būt. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš no spēlētājiem var uzvarēt pareizi spēlējot? Kas notiks, ja ir 15 trīsvietīgi numuri? Ja ir 18 četrvietīgi numuri?

*Atrisinājums.* Vispirms aplūkosim gadījumu, kad atlikuši 3 numuri, kuros jau izvietoti visi 10 viesi. Tad divos no šiem numuriem būs ne vairāk kā 6 cilvēki, kurus tad var izvietot vienā kopējā numurā, tā izveidojot divus numurus, kuros dzīvo kopumā 10 cilvēki, viņus vienā sešvietīgā numurā ietilpināt nevar. Tā kā katrā gājienā atbrīvojas viens numurs, tad gājienu skaits ir pāra skaitlis un te uzvar otrais spēlētājs.

Ja ir 15 viesi, tad viņus var izvietot 5 trīsvietīgos numuros. Vienā gājienā tiek atbrīvots 1 numurs, tad var atbrīvot 10 numurus, tas ir jāizdara pāra skaits gājienu. Uzvarēs otrais spēlētājs.

Ja ir 18 viesi, tad viņus visus nevar izvietot četros četrvietīgos numuros, jo tur ietilps tikai 16. Šo viesu izmitināšanai nepieciešami vismaz 5 numuri. Atbrīvot var 13 numurus, tā šajā partijā uzvarēs pirmais spēlētājs.