

Punktiņa uzdevumi (A grupa)
8.03.2019

Nodarbības mērķis ir uzdot skolēniem patstāvīgo darbu, kurā viņi parāda, ko apguvuši pulciņa nodarbībās. No skolēniem tiek gaidīti arī rakstiski paskaidrojumi.

1. Uzraksti visus tādus skaitļus, kurus, dalot ar 7, dalījums un atlikums ir vienādi!

Atrisinājums. Ir iespējami 7 dažādi skaitļa 7 atlikumi: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Vienīgie skaitļi, kuru dalījums sakrīt ar atlikumu ir

0; 8; 16; 24; 32; 40; 48.

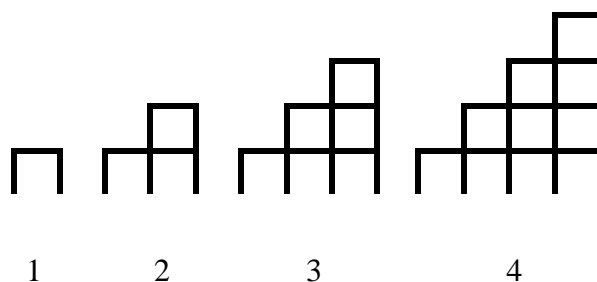
Piemēram, $40 : 7 = 5$ atlikums 5.

2. Šuvējas kastē ir 86 pogas. Tur ir zilas, zaļas, dzeltenas, sarkanas un baltas pogas. Pamato, ka kastē ir vismaz 18 vienas krāsas pogas!

Atrisinājums. Uzdevuma pamatojums var tikt balstīts uz Dirihlē principu: 86 pogas izvietojot 5 dažādu krāsu kastītēs (sarkanā kastītē liek sarkanās pogas, zilajā – zilās, baltajā – baltās, dzeltenajā – dzeltenās, zaļajā – zaļās), vismaz vienā no kastītēm atradīsies vismaz 18 pogas.

Uzdevumu var risināt arī “no pretējā”. Pieņemsim, ka katras krāsas pogas ir ne vairāk kā 17. Tad kopumā būtu ne vairāk kā $5 \cdot 17 = 85$ pogas, kas ir pretrunā ar doto. Tātad būs vismaz 18 kādas vienas krāsas pogas.

3. Paulis risināja sērkociņu uzdevumus. Iesākumā viņš izvietoja 3 sērkociņus kā kvadrāta malas (skat. 1. konstrukciju), tad papildināja konstrukciju, lai būtu atzīmētas 3 kvadrātu malas (skat. 2), tad sešu (skat. 3) un tā turpināja:



Cik sērkociņu Paulis izlietos, lai saliktu šādu desmito figūru?

Atrisinājums. Aplūkosim sērkociņu konstrukciju veidošanās algoritmu.

Pirmais atrisinājums veids:

Pirmajā figūrā ir 3 sērkociņi. Nākamajā figūrā tiek pievienoti vēl 5 sērkociņi, te kopējais sērkociņu skaits ir $3 + 5$.

Trešajā figūrā apakšējā rindā tiek salikti vēl 7 sērkociņi, tāpēc konstrukcijā ir $3 + 5 + 7$ sērkociņi; nākamajā ceturtnā figūrā jau $3 + 5 + 7 + 9$ sērkociņi. Tātad figūra palielinās, tai apakšējā rindā pievienojot nepāra skaitu sērkociņu, par 2 vairāk nekā iepriekš.

Desmitajā figūrā kopumā ir 10 rindas, kurās kopumā ir

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 120 \text{ sērkociņi.}$$

Otrais risinājuma veids:

Skaitīsim atsevišķi vertikāli novietotos sērkociņus un atsevišķi – horizontāli novietotos. Aplūkosim ceturto konstrukciju. Te ir 5 vertikālās rindas, kurās kopumā ir $1+2+3+4+4$ sērkociņi, bet horizontālās rindas ir četras, kurās atbilstoši ir $1+2+3+4$ sērkociņi. Tad kopējais skaits ir $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 4 = 24$ sērkociņi. Līdzīgi desmitajā konstrukcijā

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 10 = 120$$

Piezīme. Kāds no skolēniem piedāvāja saskaitīt kvadrātiņus un to skaitu pareizināt ar 3. Tādā gadījumā tie sērkociņi, kas konstrukcijā novietoti vertikāli un kuri nepieder konstrukcijas ārējam kontūram, tiek ieskaitīti divas reizes. Protams, kvadrātiņus var saskaitīt, bet tad aprēķins būs sekojošais:

$$3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \\ = 3 \cdot 55 - 45 = 120$$

4. Uz tāfeles bija uzrakstīts kāds piecciparu skaitlis. Starpbrīdī Mudīte katram ciparam pieskaitīja vai atņēma 1 un ieguva skaitli 111000. Kāds bija dotais skaitlis? (ievēro – ja pie viencipara skaitļa 9 pieskaita 1, iegūst 10; ja dotajā skaitlī ir cipars 0 un no tā atņems 1, tad samazināsies arī cipars no 0 pa kreisi)

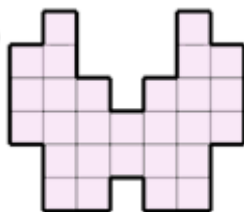
Piemērs: dots skaitlis 48970; var izdarīt šādas darbības:

4	8	9	7	0
-1	+1	+1	-1	-1
4	0	0	5	9

Atbilde. Dotais skaitlis varēja būt 99911, vai 99909, vai 99889. Ar katru no tiem varēja izpildīt sekojošās darbības:

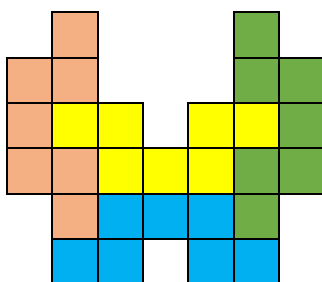
	9	9	9	1	1			9	9	9	0	9			9	9	8	8	9
	+1	+1	+1	-1	-1			+1	+1	+1	-1	+1			+1	+1	+1	+1	+1
1	1	1	0	0	0		1	1	1	0	0	0		1	1	1	0	0	0

5. Sadali figūru četrās vienādās figūrās tā, lai dalījuma līnijas iet pa rūtiņu līnijām!



Atrisinājums. Vispirms jāskaita figūras rūtiņas – tās ir 28, Tātad katra figūra saturēs 7 rūtiņas.

Uzdevuma grūtība ir iztēloties, ka vienādās figūras ir novietotas dažādos virzienos. Atrisinājuma atslēga “slēpjas” divās vidējās rūtiņās, kuras savieno dotās figūras kreiso un labo pusi.



(Pirmās 3 figūras ir izmēģinājumam; atbilde jāiezīmē ierāmētajā figūrā.)

Punktiņš. (A grupa) Raibais tests

22.03.2019

Nodarbības mērķis: iepazīt testu risināšanas metodes.

Komentārs: skolēniem ir pieejami dažādi matemātikas konkursi, kuri tiek organizēti testu formā. Dažkārt testa izpildīšanas ātrumam ir nozīme. Ne visus uzdevumus var uzreiz prātā atrisināt, bet testā var lietot *izslēgšanas* metodi – uzreiz atmest acīmredzami nederīgās atbildes - un *pārbaudes* metodi – pārbaudot, vai dotais skaitlis atbilst uzdevuma nosacījumiem. Ir arī uzdevumi, kurus jāatrisina tradicionālā veidā, lai noskaidrotu pareizo atbildi. Uzdevumi izvēlēti no grāmatas “501 Math Word Problems” (2003). LearningExpress, LLC, New York, USA. Grāmatu veidojis autoru kolektīvs L.Bohlke, E.Chesla un citi.

Testa atbildes.

1. **D**; 2. **C**; 3. **A**; 4. **B**; 5. **B**; 6. **B**; 7. **D**; 8. **B**; 9. **D**; 10. **B**; 11. **D**

Atrisinājumu paskaidrojumi:

1. Divu secīgu nepāra skaitļu summa ir 112. Kāds ir lielākais saskaitāmais?

A 59 **B** 61 **C** 55 **D** 57

Komentārs. Secīgi nepāra skaitļi beidzas ar cipariem (1; 3), (3; 5); (5; 7); (9; 1). Vienīgais skaitļu pāris, kur ciparu summa beidzas ar 2 ir 5 un 7. Pārbaudām, ja lielākais skaitlis ir 57, tad secīgu nepāra skaitļu summa ir $55 + 57 = 112$. Atbilde **D**.

2. Skolotājs izdalīja zīmuļus – uz katriem diviem zaļiem zīmuļiem viņš izdalīja 5 sarkanus. Ja skolotājs izdalīja kopumā 10 zaļos zīmuļus, cik sarkanos zīmuļus viņš izdalīja?

A 45 **B** 20 **C** 25 **D** 10

Komentārs. Uzdevuma nosacījumos ir runa par attiecību 2 : 5. Ja zilie zīmuļi ir 10, tas nozīmē, ka attiecība ir jāpalielina 5 reizes. Ja zilo zīmuļu ir 5 reizes vairāk, tad arī sarkano zīmuļu ir 5 reizes vairāk - $5 \cdot 5 = 25$. Atbilde **C**.

3. Atrodi mazāko no diviem secīgiem pārskaitļiem, kuru reizinājums ir 168!

A 12 **B** 10 **C** 14 **D** 16

Komentārs. Te ir divi secīgu pāra skaitļu pāri, kuru reizinājuma pēdējais cipars ir 8. Tie ir 2 un 4 vai 6 un 8. Pārbaudām $12 \cdot 14 = 168$. Mazākais skaitlis varētu būt 12. Reizinājums $16 \cdot 18 = 288$ Neatbilst dotajam. Atbilde **A**.

4. Miķelim ir 16 lego cilvēciņi. Tas ir par četriem vairāk nekā dubultots Kates cilvēciņu skaits. Cik cilvēciņu ir Katei?

A 10 B 6 C 4 D 12

Komentārs. “Miķelim ir par 4 cilvēciņiem vairāk...” Tas nozīmē, ka Kates dubultots cilvēciņu skaits ir $16 - 4 = 12$. Kates lego cilvēciņu skaits ir puse no šī skaitļa 6. Atbilde **B**.

5. Kuras izteiksmes vērtība ir 18?

A $2 \times 5 + 4$ B $2 \times (4 + 5)$ C $5 \times (2 + 4)$ D $4 \times 2 + 5$

Komentārs. Uzdevums par darbību secību. Atbilde **B**.

6. Sakņu dārza izmērs ir 10 x 12 m. Ja katru dārza malu palielinātu par vienādu skaitu metru, tad tā laukums palielinātos par 104 m^2 . Kāda būtu dārza īsākā mala?

A 13 B 14 C 16 D 17

Komentārs. Dotā dārza izmērs ir 120 kvadrātmetri. Ja to palielina, tad jaunā dārza izmērs ir $120 + 104 = 224 \text{ m}^2$. Ja pieņem, ka dārza malas palielina par 3, tad īsākā mala būtu 13, bet otra 15 m. Tas neder, jo šo skaitļu reizinājums beidzas ar 5. Sadalot skaitli 224 reizinātājos, iegūst $224 = 2^5 \cdot 7$. No visiem dažādiem divu skaitļu reizinājumiem, kādus te var izveidot, derīgi tikai tādi, kur abi skaitļi ir lielāki par 10. Skaitli 224 divos tādos reizinātājos var sadalīt tikai vienā veidā $224 = 14 \cdot 16$. Jaunā dārza īsākā mala ir 14. Atbilde **B**.

7. Ekskursijā dosies 153 skolēni un 11 skolotāji. Cik autobusus ir jāpasūta, ja vienā autobusā ir 48 vietas?

A 5 B 3 C 2 D 4

Komentārs. Kopējais cilvēku skaits ir 164. Pareizinot 48 ar 3, iegūst 144, tātad trijos autobusus vietu ir par maz, jāpasūta 4 autobusi (5 autobusi jau ir par daudz). Atbilde **D**.

8. Dabas takas administrācija saskaitīja, cik cilvēku ar auto atbrauca svētdienā. Te ieradās 57 auto, kuros bija 4 tūristi katrā, 61 auto ar 2 tūristiem, 9 auto ar 1 tūristu. Aprēķini, kāds bija vidējais cilvēku skaits uz vienu auto – novērtē veselos skaitļos!

A 2 B 3 C 4 D 5

Komentārs. Saskaitām visus cilvēkus, to skaits ir $4 \cdot 57 + 2 \cdot 61 + 1 \cdot 9 = 359$. Saskaitām auto $57 + 61 + 9 = 127$. Aprēķinām $127 \cdot 2 = 254$ un $127 \cdot 3 = 381$. Skaitlis 381 mazāk atšķiras no cilvēku skaita 359. Tātad vidēji atbrauca 3 cilvēki vienā auto. Atbilde **B**.

9. Māris iet uz sporta zāli katru ceturto dienu, bet Helēne – katru trešo dienu. Pirmdienā abi ir sporta zālē. Kādā nedēļas dienā viņi atkal satiksies?

A svētdien **B** trešdien **C** piektdien **D** sestdien

Komentārs. Atrisinājumu ir vienkārši atrast, ja to meklē grafiski. Apzīmēsim nedēļas dienas ar cipariem 1, 2, ... 7. Izveidosim nelielu tabulu:

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
M				M				M				M	
H			H			H			H			H	

No tabulas redzams, ka Māris un Helēne sporta zālē satiksies sestdienā. Atbilde **D**.

10. Trīs secīgu pārskaitļu summa ir 102. Kāds ir lielākais no saskaitāmiem?

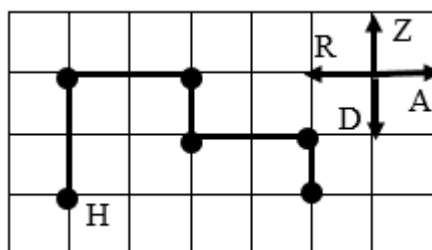
A 34 **B** 36 **C** 38 **D** 32

Komentārs. Ja trīs skaitļu summa ir 102, tad šo trīs skaitļu vidējā vērtība ir $102 : 3 = 34$. Ja šie trīs skaitļi ir secīgi pārskaitļi, tad tie ir 32, 34 un 36. Atbilde **B**.

11. Autobuss uzņēma tūristu grupu pie viesnīcas. Tūristus veda 2 kvartālus ziemeļu virzienā, tad 2 kvartālus uz austrumiem, 1 kvartālu uz dienvidiem, 2 kvartālus uz austrumiem un 1 uz dienvidiem, tad tūristi izkāpa. Kur tūristi atrodas attiecībā pret viesnīcu?

A 2 kvartālus uz ziemeļiem **B** 1 uz austrumiem **C** 3 uz dienvidiem **D** 4 uz austrumiem

Komentārs. Šo ceļojumu ir ērti attēlot uz rūtiņu papīra. Atbilde **D**.



Punktiņš. (A grupa) Nu nav te nekādas kārtības!

29.03.2019

Nodarbības mērķis: veikt kombinatoriskas manipulācijas, izmantojot nelielus priekšmetus, lai iegūtu prasīto sakārtojumu un atrastu noderīgu kārtošanas algoritmu. Nodarbībās netiek prasīts, lai skolēni pierāda gājienu skaita minimālo vērtību.

1. Uz galda rindā ir novietotas 10 glāzes ar pienu un sulu pēc kārtas piens, sula, piens, sula,.... Glāzes jāsakārto tā, lai vispirms rindā ir visas glāzes ar sulu, tad ar pienu. Lai tās sakārtotu, ir atļauts mainīt vietām jebkuras divas blakus esošas glāzes. Kāds ir mazākais glāžu mainīšanas skaits?

Atrisinājums. Pirmajās piecās vietās jābūt glāzēm ar sulu, pēdējās piecās vietās – glāzēm ar pienu. Sanumurēsim glāžu pozīcijas no 1 līdz 10. Nepāra vietās atrodas piens, pāra vietās – sula. Ir racionāli pirmajā vietā novietot tuvāko, tas ir, otro glāzi. Tam ir vajadzīga viena maiņa. (Ja pirmajā vietā tiktu novietota ceturta vai kāda vēl tālāka glāze, tad būtu jāveic vairāk kā viena maiņa.) Otrajā vietā jānovieto tā sulas glāze, kas sākumā atrodas ceturtajā vietā. Tā ir jāmaina ar trešo un otro glāzi, vajadzīgas 2 maiņas. Lai pārvietotu sulas glāzi, kas atrodas sestajā vietā – vajag 3 maiņas. Līdzīgi vēl 4 un 5 maiņas, lai pārvietotu glāzes no astotās un desmitās pozīcijas. Maiņu skaits ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Ja sulas glāzes atrodas pirmajās 5 pozīcijās, tad piena glāzes – pēdējās pozīcijās.

2. Tas pats uzdevums, bet šoreiz ir atļauts pārcelt jebkuras divas blakus stāvošas glāzes uz citu brīvu vietu rindā, noliekot tās blakus un nemainot glāžu secību. Prasītais sakārtojums ir iegūts, ja visas glāzes ir rindā pēc kārtas – vispirms glāzes ar sulu, tad ar pienu. Cik gājienu tu to vari izdarīt? (ievēro, ka katrā rokā var paņemt tieši vienu glāzi, tāpēc abas glāzes jāliek blakus, brīvajās vietās – nevar tās nolikta starp glāzēm, kuras jau ir blakus)

Atrisinājums. Glāžu pārceļšanu nosauksim par gājieniem. Pirmajā gājienā kādas divas glāzes jāpārceļ rindas sākumā vai beigās. Ir izdevīgi, ja gājienā glāzes pārceļ uz iespējamo beigu pozīciju vai arī ja kādā rindas vietā blakus rodas vairākas viena veida glāzes. Iesākumā jāpārceļ glāzes (sula, piens). Novietojot tās rindas sākumā, blakus būs 2 piena glāzes, ja beigās, tad divas sulas glāzes. Sanumurēsim glāžu pozīcijas no 1 līdz 10 un rindas beigās noteiksim vēl divas, pagaidām tukšas pozīcijas 11 un 12. Tad glāzes pārceļ sekojošā secībā: glāzes no pozīcijām (6, 7) pārceļ uz (11, 12). No (1, 2) uz (6, 7); no (7, 8) uz (1, 2); no (2, 3) uz (7, 8); no (10, 11) uz (2, 3); no (5, 6) uz (10, 11); no (1, 2) uz (5, 6). Pozīcijās no 3 līdz 7 ir sulas glāzes, bet pozīcijās no 8 līdz 12 – piena glāzes.

3. Plauktā stāv deviņi “Sprīdīša bibliotēkas” sējumi, kas gandrīz sakārtoti pēc kārtas, vienīgi pirmais sējums novietots aiz devītā. Bibliotekārs kārto grāmatas, ņemot jebkuras divas blakus stāvošas un ievietojot tās starp citām, nemainot to secību. Cik pārvietošanu viņam vajag, lai grāmatas būtu sakārtotas?

Atrisinājums. Bibliotekāram pietiek ar 4 pārvietojumiem. Viņš ņem otro un trešo sējumus un pārvieto tos rindas beigās, tad 4-to un 5-to sējumus pārvieto beigās, tāpat arī 6. un 7., kā arī 8. un 9. Grāmatas ir sakārtotas pēc kārtas.

Piezīme. Var risināt līdzīgu uzdevumu, kur plauktā visu sējumu secība ir otrādi – no 7 līdz 1, bet uzdevuma nosacījumi tie paši.

4. Uz rūtiņu kvadrāta ar izmēru 4×4 rūtiņām ir izvietoti 8 melni un 8 balti kauliņi. Ir jāpanāk, lai augšējās divās rindās ir visi baltie kauliņi, bet apakšā – visi melnie. Ir atļauts mainīt vietām divus blakus esošus kauliņus. Kāds ir mazākais gājienu skaits, lai garantēti panāktu prasīto situāciju?

Komentārs. Šis ir izpētes uzdevums, jo nav dots noteikts kauliņu sākotnējais izvietojums. Te skolēniem pašiem ir jāatrod sava konkrētā izvietojuma atrisinājums. Viens no “sliktākajiem” variantiem ir, ja visi baltie kauliņi atrodas apakšējās divās rindās. Tad priekšpēdējās rindas kauliņiem katram vajag 2 gājienu, lai nonāktu augšējā rindā. Apakšējās rindas kauliņiem arī vajag tikpat daudz gājienu, lai nonāktu otrajā rindā no augšas. Kopā nepieciešami 16 gājieni. Tikpat daudz gājieni ir nepieciešami, ja baltie kauliņi novietoti divās blakus kolonās un arī melnie kauliņi ir blakus kolonās. Citos izvietojumos gājienu skaits var būt mazāks.

5. Uz apļa ir izvietoti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 pretēji pulksteņrādītāja virzienam. Ir atļauts samainīt divus tādus skaitļus, starp kuriem ir trešais skaitlis. Sakārto skaitļus otrādā secībā! (pamēģini to pašu, ja ir 7 skaitļi!)

Atrisinājums. Mainām vietām sekojošos skaitļu pārus (1; 3), (4; 6), (8; 4), (8; 6); (5; 7).

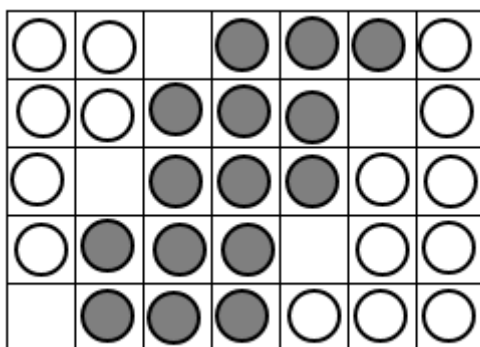
Ja ir doti tikai 7 skaitļi, tad ir dots nepāra skaits skaitļu, nepieciešami vairāki gājieni, piemēram: (7;2), (4; 6), (1; 3), (3; 4), (1; 4), (5; 4), (5; 1), (5; 3), (5; 6), (6; 3), (6; 1).

6. Baltas un melnas figūriņas novietotas uz 6 lauciņiem, viens lauciņš līnijas beigās ir brīvs:



Vienā gājienā figūriņu var pārbīdīt uz tukšu blakus lauciņu, vai arī pārcelt pāri vienai, divām vai 3 figūriņām uz tukšu lauciņu. Pārvieto figūras tā, lai kreisā pusē ir tukšais lauciņš, tad 3 melnas un tad 3 baltas figūriņas! Kāds ir mazākais gājienu skaits?

Atrisinājums. Tā kā drīkst pārcelt kauliņu pāri 3 citiem, tad labo balto pārceļam uz pēdējo tukšo pozīciju. Līdzīgi pārvieto melno kauliņu un tā turpina. Pārvietojumu shēma parādīta šeit:



Nevar veikt mazāk kā 5 gājienus. Tikai viena figūriņa atrodas savā vietā un nav jāpārbīda – tā ir figūriņa uz centrālā lauciņa. Pārējās 5 figūriņas jāpārvieto, tāpēc vajadzīgi vismaz 5 gājieni