Punktiņš. (A grupa) “Divi pelēni sēž aiz kastes….sasiesim astes!”

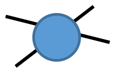
18.01.2019

Nodarbības mērķis: uzdevumu risināšanā mācīsimies uzdevuma nosacījumus attēlot shematiski. Mācīsimies vizuāli domāt, izvērtēt iespējamos variantus. Uzmanīgi lasīsim uzdevuma nosacījumus.

1. Apgabalā ir 17 ciemati, no katra ciemata uz citiem apgabala ciematiem iziet 4 ceļi. Par katra ceļa uzturēšanu katrs ciemats pašvaldībai maksā 300 eiro gadā. a) Cik naudas pašvaldība saņem kopumā? b) Iedzīvotāju trūkuma dēļ 5 ceļus slēdza. Cik tagad pašvaldība saņem?

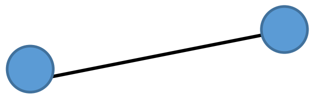
Atrisinājums. Pakāpeniski aplūkosim uzdevuma nosacījumus un spriedīsim, ko no tiem var secināt:

1) Ja no katra ciemata iziet 4 ceļi, tas izskatās:



Par to uzturēšanu ciemats maksā pašvaldībai 1200 eiro gadā.

2) Katrs ceļš savieno divus ciematus, tas izskatās:



Tad pašvaldība par vienu ceļu saņem 600 eiro gadā.

3) Cik pavisam ir ceļu šajā ciematu apgabalā? Saskaitīsim visus ceļu galus, kuri pieiet katram ciematam

$$17 \cdot 4 = 68$$

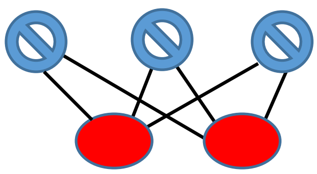
Te esam saskaitījuši katru ceļu divas reizes (jo ceļš savieno divus ciematus). Tāpēc ceļu skaits ir divas reizes mazāks - 34 ceļi.

Pašvaldība kopumā saņem $34 \cdot 600 = 20400$ eiro gadā.

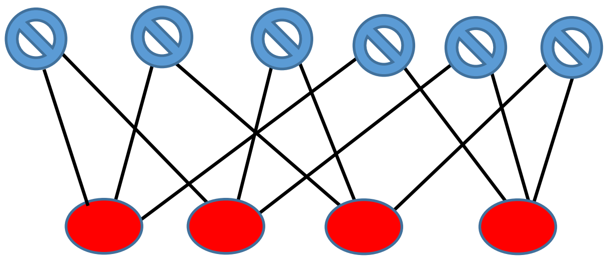
4) Ja slēdz 5 ceļus, tad pašvaldība vairs nesaņem 600 eiro par katru no tiem, kopumā 3000. tad ieņēmumi ir 17400.

2. Divās rindās saliktas pogas – vienā rindā sarkanas, bet otrā rindā zilas. Katra zilā poga ir sasieta ar divām sarkanām, bet katra sarkanā – ar 3 zilām. Cik pogu varētu būt katrā rindā? Uzzīmē vismaz divus atšķirīgus gadījumus!

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka ir vismaz 3 zilās pogas un vismaz 2 sarkanās pogas. Tāpēc var uzzīmēt vismazāko gadījumu:



Ir vienkārši ievērot, ka zilo pogu skaits noteikti dalīsies ar 3, bet sarkano pogu skaits būs pāra skaitlis – tad var zīmēt vairākas šādas atsevišķas grupas. Bet pogas var būt sasietas tā, ka nav divas (vai vairāk) atsevišķas grupas, piemēram:



3. Rindā ir 4 sarkanas pogas, kur katrai ir piesietas 3 zilās pogas. Uzzīmē, cik zilo pogu varētu būt!

Atrisinājums. Uzdevumā nav teikts, kā piesieta katra zilā poga. Var gadīties, ka katra zilā poga piesieta visām sarkanajām pogām, tad zilo pogu skaits ir 3 un katra zilā ir sasieta ar katru sarkano pogu. Var gadīties, ka katrai zilajai pogai pieiet tikai viens pavediens, tad zilo pogu skaits ir 12. Var arī gadīties, ka zilajām pogām pieiet dažāds pavedienu skaits. Tāpēc vismazākais iespējamais zilo pogu skaits ir 3, lielākais – 12. zilo pogu skaits var būt jebkurš skaitlis no 3 līdz 12.

4. Kādā jautrā pasākumā ieradās liels draugu pulks. Katrs zēns te draudzējās tieši ar trim meitenēm, bet katra meitene draudzējās tieši ar pieciem zēniem. Cik bērnu bija šajā pulkā, ja viņu skaits bija vismaz 19, bet ne vairāk kā 25?

Atrisinājums. Līdzīgi kā otrā uzdevuma atrisinājumā, varam spriest, ka meiteņu skaits dalās ar 3, bet zēnu skaits dalās ar 5. Varam izveidot tabulu:

Meitenes	Zēni	Kopā
3	5	8
6	10	16
9	15	24
12	20	32

Ievērojot, ka bērnu skaits nav mazāks par 19 un nav lielāks par 25, tad vienīgais iespējamais risinājums ir, ka pasākumā bija 9 meitenes un 15 zēni, kopā 24 bērni.

5. Reiz dzīvoja karalis, kuram bija 3 dēli, arī turpmāk karaļa dinastijā dzima tikai dēli. Cik daudz pēcnācēju kopumā karalim bija, ja 24 viņa pēcnācējiem katram bija 3 dēli, bet visiem pārējiem bērnu nebija?

Komentārs. Lai labāk izprastu uzdevuma nosacījumus, ieteicams zīmēt karaļa dzimtas koku. Ir dažādi varianti, kā dzimta var izvērsties, iespējami dažāda veida dzimtas koki – vai dzimta uzreiz "iet plašumā", tas ir, katram no trim karaļa dēliem ir 3 pēcnācēji un tiem atkal katram ir 3 pēcnācēji un tā joprojām. Vai arī, piemēram, dzimtā attīstās tikai viens dzimtas zars – katrā paaudzē ir tikai viens dzimtas turpinātājs.

Atrisinājums. Karalim bija 3 dēli un vēl 24 viņa pēcnācējiem bija katram 3 dēli. Tāpēc kopējais pēcnācēju skaits ir aprēķināms sekojoši: $25 \cdot 3 = 75$. Karalim bija 75 pēcnācēji.

6. Bibliotēkā satikās 9 sirmi bibliotekāri un gribēja savā starpā sarokoties. Bet diviem bibliotekāriem bija pilnas rokas ar grāmatām, tāpēc viņi tikai pamāja ar galvu. Visi pārējie sarokojās vienādu skaitu reižu. Ar cik draugiem katrs bibliotekārs sarokojās?

Atrisinājums. Ja diviem bibliotekāriem bija aizņemtas rokas, tad sarokoties varēja tikai septiņi. Pieņemsim, ka katrs sarokojās vismaz ar vienu citu kolēģi. Nav iespējams, ka katrs sarokojās tieši ar vienu citu kolēģi, jo tad būtu sarokojušies atsevišķi kolēģu pāri, bet 7 cilvēkus pāros iedalīt nevar. Ir iespējams, ka kolēģi katrs ir sarokojušies tieši ar diviem kolēģiem, vai ar 4, vai katrs ar katru (ar sešiem). Nepāra sarokošanās skaits nav iespējams. Ja saskaita katra bibliotekāra izdarīto rokas spiedienu skaitu un tie visi katram ir vienādi ar n, tad kopējais katra bibliotekāra rokas spiedienu skaits ir $7 \cdot n$. Ievērojot, ka vienā sveicienā piedalās 2 dalībnieki, tad katra šāda sarokošanās ir ieskaitīta 2 reizes. Tāpēc skaitlim n ir jābūt pāra skaitlim.

Piezīme. Skolēniem var ierosināt, lai viņi shematiski attēlo sasveicināšanos, kur katrs no bibliotekāriem sasveicinās tieši ar diviem citiem (četriem; sešiem) kolēģiem.

Punktiņš. (A Grupa) Ķer zaķi!

25.01.2019

Nodarbības mērķis: iepazīties ar Dirihlē teorēmu par "zaķiem un būriem" un tās pielietošanu. Mācīties veidot uzdevumu pamatojumu un pierādījumu konstrukcijas.

Dirihlē teorēma (vienkāršots variants): Ja divos būros jāizvieto 3 zaķi, tad vismaz vienā būrī būs vismaz 2 zaķi.

1. Ir septiņi zaķi un 3 būrīši. Cik variantos zaķus var izvietot būrīšos? Atrodi visas iespējas!

Atrisinājums. Šo uzdevumu uzdod pirms iepazīšanās ar Dirihlē teorēmu, lai skolēni varētu izpētīt izvietojumu īpašības. Šo uzdevumu arī var pārfrāzēt: cik dažādos veidos var iegūt skaitli 7 no ne vairāk kā 3 saskaitāmajiem?

$7 + 0 + 0 = 7$; $6 + 1 + 0 = 7$; $5 + 2 + 0 = 7$; $4 + 3 + 0 = 7$; $5 + 1 + 1 = 7$; $4 + 1 + 2 = 7$;

$3 + 1 + 3 = 7$; $3 + 2 + 2 = 7$

Apskatām visu summu lielākos skaitļus: 7; 6; 5; 4; 5; 4; 3; 3. Mazākais no šiem skaitļiem ir 3. Tātad – vismaz vienā būrī būs vismaz 3 (vai vairāk) zaķi.

2. Paskaidro, kāpēc no jebkuriem trīs naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru summa ir pāra skaitlis!

Atrisinājums. Starp 3 naturāliem skaitļiem ir vismaz divi ar vienādu paritāti. To summa ir pārskaitlis.

Piezīme. Var arī aplūkot visas iespējas: P, P, P;   P, P, N;   P, N, N;   N, N, N. Te: "*būri*" pāra/nepāra īpašība, "*zaķi*" – 3 dotie skaitļi.

3. Riņķī ir izkārtoti 9 aplīši. Vai var katrā aplītī ierakstīt vienu no deviņiem skaitļiem no 1 līdz 9 tā, lai jebkuros divos blakus esošos aplīšos skaitļu summa ir nepāra skaitlis?

Atrisinājums. Starp skaitļiem no 1 līdz 9 ir 5 nepāra skaitļi un 4 pāra skaitļi. Lai izpildītu uzdevuma nosacījumus, aplī visur blakus jābūt vienam pāra un otram nepāra skaitlim. Tā kā nepāra skaitļu ir vairāk, aplī blakus noteikti atradīsies divi nepāra skaitļi, kuru summa ir pāra skaitlis. Te: "*būri*" – vietas aplī starp pāra skaitļiem, "*zaķi*" – nepāra skaitļi.

4. Klasē ir 30 skolēni. Tomass matemātikas kontroldarbā ielaida 13 kļūdas. Nevienam citam skolēnam nebija tik daudz kļūdu. Pierādi, ka vismaz trim skolēniem bija vienāds kļūdu skaits (varbūt nebija nevienas kļūdas)!

Atrisinājums. Pavisam iespējami 13 pielaisto kļūdu varianti, neskaitot Tomasa rezultātu: neviena kļūda, 1 kļūda, 2, 3, …..12 kļūdas. Kļūdu skaits tiek pieņemts kā "*būri*", skolēni –"*zaķi*". Ja pieņem, ka vienādi rezultāti ir ne vairāk kā diviem skolēniem, tad, aprēķināsim lielāko iespējamo šādu gadījumu skaitu: iespējams, ka ir tieši 2 skolēni, kuriem nav neviena kļūda, tieši divi, kuriem ir 1 kļūda, …. tieši divi, kuriem ir 12 kļūdas, tad klasē būtu $2 \cdot 13 = 26$ skolēni. Tas neatbilst dotajam. Tātad 29 zaķus izvietojot 13 būros, vismaz vienā būri būs vismaz 3 zaķi.

5. Kādu vakaru Sniegbaltīte cienāja rūķus ar tikko ceptiem pīrādziņiem. Visi 10 rūķi kopumā apēda 35 pīrādziņus. Pamato, ka vismaz viens rūķis apēda vismaz 5 pīrādziņus, ja zināms, ka tieši viens rūķis apēda 1 pīrādziņu, otrs rūķis – tieši divus, bet vēl trešais rūķis – 3 pīrādziņus!

Atrisinājums. Pirmie trīs rūķi apēda kopumā 6 pīrādziņus. Atlika vēl 29 pīrādziņi. Ja 7 rūķi katrs būtu apēduši ne vairāk kā 4 pīrādziņus, tad viņi kopumā būtu apēduši ne vairāk kā 28 pīrādziņus, kas ir mazāk nekā dots. Tātad vismaz viens rūķis apēda vismaz 5 pīrādziņus. (Te: "*būri*" ir rūķi, bet "*zaķi*" – pīrādziņi.)

6. (* grūts uzdevums) Galdnieka plauktā ir dažāda garuma dēlīši, kuru garumi ir 1, 2, 3, … un 15 dm. Galdnieks izvēlējās kaut kādus 8 dēlīšus, kuri visi bija dažāda garuma. Vai starp izvēlētajiem dēlīšiem noteikti var atrast 3 tādus, ka divas no to garumu starpībām ir vienādas?

Piezīme. Lai skolēni labāk izprastu uzdevuma nosacījumus, ir ieteicama neliela uzskatāma demonstrācija – dēlīšu vietā var izmantot kartona lapiņas. Atbilstošais skaidrojums iesākumā var būt "nematemātisks" (skat. atrisinājumu). Uzdevumu risina, konstruējot pretpiemēru.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ko nozīmē, ka starp 3 izvēlētiem dēlīšiem divas to garumu starpības ir vienādas. Pieņemsim, ka izvēlēto dēlīšu garumi ir 2, 4, 6 dm. Te iespējams aprēķināt 3 starpības: 4 – 2 = 2;   6 – 4 = 2; 6 – 2 = 4. Šajā piemērā ir divas garumu starpības, kuras vienādas. Ja dēlīšus novieto vienu virs otra tā, ka to kreisie gali sakrīt un apakšā ir dēlītis 6 dm, vidū 4 dm un augšā 2 dm, tad redzams, ka labajā sakārtojuma pusē vidējā dēlīša gals atrodas pa vidu starp abu pārējo dēlīšu labās puses galiem.
Vienkāršības pēc aplūkosim atbilstošu situāciju uz skaitļu ass. Uz skaitļu ass ir atlikti skaitļi 0, 1, 2, …., 15. Tie atbilst dēlīšu garumiem – dēlīša garumu var izmērīt, atliekot to no 0 iezīmes.
Pirmīt aplūkotā situācija nozīmē, ka dotie 3 skaitļi uz skaitļu ass veido **simetrisku grupu**, tas ir, otrais skaitlis atrodas tieši pa vidu starp mazāko un lielāko skaitli. Tad uzdevuma jautājums ir – vai starp izvēlētajiem 8 skaitļiem noteikti atradīsies 3 tādi skaitļi, kuri uz skaitļu ass veido simetrisko grupu?
Pieņemsim, ka var atrast tādu 8 skaitļu izlasi, ka uzdevuma nosacījums neizpildīsies. Mēģināsim šādu virkni konstruēt. Vispirms aplūkosim pirmos 7 skaitļus no 1 līdz 7 un noskaidrosim, kāds ir lielākais skaitļu skaits, ko varam izvēlēties, lai nekādi 3 skaitļi no šiem nebūtu simetriski izvietoti uz skaitļu ass. Nevaram izvēlēties 3 skaitļus pēc kārtas, jo tie veidos divas starpības vienādas ar skaitli 1. Varam izvēlēties, piemēram, skaitļus 1, 2, 4. Starpības, ko veido šie skaitļi ir 1, 2, 3. Varam izvēlēties ceturto skaitli, piemēram, 5. Tad starpības vienādas ar 1 veido četri skaitļi – 1; 2 un 4; 5. Arī starpību 3 veido divi dažādi skaitļu pāri (1; 4 un 2; 5). Skaitli 6 šajā virknē iekļaut nevar, jo tad veidojas simetriska grupa 2; 4; 6. Skaitli 7 arī nevar iekļaut, jo veidosies simetriska grupa 1; 4; 7. Līdzīgi var atrast vēl divas četru skaitļu virknes, kuras nesatur simetrisku 3 skaitļu grupu:

1; 2; 4; 5
1; 3; 4; 6
1; 2; 5; 7

Aplūkosim virkni 1; 2; 5; 7 un mēģināsim pievienot tai vēl 4 skaitļus, lai neveidotos simetriska 3 skaitļu grupa. Nevar pievienot 8, jo tad būs simetriska grupa 2; 5; 8. Nevar pievienot 9, jo 1; 5; 9 ir simetriska grupa. Nevar arī pievienot 12 un 13. Atliek skaitļi 10; 11; 14; 15. Bet 10 un 15 vienlaikus dotai virknei pievienot nevar (citādi būs simetriskā grupa 5; 10; 15). Tas parāda, ka šajā gadījumā 8 skaitļu virkni bez simetriskās grupas izveidot nevar.
Līdzīgi aplūko skaitļu virkni 1; 3; 4; 6.
Aplūkojot sākotnējo skaitļu virkni 1; 2; 4; 5, atrodam, ka ***var*** *izveidot tādu 8 skaitļu virkni, kura* ***nesatur*** *3 skaitļu simetrisku grupu:*
1; 2; 4; 5; 10; 11; 13; 14