Punktiņš. (A Grupa) Grāmatvežu problēmas
1.02.2019

Nodarbības mērķis: Aplūkot darbības ar tabulām. Izmantot skaitļu kombinatorās īpašības, apgūt metodi "summēšana dažādos veidos".

1. Tabulā 3 x 3 rūtiņas jebkādā secībā ieraksti visus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā vienu skaitli). Tad izveido otru tabulu 3 x 3 rūtiņas un arī te jebkādā secībā ieraksti visus skaitļus no 1 līdz 9. Izveido trešo tabulu 3 x 3 rūtiņas. Trešajā tabulā ieraksti pirmo divu tabulu skaitļu summu, tas ir, iedomājies, ka tabulas var uzlikt vienu uz otras un saskaita tieši tos divus skaitļus, kas atrodas viens virs otra un rezultātu ieraksta trešajā tabulā tieši tajā pašā pozīcijā. Apskati, kādi skaitļi ir trešajā tabulā – vai tie ir dažādi, vai ir kādi vienādi skaitļi?

Komentārs. Pirmais ir iesildīšanās uzdevums, lai skolēni saprastu kā notiek divu tabulu saskaitīšana. Skolēni var iegūt dažādus rezultātus. Nākamais uzdevums jau ir konkrēts, kur jāatrod speciāls skaitļu izvietojums.

2. Vai skaitļus pirmajās divās tabulās var ierakstīt tā, lai trešajā tabulā:

   a) Visi skaitļi ir vienādi?
   b) visi skaitļi ir dažādi?
   c) ir visi skaitļi no 10 līdz 18?
   d) kādu secīgu deviņu skaitļu virkni vari iegūt?
      (secīgi skaitļi – piemēram, 21, 22, 23, 24, …)

   Uzraksti piemērus visiem gadījumiem a); b); c) un d)!

   Atrisinājums. a) Ievērosim, ka 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5. Skaitļus abās tabulās var izvietot tā, lai trešajā tabulā visu skaitļu summas ir 10:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

+

9	8	7
6	5	4
3	2	1

=

10	10	10
10	10	10
10	10	10

e) Abās tabulās var vienkārši ierakstīt visus skaitļus pēc kārtas, tad trešajā tabulā būs skaitļi 2, 4, 6, …
f) Skaitļus no 10 līdz 18 iegūt nevar. Skaitļu summa no 10 līdz 18 ir 126, bet skaitļu summa no 1 līdz 9 ir 45. Tāpēc no divām tabulām kopējā skaitļu summa ir tikai 90.
g) Ievērojot, ka visu doto skaitļu summa ir 90, var izveidot secīgu skaitļu virkni 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

+

6	7	5
9	1	8
4	2	3

=

7	9	8
13	6	14
11	10	12

3. Vai skaitļus pirmajās divās tabulās vari ierakstīt tā, lai trešajā tabulā ierakstītu skaitļu starpības, atņemot no lielākā mazāko skaitli, tās būtu visi skaitļi no 0 līdz 8?

Atrisinājums. Jā, var:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

+

5	9	8
6	4	3
7	2	1

=

4	7	5
2	1	3
0	6	8

4. Tabulas 3 x 3 rūtiņās ieraksti skaitļus 0 un 1 tā, lai visās rindās un kolonās būtu vienādas skaitļu summas! Tas pats uzdevums, ja tabulā jāieraksta skaitļi 0, 1 un 2!

Atrisinājums.

1	1	0	2
1	0	1	2
0	1	1	2
2	2	2	

0	1	2	3
2	0	1	3
1	2	0	3
3	3	3	

5. Vai vari tabulā 3 x 3 rūtiņas ierakstīt skaitļus 0, 1 un 2 tā, lai katrā rindā, katrā kolonā un uz abām diagonālēm skaitļu summa ir atšķirīga?

Atrisinājums. Iespējamās 3 skaitļu summas ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 – kopā 7 dažādas summas. Bet tabulā ir 3 rindas, 3 kolonas un 2 diagonāles – kopā 8 līnijas. Tāpēc uzdevumā prasītais nav iespējams.

6. Ir doti seši naturāli skaitļi $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6$, kuru visu summa ir 10 un arī septiņi skaitļi $b_1;\ b_2;\ b_3;\ b_4;\ b_5;\ b_6;\ b_7$, kuru summa ir 13. No šiem skaitļiem izveidoja divas tabulas. a) Tabulai ir 6 rindas un 7 kolonas. Pirmajā rindā ir visas divu skaitļu summas, kuras iegūst pie a_1 pēc kārtas pieskaitot visus b skaitļus. Otrajā rindā b skaitļus pēc kārtas pieskaita skaitlim a_2. Un tā turpina, veicot darbības ar visiem atlikušajiem skaitļiem. Kāda ir tabulas visu skaitļu summa? b) Veido tabulu, kurā ir 6 rindas un 7 kolonas. Līdzīgi pirmajā rindā raksta visus reizinājumus, kurus iegūst a_1 reizinot pēc kārtas ar visiem b skaitļiem. Tabulas pārējās rindas aizpilda līdzīgi. Kāda ir visu tabulas skaitļu summa?

Atrisinājums. a) Aplūkosim tabulu:

a_1+b_1	a_1+b_2	a_1+b_3	a_1+b_4	a_1+b_5	a_1+b_6	a_1+b_7
a_2+b_1	a_2+b_2	a_2+b_3	a_2+b_4	a_2+b_5	a_2+b_6	a_2+b_7
a_3+b_1	a_3+b_2	a_3+b_3	a_3+b_4	a_3+b_5	a_3+b_6	a_3+b_7
a_4+b_1	a_4+b_2	a_4+b_3	a_4+b_4	a_4+b_5	a_4+b_6	a_4+b_7
a_5+b_1	a_5+b_2	a_5+b_3	a_5+b_4	a_5+b_5	a_5+b_6	a_5+b_7
a_6+b_1	a_6+b_2	a_6+b_3	a_6+b_4	a_6+b_5	a_6+b_6	a_6+b_7

Ievērosim, ka katrā rindā kopumā ir saskaitīti visi skaitļi b, tātad to kopējā summa ir

$6 \cdot 13 = 78$

Savukārt katrā kolonā kopumā ir saskaitīti visi skaitļi a, to kopējā summa ir 70. Tātad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir 78 + 70 = 148.

b) Izveidosim otru tabulu:

$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	$a_1 b_4$	$a_1 b_5$	$a_1 b_6$	$a_1 b_7$
$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	$a_2 b_4$	$a_2 b_5$	$a_2 b_6$	$a_2 b_7$
$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	$a_3 b_4$	$a_3 b_5$	$a_3 b_6$	$a_3 b_7$
$a_4 b_1$	$a_4 b_2$	$a_4 b_3$	$a_4 b_4$	$a_4 b_5$	$a_4 b_6$	$a_4 b_7$
$a_5 b_1$	$a_5 b_2$	$a_5 b_3$	$a_5 b_4$	$a_5 b_5$	$a_5 b_6$	$a_5 b_7$
$a_6 b_1$	$a_6 b_2$	$a_6 b_3$	$a_6 b_4$	$a_6 b_5$	$a_6 b_6$	$a_6 b_7$

Ievērosim, ka pirmās rindas summā var paņemt pirms iekavām a_1:

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + a_1b_5 + a_1b_6 + a_1b_7 =$$

$$= a_1(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7) = a_1 \cdot 13$$

Katrā rindā ir kāds kopīgs reizinātājs, tad visas tabulas summa

$$a_1 \cdot 13 + a_2 \cdot 13 + a_3 \cdot 13 + a_4 \cdot 13 + a_5 \cdot 13 + a_6 \cdot 13 =$$

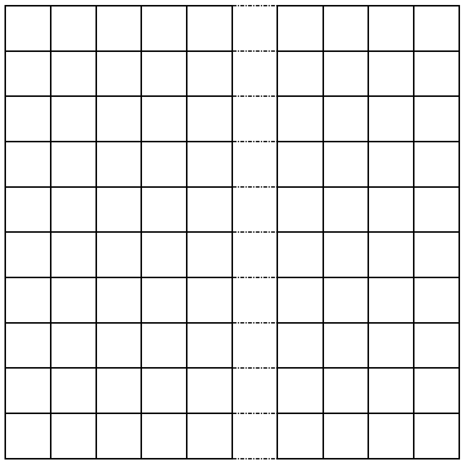
$$= 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 13 \cdot 10 = 130$$

Punktiņš (A Grupa) stāsta par vecās mājas bēniņos atrasto noslēpumaino lādi.
08.02.2019

Nodarbības mērķis: Gatavojoties uz Republikas Novadu Matemātikas olimpiādi, ir paziņots, ka viens no uzdevumiem būs par svēršanu. Šajos uzdevumos viens no svarīgākiem sekmīga atrisinājuma nosacījumiem, ir māka pareizi sagrupēt dotos elementus. Tāpēc ir izvēlēti uzdevumi, kuros var lietot grupēšanas metodi. Pēdējais uzdevums ir par svēršanu.

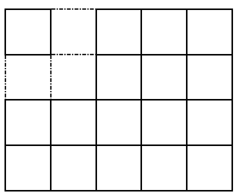
1. Lādes augšpusē bija kvadrātveida tīkliņš, kur aukliņas bija sasietas tā, ka tīkliņš veidoja 10 x 10 kvadrātus. Ņemot to laukā, tīkliņš sadalījās 2 daļās. Kāds varēja būt mazākais sairušo aukliņu skaits? (viena aukliņa savieno divus tīkla mezglus – kā rūtiņas viena mala).

Atrisinājums. (Iesildīšanās uzdevums). Ja tīkliņš saira divās atsevišķās daļās, varētu būt, ka satrūka vienas rindas visas aukliņas:



Te kopumā būs satrūkušas 11 aukliņas. Aplūkosim uzdevumu sīkāk.

Šādam tīklam ir 3 veidu rūtiņas – stūra rūtiņa, rūtiņa pie malas un iekšēja rūtiņa. Ja pieņem, ka mazākais tīkla gabals ir tikai viena rūtiņa, tad jāapskata minētās. Lai atdalītos kāda iekšējā rūtiņa, jāpārtrūkst 8 apkārt esošām aukliņām. Lai atdalītos malējā rūtiņa, pārtūks 6 aukliņas. Tātad vismazākais ir 4 pārtrūkušas aukliņas, ja no tīkliņa ir notrūkusi viena stūra rūtiņa:



2. Antons lādē atrada 20 marmora lodītes un izlika tās rindā. Izrādījās, ka katrām divām blakus esošām lodītēm masas atšķiras tieši par 1 gramu. Antons vēlējās lodītes sadalīt divās vienādās daļās godīgi, lai pusi atdotu savai māsai Helēnai. Vai tas vispār ir iespējams - sadalīt lodītes tā, lai abās daļās ir vienāds arī lodīšu kopējais svars?

Atrisinājums. Apskatīsim divas blakus esošas lodītes – tās atšķiras par 1 gramu, smagāka ir vai nu pirmā vai otrā lodīte. Par nākamajām divām lodītēm var teikt to pašu. No abiem pāriem ņemam vieglākās lodītes un samainām vietām, tad abos pāros ir vienāds lodīšu kopējais svars.

Piemērs: lodīšu svari ir 2; 3; 2; 1. Pirmais pāris (2 un 3 gramu lodītes) un otrais pāris (2 un 1 grami). No pirmā pāra ņemam lodīti ar svaru 2 grami, bet no otrā – lodīti ar svaru 1 grams un tās samainām vietām. Pirmā pāra svars: $1 + 3 = 4$ grami; otrā pāra svars: $2 + 2 = 4$ grami. Tagad var katru pāri nolikt atsevišķi.

Līdzīgi rīkojas ar katrām nākamām četrām pēc kārtas sekojošām lodītēm. Pārus ar vienādo svaru liek katru savā grupā. Tā kā lodīšu skaits ir 20, tad izveidosies 10 pāri un pieci "pāru pāri" jeb četrinieki. Tātad lodītes var sadalīt divās vienādās daļās pēc skaita un tā, lai katra grupa sver vienādi.

3. Helēna lādē atrada īstu pērļu virkni, kura bija savērta uz izturīga linu diega. Te bija baltās un ļoti retās sārtās pērles. Vienā virtenes galā bija baltā pērle, bet otrā – sārtā pērle. Helēna iedomājās – cik vietās šajā virknē atrodas blakus baltās un sārtās pērles? Nosaki, vai vietu skaits, kur blakus ir dažādu krāsu pērles, ir pāra vai nepāra skaitlis?

Atrisinājums. Aplūkosim kādu piemēru, apzīmējot baltas pērles ar burtu B, bet sārtās pērles – ar burtu S:

B – S – S – S –B – B – S – S – B – S

Te vietas, kur blakus atrodas divas sārtās pērles ir 3, vietas, kur blakus atrodas divas baltās pērles ir 1, bet vietas, kur blakus atrodas sārtās un baltās (B – S vai S – B) ir 5, šajā piemērā nepāra skaitlis. Rezultātu neietekmē tās vienas krāsas pērles, kas seko viena otrai. Tāpēc varam iedomāties, ka no vairāku secīgu vienas krāsas pērļu posma varam "izņemt" liekās pērles, atstājot tur tikai vienu no tām. Šāda virtene izskatīsies:

B – S – B – S – B - …….

Virkne sākas ar balto pērli, bet beidzas ar sārto, tāpēc pērles var sadalīt pāros – balta – sārta, kas nozīmē, ka pērļu skaits ir pāra skaitlis. Bet savienojošo diedziņu skaits ir nepāra skaitlis. Tāpēc Helēnas atrastajā pērļu virknē tādu vietu, kur blakus ir dažādas krāsas pērles, ir nepāra skaits.

4. Antons no lādes izņēma astoņus vienāda izmēra kubiņus, kuru skaldnes bija nokrāsotas vai nu zilas, vai sarkanas. Amēlija saskaitīja, ka no visām skaldnēm trešā daļa ir zilas. Antons no kubiņiem salika lielāku kubu. Amālija ievēroja, ka šim kubam ārpusē trešā daļa kubiņu skaldņu ir sarkanas. Antons teica: "Tādā gadījumā kubiņus var pagriezt tā, ka visa ārpuse būs sarkana." Vai Antonam ir taisnība?

Atrisinājums. Šī uzdevuma pamatā ir skaita novērtējums. Katram kubiņam ir 6 skaldnes. Astoņu kubiņu kopējais skaldņu skaits ir 48. Ja zilās krāsas skaldnes ir trešā daļa, tad to skaits ir 16, bet sarkano skaldņu skaits ir 32. Saliekot lielāku kubu no dotajiem kubiņiem (tur ir 2 slāņi viens virs otra un katrā slānī ir 4 kubiņi), ārpusē kopumā redzamas 6 x 4 = 24 mazo kubiņu skaldnes. Trešā daļa sarkanas – tātad ir 8 sarkanas skaldnes un 16 zilās mazo kubiņu skaldnes. Sarkanu virsmu nevarēs nekādi salikt tādā gadījumā, ja kaut vienam kubiņam 4, 5 vai visas 6 skaldnes ir zilas vai arī divas pretējās skaldnes ir zilas. Antona gadījumā iepriekšminētās situācijas nav iespējamas, jo visas 16 zilās skaldnes konstrukcijā ir uz ārpusi, tāpēc visas uz iekšu pavērstās skaldnes ir sarkanā krāsā. Sarkanu kubu salikt varēs.

Piezīme. Nodarbībā ieteicams izmantot kubiņu komplektu un līmes papīriņus, lai var atzīmēt divu krāsu skaldnes. Skolēni varēs praktiski pētīt, kā kubiņus var salikt.

5. Bērni atrada arī ļoti skaistu, senatnīgu pastkartīšu komplektu. Viņi mēģināja tās sadalīt 3 vienādās daļas, bet 2 kartiņas palika pāri. Dalot tās 4 vienādās daļās, pāri palika 3 kartiņas, bet dalot 5 daļās – pāri palika 4 kartiņas. Cik vienādās daļās varētu sadalīt kartiņas?

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim, kādi skaitļi dod atlikumu 4, ja tos dala ar 5. Tie ir skaitļi, kuri beidzas ar 4 vai 9: 4; 9; 14; 19; 24; 29; ….

Pāra skaitļi, ja tos dala ar 4 vai nu dalās ar 4, vai dod atlikumu 2. Tātad meklētais skaitlis nebūs pāra skaitlis. Tāpēc no iepriekšējās virknes ir jāizslēdz visi tie skaitļi, kuri beidzas ar 4. Tāpat arī nederēs tie skaitļi, kuri dalās ar 3. Tad atliek pārbaudīt skaitļus 19; 29; 49; 59; 79; ….

19, dalot ar 3, dod atlikumu 1 (19 : 3 = 6 atl. 1). skaitļi 29 un 49, dalot tos ar 4, dod atlikumu 1. Skaitlis 59 der:

59 : 5 =11 atl. 4

59 : 4 = 14 atl. 3

59 : 3 = 19 atl. 2

Mazākais iespējamais kartiņu skaits ir 59. Dotās kartiņas varētu sadalīt 59 kaudzītēs pa vienai.
Varētu būt arī 539 kartiņas, kuras var sadalīt 11 kaudzītēs pa 49 kartiņām katrā.
Skaitlis 539 der:

539 : 5 = 107 atl. 4

539 : 4 = 134 atl. 3

539 : 3 = 179 atl. 2

6. Amēlijas uzmanību piesaistīja metāla kaste ar 10 maisiņiem, kuros bija sudraba monētas. Uz maisiņiem kādreiz bija pielīmētas zīmītes, bet tagad tās visas atradās kastes apakšā. Uz 9 zīmītēm bija rakstīts “10 gramu sudraba monētas”, bet uz vienas – “viltotās 9 gramu monētas”. Kā uz svariem, kas rāda precīzo svaru, noteikt, kurā maisiņā ir viltotās monētas, sverot tikai vienu reizi?

Atrisinājums. Saliekam visus maisiņus rindā. No pirmā maisiņa ņem 1 monētu, no otrā – divas, no trešā – 3, …. , no desmitā maisiņa ņem 10 monētas, kopā 55 monētas. Visas paņemtās monētas liek uz svariem. Ja viltotā monēta bija pirmā maisiņā, tad monētu kopējais svars būs 549 grami (viena monēta 9 grami, bet 54 monētas 10 grami). Ja no otrā – tad ir divas monētas pa 9 grami, kopā 18 grami, bet pārējās 53 monētas svērs 530 grami, kopā 548 grami. Varam ievērot, ka tieši svara pēdējais cipars nosaka, no kura maisiņa ņemtas viltotās monētas. Ja svara skaitlis beidzas ar 9 – pirmais maisiņš satur viltotās monētas, ja ar 8 – otrais maisiņš, ja ar 7 – trešais, 6 – ceturtais, …., ar 0 – pēdējais desmitais maisiņš satur visas viltotās monētas (te bija ņemtas 10 monētas pa 9 grami katra).

Punktiņš konstruē. (A grupa) Cik liela daļa no figūras ir iekrāsota?

15.02.2019

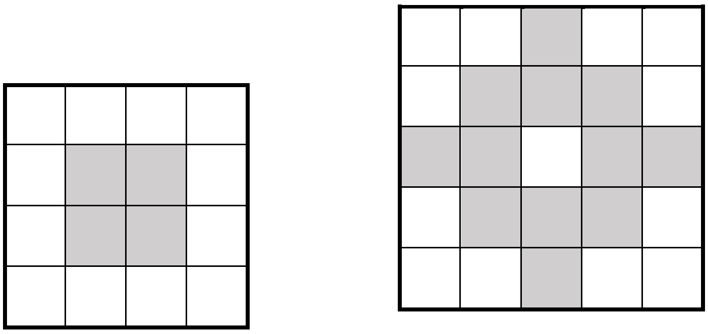
Nodarbības mērķis: Laukumu lielumu aprēķināšanai izmantot kombinatoriālas metodes; atrast, kā figūras sadalīt mazākās vienādās figūrās; laukumu attiecības norādīšanai izmantot daļskaitļus.

Piezīme. Nodarbībā ir izmantoti vairāki uzdevumi no UKMT mājas lapas:

https://www.ukmt.org.uk/individual-competitions/intermediate-challenge/archive/

1. Cik liela daļa no figūras ir iekrāsota?

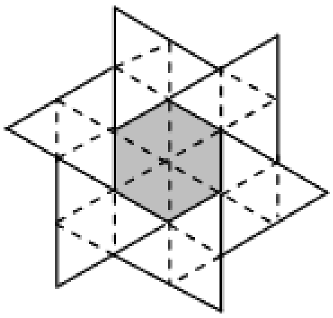
   Atrisinājums. Dotos kvadrātus sadala rūtiņās. Pelēkā daļa aizņem a) ¼ daļu; b) 12/25 daļas no figūras.



a) b)

2. Figūrā attēloti vienādmalu trijstūri, kuru malas garums ir 2 cm, bet vidū ir vienādmalu sešstūris, kura malas garums ir 1 cm. Kāda ir iekrāsotā laukuma daļa?

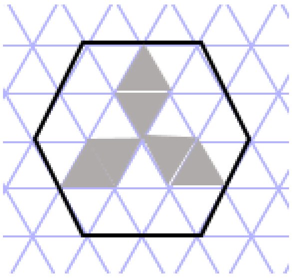
Atrisinājums. Doto figūru var sadalīt vienādmalu trijstūros. Sešstūris satur 6 trijstūrus, bet katrs no trijstūriem satur 4 tādus trijstūrus. Figūra kopumā satur 30 trijstūrus ar malas garumu 1 cm. Tad iekrāsotā daļa ir 6/30 = 1/5 daļa no visa figūras laukuma.



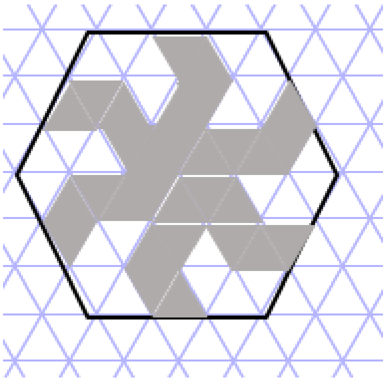
3. Sadali dotos sešstūrus vienādās mazākās figūrās, lai varētu noteikt, kāda figūras daļa ir iekrāsota!

Atrisinājums. Abos gadījumos dotās figūras sadalām vienādmalu trijstūros vai rombos.

Gadījumā a) pelēkais laukums aizņem ¼ daļu laukuma; gadījumā b) iekrāsotas ir 5/9 daļas no laukuma.



a)



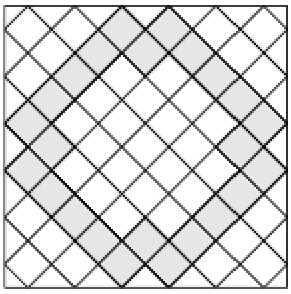
b)

4. Papildini zīmējumu ar nogriežņiem, kurus nosaka slīpi novietotās rūtiņas. Nosaki iekrāsotās figūras daļu!

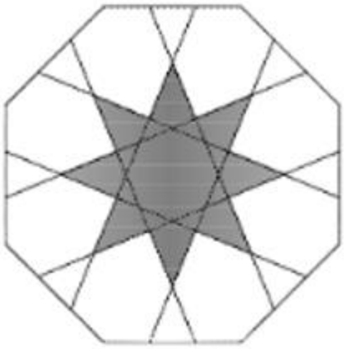
Atrisinājums. Doto zīmējumu jāpapildina ar nogriežņiem, kuri ir paralēli redzamajām rūtiņām. Figūras stūros ir trijstūrīši, kuri ir ¼ no rūtiņas izmēra. Pieci trijstūri gar vienu malu ir pus - rūtiņas izmērā. Gar kvadrāta malu izvietoti trijstūri, kuru kopējais laukums atbilst 11 rūtiņām. Skaitot rūtiņas diagonālā veidā, to skaits ir

1 + 3 +3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 61

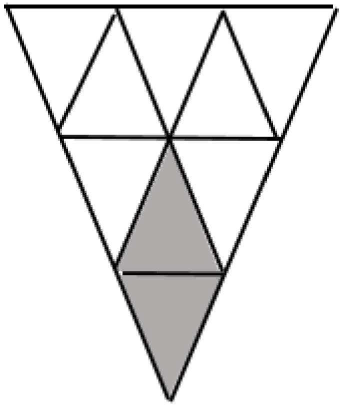
Kvadrāta laukums atbilst 61 + 11 = 72 diagonālajām rūtiņām. Iekrāsotas ir 24 rūtiņas. Iekrāsotais laukums ir 1/3 daļa no figūras.



5. Dots vienādmalu astoņstūris. Sadali to vienādās mazākās figūrās, lai noteiktu iekrāsotā laukuma daļu!



Atrisinājums. Novelkam arī astoņstūra diagonāles, tad aplūkojam 1/8 daļu no figūras. Šo astoto daļu var sadalīt deviņos vienādos trijstūros. Tātad iekrāsotā daļa aizņem 2/9 daļas no figūras.



Punktiņš. (A grupa) Kas vēl ir atlicis mūsu groziņā?
22.02.2019

Nodarbības mērķis: iepazīt naturālo skaitļu dalīšanas īpašības. Aplūkot, kādi atlikumi rodas, skaitļus dalot ar kādu izvēlētu skaitli; atklāt vispārīgas likumsakarības; sīkāk izpētīt atlikumu grupas.

1. Aprēķini visus atlikumus, kādi rodas, ja skaitli 113 dala ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9!

Atrisinājums. (Ievaduzdevums) Dalot skaitli 113 ar dotajiem skaitļiem, iegūst dažādus atlikumus:

Dalītājs	Dalījums	Atlikums
2	56	1
3	37	2
4	28	1
5	22	3
6	18	5
7	16	1
8	14	1
9	12	5

Ievērojam, ka visi atlikumi ir viencipara skaitļi.

2. Ar kādu skaitli vajag dalīt 113, lai atlikums būtu divciparu skaitlis? Atrodi tādu a) vismazāko dalītāju un tādu b) vislielāko dalītāju!

Atrisinājums. Ja skaitli 113 dalot ar n, rodas dalījums A un atlikums a, tad skaitli 113 var pierakstīt:

$$113 = A \cdot n + a$$

Lai dalīšanas atlikums a būtu divciparu skaitlis, dalītājam ir jābūt ne mazākam par 11. Padomāsim, kāds varētu būt skaitļa 113 vismazākais divciparu atlikums, ja to dala ar kādu skaitli. Vismazākais divciparu skaitlis ir 10. Ja skaitlis 10 ir dalīšanas atlikums, tad $A \cdot n$ var aprēķināt kā

$$A \cdot n = 113 - 10 = 103$$

Bet skaitlis 103 ir pirmskaitlis, to nevar sadalīt citādos reizinātājos kā vien $103 \cdot 1$. Tāpēc, 113 dalot ar kādu divciparu skaitli, nevar iegūt atlikumu 10. Ja atlikums ir 11, tad tādu dalītāju atrast var:

$$113 - 11 = 102$$

Skaitlis 102 dalās ar 6: $102 = 6 \cdot 17$

No tā iegūstam, ka, 113 dalot ar 17, atlikums ir 11. Varam pārbaudīt, ka atlikumi, dalot 113 ar skaitļiem 10; 11; 12; 13; 14; 15 un 16, veido viencipara atlikumus.

b) Skaitli 113 dalot ar 100, atlikums ir 13. Palielinot dalītāju par 1, atlikums samazināsies par viens. Tā atrodam vislielāko dalītāju 103, kurš dos divciparu atlikumu 10.

3. Ar kādu divciparu skaitli dalot 113 tu vari iegūt vislielāko atlikumu?

Atrisinājums. Aplūkosim kādu skaitli *N*. Dalot skaitļus ar *N*, visi iespējamie atlikumi ir mazāki par pašu skaitli *N*. Vislielākais atlikums, ko veido skaitlis *N*, ir *N* - 1.

Aplūkosim vislielāko divciparu skaitli 99. Dalot ar 99 skaitli 113, iegūst atlikumu 14. Dalot 113 ar 98, rodas atlikums 15. Pamazinot dalītāju, atlikums palielināsies. Ir virkne skaitļu, kas skaitlī 113 ietilpst tikai vienu reizi. Atradīsim vislielāko skaitli, kas skaitlī 113 ietilpst 2 reizes:

113 : 2 = 56 atlikumā 1.

Jeb 113 = 56 + 56 + 1

Seko, ka skaitlis 57 skaitlī 113 ietilpst vienu reizi. Tas ir mazākais dalītājs, kas skaitlī 113 ietilpst vienu reizi. Tāpēc

113 : 57 = 1 atlikumā 56.

Esam atraduši, ka, dalot 113 ar divciparu skaitli 57, var iegūt vislielāko atlikumu.

4. Atrodi mazāko divciparu skaitli, kuru dalot ar 5 un ar 7 iegūst vienādu atlikumu!

Atrisinājums. Skaitlis 5 veido atlikumus 1; 2; 3; 4 un 0. Skaitlis 7 veido atlikumus 1; 2; 3; 4; 5; 6; un 0. Izrakstām virknē vairākus naturālos skaitļus 1; 2; 3; 4; …. ; 23;… Virknei apakšā pierakstām šo skaitļu atlikumus no dalījuma ar 5, trešajā rindā – no dalījuma ar 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5

Var ievērot, ka viencipara skaitļiem atlikumi līdz skaitlim 4 ir vienādi, bet turpmāk atšķiras. Skaitļa 5 atlikumu virknīte sastāv no 5 skaitļiem bet skaitļa 7 virknīte – no 7 skaitļiem. Atlikumi sakritīs, kad būs pierakstītas septiņas secīgas virknītes ar skaitļa 5 atlikumiem un 5 secīgas virknītes ar skaitļa 7 atlikumiem. Tas būs skaitlis 35, kurš dalās ar 5 un 7, tāpēc te atlikums ir nulle. Vēl nākamiem četriem skaitļiem arī atlikumi sakritīs, piemēram, 36 dalot ar 5, atlikums ir 1, tāpat, 36 dalot ar 7, atlikums ir 1.

Vispārinot var teikt – atlikumi sakritīs tiem skaitļiem, kuri vienlaikus dalās gan ar 5, gan 7 un atlikumi sakritīs arī vēl tiem sekojošiem četriem skaitļiem.

5. Apskati tabulu! Kuru divu skaitļu summa dalās ar 11? Atrodi visus pārus! Kā pārliecināties, ka visi pāri ir atrasti?

9	46	79	13
64	90	2	97
25	31	20	22
4	52	55	7

Atrisinājums. Aplūkosim visus atlikumus, kādi rodas dotos skaitļus dalot ar 11:

9	2	2	2
9	2	2	9
3	9	9	0
4	8	0	7

Dotajā tabulā veiksim šādu operāciju – ja skaitlis ir lielāks par 5, tad mēs no tā atņemsim 11:

-2	2	2	2
-2	2	2	-2
3	-2	-2	0
4	-3	0	-4

Ja divu skaitļu atlikumu summa, tos dalot ar 11, ir 0, tad šo skaitļu summa dalās ar 11. Tādi skaitļi ir 2 un -2; 3 un -3; 4 un -4; 0 un 0. Tabulā ir 3 skaitļu pāri, kas dod atlikumus (3; -3), (4; -4); (0; 0). Vēl ir skaitļi -2 un 2. Katrs skaitlis -2 veido pāri ar katru skaitli 2. Šādu pāru skaits ir $5 \cdot 5 = 25$. Dotajā tabulā kopumā var atrast 28 skaitļu pārus, kuru summa dalās ar 11.

Piezīme. Der aplūkot sīkāk, kāpēc divu šādu skaitļu summa dalās ar 11. Piemēram,

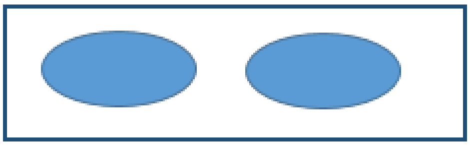
skaitļus var izteikt $64 = 5 \cdot 11 + 9$; $46 = 4 \cdot 11 + 2$, tad

$$64 + 46 = (5 \cdot 11 + 4 \cdot 11) + 9 + 2 = 9 \cdot 11 + 11 = 10 \cdot 11$$

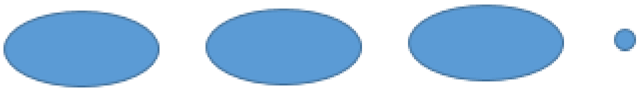
6. Trīs brāļi nolēma agri no rīta doties ceļojumā – katrs savā virzienā. Līdzi ņemšanai viņi sakaltēja sausiņus, ko nolēma no rīta sadalīt vienādi. Nakts vidū viens no brāļiem sajutās izsalcis un devās paņemt savu sausiņu daļu. Viņš sadalīja tos 3 vienādās kaudzītēs, bet viens sausiņš palika pāri, ko viņš apēda, kā arī vienu kaudzīti paņēma līdzi. Tad vēlāk naktī pamodās otrs brālis un gāja paņemt savu daļu. Nezinot, ka pirmais brālis jau sausiņus paņēmis, viņš darīja to pašu, un lieko sausiņu apēdis, paņēma savu kaudzīti. Arī trešais brālis jau pirms rītausmas rīkojās tāpat, un no rīta bija palikuši 22 sausiņi. Cik sausiņi bija sagatavoti?

Atrisinājums. Šo uzdevumu jārisina "no beigām". Aplūkosim situāciju, kas brāļus sagaida no rīta:

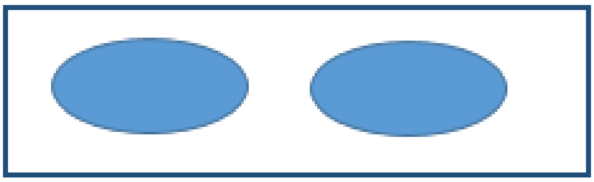
22 sausiņi atstāti brāļiem:



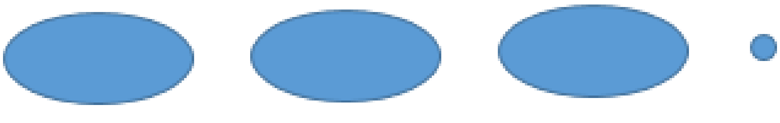
Tā sausiņus sadalīja trešais brālis pirms rītausmas:



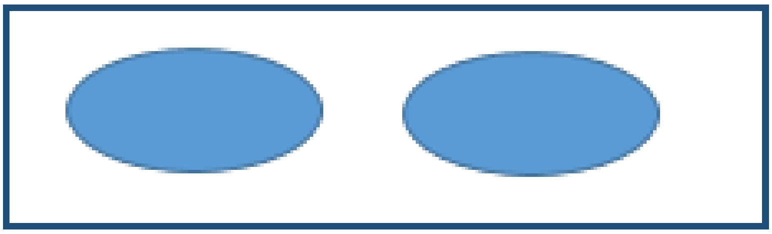
Tā sausiņus brāļiem atstāja otrais brālis:



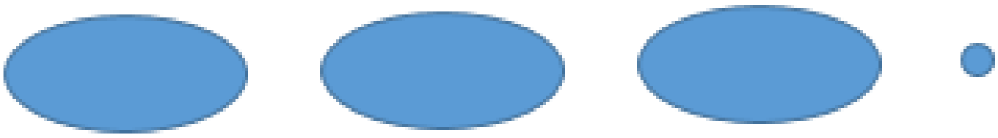
Tā otrais brālis sadalīja sausiņus:



Tā sausiņus atstāja pirmais brālis:



Tā sadalīja sausiņus pirmais brālis:



Aplūkojot procesa shēmu, redzam, ka trešais brālis bija atstājis katram no brāļiem 11 sausiņus, bet pats paņēmis 12 sausiņus. Tas nozīmē, ka pirms rītausmas trešais brālis atrada 34 sausiņus. Tātad otrais brālis bija atstājis katram brālis 17 sausiņus, bet pats paņēmis 18. No tā seko, ka pirmais brālis bija atstājis 52 sausiņus, tātad katram brālim 26 sausiņus. Tā aprēķinām, ka sausiņus skaits iesākumā bija 26 + 26 + 26 + 1 = 79.