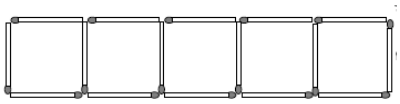
Punktiņš. (A grupa) Vai drīkstu parotaļāties ar sērkociņiem?

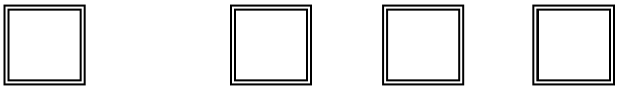
05.10.2018.

Nodarbības mērķis: vingrināt skolēnu telpisko iztēli un attīstīt spriešanas spējas. Telpisko iztēli veidot, konstruējot shematiskus attēlus un izmantojot manipulatīvos priekšmetus, piemēram, sērkociņus.

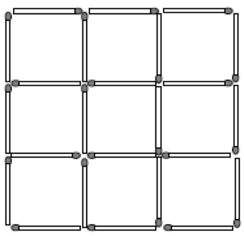
1. Pārvieto 4 sērkociņus tā, lai izveidojas 4 vienādi kvadrāti!



Atrisinājums. Kopā ir 16 sērkociņi. No tiem iespējams izveidot 4 kvadrātus ar malas garumu 1:

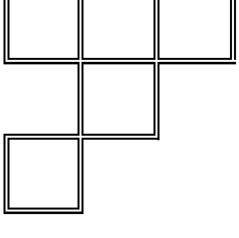


2. Marks no sērkociņiem salika šo figūru:

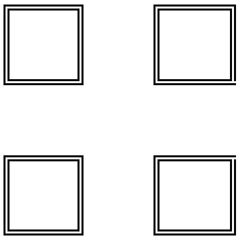


Alise noslēpa 8 figūras sērkociņus, un no figūras palika 4 kvadrāti. Marks atkal salika to pašu figūru, bet Alise vēlreiz noslēpa 8 sērkociņus, bet tagad Marks ieraudzīja tikai 2 kvadrātus. Kādas figūras Alise izveidoja?

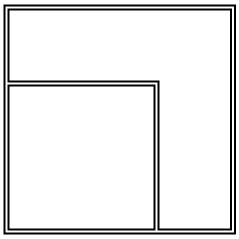
Atrisinājums. Ir iespējami vairāki atrisinājumi, lai, noņemot 8 sērkociņus, uz galda paliktu 4 kvadrātiņi. Tie var būt ar kopīgiem pieskaršanās punktiem:



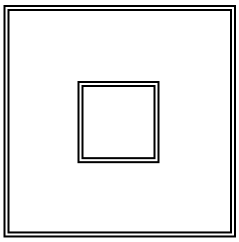
Vai 4 kvadrātiņi var būt visi atsevišķi:



Otrajā reizē Alise no sākumā dotās figūras noņēma 8 sērkociņus tā, ka palika divi dažāda izmēra kvadrāti. Atkal te var būt dažādi risinājumi, piemēram, kad kvadrātiem ir kopīgas malas:

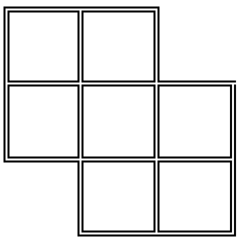


Citāds variants var būt, ja abiem kvadrātiem nav kopīgu punktu:



3. Kādu vislielāko kvadrātu skaitu tu vari izveidot no 20 sērkociņiem?

Atrisinājums. Var izveidot vienu kvadrātu ar malas garumu 5 sērkociņi. Var izveidot piecus atsevišķus kvadrātiņus ar malas garumu 1 sērkociņš. Vislielāko kvadrātu skaitu var iegūt, ja izvieto kvadrātiņus kompakti:



Te kopumā var saskaitīt 9 kvadrātus - 2 lielākus kvadrātus ar malas garumu 2 un 7 mazos kvadrātiņus.

4. Alise ir salikusi rūtiņu taisnstūri, kuram ir 24 rūtiņas (vienas rūtiņas mala ir viena sērkociņa garumā). Emīlam ir jāuzmin, cik sērkociņus Alise ir izmantojusi. Vai viņš var to pateikt? Bet vai tu vari pateikt, cik ir sērkociņu, ja Alise teica, ka sērkociņu ir par 4 vairāk, nekā to minēja Emīls?

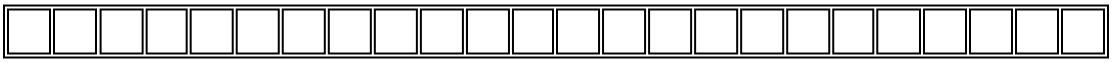
Piezīme. Ieteicams darboties praktiski, dažādas rūtiņu figūras salikt uz galda no sērkociņiem.

Atrisinājums. Vispirms jāizdomā, kāda varētu būt taisnstūra forma. Piemēram, taisnstūris vienā rindā var saturēt 8 rūtiņas, un tad rindu skaits ir 3. Tāpēc, lai novērtētu taisnstūra iespējamo izmēru, noskaidrosim, kādos divos reizinātājos var sadalīt skaitli 24:

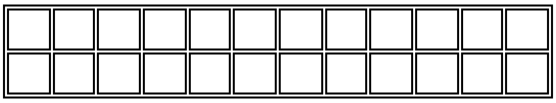
$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

Kā redzam, iespējami četri dažādi tādu taisnstūru veidi, kuri satur 24 rūtiņas. Aprēķināsim katra taisnstūra konstruēšanā izmantoto sērkociņu skaitu.

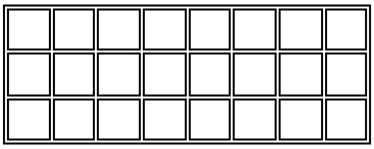
Taisnstūris, kuram ir 1 rinda. Izmantoto sērkociņu skaits ir $24 \cdot 2 + 1 \cdot 25 = 73$



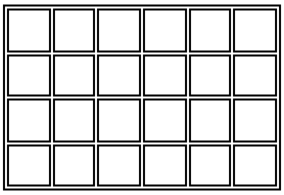
Divas rindas. Kopējais sērkociņu skaits ir $12 \cdot 3 + 2 \cdot 13 = 62$



Trīs rindas. Kopējais sērkociņu skaits ir $8 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 59$



Četras rindas. Sērkociņu skaits 58.



Emīlam ir grūti uzminēt, kuru no četriem sērkociņu taisnstūru variantiem konstruējusi Alise. Ņemot vērā to, ka Alise konstrukcijā izmantojusi par 4 sērkociņiem vairāk nekā minēja Emīls, jāsecina, ka Emīls nosauca sērkociņu skaitu 58, kas atbilst 4) variantam, bet Alise konstruējusi taisnstūri, kuram ir 2 rindas (tas ir 2) variants), izmantojot 62 sērkociņus. Otrais un ceturtais varianti ir divas vienīgās konstrukcijas, kur sērkociņu skaits atšķiras par 4.

5. Bet Emīls savukārt uzdeva Alisei un Markam citu jautājumu – "Kāds ir rūtiņu taisnstūra izmērs, ja es to saliku no 45 sērkociņiem?" Pasaki atbildi!

Piezīme. Jaunāko klašu skolēni uzdevumu var risināt ar mēģinājumu un kļūdu metodes palīdzību, kamēr atrod atrisinājumu. Skolēniem neprasa, lai viņi pierāda, ka iespējama tikai viena atbilde.

Atrisinājums. Risinot iepriekšējo uzdevumu, varēja ievērot, kā nosaka sērkociņu skaitu. Piemēram, ja ir jākonstruē rūtiņu taisnstūris, kurā ir 3 x 8 rūtiņas, tas ir 3 rindas pa astoņām rūtiņām katrā rindā, tad var ievērot, ka horizontālās sērkociņu rindas ir četras, tajās ir izvietoti 4 x 8 sērkociņi. Bet vertikālās sērkociņu rindas ir 9, tajās sērkociņu skaits ir 9 x 3. Kopējais sērkociņus skaits ir divu skaitļu summa: visi sērkociņi, kas izvietoti horizontālās rindās plus visi sērkociņi, kas izvietoti vertikālās kolonās.

Skaitli 45 sadalīsim divos saskaitāmajos. Vidēji: 45 = 22 + 23.

Skaitli 22 var sadalīt divos reizinātājos $22 = 2 \cdot 11$, rūtiņu taisnstūrim ir vismaz 2 rindas. Seko, taisnstūrī ir 11 rūtiņas. Tad kopējais sērkociņu skaits ir 22 + 12 = 34, kas neatbilst dotajam sērkociņu skaitam. Jāizvēlas divu citu skaitļu summa.

Sašaurināsim saskaitāmo meklēšanas iespējas. Abi skaitļi, kurus summēsim, nav pirmskaitļi, jo sērkociņu rindu un kolonu skaits taisnstūrī ir lielāks par 1 (tas ir, rūtiņu taisnstūris neveidojas no vienas rindas sērkociņu). Tuvākais rezultāts vidējām vērtībām ir 45 = 20 + 25.

$$20 + 25 = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5$$

Varētu būt 4 horizontālās rindas, kur katrā rindā ir 5 sērkociņi. Tad rūtiņu skaits ir $3 \cdot 5 = 15$. Lai šādu taisnstūri konstruētu nepieciešami $4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 38$ sērkociņi. Summa neder.

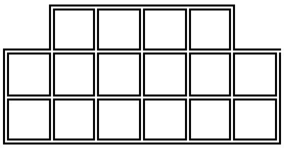
Līdzīgi aplūkojam 21 + 24 = 45, jeb

$$21 + 24 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6$$

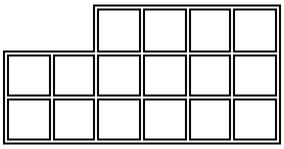
No šī rezultāta atrodam, ka Emīls izveidoja rūtiņu taisnstūri ar izmēru 3 x 6.

6. Uz galda no sērkociņiem ir salikts rūtiņu taisnstūris, kuram ir 3 x 6 rūtiņas. Noņem 4 sērkociņus tā, lai katrs atlikušais sērkociņš ir kādas rūtiņas mala. a) Cik rūtiņas var būt palikušas? b) Kāds varētu izskatīties rūtiņu taisnstūris, ja no tā noņemot 4 sērkociņus, tiktu izjaukts vislielākais iespējamais rūtiņu skaits?

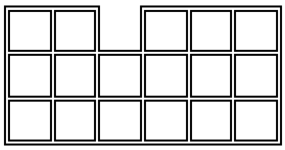
Atrisinājums. Aplūkosim sērkociņu noņemšanas iespējas, vienlaikus meklējot atbildi uz abiem jautājumiem a) un b). Sērkociņi ir jānoņem tā, lai katrs uz galda palikušais sērkociņš ir kādas rūtiņas mala. Tāpēc, lai izjauktu stūra rūtiņu, jānoņem 2 sērkociņi. Lai divas stūra rūtiņas izjauktu – jānoņem 4 sērkociņi:



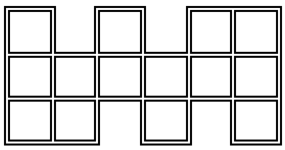
Līdzīgi



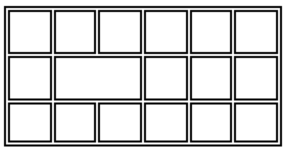
Ja noņem vienu sērkociņu (kas nav stūra rūtiņas sērkociņš) no taisnstūra malas, var izjaukt 1 rūtiņu:



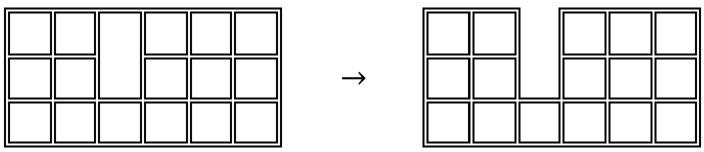
Noņemot 4 malējos sērkociņus, var kopumā izjaukt 4 rūtiņas:



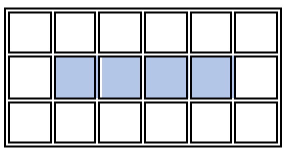
Ievērosim, ka viens sērkociņš, kas atrodas taisnstūra iekšpusē, pieder divām rūtiņām. To noņemot, tiktu izjauktas 2 rūtiņas:



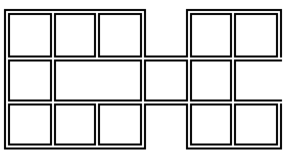
Ja noņem sērkociņu, kurš pieder arī taisnstūra malējai rūtiņai, tad taisnstūra malas sērkociņš arī ir jānoņem:



Dotajā taisnstūrī ir tikai 4 iekšējās rūtiņas:



Tāpēc, lai izjauktu 4 dotā taisnstūra rūtiņas ir nepieciešams noņemt vismaz 3 sērkociņus. Noņemot 4 sērkociņus, var izjaukt ne vairāk kā 5 rūtiņas. Piemēram:



Punktiņš. (A grupa) Lūdzu iepazīsimies – skaitļi!

12.10.2018

Nodarbības mērķis: aplūkot skaitļa pierakstu, izvēloties uzdevumiem atbilstošus piemērus. Šoreiz nodarbības nolūks nav pierādījumu veikšana, bet gan skaitļu kopējo īpašību meklēšana un skaitļu grupēšana atbilstoši to kopējām īpašībām.

Piezīme: pirmie 3 uzdevumi ir elementāri. Tie izvēlēti, lai skolēni varētu labāk izprast ceturtā uzdevuma risinājumu. Dotos uzdevumus jāskaidro, balstoties uz piemēriem, jo jaunāko klašu skolēni vēl neprot izteikt skaitļa pierakstu algebriski. Skolēni mācās izlasīto tekstu interpretēt matemātiski.

1. Izvēlies kādu viencipara skaitli! Uzraksti tā reizinājumu ar 10; reizinājumu ar 100; reizinājumu ar 1000! Kas kopīgs šiem skaitļiem?

Komentārs. Jāievēro, ka šo skaitļu pirmais cipars (desmitu, simtu vai tūkstošu) ir viens un tas pats un skaitlis beidzas ar vienu vai vairākām nullēm.

2. Izvēlies viencipara skaitli, pareizini to ar 10, vai 100, vai 1000 un rezultātam pieskaiti izvēlēto skaitli. Ar cik bija jāreizina dotais skaitlis, lai iznākums nesatur nulles?

Komentārs. Pārbaudes rezultātā skolēni noskaidro, ka dotais skaitlis jāreizina ar desmit. Jāapspriež skaitļa decimālais pieraksts – kādas izmaiņas var notikt vienu, desmitu vai simtu pozīcijā jeb šķirā.

3. Uzraksti skaitli, kuram ir 3 vienādi cipari. Sadali šo skaitli 3 tādu skaitļu summā, kur katrs no saskaitāmajiem satur tieši vienu ciparu no dotajiem skaitļiem!

Komentārs. Skolēniem uz iepriekšējo divu uzdevumu bāzes vajadzētu pamanīt, ka skaitli var sadalīt, piemēram, tā: 222 = 200 + 20 + 2. Protams, ir iespējamas ar citādas summas, piemēram, 222 = 218 + 2 + 2.

4. Divciparu skaitlis nesatur nulli. Tam pierakstīja blakus tādu pašu skaitli. Cik reizes dotais skaitlis palielinājās, tas ir, cik reižu iegūtais četru ciparu skaitlis ir lielāks par izvēlēto?

Atrisinājums. Izvēlēsimies kādu skaitli, piemēram, 73. Tam pierakstot blakus tādu pašu skaitli, iegūstam 7373. Te ir vienu cipars 3, desmitu cipars 7, simtu cipars 3 un tūkstošu cipars 7. Sadalīsim doto skaitli divos saskaitāmos

$$7373 = 7300 + 73.$$

Te ir 100 skaitļi 73 un vēl viens skaitlis 73

$$7373 = 73 \cdot 100 + 73 \cdot 1$$

Kopumā te ir simtu viens skaitlis 73.

$$7373 = 73 \cdot 101$$

Tātad iegūtais skaitlis ir 101 reizi lielāks kā izvēlētais skaitlis.

5. Dots divciparu skaitlis A, kurš nebeidzas ar 0. Otru skaitli B uzrakstīja, dotā skaitļa A ciparus pierakstot otrādā secībā. Abus skaitļus saskaitīja. Atrodi tādu skaitli A, kuram, pieskaitot skaitli B, skaitļu summa būs divciparu skaitlis ar vienādiem cipariem? Cik pavisam ir šādu skaitļu?

Atrisinājums. Der uzrakstīt vairākus piemērus, izmēģinot dažādus divciparu skaitļus. Piemēram, aplūkosim skaitļus 76, 21, 45.

76 + 67 = 143, rezultāts ir lielāks par 100, tas nav divciparu skaitlis, tāpēc skaitlis 76 neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

21 + 12 = 33, atbilst nosacījumiem.

45 + 54 = 99, arī atbilst nosacījumiem.

<u>Pirmais jautājums</u>: kādas īpašības piemīt skaitļiem, kuri apmierina uzdevuma nosacījumus?

- Izvēlētā skaitļa ciparu summa nevar būt lielāka kā 9;
- Skaitļu A un B summas abi cipari ir vienādi; katrs no tiem ir vienāds ar skaitļa A ciparu summu;
- Skaitļu A un B summa dalās ar 11.

<u>Otrais jautājums</u>: cik ir šādu skaitļu, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem?

Var aplūkot skaitļu grupas. Vismazākais divciparu skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir 11. Padsmitu grupā ietilpst skaitļi 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18 (skaitlis 19 neder, jo 19 + 91 = 110).

Nākamā grupa sākas ar 21, tā varam turpināt:

11	21	31	41	51	61	71	81
12	22	32	42	52	62	72	
13	23	33	43	53	63		
14	24	34	44	54			
15	25	35	45				
16	26	36					
17	27						
18							

Šo skaitļu kopējais skaits pa grupām ir 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =36

6. Viencipara skaitli pareizināja ar 10 un no reizinājuma atņēma izvēlēto skaitli. Kāda īpašība piemīt iznākumam?

Atrisinājums. Jāievēro, ka rezultāts dalās ar 9. To izskaidrot var samērā vienkārši:

$$10a - a = 10a - 1a = 9a, \text{ tas ir,}$$

Pieņemsim, ka ir 10 "kastes ar āboliem", kur katrā kastē ir a "āboli". Ja vienu "kastī" aiznes prom, tad atliek deviņas "kastes", kur katrā "kastē" ir a "āboli".

7. Dots divciparu skaitlis A, kurš nebeidzas ar 0. Otru skaitli B uzrakstīja, dotā skaitļa A ciparus pierakstot otrādā secībā. No lielākā skaitļa atņēma mazāko. Uzraksti vairākus piemērus! Kāda kopīga īpašība piemīt šo skaitļu starpībām?

Komentārs. Ievērosim, ka visi iznākumi dalās ar 9.

Izskaidrot kopīgo īpašību var līdzīgi kā iepriekš: divciparu skaitli var pierakstīt, piemēram, tā

$$73 = 70 + 3 = 10 \cdot 7 + 1 \cdot 3$$

Jeb vispārīgā veidā $10a + b$.

Pieņemsim, ka Annai ir 10 kastes ābolu un 1 kaste bumbieru, bet Betai ir viena kaste ābolu un 10 kastes bumbieru. Visās kastēs ābolu skaits a ir vienāds, kā arī bumbieru skaits b ir vienāds. Zināms, ka ābolu skaits kastē ir lielāks nekā bumbieru skaits kastē. Annai ir par 9 kastēm ābolu vairāk nekā Betai, bet Betai ir par 9 kastēm vairāk bumbieru nekā Annai, tāpēc kopējā ābolu un bumbieru skaita starpība dalās ar 9.

8. Trīs skaitļu A, B un C summa ir 72. Skaitlis A ir par 9 mazāks nekā B, bet skaitlis C ir par 15 lielāks nekā B. Atrodi skaitļus A, B, C!

Atrisinājums. Skaitļu A, B un C vidējā vērtība ir 72 : 3 = 24. No dotā seko, ka A < B < C. Starpība starp A un B ir mazāka nekā starp B un C, tāpēc skaitlis B būs mazāks par 24. Pārbaudot dažus piemērus, atrodam, ka A = 13; B = 22; C = 37.

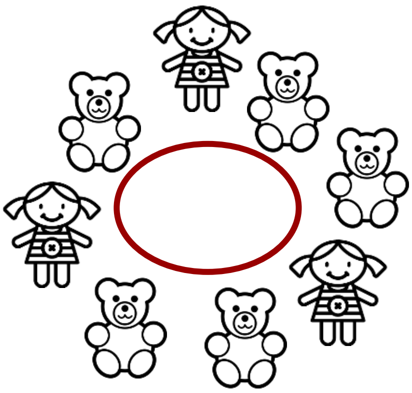
Punktiņš. (A grupa) Stāsimies aplī!

19.10.2018

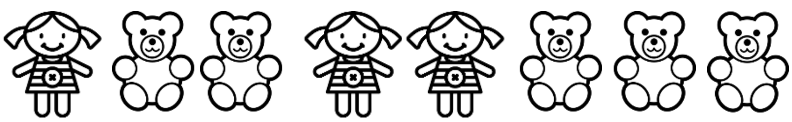
Nodarbības mērķis: attīstīt iztēli un kombinatorisku domāšanu. Meklēt un izveidot situācijas algoritmu.

1. Laura rotaļājas ar 3 lellītēm un 5 lācīšiem. a) Palīdzi viņai tos apsēdināt pie apaļa galda tā, lai katrai lellītei blakus sēž divi lācīši! b) Vai vari rotaļlietas izvietot tā, lai katrai lellītei blakus ir tieši viens lācītis?

Atrisinājums. a) Lellītes un lācīšus var sēdināt tā – vispirms pamīšus nosēdina visas 3 lellītes un 3 lācīšus. Tad katrai lellītei blakus ir tieši divi lācīši, pa vienam katrā pusē. Pārējos divus lācīšus nosēdina, kur patīk, katrai lellītei joprojām blakus ir 2 lācīši.



b) Rotaļlietas izvietot ap apaļu galdu vēlamajā veidā nav iespējams - lai kādai lellītei blakus būtu tieši viens lācītis, otrā pusē jānosēdina lellīte. Lai katrai lellītei blakus sēdētu viens lācītis, tad lellītes jāsēdina blakus pa divi. Tā kā ir 3 lellītes, tad viņas pa pāriem sasēdināt pie apaļa galda nevar. Toties rotaļlietas prasītajā veidā var nosēdināt vienā rindā, piemēram:

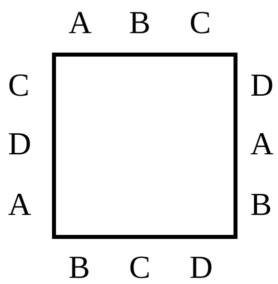


2. Alekša dzimšanas dienā bērni sastājās aplī. Katram zēnam blakus bija viena meitene. Aplī bija nostājušās 8 meitenes. a) Kāds varētu būt lielākais zēnu skaits aplī? b) Kāds varētu būt mazākais zēnu skaits?

Atrisinājums. Ir noteikts meiteņu skaits, un ir noteiktas zēnu izvietojuma prasības, bet nekas nav teikts par zēnu skaitu. Katram zēnam blakus ir tieši viena meitene, kas, līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā, nozīmē, ka zēni aplī nostājušies pa pāriem. No tā seko, ka aplī ir pāra skaits zēnu. Ja aplī starp katrām divām blakus stāvošām meitenēm nostājas divi zēni, tad zēnu skaits ir divas reizes lielāks kā meiteņu skaits – ir 16 zēnu. Ievērojot, ka uzdevumā nekas nav teikts par meiteņu izvietojuma īpašībām, tad var gadīties, ka aplī blakus stāv vairākas meitenes. Ja visas meitenes aplī nostājušās pēc kārtas, tad aplī ir vismazākais zēnu skaits – divi.

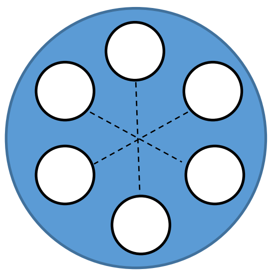
3. Ap kvadrātisku galdu var apsēdināt 12 cilvēkus. Ir zināms, ka starp galda biedriem ir 4 grupas, kur katrā no šīm trīs cilvēku grupām ir cilvēki, kas nevēlas viens otram sēdēt blakus, tieši pretī, vai pie vienas galda malas, vai pie kopīga galda stūra. Kā tu viņus apsēdināsi?

Atrisinājums. Izvietosim uz galda kartītes. Tās būs A, A, A; B, B, B; C, C, C un D, D, D, atbilstoši katrai cilvēku grupai. Galda kartītes var izvietot, piemēram, tā:

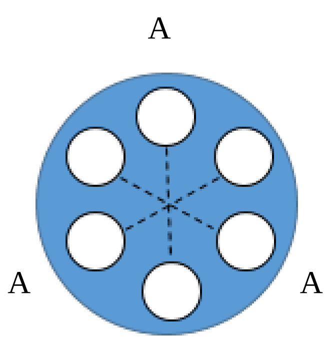


4. Uz kādu darba vietas pasākumu bija ieradušies 3 vīri ar savām sievām. Viņiem visiem bija jāsēž pie viena apaļa galda. Sievas bija sastrīdējušās ar saviem vīriem un negribēja viņiem sēdēt blakus, ne arī tieši pretī pie galda. Kā šos 6 cilvēkus apsēdināt?

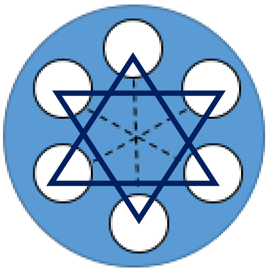
Atrisinājums. Nosauksim viesus A kungs un A kundze; B kungs un B kundze; C kungs un C kundze. Apaļais galds ir jau saklāts, šķīvji izvietoti simetriski:



Vispirms pie galda apsēdināsim A kundzi, tad ir tikai 2 vietas, kur var apsēdināt viņas vīru:



Redzams, ka vienu pāri var apsēdināt "trijstūra" divās vietās. Pie apaļā galda ir divi šādi "trijstūri":



Bet ir 3 precēti pāri. Ja A kungu un kundzi un tāpat B kungu un kundzi izdodas apsēdināt vēlamajā veidā, tad brīvas paliks tikai divas blakus vietas vai divas vietas tieši pretī. Tāpēc visus 6 cilvēkus apsēdināt prasītajā veidā nevar.

5. Atpūtas telpā aplī izvietoti 10 krēsli. Ik pa brīdim nāk kāds un apsēžas uz brīva krēsla. Ja blakus esošais vai esošie krēsli aizņemti, tad viens no šiem krēsliem uzreiz tiek atbrīvots. Kāds vislielākais aizņemto krēslu skaits var būt kādā laika momentā?

Piezīme. Skolēns var iztēloties, ka viņš vai viņa ir pasākuma vadītājs un pats nosaka, kurā vietā kurš apsēdīsies vai arī kurš piecelsies.

Atrisinājums. Iesākumā visi krēsli ir brīvi. Ienāk pirmais un apsēžas jebkurā vietā. Nākošo sēdināsim vienu vietu izlaižot. Kad ienāks trešais, liksim, lai viņš apsēžas tieši starp abiem jau sēdošajiem. Viens no iepriekš atnākušajiem aiziet. Nāk nākamais un apsēžas vienu vietu izlaižot no abiem blakus sēdošiem. Nāk nākamais un apsēžas brīvajā vietā starp diviem un vienu jau sēdošo, kur šis pēdējais pieceļas un aiziet. Paliek sēžot 3 cilvēki pēc kārtas. Pēc tāda paša principa sēdina visus citus ienākošos, līdz blakus sēž 8 cilvēki pēc kārtas. Atlikuši divi brīvi krēsli. Ja ienāk devītais sēdētājs, tad viņa blakus sēdētājs ir spiests piecelties un aiziet. Tad sēž pēc kārtas 7 cilvēki un viens, kuram abās pusēs ir brīva vieta. Ja vēl kāds ienāk, tad izveidojas atkal tāda pati situācija, kur 8 cilvēki sēž pēc kārtas un ir 2 brīvas vietas.

Vislielākais aizņemto krēslu skaits var būt 8.