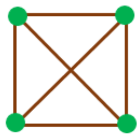
PUNKTIŅŠ (B grupa) Deju stunda
12.01.2018

Īsi risinājumi un komentāri

1. Deju grupā ir 6 bērni, un katrs draudzējas tieši ar 3 citiem bērniem. Vai var gadīties, ka meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem?

Atrisinājums. Grupā ir vismaz 3 zēni vai vismaz 3 meitenes. Pieņemsim, ka meitenes ir vismaz 3. Ja meitenes ir tieši 3 un visas draudzējas tikai savā starpā, tad katrai no viņām ir tikai 2 draugi, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Var gadīties, ka 4 meitenes visas draudzējas savā starpā un katrai ir tieši 3 draugi, ko shematiski var attēlot šādi:



Tad atlikušajiem diviem bērniem savstarpēji ir ne vairāk kā viena draudzība, kas ir mazāk nekā uzdevuma nosacījumos minētās 3 draudzības. Vai var būt piecu meiteņu grupa, kuras draudzējas tikai savā starpā un katrai ir tieši 3 draudzenes?
Pieņemsim, ka tā var būt. Ja katrai meitenei pajautāsim, kuras ir viņas draudzenes, tad mēs saņemsim tieši 15 atbildes. Draudzība ir abpusēja, tāpēc katra draudzība ir pieminēta divas reizes (Kate teica, ka viņa draudzējas ar Annu, arī Anna teica, ka viņa draudzējas ar Kati). Bet draudzību skaits ir nepāra skaitlis, tāpēc pieņēmums ir nepareizs.

2. Deju kolektīvs ir ļoti draudzīgs. Katra meitene pateica, ar cik zēniem viņa draudzējas, bet katrs zēns pateica, ar cik meitenēm viņš draudzējas. Kad saskaitīja visus paziņojumus, izrādījās, ka meitenes kopumā pateikušas par 35 draudzībām, bet zēni – par 46. Vai tas var būt?

Komentārs. Šis uzdevums līdzīgs iepriekšējam, jāievēro, ka draudzība starp diviem cilvēkiem ir abpusēja. Izskaidro sīkāk, kāpēc uzdevumā minētie skaitļi vienlaikus nevar atgadīties!

3. Zēniem jāmēģina jauna deju figūra. Viņus trenē pa pāriem, katru pāri kombinējot atsevišķi. Nodarbības beigās izrādījās, ka katrs no zēniem jauno figūru izmēģinājis atšķirīgu skaitu reižu. Kāda var būt pāru izveidošanas kārtība, ja grupā ir 5 zēni? Uzraksti piemēru! Nosaki mazāko mēģinājumu skaitu!

Atrisinājums. Ja ir n mēģinājumi, tad treneris kopumā ir trenējis $2n$ zēnus (daži zēni šajā skaitā iekļauti vairākas reizes). Ja katrs zēns jauno deju figūru ir mēģinājis vismaz vienu reizi, tad mazākais mēģinājumu skaits būs tad, ja arī zēni mēģinājuši pēc iespējas mazāko skaitu reižu. Ir pieci zēni un vismazākā piecu dažādu naturālu skaitļu summa ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, kas ir nepāra skaitlis. Jāsecina, ka vismaz viens zēns ir trenējies vairāk reižu. Nākamā mazākā dažādo skaitļu summa ir, ja skaitli 5 aizvieto ar 6. Tad mēģinājumu skaits n ir vismaz 8 (mazāk par 8 nevar būt, jo mazākais kopējais dažādo piedalīšanos skaits ir 16) . Parādīsim, ka ar 8 mēģinājumiem pietiek (zēnus apzīmēsim A, B, C, D, E, bet kolonās atzīmēsim pārus atsevišķajos treniņos):

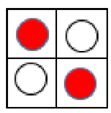
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	x							
B		x	x	x		x	x	x
C	x							x
D			x	x	x			
E		x			x	x	x	

Tabulā redzams, ka A mēģinājis 1 reizi, C – divas, D – trīs, E – četras, bet B – 6 reizes.

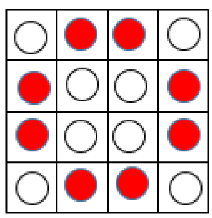
Piezīme. Atrisini uzdevumu, ja kāds no zēniem nevienu reizi nav pamēģinājis jauno deju figūru!

4. Deju svētkos ir jāizvieto 16 meitenes kvadrāta veidā 4 rindās un 4 kolonās tā, lai katrai meitenei baltā kleitā blakus atrastos tieši divas meitenes sarkanās kleitās, bet katrai meitenei sarkanā kleitā blakus atrastos ne vairāk kā viena meitene sarkanā kleitā. Cik meiteņu būs sarkanās kleitās? (Meitenes atrodas blakus, ja viņas stāv blakus vienā rindā vai vienā kolonā.)

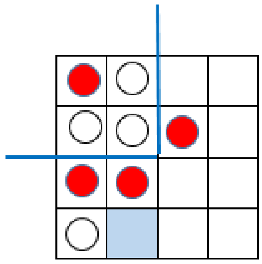
Atrisinājums. Uzdevumu risināsim shematiski – kvadrātā 4 x 4 rūtiņas izvietosim baltus un sarkanus aplīšus. Vispirms apskatīsim kvadrātiņu 2 x 2 rūtiņas. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tajā var izvietot ne vairāk kā 2 aplīšus sarkanā krāsā:



Uzdevumā ir prasīts, cik ir meiteņu sarkanās kleitās jeb cik sarkanos aplīšus jāizvieto rūtiņu kvadrātā. Mēģināsim to novērtēt skaitliski. Izvēlētajā kvadrātā ir 16 rūtiņas. Ja kvadrātu sagriezīsim četros kvadrātos ar izmēru 2 x 2 rūtiņas, tad lielākais sarkano aplīšu skaits var būt 8 – katrā kvadrātiņā divi sarkani aplīši. Pretējā gadījumā (ja sarkano aplīšus skaits ir lielāks par 8) kādā no četriem mazākajiem kvadrātiem būs izvietoti 3 vai pat 4 sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto, jo tad šai kvadrātā kādam sarkanajam aplītim blakus atradīsies citi divi sarkanie aplīši. Izvietojums ar 8 sarkaniem aplīšiem ir iespējams:



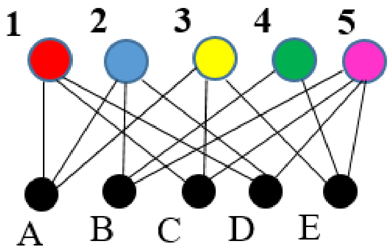
Vai iespējams, ka balto aplīšu ir vairāk nekā 8? Tad, līdzīgi spriežot, kādā no 4 mazajiem kvadrātiem būs 3 baltie aplīši (padomā, kāpēc 4 nevar būt?). Apskatīsim šāda izvietojuma iespējas, pieņemsim, ka 3 baltie aplīši ir kreisā augšējā stūrī. Tad kvadrāta 4 x 4 stūrī noteikti ir sarkanais aplītis, jo stūra rūtiņai ir tikai divas blakus pozīcijas un stūra rūtiņā izvietojot balto aplīti, tam blakus būtu ne vairāk kā viens sarkanais aplītis. Turpinot izvietojumu, spriežam, ka apakšējā kreisā stūrī izvietotam baltajam aplītim blakus jānovieto otrs sarkanais aplītis (šī pozīcija zīmējumā ir iekrāsota), bet tādā gadījumā sarkanajam aplītim virs iekrāsotās rūtiņas blakus atgadīsies divi sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto.



Tātad, meiteņu izvietojumā būs tieši 8 meitenes sarkanās kleitās.

5. Katrai no piecām meitenēm ir jāizvēlas viena no piecām balles kleitām. Katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, bet jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā 2 kleitas. a) Vai var gadīties, ka tieši 2 kleitas patīk visām meitenēm? b) Vai var gadīties, ka tieši viena kleita patīk visām meitenēm?

Atrisinājums. Meitenes apzīmēsim A, B, C, D, E, bet kleitas sanumurēsim 1, 2, 3, 4, 5. Uzzīmēsim grafu, kas parāda, ka uzdevumā aprakstītā situācija ir iespējama. Piemēram:



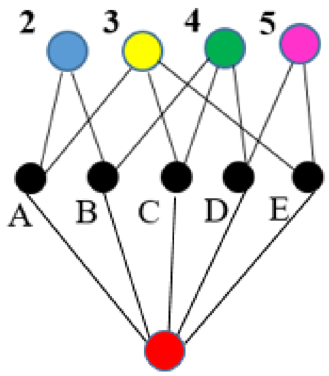
Doto piemēru var attēlot arī tabulas veidā:

A	1 2 3
B	2 4 5
C	1 3 5
D	1 2 4
E	3 4 5

Redzams, ka jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā divas kleitas (pārbaudi!).

a) Pieņemsim, ka ir iespējams, ka tieši divas kleitas patīk visām meitenēm. Ievērojot, ka katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, tad no atlikušajām trim katrai patīk tieši viena kleita. Tā kā ir 5 meitenes un 3 atlikušās kleitas, tad vismaz viena kleita patiks vairāk kā vienai meitenei (saskaņā ar Dirihlē principu), tātad vismaz divām meitenēm vienlaikus patiks vismaz 3 kleitas, kas ir pretrunā ar doto.

b) Gadījums, kad visām meitenēm patīk tieši viena kleita, ir iespējams, piemēram:



Piezīme. Uzdevuma spriedumā var izmantot **Dirihlē principu**:

Ja vairāk kā *n* elementi jāsadala tieši *n* grupās, tad kādā no grupām atradīsies vismaz 2 elementi.

6. Deju kolektīvam ir jāpiedalās gan Vācijas, gan Itālijas deju konkursos. Šajā kolektīvā katram bērnam ir vismaz viens draugs. Vadītājs nolēma, ka daļa no bērniem brauks uz Itāliju, bet otra daļa uz Vāciju. Vai viņš var sadalīt bērnus divās grupās tā, lai tie bērni, kuri brauks uz Itāliju, varētu draugiem pastāstīt par saviem iespaidiem, bet bērni, kas brauks uz Vāciju, pastāstīs par saviem piedzīvojumiem, un visi bērni būs guvuši informāciju gan par Itāliju, gan Vāciju?

Risinājuma ideja. Sarakstu sāksim veidot ar jebkuru vienu kolektīva dalībnieku. Sūtīsim viņu uz Vāciju, bet visus viņa draugus – uz Itāliju. Tad visus pirmā dalībnieka draugu draugus, kuri vēl nav ierakstīti sarakstā, sūtīsim atkal uz Vāciju. Ja tādu nav, tad atkal izvēlēsimies jebkuru dalībnieku, kurš vēl nav ierakstīts sarakstā un veiksim tāda paša veida sadalījumu.

PUNKTIŅŠ (B grupa) Sakārtosim, novērtēsim

19.01.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri

Piezīme. Nodarbības tēma ir Dirihlē principa pielietojums. Gatavojoties Novada Matemātikas Olimpiādei, skolēniem ir jātrenējas matemātiski precīzi pamatot izteiktos apgalvojumus.

1. Pierādi, ja izvēlas 51 dažādus naturālus skaitļus, kas mazāki par 100, var atrast divus tādus, kuru summa ir vienāda ar 100.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka var izvēlēties 51 tādu skaitli, kur nekādu divu skaitļu summa nav 100. Aplūkosim sekojošus skaitļu pārus (1; 99), (2; 98), ….(49; 51). Ir 49 pāri, kur skaitļu summa ir 100. Atsevišķi vēl paliek skaitlis 50. Tad kopumā ir 50 dažādas grupiņas. Ja starp izvēlētajiem skaitļiem nav divu tādu, kuru summa ir 100, tad no katras grupiņas ir izvēlēts ne vairāk kā viens skaitlis un lielākais izvēlēto skaitļu skaits var būt ne lielāks kā 50. Pretruna.

2. 31 konfekte ir jāsaliek vairākās kastītēs. Nevienā kastītē nevar ielikt vairāk kā 9 konfektes. Kā sadalīt konfektes,

a) lai būtu jāizmanto pēc iespējas mazāk kastīšu un katrā kastītē būtu citāds konfekšu skaits?

b) pierādi – ja izmanto vairāk kastīšu, nekā ir noteikts a) gadījumā un kastītēs ir atšķirīgs konfekšu skaits, tad atradīsies kādas divas kastītes, kurās konfekšu skaita summa ir 11.

Atrisinājums.

a) Ja 31 konfekte jāsadala pa kastītēm, kur vairāk kā 9 ielikt nevar, tad ir nepieciešamas vismaz 4 kastītes, jo trīs kastītēs kopumā var ielikt lielākais 27 konfektes. Lai katrā kastītē būtu dažāds konfekšu skaits un mēs izmantotu pēc iespējas mazāk kastīšu, tad tajās jāliek cik vien iespējams liels konfekšu skaits. Ja summē lielākos skaitļus, tas ir, $9 + 8 + 7 + 6 = 30$, tad redzam, ka mazākais kastīšu skaits ir 5. Var izveidot dažādus komplektus, piemēram, kastītes, kur konfekšu skaits ir 9, 8, 7, 6 un 1.

Piezīme. b) gadījumā grupu jeb "būrīšu" konstrukcija ir līdzīga kā pirmajā uzdevumā.

b) Ir jāizmanto vismaz 6 kastītes, kur katrā no tām ir atšķirīgs konfekšu skaits. Ir četri skaitļu pāri, kuru summa ir 11, tie ir (9; 2), (8; 3), (7; 4) un (6; 5). Vēl ir arī skaitlis 1. Tad kopumā var aplūkot šīs 5 grupas. Ja sešus vai vairāk dažādus skaitļus sakārto atbilstoši šīm grupām, tad vismaz vienā pārī atgadīsies abi skaitļi, tas ir, konfekšu skaits abās atbilstošajās kastītēs būs 11.

3. Katram no 4 zēniem ir sīknauda. Vai var gadīties, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums, ja

a) dažas no zēnu naudas starpībām ir 1, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 6 centi;

b) dažas no zēnu naudas starpībām ir 2, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 7 centi?

Atrisinājums.

a) Pieņemsim, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums. Tad trim zēniem katram ir citāds naudas daudzums, ko apzīmēsim $a, b, c,$ un pieņemsim, ka $a < b < c$.

Tad lielāko iespējamo starpību 5 var iegūt tikai vienā veidā, ja $a = 1$, bet $c = 6$. Lai atrastu b vērtību, jāaplūko divas iespējas, ko var aprakstīt ar vienādojumu sistēmām

$$\begin{cases} b = a + 1 \\ b = c - 3 \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} b = a + 3 \\ b = c - 1 \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus iegūstam $2b = 7 - 2 = 5$ vai $2b = 7 + 2 = 9$. Tāpēc nevienai sistēmai nav iegūstams atrisinājums veselos skaitļos.

Ievērojot, ka diviem zēniem noteikti ir 1 cents un 6 centi, pārējiem diviem zēniem var būt jebkura divu skaitu kombinācija no skaitļiem 2, 3, 4, 5. Tāpēc kopumā iespējami 6 dažādi naudas sadalījumi.

b) Šis gadījums ir iespējams. Trīs zēniem var būt 2, 3 un 7 centi (vai arī 1, 3, un 6 centi), ceturtajam zēnam naudas daudzums var sakrist ar jebkuru no minētajiem.

4. Klasē ir 30 skolēni. Jurītis matemātikas kontroldarbā ielaida 13 kļūdas. Nevienam citam skolēnam nebija tik daudz kļūdu. Pierādiet, ka vismaz trim skolēniem bija vienāds kļūdu skaits (varbūt nebija nevienas kļūdas)!

Atrisinājums. Divdesmit deviņiem skolēniem var būt 0, 1, 2, … 12 kļūdas vienā darbā, tas ir, pavisam iespējami 13 kļūdu skaita varianti jeb 13 grupas. Katru no skolēniem atzīmēsim atbilstošajā grupā. Pieņemsim, ka katrā grupā atzīmēti ne vairāk kā divi skolēni. Tad kopējais skolēnu skaits ir ne lielāks par 26, kas ir pretrunā ar doto. Tāpēc (saskaņā ar Dirihlē principu) kādā no grupām ir atzīmēti vismaz 3 skolēni. Tas nozīmē, ka vismaz 3 skolēniem ir vienāds kļūdu skaits.

5. Zu – Zu planētas iedzīvotājiem katram ir 4 rokas. Pludmalē satikās 9 bērni un vienlaikus katrs sarokojās ar 4 saviem draugiem (katram draugam pasniedza tikai vienu roku). Pierādiet, ka bija kādi 3 Zu – Zu bērni, kas savstarpēji viens otram paspieda roku!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo - nekādi 3 draugi nesarokojās visi savā starpā. Apskatīsim vienu bērnu A un četrus viņa draugus. Atbilstoši pieņēmumam, bērna A draugi savā starpā nedraudzējas. Tad katram no viņiem ir vēl 3 draugi. Tad pārējo četru bērnu, kuri nav A draugi (nosauksim viņus B, C, D, E), virzienā ir pasniegtas kopumā 12 rokas. Pēdējiem četriem bērniem B, C, D, E kopumā ir 16 rokas, no kurām A draugu virzienā atbilstoši arī ir pastieptas 12 rokas. Skaitli 12 var izteikt kā četru skaitļu summu

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3 \quad \text{vai} \quad 12 = 4 + 3 + 2 + 3.$$

Ja pieņemam, ka arī bērnu B, C, D, E starpā nav 3 savstarpēju draugu, tad citas skaitļa 12 summas neapmierina uzdevuma nosacījumus (uzzīmē visas iespējamās situācijas shematiski!). Tāpēc iespējami divi gadījumi, kur draugi ir, piemēram, B un C un otri D un E. Vai arī C draudzējas ar B un D, bet E draudzējas tikai ar bērna A draugiem. Pirmajā gadījumā draugiem B un C katram ir 3 draugi no visiem četriem bērna A draugiem. No tā seko, ka B un C ir kopīgi vismaz 2 draugi, kas arī veido šo 3 savstarpējo draugu kopu. Otrā gadījumā C ir 2 draugi no A draugiem, bet B ir 3 draugi no tiem. Tāpēc viņiem ir vismaz viens kopīgs draugs no A draugu grupas, kas arī veido savstarpējo draugu trijnieku. Esam ieguvuši pretrunu mūsu pieņēmumam.

6. Doti 12 divciparu skaitļi. Pierādiet, ka starp tiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, ka to starpība ir tāds divciparu skaitlis, kurā abi cipari vienādi!

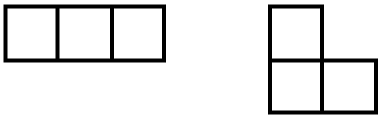
Atrisinājums. Skaitļi, kuru abi cipari ir vienādi ir 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, tas ir – tie dalās ar 11. Apskatīsim divus skaitļus A un B un pieņemsim, ka A > B. Divciparu skaitli var izteikt formā A = $11k + n$. Divu skaitļu A un B starpība dalīsies ar 11, ja B var izteikt B = $11m + n$. Citiem vārdiem sakot, skaitļus A un B dalot ar 11, to atlikumi ir vienādi. Starpība A – B = $11k + n - (11m + n) = 11(k - m)$, dalās ar 11.
Skaitļus, dalot ar 11, ir iespējami 11 dažādi atlikumi (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Dotos 12 skaitļus var iedalīt 11 atlikumu grupās. Tad, saskaņā ar Dirihlē principu, vismaz vienā grupā būs vismaz divi skaitļi. To starpība dalīsies ar 11.

PUNKTIŅŠ (B grupa) Rūtiņu figūru pārklāšanās

19.01.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri.

Par "**stienīti**" nosauksim 3 rūtiņu figūru, kas veido taisnstūri *3 x 1* rūtiņa. Otru 3 rūtiņu figūru sauksim par "**leņķīti**".

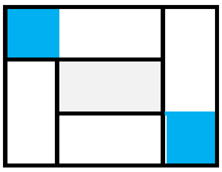


1. Gar rūtiņu taisnstūra malu ir jāizveido rāmītis – visas malējās rūtiņas jāpārklāj ar stienīšiem tā, ka katram stienītim tieši viena rūtiņa pārklājas ar viena cita stienīša rūtiņu. a) Nosaki taisnstūra *3 x n* platumu *n*; b) nosaki taisnstūra *n x m* iespējamos izmērus!

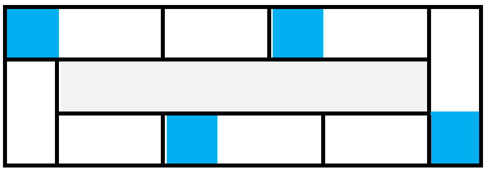
Piezīme. Uzdevuma mērķis ir atklāt figūru izvietojuma īpašības un aprakstīt tās ar vispārīgu formulu

Atrisinājums.

a) Lai izveidotu rāmīti, taisnstūra abos galos jābūt vertikālam stienītim. Vismazākais rāmītis veidots no 4 stienīšiem (skat. 1. zīm.). Lai rāmīti pagarinātu, tam jāpievieno horizontāli novietoti stienīši, kurpretim taisnstūra galos stienīšu konfigurācija ir noteikta. Vispārīga šādu taisnstūru izmērs ir *3 x (4 + 5 n)*. Piemērs gadījumam, kad *n = 1*, dots zīmējumā 2.



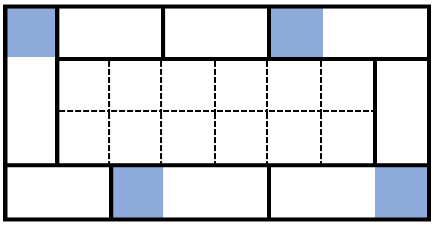
1. zīmējums



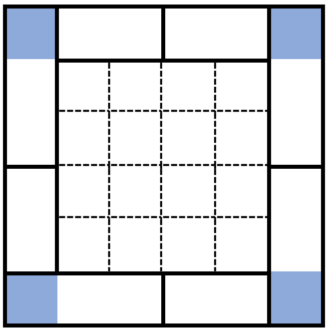
2. zīmējums

b) Rāmīša vienas malas garums var būt jebkurš vesels skaitlis lielāks par 2. Ievērojot, ka jebkuru izveidotā rāmīša garumu vai platumu var palielināt par 5, pietiek parādīt, kā izveidot tādus rāmīšus, kuru garums ir 3, 4, 5, 6 vai 7 rūtiņas. Rāmīša platums ir atkarīgs no tā garuma. Mazākais rāmītis, kura izmērs var būt *(3 + 5n) x (4 + 5k)*, redzams zīmējumā 1, kur *n = k = 0*.

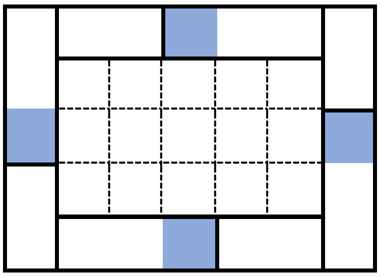
Rāmītis, kura vispārīgā formula ir $(4+5n) \times (3+5k)$, ja $n = 0$ un $k = 1$:



Rāmītis, kura vispārīgā formula ir $(6+5n) \times (6+5k)$, ja $n = k = 0$:

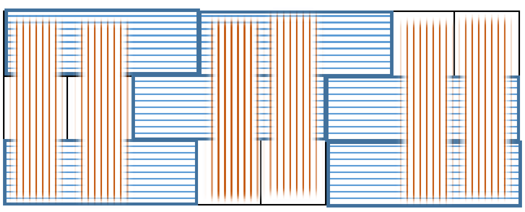


Rāmītis, kura vispārīgā formula ir $(7+5n) \times (5+5k)$, ja $n == k = 0$:



2. Taisnstūri ar izmēru 3×8 pārklāj pilnībā ar stienīšiem tā, ka katram stienītim tieši divas rūtiņas pārklājas ar diviem citiem stienīšiem!

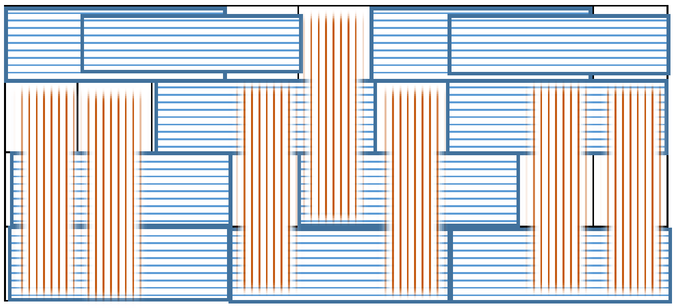
Atbildes piemērs:



Komentārs. Papildus var aprēķināt, cik stienīši nepieciešami šādam pārklājumam. Stienīšu kopējais skaits ir n. Katrs stienītis pārklāj 3 rūtiņas. Katram stienītim tieši 2 rūtiņas pārklājas ar diviem citiem stienīšiem, no kā var spriest, ka ir $2n$ taisnstūra rūtiņas, kuras pārklātas ar diviem stienīšiem. Taisnstūra rūtiņu skaits ir 24. Stienīši kopumā pārklāj $3n - n$ rūtiņas. Iegūstam $3n - n = 24$ jeb $n = 12$ stienīši.

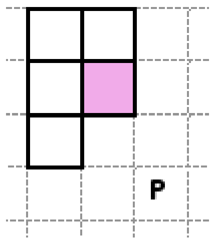
3. Taisnstūri ar izmēru *4 x 9* rūtiņas pārklāj pilnībā ar stienīšiem, kur katram stienītim tieši 2 rūtiņas ir pārklātas ar ne vairāk kā diviem citiem stienīšiem un pārklājumā ir vismaz viens vertikāli novietots stienītis un vismaz viens horizontāli novietots stienītis!

Atbildes piemērs:



4. Noklāj taisnstūri ar izmēru *4 x 5* rūtiņas ar leņķīšiem tā, ka katram leņķītim pārklājas viena rūtiņa ar citu leņķīti!

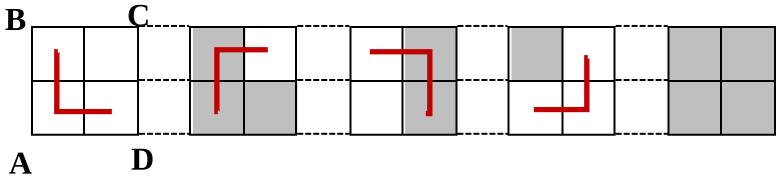
Atrisinājuma ideja: izveidojam taisnstūrveida bloku ar izmēru *2 x 5* rūtiņas. Izmantojot 4 leņķīšus te novieto divas P – veida konfigurācijas:



Doto taisnstūri pārklājam ar četriem šādiem blokiem. Taisnstūri pārklāt ar leņķīšiem, protams, var arī citādi.

5. Taisnstūrī ar izmēru *2 x 3* rūtiņas ir viena melna rūtiņa. Ja uz taisnstūra uzliek leņķīti, tad pārklātās rūtiņas maina krāsu uz pretējo. Vai ar vairākām darbībām var panākt, ka taisnstūra rūtiņas visas ir vienā krāsā?

Atrisinājums. Aplūkosim kvadrātu ABCD ar izmēru *2 x 2* rūtiņas. Pieņemsim, ka tas ir baltā krāsā. Novietojot leņķīti pēc kārtas katrā no stūrim A, B, C un D, kvadrāta rūtiņas būs melnā krāsā:



Šis rūtiņu pārkrāsošanas princips parāda, ka ar leņķīša palīdzību jebkuru krāsojumu, kur taisnstūra rūtiņas krāsotas divās krāsās, var pārveidot vienā krāsā. Dotajā taisnstūrī izvēlas tādu kvadrātiņu *2 x 2*, kura rūtiņas ir jāpārkrāso, un veic norādītās darbības. Vajadzīgās krāsas rūtiņu skaits būs palielinājies par 1, 2, 3 vai 4 rūtiņām (atkarībā no tā, cik rūtiņas jāpārkrāso). Tad izvēlas nākamo kvadrātiņu, kuru jāpārkrāso un tā turpina, līdz krāsošana paveikta.

6. Kvadrāta ar izmēru *3 x 3* rūtiņas ir melnā krāsā. Vai veicot tādas pašās darbības kā iepriekšējā uzdevumā, var panākt, ka visas rūtiņas baltas?

Piezīme. Skatīt iepriekšējā uzdevuma atrisinājumu.

7. Trīs no kvadrāta ar izmēru *4 x 4* rūtiņām ir nokrāsotas zilā krāsā, pārējās – baltā. Uzliekot uz laucina stienīti ar izmēru *4 x 1* rūtiņa, visas pārklātās rūtiņas maina krāsu uz pretējo (zilās rūtiņas kļūst baltas, bet baltās – zilas). Vai veicot šīs darbības atkārtoti, var panākt, ka visas kvadrāta rūtiņas kļūst baltas?

Atrisinājums. Izpētīsim, kādas pārmaiņas notiek vienas darbības rezultātā. Uzliekot stienīti uz kvadrāta, tas var pārklāt vienu, divas, trīs vai kādā brīdi pat 4 zilās rūtiņas. Pieņemsim, ka zilo rūtiņu skaits ir *n*, bet balto *k*. Apskatīsim sīkāk minētos gadījumus:

a) Stienītis pārklāj 1 zilo un 3 baltās rūtiņas, tad rūtiņu skaits ir

$n - 1 + 3 = n + 2;$ $\quad\quad k - 3 + 1 = k - 2$

b) Stienītis pārklāj 2 zilās un 2 baltās rūtiņas, tad rūtiņu skaits ir

$n - 2 + 2 = n;$ $\quad\quad k - 2 + 2 = k$

c) Stienītis pārklāj 3 zilās un 1 balto rūtiņu, tad rūtiņu skaits ir

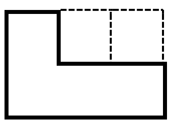
$n - 3 + 1 = n - 2;$ $\quad\quad k + 3 - 1 = k + 2$

d) Stienītis pārklāj 4 zilās rūtiņas, tad rūtiņu skaits ir

$n + 4;$ $\quad\quad k - 4$

Ievērosim, ka pie jebkuras darbības, rūtiņu skaits mainās par pāra skaitli, tātad saglabā sākotnējo paritāti. Zilo un balto rūtiņu skaits ir nepāra skaitlis (dots 3 un 13). Lai panāktu, ka kvadrāta visas rūtiņas ir baltas, jābūt 0 zilo rūtiņu, kas ir pāra skaitlis. Tāpēc uzdevumā prasīto situāciju panākt nevar.

8. Uz šaha dēlīša lauciņiem ir novietotas 15 figūras. Pierādi, ka uz dēlīša var atrast vismaz 4 tādus lauciņus, kuri veido L veida apgabalu:



Atrisinājums ideja: Šaha dēlīti sadali 16 L veida apgabalos. 15 figūras var izvietoties uz ne vairāk kā 15 šādiem apgabaliem.