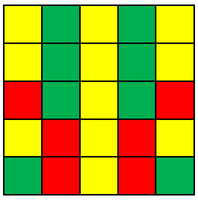
PUNKTIŅŠ (B grupa) Simetriskie krāsojumi
3.11.2017

Nodarbības mērķis: nostiprināt zināšanas par figūru simetriju, prast atšķirt simetriju veidus. Aplūkot dažādas metodes, risinot uzdevumus par rūtiņu figūru simetrisku krāsojumu.

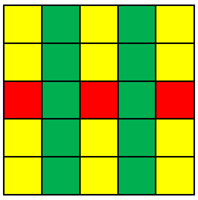
1. Kvadrāta, kura izmērs ir 5 x 5, rūtiņas izkrāso tā, lai:
   a) krāsojums ir simetrisks tikai attiecībā pret vertikālo asi,
   b) krāsojums ir simetrisks tikai pret vertikālo un horizontālo asīm,
   c) krāsojums ir simetrisks tikai attiecībā pret diagonāli,
   d) ievērojot simetriju, kura rodas pie figūras rotācijas ap centru,
   e) izkrāso, lai būt vienlaikus ievērotas visas minētās simetrijas no a) līdz c), kā arī centrālā simetrija.

Piemēri. Te var būt ļoti dažādi risinājumi:

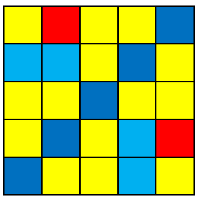
a) krāsojums ir simetrisks tikai attiecībā pret vertikālo asi



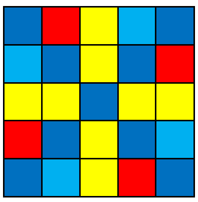
b) krāsojums ir simetrisks tikai pret vertikālo un horizontālo asīm



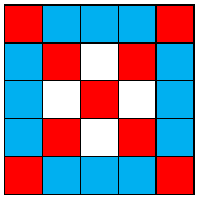
c) krāsojums ir simetrisks tikai attiecībā pret vienu diagonāli



d) ievērojot simetriju, kura rodas pie figūras rotācijas ap centru,

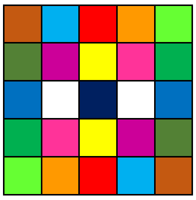


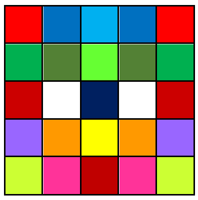
e) izkrāso, lai būt vienlaikus ievērotas visas minētās simetrijas no a) līdz c), kā arī centrālā simetrija



2. Kāds ir vislielākais krāsu skaits, lai, izkrāsojot kvadrāta 5 x 5 rūtiņas, krāsojums būtu simetrisks?

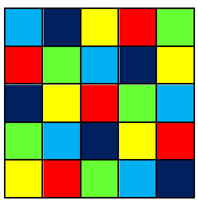
Atrisinājums. Ja izvēlamies centrālo simetriju, tad simetrijas centrs atrodas kvadrāta centrālās rūtiņas vidū, tāpēc šī rūtiņa ir simetriska pati pret sevi. Centrālajā simetrijā rūtiņas var iedalīt pāros, kur katrs pāris nokrāsots savā krāsā (skat. piemēru zemāk, kur attiecībā pret centrālo tumši zilo rūtiņu ir izveidots simetriskais krāsojums). Pāru skaits ir 12, tāpēc pie centrālās simetrijas lielākais izmantojamo krāsu skaits ir 13. Aplūkojot aksiālo simetriju figūras vidējā rindā vai kolonā, vai uz diagonālēm, ievērojam, ka simetrijas ass iet caur 5 rūtiņām. Tāpēc šīs rūtiņas var krāsot katru savā krāsā (skat. attēlu zemāk, kur figūrai izvēlēta vertikāla simetrijas ass). Simetrisko pāru skaits tad ir 10. Pie aksiālās simetrijas lielākais krāsu skaits, ar ko var izkrāsot rūtiņas, ir 15.





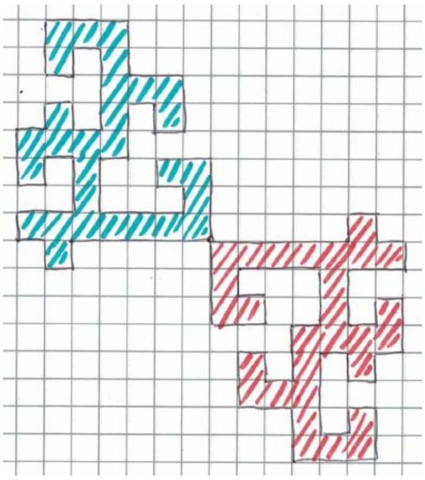
3. Izkrāso kvadrātu 5 x 5 piecās krāsās tā, lai nevienā rindā, nevienā kolonā un nevienā diagonālē nebūtu nekādas divas vai vairāk rūtiņas vienā krāsā!

Atrisinājums. Ja nevienā rindā nedrīkst būt nekādas divas rūtiņas vienā krāsā un krāsošanā jālieto piecas krāsas, tad katrā rindā ir visas 5 krāsas (arī kolonā, arī uz diagonālēm). Uzdevumu vieglāk ir izpildīt, ja iesākumā izvēlas vienu krāsu un cenšas pareizi izvēlēties un izkrāsot rūtiņas vienā krāsā. Tad izvēlēties kādu rūtiņu, kas atrodas blakus izkrāsotai rūtiņai, un izvietot otru krāsu. Var ievērot, ka krāsojums cikliski katrā nākamā rindā atkārtojas:

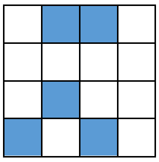


4. Aplūko zīmējumu. Uzzīmē figūru, kura ir simetriska dotajai attiecībā pret simetrijas centru - punktu Q.

Piezīme. Dotais uzdevums paredzēts telpiskās domāšanas attīstībai un uzmanības trenēšanai.



5. Kvadrātā ir dažas baltas un dažas zilas rūtiņas (skaties zīmējumu zemāk). Viena gājiena laikā ir atļauts mainīt krāsu uz pretējo vienā rindā vai vienā kolonā. Vai veicot atļautās darbības pēc kārtas, var panākt, lai krāsojums ir simetrisks?



Atrisinājums. Vispirms izpētīsim, cik rūtiņas ir nokrāsotas – piecas. Aplūkosim gadījumus, kas notiek, ja maina krāsojumu 1 līnijā (rindā vai kolonā):

Dotais zilo rūtiņu skaits līnijā	Dotais balto rūtiņu skaits	Zilo rūtiņu skaits pēc izmaiņām	Balto rūtiņu skaits pēc izmaiņām
0	4	4	0
1	3	3	1
2	2	2	2

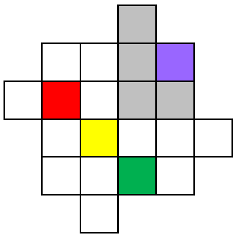
Līdzīgu rezultātu iegūst, ja apskata arī trīs un četras zilas rūtiņas vienā rindā vai kolonā. Ievērosim, ka darbību rezultātā zilo rūtiņu skaita paritāte nemainās, tas ir, zilo rūtiņu skaits ir nepāra skaitlis (tāpat, protams, arī balto rūtiņu skaits ir nepāra skaitlis).

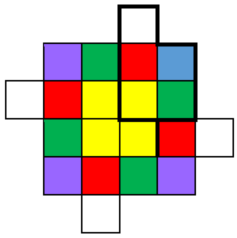
Ja kvadrātā, kas satur pāra skaitu rūtiņu, simetrijas ass iet pa kvadrāta viduslīniju, tad ass nekrusto rūtiņas, tāpēc tās veido savstarpēji simetrisku rūtiņu pārus. Ja simetrijas ass iet caur kvadrāta diagonāli, tad tā iet caur to rūtiņu diagonālēm, kuras atrodas uz diagonāles, un te to ir pāra skaits. Tāpēc pārējās rūtiņas atkal var iedalīt simetrijas pāros. Arī pie centrālās simetrijas var izveidot visu rūtiņu pārus. Tātad, lai iegūtu simetrisku krāsojumu, vienā krāsā ir jākrāso pāra skaits rūtiņu. Tāpēc no nepāra skaita zilo rūtiņu nevar iegūt simetrisku krāsojumu.

6. Zīmējumā redzamo figūru var sadalīt četrās vienādās rūtiņu figūrās, kuras visas ir vienādi izkrāsotas – katra rūtiņa vienā krāsā. Krāsojums ir nodzisis, no katras figūras tikai viena rūtiņa ir nokrāsota. Restaurē krāsojumu! Restaurē figūru formu! Atrisini abus gadījumus a) un b).

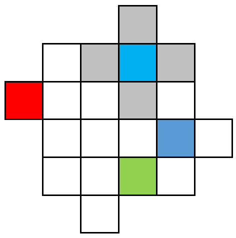
Atrisinājuma piemēri:

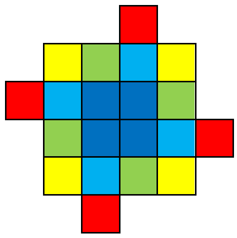
a)





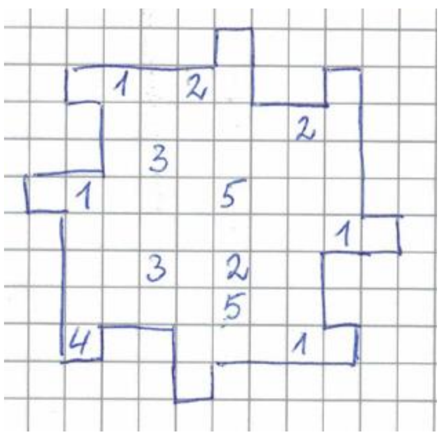
b)



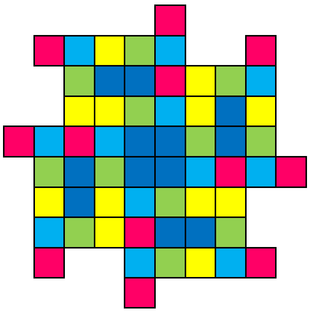


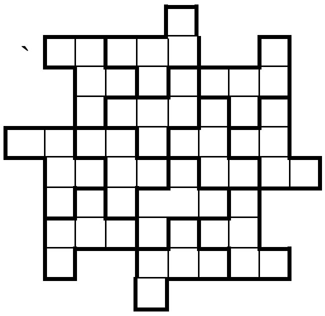
Piezīme. Ievērojot, ka a) gadījumā dotas tikai 4 krāsas, bet b) gadījumā tikai 3, tad atlikušās krāsas var izvēlēties patstāvīgi. Pelēkā krāsā ir iekrāsota figūras forma.

Brīviem brīžiem! Apskati zīmējumu. Te figūra sadalīta vienādās figūrās, kuras vienādi izkrāsotas piecās krāsās Zīmējumā krāsota palikusi tikai viena rūtiņa no katras figūras. Restaurē sadalījumu un figūru krāsojumu! Krāsas ir sanumurētas, to izvēle ir tavā ziņā!



Figūras sadalījums 5 rūtiņu vienādās figūrās un krāsojuma piemērs:





PUNKTIŅŠ (B grupa) Dzīve rūķu ciematā
10.11.2017

Īsi uzdevumu atrisinājumi un paskaidrojumi

1. **1.** Rūķīša Gudrīša dēls Aksels bija palaidies slinkumā un nopelnīja sliktu atzīmi matemātikā. Gudrītis lika Akselim atrisināt 5 uzdevumus un par katru nepareizi atrisināto uzdevumu lika atrisināt uzdevumu pareizi un uzdeva vēl divus papildus uzdevumus. Kopumā Aksels atrisināja 17 uzdevumus. Cik no šiem uzdevumiem Aksels sākotnēji bija atrisinājis nepareizi?

Atrisinājums. Akselam bija jāatrisina 5 uzdevumi. Viņš saņēma 17 – 5 = 12 papildus uzdevumus. Katri 2 papildus uzdevumi tika doti par vienu nepareizu risinājumu. Tātad kopumā Aksels bija nepareizi atrisinājis 12 : 2 = 6 uzdevumus.

2. Divas rūķu mammas rūpīgi mizo 400 kartupeļus. Pirmā mamma nomizo 3 kartupeļus minūtē, bet otrā mamma – divus. Cik ilgi viņas strādāja, ja otrā mamma kartupeļus mizoja 25 minūtes ilgāk?

Padomi. Atbildi uz jautājumiem: 1) Cik kartupeļus otrā mamma nomizoja pēdējo 25 minūšu laikā? 2) Cik kartupeļus vienā minūtē mizoja abas mammas kopā?

Atrisinājums. Otra mamma 25 minūtēs nomizoja 50 kartupeļus. Abas mammas kopā nomizoja 350 kartupeļus ar kopējo mizošanas ātrumu 5 kartupeļi minūtē. Uz to viņas patērēja 350 : 5 = 70 minūtes. Tad kopējais darba laiks visu kartupeļu mizošanai bija 70 + 25 = 95 minūtes. – pusotru stundu un 5 minūtes.

3. Rūķis Klusiņš dzīvo ļoti noslēgti. Zināms, ka viņa vecākais dēls piedzima pirms 12 gadiem, bet jaunākais – pirms gada. Klusiņa meita Maija savā 75 gadu dzimšanas dienā pastāstīja draudzenei, ka šobrīd viņas jaunāko brālīšu gadu summa sakrīt ar Maijas gadu skaitu. Vēl viņa pastāstīja arī, ka ir viens dvīņu pāris, bet pārējo brāļu vecums ir savstarpēji atšķirīgs. Cik brālīšu ir Maijai?

Atrisinājums. Uzdevumā dotie lielumi ir nepietiekami, lai iegūtu precīzu brālīšu skaitu. Tomēr to var novērtēt, tas ir, var atrast lielāko iespējamo brāļu skaitu un atrast mazāko iespējamo brāļu skaitu. Zināms ir, ka jaunākais brālītis ir vienu gadu vecs, bet vecākais brālītis ir 12 gadu vecs. No uzdevuma nosacījumiem var noprast, ka ir viens vecākais un viens jaunākais brālis. Ja gribam novērtēt mazāko iespējamo brāļu skaitu, tad dvīņi varētu būt 11 gadu veci. Un tad mazākais brāļu skaits ir 9: tie ir 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 11 un 12 gadu veci. Lielāko brāļu skaitu iegūsim, ja dvīņi varētu būt divus gadus veci. Tad ir 12 brāļi, kuru vecums ir 1, 2, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 gadi.

No tā secinām, ka Maijai varētu būt 9, 10, 11 vai 12 jaunākie brāļi.

4. Trīs rūķi Rūsiņš, Ūsiņš un Klusiņš ir sagatavojuši dzērveņu sulu. Viņiem ir 7 pilnas muciņas, 7 puspilnas muciņas un 7 tukšas muciņas. Kā viņiem sadalīt muciņas un sulu tā, lai sula nav jāpārlej un lai visiem trim būtu vienāds muciņu skaits un sulas daudzums?

Atrisinājums. Sulas daudzumu noteiksim "muciņās". Sulas kopējais daudzums ir 10,5 muciņas. Katram jāsaņem 3,5 muciņas sulas un 7 muciņas kopumā. Diviem rūķiem var dot katram 3 pilnas muciņas un pa vienai puspilnai muciņai. Tad muciņu skaits katram būs 4 muciņas. Un vēl viņiem pienākas 3 tukšas muciņas katram. Trešais rūķis ņem visu atlikušo – vienu pilnu muciņu, 5 pustukšas un 1 tukšo muciņu. Muciņas var dalīt arī citādi. Kā?

5. Rūķu saimes pagrabā bija sešas muciņas ar dzērveņu sulu, kurās bija 15, 16, 18, 19, 20, un 31 litrs sulas. Rūķis Klusiņš paņēma divas muciņas sulas Maijas dzimšanas dienas svinībām, bet rūķis Pukstiņš paņēma 3 muciņas. Izrādījās, ka Klusiņš paņēmis divas reizes mazāk sulas, nekā Pukstiņš.
Viena muciņa vēl palika pagrabā. Cik tajā litru sulas?

Atbilde. Pagrabā palika 20 litru muciņa.

Padoms. Ja Klusiņam ir divas reizes mazāk sulas nekā Pukstiņam, tad paņemtās sulas daudzumu izsaka skaitlis, kas dalās ar 3.

Atrisinājums. Doto skaitļu summa ir 15 + 16 + 18 + 19 + 20 + 31 = 119. Jāizvēlas tie pieci skaitļi, kuru summa dalās ar 3, jo Klusiņa paņemtās sulas daudzums ir 1/3 no piecu paņemto muciņu tilpuma, bet Pukstiņa sulas daudzums ir 2/3 no tā. Vienīgais skaitlis, kuru no sešu skaitļu summas var izslēgt ir skaitlis 20. Atlikušo 5 muciņu tilpumu kopējā summa ir 99. Klusiņs paņēmis 33 litrus, bet Pukstiņš 66 litrus. Tātad Klusiņam bija muciņas 15 un 18 litru tilpumā, bet Pukstiņam 16, 19 un 31 litra muciņas.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī vispārīgāk. Aplūkosim skaitļu atlikumus, kādi rodas, tos dalot ar 3:

Skaitlis	15	16	18	19	20	31
Atlikums	0	1	0	1	2	1

Lai trīs skaitļu summa dalītos ar 3, to atlikumi var būt 0, 1, 2 vai arī 1, 1, 1. Jāievēro, ka šo trīs skaitļus summa ir arī pārskaitlis (otrais rūķis paņēma divreiz vairāk nekā pirmais). Skaitļu trijnieki, kuri apmierina šīs prasības ir

(15, 20, 31); (15, 19, 20); (16, 18, 20); (16, 19, 31). Šo skaitļu summas ir

66 54 54 66

Skaitļu summas 54 neder, jo tāda skaitļa puse ir 27, kur divu mazāko doto skaitļu summa to pārsniedz (15 + 16 = 31). Ja otrais rūķis paņēma 15, 20 un 31 litra muciņu, tad pirmajam bija jāizvēlas tās divas muciņas, kuru tilpuma skaitlis dalās ar 3. Atlikušo skaitļu atlikumu summa ir tikai 1 + 0 = 1 vai arī 1 + 1 = 2. Tad risinājums nav iespējams. Pirmais rūķis var izvēlēties tikai 15 un 18 litru muciņas, jo citādo otrs rūķis nevarētu izvēlēties divas reizes vairāk (ja pirmais rūķis izvēlas 19 un 20 litrus vai 20 un 31 litru, tad otrs rūķis nevar atrast 3 skaitļus, kuru summa dalās ar 3. – vēro atlikumus!). Otrs rūķis izvēlējās 16, 19 un 31 litra muciņas.

6. Rudenī rūķi dodas mežā sēņot un ogot. Puse no rūķiem un vēl pusrūķis devās lasīt dzērvenes. Puse no atlikušajiem rūķiem un pusrūķis devās lasīt brūklenes. Puse no atlikušajiem rūķiem un pusrūķis aizgāja sēņot. Puse no atlikušajiem rūķiem un pusrūķis aizgāja savākt ķērpjus. Visi rūķi bija devušies mežā, neviens nepalika mājās. Cik viņu bija?

Atrisinājums. Uzdevums formulēts joka veidā, te jāpadomā, par ko ir runa. Jāsaprot, ka domāta tāda grupa, kurā ir nepāra skaits rūķu. Uzdevuma risinājums ir jāsāk no beigām: Cik rūķu aizgāja savākt ķērpjus, ja mājās vairs neviens nepalika? Pirms pēdējā gājiena bija atlikuši x rūķi, tad sastādām vienādību: $x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1=0$, seko, ka $x = 1$. Uzdevumu risina, atkāpjoties no beigām uz sākumu. Pirms sēņošanas grupā bija 3 rūķi, kur 2 aizgāja sēņot, bet tas viens, kurš palika, gāja lasīt ķērpjus. Tā noskaidrojam, ka iesākumā bija 15 rūķi. Puse no tiem un pusrūķis devās dzērvenēs: $\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$. Atlika 7 rūķi, no kuriem 4 devās lasīt brūklenes. No atlikušiem 3 divi sēņoja, bet pēdējais rūķis lasīja ķērpjus.

Seši brāļi grib brālīgi sadalīt 5 picas. Šīs picas nedrīkst sagriezt katru sešās vienādās daļās, drīkst griezt citādi. Kā viņiem jādala picas? a) Kāds ir mazākais griezumu skaits? b) Kā sadalīt, lai katram brālim būtu citāda porcija un katru picu griež citādi vienādās daļās (b) gadījumā drīkst vienu picu sagriezt arī 6 daļās)?

Risinājums. Ja ir 5 picas, tad katram brālim ir jāsaņem 5/6 daļas picas. Ievērosim, ka $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

a)No tā secinām, ka 3 picas var griezt uz pusēm, bet atlikušās – 3 vienādās daļās, izdarot griezumus līdz centram (sadalot picu 3 vienādos sektoros). Tad kopējais griezumu skaits ir 9 - trīs griezumi, griežot picas uz pusēm un divām picām 3 griezumi līdz centram.

b) Piemēram: vienu picu griež uz pusēm, otru – 3 vienādās daļās, trešo 4 vienādās daļās, ceturto – 6 vienādās daļās, bet piekto – 12 vienādās daļās. Tad var veidot sekojošos komplektus:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$; $\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$;
$\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$

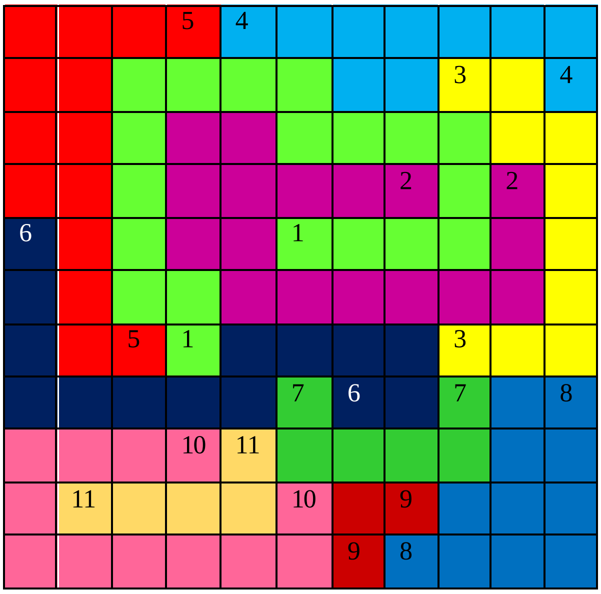
PUNKTIŅŠ (B grupa) Spēlītes
17.11.2017

Risinājumi un paskaidrojumi

1. Vienpadsmit čūskas cieši viena pie otras saritinājušās vienā mudžeklī kvadrāta iekšpusē. Atrodi tās zīmējumā, katru iekrāso citā krāsā. Nav brīvu rūtiņu.

			5	4						
								3		4
							2		2	
6					1					
		5	1					3		
					7	6		7		8
			10	11						
	11				10		9			
						9	8			

Piezīme. Ir iespējami dažādi atrisinājumi, piemēram:



Izvelc līnijas, kā tieši katra čūska ir saritinājusies!

Divu spēlētāju spēles, kur spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas

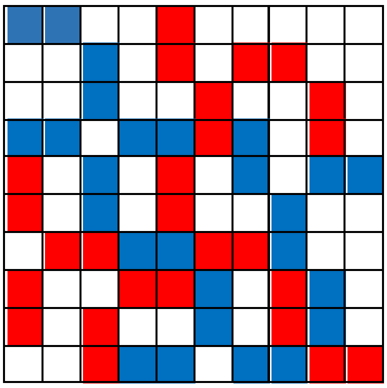
Piezīme. Pirmo divu spēļu stratēģija pamatojas uz simetrijas principu. Pēdējām divām spēlēm jāanalizē speciālgadījumi, vispirms izpētot arī iespējamās spēlēs beigu pozīcijas.

2. Uz papīra rindā savilktas mīnusu svītriņas (brīvi izvēlēts skaits). Spēlētājs savā gājienā var pārvērst par plusiņu vai nu vienu, vai arī divas blakus stāvošas svītriņas. Uzvarējis ir tas, kurš izdara pēdējo gājienu.

Spēles stratēģija. Uzvarēt var pirmais spēlētājs. Ja ir nepāra skaits svītriņu, tad viņš vai viņa izvēlas centrālo strīpiņu un atzīmē tur plusiņu. Ja ir pāra skaits svītriņu, tad pirmais spēlētājs izvēlas divas centrālās strīpiņas, kurās ievilkt plusiņus. Visos nākošajos gājienos pirmais spēlētājs simetriski atkārto pretinieka darbības. Ja pretiniekam ir kāds gājiens, tad arī pirmajam spēlētājam tāds ir.

3. Divi spēlētāji pēc kārtas izkrāso divas blakus esošas rūtiņas kvadrātā ar izmēru 10 x 10 rūtiņas. Krāsošanu sāk no diviem diagonāli pretējiem kvadrāta stūriem. Vienas krāsas figūras obligāti saskaras ar stūriem, bet ne ar malām. Zaudējis ir tas spēlētājs, kurš vairs nevar izdarīt gājienu.

Spēles piemērs. Spēlētājs, kurš lieto zilo krāsojumu, ir zaudējis, jo vairs nav iespējams iekrāsot divas zilās rūtiņas saskaņā ar spēles noteikumiem.



Spēles stratēģija. Spēlē vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs, ja atkārto pirmā spēlētāja izvēli simetriski attiecībā pret centru. Ja pirmajam spēlētajam ir atlicis kāds gājiens, tad tāds tas arī ir otrajam spēlētājam.

4. Rindā izvietoti 19 aplīši. Uz pirmā aplīša novietots kauliņš. Kauliņu drīkst pārbīdīt par vienu, diviem vai 3 aplīšiem. Spēlētāji izdara gājienus pēc kārtas. Uzvarētājs ir tas, kurš kauliņu novieto uz pēdējā aplīša.

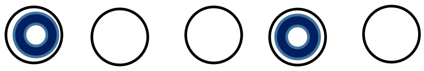
Spēles stratēģija. Spēle jāanalizē, sākot no beigām. Ja kauliņš ir nonācis vienā no pēdējiem četriem aplīšiem, tad tas ir nonācis "uzvarētāja pozīcijās". Tas spēlētājs, kuram ir gājiens, var pārbīdīt kauliņu uz pēdējo pozīciju. Tāpēc ir izdevīgi censties novietot kauliņu uz piektā aplīša no beigām, tad pretinieks var pārbīdīt kauliņu ne vairāk kā 3 pozīcijas uz priekšu. Tālāk jāatrod veids, kā nonākt šajā pozīcijā. Līdzīgi spriežam, ka kauliņš ir jānovieto devītajā pozīcijā no beigām, lai pretinieks nevarētu savu kauliņu nolikt uz piektā aplīša no beigām. Un tā turpinām. Šajā spēlē uzvarēs pirmais spēlētājs, ja viņš vai viņa kauliņu izvietos uz noteiktiem aplīšiem - 3-šā, 7-tā, 11-tā un 15-tā aplīšiem, šoreiz skaitot no sākuma.

5. Rindā izvietoti 21 aplītis. Trīs kauliņi ir izvietoti uz kaut kādiem trīs dažādiem aplīšiem, bet neviens kauliņš nav uz pēdējā aplīša. Spēlētājs drīkst pārbīdīt kādu kauliņu uz jebkuru brīvu aplītī virzienā uz priekšu, tas ir, pa labi. Citiem kauliņiem pārlēkt nedrīkst. Ja kauliņš sasniedz pēdējo aplīti, to no spēles noņem. Vinnētājs ir tas spēlētājs, kurš no spēles noņem pēdējo kauliņu.

Spēles stratēģija. Spēles iznākums ir atkarīgs no tā, kā sākotnēji ir izvietoti kauliņi. Tāpēc jāatrod speciālos izvietojumus, kuri spēlētājam garantē uzvaru. Vienosimies, ka to kauliņu, kurš ir vistuvāk spēles beigu aplītim labajā pusē, sauksim par pirmo kauliņu, nākamo - par otro, bet to, kurš tuvāk spēlēs sākumam – par trešo. Īsuma pēc arī teiksim "noņemt kauliņu" no spēles lauka, kas nozīmē, ka kauliņu pārvieto uz pēdējo aplīti, no kura kauliņu var noņemt. Ievērosim arī, ka pirmo kauliņu iespējams uzreiz pārvietot uz pēdējo aplīti un noņemt no spēles, ja tas ir neieciešams.

Vispirms pieņemsim, ka uz spēles laukuma ir palikuši tikai divi kauliņi. Ja starp tiem ir atstarpe (vismaz viens brīvs aplītis), tad pirmais spēlētājs otro kauliņu pārvieto uz pirmajam kauliņam blakus esošo aplīti. Tad otrajam spēlētajam ir tikai viena iespēja - pārbīdīt pirmo kauliņu. Pirmais spēlētājs "seko cieši pa pēdām otrajam spēlētājam", tas ir, visu laiku pārvieto otro kauliņu blakus pirmajam. Līdz ar to pirmo kauliņu no spēles noņem otrais spēlētājs, tāpēc pirmais spēlētājs ir uzvarējis. Ja sākuma pozīcijā abi kauliņi blakus, tad vinnē otrais spēlētājs.

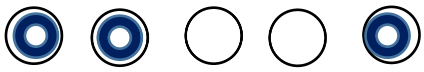
Uzvarošā pozīcija pirmajam spēlētājam (aplīšu rindas fragments):



Uzvarošā pozīcija otrajam spēlētājam:

Ievērojot nupat veikto divu kauliņu izvietojuma iespējas, var spriest pa sekojošo pozīciju: Ja otrais un trešais kauliņi ir uz blakus aplīšiem, tad uzvar pirmais spēlētājs, noņemot pirmo kauliņu no spēles. Paliek pozīcija ar diviem kauliņiem blakus, kas garantē pirmā spēlētāja uzvaru.

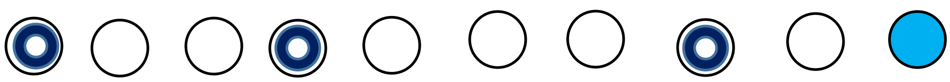
Uzvarošā pozīcija pirmajam spēlētājam:



Ja starp otro un trešo kauliņu ir vismaz viens brīvs aplītis, tad jāšķiro divi gadījumi. (Teiksim "attālums" – brīvo aplīšu skaits.)

1) Ja attālums starp otro un trešo kauliņu sakrīt ar pirmā kauliņa attālumu līdz spēles pēdējam aplītim to ieskaitot, tad uzvar otrais spēlētājs, pareizi spēlējot. Viņa stratēģija ir saglabāt šo attālumu vienādību. Ja pretinieks pārvieto pirmo kauliņu, tad spēlētājs pārvieto trešo kauliņu par tikpat daudz pozīcijām kā tika pārvietots pirmais. Ja pretinieks pārvieto otro kauliņu, tad spēlētājs pārvieto trešo kauliņu par tikpat daudz pozīcijām. Ja pretinieks pārvieto trešo kauliņu, tad spēlētājs pārvieto pirmo kauliņu par tikpat daudz pozīcijām. Rezultātā pretinieks ir spiests vai nu noņemt pirmo kauliņu, tad var novietot atlikušos divus kauliņus blakus. Ja pretinieks novieto otro un trešo kauliņus blakus, tad var noņemt pirmo kauliņu.

Uzvarošās pozīcijas piemērs otrajam spēlētājam (aplīšu rindas beigu fragments):



2) Ja pirmajā gadījumā aprakstītā attālumu vienādība nav gadījusies, tad uzvar pirmais spēlētājs. Vispirms nosaka, kurš attālums ir lielāks – starp otro un trešo kauliņu, vai pirmā kauliņa attālums līdz beigām. Ja pirmā kauliņa attālums līdz pēdējam aplītim ir lielāks, tad pārvieto pirmo kauliņu tā, lai minētie attālumi ir vienādi. Ja attālums starp otro un trešo kauliņu ir lielāks, tad pārvieto trešo kauliņu. Iegūst pirmajā gadījumā aprakstīto kauliņu izvietojumu. Pirmais spēlētājs pielieto pirmajā gadījumā aprakstīto stratēģiju un uzvar.

Komentārs. Salīdzinot divas pēdējās spēles, var ievērot, ka pirmajā spēlē atkarībā no aplīšu skaita var uzvarēt vai nu pirmais, vai otrais spēlētājs (piemēram, ja būtu 21 aplītis, uzvarēt var otrais spēlētājs). Otrajā spēlē aplīšu skaitam nav būtiska nozīme – te noteicošais ir kauliņu izvietojums. Ieteicams arī izpētīt pēdējo spēli, ja uz aplīšiem izvietoti 4 vai vairāk kauliņi. Interaktīvā veidā spēli ***Slippery snail*** var izspēlēt NRICH mājas lapā https://nrich.maths.org/1210