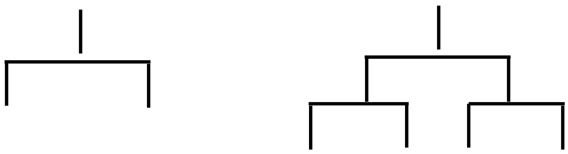
Decembra konkursiņš! **(B grupa)** Atrisinājumi
1.12.2017

1. Agate zīmēja sekojošas struktūras:



Pirmajā zīmējumā ir 1 horizontāls nogrieznis un 3 vertikāli. Tad viņa katru nākamo zīmējumu zīmēja lielāku, katram apakšējam vertikālajam nogrieznim pievienojot vienu horizontālu un galos divus vertikālus uz leju vērstus nogriežņus. Un tā turpināja. Cik nogriežņu būs 10-tajā zīmējumā kopumā?

Atbilde. Desmitajā zīmējumā kopumā ir 3070 nogriežņi.

Atrisinājums. Ievērosim, ka ir izdevīgi horizontālos un vertikālos nogriežņus skaitīt atsevišķi:

Zīmējums	**Horizontālie nogriežņi**	**Vertikālie nogriežņi**
Pirmais	1	3
Otrais	1+2	3 + 4
Trešais	1+2+4	3+4+8
Ceturtais	1+2+4+8	3+4+8+16
Piektais	1+2+4+8+16	3+4+8+16+32
Sestais……..	1+2+4+8+16+32	3+4+8+16+32+64

Tad desmitajā zīmējumā būs 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1023 horizontālie nogriežņi, bet vertikālie būs par 1024 vairāk. Kopumā nogriežņu skaits ir $1023 \cdot 2 + 1024 = 3070$

Piezīme. Var izveidot arī vispārīgu formulu (5. – 6. klašu mācību programmā gan vēl neapskata pakāpju īpašības). Ievērojot zināmo formulu:

$1 + 2 + 4 + + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, nogriežņu skaitu n-tajā zīmējumā var aprēķināt sekojoši

$$2^n - 1 + 2^{n+1} - 1 = 2^n(1+2) - 2 = 3 \cdot 2^n - 2$$

2. Doti cipari 0, 1, 2, 3. Cik dažādus četrciparu skaitļus var izveidot, katra skaitļa pierakstā izmantojot tieši divus no šim cipariem? (piemēram, 1211)

Atbilde. Var izveidot 63 dažādus skaitļus.

Atrisinājums. No četriem cipariem divus ciparus var izvēlēties 6 veidos. Jāšķiro gadījumi, ja ir izvēlēts cipars 0 vai nav. Aplūkosim gadījumu, kad ir izvēlēts cipars 0. Skaidrs, ka 4-ciparu skaitlis nevar sākties ar 0. Tad ciparu 0 var izvietot vienu, desmitu vai simtu pozīcijās. Ja skaitlis jāizveido, izmantojot tikai 2 ciparus, tad skaitlī var būt viena, divas vai 3 nulles:

- Ja skaitlis satur vienu nulli – tad tā var būt izvietota vienā no trim pozīcijām.

- Ja skaitlis satur divas nulles, tad tās var būt izvietotas 3 veidos: $\overline{a0a0}$; $\overline{a00a}$; $\overline{aa00}$
- Ja skaitlis satur 3 nulles, tad tāds ir viens skaitlis.

Ievērojot, ka nenulles ciparu un 0 var izvēlēties 3 veidos, tad tādu četrciparu skaitļu skaits, kas satur vismaz vienu 0 ir $3 \cdot (3+3+1) = 21$

Divus nenulles ciparus var izvēlēties 3 veidos. Izsekosim kā var izvietot vienu ciparu *a*, tad atlikušajās četrciparu skaitļa pozīcijās raksta otru ciparu.

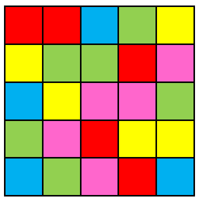
- Vienu ciparu *a* var izvietot vienā no četrām pozīcijām.
- Divus vienādus ciparus *a* četrās pozīcijās var izvietot 6 veidos.
- Trīs vienādus ciparus četrciparu skaitlī var izvietot 4 veidos.

Tādu četrciparu skaitļu skaits, kuri nesatur nulles ir $3 \cdot (4+6+4) = 42$

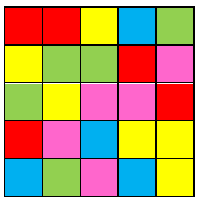
Kopējais pēc uzdevuma nosacījumiem izveidoto skaitļu skaits ir 21+42=63

3. Izkrāso kvadrāta 5 x 5 rūtiņas tā, lai katrā rindā un katrā kolonā ir tieši divas vienādas krāsas rūtiņas. Vienādās krāsas rūtiņas katrā rindā ir citā krāsā. Tāpat arī kolonās. Kāds ir mazākais nepieciešamais krāsu skaits? Pamato!

Atrisinājums. Kvadrātā ir 5 rindas, tāpēc nepieciešamas ir 5 krāsas. Izkrāsot kvadrātu piecās krāsās pēc uzdevuma nosacījumiem var. Piemēram:



Piezīme. Var izveidot arī tādu krāsojumu, kur uz abām diagonālēm arī ir tieši divas vienādas krāsas rūtiņas:



4. Katru nakti divi rūķi iet sargāt raktuvēs iegūto dimantu krātuvi. Viņi sastādījuši sarakstu, kurā ierakstīti visi dažādi sargu pāri. Cik garš ir rūķu saraksts, ja kopumā ir 7 sargi?

Atbilde. Sarakstā ierakstīts 21 rūķu pāris.

Atrisinājums. Pirmais rūķis veido sešus pārus ar citiem rūķiem. Otrais rūķis veido vēl piecus pārus ar visiem citiem rūķiem, izņemot pirmo rūķi. Trešais rūķis ir jau ierakstīts pārī ar pirmo un otro rūķi, tāpēc tas veido vēl četrus atšķirīgus pārus ar atlikušajiem rūķiem. Tālākais spriedums līdzīgs. Rūķu pāru skaits ir 6+5+4+3+2+1=21.

5. Fidelandē naudu skaita *krakos*. Fidelandiešu naudas zīmes ir 1, 3, 5, 10 un 23 kraku vērtībā. 23 kraku naudas zīmi samainīja 10 naudas zīmēs. Pierādiet, ka vismaz viena naudas zīme ir ar nomināciju 10 kraki!

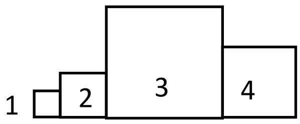
Atrisinājums. Starp visām naudas zīmēm ir tikai viena pāra skaitļa naudas zīme. Ja starp visām desmit naudas zīmēm būtu tikai nepārskaitļa zīmes, tad to summa būtu pārskaitlis, tas ir, nebūtu vienāda ar 23. Tas nozīmē, ka ir viena naudas zīme 10 kraku vērtībā. Divas tādas nevar būt, jo tad lielākais būtu lietotas 5 naudas zīmes: 10+10+1+1+1=23. Ja naudas zīmju komplektā ir nominācija 10 kraki, tad naudas zīmju komplekts var būt

10+5+1+1+1+1+1+1+1+1=23 vai 10+3+3+1+1+1+1+1+1+1=23.

PUNKTIŅŠ (B grupa) Ko darīt ar taisnstūriem?
8.12.2017

Īsi risinājumi un paskaidrojumi

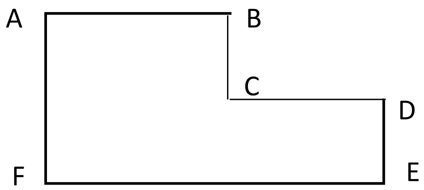
1. Virknē uzzīmēti četri kvadrāti. Otrā kvadrāta laukums ir 4 reizes lielāks nekā pirmā kvadrāta, bet 4 reizes mazāks nekā trešā kvadrāta laukums. Ceturtā kvadrāta malas garums ir 3 reizes lielāks nekā pirmā kvadrāta malas garums. Kāds ir figūras ārējā kontūra perimetrs, ja otrā kvadrāta laukums ir 36 cm ^{2}?



Atbilde. Figūras perimetrs ir 56 cm.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim katra kvadrāta malas garumu. Otrā kvadrāta malas garums ir $a_2 = 4$ cm. Pirmā kvadrāta laukums ir 4 reizes mazāks, nekā otrā kvadrāta laukums, tātad 4 cm ^{2}, tāpēc $a_1 = 2$cm, bet līdzīgi trešā kvadrāta laukums ir 4 reizes lielāks nekā otrā kvadrāta laukums, tad tam malas garumsir $a_3 = 8$cm. Savukārt ceturtā kvadrāta mala ir 3 reizes garāka nekā pirmā kvadrāta mala, tas ir, $a_4 = 6$ cm. Ievērosim, ka figūras augšējās daļas horizontālo nogriežņu garums ir vienāds ar pamata garumu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$ cm, bet sānu malas vertikālo nogriežņu kopējais garums ir vienāds ar lielākā kvadrāta malas garumu 8 cm. Tad figūras perimetrs ir $(20 + 8) \cdot 2 = 56$ cm.

2. Dota figūra ABCDEF. Mala AF ir 4 reizes garāka nekā BC. CD ir 2 reizes garāka nekā BC un 3 reizes īsāka nekā EF. Aprēķini figūras laukumu un perimetru, ja AB ir 8 cm!



Atbilde. Figūras perimetrs ir 40 cm, bet laukums ir 88 cm^2.

Atrisinājums. Izteiksim dotos, izmantojot apzīmējumus. Apzīmēsim $BC = x$. Tad

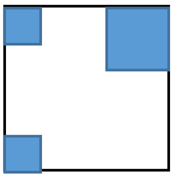
$CD = 2x$; $AF = 4x$; $EF = 3CD = 6x$. No dotā seko arī, ka $AB = EF - CD = 4x = 8$ cm.

Tāpēc $x = 2$ cm.

Aprēķināsim perimetru: $P = 2(4x + 6x) = 20x = 40cm$

Aprēķināsim laukumu: $S = 4x \cdot 6x - x \cdot 2x = 24x^2 - 2x^2 = 22x^2 = 88cm^2$

3. No kvadrāta stūriem izgrieza 3 mazākus kvadrātus, kur divi kvadrāti bija vienādi. Atlikušās figūras perimetrs ir 40 cm. Kāds ir šīs figūras laukums, ja lielākā izgrieztā kvadrāta laukums ir 4 reizes lielāks par mazākā kvadrāta laukumu un attālums starp abiem šādiem kvadrātiem ir 4 cm?



Padoms. Dotā nesagrieztā kvadrāta perimetrs ir vienāds ar iegūtās figūras perimetru.

Atbilde. 76 cm^2.

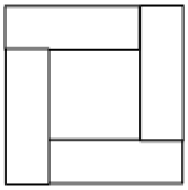
Atrisinājums. Lielā kvadrāta malas garums ir 10 cm. Ja mazākā kvadrāta malu apzīmē ar *x,* tad otra izgrieztā kvadrāta malas garums ir *2x* (jo laukums ir 4 reizes lielāks $2x \cdot 2x = 4x^2$). Iegūstam vienādību, kuru atrisinām:

$$10 = x + 4 + 2x = 4 + 3x$$
$$x = 2cm$$

Aprēķinām figūras laukumu ar starpības palīdzību:

$$S = 100 - 2x^2 - 4x^2 = 100 - 8 - 16 = 76cm^2$$

4. Četri vienāda izmēra taisnstūri novietoti blakus tā, ka centrā ir tukšs kvadrātveida laukums. Kāds ir taisnstūra perimetrs, ja tā īsākās malas garums ir 2 vienības, un iekšējā kvadrāta perimetrs sakrīt ar viena taisnstūra perimetru? Kāds ir iekšējā, kāds ir ārējā kvadrāta laukums?



Atbilde. Iekšējā kvadrāta laukums ir 16 kvadrāt-vienības liels, bet ārējā 64 kvadrāt-vienības liels.

Atrisinājums. Taisnstūra īsāko malu apzīmēsim ar *x*, bet garāko ar *y*. Tad iekšējā kvadrāta mala ir

y - x vienības gara. Ievērojot, ka *x* = 2 vienības, tad iekšējā kvadrāta mala ir *y – 2* vienības gara. Pielīdzināsim taisnstūra un mazā kvadrāta perimetrus un atrisināsim vienādojumu:

$$2(x + y) = 4(y - x)$$
$$4 + 2y = 4y - 8$$
$$2y = 12$$
$$y = 6$$

No šejienes seko, ka iekšējā kvadrāta mala ir 4 vienības gara, bet ārējā kvadrāta mala ir 8 vienības gara. Iekšējā kvadrāta laukums ir 16 kvadrāt-vienības liels, bet ārējā 64 kvadrāt-vienības liels.

PUNKTIŅŠ (B grupa) Kura daļa?
15.12.2017
Īsi risinājumi un komentāri

1. Kronīšu ģimene vakariņām pasūtīja divas picas – lielo un mazo. Lielo picu piegādāja sagrieztu 8 šķēlēs, bet mazo – 6 šķēlēs. Una un Jana izvēlējās mazo picu, no kuras Una apēda vienu trešo daļu, bet Jana – vienu sesto daļu. Lielo picu ēda tētis, mamma un brālis Uģis. Tētis apēda ceturto daļu no lielās picas, brālis – sesto daļu no atlikušās lielās picas, bet mamma picu ēda pati pēdējā, izvēloties pusi no atlikušajām šķēlēm. Cik gabaliņus apēda katrs? Kāda daļa mazās un lielās picas atlika?

Komentārs. Šis ir vienkāršs iesildīšanās uzdevums, viegli atrisināms, izveidojot shematiskus zīmējumus.

Atbilde. Palika puse no mazās picas un 5/16 daļas no lielās.

2. Spēļu veikalā Emīls nopirka brīnum skaistas stikla lodītes, kuras pārdevējs iebēra papīra turzā. Diemžēl uz ielas papīra maisiņš pārplīsa un visas lodītes izbira uz ielas. Viena trešdaļa no lodītēm ielas slīpumā aizripoja tālu, viena sestā daļa iekrita ūdens notekā. Pusi no tām lodītēm, kuras bija palikušas Emīla tuvumā, nočiepa garām skrejošie bērni. Trešo daļu no tām lodītēm, kuras Emīls salasīja, nācās izmest, jo tās bija saplīsušas. Emīls skumīgi ielika kabatā atlikušās 14 lodītes. Cik lodīšu viņš nopirka?

Atbilde. Emīls nopirka 84 lodītes.

Atrisinājums. Šo uzdevumu jāsāk risināt no beigām.

Ja Emīls izmeta trešo daļu no salasītajām lodītēm, tad viņš kabatā ielika divas trešās daļas no tām. Seko, ka viņš izmeta 7 lodītes. Tāpēc Emīls salasīja 21 lodīti. Tikpat daudz, cik Emīls salasīja – 21 lodīti – nočiepa garām skrejošie bērni. Tas bija puse no tām lodītēm, kuras bija palikušas Emīla tuvumā. Tātad viņa tuvumā bija palikušas 42 lodītes. Trešā daļa no visām lodītēm aizripoja, sestā daļa noslīka. Viena trešdaļa plus viena sestā daļa ir puse no dotajām lodītēm. Tātad Emīls nopirka 84 lodītes.

3. Uz galda spēles *n* lauciņiem ir jāizvieto sarkanas un melnas figūriņas. Ja uz galdiņa liktu tikai sarkanās figūras, tad 6 lauciņi paliktu tukši. Ja uz puses no visiem lauciņiem liktu tikai sarkanās figūriņas, bet uz otras puses – tikai melnās, tad paliktu pāri 4 sarkanās figūriņas, bet pietrūktu divas melnās. Cik lauciņu ir uz galdiņa, cik ir sarkano un cik ir melno figūriņu?

Atbilde. Spēlei ir 20 lauciņi, 14 sarkanās figūriņas un 8 melnās figūriņas.

Atrisinājums. Apzīmēsim sarkano figūriņu skaitu ar s, melno – ar m. Uzdevuma dotos izteiksim ar vienādību palīdzību. Lauciņu skaits ir par 6 lielāks nekā sarkano figūriņu skaits: $s = n - 6$.

Sarkano figūriņu skaits ir par 4 lielāks nekā puse no lauciņiem: $s = \frac{n}{2} + 4$, bet melno figūriņu skaits: $m = \frac{n}{2} - 2$.

No pirmām divām vienādībām var sastādīt vienādojumu:

$$n - 6 = \frac{n}{2} + 4$$

$$\frac{n}{2} = 10; \qquad n = 20$$

Tad sarkano figūriņu skaits ir 14, bet melno 8.

4. Jaunās spēles iepakojumā katram atsevišķam spēles kauliņam ir izveidota atsevišķa iedobe. Kastē iespējams izvietot 10 x 10 iedobes, bet kastes labā apakšējā stūrī ir izveidota īpaša iedobe kvadrātiskai spēles noteikumu grāmatiņai. Ir septiņu krāsu kauliņi. Puse no tiem ir sarkani, ceturtā daļa melni, divpadsmitā daļa zili. Viena pilna rinda ir piepildīta ar ziliem un zaļiem kauliņiem, viena saīsinātā rinda (saīsinātās rindas atrodas blakus grāmatiņai) pilna ar oranžiem kauliņiem. Divas no īsajām rindām ir piepildītas ar daļu no sarkanajiem kauliņiem, bet atlikušie sarkanie kauliņi piepilda vairākas pilnas garās rindas. Ir tikai viens balts kauliņš, bet visas atlikušās pozīcijas piepilda dzeltenie kauliņi. Cik dažādu kauliņu ir un kā tie ir izvietoti kastē?[1]

Atrisinājums. Kopumā kastē varētu būt 100 iedobes, bet kvadrātisku skaitu no tām aizņem grāmatiņa. Grāmatiņas izmērs ir vismaz 3 x 3 pozīcijas. Garo rindu skaits arī ir vismaz 3. Ievērojot, ka sarkanie kauliņi ir puse no visiem kauliņiem, redzam, ka kauliņu skaits ir pāra skaitlis. No tā seko, ka grāmatiņa var aizņemt 4 x 4 vai 6 x 6 pozīcijas. Zilo kauliņu skaits ir divpadsmitā daļa, tāpēc visu kauliņu skaits ir skaitļa 12 daudzkārtnis, kas var būt 12, 24, 48, 60, 72, 84, 96. Ja grāmatiņa aizņemtu 16 pozīcijas, tad kauliņu skaits būtu 100 – 16 = 84. Ja grāmatiņa aizņemtu 36 pozīcijas, tad kauliņu skaits būtu 100 – 36 = 64. Bet 64 nedalās ar 12. Tātad kauliņu skaits ir 84, ir 4 īsās un 6 garās rindas. No šejienes seko atrisinājums.

Zilo kauliņu ir 84 : 12 = 6, zaļo kauliņu skaits ir 10 – 6 = 4.

Melno kauliņu skaits ir 21. Oranžo kauliņu skaits ir 6. Sarkano kauliņu skaits ir 42, kur 12 no tiem aizpilda divas īsās rindas, bet atlikušie aizpilda 3 garās rindas.

Dzelteno kauliņu skaits ir 84 – 6 – 4 – 6 – 42 – 1 = 25.

5. Uzsākot spēli, tās visi spēļu kauliņi kaut kādā veidā ir jāsadala diviem spēlētājiem. Mareks ieteica sadalīt kauliņus attiecībā 5 : 4, bet Edis ieteica sadalīt kauliņus attiecībā 5 : 6. Mareks nebija ar mieru, jo tad viņš dabūtu par 20 kauliņiem mazāk. Cik ir spēles kauliņu?

Atbilde. Spēles komplektā ir 198 kauliņi.

Atrisinājums. Kauliņu skaitu apzīmēsim ar *n*. Pirmajā sadalījumā Mareks iegūtu 5/9 daļas no kauliņiem, bet otrajā - 5/11 daļas. Starpība būtu 20 kauliņi. Iegūstam vienādojumu:

$$\frac{5}{9}n - \frac{5}{11}n = 20$$

Saīsinām abas puses ar 5 un atrisinām

$$\frac{1}{9}n - \frac{1}{11}n = 4$$
$$(11 - 9)n = 4 \cdot 99$$
$$n = 198$$

[1] Fractions in a Box. https://nrich.maths.org/1103