PUNKTIŅŠ Uzdevumu "kokteilis"
6.10.2017

Nodarbības mērķis: uzdot skolēniem dažāda veida uzdevumus, kuru atrisināšana neprasa dziļas matemātikas zināšanas. Ievadnodarbība

1. Lita dārzā savāca 16 lielus, zeltainus bumbierus. Pusi no tiem viņa atdeva Ritai. Rita pusi no saviem bumbieriem atdeva Vitai. Vita pusi no bumbieriem atdeva Zitai. Lita, ievērojusi, ka Vitai ir maz bumbieru, atdeva viņai pusi no saviem bumbieriem. Cik bumbieru ir katrai no meitenēm?

Komentārs. Uzdevumu ieteicams risināt shematiski. Uz lapas atzīmējam 16 punktus, tad sākam dalīt "bumbierus". Rezultātā Vitai tika visvairāk bumbieru.

Atbilde: Litai 4; Ritai 4; Vitai 6; Zitai 2 bumbieri.

2. Taisnstūris sastāv no 8 x 10 rūtiņām. Tajā jāizmitina 2 suņi, daži kaķi un daži jēri. Katram kaķim dzīvei vajag vienu rūtiņu. Katram sunim dzīvei vajag 2 x 2 rūtiņu kvadrātu. Katram jēram dzīvei vajag 10 rūtiņu lielu patvaļīgas formas apgabalu. Neviena suņa mītne ne ar malām, ne stūriem nedrīkst saskarties ne ar vienu jēra mītni. Kāds ir lielākais izvietojamais jēru daudzums?

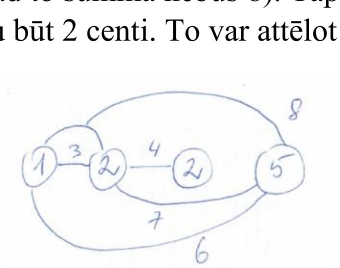
Piezīme. Ar skolēniem jāpārrunā, kā viņi ir sapratuši uzdevumā dotos lielumus, jo skolēnu uzdevuma interpretācijas var būt visai dažādas – lasi – kļūdainas.

Risinājums. Kas uzdevumā ir noteikti zināms? Tā ir pilna informācija par suņiem. Ir divi suņi, viņi kopumā aizņem 8 rūtiņas. Ja gribam izvietot lielāko iespējamo skaitu jēru, tad suņus vajag izvietot ekonomiski. Kā to saprast – "ekonomiski"?

Ja aplūkojam situāciju – taisnstūrī ir 80 rūtiņas, kur 8 no tām aizņem suņi. Atliek 72 rūtiņas, kurās teorētiski varētu izvietot 7 jērus. Taču suņu aploki nedrīkst saskarties ar jēru aplokiem. Tas nozīmē, ka starp suņu aizņemtiem kvadrātiem un jēru aplokiem ir jāizvieto kaķi kā aizsargjosla. Tāpēc visekonomiskākais abu suņu izvietojums ir blakus taisnstūra 8 x 10 stūrī, tad aizsargjosla ir 7 rūtiņu gara. Tas nozīmē, ka atliek ne vairāk kā 65 rūtiņas jēru izvietošanai. Tāpēc lielākais var izvietot 6 jērus. To nav grūti konstruēt (2 suņi, 6 jēri un 12 kaķi).

3. Montai maciņā ir 4 monētas. Viņa noteikti var samaksāt jebkuru cenu, sākot no viena centa līdz astoņiem. Viena monēta pazuda. Tagad vienu no minētajām cenām nevar samaksāt. Kāda monēta pazuda?

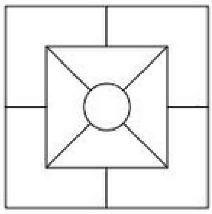
Atrisinājums. Mazākās monētas ir 1, 2, 5 un 10 centi. Noteikti ir jābūt viena centa monētai, lai varētu samaksāt 1 centu. Ir jābūt arī 2 centu monētai, lai varētu samaksāt 4 centus: 2 + 2 = 4 vai arī 1 + 1 + 2 = 4 (ja būs 4 monētas pa vienam centam, tad to summa nebūs 8). Tāpēc komplektā noteikti būs monētas 1, 2, 5 centu vērtībā un ceturtā monēta varētu būt 2 centi. To var attēlot shematiski:



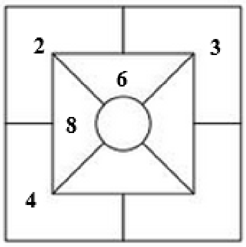
Grafiskais attēls parāda, ka pazudusi varētu būt 2 centu monēta. No monētām 1, 2, 5 var salikt visas summas no 1 līdz 8, izņemot 4.

Atrisinājums varētu būt arī citāds - Montai varbūt bija monētas 1, 1, 2 un 5 centi un pazuda 1 centa monēta. (Uzdevumam ir divi atrisinājumi)

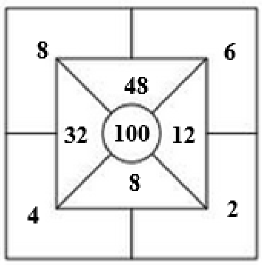
4. Kvadrāta 9 luciņos jāieraksta naturāli skaitļi. Starp tiem noteikti jābūt vismaz pa vienam skaitlim 2, 4, 6, un 8. Iekšējā kvadrāta luciņos ir blakus esošajos ārējos luciņos ierakstīto skaitļu reizinājums. Centrā ir iekšējā kvadrāta visu skaitļu summa. Vai var panākt, ka aplī ir ierakstīts skaitlis 100? Kāda ir iespējami mazākā skaitļu summa aplī?



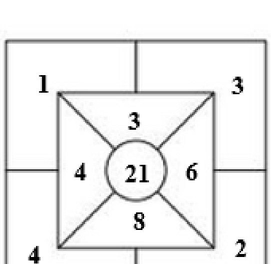
Atrisinājums. Ja luciņos ir jābūt skaitļiem 2, 4, 6 un 8, tad tie var būt ierakstīti ārējos luciņos, vai arī iekšējos, ņemot vērā, ka $2=1\cdot 2$; $4=2\cdot 2$; $6=2\cdot 3$; $8=2\cdot 4$ vai arī pēdējos trīs skaitļus var izteikt kā skaitļa paša reizinājumu ar 1. Vispirms novērtēsim, cik liela var būt summa aplī. Ja ārējos luciņos secīgi ierakstīsim skaitļus 3, 2, 4, tad viņu savstarpējie reizinājumi ir 6 un 8, un skaitļu izvietošanas prasības ir ievērotas:



Atlikušajā stūra luciņā var ierakstīt cik patīk lielu skaitli, tā aplī var iegūt neierobežoti lielu summu. Tomēr no šīs konfigurācijas aplī nevar iegūt 100: ja stūrī ieraksta skaitli n, tad centrālā summa būs $6+8+4n+3n=14+7n\neq 100$, jo 86 nedalās ar 7. Tomēr skaitli 100 vidū var iegūt, piemēram:



Mazākie skaitļi, kuri nepieciešami, lai kvadrātā ierakstītu gan 2, gan 4, gan 6, gan 8 ir 1, 2, 3 un 4. Ja ārējos laukumos izvēlamies mazāku skaitļu komplektu 1, 2, 2, tad atlikušajā ceturtajā laukumā mēs nevaram ierakstīt tādu skaitli, lai vienlaikus iegūtu reizinājumu 6 un 8. Ja ārējos laukumos kādu skaitli aizstātu ar lielāku skaitli, piemēram 6, tad kopējā summa centrā palielinātos. Vismazāko summu iegūst ārējos laukumos ierakstot skaitļus 1, 2, 3, 4:

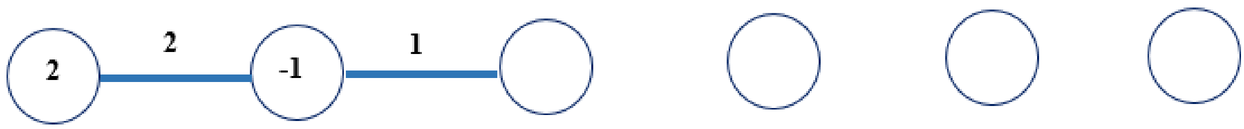


5. Galapunktā autobusā iekāpa divi pasažieri. Nākamajās nepāra pieturvietās pasažieri tikai iekāpa, bet pāra pieturvietās tikai izkāpa. Katrā ceļa posmā pasažieru skaits bija visi dažādi skaitļi, kas mazāki par 6. Nevienu reizi autobuss nebija tukšs. Kāda bija pasažieru iekāpšanas un izkāpšanas secība pieturvietās?

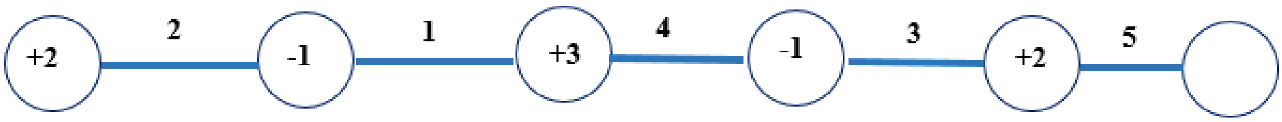
Atrisinājums. Skaitļi, kas mazāki par 6 ir 1, 2, 3, 4, 5 (0 neder, jo nevienu posmu autobuss nebrauca tukšs). Tātad ir 5 ceļa posmi, kas sākas ar pirmo pieturu un beidzas ar sesto.

Pietura:	1	2	3	4	5	6
pasažieri	iekāpj	izkāpj	iekāpj	izkāpj	iekāpj	

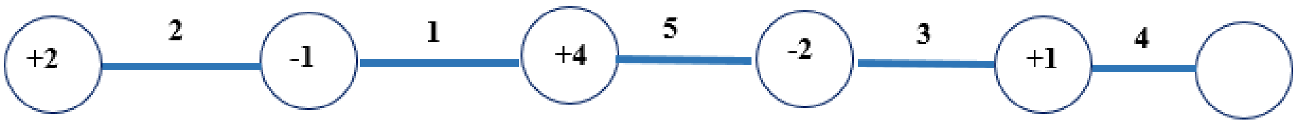
Pirmajā pieturā iekāpa 2 pasažieri, tāpēc pirmo ceļa posmu brauc 2 pasažieri. Otrajā pieturā izkāpj viens, jo autobuss nebrauc tukšs:



Trešajā pieturā varētu iekāpt 2 vai 3, vai 4 pasažieri. Ņemot vērā, ka ceturtajā pieturā kādam jāizkāpj, tad nevar būt, ka iekāps 2 pasažieri, jo tad divus ceļa posmus būs veicis vienāds pasažieru skaits. Ja trešajā pieturā iekāpj 3 pasažieri:



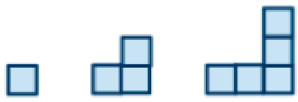
Otrs atrisinājums, ja trešajā pieturā iekāpj 4 pasažieri:



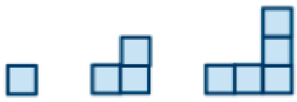
PUNKTIŅŠ Kāds būs nākamais? – Skaitļu virknes veidošana
13.10.2017

Nodarbības mērķis: atklāt procesu veidošanās sakarības un aprakstīt tās skaitliski, mēģināt izveidot formulu.

1. Zane zīmēja kvadrātiņus. Cik kvadrātiņu būs trešajā, ceturtajā, piektajā zīmējumā? Vai vari pateikt to bez zīmēšanas, cik kvadrātiņu būs 10-tajā zīmējumā?



Komentārs. Skolēniem jāievēro, ka katra nākamā figūra satur par 2 kvadrātiņiem vairāk. Pierakstām katrai figūrai kārtas numuru un atbilstošo kvadrātiņu skaitu:

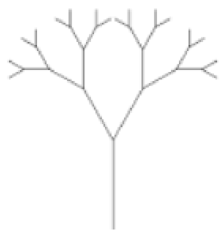


Kārtas numurs:	**1**	**2**	**3**	**4**	….
Kvadrātiņu skaits:	**1**	**3**	**6**	**10**	…

Ievērosim, ka apakšējā rindā ir kvadrātiņu skaits sakrīt ar figūras numuru. Augšējo kvadrātiņu skaits ir par 1 mazāks. Tāpēc 10-tajā figūrā būs 10 + 9 = 19 kvadrātiņi.
Vispārīga formula: $n + n - 1 = 2n - 1$. Ar tās palīdzību var aprēķināt jebkura izmēra šādas figūras kvadrātiņu skaitu.

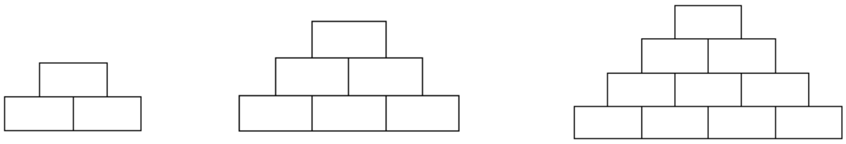
2. Ella iestādīja burvju zariņu. Jau pirmajā dienā zara galā izauga 3 jauni zari. Otrajā dienā atkal katra zara galā izauga 3 jauni zari. Tā katru dienu katra zara galā atkal izauga 3 jauni zari. Sestajā dienā zari vairs neauga, bet katra zara galā uzplauka sudraba lapiņa. Cik lapiņas uzplauka?

Komentārs. Jāsāk ar zīmēšanu – kā skolēni izprot doto situāciju, jāpārrunā, kas ir "zara gals". Kāds izskatīsies koks otrajā un trešajā dienā, cik tur būs zaru gali. Te piemērs, kāds koks izaug, ja katru dienu zara galā pieaug 2 jauni zari (cik dienu "vecs" ir zīmējumā dotais koks?):

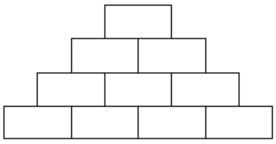


Atrisinājums. Katru dienu zaru skaits palielinās 3 reizes. Zari aug 5 dienas, tāpēc zaru galu skaits ir $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Tieši tik arī izaug sudraba lapiņas sestajā dienā.

3. Mazais Rūdis būvēja torņus no rotaļu klucīšiem. Cik klucīšu viņam nepieciešams, lai uzbūvētu šādu torni 6 līmeņu augstumā? Cik augstu šāda veida torni Rūdis var uzbūvēt no 30 klucīšiem? Cik klucīšu vajag, lai uzbūvētu visu torņus augstumā 1, 2, 3, 4, 5 un 6?



Atrisinājums. Jāievēro, ka, skaitot no augšas, katrā nākamajā līmenī klucīšu skaits par viens palielinās:



1
2
3
4

Tas nozīmē, ka katra šāda torņa klucīšu skaits ir visu naturālo skaitļu summa no 1 līdz *n*. Piemērā tā ir visu skaitļu summa no 1 līdz 4, tātad 10. Vispārīga klucīšu skaita aprēķināšanas formula ir:

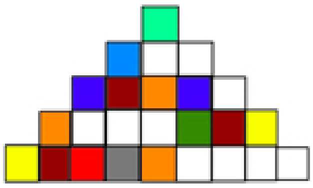
$$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

Šī formula izriet no sekojošas metodes:

Kā vēsta nostāsts[1], kad Kārlis Gauss (1777 – 1855) bija skolnieks, skolotājs viņam uzdeva saskaitīt visus skaitļus no 1 līdz tūkstotim. Kārlis atbildi atrada pārsteidzoši ātri. Viņš sadalīja skaitļus pāros (1; 100), (2; 99), (3; 98), … . Katrā pāra summa ir viena un tā pati 101. Pāru skaits ir 50, kopējais rezultāts ir $101\cdot 50 = 5050$.

Tornim augstumā 6 nepieciešami $\frac{6\cdot 7}{2} = 21$ klucīši. Lai vienlaikus uzbūvētu visus torņus augstumā no 1 līdz 6, nepieciešami $1+3+6+10+15+21=56$ klucīši.

4. Jonasam ir citāds koka klucīšu komplekts un viņš būvē citādus torņus. Cik klucīši nepieciešami, lai uzbūvētu torni augstumā 1, torņus augstumā 2, 3, 4, 5, 6? Vai vari noteikt, kas tie ir par skaitļiem, kā tos sauc?

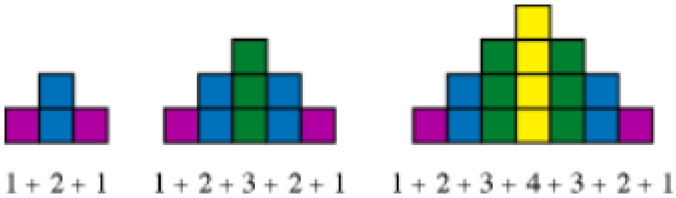


Komentārs. Uzdevums līdzīgs iepriekšējam uzdevumam, bet dota citāda konfigurācija – no kvadrātiņiem. Galvenais "noslēpums" te ir pierādījums bez vārdiem. Šī uzdevuma vizuāls atrisinājums atrodams zinātniskā raksta "An Invitation to Proofs Without Words" (Alsina, Nelsen, EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS,Vol. 3, No. 1, 2010, 118-127)[2] 121. lappusē. Te atrodami arī citi algebriski uzdevumi un to skaisti vizuāli atrisinājumi.

---

[1] Plašāku materiālu var lasīt Kembridžas Universitātes mājas lapā NRICH: https://nrich.maths.org/2478
[2] https://www.google.lv/search?q=proofs+without+the+words+sum+of+even+numbers&ie=utf-8&oe=utf-8&client=firefox-b&gws_rd=cr&dcr=0&ei=zCPjWe7pIOfR6ATAp5nACw

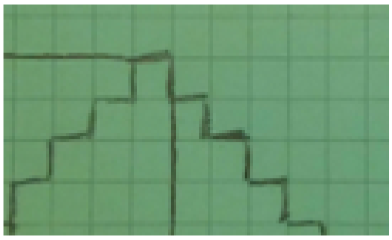
Atrisinājums. Kvadrātiņus var skaitīt pa stabiņiem:



Var summēšanu veikt arī citādi - skaitot kvadrātus katrā horizontālajā joslā, sākot no augšas. Dotajā piemērā (skat. augstāk) summē 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. Kvadrātiņu skaits sakrīt ar figūras augstumu reizinātu pašu ar sevi (jeb augstuma kvadrātu). Vispārīga formula:

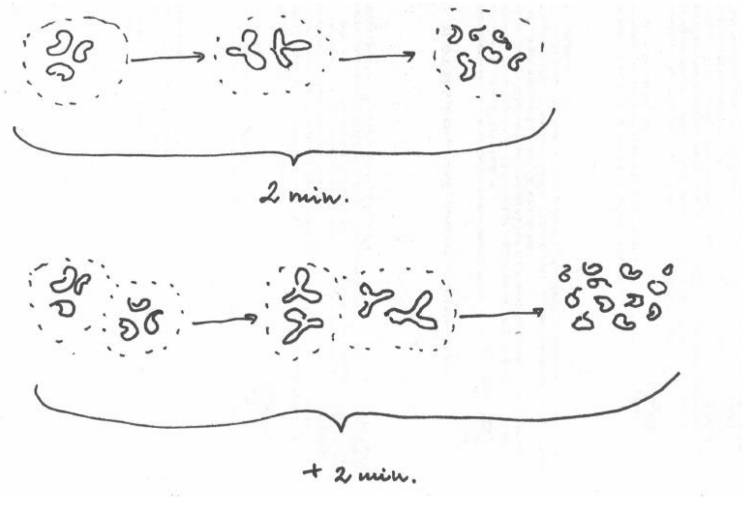
$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

To var vizuāli pamatot, ja figūru sagriež divās daļās un mazāko daļu pārvieto tā, lai veidojas vesels kvadrāts:



5. Zinātnieks Asprātis atklājis jaunu baktēriju veidu. Ja satiekas 3 baktērijas, tad viena iet bojā, bet pārējās katra sadalās 3 jaunās baktērijās. Šāda 3 baktēriju pārveidošanās notiek 2 minūšu laikā. Tūlīt pat baktērijas atkal apvienojas grupās pa trīs. Asprātis ievietoja kolbā 3 baktērijas. Tikko baktēriju skaits pārsniedza 100, kolba uzsprāga. Pēc cik minūtēm tas notika?

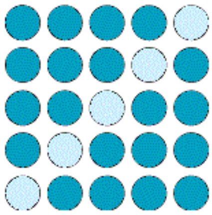
Komentārs. Ieteicams vispirms shematiski attēlot procesu, kā tas mainās 2 minūšu, pēc tam nākamo divu minūšu laikā, pat vēl ilgāk:



Divu minūšu laikā baktērijas kļūst 3 reizes vairāk, nekā bija. Sākumā bija 3 baktērijas, pēc divām minūtēm radās 6, tad 12, tad 24, 48, 96. Kopumā pagāja 10 minūtes. Nākamo 2 minūšu laikā kolba uzsprāga. (Jāievēro, ka katrā grupā viena baktērijas iet bojā.)

Skaitliski: $(3-1)\cdot 3=6;$ $(6-6/3)\cdot 3=12;$ $(12-12/3)\cdot 3=24;...$

6. Lodītes tiek saliktas kvadrāta veidā, tad noņem tās lodītes, kuras atrodas uz diagonāles. Izpēti, cik lodītes atliek, ja izveido kvadrātiskas konfigurācijas 2 x 2; 3 x 3; 4 x 4, …. un no diagonāles noņem lodītes. Kas kopīgs šai skaitļu virknei? Kāda viena aritmētiska darbība ir kopīga šo skaitļu aprēķinā? Cik lodītes būs uz galda devītajā gadījumā?



Atrisinājums. Attēlā redzama konfigurācija 5 x 5 lodītes, kur noņemtas lodītes no diagonāles. Ja atlikušās lodītes izvieto kompakti – taisnstūra formā, tad lodīšu skaits ir $5 \cdot 4$. Tāpēc vispārīgs šīs procedūras apraksts ir formā $n(n-1)$. Pirmajā konfigurācijā ir 2 lodītes, otrajā 6, trešajā 12, ceturtajā 20, tad 9-tajā konfigurācijā būs $9 \cdot 10 = 90$ lodītes (jo devīto konfigurāciju veido no kvadrāta 10 x 10 lodītes, tad noņem tās, kuras ir uz diagonāles).

PUNKTIŅŠ (A grupa) Burvju mākslinieka priekšnesums - Skaitļu struktūra
20.10.2017

Nodarbības mērķis: pētīt naturālu skaitļu pierakstu un tā īpašības. Ieteicams veidot tabulas, lai skolēni mācītos strādāt sistemātiski.

Nodarbības iesākumā ir jāpārrunā, ko tas nozīmē "skaitļa ciparu summa". Kāda ciparu summa būs viencipara skaitlim? Jāuzraksta daži piemēri.

1. Burvju mākslu maģistrs Ludvigs demonstrēja elpu aizraujošus trikus. Uz melna galdiņa bija izklātas kartiņas ar skaitļiem no 1 līdz 50. Ar vienu burvju nūjiņas mājienu uz galda palika dažas no tām. Maģistrs aicināja kādu brīvprātīgo no skatītājiem, lai noteiktu – kāda kopīga īpašība ir šīm kartiņām. Matemātikas skolotājs Prātiņš drosmīgi devās pie galdiņa un ilgi vēroja kartiņas: "Ā!", beidzot viņš iesaucās - "jebkuras kartiņas ciparu summa ir 10!" Cik šādu kartiņu bija uz galda?

Atrisinājums. Jāmeklē tos viencipara skaitļus, kuru summa ir 10. Ir izvēlētas kartiņas ar divciparu skaitļiem – no katra pilna desmita pa vienai. Tās ir 19, 28, 37 un 46.

2. Maģistrs Ludvigs vēlreiz pamāja ar nūjiņu, un kartiņas sakārtojās kaudzītēs, kur katrā kaudzītē bija kartiņas visas ar vienu un to pašu ciparu summu. Skatītāji aizgrābtībā noelsās. Cik bija kaudzīšu? Kurā kaudzītē bija vismazāk kartiņu, kurā visvairāk? Cik bija tādu kaudzīšu, kurās bija vienāds kartiņu skaits?

Atrisinājums. Te uzmanība vispirms jāpievērš jautājumiem: kāda var būt vismazākā ciparu summa, kāda vislielākā? Tās ir 1, ko dod skaitļi 1 un 10. Vislielākā summa būs skaitlim ar vislielākajiem cipariem – tāds ir skaitlis 49, tāpēc vislielākā ciparu summa ir 13. Te uz galda būs 13 kaudzītes. Veidojam tabulu, lai iegūtu pilnīgu priekšstatu par sadalījumu:

Ciparu summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kartiņu skaits	2	3	4	5	6	5	5	5	5	4	3	2	1

Piezīme. 4. un 5.klašu vecuma grupās skolēniem ir konkrētās domāšanas veids, pakāpeniski notiek pāreja uz abstrakto domāšanu - ne visi skolēni var prātā uzskaitīt kartiņas. Tāpēc jaunāko klašu skolēniem ir jāierosina uzrakstīt tieši kādas kartiņas kurā kaudzītē nonāk:

Ciparu summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kartiņas	1 10	2 11 20	3 12 21 30	4 13 22 31 40	5 14 23 32 41 50	6 15 24 33 42	7 16 25 34 43	8 17 26 35 44	9 18 27 36 45	19 28 37 46	29 38 47	39 48	49

Šī pēdējā tabula sniedz atbildes uz visiem uzdotajiem jautājumiem.

3. “Bet kāds būs kartiņu skaits kaudzītēs, ja aprēķinās skaitļa ciparu summu un arī iznākumam aprēķinās ciparu summu?” pajautāja skolotājs Prātiņš. “Lūdzu,” maģistrs Ludvigs vēlreiz pamāja, kartiņas uzvirpuļoja gaisā un tad sagūla 9 akurātās kaudzītēs. Cik kartiņu bija katrā kaudzītē?

Atrisinājums. Atbilde tūliņ seko no pēdējās tabulas. Ja ciparu summu rēķinām atkārtoti – te divas reizes, tad tās kartiņas, kurās ciparu summas bija lielākas par 9, pārceļos uz kaudzītēm ar ciparu summām no 1 līdz 9. Ja kartiņai pirmā ciparu summa bija 10, tad tagad šī kartiņa nonāks kaudzītē, kur ciparu summa ir 1. Piemēram, kartiņa, uz kuras ir rakstīt skaitlis 48, tā atkārtoto ciparu summu aprēķina: $4 + 8 = 12$, atkārtoti $1 + 2 = 3$. Kartiņa nonāks trešajā kaudzītē. Pirmā kaudzīte papildināsies ar 4 kartiņām, otrā ar trim, trešā ar divām, bet ceturtā kaudzīte papildināsies ar 1 kartiņu:

Ciparu summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kartiņu skaits	6	6	6	6	6	5	5	5	5

Piecās kaudzītēs būs pa sešām kartiņām, bet četrās – pa piecām.

4. “Man ir jautājums!” no zāles atskanēja smalka balstiņa. “Cik būs kaudzīšu, ja kartiņas ar divciparu skaitļiem saliks kaudzītēs ar vienādu ciparu reizinājumu?” Maģistrs pat nosvīda – viņam nācās 3 reizes māt ar nūjiņu, lai kartiņas šādi sakārtotu. Cik kaudzītes tagad bija uz galda? Cik bija tādu kaudzīšu, kurās ir tikai viena kartiņa?

Komentārs. Pētām reizinājuma īpašības. Parādīsies jauna veida kaudzīte, kur būs kartiņas ar ciparu reizinājumu nulle. Šeit jāaplūko tabula ar reizinājumiem, kurā ir uzskatāmi redzams, kādi reizinājumi rodas. Reizinājumus no 1 līdz 9 dos skaitļi no 11 līdz 19, kā arī 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 41, 42. Reizinājumus lielākus par 9 parādīsim tabulā:

Ciparu reizinājums	10	12	14	15	16	18	20	21	24	27	28	32	36
Kartiņas	25	26 34 43	27	25	28 44	29 36	45	37	38 46	39	47	48	49

Kopumā ir 23 kaudzītes.

Piezīme. Kad tiek noskaidrots vislielākais iespējamais reizinājums, ar skolēniem jāpārrunā, kāpēc te nebūs reizinājumi visi skaitļi no 0 līdz 36 pēc kārtas. Nebūs pirmskaitļi lielāki par 10, nebūs salikti skaitļi, kuru reizinājums nav divu viencipara skaitļu reizinājums, piemēram, 26.

5. “Toties es prātā aprēķināju, ar cik nullēm beigsies skaitlis, ja sareizinās visu skaitļus, kas uzrakstīti uz šīm kartiņām!” lepni paziņoja teicamnieks Poga. Kāds bija viņa rezultāts?

Atrisinājums. Novērtēsim, kādu skaitļu reizinājums beidzas ar nulli: $10 \cdot a; 2 \cdot 5 \cdot a;\ \ 4 \cdot 25 \cdot a$, kur pēdējais no minētajiem beidzas vismaz ar divām nullēm. Tad visi desmiti reizinājumā kopumā dos piecas nulles. Ievērosim, ka skaitli 50 var sadalīt reizinātājos $5 \cdot 10$, no kā secinām, ka skaitļa 5 reizinājums ar kādu pārskaitli dos papildus nulli. Katrā desmitu grupā ir skaitļi, kuru vienu cipars ir 5. Tāpēc šo skaitļu reizinājums ar kādu pārskaitli dos vēl pa nullei pie gala rezultāta, tātad kopumā vēl desmit nulles. Ievērosim, ka skaitli 25 var sadalīt reizinātājos $5 \cdot 5$, kas reizinājumu papildina ar vēl vienu nulli. Kopīgais nuļļu skaits reizinājuma beigās ir 12 nulles.