PUNKTIŅŠ Maģiskie kvadrāti. Komentāri
7.04.2017

Nodarbības mērķis: šoreiz nodarbības pamatmērķis ir gatavoties uz Atklāto Matemātikas Olimpiādi, kur organizatori ir noteikuši, ka viens no jaunāko klašu uzdevumiem būs par maģiskajiem kvadrātiem. Pulciņā jau ir bijusi viena līdzīga nodarbība "Maģiskās figūras". Šoreiz pievēršamies tieši skaitļu izvietošanai kvadrātveida tabulā. Mācāmies nevis haotiski "uzbrukt" uzdevumam, bet vispirms pētīt skaitļu izvietojuma īpašības.

Uzdevumi

Ar * apzīmēti grūtāki uzdevumi

1. Aizpildi tukšās rūtiņas zīmējumos a) un b), lai būtu izmantoti visi skaitļi no 1 - 9 un summas katrā rindā, kolonā un abās diagonālēs būtu 15:

		6
		1
4	3	8

a)

		4
	5	3
		8

b)

Piezīme. Šis ir iesildīšanās uzdevums – izveidot maģisko kvadrātu.

Par **maģisko kvadrātu** sauksim tādu kvadrātu, kurā skaitļu summas visās rindās, visās kolonās un uz abām diagonālēm ir vienādas.

2. [1]Aizpildi tukšās rūtiņas zīmējumā c), lai būtu izmantoti visi skaitļi no 1 - 16 un summas katrā rindā, kolonā un abās diagonālēs būtu 34!

9			4
	3	10	
	13	8	
7			14

c)

Risinājums. Aplūkojam ierakstīto skaitļu summas rindās un kolonās (skat. tabulā zilā krāsā). Tad šajās rindās un kolonās trūkstošās divu skaitļu summas ir tabulā sarkanā krāsā. Uzrakstīsim arī visus skaitļus, kuri vēl nav ierakstīti tabulā (skat. zem tabulas) un meklēsim skaitļu pārus, kuri veido nepieciešamās summas.

---

[1] 1., 2. un 3. uzdevumi ir atrasti Kembridžas Universitātes mājas lapā NRICH

9			4	**13**	**21**
	3	10		**13**	**21**
	13	8		**21**	**13**
7			14	**21**	**13**
16	**16**	**18**	**18**		
18	**18**	**16**	**16**		

1; 2; 5; 6; 11; 12; 15; 16

Summa 13: (2; 11) un (1; 12)

Summa 21: (6; 15) un (5; 16)

Summa 16: (1; 15) un (5; 11)

Summa 18: (2; 16) un (6; 12)

Te vērojama zināma simetrija. Ar loģisku spriedumu palīdzību skaitļi jāizvieto tabulā.

Atbildes var būt divas:

9	16	5	4
6	3	10	15
12	13	8	1
7	2	11	14

9	6	15	4
16	3	10	5
2	13	8	11
7	12	1	14

3. Madara ierakstīja katrā rūtiņu tabulas 4 x 4 rindā visus vienādus skaitļus, bet kolonās dažādus (katrai rindai tika izvēlēts cits naturāls skaitlis). Tad katras kolonas visus skaitļus pareizināja ar kādu naturālu skaitli – katru kolonu ar citu skaitli. Diemžēl daudzas tabulas rūtiņas izdzisa. Vai vari restaurēt skaitļus, aplūkojot atlikušos dažus skaitļus (Skati zīmējumu d))? Zināms, ka Madara reizināja skaitļus 2,3, … 8. Viens no skaitļiem atkārtojās rindā un kolonā.

			12
			15
16		40	
12			

d)

Komentārs. Atrisinājumā jāizmanto skaitļu sadalījums reizinātājos. Tā pēdējā kolonā skaitļu kopīgais reizinātājs ir 3. Tad zinām, ka pirmajā rindā reizinātājs ir 4, otrajā 5. Tā soli pa solim uzdevumu var viegli atrisināt.

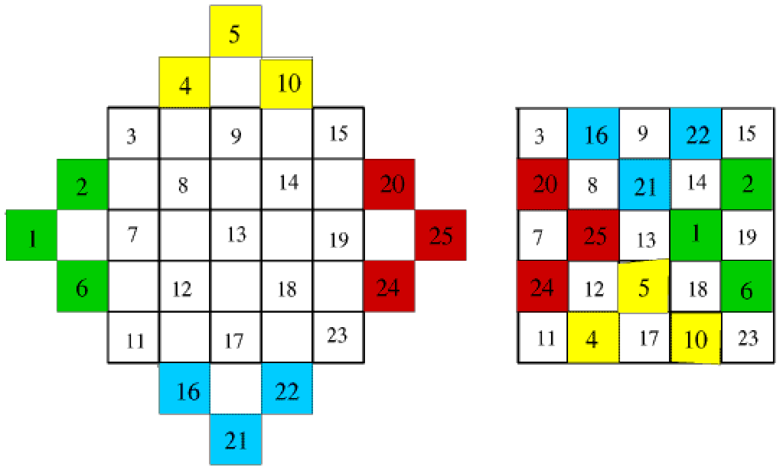
Atbilde:

	2	5	7	3
4	8	20	28	12
5	10	25	35	15
8	16	40	56	24
6	12	30	42	18

4. Izveido maģisko kvadrātu no 3 x 3 rūtiņām, tajā ierakstot skaitļus no 7 – 15.

Komentārs. Ir savdabīga metode maģiskā kvadrāta izveidošanai, ja kvadrāta izmērs ir nepāra skaitlis.

Piemēram, kvadrātu 5 x 5 rūtiņas ar skaitļiem var piepildīt sekojošā veidā – skaitļus raksta diagonālēs pa 5 pēc kārtas. Vidū "izgriež" kvadrātu un tad kreiso "ausi" pārraksta pie kvadrāta labās malas, labo konfigurāciju pārvieto pie kreisās malas, augšējo – apakšā un apakšējo – augšā:



Šāda ideja ir prezentēta rakstā **Del Hawley: "Magic Squares"**, https://nrich.maths.org/1337

Lai zinātu, kāda ir maģiskā kvadrāta rindas summa, vispirms aprēķinām kopējo skaitļu summu no 1 līdz 25 (jaunāko klašu skolēniem labi saprotama ir skaitļu saskaitīšanas Gausa metode)

1 2 3 4 …. 22 23 24 25

25 24 23 22 ……. 4 3 2 1

Šeit ir 25 skaitļu pāri un katra pāra skaitļu summa ir 26. Kopējā summa ir $\frac{25\cdot 26}{2}=325$, jo tādā veidā katrs skaitlis ir ieskaitīts 2 reizes. Vienā rindā ir piektā daļa no šīs summas (jo ir 5 rindas, kurās summa ir vienāda), tas ir 65.

Ar kvadrātiem, kuri ir pāra pakāpes, rīkojas citādi, piemēram, (tajā pašā rakstā) – maina skaitļus uz diagonālēm:

	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Piezīme. Interesantu maģiskā kvadrāta aizpildīšanas metodi parādīja viens no skolēniem. Maģiskais kvadrāts tiek aizpildīts ar šaha zirdziņa gājienu palīdzību – jāiztēlojas, ka kvadrāts ir it kā "uzlīmēts" uz cilindra reizēm horizontālā, reizēm vertikālā virzienā. Detalizētu šīs metodes aprakstu var atrast mājas lapā: http://www.mathsmagic.in/chris-horse-method.html

5. Vai vari kvadrātā 3 x 3 ierakstīt visus dažādus naturālus skaitļus, kuri nedalās ar 3, bet to summa katrā rindā un katrā kolonā dalās ar 3?

Piezīme. Šeit jāaplūko atlikumi, kādi rodas, ja skaitļus dala ar 3. Kvadrāts jāaizpilda ar visiem skaitļiem, kuri dod atlikumu 1, vai arī visiem tādiem skaitļiem, kuri dod atlikumu 2.

6. Vai vari kvadrātā 4 x 4 ierakstīt dažādus naturālus skaitļus, kuri nedalās ar 7, bet lai to summa katrā rindā, katrā kolonā un uz diagonālēm dalās ar 7?

Risinājums. Uzdevums ir iepriekšējā uzdevuma vispārīgāks variants, jāapskata četru skaitļu atlikumi. Derīgās atlikuma skaitļu kombinācijas ir (1; 1; 1; 4), (1; 1; 2; 3) un (1; 2; 2; 2). Vispirms kvadrātā var izvietot skaitļus no 1 līdz 4, lai skaitļu summas visās rindā, kolonās un uz diagonālēm ir 7, piemēram:

1	1	2	3
3	2	1	1
2	2	2	1
1	2	2	2

Tad skaitļus var palielināt par $7n$, lai visi skaitļi būtu dažādi, piemēram:

1	8	9	3
10	16	15	22
23	30	37	29
36	44	51	58

7. [2]Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Parādīt, ka tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā -- citu skaitli) tā, lai nekādās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa nepārsniegtu

[2] 7., 8., un 9. uzdevumi ir ņemti no Atklāto Matemātikas olimpiāžu iepriekšējo gadu materiāliem

19. Vai var panākt, lai neviena no šīm summām nepārsniegtu 18? (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

Piezīme. Uzdevumu labi sākt ar lielāko skaitļu aplūkošanu – kādus skaitļus var rakstīt blakus skaitlim 16, kādus skaitlim 15. Skaitlim 16 var rakstīt blakus rūtiņās skaitļus 1; 2; 3, bet skaitlim 15 - 1; 2; 3; 4. Ir izdevīgi kvadrāta aizpildīšanu sākt no vienas malas, ierakstot tur skaitļus 16 un 15 ar atstarpi viena vai 2 rūtiņas. Lai skaitļu summas nepārsniegtu 18, skaitlis 16 ir jāraksta stūrī, bet skaitlim 15 tad "nepietiek" vēlamo kaimiņu, vai mēs 15 rakstītu pie malas (tam būtu viens kopīgs kaimiņš ar 16) vai vidū, kur nepieciešami 4 derīgi kaimiņi (bet skaitlim 15 to ir tikai 3 – 1; 2; un 3).

8. *Ieraksti zīmējumā e) parādītās tabulas 9 rūtiņās pa veselam pozitīvam skaitlim (daži no tiem var būt arī vienādi; 16 rūtiņas paliek tukšas) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonā ierakstīto skaitļu summa būtu tāda, kāda pierakstīta tabulā pie attiecīgās rindiņas vai kolonnas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

	3	7	4	5	7
1					
4					
2					
4					
15					

e)

Piezīme. Uzdevumu var risināt, iesākumā tabulā ierakstot lielāku vai mazāku skaitļu skaitu, lai rindās un kolonās būtu norādītās skaitļu summas, pēc tam rezultātu var optimizēt. Apvienojot vai sadalot skaitļus vairākos saskaitāmos.

9. *Kvadrātā, kas sastāv no 4 x 4 rūtiņām, ierakstīti visi naturālie skaitļi no 5 līdz 20 (skat. f) zīmējumu, kur vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi - ar dažādiem). Bez tam visās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas. Kurš cipars ar kuru burtu aizstāts?

ZK	B	ZF	ZZ
G	ND	C	ZA
ZB	K	ZC	ZN
ZD	ZG	F	ZE

f)

Piezīme. Dotais uzdevums ir rēbuss, kur, pirmkārt, jāievēro skaitļu decimālā pieraksta īpašības. Viegli ir noteikt skaitļu 10, 11, 12 un 20 atrašanās vietu. Tad, aprēķinot, kāda ir skaitļu summa katrā rindā, var turpināt pārējo skaitļu atšifrēšanu.

PUNKTIŅŠ **Skaitļi, atkal skaitļi** Komentāri
21.04.2017

Nodarbības mērķis: gatavoties uz Atklāto Matemātikas Olimpiādi. Atkārtot veselo skaitļu dalāmības īpašības; aplūkot dažādas veselo skaitļu īpašības; lietot kombinatoriskas metodes.

Ar * apzīmēti grūtāki uzdevumi

1. Sareizināja visus skaitļus no 73 līdz 81. Nosaki, kādi ir šī reizinājuma 3 pēdējie cipari!

Komentārs. Pirmkārt – kādi skaitļi ietilpst dotajā intervālā? Otrkārt – kādi ir šo skaitļu pēdējie cipari? Treškārt – kuri cipari šajā virknē ir nozīmīgākie? (0; 2; 5) *Atbilde:* pēdējie cipari ir 000. Pamato!

2. Trīsciparu skaitļa ciparus samainīja vietām un abus skaitļus saskaitīja. Vai var gadīties, ka summa ir 999? Vai to var izdarīt ar četrciparu skaitli, iegūt 9999?

Piezīme. Jāievēro, ka trīsciparu skaitlī ir vismaz divi vienādās paritātes cipari, tāpēc abus skaitļus saskaitot, radīsies vismaz viens pāra skaitļa cipars.

3. Cik ciparu ir skaitlim 1+2+3+4+...+999+1000?

Komentārs. Šis ir atkārtojuma uzdevums – kāda ir racionāla skaitīšanas metode? Racionāla skaitļu saskaitīšanas metode ir noderīga dažādu uzdevumu risināšanā.

Sadala skaitļus pāros ar vienādu summu un nosaka pāru skaitu. Aprēķina doto skaitļu kopējo summu.

Atbilde: 6 cipari.

4. Cik ir trīsciparu skaitļu, kuri dalās ar 3?

Piezīme. Atkārtot naturālo skaitļu virknes īpašības – šeit: katrs trešais skaitlis dalās ar 3.

Risinājums. Iedomāsimies, ka visus naturālos skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas sadalīsim grupās pa trīs – (1, 2, 3), (4, 5, 6), …., (997, 998, 999). Katrā grupā tieši viens skaitlis dalās ar 3. Cik ir tādu grupu? 999 : 3 = 333. Grupu skaits, kuras satur skaitļus mazākus par 100 - no (1, 2, 3) līdz (97, 98, 99) ir 33. Tāpēc trīsciparu skaitļu skaits, kuri dalās ar 3, ir 333 – 33 = 300.

Komentārs. Uzdevumu var risināt arī savādāk. Trīsciparu skaitļu skaits ir 999 – 100 + 1 = 900. 900 skaitļus var sadalīt 300 grupās, kur katrā grupā ir 3 skaitļi. *Atbilde*: 300 skaitļi.

Papildus pētījumam: ko var teikt par sekojošu naturālo skaitļu virkni, kuras locekļu skaits nedalās ar 3? Piemēram, ja ir doti kaut kādi 16 vai 17 viens otram sekojoši naturāli skaitļi? Vai šāda virkne noteikti saturēs 5 skaitļus, kuri dalās ar 3?

5. Ko vari pateikt par skaitļiem 111, 1111, 11111, 111111?

Piezīme. Jāpielieto skaitļu dalāmības ar 3 un 11 īpašības, sarežģītāk ir ar skaitli 11111. Jāievēro, kādu divu viencipara skaitļu reizinājums beidzas ar 1 – 1 x 1; 3 x 7; 9 x 9. Visvienkāršākā metode ir pārbaudīt pēc kārtas tos pirmskaitļus, kuri beidzas ar 1, 3, 7, 9. *Atbilde*: 11111 = 41 x 271

6. *Naturāls skaitlis n satur tikai ciparus 0, 1, 2, un turklāt vieninieku skaitļa pierakstā ir par 1 vairāk nekā divnieku. Pierādi, ka $n + 471$ nedalās ar 3!

Atrisinājums. Skaitlis 471 dalās ar 3. Ja skaitlis $n + 471$ dalītos ar 3, tad arī skaitlis n dalītos ar 3. Ja skaitļa n pierakstā ir tikai viens cipars 1 un cipara 2 nav, tad šis skaitlis ir 10^k un ar 3 nedalās. Ja skaitļa pierakstā ir kaut viens cipars 2, tad, saskaņā ar doto, skaitļa ciparu summa ir $2k + 1k + 1 = (2 + 1)k + 1 = 3k + 1$. Tātad ciparu summa nedalās ar 3 un ievērojot dalāmības īpašības arī skaitlis n nedalās ar 3. Līdz ar to $n + 471$ nedalās ar 3.

7. Kāds ir lielākais skaitļu skaits, kuri dalās ar 3 un kuri sastādīti, izmantojot divus visu 10 ciparu komplektus, tas ir, var būt ne vairāk kā tikai divi skaitļi, kuri satur vienu un to pašu ciparu.

Komentārs. Uzdevumam var būt dažādi atrisinājumi. Te loģiski jāizdomā, ka skaitļu skaits būs vislielākais, ja izvēlēsimies viencipara skaitļus, kā arī izveidosim divcipara skaitļus – pēc iespējas tādus skaitļus, kuri satur nelielu skaitu ciparu. Laba tēma ir apspriest, ko darīt ar ciparu 0. To, protams, izdevīgi izvēlēties kā atsevišķu skaitli, jo nulle dalās ar jebkuru veselu (protams, ne tikai!) skaitli. *Atbilde*: var izveidot 14 skaitļus (kādus?)

8. *Vai var atrast 6 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, kuru ciparu summa nedalās ar 4? Vai var atrast tādus 7 skaitļus?

Komentārs. Tradicionāls olimpiāžu uzdevums. a) variants – jāuzraksta piemērs, kas varētu būt sekojošs: 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002. Kā tādu atrast? Eksperimentēt, atklāt likumsakarības, vispārināt. Piemēram, aplūkot ciparu summas visiem skaitļiem no 1 līdz 50; ievērot, ka pārejot uz jaunu desmitu intervālu, skaitļu ciparu summas $S(n)$ var nepieaugt par viens:

….. $S(16) = 7$; $S(17) = 8$; $S(18) = 9$; $S(19) = 10$; $S(20) = 2$; $S(21) = 3$, ….

Tāpēc vajag izpētīt, kas notiek skaitļa 100 apkārtnē, pēc tam – skaitļa 1000 apkārtnē.

b) variantā iepriekš atklātās īpašības vajag izanalizēt. Viena desmita intervālā skaitļi palielinās par 1 un to ciparu summas arī palielinās par 1, tas ir, ciparu summas veido secīgu skaitļu virkni. Secīgā naturālo skaitļu virknē katrs ceturtais skaitlis dalās ar 4. Tāpēc lielākais 3 skaitļi pēc kārtas nedalās ar 4. Aplūkojot jebkurus divus blakus esošus desmitu intervālus, katrā no tiem var būt ne vairāk kā 3 secīgi skaitļi, kuru ciparu summa nedalās ar 4. Ja pirmā desmitu intervāla pēdējie 3 skaitļi ir tādi, ka to ciparu summa nedalās ar 4, tad, pārejot uz nākamo desmitu intervālu, tā sākumā arī nevar būt vairāk kā 3 šādi skaitļi. Atbilde: 7 pēc kārtas ņemti skaitļi ar doto īpašību neeksistē.

9. *Rindā kaut kādā kārtībā jāizraksta naturālie skaitļi no 1 līdz 13, katrs tieši vienu reizi. Zināms, ka pirmajam skaitlim jābūt 13, otrajam jābūt 1, un katram skaitlim, sākot ar otro, jābūt visu pirms tam uzrakstīto skaitļu summas dalītājam. Kuru skaitli var rakstīt kā trešo?

Piezīme. Šis ir labs mājas darba uzdevums, kura atrisināšanai ir vajadzīga vien pacietība un nedaudz atjautības.
Atrisinājums. Pirmo divu skaitļu summa ir 14. Trešais skaitlis var būt vai nu 2, vai 7. Visu doto skaitļu summa ir 91. Ja pēdējais skaitlis ir 2, tad visu pirmo 12 virknes skaitļu summa ir 89, kas ar 2 nedalās. Savukārt $91 – 7 = 84$ dalās ar 7. Tāpēc trešais skaitlis virknē ir 2.
Vai pietiek ar šādu atrisinājumu? Ja nu prasītā virkne nemaz neeksistē? To vajag pārbaudīt. Izmantojot kļūdu un mēģinājumu metodi, var sastādīt virkni:
13, 1, 2, 8, 6, 10, 4, 11, 5, 3, 9, 12, 7.