PUNKTIŅŠ Izvēlēsimies! - kombinatorikas elementi
04.11.2016

Nodarbības nolūks – iepazīties ar dažām elementu kombinēšanas iespējām un to grafiskiem attēlojumiem. Ievērot elementu principiāli atšķirīgas izvietojuma iespējas.

1. *Ievaduzdevums.* Jānis veikalā grib izvēlēties siltu cepuri un šalli. Te ir zila, baltas un pelēkas cepures, kā arī zaļas, zilas, baltas un strīpainas šalles. Cik veidos Jānis var izvēlēties vienu cepuri un vienu šalli
2. *Ievaduzdevums. Lai paskaidrotu iegūstamo reizinājumu, var veidot pilnu iespējamo variantu sarakstu.* Mākslinieku salonā katra rotaslieta ir unikāla. Te ir sarkanas, baltas un sudrabotas krelles, kā arī maciņi – viens melns, otrs rotāts ar pērlēm un trešais izšūts. Anna un Marta abas pirks gan krelles, gan maciņu. Cik veidos viņas var to izdarīt?
3. Uz riņķa līnijas ir atzīmēti 6 punkti. Savienojot piecus punktus, var uzzīmēt izliektu daudzstūri. A) Cik dažādu piecstūru te var uzzīmēt? B) Cik dažādu četrstūru te var uzzīmēt?

Komentārs – A variants ir vienkāršs. Jākoncentrējas uz to, ka katru reizi var izslēgt pa vienam punktam. B variantu var rēķināt divējādi – kombinatoriski vai ģeometriski - kombinatoriski. Te var riņķa līnijas punktus apzīmēt a, b, c, d, e, f. Tad kombinatoriski atliek noteikt visu iespējamo burtu pāru skaitu. Ja gadījumus aplūko ģeometriski, tad šeit ir 6 varianti, kad izslēdzam blakus esošo punktu pāri, 6 varianti, kad izslēdzam punktu pāri, starp kuriem ir viens punkts, 3 varianti, ja aplūko "pretējos" punktus.

4. Gitai jāsaver krelles no 4 baltām un 4 sarkanām pērlītēm. Cik daudz dažādos veidos Gita to var izdarīt? (Krelles var pagriezt, krelles var apgriezt – visiem variantiem jābūt dažādiem)

Komentārs – svarīgi apspriest, kādas krelles mēs uzskatīsim par vienādām. Viena no risinājuma iespējām ir sākt ar fiksētu balto pērlīšu izvietojumu un spriest, kā starp tām izvietot 4 sarkanās pērlītes, piemēram, blakus ir 4 sarkanas pērlītes; 3 sarkanas blakus, viena atsevišķi; un tam līdzīgi. Daži bērni veido simbolu virknītes – te jāseko, lai viņi saprot šo virknīšu cikliskumu, piemēram, ka virknes BBBBSSSS un SBBBBSSS atbilst vienām un tām pašām krellēm.

5. * Maijai krelles jāsaver no 2 baltām, divām zilām un divām sarkanām pērlēm. Cik dažādu kreļļu viņa var iegūt?

Komentārs – 11 krelles. Te uzskatāmi var lietot struktūras – zilu, "baltu" un sarkanu nogriezni – kā tie var būt izvietoti ar virsotnēm uz riņķa līnijas, piemēram, paralēli; kā sešstūra malas; krustiski; un tam līdzīgi.

6. * Rokdarbu pulciņā Ansim ir jāsaver krelles no 10 pērlītēm. Skolotājs uzdevis viņam izgatavot visus atšķirīgos krellīšu veidus. Cik krelles Ansim ir jāizgatavo, ja viņam ir zilas un baltas pērlītes?

Komentārs – sarežģītāks uzdevums, paredzēts bērniem, kuri rēķina ātrāk. Ieteicams izveidot tabulu, lai ievērotu visas iespējas.

7. Bērniem Ludim, Maijai, Gitai un Arnoldam ir saldumi. Ludim ir želejas lācīši un cepumu zvaigznītes, Maijai ir āboli un lācīši, Gitai ir āboli un šokolādes batoniņi, Arnoldam ir batoniņi un zvaigznītes. Kā bērniem ir savstarpēji jāapmainās ar saldumiem, lai katram bērnam būtu citāds komplekts no trīs veidu saldumiem?

Komentārs – samērā vienkāršs uzdevums. Mācāmies datus attēlot tabulā. Izaicinājums – kā izpildīt prasības, ka katram bērnam pēc maiņām ir citāds doto saldumu komplekts (jāapskata saldumu kombinācijas pa 3 veidiem. Tādu kombināciju skaits ir 4. Tad nosaka, kuriem bērniem būtu savstarpēji jāmainās. Nepieciešamais maiņu skaits ir 2 – tas arī iespējams)

8. * Cik dažādos veidos uz šaha galdiņa var izvietot melno karali un balto karali atļautā pozīcijā?

Komentārs – šis ir papildus uzdevums. Te būtiski ir aplūkot 3 dažādas baltā karaļa izvietojums iespējas – stūrī, pie malas vai iekšpusē (te situāciju klasificēšana, kā tas līdzīgi var būt darīts 4., 5. un 6. uzdevumos).

PUNKTIŅŠ
Jubilejas pasākums - komentāri
11.11.2016

Te dažādi tematiskai apvienoti uzdevumi, kur galvenā tēma ir izvietošanas uzdevumi. Nolūks – attīstīt bērnu telpisko domāšanas veidu; parādīt, kā aprēķini palīdz ģeometriski kombinatorisku uzdevumu risināšanā.

1. Pasākuma dalībnieki ieradās viesnīcā. Pašā augšējā stāvā tika izvietots pats firmas boss. Stāvu zemāk viņa 3 palīgi. Divus stāvus zem bosa apartamentiem jau 7 cilvēki. Un tā – katru stāvu zemāk divreiz vairāk cilvēku nekā stāvu augstāk un vēl viens. Neskaitot mani un manu brāli, manā, trešajā stāvā apmetās vēl 125 dalībnieki. Kurā stāvā dzīvoja boss? Cik pasākuma dalībnieki kopumā apmetās šajā viesnīcā?

Komentārs – ievaduzdevums, kurā jāveic vienkārša skaitļošana, jo jāprot arī pareizi rēķināt (nodarbībā bērniem bija dažādi rezultāti)

2. Viena no viesnīcas garāžām ir taisnstūrveida telpa. Tajā jānovieto 10 automašīnas. Apsargs ievēro, ka pie katras sienas ir citāds mašīnu skaits. To skaiti kopumā ir četri sekojoši skaitļi. Viņam patīk šāda izvietojum īpašība, bet viņš liek pārvietot mašīnās tā, lai pie katras sienas būtu vismaz divas mašīnas. Uzzīmē, kā mašīnas bija novietotas sākumā un kā tās bija novietotas pēc pārkārtošanas!

Komentārs – uzdevums, kas rosina mainīt "skatu punktu". Otra izvietojuma prasības norāda uz "kopīgajiem" elementiem – automašīna, kura ir izvietota stūrī, "piedalās" divās rindās (izvietojums – četras mašīnas novietotas telpas stūros, pie sienām vēl viena, divas un 3 mašīnas).

3. Apspriežu telpā ir 5 kvadrātveida galdiņi, kur pie katra galdiņa var apsēdināt 4 cilvēkus. Kā šos galdiņus izvietot, lai varētu te apsēdināt vislielāko apspriedes dalībnieku skaitu? Kā izvietot galdiņus, lai te varētu apsēdināt vismazāko skaitu dalībnieku tā, lai pie katra galdiņa sēdētu vismaz viens cilvēks un tukšu vietu nebūtu. (Saprotams, ka vienam cilvēkam vieta ir pie viena galdiņa.)

Komentārs – uzdevuma otrā daļa – arī pentamino varianti. Jāievēro, ja divi vai trīs galdiņi veido iekšējo stūri, te var sēdināt tikai vienu cilvēku.

4. Vai iespējams 10 galdiņus telpā brīvi izvietot tā, lai pie katra galdiņa varētu ērti apsēsties tieši viens viesis un tukšu vietu nebūtu?

Komentārs – citāda uzdevuma risināšanas metode. Galdiņus var izvietot aplī tā, lai galdiņu stūri saskaras. Starp katriem diviem blakus galdiņiem ir šaura sprauga, kurā nevar nevienu apsēdināt. Tāpat arī neviens nelīdīs zem galda, lai nokļūtu apļa iekšpusē.

5. Uzņēmuma svinību organizatoram ir jāizstrādā plāns, kā izsēdināt viesus. Telpā ir 100 četrvietīgie kvadrātveida galdiņi. Divus galdiņus blakus izvieto tā, ka tiem sakrīt galda malas. Visiem galdiņu sakārtojumiem (vairāki galdiņi sabīdīti kopā) jābūt vienādiem. Katram viesim vieta pie galdiņa ir pietiekoši liela. A) Izstrādā plānu, kā apsēdināt tieši 250 viesu; B) Kā apsēdināt tieši 180 viesu?

Komentārs – Aprēķins – kādos reizinātājos var sadalīt šo skaitli? Kurš no reizinātāju pāriem ir visvienkāršāk realizējams? (Piemēram, 4 galdiņi rindā – te 8 vietas, kopā 25 šādi izvietojumi)

6. Boss vēlas, lai uz viņa galdiņa būtu noliktas 6 paplātes 4 rindās pa trim paplātēm katrā rindā. “Nieks,” teica oficiants. “es protu sakārtot arī 10 paplātes 5 rindās pa 4!” Kādi ir abi šo paplāšu izkārtojumi uz galda?

Komentārs – uzdevums būtu jāsāk vispirms ar nogriežņu konstruēšanu (nogrieznis nosaka paplāšu rindu). Skaidrs, ka būs jāliek paplātes arī šo nogriežņu krustpunktos.

7. *Uz pasākumu ieradās arī burvju mākslinieks. Uz galda bija saliktas piecas zilas un divas sarkanas stikla lodes. Pamājot ar burvju nūjiņu, kādas divas lodes mainīja krāsu – sarkanās kļuva zilas, bet zilās – sarkanas. Kā tu domā, vai māksliniekam, mājot ar burvju nūjiņu vairākas reizes, izdevās panākt, ka a) visas lodes bija zilā krāsā; b) visas lodes bija sarkanā krāsā?

Komentārs – Cita veida uzdevums – par elementu pārveidošanu. Šis uzdevums ieteicams kā mājas darba uzdevums. Zilās lodes iegūt ir vienkārši. Uzdevuma otrā daļā ir invariants – sarkano ložu skaits visos gadījumos ir pāra skaitlis.

PUNKTIŅŠ
Naturālo skaitļu pāra – nepāra īpašības Komentāri
25.11.2016

Nodarbības tēma – mācīties uzdevuma pamatojumā pielietot naturālo skaitļu pāra – nepāra īpašības; risināt vienādojumus ar vienu vai diviem nezināmiem (šādi uzdevumi tiek doti kā rēbuss, kurus var risināt arī "uzminot" atbildi).

1. Atrisini rēbusu - atrodi tādu naturālu skaitli A, ka vienādība ir pareiza

   1) $3 \cdot A + 2 = 26$; 2) $6 \cdot A - 1 = 65$; 3) $49 - 2 \cdot A = 5 \cdot A$

2. Atrodi divus naturālus skaitļus, lai vienādība $5 \cdot A + 2 \cdot B = 100$ un skaitļu starpība A – B ir vismazākā (no lielākā skaitļa atņem mazāko).

Komentārs. Uzdevums piemērots, lai mācītos veikt dažādus novērtējumus. Vienādojuma atrisinājumus var noformēt tabulas veidā.

Vispirms jāaplūko dotie lielumi – ievērojot, ka 2B un skaitlis 100 ir pāra skaitļi, secinām, ka tāds ir arī A. Savukārt 5A un 100 dalās ar 5, tāpēc B arī dalās ar 5 (jāpiezīmē, ka 2 ar 5 nedalās). Šie vērtējumi ļauj samazināt variantu pārlasi. Novērtējam vislielāko un vismazāko iespējamo skaitļu A un B vērtību. Meklējam naturālus atrisinājumus, tad A un B nav 0 un A nevar būt vienāds ar 20 vai lielāks, bet B būs mazāks par 50. Tabulā var ierakstīt visus B daudzkārtņus, sākot no 5 līdz 45. (Atbilstošās A vērtības samazinās lineāri – var ievērot likumsakarību tabulas aizpildīšanai). Tiek meklēti tādi skaitļi A un B, kuru starpība ir vismazākā – skaidrs, ka starpība nevar būt 0 (5A + 2A = 7A, bet 100 ar 7 nedalās). Tātad vismazākā starpība var būt 1. Tāds skaitļu pāris dotajā tabulā ir tikai viens.

(protams, ka uzdevumu var risināt arī tīri algebriski, ko 4. klases skolēni vēl neprot)

3. Vai vari atrast tādus naturālus skaitļus A un B, lai $2 \cdot A - 4 \cdot B + 5 = 100$?

Komentārs. Te jāveic līdzīgus novērtējumus kā iepriekšējā uzdevuma risinājumā. Pamata arguments – pāra un nepāra skaitļu summa (vai starpība) ir nepāra skaitlis.

4. Toms izvēlējās divus veselus skaitļus un to starpību sareizināja ar to pašu skaitļu reizinājumu un ieguva skaitli 105. Vai vari noteikt kādi bija Toma izvēlētie skaitļi?

Komentārs. Ieteicams uzdevumu aplūkot no "abām pusēm", tas ir, izpētīt, kādos reizinātājos var sadalīt skaitli 105 un mēģināt ar tiem veikt uzdevumā norādītās darbības. No otras puses – aplūkojam iespējas, kāds varētu būt izvēlēto skaitļu pāris, sastādām tabulu, norādot iespējamo izvēlēto skaitļu paritāti:

A	**B**	**A - B**	**(A – B)*A*B**
P	P	P	P
N	N	P	P
N	P	N	P
P	N	N	P

5. Secīgi pāra skaitļi ir 2, 4, 6, 8, 10, 12, … Secīgi nepāra skaitļi ir 1, 3, 5, 7, 9, 11, ….
   a) Trīs secīgu pāra skaitļu summa ir 78 – nosaki šos skaitļus!
   b) Divu secīgu nepāra skaitļu reizinājums ir 143 - nosaki šos skaitļus!
   c) Trīs secīgu nepāra skaitļu reizinājums ir 693 – nosaki šos skaitļus!
   d) * Trīs secīgu nepāra skaitļu reizinājums ir 6783 – nosaki šos skaitļus!

Komentārs. Uzdevuma veids "Eksperimentē – vēro!". Te var formulēt sekojošo jautājumu: "Kādas likumsakarības vari ievērot, ja saskaiti 3 secīgus pāra skaitļus?" un līdzīgus jautājumus.

6. Cik divciparu skaitļiem ciparu reizinājums ir nepāra skaitlis?

Komentārs. Grupē skaitļus. Abiem divciparu skaitļa cipariem jābūt nepāra skaitļiem. Cik nepāra skaitļu ir viena desmita robežās? Cik ir desmitu grupu, kur desmitu cipars ir nepāra skaitlis?

7. Virknē uzrakstīti skaitļi 0; 1; 0; 0. Vienā gājienā drīkst jebkuriem diviem skaitļiem pieskaitīt viens. Vai var pēc vairākiem gājieniem panākt, lai visi skaitļi vienādi?

Komentārs. Četru vienādu skaitļu summa ir pārskaitlis. Sākumā visu skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Vienā gājienā, pieskaitot 2, visu skaitļu summas paritāte nemainās. Skaitļiem saglabājas īpašība, ka to kopējā summa ir nepāra skaitlis.

8. *Vai pa apli var uzrakstīt **a)** sešus **b)** septiņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakusstāvošu skaitļu summa būtu pirmskaitlis un visi summās iegūtie pirmskaitļi būtu dažādi?

Risinājums. a) variantu iespējams izpildīt, bet b) variantu nē. Ja aplī izvieto visus dažādus naturālus skaitļus, tad mazākā iespējamā summa ir 3. Tāpēc visi šeit meklējamie pirmskaitļi var būt tikai nepāra. Tas norāda, ka aplī pamīšus jāizvieto pāra un nepāra skaitļi. Šāda virkne no 7 skaitļiem saturēs vai nu 3 pāra un 4 nepāra skaitļus, vai 4 pāra un 3 nepāra skaitļus. Tāpēc aplī blakus atgadīsies divi skaitļi ar vienādu paritāti – to summa būs pārskaitlis.

Divu spēlētāju spēle: uz galda ir 7 monētas. Vienā gājienā spēlētājs drīkst ņemt vienu, divas vai trīs monētas. Spēlētāji izdara gājienus pēc kārtas, līdz visas monētas sadalītas. Uzvar tas spēlētājs, kuram ir nepāra skaits monētu.

Vai ir iespējams, ka viens no abiem spēlētājiem var vienmēr uzvarēt, ja gudri spēlē?

Komentārs. Izmēģinot spēli, diezgan ātri var pamanīt, ka uzvaru vienmēr iegūst pirmais spēlētājs, pirmajā gājienā ņemot 2 monētas. Spēles noteikumus var mainīt. Kas notiks, ja sākumā dotas 10 monētas? Kā spēlēt, ja monētu skaits ir 15? Ko var teikt par gadījumu, ja atļauts ņemt tikai 2 vai 3 monētas, bet gadījumu, kad uz galda atliek viena monēta, saukt par neizšķirtu spēles iznākumu? Kādus vēl līdzīgus noteikumus var izdomāt?

Piezīme. Materiālu sagatavošanas avoti:
Atklātā Matemātikas olimpiāde (arhīvs):
http://nms.lu.lv/uzdevumu-arhivs/latvijas-olimpiades/
Invariantu metode. Invarianti procesos. A.Andžāns, A.Reihenova, L.Ramāna, B.Johannessons, Rīga, 1997:
http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/mat_intvarianti.pdf