Profesora Cipariņa klubs
1997./98. m.g.

1.nodarbības uzdevumi

A GRUPA

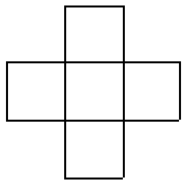
1. Rindā izrakstīti visi naturālie skaitļi pēc kārtas:

123456789101112….

Kurš cipars atrodas 1997 -ā vietā?

2. Atrodiet tādus 4 dažādus naturālus skaitļus, lai katru triju summa būtu pirmskaitlis.

3. Vai kuba virsmu var aplīmēt ar sešiem “krustiem” (skat. 1. zīm.), ja viena “krusta” laukums vienāds ar vienas kuba skaldnes laukumu?



4. Pierādiet, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 16 nevar uzrakstīt pa apli katru vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu summa būtu kāda naturāla skaitļa reizinājums ar sevi pašu.

5. Klasē ir 20 zēni un 20 meitenes. Katrs zēns uzrakstīja vēstuli kādai meitenei. Pēc tam katra meitene, kas nesaņēma vēstuli, uzrakstīja pa vēstulei kādam zēnam. Pierādiet, ka pēc tam vismaz 20 bērni nav saņēmuši vēstules.

6. Kādu lielāko daudzumu zirdziņu var novietot uz šaha galdiņa, lai neviens neapdraudētu nevienu citu?

B GRUPA

1. Rindā izrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 1997, katrs vienu reizi. Vai vairāk uzrakstīts pāra vai nepāra ciparu?

2. Vai var atrast 5 dažādus naturālus skaitļus tā, lai katru triju summa būtu pirmskaitlis?

3. Vai no katriem 10 taisnstūriem var atrast vienu tādu, ko var pārklāt ar 9 atlikušajiem?

4. Parādīt, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 16 var izrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu summa būtu kāda naturāla skaitļa reizinājums ar sevi pašu.

5. Skat. A grupas 5. uzdevumu, kurā beigās katrs zēns, kas nav saņēmis vēstuli, vēlreiz uzraksta pa vēstulei kādai meitenei. Pierādiet, ka vismaz 10 bērni nav saņēmuši vēstules.

6. Divi spēlētāji pēc kārtas liek pa zirdziņam uz šaha galdiņa tā, lai nekādi divi zirdziņi viens otru neapdraudētu. Kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš uzvar, pareizi spēlējot - pirmais vai otrais spēlētājs?

2. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Katrā šaha galdiņa rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Katrā kolonnā un katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis. Vai var būt, ka melnajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 100?

2. Andris, Jānis un Pēteris vairākas reizes piedalījās matemātikas olimpiādē. Andris vairāk reižu uzvarēja Jāni nekā viņam zaudēja; Jānis vairāk reižu uzvarēja Pēteri nekā viņam zaudēja. Vai var būt, ka Pēteris vairāk reižu uzvarēja Andri nekā viņam zaudēja?

3. Atrodiet kaut vienu naturālu skaitli, kas sākas ar ciparu 1 un palielinās trīs reizes, ja šo vieninieku pārceļ skaitļa beigās.

4. Uzzīmējiet 30 nogriežņus tā, lai tiem kopā būtu tikai 9 dažādi galapunkti. Nekādi divi nogriežņi viens ar otru nesakrīt.

5. Sprīdītis par algu no ķēniņa saņem brīnumzābakus. Katrs nākošais solis, ko ar tiem sper, ir divas reizes garāks par iepriekšējo. Vai, nenovelkot brīnumzābakus, Sprīdītis var atgriezties pie ķēniņa atpakaļ?

6. Uzzīmējiet divus septiņstūrus tā, lai tiem abiem būtu vienas un tās pašas virsotnes, bet neviena no septiņstūra malām vienlaikus nebūtu arī otra septiņstūra mala.

B grupa

1. Vai summa, par kuru runā A grupas 1. uzdevumā, var būt 1997?

2. Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai rūtiņās var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 16 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai visās rindiņās un visās kolonnās skaitļu summas būtu dažādas un lai katra no tām dalītos ar

a) 4, b) 3, c) 17?

3. Ar kādu ciparu var sākties naturāls skaitlis, kas palielinās 3 reizes, ja pirmo ciparu pārceļ skaitļa beigās?

4. Kāds mazākais dažādu galapunktu skaits var būt 30 nogriežņiem? Nekādi divi nogriežņi viens ar otru nesakrīt.

5. Dots, ka $a+b+c+d=0$. Pierādi, ka $ab+ac+ad+bc+bd+cd\leq0$.

6. Vai var uzzīmēt trīs tādus septiņstūrus, par kādiem runā A grupas 6. uzdevumā?

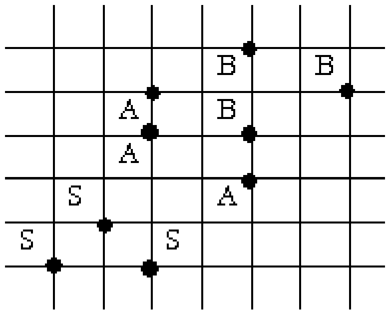
3. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Plaknē uzzīmēts leņķis un taisne. Cik daļās var būt sadalīta plakne? Norādi visas iespējas un pamato, kāpēc citu bez Tevis atrastajām nav!

2. Rūtiņu lapas punktos, kas atzīmēti ar burtiem S, novietots pa figūriņai (skat. 1.zīm.). Ar vienu gājienu var vienu figūriņu pārvietot par patvaļīgu attālumu paralēli taisnei, kura iet caur abām pārējām figūriņām.

Parādi, kā, vairākas reizes izdarot šādus gājienus, figūriņas var vienlaicīgi novietot punktos, kas apzīmēti ar burtiem A!



1. zīm.

3. Naktī pie tilta no vienas puses pienāk 4 cilvēki. Tilts ir vecs un satrupējis, tāpēc tam pāri var iet vienlaicīgi tikai viens vai divi cilvēki; drošības pēc, ejot tiltam pāri, ceļš visu laiku jāapgaismo ar lukturīti, ko pārnes sev līdzi.

Cilvēkiem pa visiem kopā ir tikai viens lukturītis. Viens no viņiem var pāriet tiltu 1 minūtē, otrs 2 minūtēs, trešais 5 minūtēs, ceturtais 10 minūtēs. Ejot pārī, jāpiemērojas lēnāk ejošajam.

Parādiet, kā visi cilvēki var pāriet tiltu 17 minūtēs.

4. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; 7991 kvadrātiņā novietots pa šaha zirdziņam. Pierādi, ka var atrast vismaz 1997 zirdziņus, kas viens otru neapdraud.

5. Rindā novietotas divpadsmit kartiņas. Katrai kartiņai vai nu abas puses baltas, vai abas melnas, vai arī viena puse balta, bet otra – melna. No sākuma deviņām kartiņām uz augšu bija melna puse. Kartiņas 1-6 apgrieza otrādi un rezultātā melna puse uz augšu bija četrām kartiņām. Pēc tam otrādi apgrieza kartiņas 4-9, un rezultātā melna puse uz augšu bija sešām kartiņām. Beidzot otrādi apgrieza kartiņas 1-3 un 10-12. Rezultātā melna puse uz augšu bija piecām kartiņām. Cik katra veida kartiņu bija?

6. Saskaitot 1996 un 1997, mēs vispirms saskaitām vienu ciparus 6 un 7. Iegūstot 13, mēs rakstām 3 un "pārnesam" 1 uz nākošo šķiru. Sacīsim, ka ir radies pārnesums. Turpinot mēs redzam, ka pavisam rodas trīs pārnesumi:

$$\begin{array}{r} 111 \\ 1996 \\ +1997 \\ \hline 3993 \end{array}$$

Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis k, ka saskaitot 1996k un 1997k, nerodas neviens pārnesums?

B grupa

1. Uz taisnas dzelzceļa līnijas viena aiz otras atrodas 11 pilsētiņas. Attālums starp pirmo un pēdējo ir 56 km. Attālums no jebkuras pilsētiņas līdz aiznākošajai (ja tāda ir) nepārsniedz 12 km; attālums no jebkuras pilsētiņas līdz aizaiznākošajai (ja tāda ir) ir vismaz 17 km. Atrast attālumu starp otro un septīto pilsētiņu.

2. Vai A grupas 2. uzdevumā figūriņas var vienlaicīgi atrasties punktos, kas apzīmēti ar burtiem B?

3. Vai A grupas 3. uzdevumā mērķi var sasniegt ātrāk nekā 17 minūtēs?

4. Vienādmalu trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts O. Pierādīt, ka pastāv tāds trijstūris, kura malu garumi ir AO, BO, CO.

5. Dažādas pasaules Visumā ir sanumurētas ar skaitļiem 1, 2, 3… un savienotas savā starpā tā, ka katram veselam skaitlim $n \geq 1$ burvis Gandalfs var pārvietoties abos virzienos starp jebkurām pasaulēm ar numuriem n, 2n un 3n+1. Vai Gandalfs, sākot ceļu no patvaļīgas pasaules, var sasniegt jebkuru citu pasauli?

6. Pasniedzējs paziņo, ka loģikas eksāmenā studenti tiks nosēdināti vienā rindā viens aiz otra un katram galvā tiks uzlikta balta vai melna cepure. Pēc tam, sākot ar aizmugurē sēdošo, studentiem pēc kārtas jautās, kāda cepure viņiem galvā, un atbildēt varēs tikai ar vienu vārdu: “balta” vai “melna”. Visi studenti dzirdēs visas atbildes, bet katrs redzēs tikai sev priekšā sēdošo studentu cepures.

Kā studentiem vienoties atbildēt, lai iespējami liels skaits no viņiem dotu pareizas atbildes?

Novēlu jums priecīgus Ziemassvētkus un jaunajā gadā visiem siltu sirdi, gaišu galvu un veiksmi visos jūsu labajos darbos!

4. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 19 ieskaitot. Vai var no tiem izvēlēties 10 skaitļus tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu ne 19, ne 20? Vai var tā izvēlēties 11 skaitļus?

2. Kā var izvietot pa apli 6 skaitļus tā, lai katrs skaitlis būtu abu tam blakus novietoto skaitļu starpības modulis?

3. Klasē ir 25 skolnieki. Katru dienu dežūrē trīs no tiem. Vai var gadīties, ka kādā laika posmā katrs skolnieks dežūrējis tieši 7 reizes?

4. Uzzīmētas 4 riņķa līnijas. Zināms, ka katras trīs no tām var pārsvītrot ar vienu taisni. Vai noteikti visas četras riņķa līnijas var pārsvītrot ar vienu taisni?

5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a, b un c, ka

$$(a+b)(a+c)(b+c)=4445\ ?$$

6. Uz rūtiņu papīra lapas uzzīmēts izliekts 10-stūris. Kāds lielākais daudzums tā diagonāļu var iet pa rūtiņu līnijām?

B grupa

1. Atrodiet visus veidus, kā var izpildīt A grupas 1. uzdevuma prasības.

2. Vai tādā veidā, kā minēts A grupas 2.uzdevumā, var izvietot 1998 skaitļus? Bet 17 skaitļus?

3. Vai A grupas 3.uzdevumā aprakstītā situācija var iestāties, ja katram skolēnam jābūt dežūrējušam tieši 3 reizes?

4. Vai var uzzīmēt 5 vienādas riņķa līnijas tā, lai pirmā pieskārtos otrajai, otrā - trešajai, …, piektā - pirmajai, citu riņķa līnijām kopīgu punktu bez minētajiem pieskāršanās punktiem nebūtu un lai visas riņķa līnijas varētu krustot ar vienu taisni?

5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a, b un c, ka

$$(a+b)(a+c)(b+c)=4444?$$

6. Atrisināt A grupas 6.uzdevumu izliekta 11-stūra gadījumā.

5. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Cik no 1 līdz 1998 ieskaitot ir tādu naturālu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens vieninieks?
2. Cik reizes pēc kārtas var uzrakstīt skaitli 1998, lai iegūtais daudzciparu skaitlis dalītos ar 11?
3. Vai eksistē kaut viens astoņciparu skaitlis, kura pirmais cipars norāda, cik ciparu šī skaitļa pierakstā dalās ar 2, otrais - cik ciparu dalās ar 3, …, astotais - cik ciparu dalās ar 9?
4. Vai kvadrātiskā tabulā, kas sastāv no 6x6 rūtiņām, var katrā rūtiņā ierakstīt 0 vai 1 tā, lai visās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu dažādas?
5. Cik kopīgu punktu var būt divu četrstūru kontūrām?
6. Vienādībā 5+5+5+5=555 pievilkt klāt vienu taisnu svītriņu, lai iegūtu pareizu vienādību.

B grupa

1. Cik no 1 līdz 1998 ieskaitot ir tādu skaitļu, kuros pāra ciparu summa vienāda ar nepāra ciparu summu?
2. Atrisināt 2.uzdevumu, ja iegūtajam skaitlim jādalās ar 7.
3. Skaitli sauc par interesantu, ja tā pirmais cipars norāda nuļļu skaitu šī skaitļa pierakstā, otrais - vieninieku skaitu tā pierakstā utt.

Atrodiet visus desmitciparu interesantos skaitļus un pierādiet, ka citu bez jūsu atrastajiem nav.

4. Atrisiniet A grupas 4.uzdevumu kvadrātam ar izmēriem 5x5 rūtiņas.
5. Cik daļās plakni var sadalīt divu četrstūru kontūras?
6. Kādā salā dzīvo cilvēki, kas vienmēr runā taisnību, un cilvēki, kas vienmēr melo; citādu iedzīvotāju tur nav. Salā lietotajā valodā vārdi “ding” un “dong” nozīmē “jā” un “nē”, bet nav zināms, kuram vārdam kura nozīme. Kā, satiekot nepazīstamu salinieku, ar vienu jautājumu panākt, lai viņš atbildētu “dong”?

6. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Vienādībā 122-143=1 pārlikt vienu ciparu citā vietā tā, lai iegūtu pareizu vienādību (pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt).

2. Kā 1.zīm. parādītajā tabulā tukšajās rūtiņās ierakstīt pa skaitlis tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas būtu savā starpā vienādās?

17		
		13
		15

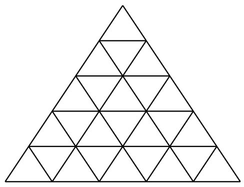
1.zīm.

3. Vai varat uzzīmēt 1998-stūri, kuram 999 malas ir savstarpēji paralēlas?

4. Atrast kaut vienu septiņciparu skaitli, kas dalās ar katru savu ciparu un kam visi cipari ir dažādi.

5. Skaitlis A sastāv no 1998 vieniniekiem, skaitlis B - tikai no trijniekiem. Zināms, ka A dalās ar B. Atrast B.

6. Vienādmalu trijstūra katra mala sadalīta 5 vienādos nogriežņos; dalījuma punkti savienoti ar nogriežņiem, kas paralēli trijstūra malām. Sākotnējais trijstūris tādējādi sadalās 25 mazos vienādmalu trijstūrīšos (skat.2.zīm.).



2.zîm.

Šo trijstūrīšu virsotnes saucam par režģa virsotnēm. Katrā iegūtā režģa virsotnē atrodas pa skudrai. Skudras vienlaicīgi sāk ar vienādiem un nemainīgiem ātrumiem rāpot pa režģa līnijām. Skudras maina kustības virzienu tikai režģa virsotnēs. Nonākot kādā režģa virsotnē, katra skudra pagriežas par 60^0 vai 120^0 (vienalga uz kuru pusi) un turpina ceļu pa režģa līnijām.

Pierādiet, ka skudras var izvairīties no satikšanās.

B grupa.

1. Cik no 1 līdz 1998 ir tādu naturālu skaitļu, kuru ciparu summa ir vienāda ar aiznākošā naturālā skaitļa ciparu summu?

2. Kādus viencipara naturālus skaitļus var iegūt, ieliekot iekavas izteiksmē
1:2:3:4:5:6:7:8:9 ?

3. Vai pastāv tāds taisnstūris, kuru var sagriezt 1998 dažādos kvadrātos?

4. Katrs no septiņiem rūķīšiem šogad trīs reizes ciemojies pie Sniegbaltītes, katru reizi pavadot tur kādu laika sprīdi. Ir zināms, ka katri divi rūķīši ir satikušies pie Sniegbaltītes. Pierādīt, ka kādu brīdi pie Sniegbaltītes vienlaicīgi ciemojās vismaz trīs rūķīši.

5. Kādu lielāko skaitu dāmu var novietot uz šaha galdiņa tā, lai vismaz viena no tām neapdraudētu nevienu citu?

6. Skat. A grupas 6.uzdevumu, ja trijstūra malas sadalītas katra 6 vienādās daļās. Vai skudras var izvairīties no satikšanās?