„Profesora Cipariņa kluba” 1994./95.m.g.
uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde. Firma “Raujungrāb” gatavojas izcirst pusi meža.

Risinājums. Visu koku skaitu mežā apzīmēsim ar M. Priežu daudzumu pirms ciršanas apzīmēsim ar P. Noskaidrosim, kāds daudzums priežu ir mežā pirms izciršanas:

$$P = \frac{99}{100} M = 0{,}99 \cdot M.$$

Tagad noskaidrosim, kāds daudzums priežu ir mežā paliks pēc izciršanas. Ja ar M_1 apzīmēsim visu koku daudzumu mežā pēc izciršanas, bet ar P_1 - priežu daudzumu mežā pēc izciršanas, tad

$$P_1 = \frac{98}{100} M_1 = 0{,}98 \cdot M_1.$$

Varam noskaidrot, ka pirms izciršanas citu koku ir $M-0{,}99 \cdot M=0{,}01 \cdot M$, bet pēc izciršanas $M-0{,}98 \cdot M=0{,}02 \cdot M_1$.

Bet, tā kā firma citus kokus necirta, tad to daudzums paliek nemainīgs:

$$0{,}01 \cdot M=0{,}02 \cdot M_1.$$

Varam apskatīt izcirstā meža koku skaita attiecību pret meža koku skaitu pirms ciršanas:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{0{,}01}{0{,}02} = \frac{1}{2}.$$

Redzam, ka firma “Raujungrāb” gatavojas izcirst pusi meža.

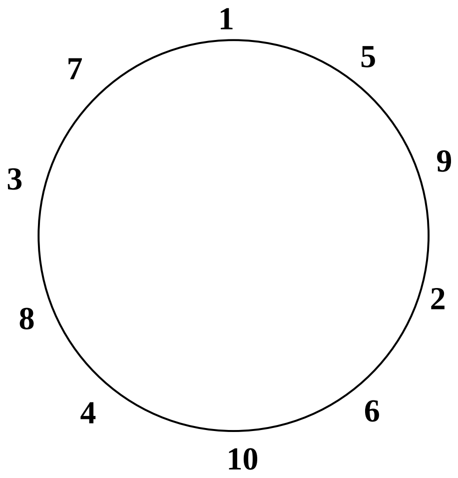
2. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka skaitļus tabulā var ierakstīt uzdevumā minētajā veidā. Aplūko visu tabulā ierakstīto skaitļu summu divos dažādos veidos. Vispirms sadala skaitļus pa kolonnām. Tā kā katrā kolonnā summa ir mazāka par nulli, tad arī summa visās kolonnās kopā būs negatīva un visas tabulas skaitļu summa būs negatīva.

Bet tabulā skaitļu summu var apskatīt arī citādi. Vispirms saskaita skaitļus pa rindiņām. Katrā rindiņā skaitļu summa ir pozitīva, tātad arī visu rindiņu skaitļu summa ir pozitīva. Līdz ar to visas tabulas skaitļu summa ir pozitīva.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums ir aplams un skaitļus prasītajā veidā tabulā ierakstīt nevar.

3. Atbilde. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 255. zīmējumā.



255. zīm.

4. I Risinājums. Skaitli var uzrakstīt kā $\overline{ababab}$; šeit svītra norāda, ka apskatām nevis reizinājumu, bet skaitli, kur ar burtiem a un b apzīmēti cipari. Mēs apskatām sešciparu skaitli un var ievērot, ka šis skaitlis uzrakstāms kā

$$\overline{ababab} =$$
$$= a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b =$$
$$= a \cdot 100000 + b \cdot 10000 + a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b \cdot 1 =$$
$$= a \cdot (100000 + 1000 + 10) + b \cdot (10000 + 100 + 1) =$$
$$= a \cdot 101010 + b \cdot 10101 =$$
$$= a \cdot 10101 \cdot 10 + b \cdot 10101 =$$
$$= 10101 \cdot (a \cdot 10 + b).$$

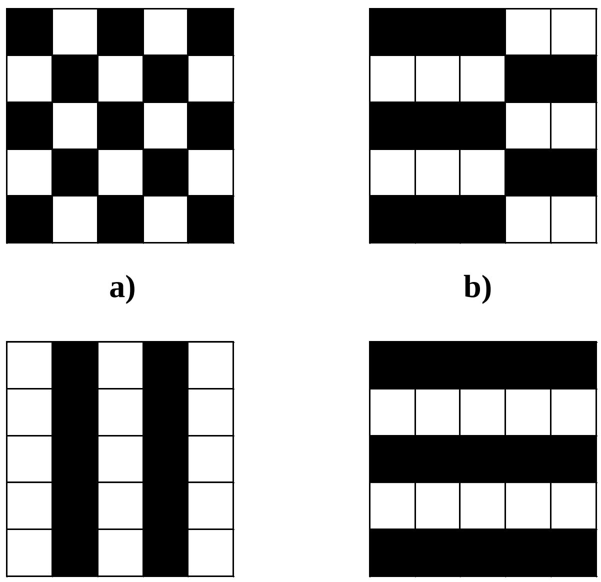
Ja skaitlis 10101 dalās ar 13, tad skaitlis $\overline{ababab}$ arī dalās ar 13. Pārbaudot redzam, ka patiešām skaitlis 10101:13=777. Tātad apskatāmais skaitlis dalās ar 13.

<u>II Risinājums</u>. Ievērosim, ka izpildot reizināšanu stabiņā

$$\begin{array}{r} 10101 \\ \overline{ab} \\ \hline \overline{b0b0b} \\ \overline{a0a0a} \\ \hline \overline{ababab} \end{array}$$

iegūstam, ka $\overline{ab}\cdot 10101=\overline{ababab}$. Atliek pārbaudīt, vai 10101 dalās ar 13. Tā kā 10101:13=777, tad apskatāmais skaitlis dalās ar 13.

<u>5. Atbilde</u>. 256. a), b), c) un d) zīmējumā redzami vairāki veidi, kā to izdarīt.



a) **b)** **c)** **d)**

256. zīm.

<u>Piezīme</u>. Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt: vismazākais iekrāsojamo rūtiņu skaits, lai katrā kvadrātā, kas sastāv no 2×2 rūtiņām, būtu tieši divas iekrāsotas, ir 10 rūtiņas, bet vislielākais iekrāsojamo rūtiņu skaits - 15 rūtiņas.

<u>6. Risinājums</u>. Apzīmēsim monētas ar A_1, A_2, A_3 un A_4. Uzliksim monētas A_1 un A_2 katru uz sava svaru kausa. Šķirosim divus gadījumus.

I Ja kausi būs līdzsvarā, tad starp šīm divām monētām nav atšķirīgās monētas.

Otrajā svēršanā paņemsim vienu monētu no divām iepriekšējām, piemēram, monētu A_1. Izvēlēsimies otru monētu no vēl neizmantotajām, piemēram, monētu A_3. Salīdzināsim monētas A_1 un A_3.

Ja svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā ir monēta A_4 (neizmantotā monēta). Bet, ja svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā ir monēta A_3.

II Ja pirmajā monētu A_1 un A_2 svēršanā svari nebija līdzsvarā, tad jānoskaidro, kura no monētām A_1 un A_2 ir atšķirīgā monēta.

Ņemsim vienu no tām, piemēram, monētu A_1, un salīdzināsim ar vienu no pārējām monētām, piemēram, monētu A3.

Ja svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā nevar būt monēta A_1; tātad tā ir monēta A_2.

Ja svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā ir monēta A_1.

7. Atbilde. **a)** Nē, nevar;

b) jā, var.

Risinājums. **a)** Pieņemsim pretējo, ka skaitļus var ierakstīt kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām, tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu pozitīvs, bet katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu negatīvs.

Aplūkojam visā tabulā ierakstīto skaitļu reizinājumu divos dažādos veidos.

Vispirms aplūkojam katras kolonnas skaitļu reizinājumu. Katras kolonnas skaitļu reizinājums ir pozitīvs, tātad visu skaitļu reizinājums, grupējot tos pa kolonnām, arī ir pozitīvs.

Bet tabulas skaitļu reizinājumu var aplūkot arī citādi: vispirms sareizināt skaitļus katrā rindiņā. Šie reizinājumi pēc uzdevuma nosacījumiem ir negatīvi, tāpēc arī visu skaitļu reizinājums, grupējot tos pa rindiņām, arī ir negatīvs, jo ir piecas (nepāra skaits) rindiņas.

Esam ieguvuši pretrunu: visas tabulas visu skaitļu reizinājums ir gan negatīvs, gan pozitīvs.

Tātad mūsu pieņēmums, ka kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām, skaitļus var ierakstīt tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu pozitīvs, bet katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu negatīvs, ir aplams.

b) Parādīsim dažus veidus, kā to izdarīt. Ar “-” apzīmējam negatīvu skaitli, ar “+”apzīmējam pozitīvu skaitli (skat. 257. zīm.).

+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	-

+	-	-	+	-	+
+	-	-	+	-	+
+	-	-	+	-	+
+	-	-	+	-	+
+	-	-	+	-	+
+	-	-	+	-	+

-	+	-	+	+	-
-	-	+	+	-	+
+	+	-	-	+	-
+	+	-	-	+	-
-	-	+	+	-	+
-	+	-	+	+	-

257. zīm.

Tātad, ja kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām, tad skaitļus var ierakstīt tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu pozitīvs, bet katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu negatīvs.

8. Atbilde. Klases garākais zēns draudzējas ar 5 meitenēm.

Risinājums. Apzīmēsim draudzību skaitu starp zēniem un meitenēm ar D.
Tā kā katrs no 12 zēniem draudzējas ar vismaz 5 meitenēm, tad $D \geq 12 \cdot 5$ jeb

$$D \geq 60 \quad \textbf{(1)},$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, kad katrs zēns draudzējas ar tieši 5 meitenēm.
Līdzīgi iegūstam $D \leq 10 \cdot 6$ jeb

$$D \leq 60 \quad \textbf{(2)},$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, kad katra meitene draudzējas ar tieši 6 zēniem.
Tā kā **(1)** un **(2)** ir spēkā vienlaicīgi, tad jābūt

$$D = 60.$$

No šejienes seko, ka katrs zēns (tātad arī klases garākais zēns) draudzējas ar 5 meitenēm.

9. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Aplūkosim visus tos skaitļu pārus, kuru starpība ir vismaz 5.

1; 6	2; 7	3; 8	4; 9	5; 10
1; 7	2; 8	3; 9	4; 10	
1; 8	2; 9	3; 10		
1; 9	2; 10			
1; 10				

Sīkāk apskatīsim skaitli 6. Tas varētu saistīt mūsu uzmanību ar to, ka tam blakus var uzrakstīt tikai skaitli 1.

Mums vairs nav cita skaitļa, ko rakstīt sešniekam otrā pusē, kā tikai 1, bet 1 jau ir vienreiz uzrakstīts un otru reizi pēc uzdevuma nosacījumiem rakstīt to nevaram.

Secinām, ka skaitļus izkārtot, lai katri divi blakus uzrakstītie skaitļi atšķirtos vismaz par 5, nav iespējams.

10. Atbilde. a=5, b=2.

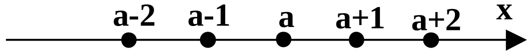
Risinājums. Tā kā mazākais pirmskaitlis ir 2, tad a≥2, b≥2 un tātad a+b≥4.

Skaitļi a un b nevar abi būt pāra skaitļi, jo vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, un tad a=b=2 un a+b=4, kas nav pirmskaitlis.

Ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad a+b ir pāra skaitlis, tātad dalās ar 2 un nav pirmskaitlis, jo a+b≥4.

Tādēļ aplūkojam gadījumu, kad viens no skaitļiem ir pāra skaitlis un otrs – nepāra. Bet 2 ir vienīgais pāra pirmskaitlis. Nevar būt a=2, jo tad a-b≤0 un a-b nav pirmskaitlis. Tāpēc b=2.

Noskaidrosim, kad a; a+2; a-2 visi ir pirmskaitļi. Attēlosim a-2; a; a+2 uz skaitļu ass (skat. 258. zīm.).



258. zīm.

Parādīsim, ka viens no šiem skaitļiem a-2; a; a+2 noteikti dalās ar 3.

Aplūkosim trīs iespējas:

I a dalās ar 3.

Vajadzīgais izpildās uzreiz.

II a, dalot ar 3, dod atlikumu 1.

Tad a=3n+1, kur n – vesels skaitlis; tad

$$a+2=(3n+1)+2=3n+1 \text{ dalās ar 3.}$$

III a, dalot ar 3, dod atlikumu 2.

Tad a=3n+2, kur n – vesels skaitlis; tad

$$a-2=(3n+2)-2=3n \text{ dalās ar 3.}$$

Tātad ar 3 dalās arī tas no skaitļiem a-2; a; a+2, kurš ir pirmskaitlis. Bet vienīgais pirmskaitlis, kurš dalās ar 3, ir 3.

Tātad pastāv šādas iespējas:

1) a-2=3, tad a=5;

2) a=3, tad a-2=1, un 1 nav pirmskaitlis pēc definīcijas;

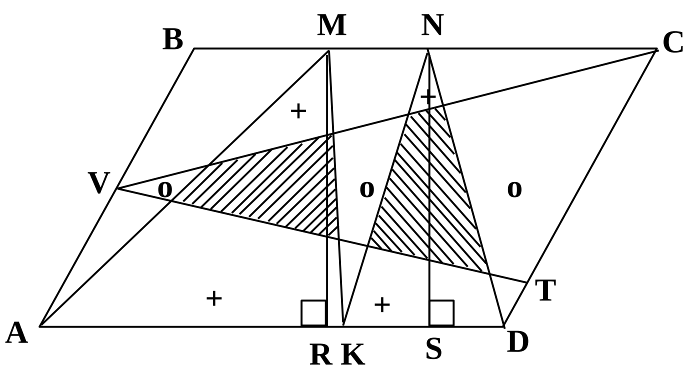
3) a+2=3, kur a=1, arī neder, jo 1 nav pirmskaitlis.

Tātad vienīgā iespēja varētu būt a=5.

Pārbaudot redzam, ka visi skaitļi a-2=3; a=5; a+2=7 tiešām ir pirmskaitļi.

Tātad der atbilde a=5, b=2.

<u>11. Pierādījums</u>. Lai pierādītu, ka paralelogramā ABCD ar krustiņiem atzīmēto daļu laukumu summa ir lielāka nekā ar aplīšiem atzīmēto daļu laukumu summa, ieviešam apzīmējumus, kā parādīts 259. zīmējumā.



259. zīm.

Paralelograma pretējās malas ir paralēlas, tāpēc attālumi starp tām visās vietās ir vienādi.

Tāpēc paralelograma ABCD laukums ir

$$S=AD\cdot h, \text{ kur } MR=NS=h.$$

Savukārt trijstūra ΔAMK laukums ir

$$S_{\Delta AMK} = \frac{1}{2} AK \cdot h$$

un ΔKND laukums ir

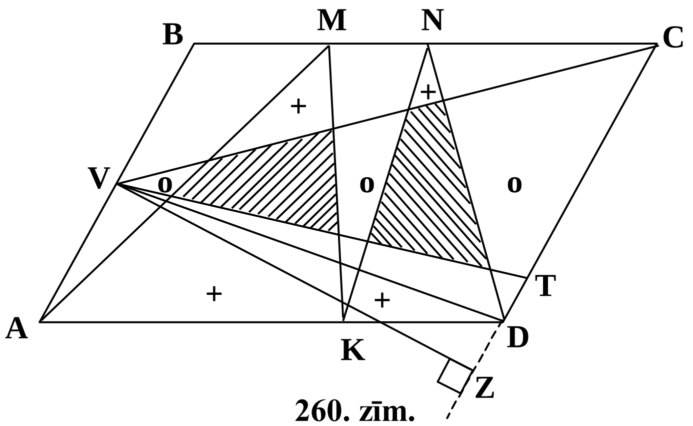
$$S_{\Delta KND} = \frac{1}{2} DK \cdot h.$$

Trijstūru ΔAMK un ΔKND laukumu summa ir

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} AK \cdot h + \frac{1}{2} KD \cdot h = \\ &= \frac{1}{2}(AK + KD) \cdot h = \\ &= \frac{1}{2} AD \cdot h. \end{aligned}$$

Tātad trijstūru ΔAMK un ΔKND laukumu summa S_1 ir puse no paralelograma ABCD laukuma S.

Līdzīgi iegūstam, ka trijstūra ΔDVC laukums ir puse no paralelograma ABCD laukuma S (skat. 260. zīm.).



260. zīm.

Paralelograma ABCD laukums ir

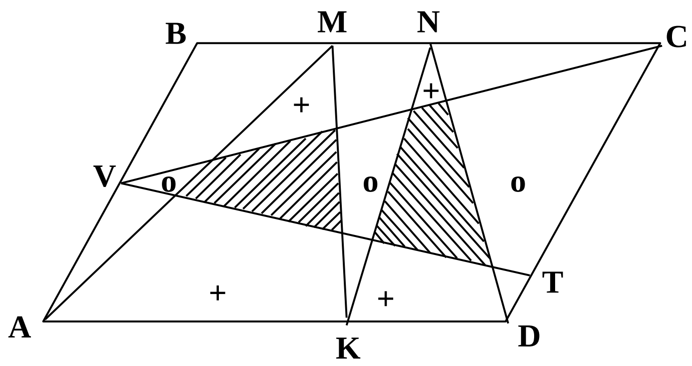
$$S = CD \cdot h, \text{ kur } VZ = h.$$

Savukārt trijstūra ΔDVC laukums ir

$$S_{\Delta DVC} = \frac{1}{2} CD \cdot h.$$

Tā kā trijstūra ΔTVC laukums ir acīmredzami mazāks par ΔDVC laukumu, tad secinām, ka ΔTVC laukums ir mazāks par ΔAMK un ΔKND laukumu summu.

Atņemot gan no ΔTVC laukuma, gan no ΔAMK un ΔKND laukumu summas iesvītrotos laukumus, iegūstam prasīto, ka paralelogramā ABCD (skat. 261. zīm.) ar krustiņiem atzīmēto daļu laukumu summa ir lielāka nekā ar aplīšiem atzīmēto daļu laukumu summa.



261. zīm.

<u>12. Atbilde</u>. Ar vienu svēršanu nevar uzzināt, vai atšķirīgā monēta ir smagāka vai vieglāka par pārejām.

<u>Risinājums</u>. Apskatīsim divus gadījumus.

I Ja uz kausiem neuzliek visas monētas, tad tās, kuras palikušas malā, nekādi neiespaido svēršanas rezultātu, un, ja atšķirīgā monēta palikusi malā, mēs neko par to nevaram pateikt.

II Apskatīsim gadījumu, ja uz kausiem tiek uzliektas visas monētas.

Tad noteikti uz viena kausa ir vairāk monētu nekā uz otra, jo monētu kopējais skaits ir nepāra skaitlis. Viens kauss nosvērsies uz leju, bet tas var notikt gan gadījumā, kad atšķirīgā monēta ir vieglāka, gan gadījumā, ja tā ir smagāka.

Piemēram, ja atšķirība starp monētu masām ir mazāka nekā masa katrai no 1000 vienādajām monētām, tad uz leju noteikti nosvērsies tas kauss, uz kura ir vairāk monētu, neatkarīgi no tā, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām monētām.

Apskatīsim gadījumu ar divām svēršanām.

Aplūkosim vienu no iespējamiem paņēmieniem, kā prasīto var izdarīt.

Pirmajā svēršanā novietojam uz kausiem pa 500 monētām uz katra.

Ja kausi ir līdzsvarā, tad skaidrs, ka atšķirīgā monēta ir palikusi malā, un otrajā svēršanā salīdzināsim to ar jebkuru no citām monētām.

Bet, ja svari pirmajā svēršanā nav līdzsvarā, tad skaidrs, ka atšķirīgā monēta atrodas uz viena no kausiem. Tad otrajā svēršanā uz kausiem novietosim pa 250 monētām no tām, kas pirmajā svēršanā atradās uz smagākā kausa.

Pastāv divas iespējas.

1) Svari ir līdzsvarā.

Tad otrajā svēršanā atšķirīgās monētas uz kausiem nav. Tātad pirmajā svēršanā tā bija uz vieglākā kausa; tātad tā ir vieglāka par pārējām.

2) Svari nav līdzsvarā.

Tad atšķirīgā monēta ir uz viena no kausiem. Tātad pirmajā svēršanā tā bija uz smagākā kausa; tātad tā ir smagāka par pārējām.

Uzdevums atrisināts.

Piezīme. Ievērosim interesantu faktu: mēs esam noskaidrojuši, vai atšķirīgā monēta ir smagāka vai vieglāka par pārējām, vairumā gadījumu pašu monētu neatrodot.

13. Atbilde. Jānītim pašreiz ir 2 gadi, Pēterītim – 1 gads, un Jānīša dzimšanas diena būs ātrāk nekā Pēterīša dzimšanas diena (tad Jānītim būs 3 gadi, bet Pēterītim – joprojām 1 gads).

Risinājums. Parādīsim, ka citu iespēju nav.

Apzīmēsim Pēterīša gadu skaitu ar x; tad Jānītim ir 2·x gadi. Skaidrs, ka x>0.

Apzīmēsim brīdi, kad zēnu gadu skaita attiecība ir 3, ar T.

Apskatīsim trīs gadījumus.

I Apskatīsim gadījumu, kad abiem zēniem dzimšanas dienas ir reizē.

Pieņemsim, ka brīdī T abu zēnu gadu skaits palielinājies par n.

Iegūstam

$$\frac{2x+n}{x+n} = 3;$$

$$2x+n=3x+3n$$

$$x+2n=0.$$

Bet tā nevar būt, jo x+2n>0.

II Apskatīsim gadījumu, kad Pēterītim dzimšanas diena ir ātrāk nekā Jānītim.

Pastāv divi apakšgadījumi.

1) Brīdī T abu zēnu gadu skaits palielinājies vienādi (t. i., T ir pēc kārtējās Jānīša dzimšanas dienas). Šis gadījums reducējas uz pirmo gadījumu.

2) Brīdī T Pēterīša gadu skaits palielinājies par n+1, bet Jānīša – par n.

$$\frac{2x+n}{x+n+1} = 3;$$

$$2x+n=3x+3n+3$$

$$x+2n+3=0.$$

Tā nevar būt.

III Apskatīsim gadījumu, kad Jānītim dzimšanas diena ir ātrāk nekā Pēterītim.

Atkal šķirosim divus apakšgadījumus.

1) Brīdī T abu zēnu gadu skaits palielinājies vienādi (t. i., T ir pēc kārtējās Pēterīša dzimšanas dienas). Šis gadījums reducējas uz pirmo gadījumu.

2) Brīdī T Jānīša gadu skaits palielinājies par n+1, bet Pēterīša – par n.

$$\frac{2x+n}{x+n+1} = 3;$$

$$2x+n+1=3x+3n$$

$$x+2n=1.$$

Tā kā $x \geq 1$, tad x=1 un n=0. Tad Jānītim pašreiz ir 2 gadi, bet Pēterītim – 1 gads.

<u>14. Atbilde</u>. Viena no iespējamām atbildēm ir 825370.

<u>Risinājums</u>. 8+2+5=15 (dalās ar 5);

2+5+3=10 (dalās ar 5);

5+3+7=15 (dalās ar 5);

3+7+0=10 (dalās ar 5).

<u>15. Atbilde</u>. Jā, var.

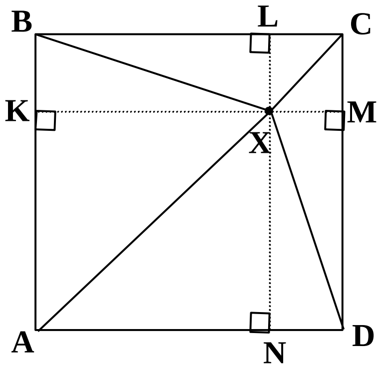
<u>Risinājums</u>. Lai vieglāk varētu to saprast, uzzīmēsim tabulu (skat. 262. zīm.), kur katrs prožektors apzīmēts ar burtu, bet rūtiņās ierakstītie skaitļi norāda lentu krāsas.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A		5	4	3	2	1
B	5		3	2	1	4
C	4	3		1	5	2
D	3	2	1		4	5
E	2	1	5	4		3
F	1	4	2	5	3	

262. zīm.

16. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Uzzīmēsim kvadrātu un izvēlēsimies brīvi izraudzītu punktu X, kurš atrodas kvadrāta iekšpusē (skat. 263. zīm.).



263. zīm.

1) Apskatīsim ΔABX.

Pēc Pitagora teorēmas

$KX^2=XB^2-KB^2$ un $KX^2=AX^2-KA^2$.

Tad $XB^2-KB^2=AX^2-KA^2$ un

$$XB^2-AX^2=KB^2-KA^2 \; \mathbf{(1)}.$$

2) Apskatīsim ΔCXD.

Pēc Pitagora teorēmas

$MX^2=XC^2-CM^2$ un $MX^2=DX^2-DM^2$.

Tad $XC^2-CM^2=DX^2-DM^2$ un

$$XC^2-DX^2=CM^2-DM^2 \; \mathbf{(2)}.$$

Bet $CM^2=KB^2$ un $DM^2=KA^2$, tāpēc no (1) un (2) seko

$XB^2-AX^2=XC^2-DX^2$, no kurienes

$$XB^2+DX^2=AX^2+XC^2.$$

Bet tad skaidrs, ka XA, XB, XC un XD nevar pieņemt vērtības 100, 101, 103 un 105; trīs no šiem skaitļiem ir nepāra, viens – pāra, tāpēc no vienādajām summām AX^2+XC^2 un XB^2+DX^2 viena ir pāra, otra – nepāra; tā nevar būt.

17. Atbilde. Kvadrātā var būt 28 vai 36 figūriņas.

Risinājums. Vispirms apskatīsim, cik katrā kolonnā vai rindiņā var būt figūriņu.

Tā kā teikts, ka katrā rūtiņā var atrasties augstākais viena figūriņa, tad figūriņu daudzums kolonnā (rindiņā) var būt 0; 1; ...; 8.

Pieņemsim, ka nav rindiņas, kurā atrodas x figūriņas, un $1 \leq x \leq 7$.

Atmetot rindiņas ar 0 un 8 figūriņām, paliek taisnstūris, kuram ir 8 kolonnas un 6 rindiņas un kam atkal visās kolonnās figūriņu skaits ir atšķirīgs. Bet tas nav iespējams, jo šim skaitam ir iespējamas tikai 7 dažādas vērtības. Tātad sākotnējā kvadrātā var trūkt rindiņas, kurā ir 0 vai 8 figūriņas.

To, ka šādi izvietojumi tiešām ir iespējami, parāda 264. a) un b) zīmējums. Tātad figūriņu skaits kvadrātā ir 28 vai 36.

x							
x	x						
x	x	x					
x	x	x	x				
x	x	x	x	x			
x	x	x	x	x	x		
x	x	x	x	x	x	x	

a)

x	x	x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x
			x	x	x	x	x
				x	x	x	x
					x	x	x
						x	x
							x

b)

264. zīm.

18. Atbilde. Nē, nevar.

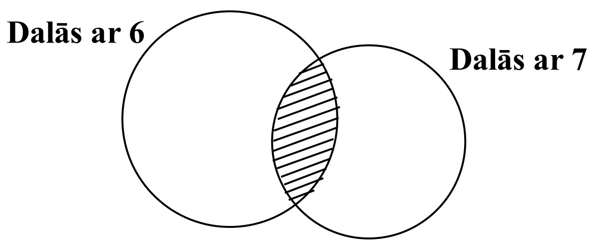
Risinājums. No dotajiem burtiem pavisam var izveidot tieši 28 dažādus burtu pārus, lai katrā pārī ietilptu dažādi burti:

AB;	AC;	AD;	AE;	AF;	AG;	AH;
	BC;	BD;	BE;	BF;	BG;	BH;
		CD;	CE;	CF;	CG;	CH;
			DE;	DF;	DG;	DH;
				EF;	EG;	EH;
					FG;	FH;
						GH.

Tātad visiem pāriem jābūt "izmantotiem" katram tieši vienu reizi.
Paņemsim, piemēram, burtu A. Tas ir jāizvieto vismaz 4 vietās, lai blakus tam varētu nolikt visus citus 7 burtus. Līdzīgi katrs burts ir jāuzraksta vismaz 4 reizes. Bet, tā kā ir 8 dažādi burti, tad jāuzraksta vismaz $4 \cdot 8 = 32$ burti. Bet uz riņķa līnijas ir tikai 28 vietas.
Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

19. Atbilde. Skaitļu, kas dalās ar 6 un nedalās ar 7, ir par 48 vairāk nekā skaitļu, kas dalās ar 7 un nedalās ar 6.

Risinājums. Katrs sestais skaitlis dalās ar 6, katrs septītais - ar 7.
Tā kā 1994:6=332 atl. 2 un 1994:7=284 atl. 6, tad apskatāmajās robežās skaitļu, kas dalās ar 6, ir par 48 vairāk nekā skaitļu, kas dalās ar 7. Abās grupās ir ieskaitīti skaitļi, kas dalās gan ar 6, gan ar 7 (skat. 265. zīm.).



265. zīm.

Atskaitot no abām grupām tos skaitļus, kas dalās gan ar 6, gan ar 7, iegūstam, ka skaitļu, kas dalās ar 6 un nedalās ar 7, ir par 48 vairāk nekā skaitļu, kas dalās ar 7 un nedalās ar 6.

<u>20. Atbilde</u>. Nē, nevar.

<u>Risinājums</u>. Pieņemsim pretējo, ka to var izdarīt. Ciparus apzīmēsim ar alfabēta burtiem:

abcdefg.

Pēc uzdevuma nosacījumiem pieņemsim, ka $(a+b+c)|\,5$ un $(b+c+d)|\,5$.

Tad arī $((a+b+c)-(b+c+d))|\,5$, tātad $(a-d)|\,5$.

Atzīmēsim arī, ka ciparu summas $(d+e+f)|\,5$ un $(e+f+g)|\,5$,

tātad $((d+e+f)-(e+f+g))|\,5$ un $(d-g)|\,5$.

Esam ieguvuši, ka $(a-d)|\,5$ un $(d-g)|\,5$.

Tā kā a, d, g ir dažādi cipari, tad tie viens no otra atšķiras vismaz par 5. Tātad lielākais un mazākais no cipariem a, d, g atšķiras viens no otra vismaz par 10. Bet tas nav iespējams, jo cipari neatšķiras vairāk par 9. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

<u>21. Atbilde</u>. Nē, tas nav iespējams.

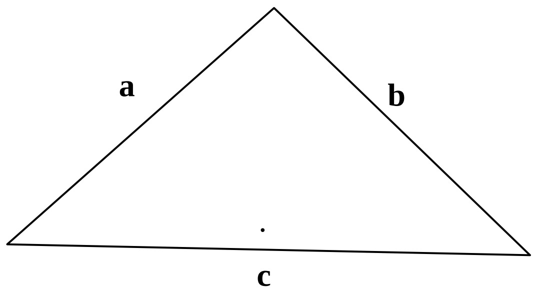
<u>Risinājums</u>. Pieņemsim, ka viena no krāsām ir baltā krāsa. Tā kā no katra prožektora novilkta tieši viena baltā lenta, tad pavisam ir tieši septiņi balto lentu gali. Bet tas nav iespējams, jo katrai lentai ir divi gali, tāpēc kopējam balto lentu galu skaitam jābūt pāra skaitlim.

<u>22. Pierādījums</u>. Mums jāpierāda: ja savienosim izvēlēto punktu ar visām taisnstūra virsotnēm, tad no iegūtajiem 4 nogriežņiem varēs izvēlēties trīs tādus, kuru garumi a, b, c apmierina sakarības (skat. 266. zīm.):

$$a+b>c;$$

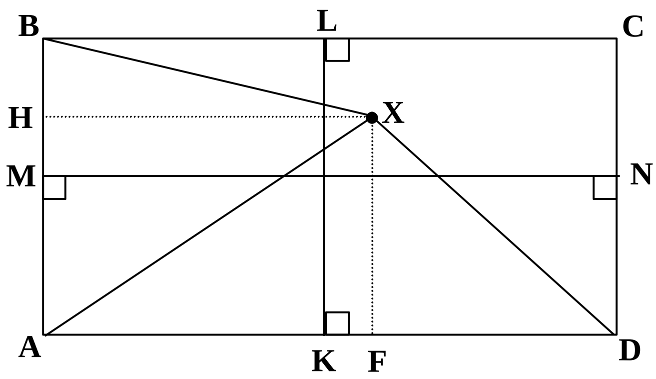
$$b+c>a;$$

$$c+a>b.$$



266. zīm.

Apskatām taisnstūri ABCD. Taisne KL savieno malu DA un CB viduspunktus. Taisne MN savieno malu BA un CB viduspunktus (skat. 267. zīm.).



267. zīm.

KL⊥BC un KL⊥AD, MN⊥BA un MN⊥CD pēc taisnstūra īpašībām. Izvēlēsimies punktu X, kurš atrodas vienā no mazajiem taisnstūrīšiem.

Apskatām ΔABX, kur XH ir augstums, kas novilkts pret malu AB. Tā kā AX≥HB, tad pēc sakarībām taisnleņķa trijstūrī AX≥BX.

Apskatām ΔAXD, kur XF ir augstums, kas novilkts pret malu AD. Tā kā AF≥FD, tad arī AX≥DX.

No tā seko, ka AX ir lielākais (vai viens no lielākajiem, ja tādu ir vairāk) no nogriežņiem AX, BX, XD.

Tāpēc AX+BX>DX un AX+DX>BX.

Apskatīsim diagonāli BD. Tā kā taisnstūra diagonāles garums ir lielākais attālums starp taisnstūra punktiem, tad BD≥AX.

Savukārt no trijstūra nevienādības BX+DX≥DB.

Ja BX+DX>DB, tad BX+DX>AX, un varam izvēlēties AX, BX, DX.

Ja BX+DX=DB, tad X ir taisnstūra ABCD diagonāļu krustpunktā, tad BD>AX un arī BX+DX=DB>AX. Atkal varam izvēlēties AX, BX un DX.

23. Pierādījums. Nevienam taisnstūrim ne garums, ne platums nepārsniedz 8. Izrakstīsim iespējamos taisnstūra laukumus pieaugšanas secībā, par garuma mērvienību pieņemot rūtiņas malu (skat. tabulu 268. zīm.).

Laukums	**Izmēri**
1	1×1
2	1×2
3	1×3
4	1×4, 2×2
5	1×5
6	1×6, 2×3
7	1×7
8	1×8, 2×4
9	3×3
10	2×5

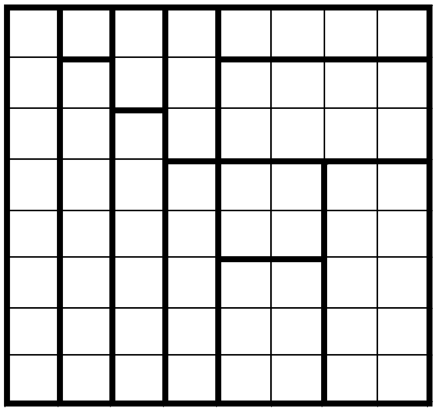
268. zīm.

Redzam, ka jau 13 dažādiem taisnstūriem ar vismazākajiem iespējamiem laukumiem to laukumu summa ir

$1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+2\cdot4+1\cdot5+2\cdot6+1\cdot7+2\cdot8+1\cdot9+1\cdot10=73$, bet $73>64$.

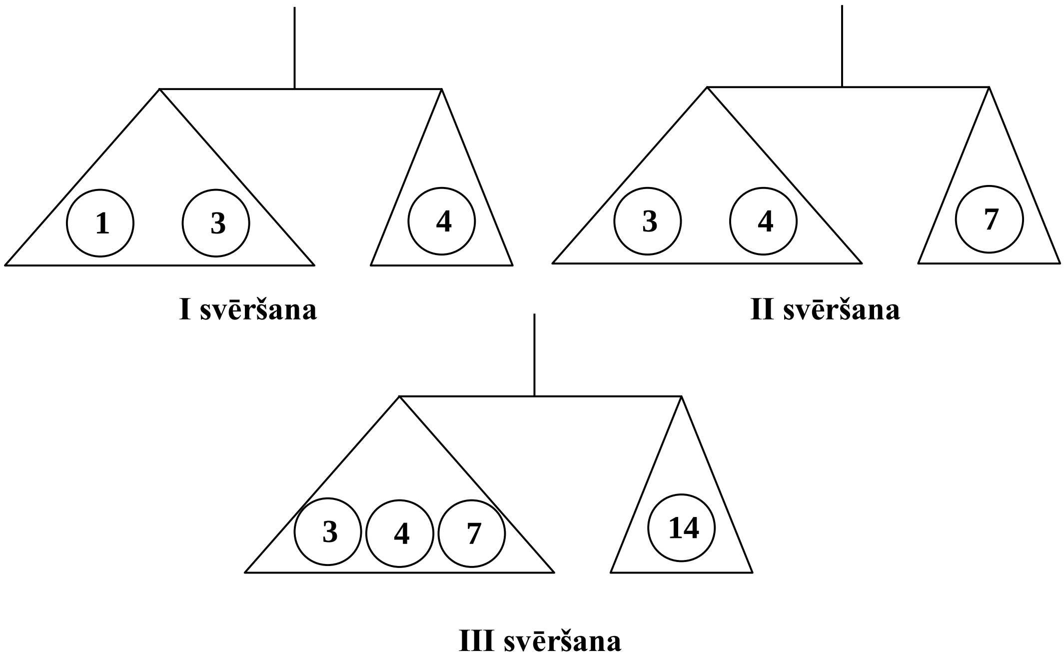
Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

Piezīme. 12 dažādos taisnstūros minēto kvadrātu sagriezt var (skat. 269. zīm.).



269. zīm.

24. Risinājums. Izdarām sekojošas svēršanas (skat. 270. zīm.).



270. zīm.

Ja nepareizais atsvars ir 1, tad svari nav līdzsvarā tikai I svēršanā.

Ja nepareizais atsvars ir 14, tad svari nav līdzsvarā tikai III svēršanā.

Ja nepareizais atsvars ir 3, tad svari nav līdzsvarā visās trijās svēršanās, un kreisais kauss vai nu visas reizes paceļas, vai visas reizes nolaižas.

Ja nepareizais atsvars ir 4, tad svari nav līdzsvarā visās trijās svēršanās, bet kreisais kauss I un II svēršanā uzvedas dažādi.

Ja nepareizais atsvars ir 7, tad svari nav līdzsvarā tikai II un III svēršanā.

Skaidrs, ka sverot iegūto informāciju mēs varam atšķirt minētos gadījumus un noskaidrot nepareizo atsvaru.

25. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vienmēr viens ir pāra skaitlis, bet otrs - nepāra skaitlis. Tāpēc to reizinājums noteikti ir pāra skaitlis, tātad nevar būt vienāds 19941995.

26. Atbilde. Beigās iegūtajai figūrai laukums ir lielāks nekā sākotnējā kvadrāta laukums.

Risinājums. Pieņemsim, ka kvadrāta mala ir a, tad tā laukums ir $S=a^2$. Kvadrāta perimetrs ir vienāds ar tā četru vienādo malu garumu summu.
Perimetram palielinoties par 20%, arī kvadrāta mala palielinājās par 20%. Tātad pēc palielināšanas malas garums ir palielināts par $\frac{1}{5}a$, tātad malas garums ir $1{,}2\cdot a$, bet kvadrāta laukums ir

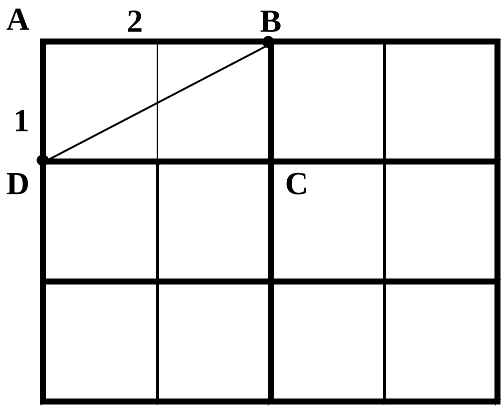
$$S_1=1{,}44\cdot a^2.$$

Tagad samazināsim laukumu par 30%, tad iegūtā kvadrāta laukums ir

$$S_2=0{,}7\cdot 1{,}44\cdot a^2=$$
$$=1{,}008\cdot a^2.$$

Salīdzinot sākotnējā kvadrāta laukumu S ar iegūtā kvadrāta laukumu S_2, secinām, ka jaunā kvadrāta laukums ir par 0,8% lielāks nekā sākotnējā kvadrāta laukums.

27. Pierādījums. Apskatīsim taisnstūri, kura izmēri ir 3×4. Sadalīsim to 6 mazos vienādos taisnstūrīšos (skat. 271. zīm.).



271. zīm.

Apskatīsim vienu mazo taisnstūrīti ABCD, kuram viena mala ir 1, bet otra 2: AB=1, BC=2.

Tad pēc Pitagora teorēmas

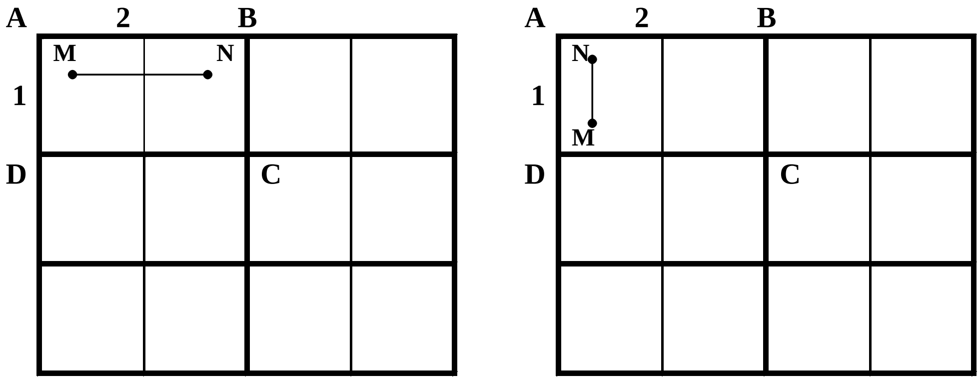
$$BD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Tāds pats diagonāles garums ir arī visiem citiem mazajiem taisnstūrīšiem. Ievērosim, ka $\sqrt{5} < 3.$ Tā kā pavisam 7 punkti izvietoti 6 mazajos taisnstūrīšos, tad vismaz vienā taisnstūrītī (vai nu tā iekšpusē, vai uz robežas) atrodas vismaz 2 no šiem punktiem (ja katrā taisnstūrītī būtu ne vairāk par vienu punktu, tad punktu skaits nepārsniegtu 6). Tā kā lielākais attālums starp taisnstūrīša punktiem ir tā diagonāles garums, tad attālums starp diviem minētajiem punktiem nepārsniedz $\sqrt{5}$, tātad tas ir mazāks par 3.

Lasītājs, kas nezin Pitagora teorēmu, varēja risināt uzdevumu sekojoši.

Tāpat kā iepriekš konstatējam, ka ir 2 punkti M un N, kas pieder vienam taisnstūrītim ABCD, kuram viena mala ir 1, bet otra 2.

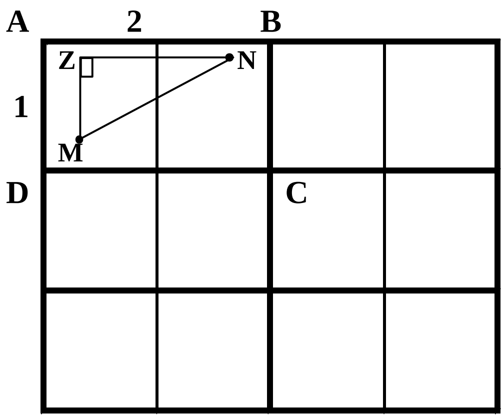
Ja MN ir paralēls kādai taisnstūrīša malai, tad MN nav garāks par šo malu, tātad ir īsāks par 3 (skat. 272. a) un b) zīm.).



a) **b)**

272. zīm.

Ja MN nav paralēls nevienai taisnstūrīša malai, konstruējam taisnleņķa trijstūri MZN ar hipotenūzu MN, kura katetes ir paralēlas taisnstūrīša malām (skat. 273. zīm.).



273. zīm.

Tad pēc trijstūra nevienādības

$$MN<MZ+ZN<1+2=3.$$

<u>28. Atbilde</u>. Mazākā iespējamā lieluma A vērtība ir 7.

<u>Risinājums</u>. Tā kā 21 un 49 dalās ar 7, tad arī 21x un 49y dalās ar 7, tātad arī skaitlis A dalās ar 7. Tas nozīmē, ka skaitļa A vērtība <u>nav mazāka par 7</u>.

Mūsu uzdevums ir atrast tādus x un y, lai skaitļa A vērtība būtu vismazākā iespējamā.

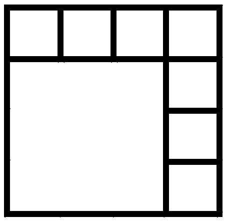
Ievērosim, ka, ja x=-9 un y=4, tad

$$\mathbf{A}=21\cdot(-9)+49\cdot4=$$
$$=-189+196=\mathbf{7}.$$

Šis piemērs parāda, ka skaitļa A vērtība var būt 7. Tātad mazākā iespējamā lieluma A vērtība ir 7.

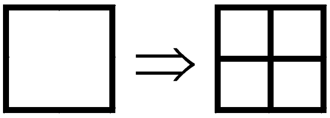
29. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Ievērosim, ka 1994=5+1989=8+3·662. Kā redzams 274. zīmējumā, kvadrātu var sagriezt 8 mazākos kvadrātos.



274. zīm.

Savukārt 275. zīmējumā redzams, kā vienu kvadrātu var sagriezt 4 mazākos kvadrātos, tādējādi palielinot kopējo kvadrātu skaitu par 3.

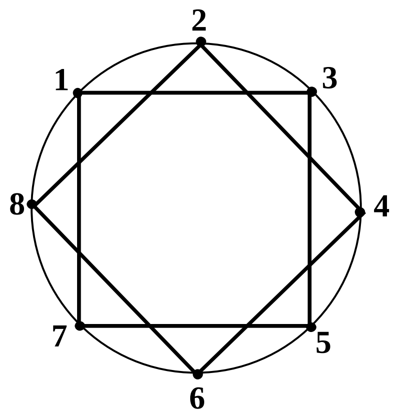


275. zīm.

Sākot ar 274. zīmējumu un 662 reizes veicot 275. zīmējumā parādīto sagriešanas operāciju, iegūstam 1994 kvadrātus.

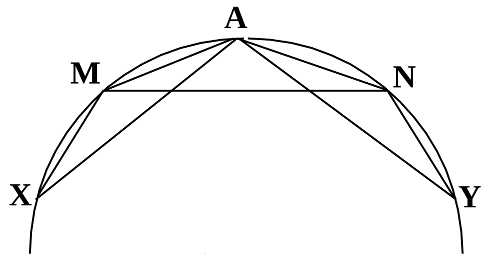
30. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Attēlosim pasažierus ar punktiem un atliksim šos punktus uz riņķa līnijas. Ja divi pasažieri nav pazīstami, savienosim tos ar līniju; ja divi pasažieri ir pazīstami, nesavienosim tos. Aplūkosim 276. zīmējumu.



276. zīm.

To, ka 276. zīmējums apmierina uzdevuma prasības, var pārbaudīt tieši, aplūkojot visus pasažieru trijniekus un visus pasažieru četriniekus. (Tā kā visi pasažieri ir "līdzvērtīgi", var aprobežoties ar "būtiski dažādo" trijnieku un četrinieku pārbaudi.)
Pamatosim 133. zīmējuma pareizību bez izvērstas daudzu gadījumu pārbaudes.
Mēs varam iztēloties, ka punkti, kas attēlo pasažierus, izvietoti uz riņķa līnijas. Parādīsim, ka nav četru pa pāriem nepazīstamu pasažieru.
Pieņemsim no pretējā, ka tādi ir un ka viens no tiem ir A (skat. 277. zīm.).



277. zīm.

Pārējie 3 no apskatāmā pasažieru četrinieka jāizvēlas starp 4 pasažieriem, kas atrodas no A ne tālāk kā 2 vietas pa labi vai pa kreisi. Viens no šiem noteikti ir X vai Y; varam pieņemt, ka tas ir X. Kā redzams, X nav nepazīstams ne ar N, ne ar Y; bet skaidrs, ka vai nu N, vai Y noteikti ietilpst apskatāmajā pasažieru četriniekā.

Tagad izvēlēsimies 3 patvaļīgus pasažierus un parādīsim, ka vismaz 2 no tiem ir savā starpā nepazīstami. Tiešām, lai 2 pasažieri būtu pazīstami, starp tiem uz riņķa līnijas jāatrodas vismaz diviem citiem; tātad trijās atstarpēs starp 3 pasažieriem kopā jāatrodas vismaz 6 citiem, un pasažieru kopskaitam jābūt vismaz 3+6=9 – pretruna.

31. Atbilde. Skaitlis 1004041 ir salikts skaitlis.

Pierādījums. Ievērosim, ka dotais skaitlis izsakāms kā

$$1004041=1\cdot 10^6+4\cdot 10^3+4\cdot 10^1+1;$$

apzīmējot a=10, iegūstam

$$a^6+4\cdot a^3+4\cdot a^1+1.$$

Grupējot locekļus,

$$\begin{aligned}
&a^6+4\cdot a^3+4\cdot a^1+1=\\
&=(a^6+1)+(4\cdot a^3+4\cdot a)=\\
&=((a^2)^3+1^3)+4a(a^2+1)=\\
&=((a^2+1)((a^2)^2-a^2+1))+4a(a^2+1)=\\
&=(a^2+1)(a^4-a^2+1+4a)=\\
&=(a^2+1)(a^4-a^2+4a+1).
\end{aligned}$$

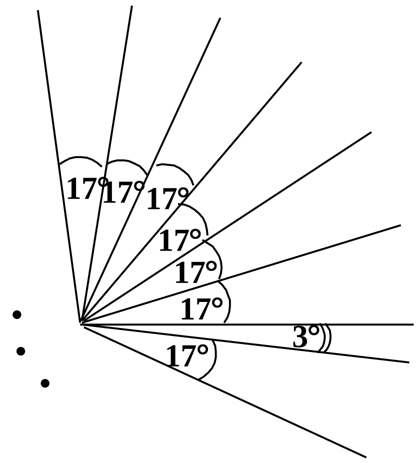
Redzam, ka mūs interesējošais skaitlis

$$\begin{aligned}
&1004041=\\
&=1\cdot 10^6+4\cdot 10^3+4\cdot 10^1+1=\\
&=(10^2+1)(10^4-10^2+4\cdot 10+1)=\\
&=101\cdot 9941
\end{aligned}$$

dalās ar $10^2+1=101$. Tātad tas nav pirmskaitlis.

Piezīme. Minēto sadalīšanu reizinātājos varēja veikt arī bez sākumā izdarītās skaitļa 10 apzīmēšanas ar burtu a; tomēr šī apzīmēšana ļāva operēt ar vienkāršāk uzrakstāmām algebriskām izteiksmēm. Protams, varēja gadīties, ka skaitlis sadalās reizinātājos, bet atbilstošā algebriskā izteiksme – nē; piemēram, $10^2+2=102=2\cdot 51$, bet algebrisku izteiksmi a^2+2 sadalīt reizinātājos nav iespējams.

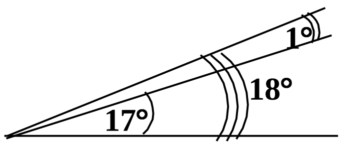
32. Risinājums. Ievērosim, ka 360:17=21, atl. 3. Tas nozīmē, ka, 21 reizi atliekot vienu aiz otra 17° lielus leņķus vienā virzienā, pēdējā leņķa pēdējā mala veidos ar pirmā leņķa pirmo malu 3° lielu leņķi (skat. 278. zīm.).



278. zīm.

Tātad šo 3° lielo leņķi mēs varam konstruēt ar cirkuļa un lineāla palīdzību, izmantojot doto 17° leņķi. Tālāk ievērosim, ka 3°·6=18°, tātad mēs varam konstruēt 18° lielu leņķi.

Atliekot 18° leņķa iekšpusē no vienas malas 17° lielu leņķi, iegūstam 1° lielu leņķi (skat. 279. zīm.).

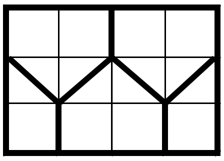


279. zīm.

Atliekot 1° lielu leņķi 16 reizes pēc kārtas dotā 17° lielā leņķa iekšpusē, tas sadalās 17 leņķos, katrs no kuriem 1° liels, tātad 17 vienādās daļās.

Piezīme. Lai veiktu aprakstīto konstrukciju, jāprot no dotā stara dotajā virzienā atlikt dotu leņķi; tā ir viena no skolas ģeometrijas kursa pamatkonstrukcijām.

33. Pierādījums. Sadalīsim taisnstūri ar izmēriem 3×4 piecos daudzstūros, kā parādīts 280. zīmējumā.



280. zīm.

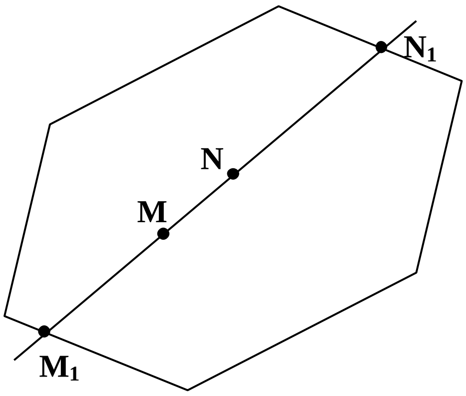
Tā kā taisnstūrī izvietoti 6 punkti, tad vismaz vienā no šīm daļām noteikti atrodas ne mazāk par 2 punktiem (iekšpusē vai uz robežas).

Pierādīsim, ka šie punkti viens no otra nav tālāk par $\sqrt{5}$. Izmantojot Pitagora teorēmu viegli aprēķināt, ka nevienā no daļām attālums starp divām virsotnēm nav lielāks par $\sqrt{5}$ (skat. 107. uzdevuma risinājumu).

Ja mēs prastu pierādīt, ka izliektā daudzstūrī vislielākais attālums starp diviem punktiem ir attālums starp kādām divām tā virsotnēm, uzdevums būtu atrisināts.

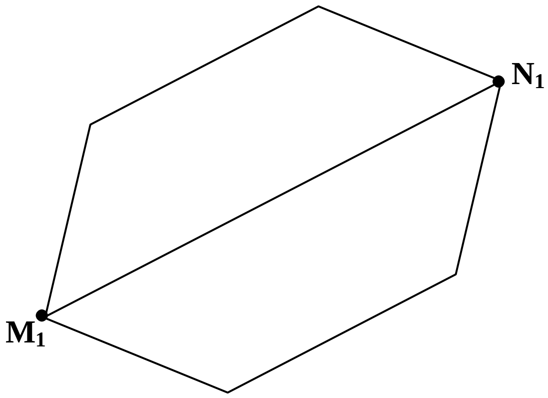
Pierādīsim to.

Pieņemsim, ka M un N pieder izliektam daudzstūrim. Novelkam taisni MN; tā krusto daudzstūra malas punktos M_1 un N_1 - M_1 var arī sakrist ar M vai N_1 var arī sakrist ar N. Jebkurā gadījumā $MN \leq M_1N_1$ (skat. 281. zīm.).



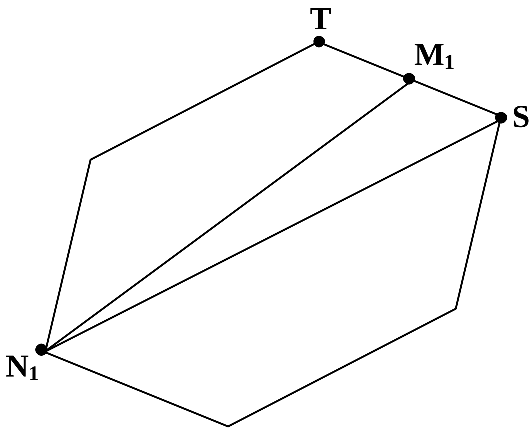
281. zīm.

Ja M_1 un N_1 ir daudzstūra virsotnes (skat. 282. zīm.), jau esam parādījuši, ka MN nepārsniedz attālumu starp kādām divām daudzstūra virsotnēm.



282. zīm.

Pieņemsim, ka M_1 nav daudzstūra virsotne, bet atrodas uz malas TS (skat. 283. zīm.).

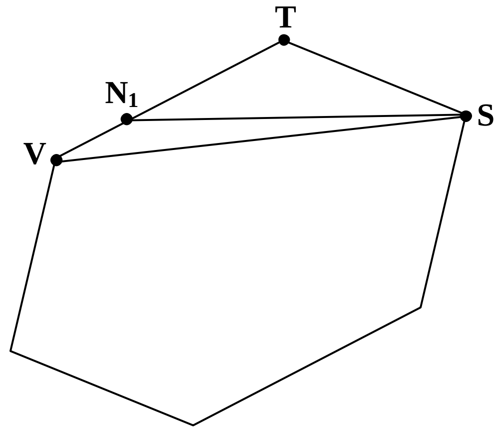


283. zīm.

Ievērosim, ka $\angle N_1M_1T+\angle N_1M_1S=180°$, tāpēc vai nu $\angle N_1M_1T \geq 90°$, vai $\angle N_1M_1S \geq 90°$; varam pieņemt, ka $\angle N_1M_1S \geq 90°$.

Apskatām ΔN_1M_1S. Tā kā tajā $\angle M_1 \geq 90°$, tad tas ir vislielākais šī trijstūra leņķis, un pret to atrodas garākā mala; tāpēc $N_1S > N_1M_1$. Tā kā M_1 varbūt jau sakrita ar kādu virsotni S, varam rakstīt $N_1S \geq N_1M_1$.

Līdzīgi (ja N_1 nav daudzstūra virsotne) varam pabīdīt N_1 uz kādu virsotni V (skat. 284. zīm.); iegūstam $VS \geq N_1S$.



284. zīm.

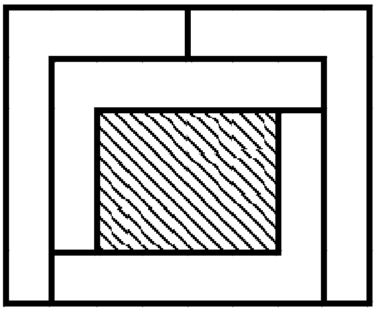
Iegūstam nevienādību virkni $VS \geq N_1S \geq N_1M_1 \geq MN$; no šejienes seko $VS \geq MN$.
Esam pierādījuši, ka MN nav lielāks par attālumu starp kādām divām daudzstūra virsotnēm; noteikti tas nav lielāks par <u>lielāko</u> attālumu starp šī daudzstūra virsotnēm.
Uzdevums atrisināts.

<u>34. Atbilde</u>. Mazākais iespējamais izmantoto kartīšu daudzums ir 16.

<u>Risinājums</u>. Uzrakstīsim uz katras kartītes skaitli 2. Katru piecu kartīšu skaitļu summa būs 10, tātad mazāka par 11. Tā kā visu skaitļu summa ir 32, tad mēs esam paņēmuši tieši 16 kartītes. Pārbaudīsim, vai tas ir mazākais iespējamais kartīšu skaits.
Ja būtu 15 kartītes, tad, sagrupējot tās pa 5, redzam, ka visu skaitļu summa nepārsniegtu 30. (Katrā grupā skaitļu summa ir mazāka par 11; tā kā summa ir naturāls skaitlis, tad tā nepārsniedz 10.) Iegūta pretruna.
Tātad mazākais iespējamais izmantoto kartīšu skaits ir 16.

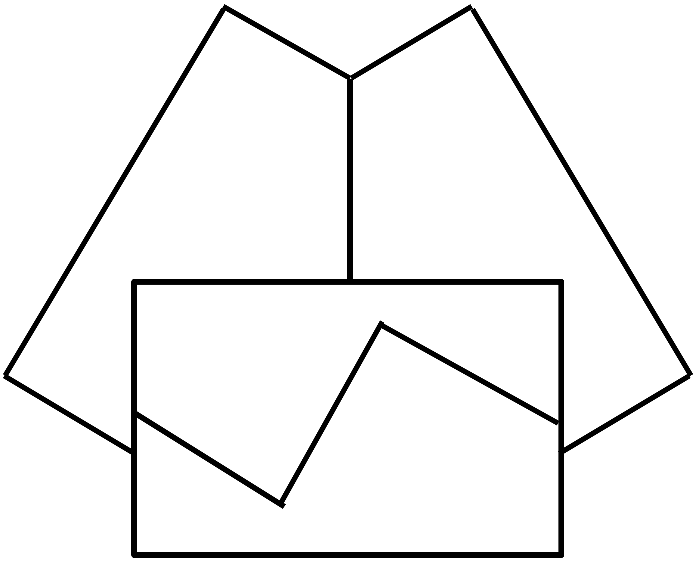
35. Atbilde. Jā, var.

I Risinājums. Skat. 285. zīmējumu. Iesvītrotā daļa ir “caurums”, kas nepieder nevienam no sešstūriem.



285. zīm.

II Risinājums. Skat. 286. zīmējumu.



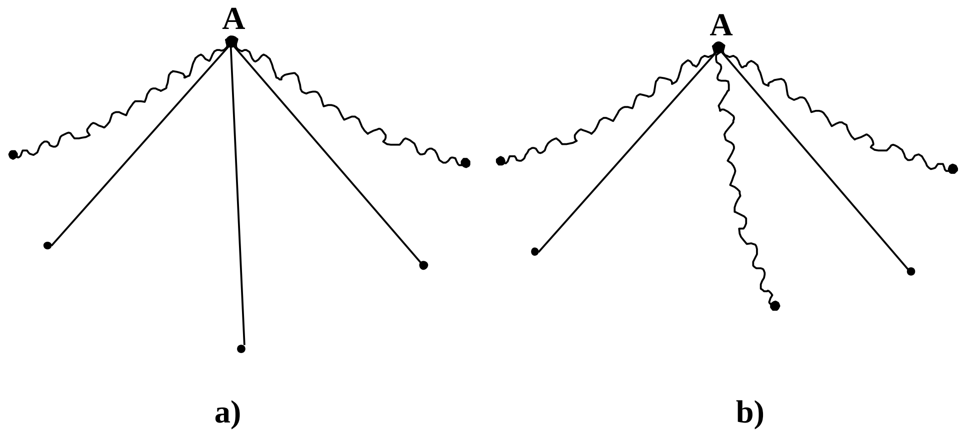
286. zīm.

36. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Vispirms pierādīsim palīgrezultātu, kam ir liela nozīme daudzu kombinatoriska rakstura uzdevumu risināšanā.

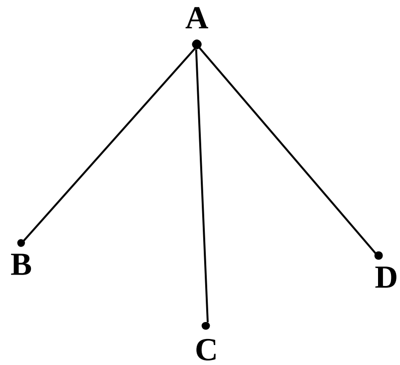
Lemma. Ja katri divi no sešiem punktiem savienoti ar taisnu vai viļņotu līniju, tad vai nu var atrast tādus 3 punktus, kas visi savā starpā savienoti ar taisnām līnijām, vai arī var atrast tādus 3 punktus, kas visi savā starpā savienoti ar viļņotām līnijām.

<u>Lemmas pierādījums</u>. Izvēlamies vienu no punktiem; apzīmējam to ar A. No tā iziet 5 līnijas. Starp tām var atrast vai nu trīs taisnas līnijas (skat. 287. a) zīm.), vai arī trīs viļņotas līnijas (skat. 287. b) zīm.).



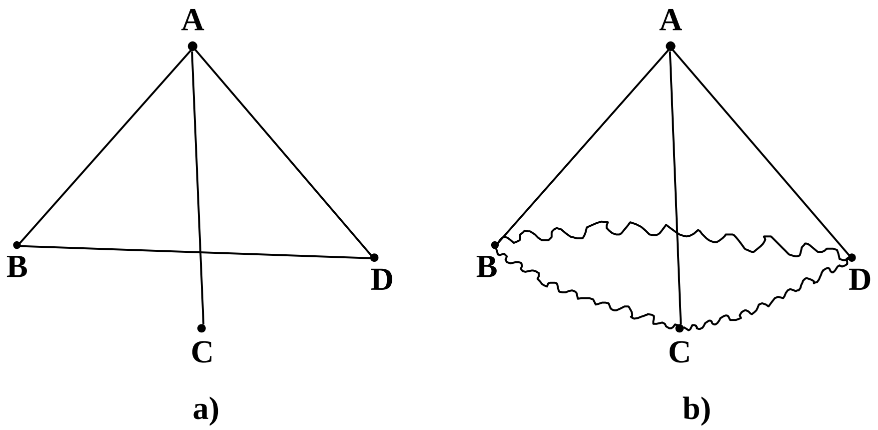
287. zīm.

Apskatām pirmo gadījumu (otrs analizējams tieši tāpat); pieņemsim, ka šīs taisnās līnijas iet uz punktiem B, C, D (skat. 288. zīm.).



288. zīm.

Ja starp kādiem diviem no punktiem B, C, D arī novilkta taisna līnija, tad šie punkti kopā ar punktu A veido meklēto 3 punktu grupu, kurus savieno taisnas līnijas (skat. 289. a) zīm.); pretējā gadījumā punkti B, C, D ir tādi 3 punkti, kurus savieno viļņotas līnijas (skat. 289. b) zīm.).



289. zīm.

Lemma pierādīta.

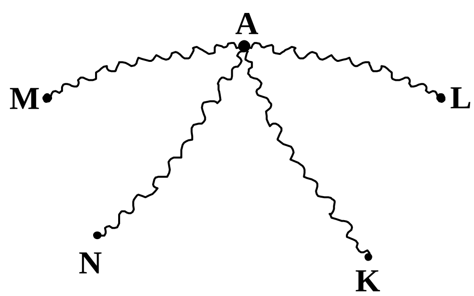
Tagad apskatīsim uzdevuma risinājumu.

Cilvēkus attēlosim ar punktiem; pazīstamiem cilvēkiem atbilstošos punktus savienosim ar viļņotu līniju, nepazīstamiem cilvēkiem atbilstošos punktus – ar taisnu līniju.

a) Izvēlamies patvaļīgu punktu A. No tā iziet 9 līnijas. Starp šīm līnijām ir vai nu vismaz 4 viļņotas līnijas, vai arī vismaz 6 taisnas līnijas – pretējā gadījumā no punkta A neizietu vairāk par 3+5=8 līnijām (pretruna).

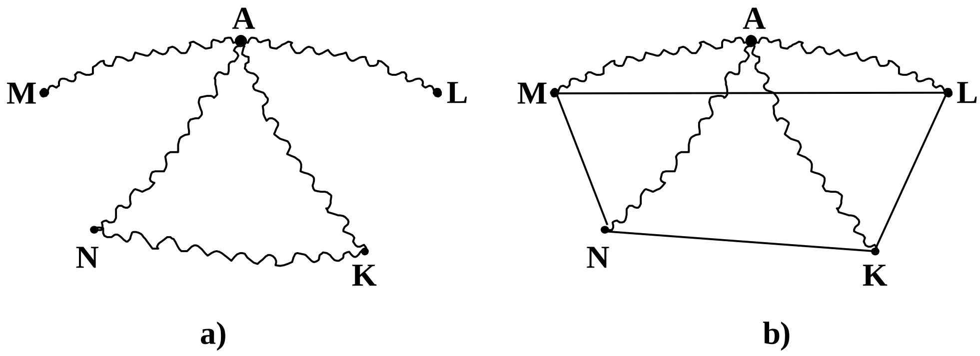
Apskatām abas iespējas.

I No punkta A iziet vismaz 4 viļņotas līnijas (skat. 290. zīm.).



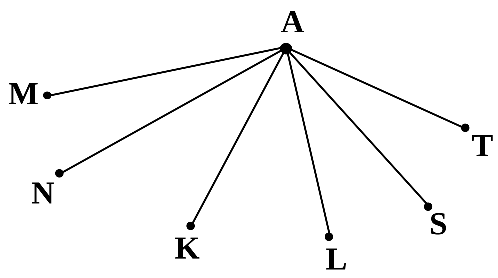
290. zīm.

Ja kaut divus no punktiem M, N, K, L savieno viļņota līnija, tad tie kopā ar punktu A attēlo 3 pa pāriem pazīstamu cilvēku grupu (skat. 291. a) zīm.); pretējā gadījumā punkti M, N, K, L attēlo 4 pa pāriem nepazīstamu cilvēku grupu (skat. 291. b) zīm.).



291. zīm.

II No punkta A iziet vismaz 6 taisnas līnijas (skat. 292. zīm.).

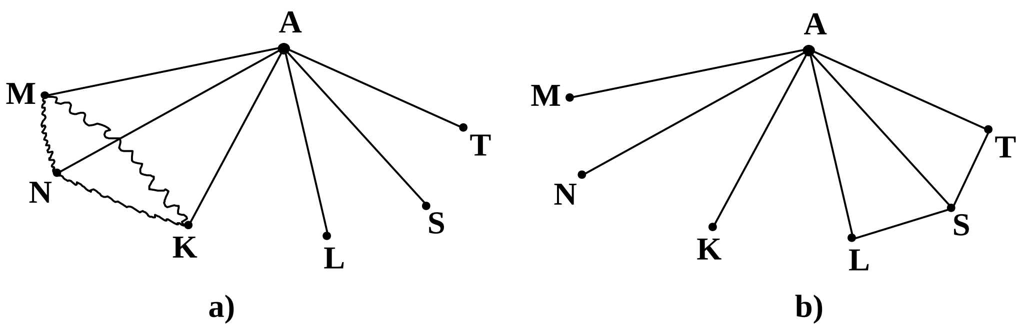


292. zīm.

Apskatām punktus M, N, K, L, S, T un tos savienojošās līnijas.

Pielietojam lemmu.

Ja starp šiem 6 punktiem ir 3 tādi punkti, kurus savieno viļņotas līnijas, tad tie attēlo 3 pa pāriem pazīstamu cilvēku grupu (skat. 293. a) zīm.); ja tā nav, tad tie kopā ar punktu A attēlo 4 pa pāriem nepazīstamu cilvēku grupu (skat. 293. b) zīm.).



293. zīm.

Tātad visos gadījumos var atrast vai nu 3 pa pāriem pazīstamu cilvēku grupu, vai 4 pa pāriem nepazīstamu cilvēku grupu.

b) Atceroties a) daļas risinājumu, redzam: ja starp punktiem atrastos kaut viens tāds, no kura iziet vai nu 4 viļņotas līnijas, vai 6 taisnas līnijas, tad vajadzīgo cilvēku grupu varētu atrast.

Tāpēc atliek aplūkot gadījumu, kad ne no viena punkta neiziet ne 4 viļņotas līnijas, ne 6 taisnas līnijas.

Tā kā no katra punkta iziet kopā 8 līnijas, tad tas varētu būt iespējams tikai vienā gadījumā; ja no katra punkta iziet tieši 3 viļņotas līnijas un 5 taisnas līnijas.

Parādīsim, ka patiesībā šāda situācija nevar pastāvēt.

Pieņemsim pretējo: ir izdevies uzzīmēt 9 punktus un savienot tos ar viļņotām līnijām tā, lai katrs punkts savienots ar tieši trim citiem. Tad pavisam ir tieši $9 \cdot 3 = 27$ viļņoto līniju gali. Bet šim galu skaitam jābūt pāra skaitlim, jo katrai līnijai ir 2 gali; esam ieguvuši pretrunu.

No izklāsta seko: arī 9 pasažieru gadījumā noteikti var atrast vai nu trīs pa pāriem pazīstamus, vai četrus pa pāriem ir nepazīstamus pasažierus.

37. Atbilde. S=33.

Risinājums. Īsti pozitīvi daļskaitļi ir tie, kuru saucēji un skaitītāji ir naturāli skaitļi, turklāt skaitītājs ir mazāks par saucēju.

Sasummēsim atsevišķi daļskaitļus ar saucējiem 2; 3; …; 12 (skaitli 1 par saucēju nevaram ņemt, jo tad neiegūstam īstus daļskaitļus):

1) ja saucējs ir skaitlis 2, iegūstam tikai $\frac{1}{2}$;

2) ja saucējs ir skaitlis 3, tad sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1;$$

3) ja saucējs ir skaitlis 4, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2};$$

4) ja saucējs ir skaitlis 5, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{10}{5}=2;$$

5) ja saucējs ir skaitlis 6, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2};$$

6) ja saucējs ir skaitlis 7, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=\frac{21}{7}=3;$$

7) ja saucējs ir skaitlis 8, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}+\frac{7}{8}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2};$$

8) ja saucējs ir skaitlis 9, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}=\frac{36}{9}=4;$$

9) ja saucējs ir skaitlis 10, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=\frac{45}{10}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2};$$

10) ja saucējs ir skaitlis 11, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}+\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{7}{11}+\frac{8}{11}+\frac{9}{11}+\frac{10}{11}=\frac{55}{11}=5;$$

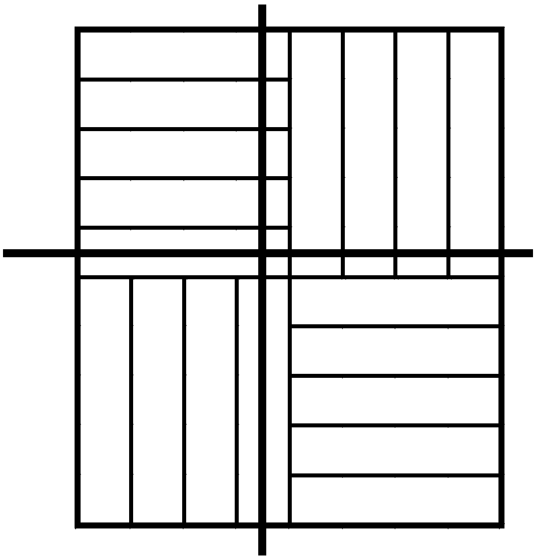
10) ja saucējs ir skaitlis 12, sasummējot iegūstam

$$\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{6}{12}+\frac{7}{12}+\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}+\frac{11}{12}=\frac{66}{12}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}.$$

Tagad saskaitot šīs summas, iegūstam visu īstu pozitīvu daļskaitļu, kuru saucēji nepārsniedz 12, summu S:

$$S=\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+3+3\frac{1}{2}+4+4\frac{1}{2}+5+5\frac{1}{2}=30\frac{6}{2}=33.$$

38. Atbilde. Skat., piemēram, 294. zīmējumu. Katra horizontālā taisne krusto tieši 5 mazos taisnstūrus, bet katra vertikālā taisne krusto tieši 6 mazos taisnstūrus.



294. zīm.

39. Atbilde. Nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Lielākajam no šiem skaitļiem jādalās ar 3 (tā dalījums ar 3 ir mazākais skaitlis, tātad naturāls). Bet lielākā skaitļa ciparu summa ir

$$3 \cdot 1+3 \cdot 2+3 \cdot 3+3 \cdot 4+5=35,$$

tātad nedalās ar 3. Saskaņā ar dalāmības pazīmi ar 3 arī pats lielākais skaitlis nedalās ar 3.

Tātad nevar tā būt, ka viens no šiem skaitļiem ir tieši 3 reizes lielāks par otru.

40. Atbilde. Piemēram, der skaitļi 8; 9; 10; 12.

Risinājums. Tiešām,

9-8=1 un LKD(8; 9)=1;

10-8=2 un LKD(8; 10)=2;

12-8=4 un LKD(8; 12)=4;

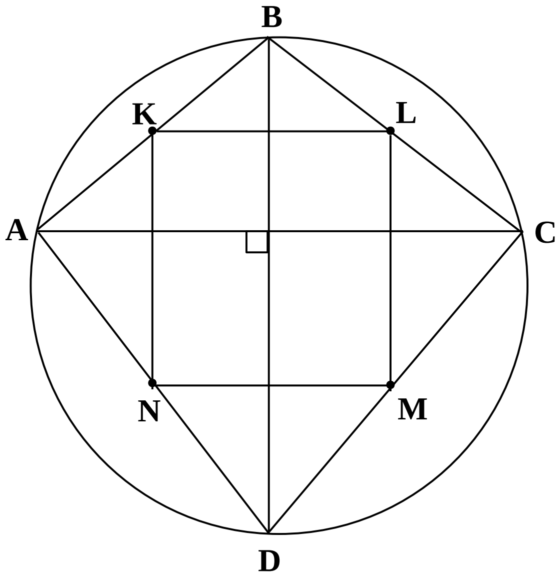
10-9=1 un LKD(10; 9)=1;

12-9=3 un LKD(12; 9)=3;

12-10=2 un LKD(12; 10)=2.

Piezīme. Kā šādus skaitļus varēja atrast sistemātiski, skat. 46. uzdevuma risinājumā.

41. Pierādījums. Uzzīmēsim četrstūri, kura diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Virsotnes četrstūrim apzīmēsim ar punktiem A, B, C, D. Malas AB viduspunktu apzīmēsim ar K, malas BC viduspunktu - ar L, malas CD viduspunktu - ar M, malas DA viduspunktu - ar N (skat. 295. zīm.).



295. zīm.

Tad KN ir ΔABD viduslīnija, tāpēc KN││BD. Līdzīgi spriežam par KL, LM, MN.

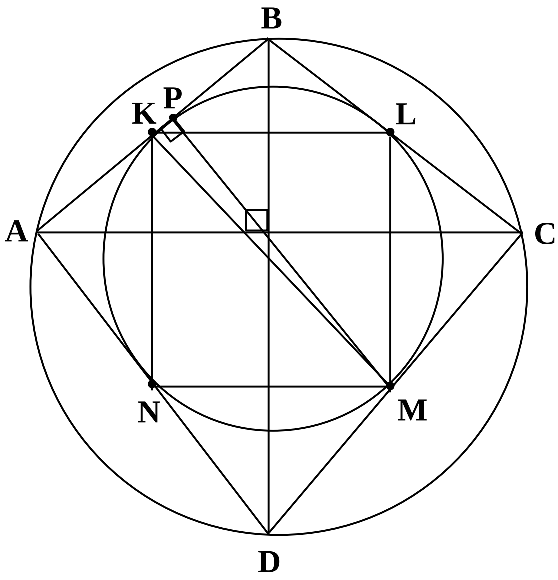
KL ir ΔABC viduslīnija, tāpēc KL││AC;

ML ir ΔBCD viduslīnija, tāpēc ML││BD;

MN ir ΔACD viduslīnija, tāpēc MN││AC.

Redzam, ka nogriežņi, kas savieno četrstūra ABCD malu viduspunktus, paralēli tā diagonālēm.

Tāpēc četri malu viduspunkti ir taisnstūra KLMN virsotnes; ap to var apvilkt riņķa līniju, kuras diametrs ir KM (skat. 296. zīm.).



296. zīm.

Novilksim no punkta M perpendikulu MP pret malu AB. Tā kā no perpendikula pamata P riņķa līnijas diametru – taisnstūra diagonāli – redz taisnā leņķī, tad arī punkts P pieder riņķa līnijai, kura apvilkta ap taisnstūri KLMN.

Līdzīgi pierāda, ka pārējo perpendikulu pamati arī pieder šai riņķa līnijai.

Piezīme. Ievērosim, ka risinājumā netika izmantots fakts par četrstūra ABCD virsotņu A, B, C, D piederību vienai riņķa līnijai.

<u>42. Atbilde</u>. Nē, nevar.

<u>Risinājums</u>. Dotajā tabulā rindas un kolonnas sanumurēsim no 2 līdz 9 (skat. 297. zīm.).

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**
3	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**
4	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**
5	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**
6	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**	**48**	**54**
7	**14**	**21**	**28**	**35**	**42**	**49**	**56**	**63**
8	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**56**	**64**	**72**
9	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**

297. zīm.

Tabulā skaitļi novietoti tā, ka i – tās rindiņas un j – tās kolonnas krustojumā ierakstītais skaitlis ir $i \cdot j$. Piemēram, apskatot 3. rindiņu un 4. kolonnu: $3 \cdot 4=12$, redzam, ka rindiņas un kolonnas krustojumā atrodas skaitlis 12. Tāpēc neizsvītroto skaitļu summa būs vienāda ar $R \cdot K$, kur R - neizsvītroto rindiņu numuru summa, K - neizsvītroto kolonnu numuru summa.

Pierādīsim to.

Pieņemsim, ka neizsvītroto rindiņu numuri ir $r_1, r_2, ..., r_s$, bet neizsvītroto kolonnu numuri ir $k_1, k_2, ..., k_t$.

Rindiņā ar numuru r_1 neizsvītrotie skaitļi palikuši k_1-ā, k_2-ā, ..., k_t-ā kolonnās; tātad tie ir $r_1 \cdot k_1+r_1 \cdot k_2+...+r_1 \cdot k_t=r_1 \cdot (k_1+k_2+...+k_t)=r_1 \cdot K$.

Līdzīgi rindiņās ar numuriem $r_2, r_3, ..., r_s$, bet citās rindiņās neizsvītroto skaitļu vispār nav.

Tātad visu neizsvītroto skaitļu summa ir $r_1 \cdot K + r_2 \cdot K + \ldots + r_s \cdot K = K \cdot (r_1 + r_2 + \ldots + r_s) = R \cdot K$.
Tā kā $R>1$ un $K>1$, tad šī summa nav pirmskaitlis.

43. Atbilde. Autobusā brauc 8 pasažieri.

Risinājums. Varam tūlīt ievērot, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja autobusā brauc 8 cilvēki, kas visi cits citu pazīst.
Tagad pamatosim to, ka citas atbildes neder. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka dažādiem cilvēku septītniekiem ir dažādi kopīgie paziņas.
Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka $x_1, x_2, \ldots, x_7$ pazīst S un $y_1, y_2, \ldots, y_7$ arī pazīst S, turklāt kopas $\{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ un $\{y_1, y_2, \ldots, y_7\}$ nesakrīt. Tad tajās kopā ir vairāk nekā 8 cilvēki, t. i., cilvēkam S ir vismaz 8 paziņas; esam ieguvuši pretrunu.
No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka autobusā brauc vismaz 8 cilvēki.
Apzīmēsim vienu no viņiem ar S, viņa paziņu grupu ar $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$. Pieņemsim, ka bez šiem cilvēkiem autobusā brauc vēl n citi cilvēki. Ja $n \geq 1$, varam izveidot sekojošas dažādas 7 cilvēku grupas:

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & S \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_7, & S \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_6, & x_7, & S \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_5, & x_6, & x_7, & S \\
x_1, & x_2, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & S \\
x_1, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & S \\
x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & S
\end{array}\right\} \textbf{7 grupas;}$$

vēl pa 7 cilvēku grupām varam izveidot līdzīgā ceļā, ņemot S vietā katru no n minētajiem citiem cilvēkiem; varam apskatīt grupu X.
Protams, varētu būt vēl citas 7 cilvēku grupas; tomēr jau pašreiz esam izveidojuši $7 \cdot (n+1)+1$ dažādus cilvēku septītniekus. Katram no tiem ir kāds kopīgs paziņa; saskaņā ar augstāk pierādīto tie visi ir atšķirīgi. Tātad jābūt vismaz $7 \cdot n+8$ cilvēkiem, kas var pildīt kopīgo paziņu lomu; no otras puses, cilvēku skaits ir $1+7+n=n+8$. Tātad $7 \cdot n+8 \leq n+8$, no kurienes $n \leq 0$; tātad $n=0$, un autobusā brauc 8 pasažieri.
44. Atbilde. Nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka tas ir iespējams. Aplūkosim vienu 2×2 rūtiņu kvadrātu (skat. 298. zīm.).

a	b
c	d

298. zīm.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$$a+d+c+b>0,$$
$$a+d+c<0.$$

No šejienes izriet, ka jābūt $b>0$; citādi, negatīvam skaitlim $a+d+c$ pieskaitot b, nevar iegūt pozitīvu skaitli.

Ievietojot "stūrīti" 2×2 rūtiņu kvadrāta iekšienē citās iespējamās pozīcijās, līdzīgi iegūstam, ka $a>0$, $c>0$, $d>0$.

Bet no šīm nevienādībām seko $a+c+d>0$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad pieņēmums, ka uzdevumā minētais kvadrāts iespējams, ir nepareizs.

45. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Lai vieglāk būtu atpazīt zēnus un meitenes, apzīmēsim meitenes ar A; B; C; D; …; I; J, bet zēnus izskatīguma pieaugšanas secībā ar a; b; c; d; …; i; j. Pieņemsim, ka zēni gudrības pieaugšanas secībā izkārtojas kā b; c; d; …; i; j; a.

Pieņemsim, ka jaunieši pirmās 10 dejas dejo tā, kā parādīts 299. zīmējuma tabulā (rūtiņā ierakstīts atbilstošā pāra kopīgās dejas numurs).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
D	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
E	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
F	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
G	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
H	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
I	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

299. zīm.

11. deju jaunieši dejo tāpat kā 1. deju, 12. deju - tāpat kā 2. deju utt. Viegli pārbaudīt, ka uzdevuma nosacījumi izpildās (katru nākošo deju 8 meitenes dejo ar zēnu, kas ir gan gudrāks, gan izskatīgāks par iepriekšējo dejas partneri).

46. Risinājums. Ar burtiem apzīmēti naturāli skaitļi. Uzdevuma risinājums balstīsies uz lemmu.

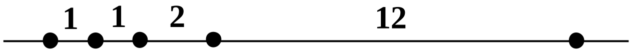
Lemma. Ja a dalās ar d, tad a un a-d lielākais kopīgais dalītājs ir d.

Lemmas pierādījums. Tiešām, saskaņā ar lemmas nosacījumiem gan a, gan a-d dalās ar d. Tātad d ir kāds skaitļu a un a-d lielākais kopīgais dalītājs.

No otras puses, abi skaitļi a un a-d nevar dalīties ar skaitli x, kas lielāks par d, jo arī to starpībai d jādalās ar pašu x. Tātad d ir skaitļu a un a-d lielākais kopīgais dalītājs. Lemma pierādīta.

Tagad atliksim uz skaitļu ass vienu aiz otra nogriežņus ar garumu $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sekojošā veidā: ja $d_1, d_2, \ldots, d_k$ jau atlikti, tad d_{k+1} izvēlamies tā, lai d_{k+1} dalītos ar visiem attālumiem starp jau iepriekš atliktajiem punktiem. Cenšamies ņemt mazāko tādu d_{k+1}.

Ja n=4, iegūstam sekojošu ainu (skat. 300. zīm.).

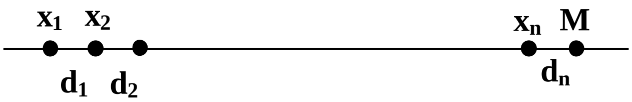


300. zīm.

Uzskatām, ka šie skaitļi attēlo meklējamo k+1 skaitļu relatīvo novietojumu uz skaitļu ass. Vistālāk pa labi novietoto punktu izvēlēsimies uz skaitļu ass tā, lai tā attēlotais skaitlis dalītos ar visiem attālumiem starp atliktajiem punktiem; mūsu gadījumā šim skaitlim jādalās ar 12; 14; 15; 16; 4; 3; 2; 1; varam izvēlēties skaitli 1680. Tad visi 5 atliktie punkti attēlo skaitļus 1664; 1665; 1666; 1668; 1680. Variet pārbaudīt, ka tie apmierina uzdevuma prasības.

Pierādīsim, ka šāda konstrukcija dotu uzdevuma atrisinājumu, arī meklējot 6; 7; 8 utt. skaitļus ar vajadzīgo īpašību.

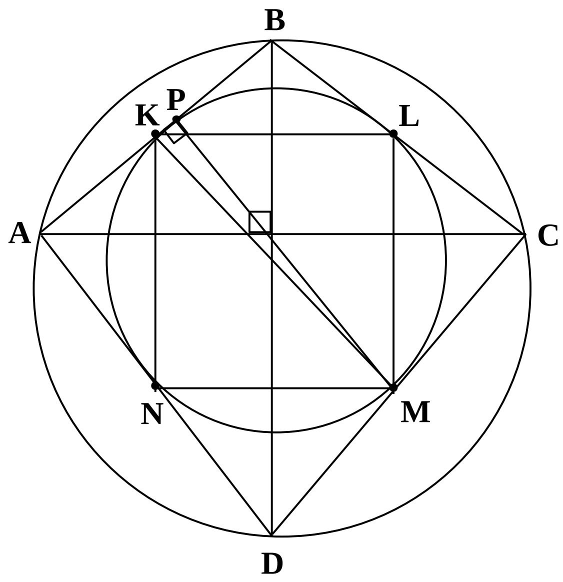
Pieņemsim, ka pēdējais skaitlis M konstruēts aprakstītajā ceļā un tas ir nogriežņu virknes d_1; d_2; …; d_n pēdējais, labējais punkts (skat. 301. zīm.).



301. zīm.

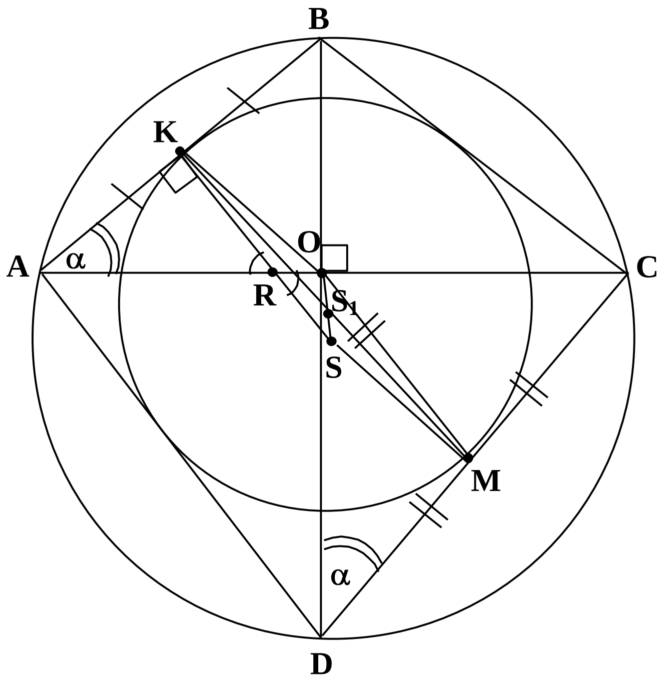
Tad saskaņā ar skaitļa M izvēli un lemmu skaitļa M un jebkura cita skaitļa x_1; x_2; …; x_n lielākais kopīgais dalītājs ir M un šī skaitļa starpība. Skaitlis x_n=M-d_n dalās ar visiem pa kreisi no tā esošajiem attālumiem, jo ar tiem dalās gan M, gan d_n; tāpēc arī x_n un jebkura no skaitļiem x_1; x_2; …; x_{n-1} starpība ir to lielākais kopīgais dalītājs. Līdzīgi turpinot, pārbaudām, ka citas uzdevuma prasības ir izpildītas.

47. Pierādījums. Apskatīsim četrstūri ABCD, kura virsotnes atrodas uz riņķa līnijas un diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras, bet tā malu AB, BC, CD un DA viduspunkti K, L, M un N un to perpendikulu pamati, kas vilkti pret pretējām malām, atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. 302. zīm.).



302. zīm.

Ap četrstūri ABCD apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar S, ap taisnstūri KLMN apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar S_1, bet četrstūra ABCD diagonāļu krustpunktu – ar O (skat. 303. zīm.).



303. zīm.

Iedomāsimies uz brīdi, ka esam pierādījuši: <u>SKOM ir paralelograms</u>. Tad tā diagonāļu viduspunkti sakrīt, jo paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm. Jaunās riņķa līnijas centrs atrodas KM viduspunktā (skat. 41. uzdevuma risinājumu), ko vajadzēja pierādīt. Atliek pierādīt pasvītroto apgalvojumu: <u>SKOM ir paralelograms</u>.

Apzīmējam $\angle BAO=\alpha$; tad arī $\angle ODC=\alpha$, jo $\angle BAO=\frac{1}{2}\cup BC$ un arī $\angle ODC=\frac{1}{2}\cup BC$

kā riņķa līnijā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku.

Tad $\angle KRA=90°-\alpha$ un arī $\angle ORS=90°-\alpha$, jo $\angle ORS=\angle KRA$ kā krustleņķi.

Trijstūris CDO ir taisnleņķa; tā apvilktās riņķa līnijas centrs ir hipotenūzas viduspunktā M. Tāpēc MO=MD; tātad ΔOMD ir vienādsānu, un $\angle MOD=\alpha$. Tad $\angle ROM=\angle ROD+\angle MOD=90°+\alpha$.

Iegūstam, ka $\angle ORS+\angle ROM=(90°-\alpha)+(90°+\alpha)=180°$. Bet $\angle ORS$ un $\angle ROM$ ir iekšējie vienpusleņķi pie taisnes AC, ko krusto taisnes KS un OM. Tā kā to summa ir 180°, tad $OM \parallel KS$.

To ka $OK \parallel SM$, pierāda līdzīgi. Tā kā četrstūra SKOM pretējās malas pa pāriem paralēlas, tad SKOM ir paralelograms, ko arī vajadzēja pierādīt.

48. Pierādījums. **I** Izvēlēsimies vienu bērnu X un apzīmēsim tā vectēvus ar A un B. Ja A ir visu bērnu vectēvs, tad varam ņemt jebkurus 14 bērnus.

II Pieņemsim, ka ir tāds bērns Y, kuram A nav vectēvs. Lai bērniem X un Y būtu kopīgs vectēvs, bērnam Y viens no vectēviem ir B; otru bērna Y vectēvu apzīmēsim ar C.

Tālāk šķirojam divus gadījumus.

1) Pieņemsim, ka kādam bērnam Z ir vēl kāds cits vectēvs D.

Lai Z būtu kopīgs vectēvs gan ar X, gan ar Y, viņa otrajam vectēvam jābūt B. Iegūstam tabulā attēloto situāciju (skat. 304. zīm.).

Bērns	Vectēvs
X	A, B
Y	C, B
Z	D, B

304. zīm.

Tagad skaidrs, ka katram citam bērnam viens no vectēviem ir B (citādi viņam nevar būt kopīgs vectēvs gan ar X, gan ar Y, gan ar Z). Tāpēc B ir visu bērnu vectēvs, un mēs varam izvēlēties jebkurus 14 bērnus.

2) Neviena cita vectēva bez A, B un C nav nevienam bērnam, t. i., pavisam ir tikai 3 vectēvi.

Pieņemsim, ka katrs bērns uzdāvina katram savam vectēvam pa ziedam. Pavisam tiek uzdāvināti $20\cdot2=40$ ziedi. Tie kaut kā sadalās starp 3 vectēviem. Tā kā $13\cdot3=39<40$, tad vismaz viens no vectēviem saņem vairāk nekā 13 ziedus, t. i. vismaz 14 ziedus. Šim vectēvam arī ir vismaz 14 mazbērnu.

49. Atbilde. Jā. Tādi, piemēram, ir skaitļi 51; 52; 53; …; 99; 100.

Risinājums. Paša lielākā skaitļa attiecība pret pašu mazāko ir

$$\frac{100}{51}<\frac{100}{50}=2.$$

Tātad, ja divi no šiem skaitļiem ir a un b, un a<b, tad

$$\frac{b}{a}\le\frac{100}{51}<2.$$

Bet, lai b dalītos ar a, jābūt

$$\frac{b}{a} \geq 2$$

(dalījums ir vesels skaitlis, kas lielāks par 1).

Tātad neviens no izvēlētajiem skaitļiem nedalās ne ar vienu citu izvēlēto.

50. Atbilde. S=19980.

Risinājums. Katrs no apskatāmajiem cipariem dažos skaitļos parādās kā simtu cipars, dažos skaitļos – kā desmitu cipars, dažos– kā vienu cipars.

Aplūkosim, cik skaitļos cipars 1 parādās kā simtu cipars. Šie skaitļi ir formā $\overline{1ab}$, kur a un b – kaut kādi divi no cipariem 2; 3; 4; 5. Viegli saprast, ka ir 12 šādi skaitļi:

123, 132, 124, 142, 125, 152, 134, 143, 135, 153, 145, 154.

Līdzīgi cipars 1 parādās 12 reizes gan kā desmitu cipars, gan kā vienu cipars. Tāpēc visu vieninieku "ieguldījumu" summa ir

$$1 \cdot 12 \cdot (100+10+1)=$$
$$=12 \cdot 111=$$
$$=1332.$$

Līdzīgi varam aprēķināt visu citu ciparu "ieguldījumu" summu. Tāpēc meklējamā visu skaitļu summa ir

$$S=12 \cdot 111 \cdot (1+2+3+4+5)=$$
$$=1332 \cdot 15=$$
$$=19980.$$

51. Atbilde. Starp apskatāmajiem skaitļiem vienlaicīgi var būt 0, 1 vai 2 pozitīvi skaitļi.

Risinājums. Ja a=b=c, tad pozitīvu skaitļu nav, jo

$$(a-b)\cdot(a-c)=0,$$
$$(b-a)\cdot(b-c)=0 \text{ un arī}$$
$$(c-a)\cdot(c-b)=0$$

(0 ir nenegatīvs skaitlis).

Ja, piemēram, a=b=1 un c=2, tad ir viens pozitīvs skaitlis

$$(c-a)\cdot(c-b)=1\cdot 1=1.$$

Ja a=1, b=2 un c=3, tad ir divi pozitīvi skaitļi

$$(a-b)\cdot(a-c)=(-1)\cdot(-2)=2 \text{ un}$$
$$(c-a)\cdot(c-b)=2\cdot 1=2.$$

Atliek noskaidrot, vai visi trīs skaitļi var būt pozitīvi. Ievērosim, ka to reizinājumi ir

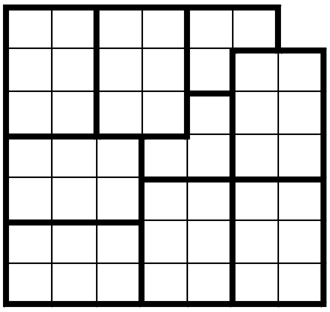
$$(a-b)\cdot(a-c)\cdot(b-a)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\cdot(c-b)=-(a-b)^2\cdot(a-c)^2\cdot(b-c)^2;$$

tas nevar būt pozitīvs, jo ir vai nu nulle (ja kādi divi no skaitļiem a, b, c savā starpā ir vienādi), vai negatīvs. Bet, ja visi trīs skaitļi a-b)·(a-c), (b-a)·(b-c), (c-a)·(c-b) būtu pozitīvi, tad to reizinājumam jābūt pozitīvam. Tātad tie visi trīs nevar būt pozitīvi.

Tātad starp apskatāmajiem skaitļiem vienlaicīgi var būt 0, 1 vai 2 pozitīvi skaitļi.

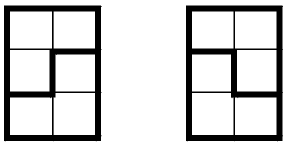
52. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Skat., piemēram, 305. zīmējumu, kur kvadrātu, kas sastāv no 7×7 rūtiņām un no kura izgriezta viena stūra rūtiņa, var sagriezt 7 taisnstūros ar izmēriem 2×3 un 2 "stūrīšos".



305. zīm.

Katru no 7 taisnstūriem ar izmēriem 2×3 var sagriezt 2 "stūrīšos" divos dažādos veidos (skat. 306. a) un b) zīm.); tādējādi iegūstam $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^7=128$ dažādus sadalījumus.



a) **b)**

306. zīm.

53. Atbilde. Mazākais iespējamais kvadrātā ierakstīto dažādo burtu skaits ir 4 (skat. 307. zīm.).

a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
c	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
c	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
c	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
c	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
c	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**	**c**	**d**

307. zīm.

Risinājums. Ievērosim, ka tādās četrās rūtiņās, kādas parādītas 308. zīmējumā, jābūt ierakstītiem dažādiem burtiem, jo katras divas no tām saskaras vai nu ar malu, vai ar stūri. Tātad nepieciešami vismaz 4 dažādi burti.

a	**b**
d	**c**

308. zīm.

54. Atbilde. Reizinājuma pēdējais nenulles cipars ir pāra skaitlis.

Risinājums. Iedomāsimies, ka izteiksmē $S=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1994\cdot 1995$ visi reizinātāji sadalīti pirmskaitļu reizinājumos. Iegūtā izteiksme satur kaut kādu daudzumu divnieku, kaut kādu daudzumu piecinieku un vēl citus pirmreizinātājus. Skaidrs, ka divnieku ir vairāk. Apvienojot pāros katru piecinieku ar kādu divnieku, iegūstam zināmu skaitu reizinātāju 10; visu pāri palikušo pirmskaitļu reizinājums R ir pāra skaitlis, jo daži divnieki netika apvienoti pāros ar pieciniekiem. Tātad reizinājuma R pēdējais cipars ir pāra cipars. Bet reizinājuma R pēdējais cipars acīmredzot ir pēdējais skaitļa S nenulles cipars.

Tātad reizinājuma $S=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1994\cdot 1995$ pēdējais nenulles cipars ir pāra skaitlis.

55. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Iedomāsimies, ka esam izvēlējušies 51 skaitli. Izsacīsim katru no tiem kā divnieka pakāpes un kāda nepāra skaitļa reizinājumu, piemēram:

$$30=2^1\cdot 15$$

$$45=2^0\cdot 45$$

$$48=2^4\cdot 3$$

$$8=2^3\cdot 1 \text{ utt.}$$

Tādējādi katrs no 51 skaitļa izsacīts formā

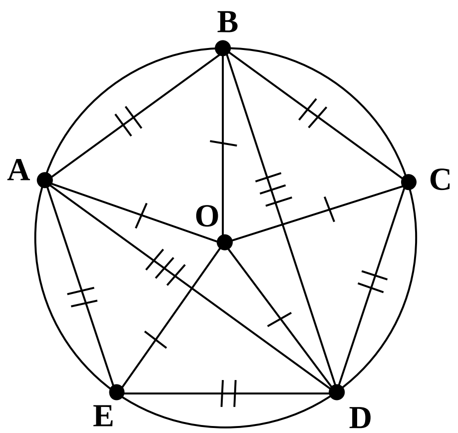
$$x_i = 2^{n_i}\cdot k_i,$$

kur n_i=0; 1; 2; ..., bet k_i=1; 3; ...; 99.

Skaitlis k_i var pieņemt tikai 50 dažādas vērtības, bet izvēlēts ir 51 skaitlis. Tātad diviem no izvēlētajiem skaitļiem – piemēram, x_i un x_j - lielumi k_i un k_j ir vienādi, t. i., tiem ir viens un tas pats lielākais nepāra dalītājs. Tad tie atšķiras vienīgi ar divnieka pakāpēm, un tas skaitlis, kuram šī divnieka pakāpe ir lielāka, dalās ar otru.

56. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Šādas punktu sistēmas piemērs ir regulāra piecstūra virsotnes un tā centrs (skat. 309. zīm.).



309. zīm.

Pamatosim to.

I Ja starp 3 izvēlētajiem punktiem viens ir centrs O, tad punkta O attālumi līdz abiem pārējiem punktiem ir vienādi; tātad šie 3 izvēlētie punkti ir vienādsānu trijstūra virsotnes, un vienādās malas "satiekas" punktā O.

II Ja starp 3 izvēlētajiem punktiem nav punkta O, tad tie visi ir regulāra piecstūra virsotnes. Šķirojam divus apakšgadījumus.

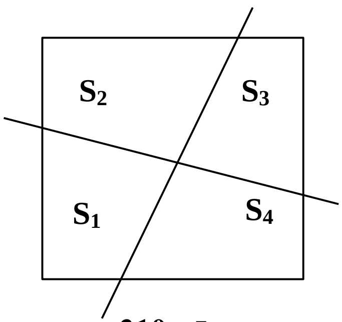
1) Punkti ir 3 pēc kārtas ņemtas virsotnes.

Tad vidējā no tām ir vienādos attālumos no abām pārējām virsotnēm un esam ieguvuši vajadzīgo.

2) Punkti nav 3 pēc kārtas ņemtas virsotnes.

Tad divi no tiem ir blakus virsotnes, bet trešais punkts neatrodas blakus nevienam no tiem, piemēram, A, B un D. Tā kā diagonāles AD un BD ir vienādas, tad arī ΔADB ir vienādsānu trijstūris.

57. Pierādījums. Ja divas taisnes dala kvadrātu četrās daļās, tad tās krustojas kvadrāta iekšpusē. Ja šo četru daļu laukumi ir vienādi, tad katra no taisnēm dala kvadrāta laukumu uz pusēm (skat. 310. zīm.).



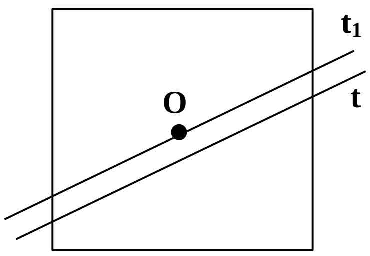
310. zīm.

Tātad

$$S_1+S_2=S_3+S_4.$$

Pierādīsim, ka katra taisne, kas dala kvadrāta laukumu uz pusēm, iet caur tā centru O. Pieņemsim no pretējā, ka taisne t, kas dala kvadrāta laukumu uz pusēm, neiet caur tā centru O.

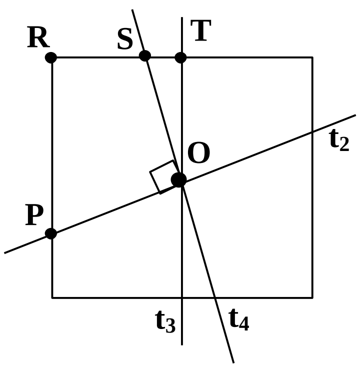
Novilksim caur kvadrāta centru O taisni t_1 paralēli taisnei t. Tā kā punkts O ir kvadrāta simetrijas centrs, tad taisne t_1 dala kvadrātu divās vienādās daļās, tātad arī divās daļās ar vienādiem laukumiem (skat. 311. zīm.).



311. zīm.

Bet, pārbīdot taisni t_1 pašu sev paralēli, līdz tā sasniedz taisni t, augšējās daļas laukums palielinās, bet apakšējās daļas – pamazinās; tātad taisne t vairs nevar dalīt kvadrāta laukumu divās vienādās daļās. Iegūta pretruna.

Tātad abas uzdevuma nosacījumos minētās taisnes t_2 un t_3 iet caur kvadrāta centru O (skat. 312. zīm.).



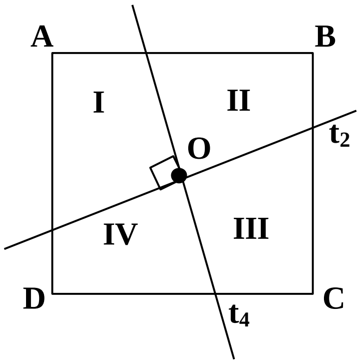
312. zīm.

Pierādīsim, ka taisnes t_2 un t_3 ir savstarpēji perpendikulāras.

Pieņemsim no pretējā, ka taisnes t_2 un t_3 nav savstarpēji perpendikulāras.

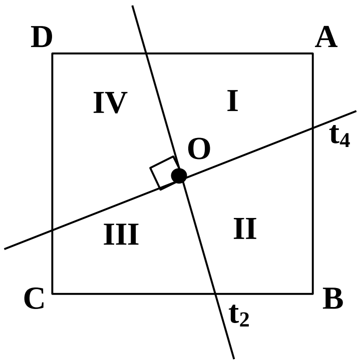
Novilksim caur kvadrāta centru O taisni t_4 perpendikulāri taisnei t_2. Ja mēs prastu pierādīt, ka <u>taisnes t_2 un t_4 dala kvadrātu 4 daļās ar vienādiem laukumiem</u>, būtu iegūta pretruna: tiešām abu daļu PRSO un PRTO laukumi nevar būt vienādi ar ceturtdaļu no kvadrāta laukuma, jo tās abas atšķiras ar ΔOST. Tātad mūsu pieņēmums, ka taisnes t_2 un t_3 nav savstarpēji perpendikulāras, būtu nepareizs. Atliek pierādīt šo apgalvojumu.

Pagriezīsim kvadrātu (skat. 313. zīm.) ap centru O par 90° pulksteņa rādītāja virzienā.



313. zīm.

Taisne t_2 attēlosies par taisni t_4, bet taisne t_4 - par taisni t_2. Punkts A attēlosies par punktu B (jo OA=OB un $\angle AOB=90°$), līdzīgi punkts B attēlosies par punktu C, punkts C attēlosies par punktu D, punkts D attēlosies par punktu A; tātad kvadrāts ABCD attēlosies pats par sevi (skat. 314. zīm.).



314. zīm.

No šiem faktiem seko, ka I daļa attēlosies par II daļu, II daļa attēlosies par III daļu, III daļa attēlosies par IV daļu, IV daļa attēlosies par I daļu; tātad daļas I, II, III un IV visas ir vienādas. Tātad tām ir vienādi laukumi.

Vajadzīgais pierādīts.

58. Atbilde. Jā, var.

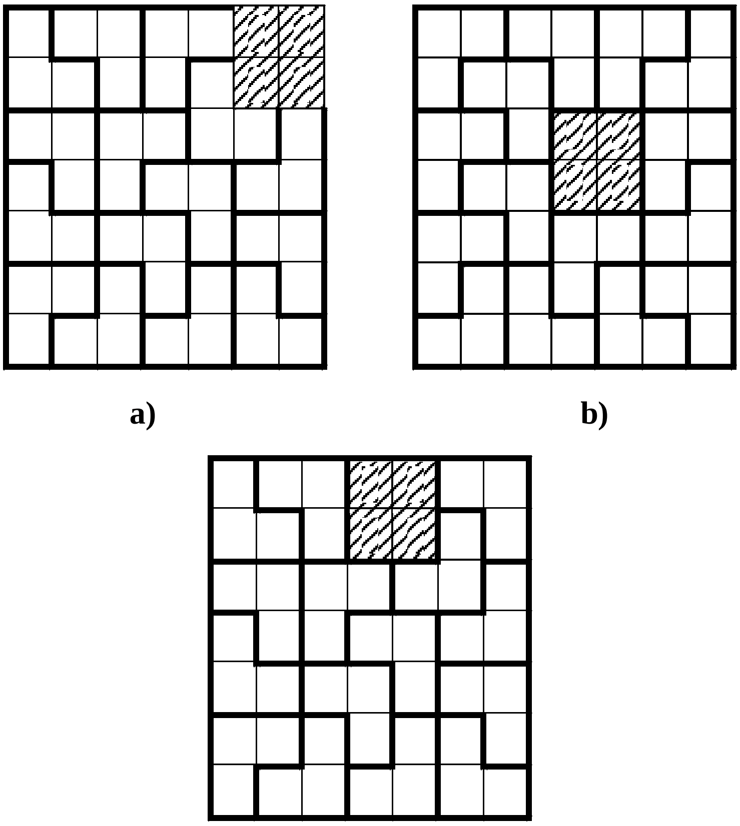
Pierādījums. Pierādīsim, ka kvadrātu, kas sastāv no 7×7 rūtiņām un no kura izgriezta jebkura viena rūtiņa, var sagriezt no trim rūtiņām sastāvošos "stūrīšos". Vispirms ievērosim, ka vajadzīgais būs pierādīts, ja parādīsim: sagriešanu var izdarīt, ja izgriezta viena no 315. zīmējumā parādītājām rūtiņām.

			x	x	x	x
			x	x	x	
			x	x		
			x			

315. zīm.

Tiešām, visi pārējie gadījumi reducējas uz vienu no šiem ar pagriešanas vai atspoguļošanas palīdzību.

Tagad apskatīsim 316. a), b) un c) zīmējumu.



a) **b)**

c)

316. zīm.

Katrs no tajā redzamajiem sadalījumiem a), b) un c) parāda, kā sagriezt kvadrātu “stūrīšos”, ja no tā izgriezta jebkura no iesvītrotajām rūtiņām, jo pārējās 3 iesvītrotās rūtiņas kopā arī veido vienu “stūrīti”.
Atliek ievērot, ka 316. a), b) un c) zīmējumā trīs iesvītrotie kvadrāti pārklāj visas rūtiņas, kas atzīmētas 315. zīmējumā. Tātad 316. zīmējums aptver visus analizējamos gadījumus.

59. Atbilde. Visi pulksteņa rādītāji sakrīt 3 reizes diennaktī.

Pierādījums. Skaidrs, ka tas notiek plkst. $00h\,00min$, plkst. $12h\,00min$ un plkst. $24h\,00min$.
Pierādīsim, ka citu šādu brīžu nav.
Atradīsim vispirms, kuros brīžos sakrīt pulksteņa stundu un minūšu rādītāji laikā starp plkst. $00h\,00min$ un plkst. $12h\,00min$.

Apzīmēsim laiku sekundēs no plkst. $00h\,00min$ līdz sakrišanas brīdim ar t. Tad pulksteņa minūšu rādītājs pavirzījies par $\frac{t}{60}$ iedaļām, bet pulksteņa stundu rādītājs pavirzījies par $\frac{t}{12\cdot 60}=\frac{t}{720}$ iedaļām, jo stundu rādītājs kustas 12 reizes lēnāk nekā minūšu rādītājs.

Ja abi pulksteņa rādītāji sakrīt, tad minūšu rādītājs izdarījis veselu skaitu pilnu apgriezienu vairāk nekā stundu rādītājs; tātad

$$\frac{t}{60}-\frac{t}{720}=n\cdot 60, \text{ n – naturāls skaitlis.}$$

Pēc pārveidošanas iegūstam

$$\frac{11t}{720}=n\cdot 60,$$

no kurienes

$$t=\frac{60\cdot 720\cdot n}{11}=n\cdot 60,\ n\in\mathrm{N}.$$

Tā kā mēs aplūkojam laika momentus <u>starp</u> pusnakti un divpadsmitiem dienā, tad t<12·3600; no šejienes iegūstam n<11.

Līdzīgi meklējot brīžus, kad sakrīt pulksteņa minūšu un sekunžu rādītāji, iegūstam

$$t-\frac{t}{60}=m\cdot 60, \text{ m – naturāls skaitlis.}$$

Pēc pārveidošanas iegūstam

$$\frac{59t}{60}=m\cdot 60,$$

no kurienes

$$t=\frac{3600\cdot m}{59},\ m\in\mathrm{N}.$$

Lai sakristu visi trīs pulksteņa rādītāji, jābūt

$$\frac{60\cdot 720\cdot n}{11}=\frac{3600\cdot m}{59},$$

ko var pārveidot par

12n·59=11m **(*)**.

Vienādībā **(*)** labā puse dalās ar 11; tātad arī kreisajai pusei jādalās ar 11. Bet pie naturāla n, n<11, tas nav iespējams.

Tātad visu trīs pulksteņa rādītāju sakrišanas brīžu starp plkst. $00h\,00min$ un plkst. $12h\,00min$ nav.

Analoģiski to nav arī starp plkst. $12h\,00min$ un plkst. $24h\,00min$, jo pulksteņa rādītāju stāvokļi atkārto tos, kas bijuši pirmajā periodā.

60. Atbilde. Jurim var būt 5 draugi.

Risinājums. Vispirms parādīsim, ka Jurim var būt 5 draugi.

Apskatīsim vispirms 10 viņa klases biedrus A; B; …: I; J un pieņemsim, ka tie sadraudzējas tā, kā parādīts tabulā 317. zīmējumā.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A											**0**
B										X	**1**
C									X	X	**2**
D								X	X	X	**3**
E							X	X	X	X	**4**
F							X	X	X	X	**4**
G					X	X		X	X	X	**5**
H				X	X	X	X		X	X	**6**
I			X	X	X	X	X	X		X	**7**
J		X	X	X	X	X	X	X	X		**8**

317. zīm.

Tabulas labajā malā uzrakstīts draugu skaits katram no šiem 10 Jura klases biedriem. Ja tagad Juris sadraudzējas ar F, G, H, I, J, bet nesadraudzējas ar A, B, C, D, E, tad visiem viņa klases biedriem draugu skaits ir dažāds, bet Jurim pašam ir 5 draugi.

Tagad parādīsim, ka citu iespēju nav.

Klasē pavisam ir 11 bērni. Draugu skaits var būt 0; 1; 2; …; 10 – pavisam 11 dažādas iespējas. Tomēr ievērosim, ka nevar reizē būt bērns, kam nav neviena drauga, un bērns, kas draudzējas ar visiem. Tāpēc vienlaikus var būt vai nu vērtības 0; 1; 2; …; 9 (vai dažas no tām), vai arī vērtības 1; 2; …; 10 (vai dažas no tām). Tā kā 10 Jura klases biedriem draugu skaits visiem ir dažāds, tad pastāv viena no divām iespējām.

I Ir klases biedri ar 0; 1; 2; …; 9 draugiem (apzīmēsim tos attiecīgi ar D_0, D_1, …, D_9).

Izanalizēsim šo gadījumu.

Juri spriedumos apzīmēsim ar J.

D_0 nedraudzējas ne ar vienu.

D_9 draudzējas ar 9 citiem. Tā kā starp viņa draugiem noteikti nav D_0 un citu klases biedru, ieskaitot Juri, viņam ir tieši 9, tad viņš draudzējas ar visiem $D_1, D_2, \ldots, D_8$, J.

D_1 draudzējas ar D_9 (pierādīts iepriekš). Tā kā viņam ir tikai viens draugs, tad ar D_0, D_2, D_3, …, D_8, J viņš nedraudzējas.

D_8 nedraudzējas ne ar D_0, ne ar D_1, bet draudzējas ar D_9 (pierādīts iepriekš). Citu klases biedru viņam ir tieši 7: D_2, D_3, …, D_7, J. Tā kā kopā ir 8 draugi, tad D_8 draudzējas ar visiem minētajiem 7 klases biedriem.

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam 318. zīmējumā redzamo tabulu.

Skolēns	Draudzējas ar	Nedraudzējas ar
D_0	-	$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9$, J
D_9	$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$, J	D_0
D_1	D_9	$D_0, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$, J
D_8	$D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_9$, J	D_0, D_1
D_2	D_8, D_9	$D_0, D_1, D_2, D_4, D_5, D_6, D_7$, J
D_7	$D_3, D_4, D_5, D_6, D_8, D_9$, J	D_0, D_1, D_2
D_3	D_7, D_8, D_9	$D_0, D_1, D_2, D_4, D_5, D_6$, J
D_6	D_4, D_5, D_7, D_8, D_9, J	D_0, D_1, D_2, D_3
D_4	D_6, D_7, D_8, D_9	D_0, D_1, D_2, D_3, D_5, J
D_5	D_6, D_7, D_8, D_9, J	D_0, D_1, D_2, D_3, D_4

318. zīm.

Katru nākošo rindiņu aizpilda, balstoties uz iepriekšējo rindiņu aizpildījuma; D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 rindiņās vispirms aizpilda kreiso pusi, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9 rindiņās vispirms aizpilda labo pusi.

Redzam, ka Jurim noteikti ir tieši 5 draugi.

II Ir klases biedri ar 1; 2; 3; …; 10 draugiem (apzīmēsim tos attiecīgi ar $D_1, D_2, \ldots, D_{10}$).

Otro gadījumu analizē līdzīgi (sāk konstatējot, ka D_{10} draudzējas ar visiem pārējiem, ieskaitot Juri) un konstatē, ka Jurim arī noteikti ir 5 draugi.

<u>**Piezīme.**</u> Atstājam šo analīzi izdarīt lasītājam patstāvīgi.

61. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Ja nevienā šķirā nerodas pārnesums, tad katrā šķirā rezultāta cipars vienāds ar abu saskaitāmo ciparu summu šajā šķirā; tāpēc a+b ciparu summa ir tieši A+B.

Ja kādā šķirā summā iegūstam divciparu skaitli $\overline{1x} = 10 + x$ (lielāku summu par 19 iegūt acīmredzot nevar, jo katrs no abu saskaitāmo cipariem nepārsniedz 9, bet pārnesums no iepriekšējās šķiras nav lielāks par 1), tad attiecīgajā šķirā summā rakstām ciparu x, bet saskaitāmā 10 vietā summas nākošās šķiras cipara veidošanā piedalās 1. Tāpēc summas a+b ciparu summa iznāks mazāka par A+B (katrs pārnesums "pamazina" tās vērtību par 10-1=9).

Tātad nevar būt, ka summas a+b ciparu summa ir lielāka par A+B.

62. Atbilde. Šis cilvēks var būt dzimis 1969. gadā (dzimšanas diena jau ir pagājusi) vai 1973. gadā (dzimšanas diena vēl nav pagājusi).

Risinājums. Skaidrs, ka apskatāmais cilvēks X dzimis mūsu ērā.

Vislielākā ciparu summa līdz 1994. gadam ieskaitot ir 27 (999. gadam un 1989. gadam). Tātad cilvēkam X nav vairāk par 28 gadiem. Tāpēc viņš nav dzimis agrāk par 1965. gadu.

Visus iespējamos dzimšanas gadus pārbaudām tieši, ievērojot, ka jāšķiro 2 gadījumi.

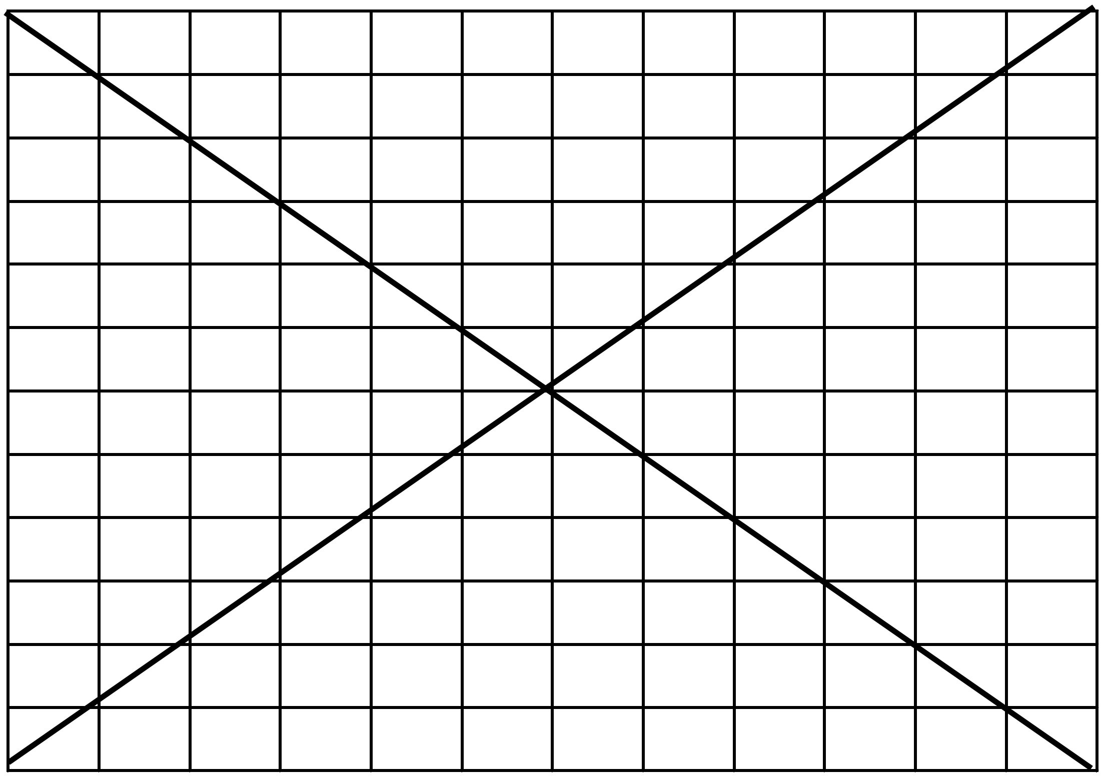
I Apskatāmajā momentā cilvēka dzimšanas diena 1994. gadā vēl nav pagājusi.

II Apskatāmajā momentā cilvēka dzimšanas diena 1994. gadā jau ir pagājusi.

Iegūstam divas atbildes: šis cilvēks var būt dzimis 1969. gadā (dzimšanas diena jau ir pagājusi) vai 1973. gadā (dzimšanas diena vēl nav pagājusi).

63. Atbilde. Taisnstūris sadalīts 3072 gabalos.

Risinājums. Sadalām taisnstūri mazākos taisnstūros ar izmēriem 5×4 rūtiņas. Šādu taisnstūru ir 12×12=144 (skat. 319. zīm.).



319. zīm.

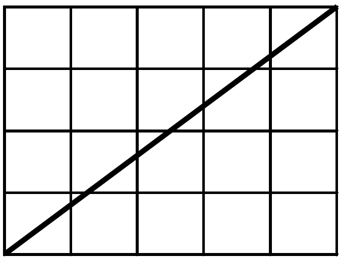
Tā kā $\frac{60}{48}=\frac{5}{4}$, tad lielā un mazā taisnstūru diagonāļu “virziena koeficienti” ir vienādi.

Tāpēc katra no lielā taisnstūra diagonālēm šķērso 12 mazos taisnstūrus “no stūra līdz stūrim”, turklāt tās abas neiet ne caur vienu mazo taisnstūri.

Katrs no diagonāļu nekrustotajiem mazajiem taisnstūriem sadalīts 20 rūtiņās; šādu daļu kopā ir 120×20=2400.

Noskaidrosim, cik daļās sadalīts katrs no 24 diagonāļu krustotajiem mazajiem taisnstūriem.

Kā viegli redzams no 320. zīmējuma, šis skaits ir 20+8=28 (sākotnējam rūtiņu skaitam 20 pievienojas 8 jaunas daļas, kas rodas, diagonālei krustojot astoņas no šīm rūtiņām un dalot katru no tām divās daļās).



320. zīm.

Tātad kopējais meklēto daļu skaits ir $2400+24\cdot28=3072$.

64. Atbilde. Nē, nevar.

I Risinājums. Parādīsim, ka nav tādu naturālu skaitļu a un b, ka $a^2+a=b^2$.

Tā kā a - naturāls skaitlis, tad

$$a<a^2+a<a^2+2a+1$$

jeb

$$a^2<a^2+a<(a+1)^2.$$

Skaitļi a un a+1 ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi; starp to kvadrātiem nav citu naturālu skaitļu kvadrātu, jo starp a un a+1 nav citu naturālu skaitļu. Tātad a^2+a nevar būt vienāds ar naturāla skaitļa b kvadrātu.

II Risinājums. Pieņemsim, ka naturāliem skaitļiem a un b pastāv vienādība

$$a^2+a=b^2.$$

No tās pārveidojumu ceļā iegūstam

$$a=b^2-a^2;$$

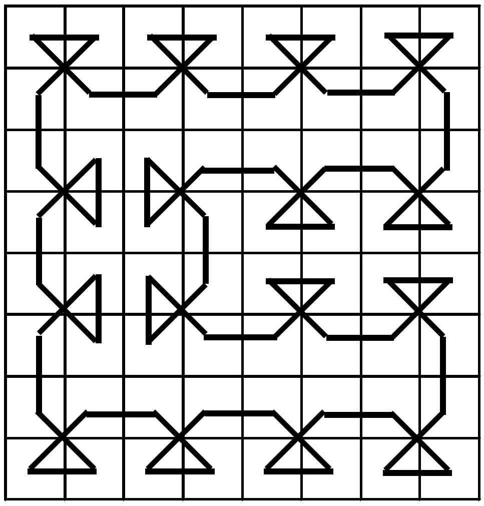
$$a=(b-a)(b+a).$$

Tā kā b-a ir vesels skaitlis, secinām, ka a dalās ar b+a. Bet tas nav iespējams, jo a un a+b ir naturāli skaitļi un $a<a+b$.

Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

65. Atbilde. Jā, var.

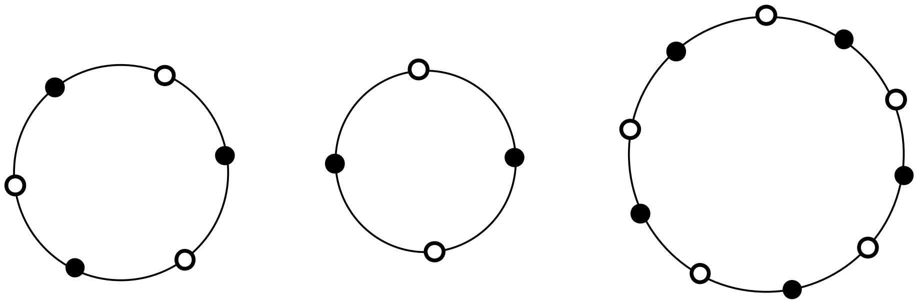
Risinājums. Skat., piemēram, 321. zīmējumu, kur uzzīmēts pat slēgts karaļa maršruts (tas uzdevuma nosacījumos nebija prasīts).



321. zīm.

66. Pierādījums. Aizstāsim katru uzdevumu ar rūķīti; uzskatīsim, ka pulciņa dalībnieki draudzējas ar rūķīti, ja viņš ir atrisinājis atbilstošo uzdevumu. Uzskatīsim arī, ka pulciņa dalībnieki savā starpā un rūķīši savā starpā nedraudzējas.

Saaicināsim vienā telpā visus 12 pulciņa dalībniekus un visus rūķīšus un palūgsim, lai draugi sadodas rokās. Tā kā katram ir tieši 2 draugi, tad nevar rasties nekādi konflikti, un visas telpā ieaicinātās personas izveidos vienu vai vairākus apļus (skat. piemēram, 322. zīm., kur ar baltajiem riņķīšiem attēloti pulciņa dalībnieki, ar melnajiem riņķīšiem – rūķīši).



322. zīm.

Tā kā pulciņa dalībnieki savā starpā un rūķīši savā starpā nedraudzējas, tad viņi stāv pamīšus; tāpēc katram skolniekam pa labi no viņa stāv savs rūķītis. Atbilstošo uzdevumu skolniekam arī palūgsim izklāstīt.

Piezīme. Apgalvojums, ka visas telpā esošās personas sadalīsies vienā vai vairākos "apļos", var likties nepamatots un balstīts tikai uz intuīciju. Lai izkliedētu iespējamās šaubas, sniegsim tam sīkāku pamatojumu.

Izvēlēsimies vienu skolnieku A. Tam pa labi nostādīsim vienu no viņa draugiem B. Savukārt B ir vairs tikai viens rindā vēl nenostādīts draugs (otrs ir A); nostādīsim šo draugu C pa labi no B. Savukārt C otro draugu nostādīsim pa labi no C utt. Skaidrs, ka šim procesam kādreiz jābeidzas, jo personu skaits telpā ir galīgs.

Tas var beigties tikai tad, ja rindā kārtējam nostādītajam Z otrs draugs ir A. Tiešām, neviens cits rindā nostādītais X nav Z otrais draugs, jo X jau stāv starp abiem saviem draugiem; ja Z otrais draugs vēl nestāv rindā, tad procesu var turpināt, pievienojot to rindai.

Tādējādi esam ieguvuši apli A, B, C, ..., Z. Ja tas satur visas personas, vajadzīgais iegūts.

Ja nē, tad vēl nenostādītie draudzējas savā starpā, un uz šo (jau mazāku!) grupu atkal attiecas uzdevuma nosacījumi, ka katram ir tieši divi draugi šīs grupas ietvaros. Atkārtojam līdzīgu procesu utt. Agri vai vēlu visas personas būs nostādītas, un vajadzīgie apļi būs izveidoti.

67. Atbilde. a) Jā, var;

b) nē, nevar.

Risinājums. a) Apzīmēsim skaitļa n ciparu summu ar S(n). Pieņemsim, ka esam jau pierādījuši, ka

$$S(a\cdot b)\leq S(a)\cdot S(b) \quad \textbf{(1)}.$$

Viegli redzēt, ka

$$S(125)=8$$
un
$$S(8\cdot 125)=S(1000)=1.$$

Tātad skaitļa 8a ciparu summa var būt 8 reizes mazāka par skaitļa a ciparu summu. Tālāk ievērosim, ka saskaņā ar **(1)**

$$\begin{aligned}&S(a)=S(1000a)=\\&=S(8a\cdot 125)\leq S(125)\cdot S(8a)=\\&=8\cdot S(8a).\end{aligned}$$

Tātad

$$S(a)\leq 8\cdot S(8a)\ \mathbf{(2)}.$$

No **(2)** seko, ka

$$S(8a)\geq \frac{1}{8}\cdot S(a),$$

tātad skaitļa 8a ciparu summa nevar būt 8 reizes mazāka par skaitļa a ciparu summu. Atliek pierādīt nevienādību **(1)**.

Iztēlosimies skaitļu reizināšanu "stabiņā" pēc parastā skolas algoritma. Ja nevienā vietā nerodas pārnesums, tad rezultātā šķiras veidojas, saskaitot atbilstošos a un b ciparu reizinājumus, pa visām šķirām kopā parādās visi reizinājumi, kur viens reizinātājs ir viena skaitļa cipars, bet otrs reizinātājs - otra skaitļa cipars. To summa, atsaucoties uz distributīvo īpašību, ir tieši $S(a)\cdot S(b)$.

Ja turpretī rodas kaut vai viens pārnesums, tad atbilstošais reizinājums rezultāta ciparu summā dod mazāku "ieguldījumu" nekā viņa vērtība (piemēram, $7\cdot 8=56$; rezultātā mēs rakstām 6, bet daļa 50 tālāk figurē kā skaitlis 5). Tāpēc rezultāta ciparu summa būs mazāka nekā $S(a)\cdot S(b)$.

68. Atbilde. Nē, nevar izveidot.

Risinājums. Saskaņā ar dalāmības pazīmi ar 11 sešciparu skaitlis $\overline{abcdef}$ dalās ar 11 tad un tikai tad, kad $S=f-e+d-c+b-a$ dalās ar 11. Tā kā $1+2+3+4+5+6=21$, tad $|S|<21$. Tāpēc $S=0$ vai $S=\pm 11$.

Ievērosim, ka S veidots no trim pāru un trim nepāru skaitļiem, tāpēc S - nepāru skaitlis un $S\neq0$.

Lai $S=\pm11$, cipari 1; 2; 3; 4; 5; 6 jāsadala pa 3 divās grupās tā, lai grupu ciparu summas atšķirtos viena no otras par 11. Bet pati lielākā iespējamā atšķirība ir tikai $(6+5+4)-(1+2+3)=9$. Tātad šāds skaitlis nav izveidojams.

69. Pierādījums. Četrstūra leņķu lielumu summa ir 360°. Izliektā četrstūrī katrs leņķis ir mazāks par 180°, tātad triju pārējo leņķu lielumu summa lielāka par 180°. Tāpēc četrstūrim uzdevums izpildīts.

Dosim tagad vispārējo pierādījumu.

Apzīmēsim atbilstošo ārējo leņķu lielumus ar α, β, γ, δ; tad pašu leņķu lielumi ir $180°-\alpha$, $180°-\beta$, $180°-\gamma$, $180°-\delta$. Mums jāpierāda, ka

$$180°-\alpha<180°-\beta+180°-\gamma+180°-\delta$$

jeb

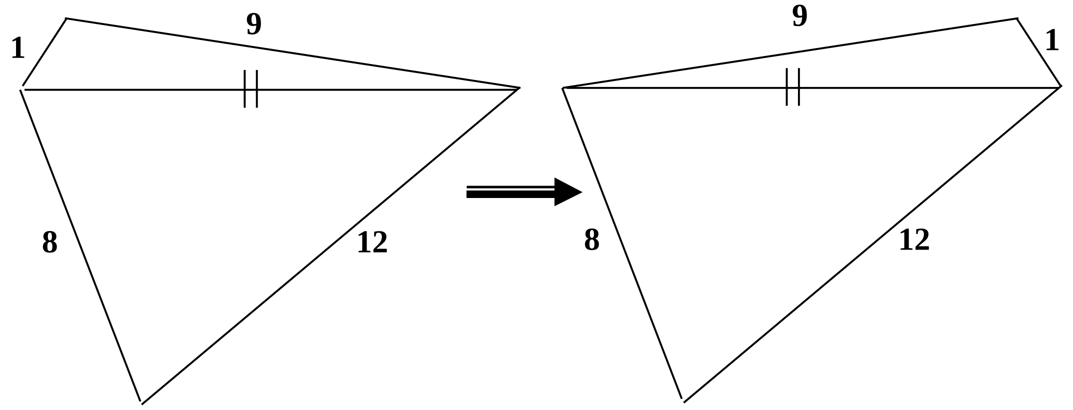
$$\beta+\gamma+\delta-\alpha<360°.$$

Bet šī nevienādība ir acīmredzama, jo visu ārējo leņķu (ne tikai α, β, γ, δ!) lielumu summa ir 360°.

Piezīme. Risinājumā fakts par daudzstūra izliektību izmantots apslēptā veidā: ārēja leņķa jēdziens definēts tikai izliektam daudzstūrim.

70. Atbilde. Vislielākais četrstūra laukums var būt 42 cm^2.

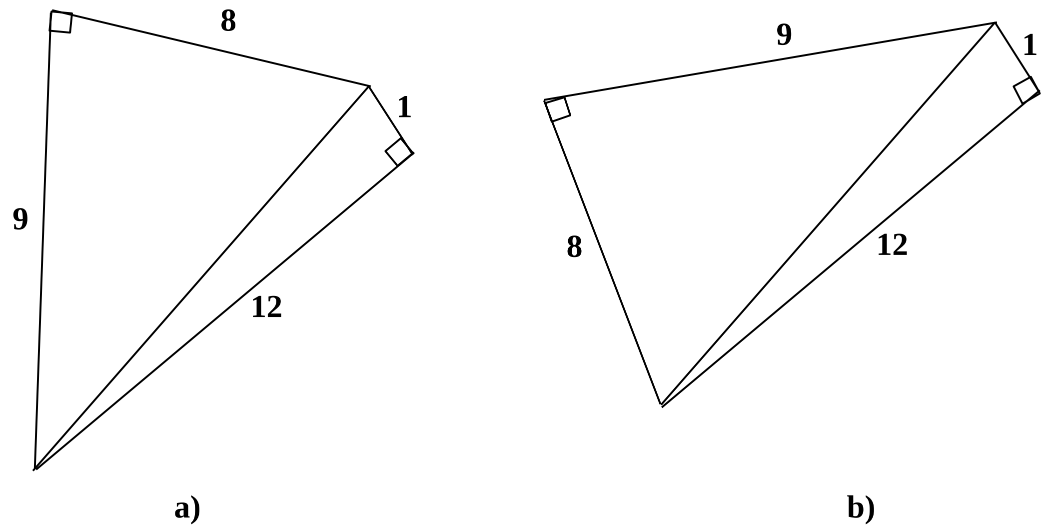
Risinājums. Katram četrstūrim, kuram ir dotie malu garumi un malas 1 cm un 12 cm neatrodas blakus, atbilst otrs četrstūris ar tādu pašu laukumu, kur malas 1 cm un 12 cm ir blakus (tā iegūšana redzama 323. zīmējumā: pārgriežam četrstūri pa diagonāli un vienu daļu "apgriežam otrādi").



323. zīm.

Tāpēc maksimālo laukumu varam meklēt tikai četrstūrim, kam malas 1 cm un 12 cm ir blakus.

Sadalīsim šo četrstūri divos trijstūros, kā parādīts 324. a) vai b) zīmējumā.



324. zīm.

Katras daļas laukums vislielākais būs tad, ja tās abas būs taisnleņķa trijstūri (pretējā gadījumā augstums pret malu 9 cm būs mazāks par 8 cm resp. augstums pret malu 12 cm būs mazāks par 1 cm).

Tā kā

$$1^2+12^2=1+144=145$$

un

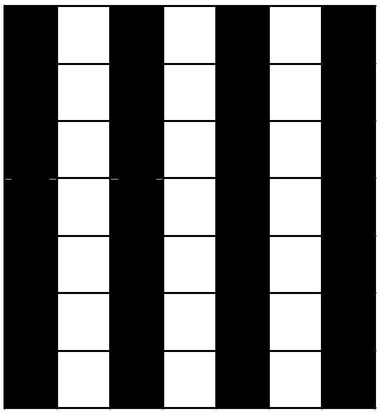
$$8^2+9^2=64+81=145,$$

tad abi trijstūri reizē var būt taisnleņķa trijstūri; tas arī dod maksimālo laukumu

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12 = \\ &= \frac{1}{2}(72+12) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot 84 = \\ &= 42\,(\mathrm{cm}^2). \end{aligned}$$

71. Atbilde. Nē, nevar

Risinājums. Izkrāsosim rūtiņas tā, kā parādīts 325. zīmējumā.

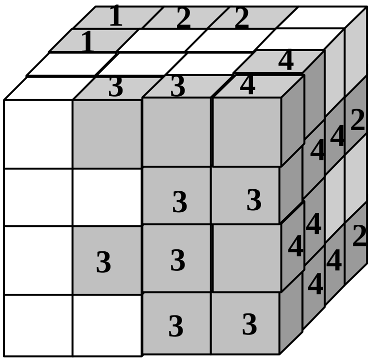


325. zīm.

Katrs slīpais gājiens iet no baltas rūtiņas uz melnu vai otrādi. Apvienosim rūtiņas pāros tā, ka vienā pārī ir rūtiņas, kuras savieno slīpais karaļa gājiens. Katra rūtiņa, izņemot vienu, nonāk vienā pārī. Tātad balto un melno rūtiņu skaitam jāatšķiras par 1, bet tas atšķiras par 7.

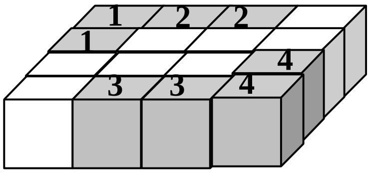
Pretruna, tātad šāds maršruts nav iespējams.

72. Atbilde. Skat. 326. zīmējumu.

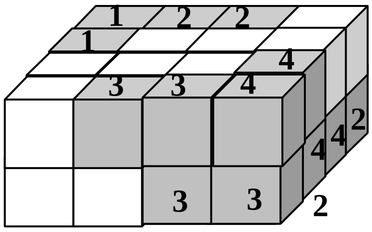


326. zīm.

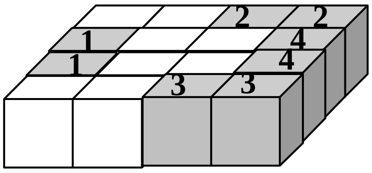
I Risinājums. Kā salikt paralēlskaldni ar izmēriem 2×4×4, redzams 327. zīmējumā.



a)



c)

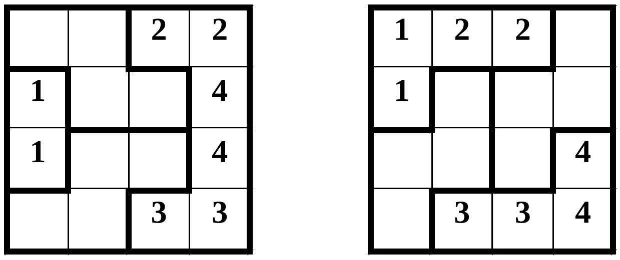


b)

327. zīm.

327. a) zīmējumā parādīts paralēlskaldņa augšējais slānis, bet 327. b) zīmējumā - paralēlskaldņa apakšējais slānis. Tajā vienas un tās pašas CIBA–s kubiņi apzīmēti ar vienādiem cipariem (CIBA–s, kas pilnībā atrodas vienā slānī, nav numurētas). No diviem 327. c) zīmējumā redzamajiem paralēlskaldņiem var salikt kubu ar izmēriem 4×4×4.

II Risinājums. Kā salikt paralēlskaldni ar izmēriem 2×4×4, redzams 328. zīmējumā. No diviem 2×4×4 paralēlskaldņiem var salikt kubu ar izmēriem 4×4×4.



Apakšējais slānis **Augšējais slānis**

328. zīm.

328. zīmējumā parādīts paralēlskaldņa augšējais slānis un apakšējais slānis. Tajā vienas un tās pašas CIBA–s kubiņi apzīmēti ar vienādiem cipariem (CIBA–s, kas pilnībā atrodas vienā slānī, nav numurētas).

„Profesora Cipariņa kluba" 1994./95.m.g. uzdevumu ievaduzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde. 35 kg.

Risinājums. Ja ūdens daudzums sēnēs ir 97%, tad sausnes daudzums sēnēs pirms apžāvēšanas ir 3%. Tātad sēņu svars bez ūdens ir

$$\begin{aligned}&3\% \text{ no } 70 = \\ &= \frac{3}{100}\cdot 70 = \\ &= 2{,}1\,(\text{kg}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2{,}1\,\text{kg ir } 6\%\ \text{sēņu svara}\\ &x\ \text{kg ir } 100\%\ \text{sēņu svara}\\ &\text{x} = \frac{2{,}1\cdot 100}{6} = 35\,(\text{kg}).\end{aligned}$$

2. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka skaitļus tabulā var ierakstīt uzdevumā minētajā veidā (skat. 121. zīm.).

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

121. zīm.

Aplūkojam visu tabulā ierakstīto skaitļu summu divos dažādos veidos. Vispirms sadalām skaitļus pa kolonnām. Tā kā katrā kolonnā summas $a+d+g<0$, $b+e+h<0$ un $c+f+i<0$ ir mazākas par nulli, tad arī summa visās kolonnās kopā būs negatīva un visas tabulas skaitļu summu būs negatīva

$$a+d+g+b+e+h+c+f+i<0.$$

Bet tabulā skaitļu summu varam apskatīt arī citādi. Vispirms saskaitām skaitļus pa rindiņām. Katrā rindiņā skaitļu summas $a+b+c>0$, $d+e+f>0$ un $g+h+i>0$ ir pozitīvas, tātad arī visu rindiņu skaitļu summa ir pozitīva.

Līdz ar to visas tabulas skaitļu summa ir pozitīva

$$a+d+g+b+e+h+c+f+i>0.$$

Esam ieguvuši pretrunu, tātad nevar katrā rūtiņā ierakstīt pa skaitlim tā, lai katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa būtu +3, bet katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu –3.

Pēc apžāvēšanas sausnes svars 2,1 kg atbilst 6% sēņu svara, tātad

$$2{,}1\,\text{kg ir } 6\%\,\text{sēņu svara}$$

$$x\,\text{kg ir } 100\%\,\text{sēņu svara}$$

$$\text{x} = \frac{2{,}1 \cdot 100}{6} = 35\,(\text{kg}).$$

2. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka skaitļus tabulā var ierakstīt uzdevumā minētajā veidā (skat. 121. zīm.).

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

121. zīm.

Aplūkojam visu tabulā ierakstīto skaitļu summu divos dažādos veidos. Vispirms sadalām skaitļus pa kolonnām. Tā kā katrā kolonnā summas a+d+g<0, b+e+h<0 un c+f+i<0 ir mazākas par nulli, tad arī summa visās kolonnās kopā būs negatīva un visas tabulas skaitļu summu būs negatīva

$$a+d+g+b+e+h+c+f+i<0.$$

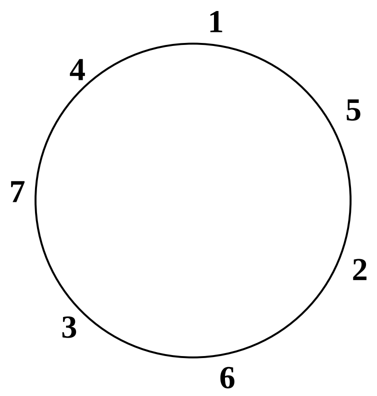
Bet tabulā skaitļu summu varam apskatīt arī citādi. Vispirms saskaitām skaitļus pa rindiņām. Katrā rindiņā skaitļu summas a+b+c>0, d+e+f>0 un g+h+i>0 ir pozitīvas, tātad arī visu rindiņu skaitļu summa ir pozitīva.

Līdz ar to visas tabulas skaitļu summa ir pozitīva

$$a+d+g+b+e+h+c+f+i>0.$$

Esam ieguvuši pretrunu, tātad nevar katrā rūtiņā ierakstīt pa skaitlim tā, lai katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa būtu +3, bet katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu –3.

3. Atbilde. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 122. zīmējumā.



122. zīm.

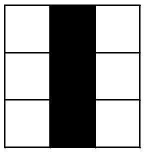
4. Atbilde. Piemēram, 1001; 10101; 101101.

<u>Risinājums</u>. $77 \cdot 13 = 101$;

$777 \cdot 13 = 10101$;

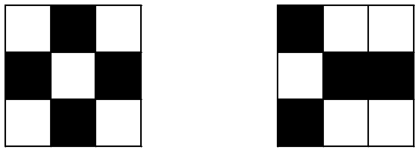
$7777 \cdot 13 = 101101$.

<u>5. Atbilde</u>. a) Skat. 123. zīmējumu;



123. zīm.

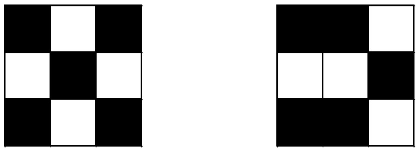
b) skat. 124. a) un b) zīmējumu;



a) **b)**

124. zīm.

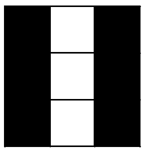
c) skat. 125. a) un b) zīmējumu;



a) **b)**

125. zīm.

d) skat. 126. zīmējumu.



126. zīm.

<u>6. Risinājums</u>. Apzīmēsim monētas ar A_1, A_2 un A_3. Uzliksim monētas A_1 un A_2 katru uz sava svaru kausa. Šķirosim divus gadījumus.

I Ja kausi būs līdzsvarā, tad starp šīm divām monētām nav atšķirīgās monētas. Tātad atšķirīgā ir trešā monēta A_3.

II Ja svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā ir monēta ir vieglākā no monētām A_1 un A_2.

7. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim pretējo, ka skaitļus var ierakstīt kvadrātā, kas sastāv no 3×3 rūtiņām, tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu pozitīvs, bet katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums - negatīvs (skat. tabulu 127. zīm.).

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

127. zīm.

Aplūkojam visā tabulā ierakstīto skaitļu reizinājumu divos dažādos veidos.

Vispirms aplūkojam katras kolonnas skaitļu reizinājumu. Katras kolonnas skaitļu reizinājums $a\cdot d\cdot g>0$, $b\cdot e\cdot h>0$ un $c\cdot f\cdot i>0$ ir pozitīvs, tātad visu skaitļu reizinājums, grupējot tos pa kolonnām, arī ir pozitīvs

$$a\cdot d\cdot g\cdot b\cdot e\cdot h\cdot c\cdot f\cdot i>0.$$

Bet tabulas skaitļu reizinājumu var aplūkot arī citādi: vispirms sareizināt skaitļus katrā rindiņā. Šie reizinājumi pēc uzdevuma nosacījumiem ir negatīvi $a\cdot d\cdot g<0$, $b\cdot e\cdot h<0$ un $c\cdot f\cdot i<0$, tāpēc arī visu skaitļu reizinājums, grupējot tos pa rindiņām, arī ir negatīvs

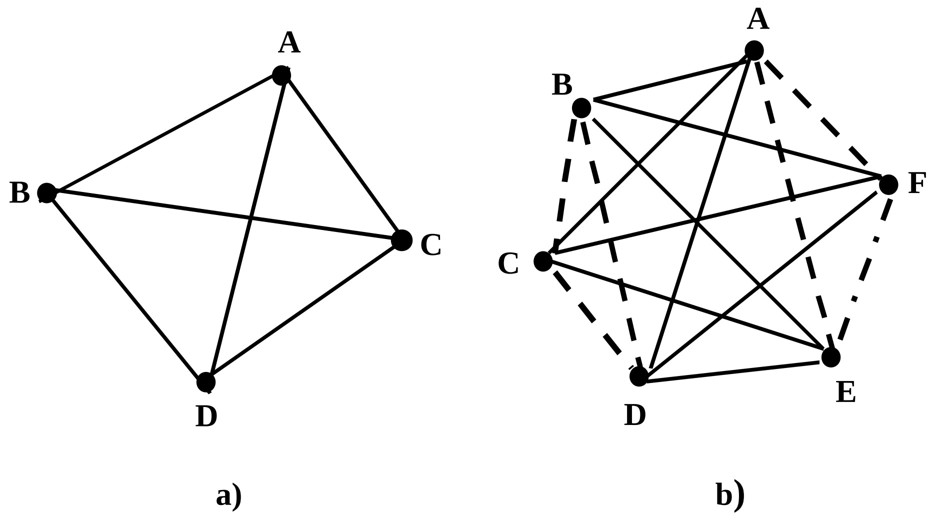
$$a\cdot d\cdot g\cdot b\cdot e\cdot h\cdot c\cdot f\cdot i<0,$$

jo ir trīs (nepāra skaits) rindiņas.

Esam ieguvuši pretrunu: visas tabulas visu skaitļu reizinājums ir gan negatīvs, gan pozitīvs.

Tātad mūsu pieņēmums, ka kvadrātā, kas sastāv no 3×3 rūtiņām, skaitļus var ierakstīt tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu pozitīvs, bet katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu negatīvs, ir aplams.

8. Atbilde. Sniegbaltītes mājiņā dzīvo 4 vai 6 rūķīši. (skat. 128. a) un b) zīmējumu).



128. zīm.

Risinājums. Izvēlēsimies patvaļīgu rūķīti A un tā trīs "nedraugus" apzīmēsim ar B, C un D. No dotā rūķītim A vairāk "nedraugu" nav. Ja viņam ir draugi, tad to "nedraugi" ir rūķīši B, C un D. Ja rūķīša A drauga "nedraugs" būtu kāds cits "nedraugs" E, tad tas būtu ceturtais "nedraugs". Tā kā rūķītim B (arī C un D) "nedraugu" skaits ir 3, tad rūķītim A nevar būt vairāk par 2 draugiem.

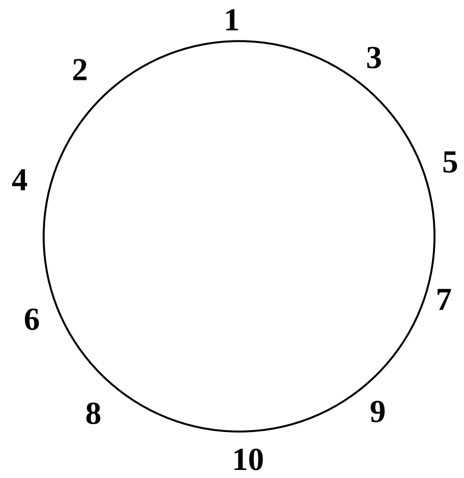
Tātad Sniegbaltītes mājiņā nevar dzīvot vairāk kā 6 rūķīši: rūķīši A, B, C, D un divi rūķīša A draugi E un F.

Mazāk par 4 rūķīšiem arī nevar būt, jo katram rūķītim ir tieši 3 "nedraugi".

Rūķīšu skaits nevar būt 5, jo tad "nedraugu" skaits būtu daļskaitlis $\frac{5 \cdot 3}{2} = 7\frac{1}{2}$.

49. zīmējumā ar taisnām līnijām attēlota "nedraudzēšanās", bet ar pārtrauktām līnijām attēlota "draudzēšanās".

9. Atbilde. 1. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 129. zīmējumā.



129. zīm.

2. Nē, nevar.

Risinājums. 1. Blakus skaitlim 1 var atrasties tikai skaitļi 2 un 3. Skaitlim 2 otrā pusē var atrasties tikai skaitlis 4, bet skaitlim 5 – tikai skaitlis 7 utt. Skaitlim 1 vienā pusē pēc kārtas tiek izvietoti visi pāra skaitļi 2, 4, 6, …, bet otrā pusē tiek izvietoti visi nepāra skaitļi 3, 5, 7, ….

Abas virknes izbeidzas, kad tās sasniedz attiecīgi skaitļus n-2 un n-1. Starp šiem skaitļiem jāieraksta skaitlis n (šajā gadījumā – skaitlis 10).

2. Vienīgās pieļaujamās blakus uzrakstīto skaitļu starpības ir 3; 4; 5. Apskatīsim skaitļus 3; 4; 5; 11; 12; 13. Nekādi divi no tiem nedrīkst būt uzrakstīti blakus. Tātad 6 atstarpēs starp tiem jābūt vismaz pa vienam citam skaitlim. Bet šo atstarpju aizpildīšanai mums ir tikai 5 skaitļi: 6; 7; 8; 9; 10. Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

10. Atbilde. a) Piemēram, a=2, b=3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 89;

b) piemēram, b=2, a=5, 7, 13, 19, 31, 43, 61, 73, 91.

Risinājums. a) Tā kā mazākais pirmskaitlis ir 2, tad $a \geq 2$, $b \geq 2$ un tātad $a+b \geq 4$.

Skaitļi a un b nevar abi būt pāra skaitļi, jo vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, un tad a=b=2 un a+b=4, kas nav pirmskaitlis.

Ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad a+b ir pāra skaitlis, tātad dalās ar 2 un nav pirmskaitlis, jo a+b≥4. Tādēļ aplūkojam gadījumu, kad viens no skaitļiem ir pāra skaitlis un otrs – nepāra skaitlis. Bet 2 ir vienīgais pāra pirmskaitlis. Tāpēc a=2.

Tabulā (skat. 130. zīm.) parādītas dažas b vērtības, ja a=2, lai skaitļi a, b un a+b visi ir pirmskaitļi.

a	**b**	**a+b**
2	3	5
2	5	7
2	11	13
2	17	19
2	29	31
2	41	43
2	59	61
2	71	73
2	89	91

130. zīm.

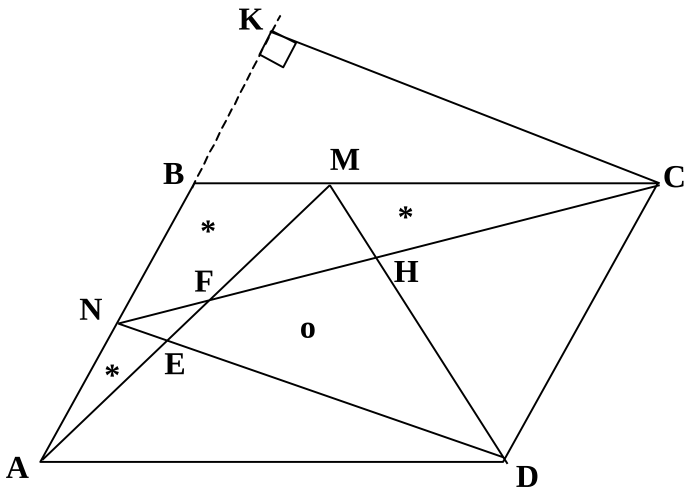
b) Nevar būt a=2, jo tad a-b≤0 un a-b nav pirmskaitlis. Tāpēc b=2.

Tabulā (skat. 131. zīm.) parādītas dažas a vērtības, ja b=2, lai skaitļi a, b un a-b visi ir pirmskaitļi.

a	**b**	**a-b**
5	2	3
7	2	5
13	2	11
19	2	17
31	2	29
43	2	41
61	2	59
73	2	71
91	2	89

131. zīm.

11. Pierādījums. Lai pierādītu, ka paralelogramā ABCD ar zvaigznītēm apzīmēto daļu laukumu summa ir vienāda ar tās daļas laukumu, kas apzīmēta ar aplīti, ieviešam apzīmējumus, kā parādīts 132. zīmējumā.



132. zīm.

Paralelograma pretējās malas ir paralēlas, tāpēc attālumi starp tām visās vietās ir vienādi.

Tāpēc paralelograma ABCD laukums ir

$$S = AB \cdot h, \text{ kur } CK = h.$$

Savukārt trijstūra ΔNBC laukums ir

$$S_{\Delta NBC} = \frac{1}{2} NB \cdot h$$

un ΔAND laukums ir

$$S_{\Delta AND} = \frac{1}{2} AN \cdot h.$$

Trijstūru ΔNBC un ΔAND laukumu summa ir

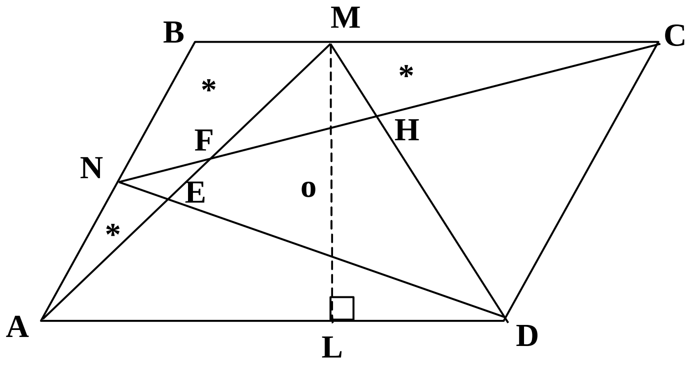
$$S_1 = \frac{1}{2} AN \cdot h + \frac{1}{2} NB \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2}(AN + NB) \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot h.$$

Tātad trijstūru ΔNBC un ΔAND laukumu summa S_1 ir puse no paralelograma ABCD laukuma S.

Līdzīgi iegūstam, ka trijstūra ΔAMD laukums ir puse no paralelograma ABCD laukuma S (skat. 133. zīm.).



133. zīm.

Paralelograma ABCD laukums ir

$$S=AD\cdot h, \text{ kur } ML=h.$$

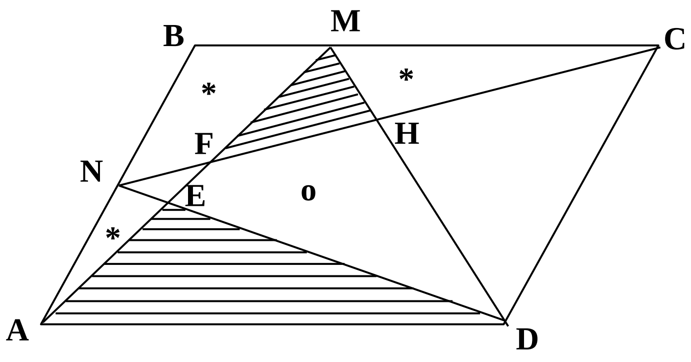
Savukārt trijstūra ΔAMD laukums ir

$$S_{\Delta AMD}=\frac{1}{2}AD\cdot h.$$

Tātad

$$S_{\Delta NBC}+S_{\Delta AND}=S_{\Delta AMD}.$$

Atņemot gan no ΔAMD laukuma, gan no ΔNBC un ΔAND laukumu summas iesvītrotos ΔAED un ΔFMH laukumus, iegūstam prasīto (skat. 134. zīm.).



134. zīm.

12. Risinājums. Pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa uzliekam monētas A_1 un A_2, bet uz otra svaru kausa –monētu A_3 un atsvaru.

Apskatīsim divus gadījumus.

I Svari ir līdzsvarā.

Tad atšķirīgā ir viena no divām atlikušajām monētām A_4 vai A_5. Nosverot vienu no tām ar atsvara palīdzību, noskaidrosim, kura ir viltotā monēta.

II Svari nav līdzsvarā.

Tad atšķirīgā monēta atrodas uz svaru kausiem. Tālāk salīdzinām tās monētas A_1 un A_2, kas atradušās uz viena svaru kausa.

13. Atbilde. Jānītim tagad ir 12 gadi, bet Pēterītim – 9 gadi.

Risinājums. Lai labāk izprastu diezgan sarežģītos uzdevuma nosacījumus, attēlosim tos tabulā (skat. 135. zīm.), vienlaicīgi paskaidrojot apzīmējumus x, y, t un T.

Laiks	Jānīša gadu skaits	Pēterīša gadu skaits
Tagad	2x	y
Pagātnē (t)	y	x
Nākotnē (T)	63-2x	2x

135. zīm.

Pēc uzdevuma nosacījumiem

$$\begin{cases} t = 2x - y \\ t = y - x \end{cases} \text{un} \begin{cases} T = 63 - 2x - 2x \\ T = 2x - y. \end{cases}$$

Tātad

$$2x - y = y - x \quad \text{un} \quad 63 - 2x - 2x = 2x - y.$$

$$2x - y = y - x \qquad 63 - 2x - 2x = 2x - y$$

$$3x = 2y \qquad 63 - 6x = y$$

$$x = \frac{2}{3}y\ \mathbf{(1)} \qquad 6x = 63 + y\ \mathbf{(2)}.$$

Izmantojam ievietošanas paņēmienu: vienādībā (2) x vietā liekam (1), no kurienes iegūstam, ka

$$6x = 27 + y$$
$$4y = 27 + y$$
$$3y = 27$$
$$y = 9\ \mathbf{(3)}.$$

Tad

$$x = \frac{2}{3}y$$
$$x = \frac{2}{3}\cdot 9$$
$$x = 6\ \mathbf{(4)}.$$

No (3) un (4) seko, ka Jānītim tagad ir 12 gadi, bet Pēterītim – 9 gadi.

14. Atbilde. Virknes pirmie trīs cipari ir 8, 2, 5.

Risinājums. Ciparus apzīmēsim ar alfabēta burtiem:

a, b, c, d, e, f.

Pēc uzdevuma nosacījumiem $(a+b+c)|5$ un $(b+c+d)|5$.

Tad arī $((a+b+c)-(b+c+d))|5$, tātad $(a-d)|5$.

Atzīmēsim arī, ka ciparu summas $(c+d+e)|5$ un $(d+e+f)|5$,

tātad $((c+d+e)-(b+c+d))|5$ un $(e-b)|5$.

Tāpat $((d+e+f)-(c+d+e))|5$ un $(f-c)|5$.

Esam ieguvuši, ka $(a-d)|5$, $(e-b)|5$ un $(f-c)|5$.

Tā kā a un d, e un b, f un c ir dažādi cipari, tad tie viens no otra atšķiras vismaz par 5. Tāpēc, ja d=3, tad a=8;

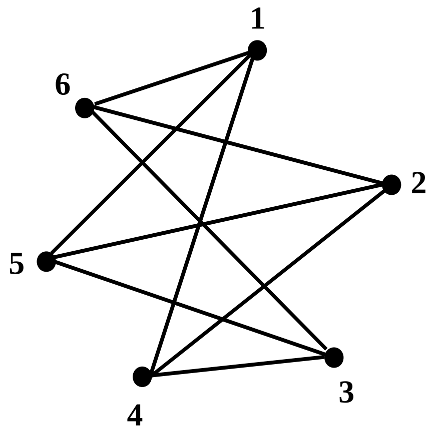
ja e=7, tad b=2;

ja f=0, tad c=5.

Tas nozīmē, ka virkne ir 8, 2, 5, 3, 7, 0.

15. Atbilde. Jā, var.

I Risinājums. Skat. 136. zīmējumu.



136. zīm.

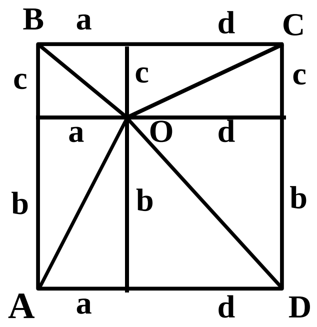
II Risinājums. Skat. tabulu 137. zīmējumā.

	1	2	3	4	5	6
1				x	x	x
2				x	x	x
3				x	x	x
4	x	x	x			
5	x	x	x			
6	x	x	x			

137. zīm.

16. Atbilde. Nē, nevar būt.

Risinājums. Ja ABCD ir kvadrāts (skat. 138. zīm.),



138. zīm.

tad pēc Pitagora teorēmas

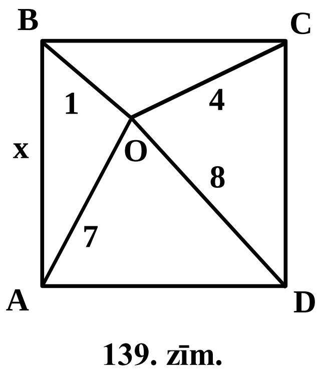
$$AO^2=a^2+b^2;$$
$$BO^2=a^2+c^2;$$
$$CO^2=c^2+d^2;$$
$$DO^2=b^2+d^2.$$

Tātad

$$AO^2+CO^2=BO^2+DO^2.$$

Aplūkojot dotos skaitļus 1, 4, 7 un 8 redzam, ka vienīgā iespēja varētu būt, ja 1 un 8, tāpat kā 4 un 7, ir attālumi līdz pretējām kvadrāta virsotnēm ($7^2+4^2=8^2+1^2$).

Apzīmēsim kvadrāta malas garumu ar x (skat. 139. zīm.).



139. zīm.

No $\Delta ABO \Rightarrow x>7-1 \Rightarrow x>6$ (pēc trijstūra nevienādības).

No $\Delta BCO \Rightarrow x<1+4 \Rightarrow x<5$.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad kāda punkta attālumi līdz kvadrāta virsotnēm nevar būt 1, 4, 7 un 8.

17. Atbilde. Kvadrātā var būt 6 vai 10 figūriņas.

Risinājums. Vispirms apskatīsim, cik katrā kolonnā vai rindiņā var būt figūriņu.
Tā kā teikts, ka katrā rūtiņā var atrasties augstākais viena figūriņa, tad figūriņu daudzums kolonnā vai rindiņā var būt 0; 1; 2; 3; 4.
To, ka šādi izvietojumi tiešām ir iespējami, parāda 140. a) un b) zīmējums. Tātad figūriņu skaits kvadrātā ir 6 vai 10.

x			
x	x		
x	x	x	

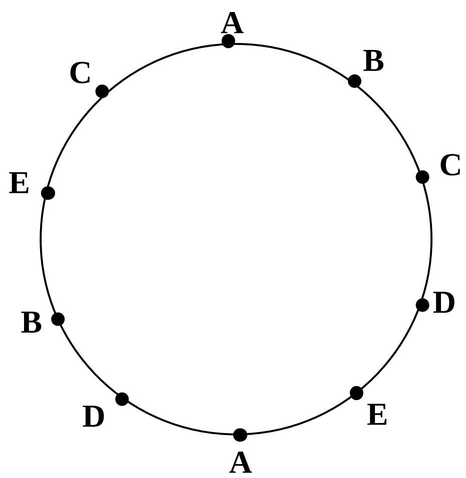
a)

x	x	x	x
	x	x	x
		x	x
			x

b)

140. zīm.

18. Atbilde. Jā, var (skat. 141. zīm.).



141. zīm.

Risinājums. No dotajiem burtiem pavisam var izveidot tieši 10 dažādus burtu pārus, lai katrā pārī ietilptu dažādi burti:

AB;	**AC;**	**AD;**	**AE;**
	BC;	**BD;**	**BE;**
		CD;	**CE;**
			DE.

Visiem pāriem jābūt "izmantotiem" katram tieši vienu reizi.

Paņemsim, piemēram, burtu A. Tas ir jāizvieto vismaz 2 vietās, lai blakus tam varētu nolikt pārējos 4 burtus. Līdzīgi katrs burts ir jāuzraksta vismaz 2 reizes.

Bet, tā kā ir 5 dažādi burti, tad jāuzraksta vismaz $2 \cdot 5 = 10$ burti. Uz riņķa līnijas ir 10 vietas, tāpēc uzdevuma prasības ir izpildāmas.

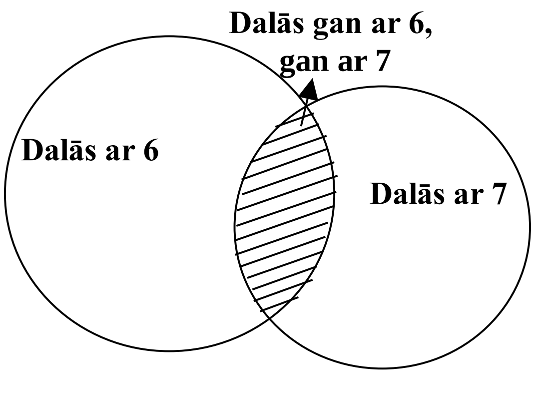
19. Atbilde. a) Skaitļu, kas dalās ar 6, bet nedalās ar 7 ir 285;

b) skaitļu, kas dalās ar 7, bet nedalās ar 6 ir 237;

c) skaitļu, kas dalās gan ar 6, gan ar 7 ir 47.

Risinājums. Katrs sestais skaitlis dalās ar 6, katrs septītais - ar 7.

Tā kā 1994:6=332, atl. 2 un 1994:7=284, atl. 6, tad abās grupās ir ieskaitīti skaitļi, kas dalās gan ar 6, gan ar 7 (skat. 142. zīm.).



142. zīm.

Tā kā katrs četrdesmit otrais dalās gan ar 6, gan ar 7, tad ir 47 skaitļi, kas dalās gan ar 6, gan ar 7

1994:42=47, atl. 20;

285 skaitļi, kas dalās ar 6, bet nedalās ar 7

332-47=285;

237 skaitļi, kas dalās ar 7, bet nedalās ar 6

284-47=237.

20. Atbilde. 6 skaitļi.

Risinājums. Naturālo skaitļu kopu sadalīsim 5 klasēs:

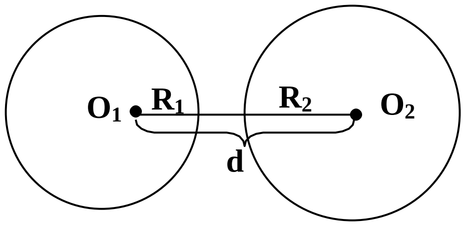
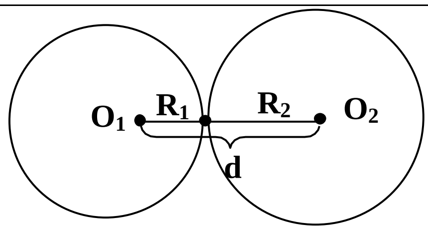
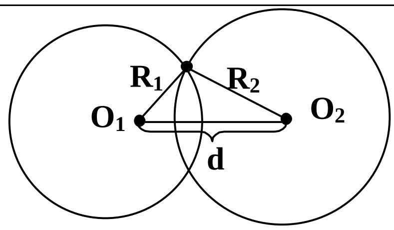
1. klasē iekļausim skaitļus, kuri dalās ar 5;
2. klasē iekļausim skaitļus, kuri, dalot tos ar 5, atlikumā dod 1;
3. klasē iekļausim skaitļus, kuri, dalot tos ar 5, atlikumā dod 2;
4. klasē iekļausim skaitļus, kuri, dalot tos ar 5, atlikumā dod 3;
5. klasē iekļausim skaitļus, kuri, dalot tos ar 5, atlikumā dod 4.

Acīmredzot divu vienas klases skaitļu starpība dalās ar 5. Ja izvēlēsimies 6 skaitļus, tad no tiem vismaz divi piederēs vienai klasei, tātad to starpība dalīsies ar 5.

21. Atbilde. Nē, nevar.

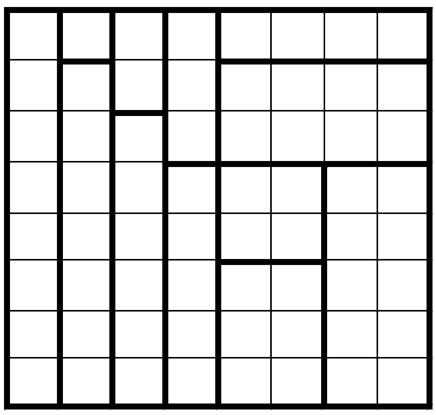
Risinājums. Ja prožektori savienoti savā starpā ar lentām, tad lentu "galu" skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet 7·3=21 ir nepāra skaitlis, tātad 7 prožektorus nevar savienot savā starpā ar lentām tā, lai katrs no tiem būtu savienots ar tieši 3 citiem prožektoriem.

<u>22. Pierādījums</u>. Teorēmas pierādīšanai izmanto apgalvojumus par divu riņķa līniju savstarpējo novietojumu (skat. 143. zīm.).

Attālums starp riņķa līniju centriem **d**	Riņķa līniju savstarpējais novietojums	
$d>R_1+R_2$	Viena atrodas ārpus otras	
$d=R_1+R_2$	Ārēji pieskaras	
$\lvert R_2-R_1 \rvert <$ $<d<$ $<R_1+R_2$	Krustojas	

143. zīm.

<u>23. Atbilde</u>. Skat. 144. zīmējumu.



144. zīm.

24. I Pierādījums. Apzīmēsim monētas ar burtiem A, B, C, D, E un F. Pieņemsim, ka

$$A<B<C<D<E.$$

1. svēršana. Salīdzināsim monētas F un C. Iegūstam 2 gadījumus.

I Pieņemsim, ka $F<C$. Tad 2. svēršanā salīdzināsim monētas F un A:

a) ja $F<A$, tad

$$F<A<B<C<D<E;$$

b) ja $F>A$, tad 3. svēršanā salīdzināsim monētas F un B:

b_1) ja $F>B$, tad

$$A<B<F<C<D<E;$$

b_2) ja $F<B$, tad

$$A<F<B<C<D<E.$$

II Pieņemsim, ka $F>C$. Tad 2. svēršanā salīdzināsim monētas F un E:

a) ja $F>E$, tad

$$A<B<C<D<E<F;$$

b) ja $F<E$, tad 3. svēršanā salīdzināsim monētas F un D:

b_1) ja $F>D$, tad

$$A<B<C<D<F<E;$$

b_2) ja $F<D$, tad

$$A<B<C<F<D<E.$$

Lemma pierādīta.

II Pierādījums. Dotās 6 monētas apzīmēsim ar m_i, kur i=1, 2, 3, 4, 5, 6. Faktu, ka monēta X ir vieglāka nekā monēta Y, pierakstīsim šādi: $X<Y$.

Pieņemsim, ka $m_1<m_2<m_3<m_4<m_5$.

Šķirosim 2 gadījumus.

I gadījums. Shematiski svēršanas process ir parādīts 145. zīmējumā.

1. svēršana

$\mathbf{m_6<m_3}$

2. svēršana

1) $\mathbf{m_6>m_1}$

2) $\mathbf{m_6<m_1}$

$\underline{\mathbf{m_6<m_1<m_2<m_3<m_4<m_5}}$

3. svēršana

1) $\mathbf{m_6>m_2}$

$\underline{\mathbf{m_1<m_2<m_6<m_3<m_4<m_5}}$

2) $\mathbf{m_6<m_2}$

$\underline{\mathbf{m_1<m_6<m_2<m_3<m_4<m_5}}$

145. zīm.

II gadījums. Shematiski svēršanas process ir parādīts 146. zīmējumā.

1. svēršana

$\mathbf{m_6>m_3}$

2. svēršana

1) $\mathbf{m_6<m_5}$

2) $\mathbf{m_6>m_5}$

$\underline{\mathbf{m_1<m_2<m_3<m_4<m_5<m_6}}$

3. svēršana

1) $\mathbf{m_6>m_4}$

$\underline{\mathbf{m_1<m_2<m_3<m_4<m_6<m_5}}$

2) $\mathbf{m_6<m_4}$

$\underline{\mathbf{m_1<m_2<m_3<m_6<m_4<m_5}}$

146. zīm.

25. Atbilde. Nē, nevar.

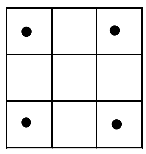
Risinājums. No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vienmēr viens skaitlis dalās ar 3, tātad arī triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 3. Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.

Bet 1+9+9+4+1+9+9+5=47 nedalās ar 3, tātad arī skaitlis 19941995 nedalās ar 3, tāpēc tas nevar būt triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums.

26. Atbilde. Gada laikā Sprīdītis nokritās svarā par 2,8%.

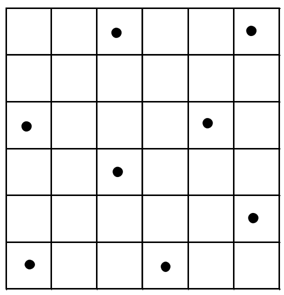
Risinājums. Pieņemsim, ka sākumā Sprīdīša svars bija x. Pēc dotā
pavasarī tas bija 75% no x=0,75x,
vasarā – 120% no 0,75x=0,90x,
rudenī – 90% no 0,90x=0,81x,
ziemā – 120% no 0,81x=0,972x.
Acīmredzot gada laikā Sprīdītis nokritās svarā par 2,8%.

27. Atbilde. a) 4 centrus (skat. 147. zīm.);



147. zīm.

b) 8 centrus (skat. 148. zīm.).



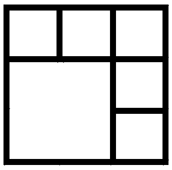
148. zīm.

28. I Pierādījums. Tā kā 21 un 49 dalās ar 7, tad arī saskaitāmie 21x un 49y dalās ar 7, un arī to summa 21x+49y dalās ar 7; tātad arī skaitlis A dalās ar 7.

II Pierādījums. Pārveidojam doto izteiksmi: A=21x+49y=7·(3x+7y). Tā kā viens no reizinātājiem - 7 dalās ar 7, tad arī reizinājums 7·(3x+7y) dalās ar 7, tātad arī skaitlis A dalās ar 7.

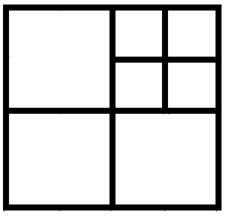
29. Atbilde. 1. Jā, var.

a) Skat. 149. zīmējumu;



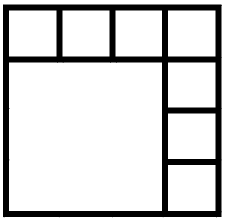
149. zīm.

b) skat. 150. zīmējumu;



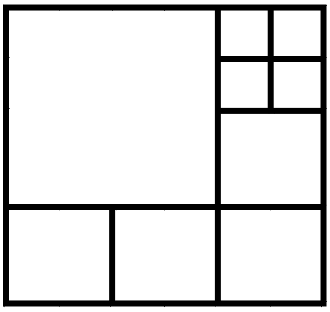
150. zīm.

c) skat. 151. zīmējumu;



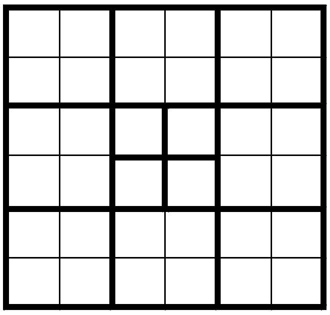
151. zīm.

d) skat. 152. zīmējumu.



152. zīm.

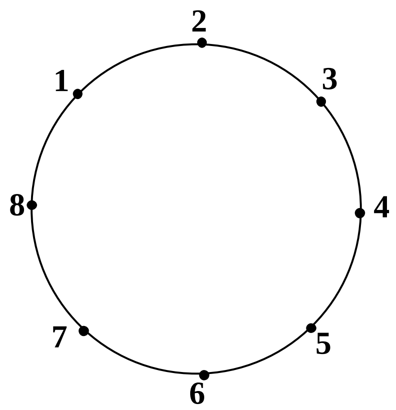
2. Skat. 153. zīmējumu.



153. zīm.

30. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Attēlosim cilvēkus ar punktiem un atliksim šos punktus uz riņķa līnijas. Pieņemsim, ka savstarpēji pazīstamajiem cilvēkiem atbilstošie punkti atrodas blakus viens otram (skat. 154. zīm.).



154. zīm.

Iespēja atlikt punktus šādā veidā dod pamatu atbildei – tas ir iespējams.

31. Atbilde. a) Skaitlis 101 ir pirmskaitlis un to sadalīt reizinātājos nav iespējams;
b) $1001=11\cdot 91$.

Risinājums. a) Ievērosim, ka dotais skaitlis izsakāms kā

$$101=10^2+1;$$

apzīmējot a=10, iegūstam

$$a^2+1.$$

a^2+1 sadalīt reizinātājos, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas, nav iespējams. Tā kā var gadīties, ka skaitlis sadalās reizinātājos, bet atbilstošā algebriskā izteiksme nē, tad pārbaudīsim, vai skaitlis 101 ir salikts skaitlis vai pirmskaitlis.

$10 < \sqrt{101} < 11$, tāpēc pārbaudīsim skaitļa 101 dalāmību ar pirmskaitļiem 2; 3; 5; 7:

101 nedalās ar 2, jo nav pāra skaitlis;

101 nedalās ar 3, jo skaitļa ciparu summa ir 2 un nedalās ar 3;

101 nedalās ar 5, jo skaitļa pēdējais cipars nav 0 vai 5;

101 nedalās ar 7, to varam pārbaudīt tieši: 101:7=14, atl. 2.

Tātad skaitlis 101 ir pirmskaitlis.

b) Skaitli 1001 izsakām kā

$$1001=10^3+1;$$

apzīmējot a=10, iegūstam

$$a^3+1.$$

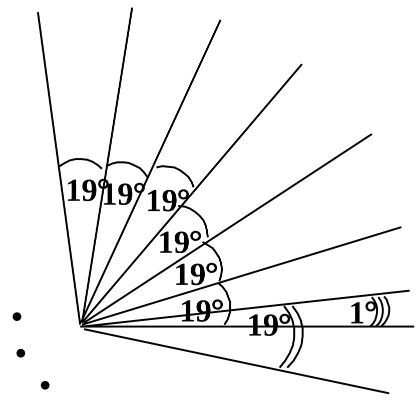
Pēc formulas

$$a^3+1=$$
$$=(a+1)(a^2-a+1).$$

Tātad

$$
\begin{aligned}
&1001= \\
&=10^3+1= \\
&=(10+1)(10^2-10+1)= \\
&=11\cdot 91.
\end{aligned}
$$

<u>32. Risinājums</u>. Ievērosim, ka 19·19=361. Tas nozīmē, ka, 19 reizes atliekot vienu aiz otra 19° lielus leņķus vienā virzienā, pēdējā leņķa pēdējā mala veidos ar pirmā leņķa pirmo malu 1° lielu leņķi (skat. 155. zīm.).



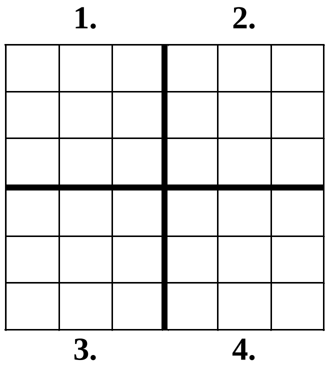
155. zīm.

<u>33. Pierādījums</u>. To ka 8 centrus var atzīmēt, parādījām 107. uzdevumā.

Pierādīsim, ka vairāk par 8 centriem atzīmēt nevar.

Pieņemsim pretējo: saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem atzīmēti vismaz 9 centri.

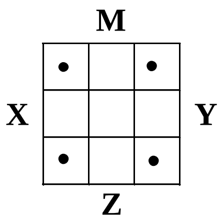
Doto kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas sadalām 4 vienādos 3×3 rūtiņu kvadrātos (skat. 156. zīm.).



156. zīm.

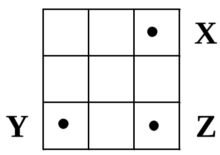
Tad vismaz vienā no četriem 3×3 rūtiņu kvadrātiem ir atzīmēti ne mazāk par 3 centriem, jo $2 \cdot 4 = 8 < 9$.

Aplūkosim šo kvadrātu un tajā atzīmētos 3 rūtiņu centrus. Neviena no trim atzīmētajām rūtiņām neaizņems centrālo rūtiņu un ne vairāk kā viena var būt atzīmēta malas vidējā rūtiņā (skat. 157. zīm.). $MX = MY < 2$ un $MZ = 2$.



157. zīm.

Tāpēc vismaz divi no centriem atzīmēti stūra rūtiņās; tiem jābūt pretējās stūra rūtiņās, jo $XZ = YZ = 2$. Pieņemsim, ka tie ir X un Y (skat. 158. zīm.).



158. zīm.

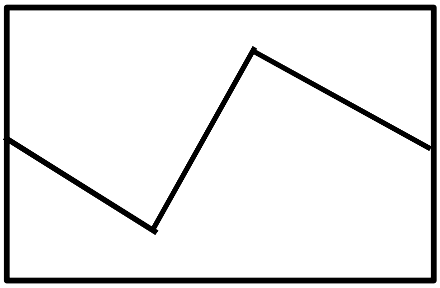
Viegli redzēt, ka trešo centru nav kur atzīmēt. Tātad mūsu pieņēmums, ka var atzīmēt 9 centrus, noved pie pretrunas un tāpēc ir aplams.

Esam pierādījuši, ka vairāk par 8 centriem atzīmēt nevar.

34. Atbilde. Vismazākā iespējamā visu skaitļu summa ir 15, bet vislielākā iespējamā - 30.

Risinājums. Uzrakstīsim uz katras kartītes skaitli 2. Katru piecu kartīšu skaitļu summa būs 10 (vislielākā iespējamā). Tā kā ir 15 kartītes, tad, sagrupējot tās pa 5, redzam, ka vislielākā iespējamā visu skaitļu summa ir 30.
Uzrakstīsim uz katras kartītes skaitli 1. Katru piecu kartīšu skaitļu summa būs 5 (vismazākā iespējamā). Tā kā ir 15 kartītes, tad, sagrupējot tās pa 5, redzam, ka vismazākā iespējamā visu skaitļu summa ir 15.

35. Atbilde. Skat. 159. zīmējumu.

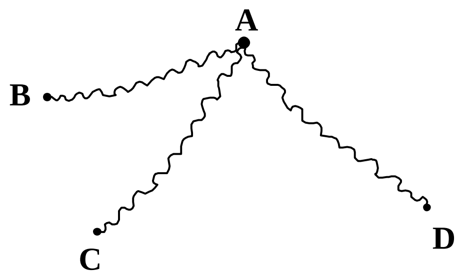


159. zīm.

36. Atbilde. Jā, var.

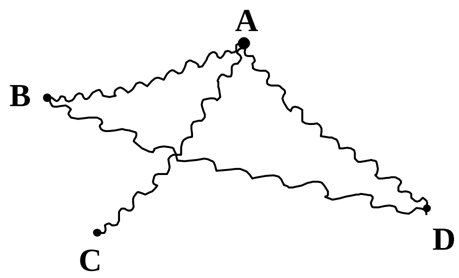
Risinājums. Attēlosim pasažierus ar punktiem. Ja divi pasažieri nav pazīstami, savienosim tos ar taisnu līniju; ja divi pasažieri ir pazīstami, savienosim tos ar viļņotu līniju. Tādējādi katri divi punkti savienoti vai nu ar taisnu līniju, vai ar viļņotu līniju. Pierādīsim, ka var atrast 3 punktus, kas visi savā starpā savienoti vai nu ar taisnu līniju, vai ar viļņotu līniju.
Izvēlamies patvaļīgu punktu A. No tā iziet 5 līnijas. Saskaņā ar Dirihlē principu D_2 (ja vairāk nekā $m \cdot n$ priekšmeti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies $m+1$ priekšmets) vai nu taisnas līnijas, vai viļņotas līnijas ir vismaz 3 no tām.
Pieņemsim, ka var atrast 3 viļņotas līnijas (otrs gadījums, kad var atrast 3 taisnas līnijas, ir pilnīgi analoģisks).

Apskatīsim šo viļņoto līniju galapunktus B, C un D (skat. 160. zīm.).



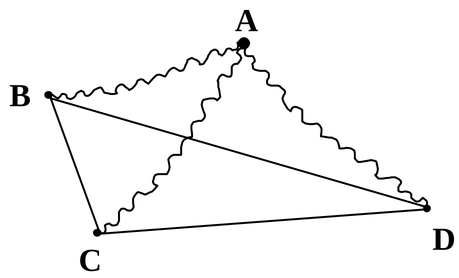
160. zīm.

Ja <u>kaut divus</u> no tiem savieno viļņota līnija, tad veidojas "viļņots trijstūris" ABD (skat. 161. zīm.). Tātad var atrast trīs tādus pasažierus, kas visi ir savā starpā pazīstami.



161. zīm.

Ja punkti B, C un D ir savienoti ar taisnām līnijām, tad veidojas "taisns trijstūris" BCD (skat. 162. zīm.). Tātad var atrast trīs tādus pasažierus, starp kuriem nekādi divi nav savā starpā pazīstami.



162. zīm.

<u>**37. Atbilde**</u>. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6}.$

Risinājums. Īsti pozitīvi daļskaitļi ir tie, kuru saucēji un skaitītāji ir naturāli skaitļi, turklāt skaitītājs ir mazāks par saucēju.

1) Ja saucējs ir skaitlis 2, iegūstam tikai $\frac{1}{2}$;

2) ja saucējs ir skaitlis 3, tad iegūstam $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$;

3) ja saucējs ir skaitlis 4, iegūstam $\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}$;

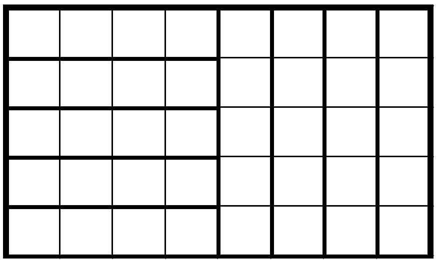
4) ja saucējs ir skaitlis 5, iegūstam $\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$;

5) ja saucējs ir skaitlis 6, iegūstam $\frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6}$.

Tātad pavisam ir 15 īsti daļskaitļi, kuru saucēji nepārsniedz 6:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6}.$$

38. Atbilde. Skat., piemēram, 163. zīmējumu. Iegūstam 5 taisnstūrīšus ar izmēriem 1×4 un 4 taisnstūrīšus ar izmēriem 1×5.



163. zīm.

39. Atbilde. 1. Nē, tas nav iespējams.

2. Nē, tas nav iespējams.

Risinājums. 1. Šis skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir 2;

dalās ar 3, jo tā ciparu summa ir $3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3=18$, tātad dalās ar 3.

Saskaņā ar dalāmības pazīmi ar 5 dalās skaitlis, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5, bet apskatāmais skaitlis izveidots no cipariem 1; 2; 3; tātad nedalās ar 5.

Tātad nevar tā būt, ka viens no šiem skaitļiem dalās ar 2, ar 3 un ar 5.

2. Vislielākais iespējamais skaitlis ir 4321, bet vismazākais iespējamais – 1234. Ja kāds no iegūtajiem skaitļiem dalītos ar citu skaitli, tad dalījumā iznāktu 2 vai 3. Rezultātā nav iespējams iegūt 2 tāpēc, ka, kādu no skaitļiem pareizinot ar 2, iegūtajā reizinājumā būtu cipari 2, 4, 6, 8.

Dalījumā nav iespējams iegūt 3 tāpēc, ka četrciparu skaitļa, kas izveidots no cipariem 1; 2; 3; 4 ciparu summa ir 1+2+3+4=10 un nedalās ar 3.

Tātad nevar būt, ka kāds no šiem skaitļiem dalās ar kādu citu no izveidotajiem skaitļiem.

40. Atbilde. Piemēram, der skaitļi

a) 2 un 3;

b) 2 un 4;

c) 3 un 6;

d) 4 un 8;

e) 5 un 10.

Risinājums. Tiešām,

3-2=1 un LKD(2; 3)=1;

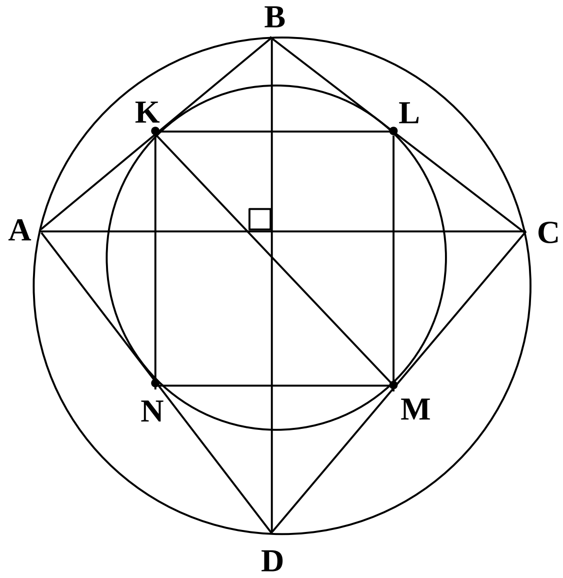
4-2=2 un LKD(2; 4)=2;

6-3=3 un LKD(3; 6)=3;

8-4=4 un LKD(4; 8)=4;

10-5=5 un LKD(5; 10)=5.

41. Pierādījums. Četrstūra ABCD malas AB viduspunktu apzīmēsim ar K, malas BC viduspunktu - ar L, malas CD viduspunktu - ar M, malas DA viduspunktu - ar N (skat. 164. zīm.).



164. zīm.

Tad KN ir ΔABD viduslīnija, tāpēc KN││BD. Līdzīgi spriežam par KL, LM, MN.
KL ir ΔABC viduslīnija, tāpēc KL││AC;
ML ir ΔBCD viduslīnija, tāpēc ML││BD;
MN ir ΔACD viduslīnija, tāpēc MN││AC.
Redzam, ka nogriežņi, kas savieno malu viduspunktus, paralēli četrstūra ABCD diagonālēm.
Tāpēc četri malu viduspunkti ir taisnstūra KLMN virsotnes; ap to var apvilkt riņķa līniju, kuras diametrs ir KM.

42. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Dotajā tabulā rindas un kolonnas sanumurēsim no 2 līdz 4 (skat. tabulu 165. zīm.).

	2	3	4
2	**4**	**6**	**8**
3	**6**	**9**	**12**
4	**8**	**12**	**16**

165. zīm.

Tabulā skaitļi novietoti tā, ka i – tās rindiņas un j – tās kolonnas krustojumā ierakstītais skaitlis ir $i \cdot j$. Piemēram, apskatot 3. rindiņu un 4. kolonnu: $3 \cdot 4 = 12$, redzam, ka rindiņas un kolonnas krustojumā atrodas skaitlis 12. Tāpēc neizsvītroto skaitļu summa būs vienāda ar $R \cdot K$, kur R - neizsvītroto rindiņu numuru summa, K - neizsvītroto kolonnu numuru summa. Tas nozīmē, ka neizsvītroto skaitļu summa nebūs pirmskaitlis.

43. Pierādījums. Aplūkosim 7 istabas Sniegbaltītes mājiņā, kuras apzīmēsim ar numuriem 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Katrā istabā ievietosim tos rūķīšus, kuru draugu skaits vienāds ar istabas numuru. Pastāv 2 gadījumi.

I Istabā ar numuru 0 atrodas kāds rūķītis (apzīmēsim to ar A).

Tad rūķītim A nav neviena drauga. Tas nozīmē, ka neviens no pārējiem rūķīšiem nedraudzējas ar rūķīti A; tātad neviens no rūķīšiem nedraudzējas ar 6 pārējiem rūķīšiem. Tāpēc istaba ar numuru 6 ir tukša. Tātad 7 rūķīši ir ievietoti 6 istabās ar numuriem 0, 1, 2, 3, 4, 5, bet tas nozīmē, ka kādā istabā atrodas vismaz 2 rūķīši.

Tātad ir 2 rūķīši, kuriem ir vienāds draugu skaits.

II Istaba ar numuru 0 ir tukša.

Tātad 7 rūķīši ir ievietoti 6 istabās ar numuriem 1, 2, 3, 4, 5, 6. Arī šinī gadījumā kādā istabā atrodas vismaz 2 rūķīši, tātad ir 2 rūķīši, kuriem ir vienāds draugu skaits.

<u>44. Atbilde</u>. Jā, tas ir iespējams.

<u>Risinājums</u>. Aplūkosim 2×2 rūtiņu kvadrātu (skat. 166. zīm.).

a	**b**
c	**d**

166. zīm.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$$a+b+c+d>0.$$

Lai $a+b+c<0$, tad $d>|a+b+c|$. No šejienes izriet, ka jābūt $d>0$; citādi, negatīvam skaitlim $a+b+c$ pieskaitot d, nevar iegūt pozitīvu skaitli.

<u>45. Atbilde</u>. Klasē mācās 13 zēni un 17 meitenes.

<u>Risinājums</u>. Pieņemsim, ka 1. zēns dejoja ar 5 meitenēm, 2. zēns - ar 6 meitenēm, 3. zēns - ar 7 meitenēm utt. Tas nozīmē, ka katram nākošajam zēnam meiteņu skaits, ar kurām dejoja, ir par vienu lielāks nekā iepriekšējam. Ja pēdējais zēns dejoja ar visām meitenēm, tad divu skaitļu, no kuriem viens apzīmē pēdējā zēna kārtas numuru, bet otrs - visu meiteņu skaitu, summa ir 30.

Uzdevumu viegli var atrisināt, sastādot tabulu (skat. 167. zīm.). No tās redzams, ka zēnu skaits ir 13, bet meiteņu - 17.

Zēni	Meiteņu skaits, ar kurām dejoja
1.	5
2.	6
3.	7
4.	8
5.	9
6.	10
7.	11
8.	12
9.	13
10.	14
11.	15
12.	16
13.	17

167. zīm.

48. I Pierādījums. Pieņemsim, ka starp mājas iedzīvotājiem nevar atrast 3 tādus, kuriem gadu skaits ir vienāds. Tad

0 gadu ir ne vairāk kā 2 iedzīvotājiem

1 gads - ne vairāk kā 2 iedzīvotājiem

2 gadi - ne vairāk kā 2 iedzīvotājiem

…

78 gadi - ne vairāk kā 2 iedzīvotājiem.

Tātad mājā kopā dzīvo ne vairāk kā

$$\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{79\text{ reizes}}=158(\text{iedzīvotāji}).$$

Bet, saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, mājā ir 160 iedzīvotāji.

Tātad pieņēmums ir aplams, un mājā ir vairāk nekā 2 iedzīvotāji, kuriem gadu skaits ir vienāds.

Tas nozīmē, ka starp mājas iedzīvotājiem var atrast vismaz 3 tādus, kuriem gadu skaits ir vienāds.

II Pierādījums. Visus 160 mājas iedzīvotājus sadalīsim 79 grupās atkarībā no to gadu skaita.

1. grupā būs iedzīvotāji, kuriem ir 0 gadu
2. grupā būs iedzīvotāji, kuriem ir 1 gads
3. grupā būs iedzīvotāji, kuriem ir 2 gadi

…

79. grupā būs iedzīvotāji, kuriem ir 78 gadi.

Tā kā 160=79·2+2, tad noteikti atradīsies grupa, kurā būs vismaz 3 iedzīvotāji. No tā, kā grupas veidotas, seko, ka viņiem visiem būs vienāds gadu skaits, kas arī bija jāpierāda.

49. Atbilde. 1. 51 skaitli. Piemēram, 50, 51; 52; 53; …; 99; 100.

Risinājums. 1. Izvēloties skaitļus 50, 51; 52; 53; …; 99; 100, nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nav izvēlēta, jo katru divu izvēlēto skaitļu summa ir lielāka par 100, kas ir lielākais izvēlētais skaitlis.
Tātad lielākais skaits ir 51 naturāls skaitlis no 1 līdz 100 ieskaitot, kurus var izvēlēties tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu vienāda ar kādu trešo izvēlēto skaitli.

Pierādījums. 2. Katru no izraudzītajiem skaitļiem x uzrakstīsim formā

$$x=n\cdot 2^k, \text{ kur } n \text{ – nepāra skaitlis.}$$

Piemēram, $30=15\cdot 2^1$, $31=31\cdot 2^0$, $32=1\cdot 2^5$, $199=199\cdot 2^0$.
Acīmredzot, visi nepāra reizinātāji n ir mazāki nekā 200. Starp skaitļiem no 1 līdz 200 ir tikai 100 dažādi nepāra skaitļi. Tāpēc starp 101 izvēlēto skaitli saskaņā ar Dirihlē pricipu (ja vairāk nekā n priekšmeti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 priekšmeti) varēs atrast divus tādus skaitļus, kuriem nepāra reizinātāji ir vienādi.
Pieņemsim, ka tie ir skaitļi

$$A=2^n\cdot y \text{ un } B=2^m\cdot y.$$

Tā kā $A\neq B$, tad $n\neq m$.

Pieņemsim, ka n>m, tad

$$\frac{A}{B} = 2^{n-m}.$$

Tā kā n>m, tad n-m ir naturāls skaitlis un arī 2^{n-m} ir naturāls skaitlis. Tātad skaitlis A dalās ar skaitli B. Uzdevums atrisināts.

50. Atbilde. S=660.

Risinājums. Katrs no apskatāmajiem cipariem dažos skaitļos parādās kā desmitu cipars, dažos – kā vienu cipars.

Aplūkosim, cik skaitļos cipars 1 parādās kā desmitu cipars. Viegli saprast, ka ir 4 šādi skaitļi: 12, 13, 14 un 15. Līdzīgi cipars 1 parādās 4 reizes kā vienu cipars. Tāpēc visu vieninieku "ieguldījumu" summa ir

$$1 \cdot 4 \cdot (10+1)=$$
$$=4 \cdot 11=$$
$$=44.$$

Līdzīgi varam aprēķināt visu citu ciparu "ieguldījumu" summu. Tāpēc meklējamā visu skaitļu summa ir

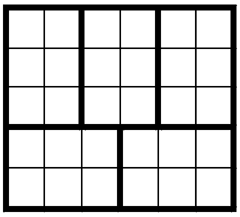
$$S=4 \cdot 11 \cdot (1+2+3+4+5)=$$
$$=44 \cdot 15=$$
$$=660.$$

51. Atbilde. Visi trīs skaitļi vienlaicīgi var būt nenegatīvi skaitļi.

Risinājums. Ja a=b=c, tad (a-b)·(a-c)=0, (b-a)·(b-c)=0 un arī (c-a)·(c-b)=0 (0 ir nenegatīvs skaitlis). Tātad visi trīs skaitļi vienlaicīgi var būt nenegatīvi skaitļi.

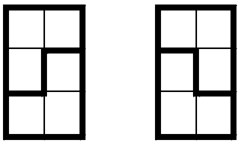
52. Atbilde. 32 veidos.

Risinājums. Skat., piemēram, 168. zīmējumu, kur taisnstūris, kas sastāv no 5×6 rūtiņām sagriezts 5 taisnstūros ar izmēriem 2×3 rūtiņas.



168. zīm.

Katru no 5 taisnstūriem ar izmēriem 2×3 var sagriezt 2 "stūrīšos" divos dažādos veidos (skat. 169. a) un b) zīm.); tādējādi iegūstam $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5=32$ dažādus sadalījumus.



a) b)

169. zīm.

53. Atbilde. Mazākais iespējamais kvadrātā ierakstīto dažādo burtu skaits ir 4 (skat. 170. zīm.).

a	b	a	b
c	d	c	d
a	b	a	b
c	d	c	d

170. zīm.

Risinājums. Tādās četrās rūtiņās, kādas parādītas 171. zīmējumā, jābūt ierakstītiem dažādiem burtiem, jo katras divas no tām saskaras vai nu ar malu, vai ar stūri. Tātad nepieciešami vismaz 4 dažādi burti.

a	**b**
d	**c**

171. zīm.

54. Atbilde. Reizinājuma pēdējais cipars ir 0.

Risinājums. Iedomāsimies, ka izteiksmē $R=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot1994\cdot1995$ visi reizinātāji sadalīti pirmskaitļu reizinājumos. Iegūtā izteiksme satur kaut kādu daudzumu divnieku, kaut kādu daudzumu piecinieku un vēl citus pirmreizinātājus. Skaidrs, ka divnieku ir vairāk. Apvienojot pāros katru piecinieku ar kādu divnieku, iegūstam zināmu skaitu reizinātāju 10. Tātad reizinājuma R pēdējais cipars ir 0.

55. Pierādījums. Tas, ka 51 skaitli (50; 51; 52; …; 98; 99; 100) starp naturāliem skaitļiem no 1 līdz 100 ieskaitot, var izvēlēties tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu vienāda ar kādu trešo izvēlēto skaitli, parādīts 49. uzdevumā.

Pierādīsim, ka vairāk par 51 skaitli izvēlēties nevar. Apzīmēsim lielāko izvēlēto skaitli ar k. Aplūkosim 2 gadījumus.

I k – pāra skaitlis, $k=2m$. Tad $m\le50$.

Sadalīsim skaitļus grupās

$$\{1 \text{ un } 2m-1\}; \{2 \text{ un } 2m-2\};\{3 \text{ un } 2m-3\}; \ldots; \{m-1 \text{ un } m+1\}.$$

Grupu pavisam ir m-1. Tā kā katrā grupā ietilpstošo skaitļu summa ir 2m (bet 2m ir starp izvēlētajiem skaitļiem!), tad saskaņā ar Dirihlē principu (ja n priekšmeti sadalīti n grupās tā, ka nevienā grupā nav vairāk par 1 priekšmetu, tad katrā grupā ir tieši 1 priekšmets) no grupām nedrīkst būt izvēlēti vairāk par m-1 skaitļiem. Pievienojot vēl skaitļus 2m un varbūt m (lielāki par 2m nav izvēlēti, jo 2m ir lielākais izvēlētais skaitlis), iegūstam, ka kopējais izvēlēto skaitļu skaits nav lielāks par $(m-1)+1+1=m+1$, t. i., nepārsniedz 51 skaitli.

II k – nepāra skaitlis, k=2m+1. Tā kā 2m+1≤100, tad 2m≤99 un $m \le 49\frac{1}{2}$; m – vesels skaitlis, tāpēc no šejienes seko, ka m≤49.

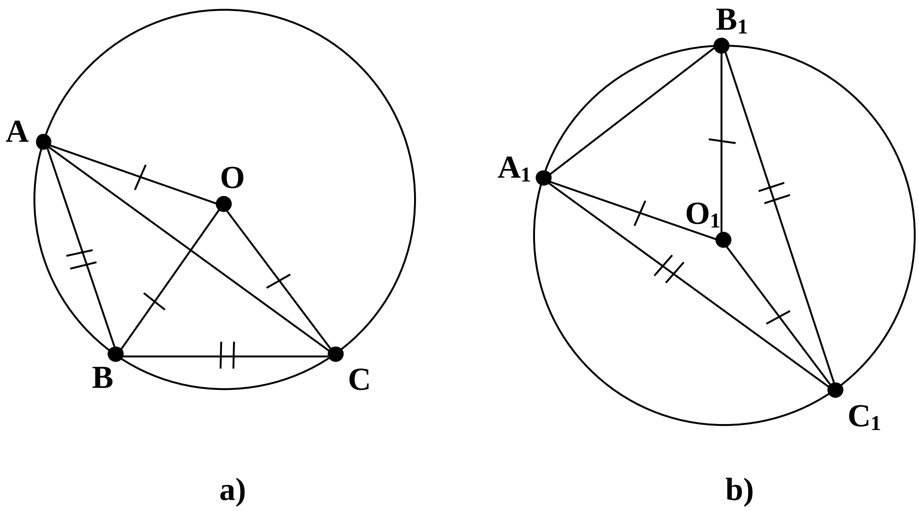
Sadalīsim skaitļus grupās

{1 un 2m}; {2 un 2m-1};{3 un 2m-2}; …; {m un m+1}.

Grupu pavisam ir m+1. Tā kā katrā grupā ietilpstošo skaitļu summa ir 2m+1 (bet 2m+1 ir starp izvēlētajiem skaitļiem!), tad saskaņā ar Dirihlē principu (ja n priekšmeti sadalīti n grupās tā, ka nevienā grupā nav vairāk par 1 priekšmetu, tad katrā grupā ir tieši 1 priekšmets) no grupām nedrīkst būt izvēlēti vairāk par m+1 skaitļiem. Tātad kopējais izvēlēto skaitļu skaits nepārsniedz pat 50 skaitļus.

56. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Šādas četru punktu sistēmas piemērs ir vienādsānu platleņķa trijstūra (skat. 172. a) zīm.) vai vienādsānu šaurleņķa trijstūra (skat. 172. b) zīm.) virsotnes un ap tiem apvilkto riņķa līniju centri.



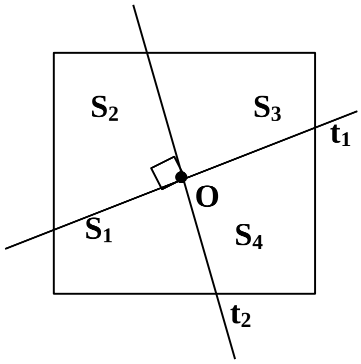
172. zīm.

Pamatosim to.

Ja starp 3 izvēlētajiem punktiem viens ir centrs O vai O_1, tad punkta O vai O_1 attālumi līdz abiem pārējiem punktiem ir vienādi kā ap vienādsānu trijstūri apvilktās riņķa līnijas rādiusi; tātad šie 3 izvēlētie punkti ir vienādsānu trijstūru AOB, BOC un AOC vai $A_1O_1B_1$, $B_1O_1C_1$ un $A_1O_1C_1$ virsotnes, un vienādās malas "satiekas" punktā O vai O_1.

Ja starp 3 izvēlētajiem punktiem nav punkta O, tad tie visi ir vienādsānu trijstūra ABC vai $A_1B_1C_1$ virsotnes.

57. Pierādījums. Ja divas taisnes t_1 un t_2 iet caur kvadrāta centru un ir savstarpēji perpendikulāras $t_1 \perp t_2$, tad katra no taisnēm dala kvadrāta laukumu uz pusēm (skat. 173. zīm.).

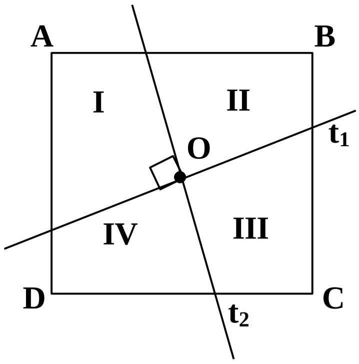


173. zīm.

Tātad

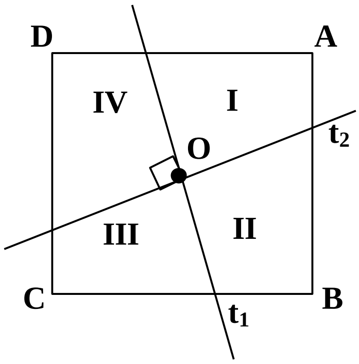
$$
\begin{aligned}
&S_1 + S_2 = \\
&= S_2 + S_3 = \\
&= S_3 + S_4 = \\
&= S_4 + S_1.
\end{aligned}
$$

Pagriezīsim kvadrātu (skat. 174. zīm.) ap centru O par 90° pulksteņa rādītāja virzienā.



174. zīm.

Taisne t_1 attēlosies par taisni t_2, bet taisne t_2 - par taisni t_1. Punkts A attēlosies par punktu B (jo OA=OB un $\angle AOB=90°$), līdzīgi punkts B attēlosies par punktu C, punkts C attēlosies par punktu D, punkts D attēlosies par punktu A; tātad kvadrāts ABCD attēlosies pats par sevi (skat. 175. zīm.).

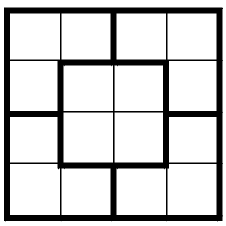


175. zīm.

No šiem faktiem seko, ka I daļa attēlosies par II daļu, II daļa attēlosies par III daļu, III daļa attēlosies par IV daļu, IV daļa attēlosies par I daļu; tātad daļas I, II, III un IV visas ir vienādas. Tātad tām ir vienādi laukumi.

Vajadzīgais pierādīts.

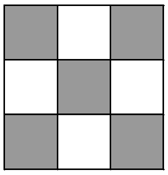
<u>58. Atbilde</u>. 1. Skat. 176. zīmējumu.



176. zīm.

2. 5 veidos.

Risinājums. 2. Iekrāsojam 3×3 rūtiņu kvadrātu kā šaha galdiņu (skat. 177. zīm.).

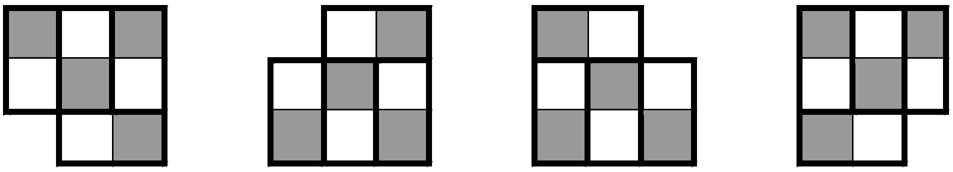


177. zīm.

Katrs taisnstūrītis ar izmēriem 1×2 rūtiņas pārklāj vienu iekrāsotu rūtiņu un vienu neiekrāsotu rūtiņu. Lai 3×3 rūtiņu kvadrātu varētu pārklāt ar taisnstūrīšiem, kuru izmēri 1×2 rūtiņas, iekrāsoto rūtiņu un neiekrāsoto rūtiņu skaitam jābūt vienādam; tātad jāizgriež kāda no iekrāsotajām rūtiņām. Tā kā tās ir piecas, tad uzdevumu var izpildīt 5 veidos.

Aplūkosim 2 gadījumus.

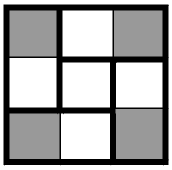
I Izgriezta kāda no stūra rūtiņām. Iegūstam 4 veidus (skat. 178. a), b), c) un d) zīm.).



a) **b)** **c)** **d)**

178. zīm.

II Izgriezta centrālā rūtiņa. Iegūstam 1 veidu (skat. 179. zīm.).



179. zīm.

<u>59. Atbilde</u>. 44 reizes.

<u>Risinājums</u>. 24 stundās minūšu rādītājs veic 24 apgriezienus, stundu rādītājs - 2 apgriezienus. Ja stundu rādītājs būtu nekustīgs, tad minūšu rādītājs viena apgrieziena laikā būtu 2 reizes tam perpendikulārs, diennakts laikā – 48 reizes perpendikulārs. Tā kā stundu rādītāja kustības virziens sakrīt ar minūšu rādītāja kustības virzienu, taisno leņķu skaits samazinās par 2 katrā apgriezienā, bet kopumā par 4 apgriezieniem. Tātad pulksteņa minūšu un stundu rādītāji diennaktī ir perpendikulāri 44 reizes.

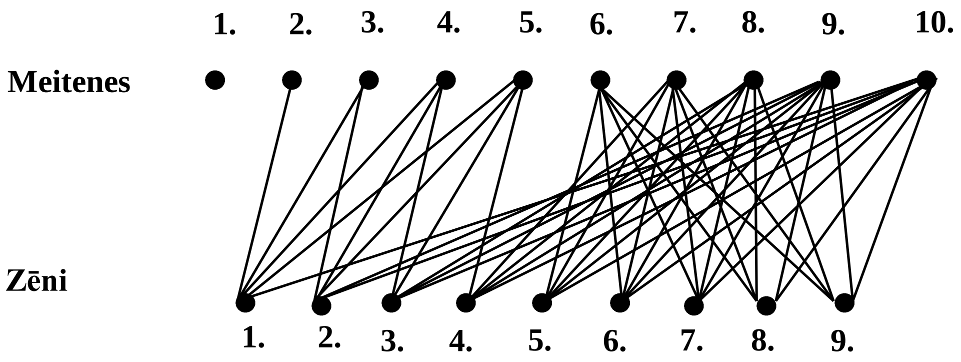
<u>60. Atbilde</u>. Jā, var. Katrs zēns draudzējas ar 5 meitenēm, bet katrai meitenei ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 draugi – zēni.

<u>I Risinājums</u>. Uzdevumā prasītais ir iespējams (skat. 180. zīm.).

Meitenes	**Zēnu-draugu skaits**
1.	0
2.	1
3.	2
4.	3
5.	4
6.	5
7.	6
8.	7
9.	8
10.	9
Draudzību skaits	**45**

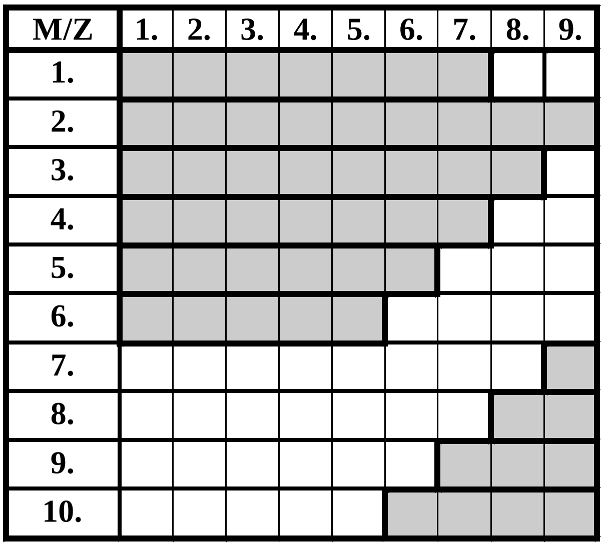
180. zīm.

<u>II Risinājums</u>. Draudzību skaits ir 45. Tā kā klasē ir 9 zēni, tad 45:9=5, tātad katrs zēns draudzējas ar 5 meitenēm (skat. 181. zīm.).



181. zīm.

III Risinājums. Skat. 182. zīmējumu. Iekrāsota rūtiņa apzīmē draudzēšanos.



182. zīm.

61. Atbilde. a) Piemēram, a=11 un b=22;

b) piemēram, a=19 un b=22.

Risinājums. a) Ja nevienā šķirā nerodas pārnesums, tad katrā šķirā rezultāta cipars vienāds ar abu saskaitāmo ciparu summu šajā šķirā; tāpēc a+b ciparu summa S ir tieši A+B.
Piemēram, ja a=11 (A=1+1=2) un b=22 (B=2+2=4), tad a+b=11+22=33 (S=3+3=6).

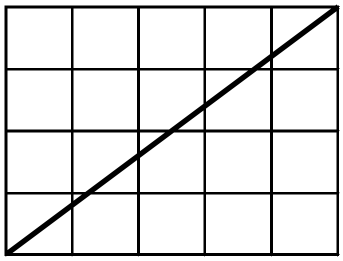
b) Ja kādā šķirā summā iegūstam divciparu skaitli $\overline{1x} = 10 + x$ (lielāku summu par 19 iegūt acīmredzot nevar, jo katrs no abu saskaitāmo cipariem nepārsniedz 9, bet pārnesums no iepriekšējās šķiras nav lielāks par 1), tad attiecīgajā šķirā summā rakstām ciparu x, bet saskaitāmā 10 vietā summas nākošās šķiras cipara veidošanā piedalās 1. Tāpēc summas a+b ciparu summa S iznāks mazāka par A+B (katrs pārnesums "pamazina" tās vērtību par 10-1=9).
Piemēram, ja a=19 (A=1+9=10) un b=22 (B=2+2=4), tad a+b=19+22=41 (S=4+1=5).

62. Atbilde. Jā, tas ir iespējams.

Risinājums. Rūķis Reinis to Sniegbaltītei paziņo 1. janvārī.
31. decembrī ir bijusi rūķa Reiņa dzimšanas diena, kad viņš kļuva 98 gadus vecs. Aizvakar 30. decembrī viņš bija 97 gadus vecs. Šogad viņam paliks 99 gadi, bet nākošgad viņš kļūs 100 gadus vecs.

63. Atbilde. Taisnstūris sadalīts 28 gabalos.

Risinājums. Kā viegli redzams no 183. zīmējuma, šis skaits ir 20+8=28 (sākotnējam rūtiņu skaitam 20 pievienojas 8 jaunas daļas, kas rodas, diagonālei krustojot astoņas no šīm rūtiņām un dalot katru no tām divās daļās).



183. zīm.

64. Atbilde. Piemēram, $a=\frac{1}{3}; b=\frac{2}{3}$ un $a=\frac{1}{8}; b=\frac{3}{8}$.

Risinājums. Ja skaitļiem a un b pastāv vienādība

$$a^2+a=b^2,$$

tad no tās pārveidojumu ceļā iegūstam

$$a=b^2-a^2.$$

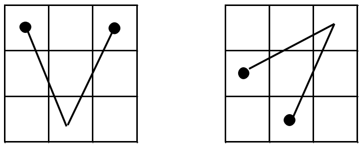
Ja $a=\frac{1}{3}$ un $b=\frac{2}{3}$, tad

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Ja $a = \frac{1}{8}$ un $b = \frac{3}{8}$, tad

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} - \frac{1}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

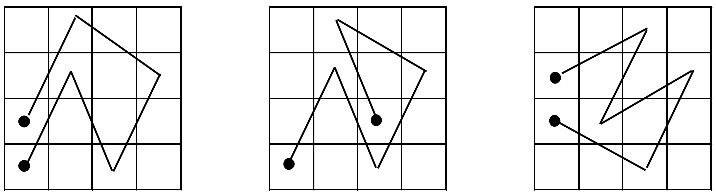
65. Atbilde. a) Skat. 184. a) un b) zīmējumu;



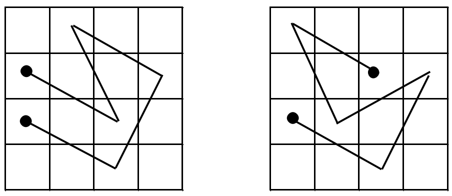
a) **b)**

184. zīm.

b) skat. 185. a), b) c), d) un e) zīmējumu;



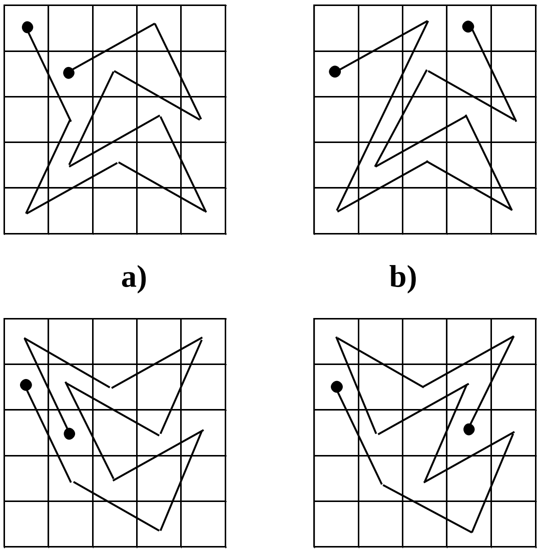
a) **b)** **c)**



d) **e)**

185. zīm.

b) skat. 186. a), b) c) un d) zīmējumu.



a) **b)** **c)** **d)**

186. zīm.

<u>66. Pierādījums</u>. Pieņemsim, ka visi deputāti kaut kā sadalīti divās komisijās.

Katrā komisijā aplūkosim visus iespējamos deputātu pārus un saskaitīsim, cik ir tādu pāru, kuros apvienotie deputāti ir pretinieki viens otram (tiek pieņemts, ka attieksme "būt pretiniekiem" ir simetriska; ja deputāts A ir deputāta B pretinieks, tad arī deputāts B ir deputāta A pretinieks). Šo pāru kopskaitu abās komisijās apzīmēsim ar S.

Aplūkosim šādu operāciju.

Ja kādā no komisijām ir deputāts, kuram šajā komisijā ir 2 vai 3 pretinieki, tad pārcelsim šo deputātu uz otru komisiju, kurā tam būs ne vairāk kā 1 pretinieks. Šādas operācijas rezultātā skaitlis S samazināsies vismaz par 1, bet tas var notikt tikai galīgu skaitu reižu. Tātad, galīgu skaitu reizes atkārtojot aprakstīto operāciju, katram deputātam savā komisijā nebūs vairāk kā 1 pretinieks.

67. Atbilde. **a)** Piemēram, a=9, b=72;
b) piemēram, a=125, b=1000.

Risinājums. a) Piemēram, ja a=9 un b=9·8=72, tad S(a)=9 un S(b)=7+2=9, tātad S(a)=S(b).

b) Piemēram, ja a=125 un b=1000, tad S(a)=1+2+5=8 un S(b)=1+0+0=0=1, tātad S(a)=8·S(b).

68. Atbilde. * vietā jāliek cipars 8.

Risinājums. Saskaņā ar dalāmības pazīmi sešciparu skaitlis $\overline{abcdef}$ dalās ar 11 tad un tikai tad, kad S=f-e+d-c+b-a dalās ar 11. Tā kā

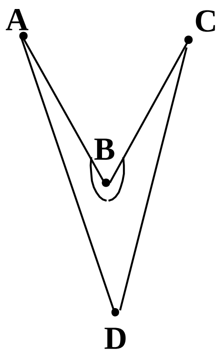
S=1+2+3+4+5+*=15+*,

tad cipari 1; 2; 3; 4; 5; * jāsadala pa 3 divās grupās tā, lai grupu ciparu summas atšķirtos viena no otras par 11.

(*+4+5)-(1+2+3)=*+9-6=*+3.

Tātad * vietā jāliek cipars 8.
Piemēram, skaitlis 182435 dalās ar 11.

69. Atbilde. Jā, var (skat. 187. zīm.).



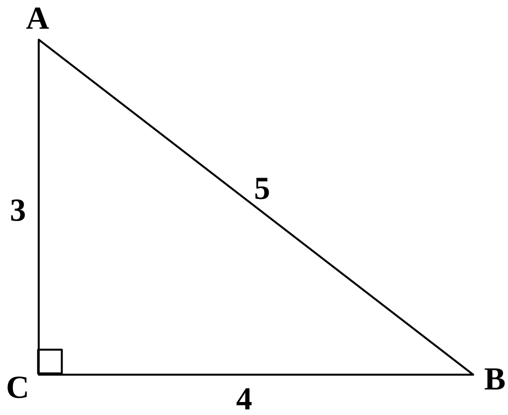
187. zīm.

Risinājums. Četrstūra leņķu lielumu summa ir 360°. Izliektā četrstūrī katrs leņķis ir mazāks par 180°, tātad triju pārējo leņķu lielumu summa ir lielāka par 180°.

Ieliektā četrstūrī viena leņķa lielums ir lielāks par 180°, tātad triju pārējo leņķu lielumu summa mazāka par 180°.

70. Atbilde. Vislielākais trijstūra laukums var būt 6 cm^2.

Risinājums. Trijstūra laukums vislielākais būs tad, ja tas būs taisnleņķa trijstūris ar malu garumiem 3 cm, 4 cm un 5 cm (skat. 188. zīm.).

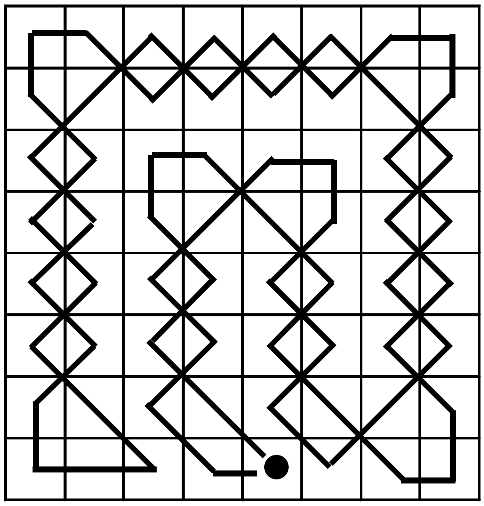


188. zīm.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

71. Atbilde. Visgarākais ceļš ir $S = 14 + 50\sqrt{2}$.

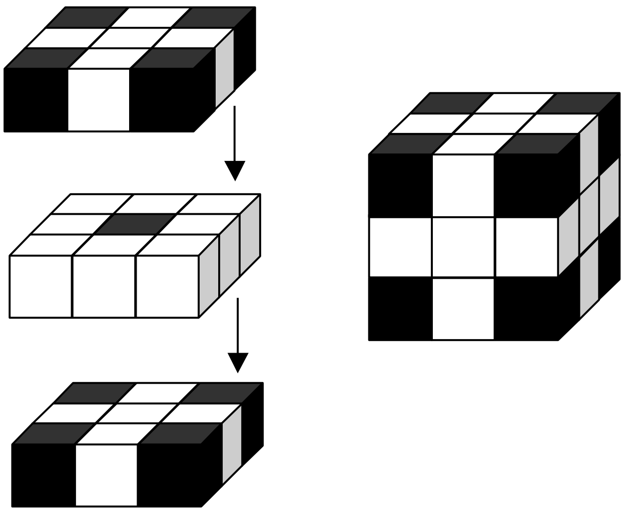
Risinājums. Skat., piemēram, 189. zīmējumu, kur uzzīmēts karaļa maršruts.



189. zīm.

Maksimālais lauztās līnijas garums ir $14 + 50\sqrt{2}$.

72. Atbilde. Skat. 190. zīmējumu.



190. zīm.