**„Profesora Cipariņa kluba” 1993./94.m.g.**

**uzdevumu atrisinājumi**

**1.nodarbība**

1. 1. Pie Aijas viesojās 7 meitenes.
      1. Tā kā katram zēnam abās pusēs stāvēja meitenes, bet katrai meitenei abās pusēs stāvēja zēni, tad zēni un meitenes pa apli stāv pamīšus. Tā kā aplī ir 8 zēni, tad tur ir arī 8 meitenes (katrā atstarpē starp 2 zēniem pa vienai). Tā kā pati Aija arī stāv aplī, tad pie Aijas ciemos atnākušas 7 meitenes.
2. 1. To izdarīt nav iespējams.
      1. Visu mūsu rīcībā esošo atsvaru masas ir pāra skaitļi. Pēc tam, kad pirmo reizi uz kausiem tiek novietoti atsvari, smagākais kauss "pārsver" vieglāko par lielumu (s1+s2+...+sk)- (v1+v2+...+vm), kur s1+s2+...+sk - uz smagākā kausa novietoto atsvaru masas, bet v1+v2+...+vm- uz vieglākā kausa novietoto atsvaru masas. Visu atsvaru masas izsakās ar pāra skaitu gramu. Izdarot saskaitīšanas un atņemšanas darbības tikai ar pāra skaitļiem, rezultāts vienmēr ir pāra skaitlis. Tātad pirmajā svēršanā mēs varam nosvērt miltu kaudzīti, kura sver pāra skaitu gramu. Šo kaudzīti līdz ar atsvariem varam izmantot otrajā svēršanā; pēc tam abas jau iegūtās kaudzītes līdz ar atsvariem varam izmantot trešajā svēršanā, utt. Tomēr, spriežot līdzīgi kā iepriekš, mēs katrā jaunā svēršanā varam izmantot tikai jau zināmus smagumus, kuru masas ir pāra skaits gramu, un tātad atkal iegūt tikai tādu jaunu miltu kaudzīti, kuras masa ir pāra skaits gramu. Apvienojot šādas kaudzītes, mēs iegūsim tādu miltu daudzumu, kura masa gramos ir pāra skaitlis. Bet mums jānosver 255 grami.
3. 1. Mazākā iespējamā summas vērtība ir 4.
      1. Piemēru, kur šī summa ir 4, sk. 63.zīm.



Pamatosim, kāpēc summa nevar būt mazāka par 4. Sadalīsim kvadrātu taisnstūros tā, kā parādīts 64.zīm. (viena rūtiņa paliek ārpus taisnstūriem).



Visa kvadrāta skaitļu summa veidojas no šo četru taisnstūru skaitļu un skaitļa, kas ierakstīts pelēkajā rūtiņā, summas. Katrā no 4 taisnstūriem ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 1. Tas izriet no dotā. (Tātad 1 ir mazākā šī rūtiņu pāra skaitļu summa). Arī pelēkajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir nenegatīvs. Tātad visu ierakstīto skaitļu summa nevar būt mazāka par 4.

1. 1. tā nevar būt.
      1. Pieņemsim, ka starp skaitļiem ab, ac, cd, de, bf un ef ir tieši trīs negatīvi skaitļi. Triju pozitīvu un triju negatīvu skaitļu reizinājums ir negatīvs; tāpēc

(ab)⋅(ac)⋅(cd)⋅(de)⋅(bf)⋅(ef)<0.

Taču šis reizinājums nevar būt negatīvs, jo katru savu reizinātāju tas satur tieši 2 reizes:

(ab)⋅(ac)⋅(cd)⋅(de)⋅(bf)⋅(ef)=a2⋅ b2⋅ c2⋅ d2⋅ e2⋅ f2.

Tā kā starp dotajiem skaitļiem nav 0, tad šis reizinājums noteikti ir pozitīvs. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums, ka starp dotajiem sešiem reizinājumiem ir tieši trīs negatīvi, ir bijis aplams.

1. 1. Pirmais skaitlis ir lielāks par otro.
      1. Aplūkosim visus 80 pirmā skaitļa reizinātājus. Sadalīsim tos grupās pa 8, saliekot iekavas:

(2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2)⋅ (2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2)⋅...⋅ (2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2⋅2).

Tā kā katrās iekavās ir 8 reizinātāji, tad pavisam ir 10 iekavas. Iegūto izteiksmi varam pārrakstīt arī šādi:

, jo katras iekavas vērtība ir 256. Analogi rīkosimies arī ar otro skaitli. Sadalīsim trijniekus 10 iekavās, katrās pa 5 trijniekiem:



Tagad reizinājumos () un () ir pa 10 reizinātājiem. Visi reizinātāji ir pozitīvi un katrs pirmā skaitļa reizinātājs ir lielāks par katru otrā skaitļa reizinātāju. Tātad pirmais skaitlis ir lielāks par otro.

1. * 1. Vispirms parādīsim, kā **vienādmalu** trijstūri var sagriezt vienādsānu trapecēs, izvēloties trijstūra iekšpusē patvaļīgu punktu un novelkot no tā nogriežņus paralēli trijstūra malām (sk. 65.zīm.)



Tagad ievērosim, ka "garu un šauru" taisnstūri var sadalīt vienādmalu trijstūros (tos mēs jau protam sadalīt trapecēs) un vienādsānu trapecēs (sk. 66.zīm.).



Risinājumā ir svarīgi, ka taisnstūris ir pietiekami izstiepts, lai abi vienādmalu trijstūri savstarpēji nepārklātos. Ja gadījumā, šādi zīmējot, abi trijstūri pārklājas, tad sākotnējais taisnstūris jāpārdala uz pusēm - divos taisnstūros - un jāveic konstrukcija katrā taisnstūrī atsevišķi. Lai pierādījums būtu pilnīgs, jāpamato, kāpēc punkti M un N atrodas vienādos attālumos no taisnstūra horizontālajām malām; izdariet to patstāvīgi. Skaidrs, ka jebkuru kvadrātu var sadalīt taisnstūros, kurus, savukārt, var sadalīt kā parādīts iepriekš (sk. 67.zīm.)



* + 1. Aplūkosim doto naturālo skaitļu a, b, c un d dalīšanos ar 3. Dalot naturālu skaitli ar 3, iespējami 3 dažādi atlikumi - 0; 1 un 2. Tā kā doti 4 skaitļi, tad vismaz diviem no tiem atlikumi, dalot ar 3, ir vienādi (ja visu doto skaitļu atlikumi, dalot ar 3, būtu atšķirīgi, doto skaitļu nebūtu vairāk par 3). Ja divi skaitļi x un z dod vienādus atlikumus, dalot ar kādu skaitli y, tad skaitļu x un z starpība dalās ar y bez atlikuma. (Tiešām, ja x, dalot ar y, dod atlikumu r un z, dalot ar y, arī dod atlikumu r, tad x=k⋅y+r un z=m⋅y+r.

Tad x-z=(ky+r)-(my+r) = ky+rmy-r = ky-my=y(k-m); Tātad x-z dalās ar y.) Tā kā uzdevumā dotais reizinājums satur visas iespējamās skaitļu a, b, c, d starpības pa divi, tad viena no tām dalīsies ar 3.

Aplūkosim doto naturālo skaitļu a, b, c, d dalīšanos ar 4. Iespējami atlikumi, dalot ar 4, ir 0, 1, 2 un 3. Ja starp dotajiem skaitļiem ir divi tādi, kas, dalot ar 4, dod vienādus atlikumus, tad šo skaitļu starpība dalās ar 4.

Apskatīsim tagad gadījumu, kad visu doto skaitļu atlikumi, dalot ar 4, ir dažādi. Tā kā reizinājums satur visas iespējamās šo skaitļu starpības pa divi, tad starp tām ir divas, kas dalās ar 2 - starpība, kuras elementi, dalot ar 4, dod atlikumus 0 un 2, un starpība, kuras elementi, dalot ar 4, dod atlikumus 1 un 3. Ja divas no iekavām dalās ar 2, tad viss reizinājums dalās ar 4. Tātad reizinājums dalās gan ar 3, gan ar 4. Tā kā skaitļu 3 un 4 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad reizinājums dalās ar 3x4=12.

1. 1. Tas nav iespējams.
      1. Izkrāsosim kuba virsotnes baltā un melnā krāsā tā, kā parādīts 68.zīm.



Skudra, pārvietojoties pa kuba šķautnēm, nokļūs no melnas virsotnes baltā un no baltas virsotnes melnā. Tādā gadījumā viņas maršrutu mēs varam pierakstīt: -M-B-M-B-...-M-B-... Ir skaidrs, ka skudras maršrutā balto un melno virsotņu skaits ir vai nu vienāds (ja ceļu sāk vienas krāsas virsotnē, bet beidz otras krāsas virsotnē), vai arī atšķiras par 1 (ja ceļu sāk un beidz vienas un tās pašas krāsas virsotnēs). Ja skudras ceļojuma laikā 7 virsotnēs tā būtu bijusi tieši 4 reizes, bet vienā vismaz 6 reizes, tad, tā kā ir tieši 4 katras krāsas virsotnes, mēs varam apgalvot, ka vienas krāsas visās virsotnēs ir bijusi tieši pa 4 reizēm, bet otras krāsas 3 virsotnēs pa 4 reizēm un vienā virsotnē vismaz 6 reizes. Tādā gadījumā skudras maršruta virknītē viena krāsa parādītos 4x4=16 reizes, bet otra vismaz 3x4+6=18 reizes. Tas ir pretrunā ar to, ka dažādu krāsu virsotņu skaits virknītē atšķiras ne vairāk kā par 1.

1. 1. 180o.



Risinājumā izmantosim faktu, ka trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi.

1. Apskatām Δ AMD: ∠1+∠4=∠KML
2. Apskatām Δ GKC: ∠7+∠3=∠MKL
3. Apskatām Δ BTF: ∠2+∠6=∠LTE
4. Apskatām Δ TLE: ∠5+∠LTE=∠MLT

No (1) - (4) iegūstam:

∠5+(∠2+∠6)+( ∠1+∠4)+( ∠7+∠3) =

=∠5+∠LTE+∠KML+∠MKL=

=∠MLT+∠KML+∠MKL=180o.



Ar Ai apzīmēsim leņķi "zvaigznes iedobumā", bet ar Bi - iekšējo septiņstūra leņķi, i=1; 2; ...; 7 (sk. 70.zīm.).

Aplūkosim četrstūri P1A7B7A1. Tā iekšējo leņķu summa ir 360o: ∠1+∠A7 +∠B7 +∠A1=360o. Analogi spriežam par četrstūriem P2A1B1A2, P3A2B2A3, P4A3B3A4, P5A4B4A5, P6A5B5A6, P7A6B6A7 un iegūstam:

∠1+∠A7 +∠B7 +∠A1=360o

∠2+∠A1 +∠B1 +∠A2=360o

∠3+∠A2 +∠B2 +∠A3=360o

∠4+∠A3 +∠B3 +∠A4=360o

∠5+∠A4 +∠B4 +∠A5=360o

∠6+∠A5 +∠B5 +∠A6=360o

∠7+∠A6 +∠B6 +∠A7=360o

Saskaitīsim šīs vienādības, apzīmējot ∠1+∠2+∠3+∠4+∠5+∠6+∠7=S,

iegūstam :

S+2(∠A1+∠A2+...+∠A7)+ (∠B1+∠B2+...+∠B7)=7⋅360o ()

Ievērosim, ka ∠B1+∠B2+...+∠B7=180o⋅(7-2)=900o kā izliekta septiņstūra iekšējo leņķu summa.

Aplūkosim ΔA1B1B7. Izmantosim 1. risinājumā minēto teorēmu par ārējā leņķa lielumu. Tad iegūsim:

∠A1=(180o-∠B1)+ (180o-∠B7)= 360o-∠B1-∠B7

Līdzīgi iegūstam: ∠A2=360o-∠B1-∠B2

∠A3=360o-∠B2-∠B3

∠A4=360o-∠B3-∠B4

∠A5=360o-∠B4-∠B5

∠A6=360o-∠B5-∠B6

∠A7=360o-∠B6-∠B7

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam:

∠A1+∠A2+...+∠A7 = 7⋅360o - 2⋅(∠B1+∠B2+...+∠B7) =

= 2520o-2⋅900o = 720o.

Ievietojot iegūtos rezultātus vienādībā (), iegūstam:

S=2520o-900o-1440o=180o.

1. 1. Andrim var būt vai nu 12, vai 13 draugi.

Vienošanās. Risinājumā kā divas atsevišķas draudzības tiks uzskaitītas X draudzēšanās ar Y un Y draudzēšanās ar x (ja X un Y ir draugi)

Andra klasē mācās 26 skolēni (25 klasesbiedri un pats Andris). Aplūkosim 2 gadījumus: Andrim ir klasesbiedrs bez draugiem, vai arī katram ir vismaz 1 draugs.

* + - * 1. Ja Andrim ir klasesbiedrs bez draugiem, tad lielākais draugu skaits, kāds var būt kādam šīs klases skolēnam, ir 24 (ja kādam būtu 25 draugi, tad viņš draudzētos ar visiem pārējiem šīs klases skolēniem un nebūtu tāda skolēna, kuram nav neviena drauga). Tātad Andra klasesbiedriem ir pa 0; 1; 2; ...; 24 draugiem. Apvienosim grupā A tos skolēnus, kuriem ir 0; 1; 2; ...; 12 draugi, bet pārējos grupā B, Andri neieskaitot nevienā no grupām. Grupas B skolēniem kopā ir 13+14+15+...+24=222 draudzības. Grupas A skolēniem kopā ir 0+1+2+...+12=78 draudzības. Tātad grupas B skolēniem ir vismaz 222-78=144 draudzības ārpus grupas A, un tikai 144 draudzības ārpus A tai iespējamas. Tikai tad, ja visas A draudzības ir grupā B. No šīm 144 draudzībām pašas grupas B ietvaros nevar būt vairāk kā 12x11=132 draudzības. Tātad grupas B skolēniem vēl atliek vismaz 144-132=12 draudzības ārpus grupām A un B. Tātad visas šīs draudzības ir ar Andri. Tātad Andrim jābūt draugos ar visiem 12 grupas B skolēniem. Ja arī kāds no A grupas draudzētos ar Andri, tad grupai A būtu mazāk draudzību grupā B, un tad grupai B vajadzētu vairāk draudzību ārpus A, kas nav iespējams. Tāpēc neviens no A grupas nedraudzējas ar Andri. Līdz ar to Andrim ir tieši 12 draugi. Uzkonstruēsim piemēru, kurā parādīsim, ka tāda situācija tiešām ir iespējama. Apzīmēsim visus pirmās grupas bērnus ar A0, A1, A2, …, A12, bet otrās - ar B1, B2, …, B12.

A0 nedraudzējas ne ar vienu,

A1 draudzējas ar B1,

A2 draudzējas ar B1, B2

A3 draudzējas ar B1, B2, B3

A4 draudzējas ar B1, B2, B3, B4

utt.

A12 draudzējas ar B1, B2, B3, …, B12

Bez tam liksim visiem grupas B ietvaros draudzēties vienam ar otru un vēl arī ar Andri. Tādā gadījumā A0 ir 0 draugi, A1 ir 1 draugs, A2 ir 2 draugi utt., A12 ir 12 draugi. B1 ir 12(no grupas A) + 11(no grupas B) +1 (Andris) = 24 draugi, B2 ir 11+11+1=23 draugi, B3 ir 10+11+1=22 draugi, utt.…, B1 ir 2+11+1=14 draugi, B12 ir 1+11+1=13 draugi. Tātad esam parādījuši tādu klases modeli, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem un kurā Andrim ir 12 draugi.

* + - * 1. Aplūkosim otru gadījumu, kad Andra visiem klasesbiedriem ir vismaz viens draugs. Tātad Andra klasesbiedriem ir pa 1, 2, …, 25 draugiem (Andrim ir 25 klasesbiedri un tiem visiem ir dažāds draugu skaits). Apvienosim tos Andra klasesbiedrus, kuriem ir 1, 2, 3, …, 12 draugi, grupā C, bet pārējos - grupā D. Grupas C bērniem kopā ir 1+2+…+25=147 draudzības, bet grupas D bērniem kopā ir 13+14+…+25=247 draudzības. Grupas D bērniem ārpus C ir vismaz 247-78=169 draudzības, un tikai 169 draudzības ārpus C grupai D iespējamas vienīgi gadījumā, ja visi grupas C skolēnu draugi ir no grupas D. Pašas grupas D ietvaros lielākais iespējamais draudzību skaits ir 13x12=156 (ja katram ir draugs). Tātad vēl grupas D skolēniem paliek 169-156=13 draudzības ārpus grupās C un D. Tā kā D ir tieši 13 bērni, tad tie visi ir Andra draugi.

Ja Andrim būtu kāds draugs no C, tad D draugu skaits ārpus C būtu vēl lielāks, taču tas nav iespējams, jo D lielākais draugu skaits ārpus C var būt 13x12+13=169. Tātad grupā C nav neviena Andra drauga un Andrim ir tieši 13 draugi.

Tagad konstruēsim piemēru, lai parādītu, ka tāda situācija tiešām ir iespējama.

C1 draudzējas ar D1

C2 draudzējas ar D1, D2

C3 draudzējas ar D1, D2, D3

utt.…

C12 draudzējas ar D1, D2, …, D12

Vēl katrs no grupas D draudzējas ar visiem citiem šajā grupā un arī ar Andri.

Tad C1 ir 1 draugs, C2 - 2 draugi, …, C12 - 12 draugi.

D1 - 12(no grupas C)+12(no grupas D)+1(Andris)=25,

D2- 11+12+1=24,

utt.…

D12 - 1+12+1=14,

D13 - 12+1=13 draugi.

Tātad Andrim šajā piemērā ir tieši 13 draugi.

1. * 1. Apzīmēsim Cipariņa pateikto skaitļu summu ar S, bet reizinājumu ar R. Tā kā tie ir naturāli skaitļi, tad S3. Ja S=3, tad Sandra uzreiz zinātu, ka iedomātie skaitļi ir 1; 1 un 1. Ja S=4, tad arī Sandra uzreiz zinātu iedomātos skaitļus - 1; 1 un 2. Ja S=5, tad pastāv divas iespējas - 1; 1 un 3, kā arī 1, 2, 2. Abos gadījumos S>R (1+1+3>1⋅1⋅3 un 1+2+2>1⋅2⋅2). Tāpēc rodas pretruna ar Sandras izteikumu, ka viņa varētu noteikt skaitļus, ja zinātu, ka R>S. Ja S7, tad arī ir iespējami divi dažādi skaitļu trijnieki (visu iespējamo trijnieku skaits ir lielāks), kuriem reizinājums ir lielāks par summu. Tie ir (1; 2; S-3) un (1;3;S-4). Tiešām, 1+2+S-3<1⋅2⋅(S-3)=2S-6 (ja S7, tad 2S-6>S) un 1+3+S-4<1⋅3⋅(S-4)=3S-12 (ja S7, tad 3S-12>S). Tātad Sandra nevarētu pateikt trīs skaitļus, ja arī zinātu, ka to reizinājums ir lielāks par summu. Atliek viena iespēja: S=6. To, tāpat kā mēs, varēja konstatēt arī Regīna. Tad Cipariņa skaitļi ir (1; 1; 4); (1; 2; 3) vai (2; 2; 2). Tikai pirmajā gadījumā R<S, tāpēc Cipariņa iedomātie skaitļi ir 1; 1 un 4.
2. 1. To izdarīt nav iespējams.
      1. Iekrāsosim kvadrātu tā, kā tas parādīts 71.zīm.



Pavisam kvadrātā ir 81 rūtiņa. Deviņas no tām jau izgrieztas, atlikušie stūrīši saturēs kopā 72 rūtiņas. Tā kā katrs stūrītis satur 3 rūtiņas, tad vēl tiks izgriezti 72:3=24 stūrīši. Katrs stūrītis satur lielākais 1 krāsoto rūtiņu. Tātad 24 stūrīši saturēs lielākais 24 krāsotās rūtiņas, bet šādu rūtiņu pavisam ir 25. Tātad atlikušo figūru sagriezt stūrīšos nav iespējams.

1. 1. No desmit cipariem jācenšas izveidot divus piecciparu skaitļus. Pamatosim to. Divu piecciparu skaitļu summa (attiecīgi izvietojot ciparus) varētu būt piecciparu skaitlis. Ja izveidotu kādu sešciparu skaitli, tad otrs skaitlis būtu četrciparu skaitlis un abu skaitļu summa būs vismaz sešciparu skaitlis. Katrs sešciparu skaitlis, protams, ir lielāks par jebkuru piecciparu skaitli. Līdzīgi pamato, ka viens no saskaitāmajiem nevar būt septiņciparu, astoņciparu skaitlis utt.

Apzīmēsim pirmo izveidoto skaitli ar , bet otro - ar . Mūs interesē, kad summa 10000(a+A)+1000(b+B)+100(c+C)+10(d+D)+(e+E) būs pati mazākā. Skaidrs, ka tā notiks tad, ja (a+A) būs pati mazākā iespējamā vērtība, tātad 1+2 vai 2+1. Tiešām, ja a vai A būtu lielāks par kādu no sekojošiem cipariem x, tad, mainot vietām x ar a resp. ar A, mēs iegūtu lielāku summu (vecākā šķirā parādītos lielāks cipars). Līdzīgi iegūstam, ka (b+B) būs nākamā mazākā iespējamā vērtība, t.i., 0+3 vai 3+0 utt. Iegūstam

a+A=1+2 (2+1)

b+B=0+3 (3+0)

c+C=4+5 (5+4)

d+D=6+7 (7+6)

e+E=8+9 (9+8).

Tā kā summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības, tad ir vienalga, kuru ciparu no pāra (a,A) kombinējam ar kuru ciparu no pāra (b,B) utt. Pavisam iespējami 16 dažādi pāri ar minimālo summu. Lūk, divi piemēri:



1. 1. Atrisināsim vispārīgāku uzdevumu. Pieņemsim, ka dota n pozitīvu skaitļu augoša virkne a1<a2<...<an un otra n pozitīvu skaitļu augoša virkne b1<b2<...<bn. Izveidosim n reizinājumus, katrā reizinājumā ņemot vienu skaitli no pirmās un vienu - no otrās virknes. Pie tam katru skaitli izmantosim kā reizinātāju tikai vienu reizi. Kādā gadījumā iegūto n reizinājumu summa būs vismazākā un kādā - vislielākā?

Mēs pierādīsim, ka vislielākā summa ir a1⋅b1+ a2⋅b2+…+ an⋅bn (t.i., ja sareizina savā starpā abu virkņu mazākos skaitļus, abu virkņu otros mazākos skaitļus, abu virkņu lielākos skaitļus), bet vismazākā summa ir a1⋅bn+ a2⋅bn-1+…+ an⋅b1 (t.i., ja sareizina pirmās virknes mazāko un otrās virknes lielāko skaitli, pirmās virknes otro mazāko un otrās virknes otro lielāko skaitli utt.)

**Lemma.** Ja e<f un g<h, tad eg+fg>eh+fg.

Tiešām, pierādāmo nevienādību var pārveidot par

eg+fg-eh-fg>0

e(g-h)-f(g-h)>0

(e-f)(g-h)>0,

kas ir acīmredzami patiesa nevienādība, jo e-f<0 un g-h<0, bet divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.

No lemmas uzreiz seko mūsu uzdevuma atrisinājums.

Apskatīsim patvaļīgu summu, kas izveidota saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Pieņemsim, ka ai<aj, bx>by un mūsu apskatāmajā summā ai sareizināts ar bx, bet aj sareizināts ar by, t.i., "mazāks a sareizināts ar lielāku b". Izdarīsim vienu izmaiņu: reizināsim ai ar by, bet aj ar bx; citus reizinājumus neaizskarsim. Saskaņā ar lemmu ai bx+ aj by<aiby+ ajbx, tātad mūsu apskatāmās summas vērtība šīs izmaiņas rezultātā ir pieaugusi. Turpinām šādas izmaiņas, kamēr vien var atrast tādas vietas, kur "mazāks a sareizināts ar lielāku b". Šo izmaiņu rezultātā apskatāmās summas vērtība visu laiku augs. Agri vai vēlu visas šādas vietas būs atrastas un "izlabotas"; tad a1 būs reizināts ar b1, a2 ar b2, …, an ar bn. Tā kā n reizinājumu summa visu laiku palielinājās, tad beigās iegūtā summa a1⋅b1+ a2⋅b2+…+ an⋅bn ir lielāka par sākotnējo ( vai arī vienāda ar to, ja jau pašā sākumā a1 bija reizināts ar b1, a2 ar b2, utt.) Tātad šī summas vērtība ir lielākā iespējamā.

Līdzīgi pierāda apgalvojumu par to, kad n reizinājumu summas vērtība ir mazākā iespējamā.

Tā kā 1<2<3<4 un , tad mūsu apskatāmās izteiksmes  lielākā iespējamā vērtība ir , bet mazākā iespējamā vērtība ir .

1. 1. 996 dažādos veidos (ja neņem vērā saskaitāmo kārtību.)

Tie ir: 1993=1+1992

1993=2+1991

1993=3+1990

……

1993=996+997.

* + 1. Skaidrs, ka citu veidu, kā izsacīt 1993 kā divu naturālu skaitļu summu (pat nerūpējoties, lai saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs ir 1) vispār nav.

Pamatosim, kāpēc katrs no šiem skaitļu pāriem apmierina uzdevuma nosacījumus.

Pieņemsim, ka skaitli 1993 var izteikt kā divu tādu naturālu skaitļu summu, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir d>1:

1993=a+b, LKD(a,b)=d, d1. Protams, ka d<1993, jo citādi a1993 un b1993 un summa a+b noteikti pārsniegtu 1993. Tad skaitļus a un b var izteikt šādi: a=s⋅d, b=t⋅d, kur t,s∈N. Tādā gadījumā 1993=a+b=s⋅d+t⋅d=d(s+t). No tā izriet, ka skaitlim 1993 ir vismaz 2 naturāli dalītāji d un (s+t), pie tam 1<d<1993. Taču tas nav iespējams, jo 1993 ir pirmskaitlis un tā vienīgie dalītāji ir 1 un 1993. Tātad d=1 un s+t=1993. Tātad, ja divu naturālu skaitļu summa ir 1993, tad tie ir savstarpēji pirmskaitļi. Savukārt, 1993 var izteikt kā divu naturālu skaitļu summu 996 atšķirīgos veidos.

To, ka 1993 ir pirmskaitlis, pārbauda tāpat kā 12.uzdevuma risinājumā.

1. 1. Nē; ir iespējams uzkonstruēt tādu izliektu četrstūri, kurš apmierina uzdevuma nosacījumus, bet nav paralelograms.
      1. Konstrukcija. (Sk. 72.zīm.)
         * 1. Novelkam diagonāli BD un atrodam tās viduspunktu O.
           2. Caur O novelkam patvaļīgu taisni t, uz kuras atradīsies otra diagonāle; t nav perpendikulāra BD.
           3. Ar rādiusa garumu, kas lielāks nekā B attālums līdz taisnei t un mazāks nekā BO, no centriem A un D novelkam riņķa līnijas lokus; katrs no tiem krusto taisni divos punktos.
           4. Par A un C izvēlamies tos krustpunktus, kas ir dažādos attālumos no BD.



Četrstūris ABCD nav paralelograms, lai gan BO=DO un AD=BC.

1. 1. Piemēram, tā! Sk. 73.zīm.



1. * 1. Pēc uzdevumā dotā ir iespējams lielākais 2 atšķirīgu masu monētas. Pretējā gadījumā, izvēloties trīs no monētām, varētu gadīties, ka visām izvēlētajām trim monētām masas ir atšķirīgas. Tas neatbilst dotajam.

Pirmajā svēršanas reizē uz katra svaru kausa novietosim pa divām monētām. Aplūkosim divas iespējas.

1. Pieņemsim, ka iestājas līdzsvars. Tas var gadīties tad, ja visu monētu masas ir vienādas, vai arī tad, ja uz katra svaru kausa novietota viena vieglākā un viena smagākā monēta. Šajā gadījumā otrajā svēršanas reizē salīdzinām divu šo monētu masas, kas pirmajā svēršanas reizē atradās uz viena svaru kausa. Ja arī tagad svari ir līdzsvarā, tad visām dotajām monētām masas ir vienādas. Ja svari nav līdzsvarā, tad starp dotajām monētām ir divu atšķirīgu masu monētas. Abas monētas, kas atrodas uz svariem pēdējā svēršanā, tad arī ir abu dažādo masu "pārstāves". Esam atraduši pa vienai monētai no katras masas.
2. Ja pirmajā svēršanas reizē svari nav līdzsvarā, tad **noteikti** visu monētu masas nav vienādas. Tātad ir divu dažādu masu monētas. Šajā gadījumā otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai, kas pirmajā svēršanas reizē atradās katra uz sava svaru kausa. Ja iestājas līdzsvars, tad abas otrajā reizē nesvērtās monētas ir ar dažādām masām. (Jo vienādu masu monētu noņemšana no katra svaru kausa nespēj ietekmēt līdzsvara attiecības). Ja otrajā svēršanas reizē līdzsvars neiestājas, tad uzreiz esam atraduši pa vienai monētai no katras masas (ir tikai divu atšķirīgu masu monētas).



* + 1. Tā kā ne 1, ne 9 nevar būt kādu divu doto skaitļu summas puse, tad gan 1, gan 9 ir ierakstāmi 3x3 kvadrāta stūros. Izšķirosim divas iespējas:
       1. 1 un 9 ierakstīti stūros pie vienas malas (sk. 75.zīm.).



Tad starp tiem viennozīmīgi ierakstāms skaitlis 5. Lai varētu atrast divu naturālo skaitļu summas pusi, kas arī ir naturāls skaitlis, abiem skaitļiem jābūt vai nu pāra, vai arī nepāra. Tātad 75.zīm. ar  apzīmētajās rūtiņās jāieraksta 3 dažādi nepāra skaitļi, bet mums vēl ir atlikuši tikai neierakstīti nepāra skaitļi. Tātad 1 un 9 nevar rakstīt stūra rūtiņās pie vienas malas.

* + - 1. 1 un 9 tiek ierakstīti pretējos stūros (sk. 76.zīm.)



Kā jau iepriekš minējām, tikai vienādas paritātes skaitļu pussumma ir naturāls skaitlis, tāpēc arī abās pārējās stūra rūtiņās jāieraksta nepāra skaitļi. Ja kādā no šiem stūriem ierakstām 5 (sk. 76.zīm.), tad viennozīmīgi tiek ierakstīti arī skaitļi 3 un 7 un atkal nav nepāra skaitļu, ko ierakstīt ar  apzīmētajās rūtiņās. Tātad pretējos stūros jāieraksta 3 un 7, un 5 jāieraksta centrālajā rūtiņā. Tālāk tabula aizpildās viennozīmīgi.

Pavisam ir 8 dažādas tabulas ar uzdevumā minēto īpašību. Tās iegūstamas no 74.zīm. attēlotajām tabulām, pagriežot tās par 90o; 180o; 270o; 360o.

* 1. Līdzīgi kā 74. uzdevuma risinājumā iegūstam, ka mazākā iespējamā summas vērtība ir , bet lielākā iespējamā summas vērtība ir .

1. 1. Ar "+1" un ar "-1".
      1. Sastādīsim izteiksmi, kura satur dotos skaitļus un kuras vērtība ir 1: 5⋅(2n+3) -2⋅(5n+7)=1 ()

Pieņemsim, ka 2n+3 dalās ar d un arī 5n+7 dalās ar d. Tādā gadījumā abas šīs izteiksmes var izteikt šādi: 2n+3=d⋅t un 5n+7=d⋅s. Tad, ievietojot to izteiksmē (), iegūsim 5⋅d⋅t-2⋅s⋅d=d⋅(5t-2s)=1.

tātad skaitļi d un 5t-2s ir skaitļa 1 dalītāji. Bet skaitļa 1 dalītāji ir vienīgi skaitļi "+1" un "-1". Tātad d=1 vai d= -1. Līdz ar to esam pamatojuši, ka (2n+3) un ⋅(5n+7) vienlaikus var dalīties vienīgi ar skaitļiem "+1" un "-1".

1. 1. Jā, četrstūris ar minētajām īpašībām noteikti ir paralelograms.
      1. Veiksim šādu konstrukciju:
         * 1. Novilksim diagonāli BD un atradīsim tās viduspunktu O.
           2. Caur O novilksim taisni t, kas saturēs otru diagonāli AC.
           3. Tā kā pēc dotā BC>BD=BO=OD, tad velkam lokus, kuru rādiusi lielāki par BO un centri atrodas punktos B un D. Katrs loks krustos taisni t divos punktos - noteikti abi krustpunkti atradīsies dažādās pusēs no punkta O, jo BC>BD. Apzīmēsim šos krustpunktus ar C1, C2, A1 un A2.
           4. Iespējamie četrstūri ir BA1DC2 vai BA2DC­1.
           5. Saskaņā ar doto un konstrukciju BC1=BC2=DA1=DA2. Tad ΔBC1C2 un ΔDA1A2 ir vienādsānu trijstūri. Pēc dotā punkti B un D atrodas vienādos attālumos no taisnes t, tad abiem minētajiem vienādsānu trijstūriem ir vienādi augstumi. Tad ΔBC1C2=ΔDA1A2. No tā iegūstam, ka ∠1=∠2=∠3=∠4.
           6. Ja ∠1=∠4, tad BC1||DA2, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi. Tā kā BC1=DA2, tad BC1DA2 ir paralelograms pēc pazīmes par vienādām un paralēlām malām.

Lietojot tādu pašu spriedumu, iegūstam arī to, ka BA1DC2 ir paralelograms.



1. 1. Piemēram, tā! Sk. 78.zīm.



1. * 1. Apskatīsim vispirms gadījumu, kad ir 8 monētas un atļautas 3 sviešanas.

Tāpat kā 78.uzdevuma atrisinājumā konstatējam, ka var būt augstākais divas atšķirīgas monētu masas.

Uzliekam uz katra kausa pa 4 monētām. Ja svari ir līdzsvarā, tad abos monētu četriniekos ir vienāds daudzums vieglāko monētu un vienāds daudzums smagāko monētu; ņemam vienu no šiem četriniekiem un rīkojamies ar to tāpat kā 78.uzdevuma atrisinājumā.



Tagad aplūkosim gadījumu ar 16 monētām un 4 pieļautām svēršanām.

Pirmajā svēršanas reizē uzliekam uz kausiem pa 8 monētām. Ja kausi ir līdzsvarā, tad uz tiem ir vienāds daudzums smagāko monētu. Ņemam vienu no šiem monētu astotniekiem un rīkojamies ar to, kā aprakstīts iepriekš.

Aplūkosim tagad gadījumu, kad pirmajā svēršanā viens kauss nosveras uz leju (pieņemsim, ka tas saturēja monētas A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8), bet otrs kaus paceļas augšup (apzīmēsim uz tā esošās monētas ar B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8).

Tālāk 2. svēršanā novietosim uz viena kausa A1, A2, A3, A4, bet uz otra kausa B1, B2, B3, B4. Šķirosim divas iespējas.

1. Kausi ir līdzsvarā. Varam secināt, ka A5, A6, A7, A8 kopā ir smagākas nekā , B5, B6, B7, B8. Nekas mūs netraucē iztēloties, ka sākumā mums bijušas tikai astoņas monētas A5-A8 un B5-B8, un ar pirmo svēršanu mēs esam uzzinājuši pasvītroto informāciju. Tad mēs esam vienā no tām situācijām, kādas rodas iepriekš apskatītā uzdevuma "8 monētas, 3 svēršanas" risināšanā pēc 1. svēršanas, un mēs varam pabeigt meklēšanu ar vēl divām svēršanām, kā iepriekš aprakstīts. Kopā būs patērētas 4 svēršanas.
2. Kausi nav līdzsvarā; varam pieņemt, ka A1, A2, A3, A4 kopā ir smagākas nekā B1, B2, B3, B4. Šo gadījumu analizē līdzīgi I.

Uzdevums atrisināts.

Lasītājs pats var pārliecināties, ka līdzīgā ceļā 32 monētu gadījumā pietiek ar 5 svēršanām, 64 monētu gadījumā - ar 6 svēršanām, …, 2n monētu gadījumā - ar n svēršanām.

1. 1. Nē, nepastāv.
      1. Pieņemsim, ka tāds trīsciparu skaitlis eksistē; apzīmēsim to ar . Pārnesot šī skaitļa pirmo ciparu uz beigām, mēs iegūstam trīsciparu skaitli , kurš ir 8 reizes lielāks par pirmo (nevaram iegūt divciparu vai pat viencipara skaitli, kas notiktu, ja b=0 vai b=c=0, jo tad iegūtais skaitlis nebūtu lielāks par sākotnējo.) Tātad ir spēkā vienādība =8⋅. Tātad  noteikti ir pāra skaitlis. tātad a vietā var atrasties tikai cipari 0, 2, 4, 6 un 8. Nulle nevar būt  pēdējais cipars, jo tad trīsciparu skaitlis  sāktos ar 0. Tātad skaitļa  pirmais cipars ir vismaz 2. Tātad >200. Pareizinot abas šīs nevienādības puses ar 8, iegūsim:

>200⋅8, jeb

>1600.

Tātad  noteikti ir četrciparu skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu.

1. 1. Iespējami divi gadījumi:
      * + 1. a=1 un b=996
          2. a=996 un b=1
      1. Pieskaitīsim abām dotās vienādības pusēm 1:

a+b+ab=1993 |+1

a+b+ab+1=1994

Sagrupēsim saskaitāmos un iznesīsim b pirms iekavām:

(a+1)+(b+ab)=1994

(a+1)+b(a+1)=1994

Sadalīsim vienādības abas puses reizinātājos:

(a+1)(1+b)=2⋅997

Ievērosim: ja a un b ir naturāli skaitļi, tad a+12 un b+12.

Gan 2, gan 997 ir pirmskaitļi, tāpēc tos nevar sadalīt pirmreizinātājos tālāk. Lai pastāvētu šī vienādība (ievērojot to, ka a un b ir naturāli skaitļi), ir 2 iespējas:

vai , no kurienes: vai .

1. 1. Sk. piemēram, 79.zīm.



Ievērojiet: saskaņā ar lauztas līnijas definīciju tās divi blakus posmi nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

1. * 1. Parādīsim, ka tā var gadīties. Izveidosim šādu modeli: ansambļa 9 dalībniekus attēlosim ar punktiem. Ja divi no skolēniem ir draugi, tad attiecīgos punktus savienosim ar līniju. Tātad, lai īstenotos uzdevuma prasības, mums jāvar uzzīmētos 9 punktus savienot ar līnijām tā, lai tieši no 3 punktiem izietu pa 8 līnijām, tieši no 3 punktiem izietu pa 7 līnijām, no viena punkta - 6 līnijas, no viena - 5 līnijas un vēl no viena - 4 līnijas. 80.zīm. redzams, ka šāda situācija ir iespējama. Katram punktam blakus iekavās ierakstīts atbilstošais draudzību skaits.



1. 1. Jā, var.
      1. Uzzīmēsim kuba izklājumu un parādīsim, kā to var pārklāt ar 12 dotajām figūriņām (sk.81.zīm.)



Ar vienādiem cipariem apzīmētās figūru daļas, salokot kubu, veido veselu figūriņu, kas "apliecas" ap kuba šķautni.



Saskaņā ar konstrukciju četrstūri AB2SA1, CA2SC1, BC2SB1 ir paralelogrami. Tātad AA1=B2S (1). Pēc konstrukcijas un dotā (ΔABC ir vienādmalu) arī ΔB2SB1 ir vienādmalu, tātad B2S=B1S=B1S2 (2). Tā kā BC2SB1 ir paralelograms, tad B1S=BC2 (3). No (1), (2) un (3) seko, ka

AA1=B2S=B1B2=B1S=BC2.

Pilnīgi analogi AB2=A1S=A1A2=A2S=C1C un CA2=C1S=C1C2=C2S=BB1. Tātad visi apskatāmie nogriežņi ir sadalāmi 3grupās pa 5 katrā (sk.82.zīm.).



Var gadīties, ka visu triju grupu nogriežņi ir dažāda garuma (sk.82.zīm.). Ir iespējams, ka visu grupu nogriežņi ir vienāda garuma (sk. 83.zīm.). Ir iespējams, ka 2 grupu nogriežņi ir vienāda garuma, bet trešās grupas nogriežņi ir atšķirīga garuma (sk. 84.zīm.)



1. * 1. Apzīmēsim a= un b=. Skaidrs, ka x>0 un Z>0; varam pieņemt, ka x>z. Tā kā a2 un b2 ir piecciparu skaitļi, tad x3 un z3 (tāda trīsciparu skaitļa kvadrāts, kas sākas ar 4 vai vēl lielāks cipars, nav mazāks par 4002=160000, tātad ir sešciparu skaitlis). Tāpēc vienīgie iespējamie skaitļi a varētu būt ,  un , kur y - cipars. Pārbaudot visas 30 iespējas, konstatējam, ka

der tikai a= 301; 311; 201; 211; 221

un atbilstoši b=103; 113; 102; 112; 122.

Aplūkojot iespēju, kad z>x, tādā pašā ceļā iegūstam

b=301; 311; 201; 211; 221

un atbilstoši a=103; 113; 102; 112; 122.

1. 1. Jā, var.
      1. Vispirms no 6 dotajām figūriņām izveidosim 3 paralēlskaldņus ar izmēriem 1x2x3 (sk.85.zīm.)



86. zīmējumā parādīts, kā novietot trīs izveidotos paralēlskaldņus (iesvītroti) un vēl 3 atlikušās figūriņas, lai izveidotos kubs ar izmēriem 3x3x3.



1. 1. Sk., piemēram, 87.zīm.



Ievērojiet: saskaņā ar lauztas līnijas definīciju divi lauztas līnijas blakus posmi nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

1. * 1. Trīs pēc kārtas ņemti interesanti skaitļi var būt. Piemēram,

33=3⋅11,

34=2⋅17,

35=5⋅7.

Pamatosim, ka četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi visi nevar būt interesanti. Starp četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens noteikti dalās ar 4. Šādu skaitli var uzrakstīt formā 4k un tālāk formā 4k=2⋅2⋅k. Ja k2, tad k vai nu pats ir pirmskaitlis, vai arī to var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. tātad šāds skaitlis ir uzrakstāms kā vismaz triju pirmskaitļu reizinājums, un tāpēc tas nav interesants.

Ja k=1, nupat izdarītais spriedums nav spēkā, jo 1 ne pats ir pirmskaitlis, ne arī to var sadalīt divu vai vairāku pirmskaitļu reizinājumā. Tāpēc visus četrus pēc kārtas ņemtu skaitļu komplektus, kas satur skaitli 4, apskatīsim atsevišķi:



Ir aplūkotas visas iespējas, un nevienā no tām nav četru pēc kārtas ņemtu interesantu skaitļu.

Tātad lielākais pēc kārtas esošu interesantu naturālu skaitļu skaits ir 3.

1. * 1. Izveidosim šādu modeli: 13 pilsētas apzīmēsim ar 13 punktiem. Ja divas pilsētas savieno aviolīnija, tad starp atbilstošajiem punktiem vilksim taisnu līniju, ja autobusu satiksme - pārtrauktu līniju, ja vilciena satiksme - viļņotu līniju.

Pierādīsim šādu faktu: ja n punkti jāsavieno ar līnijām tā, lai no katra punkta varētu pa līnijām nokļūt uz katru citu, tad līniju skaits ir vismaz n-1.

Ja doti 2 punkti, tad, protams, nepieciešama 1līnija. Pievienosim šiem 2 punktiem trešo (sk.88.zīm.)



Lai arī tagad no katra punkta varētu nokļūt jebkurā citā, jāpievieno vismaz 1 līnija - no pievienotā punkta uz kādu no jau esošiem. Tātad vajag vismaz 2 līnijas.

Ja ir 3 punkti un 2 līnijas, pievienosim ceturto punktu. (sk.89.zīm.).



Lai arī tagad no katra punkta varētu nokļūt jebkurā citā, jāpievieno vēl vismaz 1 līnija. Tātad pavisam nepieciešamas trīs līnijas.

Šādā veidā turpinot spriedumus, iegūsim, ka n punktiem ir nepieciešamas vismaz n-1 līnijas.

Apzīmēsim autobusa līniju skaitu ar A, aviolīniju skaitu ar l, bet vilciena maršrutu - ar V. Tā kā ir 13 pilsētas, tad noteikti jābūt spēkā



Saskaitot šīs 3 nevienādības, iegūsim:

2A+2L+2V36 jeb

A+L+V18

Tātad kopā nepieciešamas vismaz 18 līnijas. 90.zīm. parādīt, ka ar 18 līnijām pietiek.



* + 1. Ar doto izteiksmi izdarīsim ekvivalentus pārveidojumus:

n12-n8-n4+1 =

= n12-n8+1-n4 =

= n8(n4-1)-(n4-1) =

= (n8-1)(n4-1) =

= (n4-1)(n4+1)(n2-1)(n2+1) =

= (n2-1)(n2+1)(n4-1)(n-1)(n+1)(n2+1) =

=(n-1)2(n+1)2(n2+1)2(n4+1).

Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad visi četri reizinātāji ir pāra skaitļi. Bez tam n-1 un n+1 ir pēc kārtas ņemti pāra skaitļi, tātad viens no tiem dalās ar 4, bet šī skaitļa kvadrāts - ar 16. Divi no atlikušajiem kvadrātiem noteikti dalās ar 22=4, bet (n4+1) dalās ar 2. Tātad viss reizinājums dalās ar 16⋅4⋅4⋅2=24⋅22⋅22⋅2=29=512. To arī vajadzēja pierādīt.

1. 1. Lielākā iespējamā vērtība ir 20.
      1. Aplūkosim, kā var tikt izvietotas reizināšanas zīmes:
         * 1. visas trīs pēc kārtas;
           2. divas pēc kārtas;
           3. blakus esošu reizināšanas zīmju nav.

Tādējādi iegūstam šādus rezultātus:

2x2x2x2+2+2=20

2x2x2+2x2+2=14

2x2+2x2+2x2=12.

Tā kā katrs reizinājums ir atsevišķs saskaitāmais un summa no saskaitāmo kārtības nemainās, tad, pārkārtojot reizināšanas zīmju blokus citādā secībā, rezultāts nemainās. Tātad lielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir 20.

1. 1. 2000 uzdevums tiks publicēts 2004./2005. mācību gadā vai 2005./2006. mācību gadā.
      1. Vispirms atgādināsim, 1000. uzdevums publicēts 1993./94. m. gadā. Tātad šis mācību gads jāizvēlas par atskaites punktu. Saskaņā ar doto 1993./94. m.g. var beigties vai nu ar 1004.uzdevumu (ja būs notikušas 7 nodarbības) vai ar 1016. uzdevumu (8 nodarbības). Pirmajā gadījumā līdz 2000.uzdevumam vēl jānopublicē 2000-1004=996 uzdevumi (),

otrajā gadījumā  2000 -1016 = 984 uzdevumi (). viena mācību gada laikā var tikt publicēti vai nu 12⋅7=84, vai 12⋅8=96 uzdevumi. Skaidrs, ka visātrāk "pie mērķa" nonāksim tad, ja katra nākamā gada laikā notiks 8 nodarbības, vislēnāk - ja katru gadu notiks tikai 7 nodarbības.

Apzīmēsim publicēto uzdevumu skaitu ar n. Pēc 10 gadiem tas var būt šādās robežās:

1004+10⋅84n1004+10⋅96 vai

1016+10⋅84n1016+10⋅96.

Vienkāršojot iegūstam:

1844n1964 vai 1856n1976. Kā redzam, tad 2000.uzdevums vēl nebūs publicēts. Pēc 11 mācību gadiem situācija būs šāda:



Tātad 2004./2005. mācību gadā 2000. uzdevums var tikt publicēts, bet var gadīties (ievērojot novērtējuma apakšējo robežu), ka tas vēl nebūs publicēts. Pēc 12 mācību gadiem, tas ir 2005./2006. m.g. beigās publicēto uzdevumu skaits būs šādās robežās:



Tātad, beidzoties 2005./2006. m. gadam, 2000. uzdevums noteikti būs publicēts.

1. 1. To izdarīt nav iespējams.
      1. Apzīmēsim balto rūtiņu daudzumu ar b, sarkano rūtiņu daudzumu ar s, melno rūtiņu daudzumu ar m. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrai melnai rūtiņai blakus ir vismaz viena sarkana. Tātad katra melnā rūtiņa var būt blakus ne vairāk kā trim baltām. Tā kā katrai baltai rūtiņai blakus ir vismaz viena melna, tad no pasvītrotā apgalvojuma seko, ka mb. Līdzīgi iegūstam, ka sm.

Ja b>24, tad b25. Tāpēc m jeb m8. Tā kā m ir naturāls skaitlis, tad no šejienes seko, ka m9. Tāpēc s⋅9=3. Tātad m+b+s25+9+3=37. Bet t;a ir pretruna, jo kvadrātā pavisam ir tikai 36 rūtiņas.

1. * 1. Aplūkosim trīs atšķirīgas iespējas:
        + 1. AB nav paralēls ar CD, ∠B un ∠C ir plati leņķi (sk.91.zīm.)



Pagarinām malas AB un CD līdz to krustpunktam O. Tā kā ∠B=∠C, tad vienādi ir arī to blakusleņķi ∠OBC=∠OCB. Tad ΔBOC ir vienādsānu, proti, BO=OC. Apskatām ΔAOD. Saskaņā ar trijstūra vienādību

AD>OD-OA jeb

AD>(OC+CD)-(OB+AB)

AD>OC+5-OC-2

AD>3, kas arī bija jāpierāda.

* + - * 1. AB nav paralēls ar CD, bet ∠B un ∠C ir šauri leņķi (sk.92.zīm.).



Pagarinām malas AB un CD līdz to krustpunktam O. Tā kā ∠B=∠C, tad vienādi tad ΔOBC ir vienādsānu trijstūris un OB=OC. Izmantojot trijstūra nevienādību trijstūrim AOD, iegūstam:

AD>AO-DO

AD>(OB-AB)-(OC-CD)

AD>OB-2-OC+5

AD>3, kas arī bija jāpierāda.

* + - * 1. Malas AB un CD ir paralēlas. Tādā gadījumā ∠B=∠C=90o (sk.93.zīm.)



Novelkam AE⊥CD. Tad CE=AB=2 cm. Tad ED=5-2=3(cm). AD ir taisnleņķa trijstūra AED hipotenūza, tātad noteikti garāka par katru no katetēm. Tātad AD>ED=3.

1. 1. Mazākā iespējamā vērtība ir 12. Lielākā iespējamā vērtība ir 18.
      1. Apzīmēsim tabulas rūtiņas ar burtiem tā, kā tas parādīts 94.zīm.



Meklēsim mazāko iespējamo summas S=d+e+f vērtību. Skaidrs, ka summa S būs mazākā iespējamā, ja katrs no tās saskaitāmajiem būs mazākais iespējamais. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem d>a, tad mazākā iespējamā d vērtība ir 2. Tātad d2. Novērtēsim e. Tā kā e>b un e>d>a, tad ir vismaz 3 skaitļi, kas mazāki par e. Tādā gadījumā e4. Līdzīgi novērtēsim f: f>c>b>a un f>e>d>a. Tātad ir vismaz 5 skaitļi, kas mazāki par f. Tad f⋅6. Līdz ar to S2+4+6=12. 95.zīm. parādīts, kā šādu summu S=12 var iegūt.



Līdzīgi meklēsim lielāko iespējamo summas S vērtību. Skaidrs, ka S būs lielākā iespējamā, ja katrs no tās saskaitāmajiem būs lielākais iespējamais.

Novērtēsim f. Tā kā f<i, tad f8. Novērtēsim e: e<f un e<h<i. Tātad ir vismaz 3 skaitļi, kas lielāki par e. Tātad e6. Novērtēsim d: d<e<f<i un d<g<h<i. Tātad vismaz 5 skaitļi ir lielāki par d. Tātad d4. Līdz ar to S4+6+8=18. 96.zīm. parādīts, ka šāda summa S tiešām ir iespējama.



1. 1. Jā, var.
      1. Vispirms parādīsim, ka trīs pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa noteikti dalās ar 3. Aplūkosim trīs pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus: n, n+1, n+2. Aplūkosim to summu: n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1). Viegli saprast, ka šī summa dalās ar 3.

Visus skaitļus no 1 līdz 1992 varam sadalīt šādos trijniekos, jo 1992 dalās ar 3: (1+2+3)+(4+5+6)+…+(1990+1991+1992). Šī summa dalās ar 3, jo katrs tās saskaitāmais (par saskaitāmo nosauksim vienās iekavās ierakstīto summu) dalās ar 3. Bez tam 1993+1994=3987. Skaitlis 3987 dalās ar 3 (3+9+8+7=27). Tātad visu skaitļu no 1 līdz 1994 summa dalās ar 3.

1. 1. 50 dažādus trijstūrus.
      1. Aplūkosim iespējamo trijstūru īsākās malas. Tā kā visi 10 stienīši ir dažāda garuma, tad nevar izveidot trijstūrus, kuru īsākā mala ir 1 cm, 9 cm un 10 cm garas. Pirmajā gadījumā neizpildās prasība ka trijstūra malas garumam jābūt lielākam par divu pārējo malu garumu starpību, bet abos pārējos gadījumos nav divu lielāka garuma stienīšu.

Veidojot trijstūrus, ievērosim trijstūra nevienādību: ja trijstūra malu garumi ir a, b, c, tad a>|b-c|.

Ja trijstūra īsākā mala ir 2 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 3 un 4; 4 un 5; 5 un 6; 6 un 7; 7 un 8; 8 un 9; 9 un 10.

Tātad iespējami 7 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 3 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 4 un 5; 4 un 6; 5 un 6; 5 un 7; 6 un 7; 6 un 8; 7 un 8; 7 un 9; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 11 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 4 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 5 un 6; 5 un 7; 5 un 8; 6 un 7; 6 un 8; 6 un 9; 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 12 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 5 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 6 un 7; 6 un 8; 6 un 9; 6 un 10; 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 10 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 6 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 6 dažādi trijstūri.

Ja īsākā mala ir 7 cm, tad iespējami 3 dažādi trijstūri ar abu pārējo malu garumiem: 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Ja īsākā mala ir 7 cm, tad iespējams 1 trijstūris ar abu pārējo malu garumiem 9 un 10.

Tātad pavisam iespējams izveidot

7+11+12+10+6+3+1=50 dažādus trijstūrus.

1. * 1. Novilksim caur punktiem E, F, G un H taisnes paralēli kvadrāta malām (sk 97.zīm.)



ΔFNH un ΔGME ir vienādi taisnleņķa trijstūri, jo FK=GM un ∠1=∠2 (tas izriet no ΔFKS un ΔSOG leņķu vienādības (sk.97.zīm.). Tad KH=FN=ME=GL=a. Bez tam ievērosim, ka, saskaņā ar mūsu konstrukciju, BF=AK=b, NC=HD=d, BM=CG=c, AE=LD=e. Tad

Per(EBFO)+Per(HDGO)=

=EB+BF+FO+EO+OH+OG+GD+DH=

=a+c+b+FO+EO+OH+OG+a+e+d=

=FH+EG+2a+c+b+e+d

Per(FCGO)+Per(AEOH)=

=FC+CG+GO+FO+EO+OH+AE+AH=

=a+d+c+FO+EO+OH+OG+e+b+a=

=FH+EG+2a+d+b+c+e.

Abas šīs summas ir vienādas.

1. 1. Nē, tas nav iespējams.
      1. Vispirms pamatosim, ka minētā nogriežņa viduspunkts atrodas uz trijstūra viduslīnijas.



Aplūkosim ΔANC un no virsotnes B novilksim patvaļīgu nogriezni BD, kur D ir malas AC punkts un EF ir ΔABC viduslīnija. ΔEBO ~ ΔABD, jo ∠B abiem trijstūriem ir kopīgs, bet ∠BEO=∠BAD, jo EF||AC kā trijstūra viduslīnija un ∠BEO un ∠BAD ir kāpšļa leņķi pie paralēlām taisnēm. Tā kā EB:AB=1:2, tad arī BO:BD=1:2. Tātad O ir BD viduspunkts. Tātad esam pamatojuši, ka uzdevumā novilkto nogriežņu viduspunkti atrodas pa vienam uz visām trim trijstūra viduslīnijām.



Aplūkosim viduslīniju veidoto trijstūri EFG. No virsotnēm vilkto nogriežņu viduspunkti atrodas uz šī trijstūra malām. Taču neviena taisne nevar krustot reizē visas trīs trijstūra malas to iekšējos punktos. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

1. * 1. Aplūkosim saliktu skaitli n, n>6. Pieņemsim, ka viens no n pirmreizinātājiem ir skaitlis p. Tad skaitli n var izteikt kā n=p⋅k, k2. Skaitlim 6 ir dalītājs 2. Tāpēc mēs drīkstam pieskaitīt 2. Rezultātā no 6 mēs varam iegūt jebkuru pāra skaitli, pieskaitot 2. Tātad mēs varam iegūt arī skaitli 2p. Skaitļa 2p dalītājs ir skaitlis p. Tātad mēs drīkstam to pieskaitīt, iegūstot skaitli 3p, kas arī dalās ar p. Turpinām p pieskaitīt tik ilgi, līdz iegūstam skaitli k⋅p=n. Tātad no skaitļa 6 var iegūt skaitli n, veicot atļautās darbības.
2. 1. Mazākā iespējamā vērtība ir 112. Lielākā iespējamā vērtība ir 238.
      1. Spriedīsim līdzīgi 101.uzdevuma risinājumam. Apzīmēsim tabulas rūtiņas ar burtiem tā, kā tas parādīts 100.zīm.



Tātad mūs interesē summas S=d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7 lielākā un mazākā iespējamā vērtība. Skaidrs, ka mazākā lielākā vērtība tiks sasniegta, ja katrs no saskaitāmajiem būs mazākais (lielākais) iespējamais. Tāpēc novērtēsim katru no saskaitāmajiem.

* + - * 1. d1>c1>b1>a1. Tātad d14

d1<di, i2

d1<ei, d1<fi, d1<gi, kur i1

Tātad ir vismaz 27 skaitļi, kas lielāki par d1; tāpēc d122.

Līdz ar to 4d122.

* + - * 1. d2>d1. Tātad d28, jo vismaz 7 skaitļi ir mazāki par d2.

d2>c2>c1

d2>b2>b1

d2>a2>a1

d2<di, kur i3

d2<ei, d2<fi, d2<gi, kur i2. Tātad ir vismaz 23 skaitļi, kas lielāki par d2; tāpēc d226.

Līdz ar to 8d226.

* + - * 1. Līdzīgi spriežot, iegūstam:

12d330

16d434

20d538

24d642

28d746

Līdz ar to 112S238.

101.zīm. un 102.zīm. parādīts, ka šādas vērtības tiešām iespējams iegūt.



* 1. Jā, var.
     1. Apzīmēsim astoņstūra virsotnēs ierakstītos skaitļus ar ai, 1i8, bet malas sanumurēsim ar skaitļiem no 1 līdz 8 (sk.103.zīm.).



Pēc skaitļu nodzēšanas uz pirmās malas uzrakstīts skaitlis a1+a2, uz otrās - a2+a3, uz trešās - a3+a4, …, uz astotās - a8+a1.

Aplūkosim uz 1., 3., 5. un 7. malas uzrakstīto skaitļu summu S1; redzam, ka

S1=(a1+a2)+(a3+a4)+ (a5+a6) +(a7+a8).

Aplūkosim uz 2., 4., 6. un 8. malas uzrakstīto skaitļu summu S2; redzam, ka

S2=(a2+a3)+(a4+a5)+ (a6+a7) +(a8+a1). Viegli redzēt, ka S1=S2. Nodzēšot vienu no skaitļiem "uz malas", viena no summām S1 un S2 paliek "neizbojāta". Tad, atņemot no šīs summas otru, iegūsim nodzēsto skaitli.

1. 1. Maija nodejoja 7 dejas.
      1. Tā kā katrā dejā katrā pārī dejo divi - meitene un zēns, tad visu meiteņu nodejoto deju kopskaitam jāsakrīt ar visu zēnu nodejoto deju kopskaitu. Tā kā visi zēni kopā nodejojuši 7+8+8+6=29 dejas, tad arī visas meitenes kopā nodejojušas 29 dejas. Tad Maijas nodejoto deju skaits ir 29-(5+7+10)=29-22=7.
2. 1. Der skaitļu pāri (1;1), (5;5), (1;2), (1;3), (1;6), (2;7), (3;4), (5;10), (10;15), kā arī tiem "simetriskie" pāri (2;1), (3;1) utt.
      1. Aplūkosim gadījumu, kad m=n. Tā kā m+5 jādalās ar n un n=m, tad m+5 jādalās arī ar m. Tā kā summai (m+5) jādalās ar m un viens no tās saskaitāmajiem dalās ar m, tad arī otram saskaitāmajam jādalās ar m. Tātad 5 dalās ar m. Esam ieguvuši, ka m ir skaitļa 5 dalītājs. Tātad m=1 vai m=5.

Ja m=1, tad n=1. Pārbaudīsim, vai šīs vērtības apmierina uzdevuma nosacījumus:

m+5=1+5=6 un 6 dalās ar 1. Ja m=5, tad n=5, m+5=10 un 10 dalās ar 5. Esam ieguvusi divus skaitļu pārus: (1;1) un (5;5). Aplūkosim gadījumu, kad m≠n. Pieņemsim, ka m<n. Vispirms pamatosim, ka m un n nevar atšķirties viens no otra vairāk kā par 5. Pieņemsim pretējo: n=m+i, kur i6, i∈N. Pēc dotā m+5 dalās ar n, tātad m+5 jādalās ar m+i. Tā kā i6, tad m+5<m+i. Šādā gadījumā dalīšana naturālos skaitļos nav iespējama. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un m un n atšķiras viens no otra ne vairāk kā par 5. Tad iegūstam, ka

n=m+1;

n=m+2;

n=m+3;

n=m+4;

n=m+5.

Ja n=m+1, tad n+5=m+1+5=m+6, un m+6 jādalās ar m, tātad m ir skaitļa 6 dalītājs, proti, iespējamās m vērtības ir 1; 2; 3 un 6.

Ja m=1, tad n=2.

Pārbaudām: m+5=1+5=6 un 6 dalās ar n=2.

n+5=2+5=7 un 7 dalās ar m=1.

Tātad skaitļu pāris (1;2) der par atrisinājumu.

Ja m=2, tad n=2+1=3.

Pārbaudām: m+5=2+5=7, bet 7 nedalās ar n=3.

Tātad pāris (2;3) neder par atrisinājumu.

Ja m=3, tad n=3+1=4.

Pārbaudām: m+5=3+5=8 un 8 dalās ar n=4.

n+5=4+5=9 un 9 dalās ar m=3.

Tātad skaitļu pāris (3;4) der par atrisinājumu.

Ja m=6, tad n=7.

Pārbaudām: m+5=6+5=11, bet 11 nedalās ar n=7.

Tātad pāris (6;7) neder par atrisinājumu.

Līdzīgi aplūko pārējās iespējas, kad n=m+2; n=m+3; n=m+4 un n=m+5, un, veicot pārbaudi, iegūst pārējos atrisinājumus (1;3), (1;6), (2;7), (5;10) un (10;15).

Tā kā var būt arī m>n un šajā gadījumā visi spriedumi būs līdzīgi jau izdarītajiem, tikai m un n mainīsies vietām, tad der arī jau atrastajiem pāriem "simetriskie" pāri (2;1), (4;3), (3;1) utt.

1. 1. Jā, var (sk. 104.zīm.)



* + 1. Aplūkosim regulāru piecstūri. Tā virsotnes būs 5 no atzīmētajiem punktiem, bet centrs - sestais atzīmētais punkts. Tad AB=BC=CD=DE=AE kā regulāra piecstūra malas. Arī AO=BO=CO=DO=EO, jo centrs atrodas vienādā attālumā no virsotnēm. Pamatosim, ka visi trijstūri, kuru virsotnes atrodas šajos punktos, tiešām ir vienādsānu. Aplūkosim visus trijstūrus, kuru viena virsotne atrodas punktā A. (Tā kā piecstūris ir regulārs, tad visu pārējo trijstūru aplūkošanu varēs veikt analogi). Šādu trijstūru ir 10:
       - 1. ΔABC, ΔABE, ΔADE.
         2. ΔABO, ΔACO, ΔADO, ΔAEO.
         3. ΔABD, ΔACE, ΔACD.

1) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 regulārā piecstūra mals.

2) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 nogriežņus, kas savieno piecstūra virsotnes ar centru.

3) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 piecstūra diagonāles, bet regulāram piecstūrim visas diagonāles ir vienāda garuma.

1. 1. Piemēram, 147; 258; 369. Summa ir 774.
      1. Ja kaut viens no izveidotajiem skaitļiem būs vismaz četrciparu skaitlis, tad arī summa būs vismaz četrciparu skaitlis. Ja kāds no skaitļiem būs divciparu skaitlis, tad noteikti kādam no pārējiem skaitļiem būs jābūt vismaz četrciparu skaitlim. Katrs četrciparu skaitlis ir lielāks par jebkuru trīsciparu skaitli, tāpēc izveidosim tādus trīs trīsciparu skaitļus, lai summa arī būtu trīsciparu skaitlis. Lai summa būtu iespējami mazāka, simtu cipari jāņem iespējami mazākie - 1; 2 un 3. Par desmitu cipariem jāizvēlas 4; 5 un 6, bet par vienu cipariem - 7, 8 vai 9. Apzīmēsim izveidotos trīs skaitļus ar , ,  un aplūkosim to summu:

++=100a1+10b1+c1+100a2+10b2+c2+100a3+10b3+c3.

Sagrupējot saskaitāmos, iegūsim:

100(a1+a2+a3)+ 10(b1+b2+b3)+ (c1+c2+c3).

Atcerēsimies, ka ai vērtības ir 1, 2, 3, un neatkarīgi no tā, kuram skaitlim būs kurš simtu cipars, summa nemainīsies, proti, a1+a2+a3=6. Līdzīgi b1+b2+b3=15 un c1+c2+c3=24. Tad 100⋅6+10⋅15+24=774.

Kā redzam, tad izveidoto triju skaitļu summa nav atkarīga no tā, kādas izvēlamies burtu vērtības vienas šķiras ievaros. Pavisam iespējami 36 dažādi skaitļu trijnieki ar vienu un to pašu minimālo summu 774.

1. * 1. Piedāvāsim vienu no iespējamajām svēršanas shēmām.

**I svēršana**: nosveram 4 monētas reizē. Ir trīs iespējas svaru rādījumam - 40g, 41g, 42g. analizēsim katru no šīm situācijām atsevišķi..

* + - * 1. **40 grami.** Tātad starp nosvērtajām monētām smago monētu nav. Tās abas ir starp nesvērtajām monētām. Tad **II svēršanā** sveram patvaļīgas 2 monētas no piecām nesvērtajām; sauksim tās par A un B, bet trīs atlikušās par C, D, E. Atkal iespējami 3 varianti:

****

* + - * 1. **41 grams.** Tātad starp nosvērtajām monētām ir viena smagā, bet otra ir starp nesvērtajām monētām. Pirmās grupas monētas nosauksim par A, B, C, D, bet otrās grupas - par E, F, G, H, I. Atcerēsimies, ka katrā no šīm grupām ir pa vienai smagajai monētai.

**II svēršanā** sveram A, B, C un E, F, G. Iespējami trīs svaru rādījumi - 60g, 61g un 62g. Analizēsim katru gadījumu atsevišķi:

****

* + - * 1. **42 grami**. Tātad abas smagās monētas ir starp šīm četrām. Līdz ar to atlikušajās četrās svēršanās var svērt pa vienai, tādējādi noskaidrojot divas smagās monētas.

1. 1. Nē, nevar.
      1. Ievērosim, ka, lai "pa īsāko ceļu" nokļūtu no vienas tabulas rūtiņas kādā citā tabulas rūtiņā, jāšķērso ne vairāk kā divas citas tabulas rūtiņas (ar vienu gājienu atļauts šķērsot divu rūtiņu kopējo malu vai kopējo stūri, sk.105.zīm.)



Atradīsim tabulā ierakstīto pašu mazāko un pašu lielāko skaitli. Aplūkosim īsāko ceļu starp šīm divām rūtiņām. Pēc iepriekš teiktā mēs savā ceļā šķērsosim ne vairāk kā divas citas rūtiņas. Ja mazākais skaitlis ir a, tad nākamajā rūtiņā (ceļā uz lielākā skaitļa rūtiņu) ierakstītais skaitlis nepārsniedz a+2, nākamajā - a+4, bet lielākais tabulas skaitlis nepārsniedz a+6. Ja tabulas mazākais skaitlis ir a, bet lielākais a+6, tad tabulā ierakstītie skaitļi var pieņemt tikai 7 dažādas vērtības, proti, a; a+1; a+2; a+3; a+4; a+5; a+6. Uzdevuma prasība tātad nav izpildāma.

1. 1. 4 leņķi var būt vienādi (sk. 106.zīm.)



* + 1. Pamatosim, kāpēc nevar būt vairāk kā 4 vienādi leņķi. Apvienosim dotos leņķus pāros - ∠1 un ∠5; ∠2 un ∠6; ∠3 un ∠7; ∠4 un ∠8. Katrā pārī esošie leņķi ir iekšējie šķērsleņķi. Ja kādā pārī abi leņķi būtu vienādi, tad attiecīgās malas būtu paralēlas (piemēram, ja ∠8=∠4, tad AD||BC) un dotajam četrstūrim būtu paralēlas malas. Tātad katrā no šiem pāriem var būt ne vairāk kā viens no savstarpēji vienādajiem leņķiem.

1. 1. a) Piemēram, skaitlis 133. Tiešām, 133: (12+32+32)=133:19=7.

b) Šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

* + 1. Pieņemsim, ka A ir n-ciparu skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, t.i., tas nesatur ciparu 0, tā visi cipari nav vienādi un tas dalās ar savu ciparu kvadrātu summu.

Pierādīsim, ka skaitlis B, kuru iegūst, 3 reizes pēc kārtas uzrakstot skaitli A, arī apmierina uzdevuma nosacījumus.

* + - 1. tā kā a visi cipari nav vienādi, tad arī visi B cipari nav vienādi,
      2. tā kā A nesatur nulli, tad arī B nesatur nulli,
      3. acīmredzot B var uzrakstīt kā  Apzīmēsim A ciparu kvadrātu summu ar K; tad A dalās ar K. Skaitļa B ciparu kvadrātu summa ir 3K; jāpierāda, ka B dalās ar 3K. Bet tas ir acīmredzams, jo B=A⋅10…010…01, A dalās ar K un 10…010…01 dalās ar 3 (tā ciparu summa dalās ar 3).

Tātad B apmierina visas uzdevuma prasības. Tādējādi no skaitļa 133 varam iegūt 133133133, no tā savukārt 133133133133133133133133133, utt. Tie visi apmierina uzdevuma prasības.

1. * 1. Katru daudzstūri, griežot pa diagonālēm, ir iespējams sagriezt trijstūros. Katru trijstūri, novelkot augstumu, var sagriezt 2 taisnleņķa trijstūros (sk. 107.zīm.).



Aplūkosim taisnleņķa trijstūri ABC. Taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas viduspunkts M ir arī apvilktās riņķa līnijas centrs. Tātad AM=BM=CM, no kurienes seko, ka ΔABM un ΔBCM ir vienādsānu. Tāpat rīkojamies arī ar taisnleņķa trijstūri ABD.

Esam aprakstījuši metodi, kā katru daudzstūri iespējams sagriezt vienādsānu trijstūros.

1. 1. 147⋅258⋅369=1394694. ()
      1. Lasītājs pats var pārbaudīt atbildē norādītās skaitliskās vienādības pareizību. Lai pamatotu, ka tur redzamais reizinājums ir mazākais iespējamais, pietiek pamatot, ka citos gadījumos reizinājums iznāk lielāks par 13994694.

**Pieņemsim pretējo: ir iespējams iegūt mazāku reizinājumu par ().**

Vispirms noskaidrosim, kādi var būt reizinātāju pirmie cipari. Ja tie visi lielāki par 1, tad reizinājums ir lielāks par 200⋅300⋅400=24000000>13994694. Tātad vienam reizinātājam jāsākas ar 1. Spriežot līdzīgi, konstatējam, ka abu pārējo reizinātāju pirmie cipari varētu būt vienīgi (2;3), (l;4), (2;5), (2;6), (3;4) ()

Tagad pierādīsim vairākus apgalvojumus par ciparu kārtību minimālā reizinājuma reizinātājos.

Skaidrs: ja kādā reizinātājā desmitu cipars ir lielāks par vienu ciparu, tad, samainot šos ciparus vietām, reizinātāja un tātad arī reizinājuma vērtība samazināsies. Tāpēc turpmāk aplūkosim tikai tādus gadījumus, kur visos trijos reizinātājos cipari ir augošā kārtībā.

Tālākajam būs svarīga vienādība

,

par kuras pareizību lasītājs var patstāvīgi pārliecināties, atverot iekavas. No tās acīmredzami seko: ja divu skaitļu summa ir konstants lielums, tad to reizinājums ir jo mazāks, jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

Apzīmēsim divus no mūsu trīsciparu reizinātājiem ar x un y, turklāt pieņemsim, ka

x<y. Ja mēs savā starpā mainītu x un y vienu ciparus, tad x un y summa nemainītos; bet x un y viens no otra vairāk atšķirtos tajā gadījumā, ja x vienu cipars būtu mazāks par y vienu ciparu, nevis otrādi. Tas nozīmē, ka, meklējot minimālo reizinājuma vērtību, vērts apskatīt tikai tādus gadījumus, kur skaitlim ar mazāku simtu ciparu ir arī mazāks vienu cipars. Gluži analoģiski iegūstam, ka minimālā reizinājuma gadījumā skaitlim ar mazāku simtu ciparu ir arī mazāks desmitu cipars.

Aplūkosim tagad gadījumu, kad reizinātāju pirmie cipari ir 1; 2; 3. Ierakstīsim reizinātāju ciparus pa rindiņām tabulā ar izmēriem 3x3, pie tam simtu ciparus rakstīsim pirmajā kolonnā no augšas uz leju. Tad saskaņā ar iepriekšējiem spriedumiem katrā rindiņā cipariem jāpieaug no kreisās uz labo pusi, bet katrā kolonnā - no augšas uz leju (sk. 108.zīm. a) gad.)



Pats mazākais no atlikušajiem cipariem 4 nevar būt nekur citur kā rūtiņā a (citādi pa kreisi vai uz augšu no tā atrastos kāds par to lielāks cipars); līdzīgi pats lielākais no atlikušajiem cipariem 9 nevar atrasties nekur citur kā rūtiņā B. Savukārt no cipara 8 pa labi vai uz leju var atrasties tikai 9; tāpēc 8 var novietoties tikai tā, kā tas parādīts 108.zīm. b) vai c) gadījumā.

Tagad, ņemot vērā pieaugšanas nosacījumu rindās un kolonnās, viegli konstatēt, ka pārējie cipari 5; 6; 7 var tikt ierakstīti tikai 5 dažādos veidos; tie visi parādīti 109.zīm. un tiem blakus uzrakstīts atbilstošais reizinājums.



Redzams, ka reizinājums 147⋅258⋅369 mūsu apskatāmajā gadījumā ir vismazākais.

Līdzīgā ceļā lasītājs var aplūkot arī citus iespējamos gadījumus saskaņā ar () un pārliecināties, ka mazāku reizinājumu kā () iegūt neizdodas. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un () ir mazākais iespējamais reizinājums.

1. * 1. Centīsimies izvietot firmas darbiniekus aplī pēc tāda principa. Darbiniekam A1 vienā pusē novietosim tā draugu A2, bet otrā pusē tā ienaidnieku A3. Tā kā A2 vienīgais draugs ir A1, tad A2 blakus otrā pusē novietosim viņa ienaidnieku. Tas būs kāds A4, jo A3 ir ienaidnieks A1. Savukārt A3 blakus novietosim viņa draugu A5, utt. Ja kāds aplis noslēdzas, tad sāksim veidot jaunu apli. Tātad katram darbiniekam šajos apļos vienā pusē stāvēs draugs, bet otrā - ienaidnieks. Pierādīsim, ka katrā aplī noteikti stāv pāra skaits darbinieku. Liksim draugiem sadoties rokās. Tā kā katram blakus stāv tikai viens draugs, tad katrā aplī situācija būs šāda: sadotas rokas, nesadotas, sadotas, nesadotas,…. Tātad cilvēki būs sadalījušies pāros, tātad viņi ir pāra skaitā. Visus katra apļa pāra vietās stāvošos nosūtīsim uz vienu filiāli, bet nepāra vietās stāvošos - uz otru. Uzdevuma prasības būs izpildītas, jo jebkuram darbiniekam X, kas stāv pāra vietā, vienīgie, ar kuriem viņš nedrīkst nonākt vienā filiālē, ir viņa kaimiņi, bet viņi stāv nepāra vietās un tāpēc nevar nonākt vienā filiālē ar X.
2. 1. Jā, var. Sk. 110.zīm.



1. * 1. Katrs trešais naturālais skaitlis dalās ar 3 . Tātad vismaz viens no dotajiem skaitļiem a, b, c, d dalās ar 3. Tā kā katrs otrais naturālais skaitlis ir pāra skaitlis, tad tieši divi no dotajiem skaitļiem ir pāra skaitļi - vai nu a un c, vai b un d dalās ar 2. Tātad reizinājums a⋅b⋅c⋅d dalās ar 3⋅2⋅2=12.
2. * 1. Apzīmēsim dotos skaitļus ar n, n+1, n+2, n+3. Aplūkosim šo skaitļu reizinājumu A=n⋅(n+1)(n+2)(n+3). Izdarīsim vairākus pārveidojumus.

A=(n2+n)(n2+5n+6)=

n4+5n3+6n2+n3+5n2+6n=

=(n2)2+6n3+11n2+6n=

=(n2)2+(9n2+2n2)+2(n2⋅3n)+2⋅(1⋅3n)=

=(n2)2+(3n)2+12+2⋅(n2⋅1)+2⋅(n2⋅3n)+2⋅(1⋅3n)-1=

=(n2+3n+1)2-1

[Pārveidojumi tika veikti ar mērķi izmantot formulu (a+b+c)2=a2+b2+c2+2ab+2ac+2bc].

Tātad A=(n2+3n+1)2-1, jeb

A+1=(n2+3n+1)2

Vienādības labā puse ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad arī A+1 ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ja arī A+5 (kā tas prasīts uzdevumā) ir naturāla skaitļa kvadrāts, tad mums ir divi naturālu skaitļu kvadrāti, kas atšķiras viens no otra par 4. Bet kvadrātu virknē 1; 4; 9; 16; 25; 36; … nav divu skaitļu, kas atšķirtos viens no otra par 4. Tātad, četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumam pieskaitot 5, nevar iegūt naturāla skaitļa kvadrātu.

1. 1. 16 filmas.
      1. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka neviens no draugiem divas dienas pēc kārtas nepaliek mājās. Piemēram, ja A un B iet uz kino, bet C paliek mājās, tad nākamajā vakarā vai nu A, vai B noteikti paliek mājās, tātad C iet uz kino. Līdz ar to C nav iespējams divus vakarus pēc kārtas palikt mājās.

Tā kā viens no draugiem redzēja 15 filmas, tad maksimālais dienu skaits, kurā notika kino apmeklējumi, ir 15⋅2+1=31. (Ja katru otro vakaru viņš apmeklē filmu un tā viņam nepatīk). Tā kā viens no draugiem ir redzējis tieši 31 filmu, tad viņš uz kino ir gājis katru vakaru. Tā kā viens no draugiem gāja kopā ar viņu 15 vakarus, tad otrs gāja uz kino 31-15=16 atlikušos vakarus, jo visas kinofilmas tika apmeklētas divatā.

1. * 1. Apzīmēsim strādniekus ar 10 melniem aplīšiem, bet instrumentus - ar 10 baltiem aplīšiem. Divus aplīšus (baltu un melnu) savienosim ar līniju tikai tādā gadījumā, ja atbilstošais strādnieks prot strādāt ar atbilstošo instrumentu. Tā kā katrs strādnieks prot strādāt ar diviem instrumentiem, tad no katra melnā aplīša izies tieši 2 līnijas. Analogi, no katra baltā aplīša izies tieši 2 līnijas uz melniem aplīšiem. Tātad aplīši noteikti izvietosies pamīšus - balts, melns, balts, melns…. Aplīši var izvietoties vienā vai vairākos apļos. Tā kā katrā aplī ir minētais pamīšus izkārtojums, tad blakus esošos aplīšus apvienosim pāros - katrā pāri vienu baltu un vienu melnu aplīti. Atbilstošajam strādniekam no katra pāra iedodam šī paša pāra baltajam aplītim atbilstošo instrumentu. Instrumentu sadale ir notikusi.
2. 1. Sk., piemēram, 111.zīm.



A, B, C, D un E ir šī desmitstūra īpašās virsotnes.

1. 1. Sk., piemēram, 112.zīm.



* + 1. Aplūkosim sešciparu skaitli . Uzrakstīsim to šādi:

.

Izdarīsim vairākus pārveidojumus:

.

Šīs summas pirmais saskaitāmais  dalās ar 7, jo 1001=7⋅143.

Tātad, ja a dalās ar 7, tad noteikti  jādalās ar 7. Savukārt, ja  dalās ar 7, tad A jādalās ar 7, jo summas abi saskaitāmie  un  dalās ar 7.

1. * 1. Izdarīsim ar doto vienādību identiskus pārveidojumus:

2x2+x=3y2+y (pārnesam 2y2 un y uz kreiso pusi).

2x2-2y2+x-y=y2

2(x-y)(x+y)+(x-y)=y2

(x-y)(2(x+y)+1)=y2

(x-y)(2x+2y+1)=y2 (1)

Analizēsim vienādību (1). Tās labā puse ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad katrs tās pirmreizinātājs ir pāra pakāpē. Tā kā (x-y)(2x+2y+1)=y2, tad kreisā puse satur tādus pašus pirmreizinātājus tādās pašās pakāpēs kā labā puse y2. Ja (x-y) un (2x+2y+1) būtu savstarpēji pirmskaitļi, tad tiem nebūtu kopīgu pirmreizinātāju. Līdz ar to gan (x-y), gan (2x+2y+1) pirmreizinātājiem jābūt pāra pakāpēs: pretējā gadījumā nevarētu pastāvēt vienādība. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) būtu pilni kvadrāti.

Atliek pamatot, ka (x-y) un (2x+2y+1) ir savstarpēji pirmskaitļi. Pieņemsim pretējo. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) ir kopīgs dalītājs; pieņemsim, ka abas šīs izteiksmes dalās ar pirmskaitli p. Ja tā, tad reizinājums (x-y)⋅(2x+2y+1) dalās ar p2. Tā kā (x-y)(2x+2y+1)=y2, tad arī y2 dalās ar p2. Tātad y dalās ar p. Tā kā x-y dalās ar p un y dalās ar p, tad arī x ir jādalās ar p. Tātad ar p dalās arī izteiksme 2x+2y. Sastādīsim vienādību: (2x+2y+1)-(2x+2y)=1.

Abas kreisās puses izteiksmes dalās ar p, tad arī labajai pusei jādalās ar p. Proti, 1 jādalās ar p. Tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka p ir pirmskaitlis. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) ir savstarpēji pirmskaitļi un saskaņā ar iepriekšpierādīto - pilni kvadrāti.

1. 1. Jā, to var izdarīt.
      1. Iedomāsimies 16 taisnes, starp kurām nekādas divas nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Katrā taišņu krustpunktā atradīsies pilsēta. Pa katru taisni iet dzelzceļa līnija, kas savieno visas uz tās atrodošās pilsētas. Ja nekādas divas taisnes nav paralēlas, tad katra taisne krustojas ar visām pārējām taisnēm. Tātad katras divas dzelzceļa līnijas krustojas. Pēc dotā izriet, ka caur katru pilsētu iet tieši 2 dzelzceļa līnijas. Tā kā pilsētas atrodas tikai taišņu (dzelzceļa līniju) krustpunktos, tad nav tādas pilsētas, caur kuru iet tikai viena dzelzceļa līnija.

Aplūkosim pilsētu A. Caur to iet divas dzelzceļa līnijas - a un b. Pieņemsim, ka līniju a slēdz. Pamatosim, ka no A tomēr var nokļūt jebkurā citā pilsētā. Pēc dotā līnija b krustojas ar visām citām dzelzceļa līnijām. Lai nokļūtu no A līdz pilsētai, kas atrodas uz konkrētas līnijas, no A pa b vienkārši jāsasniedz šī līnija un tad jāturpina ceļš pa to līdz izraudzītajai pilsētai. Kā no A nokļūt tajās pilsētās, kas atrodas uz slēgtās līnijas a? Tā kā caur šīm pilsētām iet vēl pa vienai dzelzceļa līnijai, tās noteikti krusto līniju b (b krusto visas līnijas). Tātad atkal jābrauc pa b līdz attiecīgajai līnijai.

Ja slēgs patvaļīgas divas dzelzceļa līnijas, tad no pilsētas, kas atradās to krustpunktā (jebkuras 2 līnijas krustojas), nevarēs nokļūt nevienā citā pilsētā.

1. * 1. Ir iespējams uzkonstruēt piemēru, kad uzdevuma prasības nav izpildāmas. Izveidosim tabulu ar izmēriem 10x10 (sk.113.zīm.).



Apzīmēsim instrumentus ar skaitļiem no 1 līdz 10, bet strādniekus - A1 līdz A10. Ja kāds strādnieks prot strādāt ar kādu instrumentu, attiecīgajā rūtiņā ievilksim krustiņu. Šāds instrumentu sadalījums atbilst uzdevuma nosacījumiem. Viegli redzēt, ka, piemēram, strādnieki A4, A5, A6, A7, A8, A9 un A10 prot strādāt tikai ar instrumentiem 1., 2. un 3. Skaidrs, ka 3 instrumentus nevar sadalīt 7 strādniekiem.

1. 1. Pierādīsim, ka divas blakus virsotnes abas vienlaicīgi nevar būt īpašas. No tā izrietēs uzdevuma apgalvojums.

Vispirms pierādīsim, ka neviena virsotne, kurā esošais daudzstūra leņķis ir lielāks par 180o, nav īpaša. Tiešām, iedomāsimies, ka ∠A>180o (114.zīm.)



Nostāsimies virsotnē a ar skatu stara AX virzienā un griezīsimies pa labi, ļaujot skatam slīdēt daudzstūra iekšpusē, līdz tas sasniegs stara AY ieņemto stāvokli. Griešanās procesā mūsu skats visu laiku atdursies pret kādu daudzstūra malu. Tā kā jebkuru nogriezni no punkta ārpus tā redz leņķī, kas mazāks par 180o (sk. 115.zīm.), bet ∠A>180o, tad griešanās procesā mūsu skats vismaz vienreiz pārslīdēs no vienas malas uz otru.



Tas var notikt tikai skatam šķērsojot kādu daudzstūra virsotni (sk.116.zīm.)



Abos iespējamajos gadījumos uzskatāmi redzama diagonāle, kas atrodas daudzstūra iekšpusē.

Tagad aplūkosim divas blakus esošas daudzstūra virsotnes A un B. Ja vismaz vienā no tām leņķis ir lielāks par 180o, tad tā nav īpaša. Atliek aplūkot gadījumu, kad ∠A<180o un ∠B<180o. Apzīmēsim to virsotni, kas pa daudzstūra kontūru atrodas otrā pusē no A nekā virsotne B, ar C.



Ja ΔABC iekšpusē vai uz tā malas BC starp B un C nav daudzstūra virsotņu, tad diagonāle BC atrodas daudzstūra iekšpusē (11.zīm.); tāpēc virsotne B nav īpaša. Ja turpretī ΔABC iekšpusē vai uz tā malas BC starp B un C atrodas dažas daudzstūra virsotnes, tad aplūkosim to no šīm virsotnēm, kura atrodas vistuvāk taisnei AB (118.zīm.); apzīmēsim to ar X.



Mēs apgalvojam, ka tad diagonāle AX pilnīgi atrodas daudzstūra iekšpusē. Tiešām, lai tā nebūtu, nogrieznim AX jābūt kopīgiem punktiem ar kādu daudzstūra malu. Bet tad viens šīs malas galapunkts atrastos iesvītrotajā apgabalā, un tā būtu virsotne, kas atrodas tuvāk malai AB nekā X; iegūta pretruna ar X izvēli.

Tātad šai gadījumā virsotne A nav īpaša. Vajadzīgais pierādīts.

1. * 1. Apzīmēsim kvadrāta malas garumu ar A, bet taisnstūru īsākās malas ar ai, garākās ar bi, kur i=1; 2; …; n. Tā kā kvadrāta laukums vienāds ar visu taisnstūru laukumu summu, tad A2=a1⋅b1+a2⋅b2+…+an⋅bn.

Izdalīsim abas izteiksmes puses ar A2.

1= a1⋅b1⋅+a2⋅b2+…+an⋅bn.

Tā kā Aai un Abi katram i, tad



Tad

1= a1⋅b1⋅+a2⋅b2+…+an⋅bn a1⋅b1⋅+a2⋅b2+…+an⋅bn=

=,

ko arī vajadzēja pierādīt.