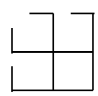
Profesora Cipariņa klubs 1992./1993. mācību gads

Atrisinājumi

1.ievaduzdevumi(atrisinājumi)

1. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Režģī visu līniju kopgarums ir 12. Vajadzīgi 4 kāsīši: 12:3=4 (skat. 25.zīm.).



25.zīm.

2. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Tā kā tie ir trīs pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, tad divi no tiem n un n+2 ir vai nu pāra skaitļi, vai nepāra skaitļi. Tā kā ir tikai viens pāra pirmskaitlis 2, tad n un n+2 var būt tikai nepāra skaitļi. Bet tādā gadījumā n+1 ir pāra skaitlis. Ja n+1=2, tad n=1, bet tas nav pirmskaitlis. Tātad dotie trīs skaitļi nevar būt pirmskaitļi.

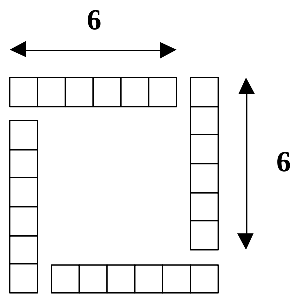
3. Atbilde. a) 10 reizes; b) 10 reizes.

Risinājums. a) Cipars 5 kā vienu cipars sastopams 10 reižu, katrā desmitā vienu reizi (skaitļos 5; 15; 25;…; 95).

b) Cipars 5 kā desmitu cipars sastopams 10 reižu (skaitļos 50; 51; 52;…; 59).

4. Atbilde. 96.

Risinājums. Kubiņi izvietoti kvadrāta veidā (skat. 26.zīm.).



26.zīm.

Pavisam ir 24 kubiņi. Tā kā kopējo šī ķermeņa virsmu veido katra kubiņa 4 skaldnes, tad $24\cdot4=96$.

5. Atbilde. Nē, piemēram, skaitļu 1 un 10000 reizinājums arī ir 10000.

6. Atbilde. 23 daļas; tās ir

$$\frac{1}{234};\frac{1}{243};\frac{1}{324};\frac{1}{342};\frac{1}{423};\frac{1}{432};\frac{1}{67};\frac{2}{143};\frac{1}{157};\frac{2}{321};\frac{2}{413};\frac{2}{431};$$
$$\frac{6}{17};\frac{12}{43};\frac{21}{34};\frac{21}{43};\frac{13}{24};\frac{13}{42};\frac{31}{42};\frac{14}{23};\frac{7}{16};\frac{23}{41};\frac{32}{41}.$$

Risinājums. $\frac{1}{67}=\frac{2}{134};\frac{1}{157}=\frac{2}{314};\frac{6}{17}=\frac{12}{34};\frac{7}{16}=\frac{14}{32}.$

8. Atbilde. Ja n=1. Pirmskaitļa vērtība ir 3.

Risinājums. Skaitli n^3+2n var sadalīt reizinātājos: $n^3+2n=n(n^2+2)$.

Tā kā jebkuru pirmskaitli var sadalīt tikai divos reizinātājos, no kuriem viens reizinātājs ir 1, bet otrs – pats skaitlis, tad n=1, jo $n^2+2\neq1$.

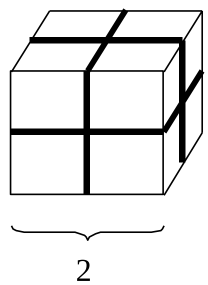
Ja n=1, tad $1^3+2\cdot1=3$, tātad pirmskaitļa vērtība ir 3.

9. Atbilde. Cipari 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir parādījušies katrs 20 reižu.

Risinājums. Skaitļu decimālajā pierakstā vienu šķirā visi cipari katrs ir parādījies 10 reižu. Desmitu šķirā 0 ir parādījusies vienu reizi, bet pārējie cipari – katrs 10 reižu. Simtu šķirā cipars 1 ir parādījies vienu reizi. Tāpēc kopā cipars 0 ir parādījies 11 reižu, 1 parādījies 21 reizi, bet visi pārējie cipari – katrs 20 reižu.

10. Atbilde. Var sadalīt 8 vienādos kubiņos. Kubu skaits palielinājies par 7.

Risinājums. Sagriežot kubu ar 3 plaknēm, kā parādīts 27.zīm., iegūst 8 vienādus kubiņus ar šķautnes garumu 1. Kubu skaits palielinājies par 8-1=7.



27.zīm.

11. Atbilde. a) 1; b) 10.

Risinājums. a) Tā kā desmitciparu naturālā skaitļa pierakstā, ja tā visi cipari ir dažādi, tiek izlietoti visi desmit cipari, tad to sakārtojums dilstošā secībā ir tikai viens vienīgs: 9876543210. Tāpēc tāds skaitlis ir tikai viens.

b) 9 dažādus ciparus dilstošā secībā var uzrakstīt tikai vienā veidā, tāpēc jāatrod, cik dažādos veidos no 10 dilstošā secībā uzrakstītu ciparu virknes var paņemt 9 ciparus:

$C_{10}^{9} = 10$.

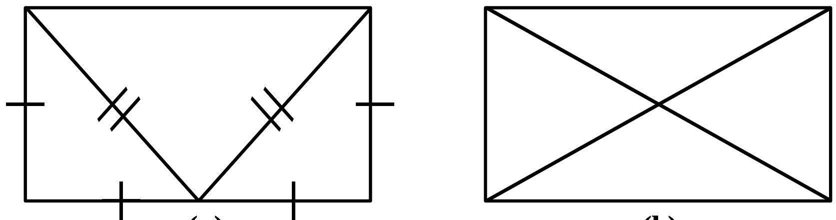
To var izspriest arī šādi: ja skaitlis sākas ar 8, tad tāds skaitlis ir tikai viens 876543210.

Ja skaitlis sākas ar 9, tad no atlikušajiem 9 cipariem katru reizi viens netiek izmantots. Tāpēc šādu skaitļu ir deviņi. Tātad pavisam šādu skaitļu ir 1+9=10.

12. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. a) To var izdarīt, piemēram, šādi, ja taisnstūra vienas malas garums ir 2 reizes garāks nekā otras malas garums (skat. 28.(a) zīm.).

b) (skat. 28.(b) zīm.).



(a) (b)

28.uzd.

13. Risinājums. a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,… (nepāra skaitļu virkne);

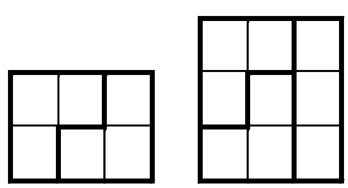
b) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,… (katrs nākošais virknes loceklis par 3 lielāks nekā iepriekšējais);

c) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,… (katrs nākošais virknes loceklis, sākot no trešā, vienāds ar divu iepriekšējo summu);

d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,… (Fibonači skaitļu virkne).

14. Atbilde. a) Nē, nevar; b) jā, var.

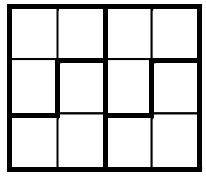
Risinājums. a) Stūrītis sastāv no 3 rūtiņām; 3x3 rūtiņu kvadrāts sastāv no 9 rūtiņām (9:3=3 stūrīši). Bet, tā kā divi stūrīši veido 2x3 rūtiņu taisnstūri (skat. 29.(a) zīm.), tad kvadrāta atlikusī daļa, neveido stūrīti (skat. 29.(b) zīm.).



(a) (b)

29.uzd.

b) 3x4 rūtiņu taisnstūris sastāv no 12 rūtiņām (12:3=4 stūrīši). Šo taisnstūri var sadalīt divos 2x3 rūtiņu taisnstūros, kurus katru var sagriezt divos stūrīšos (skat. 30.zīm.).



30.uzd.

Secinājums. Stūrīšos var sagriezt jebkuru $3k \cdot 2m$ ($k;m \in N$) taisnstūri.

15. <u>Atbilde</u>. Visu nepāra skaitļu visu ciparu summa ir 450, bet visu pāra skaitļu visu ciparu summa ir 405.

Pirmā no tām ir par 45 lielāka nekā otrā.

<u>Risinājums</u>. Visi divciparu naturālie skaitļi ir no 10 līdz 99.

Aplūkosim pirmos desmit divciparu skaitļus no 10 līdz 19. Visu nepāra skaitļu (11; 13; 15; 17; 19) visu ciparu summa ir 30, bet visu pāra skaitļu (10; 12; 14; 16; 18) visu ciparu summa ir 25. Tātad par 5 mazāka.

Nākošajiem desmit skaitļiem šīs summas ir atbilstoši 35 un 30 (katra palielinās par 5, jo mainās desmitu cipars), utt.

Kopā visu nepāra skaitļu visu ciparu summa ir:

30+35+40+45+50+55+60+65+70=450,

bet visu pāra skaitļu visu ciparu summa ir:

25+30+35+40+45+50+55+60+65=405.

Starpība: 450-405=45.

17. a)<u>Atbilde</u>. Jā, dalās.

<u>Risinājums</u>. Ja diviem skaitļiem sakrīt pēdējie trīs cipari, tad to starpība dalās ar 1000. Ja to starpība dalās ar 1000, tad tā dalās arī ar 8 un 125.

(Piemēram, 142738-738=142000).

b)Atbilde. Tādi viencipara skaitļi ir 1; 5; 6. Divciparu skaitļi ir 25 un 76.

Risinājums. Ja skaitli reizina pašu ar sevi, tad tas ir šī skaitļa kvadrāts. Šādus viencipara skaitļus atrast nav grūti, jo

$1^2=\underline{1}$;

$5^2=2\underline{5}$;

$6^2=3\underline{6}$.

Katrā atbilstošā gadījumā meklējamā starpība ir:

1-1=0;

25-5=20;

36-6=30.

Lai atrastu, kuriem divciparu skaitļiem piemīt šāda īpašība, jāaplūko tikai tie divciparu skaitļi, kuri beidzas ar 1; 5 vai 6. Tādi skaitļi ir

$25^2=6\underline{25}$;

$76^2=57\underline{76}$.

18. Atbilde. Slēdzeni sabojāja Juris.

Risinājums. Viens no apgalvojumiem “Aldis sabojāja” vai “Aldis nesabojāja” ir patiess, tātad izteikumi “Jānis sabojāja” un “Juris nesabojāja” ir aplami. Tātad tas nozīmē, ka vainīgais ir Juris.

19. Atbilde. 9999.

Risinājums. Apzīmējam daudzkārtni ar 99·n un uzrakstīsim sekojoši:

99·n=100·n-n=100(n-1)+(100-n).

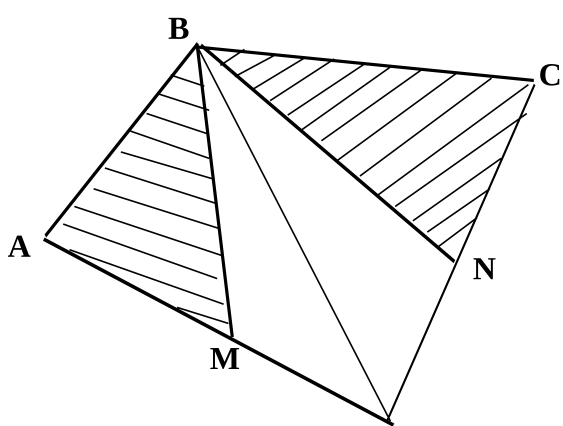
Pieņemsim, ka n<100. Tad skaitlis 99·n iegūstams vienu otram galā pierakstot skaitļus (n-1) un (100-n). Tā kā (n-1)+(100-n)=99 – nepāra skaitlis, tad viens no saskaitāmajiem vai nu (n-1) vai(100-n) ir pāra skaitlis un beidzas ar pāra ciparu. Tas saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem nedrīkst būt. Tā kā n=100 nevar būt, jo 9900 ir pāra skaitlis, tad n>100. Viegli pārbaudīt, ka der n=101, jo 99·101=9999, tāpēc tas ir mazākais daudzkārtnis.

20. Atbilde. Abi rūķi, strādājot kopā, dāvanu maisu var sapakot 3 minūtēs.

Risinājums. Viens rūķis 1 minūtē var sapakot $\frac{1}{12}$ daļu maisa, bet otrs rūķis - $\frac{1}{4}$ daļu maisa. Kopā strādājot, 1 minūtē abi rūķi var sapakot $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ daļu maisa. Tā kā viss maiss ir 1, tad šo maisu abi rūķi, strādājot kopā, var sapakot $1:\frac{1}{3}=3$ minūtēs.

21. Pierādījums. Nevienam skolēnam nevar būt mazāk par 0 draugiem vai vairāk par 24 draugiem; tātad draugu skaitam var būt 25 dažādas vērtības: 0; 1; 2;…; 23; 24. Vienīgā iespēja kā izvairīties no tā, ka diviem skolēniem ir vienāds skaits draugu, ir panākt, lai vienam skolēnam būtu 0 draugu, vienam – 1 draugs, vienam – 2 draugi,…, vienam – 23 draugi, vienam – 24. Bet tas nav iespējams: ja kādam skolēnam ir 24 draugi, tad viņš draudzējas ar visiem pārējiem, un tad nav tāda skolēna, kuram nav neviena drauga – katram ir vismaz viens draugs (tas, kurš draudzējas ar visiem).

22. Pierādījums. Novelk diagonāli BD (skat. 31.zīm.). Četrstūris tiek sadalīts divos trijstūros ABD un CBD.



31.zīm.

$S_{iesv.}=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta CBN}$ un $S_{neiesv.}=S_{\Delta MBD}+S_{\Delta NBD}$.

$S_{\Delta ABM}=S_{\Delta MBD}$, jo šiem trijstūriem ir vienāds augstums un vienādi pamati (AM=DM pēc dotā);

$S_{\triangle CBN}=S_{\triangle NBD}$, jo šiem trijstūriem ir vienāds augstums un vienādi pamati (CN=DN pēc dotā).

$S_{iesv.}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle CBN}=S_{\triangle MBD}+S_{\triangle NBD}=S_{neiesv.}$.

23. Risinājums.

$x^7=x^3\cdot x^4$;

$x^7=x\cdot x^2\cdot x^4$;

$x^7=x\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2$;

$x^7=x\cdot x\cdot x\cdot x^2\cdot x^2$

$x^7=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x^2$;

$x^7=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$.

24. Atbilde. Var izvietot: a) 1 rongo (skat. 32.zīm.);

1	1
1	1

32.zīm.

b) 1 rongo (skat. 33.zīm.);

1		1
1		1

33.zīm.

c) 4 rongo (skat. 34.zīm.).

1	2	1	2
3	4	3	4
1	2	1	2
3	4	3	4

34.zīm.

Risinājums. b) Tā kā katrs rongo katrā rindiņā var aizņemt vai nu 0, vai 2 rūtiņas, tad katrā rindiņā paliek brīva vismaz 1 rūtiņa, bet pavisam vismaz 3 rūtiņas (jo ir 3 rindiņas). Tātad rongo skaits nevar būt lielāks par (9-3):4=1.

25. Atbilde. 44 reizes.

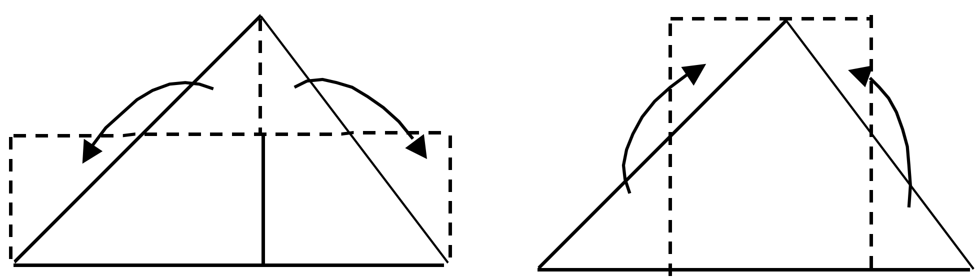
Risinājums. 24 stundās minūšu rādītājs veic 24 apgriezienus, stundu rādītājs 2 - apgriezienus. Ja stundu rādītājs būtu nekustīgs, tad minūšu rādītājs viena apgrieziena laikā būtu divreiz tam perpendikulārs, diennakts laikā – 48 reizes. Tā kā stundu rādītāja kustības virziens sakrīt ar minūšu rādītāja kustības virzienu, taisno leņķu skaits samazinās par diviem katrā apgriezienā, tātad kopumā par četriem.

26. Pierādījums. Ja skaitlis a dalās ar 3, tad to var izteikt kā $a=3m$ ($m\in N$); līdzīgi $b=3n$ ($n\in N$).

Aplūkojam summu: $a+b=3m+3n=3(m+n)$ – dalās ar 3.

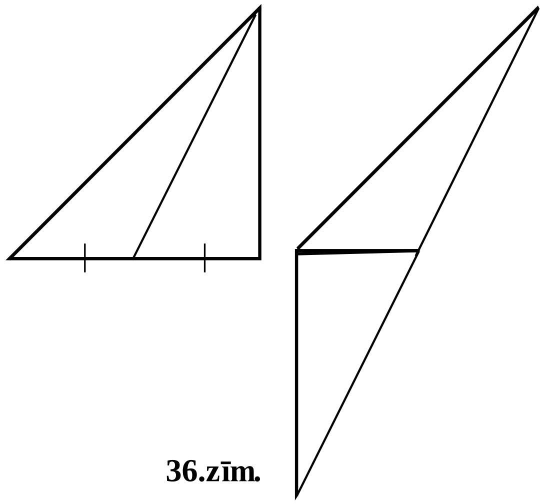
Aplūkojam starpību: $a-b=3m-3n=3(m-n)$ – dalās ar 3.

27. **I**. Risinājums. Skat. 35.zīm.



35.zīm.

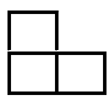
II. Risinājums. Lai saliktu platleņķa trijstūri, iegūtās daļas var savietot, piemēram, tā (skat. 36.zīm.).



36.zīm.

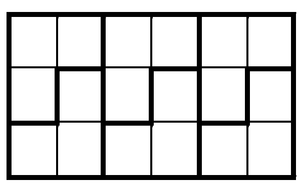
28. <u>Atbilde</u>. a) Var pārklāt; b) nevar pārklāt.

<u>Risinājums</u>. a) Taisnstūris 3x6 rūtiņas sastāv no 18 rūtiņām. 37.zīm. redzamā figūriņa sastāv no 3 rūtiņām.



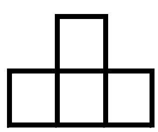
37.zīm.

Lai pārklātu taisnstūri nepieciešamas 18:3=6 figūriņas (skat. 38.zīm.).



38.zīm.

b) 39.zīm. redzamā figūriņa sastāv no 4 rūtiņām.



39.zīm.

Tā kā 18 ar 4 nedalās, tad ar šādām figūriņām taisnstūri pārklāt nevar.

29. Risinājums. Ja 7 saldējumi ir dārgāki nekā 8 šokolādes, tad 1 saldējums maksā vairāk nekā 1 šokolāde, tāpēc 7+1=8 saldējumi ir dārgāki nekā 8+1=9 šokolādes.

30. Atbilde. a) Vienai no komandām ir 2 punkti, otrai – 1 punkts un trešajai – 0 punktu. Piemēram, (skat. 40.zīm.).

	A	B	C
A		1	1
B	0		1
C	0	0	

40.zīm.

b) Katrai komandai pa vienam punktam. Piemēram, (skat. 41.zīm.).

	A	B	C
A		1	0
B	0		1
C	1	0	

41.zīm.

31. Atbilde. a) 81; b) 512.

Risinājums. a) Apzīmēsim meklēto divciparu skaitli ar $\overline{ab}$, tad tā ciparu summas otrā pakāpe ir vienāda ar $(a+b)^2$. Lielākais divciparu skaitli ir 99, taču tā kā $10^2=100$, tad ciparu summai jābūt mazākai par 10, t.i., $a+b<10$. Tā kā $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$ nav divciparu skaitļi, tad jāpārbauda šādas iespējas:

1) $a+b=5$ (neder), jo $5^2=25$, bet $(2+5)^2\neq25$;

2) $a+b=6$ (neder), jo $6^2=36$, bet $(3+6)^2\neq36$;

3) $a+b=7$ (neder), jo $7^2=49$, bet $(4+9)^2\neq49$;

4) $a+b=8$ (neder), jo $8^2=64$, bet $(6+4)^2\neq64$;

5) $a+b=9$ (der), jo $9^2=81$ un $(8+1)^2=81$.

b) Apzīmēsim meklēto trīsciparu skaitli ar $\overline{abc}$, tad tā ciparu summas trešā pakāpe ir vienāda ar $(a+b+c)^3$. Lielākais trīsciparu skaitlis ir 999, taču tā kā $10^3=1000$, tad ciparu summai jābūt mazākai par 10, t.i., $a+b+c<10$. Tā kā $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$ nav trīsciparu skaitļi, tad jāpārbauda šādas iespējas:

1) $a+b+c=5$ (neder), jo $5^3=125$, bet $(1+2+5)^3\neq125$;

2) $a+b+c=6$ (neder), jo $6^3=216$, bet $(2+1+6)^3\neq216$;

3) $a+b+c=7$ (neder), jo $7^3=343$, bet $(3+4+3)^3\neq343$;

4) $a+b+c=8$ (der), jo $8^3=512$ un $(5+1+2)^3=512$;

5) $a+b+c=9$ (neder), jo $9^3=729$, bet $(7+2+9)^3\neq729$.

32. **I**. Atbilde. Tādi skaitļi ir, piemēram, 3, 4 un 5.

Risinājums. $3^2+4^2=5^2$, jo $9+16=25$.

II. Atbilde. Nē, nevar.

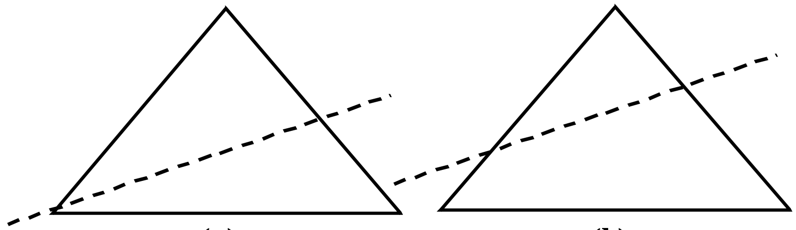
Risinājums. Aplūkojam 5 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu kvadrātu summu:

$(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=$

$=a^2-4a+4+a^2-2a+1+a^2+a^2+2a+1+a^2+4a+4=5a^2+10=5(a^2+2)$.

Pieņemsim, ka skaitlis $5(a^2+2)$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts. Tādā gadījumā $5(a^2+2)=5\cdot5\cdot m^2$, no kurienes seko, ka $a^2+2=5\cdot m^2$. Tā kā šīs vienādības labā puse dalās ar 5, tad arī kreisajai pusei, t.i., a^2+2 jādalās ar 5. Ar 5 dalās skaitļi, kas beidzas ar 0 vai 5. Viegli pārbaudīt, ka skaitlis a^2+2 nebeidzas ne ar 0 ne ar 5, tātad a^2+2 nedalās ar 5 un tāpēc skaitlis $5(a^2+2)$ nav neviena naturāla skaitļa kvadrāts.

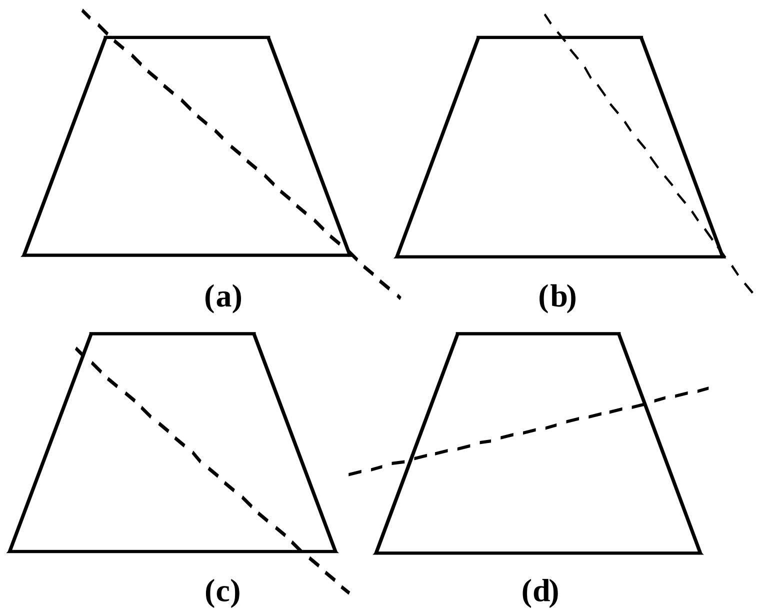
33. Atbilde. a) Divos trijstūros (skat. 42.(a) zīm.) vai trijstūrī un četrstūrī (skat. 42.(b) zīm.);



(a) (b)

42.zīm.

b)divos trijstūros (skat. 43.(a) zīm.), trijstūrī un četrstūrī (skat.43.(b) zīm.), trijstūrī un piecstūrī (skat. 43.(c) zīm.) vai divos četrstūros (skat. 43.(d) zīm.).



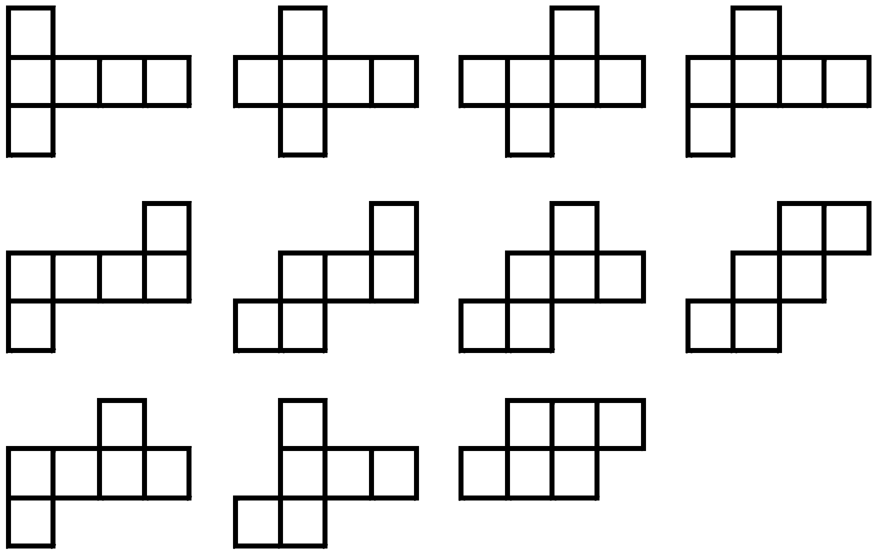
(a) (b)

(c) (d)

43.zīm.

34. Atbilde. a) x=20; b) x=10; c) x=20.

35. Risinājums. (Skat. 44.zīm.).



44.zīm.

36. <u>Atbilde</u>. Jā, noteikti (skat. 45.zīm.).

	A	B	C
A		1	1
B	0		1
C	0	0	

45.zīm.

<u>Risinājums</u>. Tā kā ir 3 spēles, tad ir gūtas 3 uzvaras un 3 zaudējumi. Katra komanda ir spēlējusi ar divām citām, tātad lielākais iegūto punktu skaits ir 2 punkti. Ja viena no komandām ir ieguvusi 2 punktus, tad otra ir ieguvusi 1 punktu, bet trešā – punktu, līdz ar to zaudējot abām pārējām.

37. **I**. <u>Atbilde</u>. Jā, dalās.

<u>Risinājums</u>. To var izskaitļot:

$2^3+7=8+7=15$, 15 dalās ar 5.

II. <u>Atbilde</u>. Jā, dalās.

Risinājums. Tā kā ar 5 dalās skaitļi, kuri beidzas ar 5 un 0, tad jāzin tikai dotā skaitļa pēdējais cipars.

$138792^3+7=...8+7=...5$, tā kā tas ir 5, tad skaitlis 138792^3+7 dalās ar 5.

III. Atbilde. Jā, dalās.

Risinājums. Pārveidosim doto summu $7\cdot13\cdot2^3+7\cdot26\cdot2^3+7\cdot146\cdot2$. Tā kā katrs saskaitāmais satur reizinātāju 7, tad katrs saskaitāmais dalās ar 7 un ar 7 dalās arī dotā summa.

IV. Atbilde. Jā, dalās.

Risinājums. Atverot iekavas, vieninieki saīsinās, bet visi citi saskaitāmie satur reizinātāju 7, tāpēc dotais skaitlis noteikti dalās ar 7.

38. Risinājums.

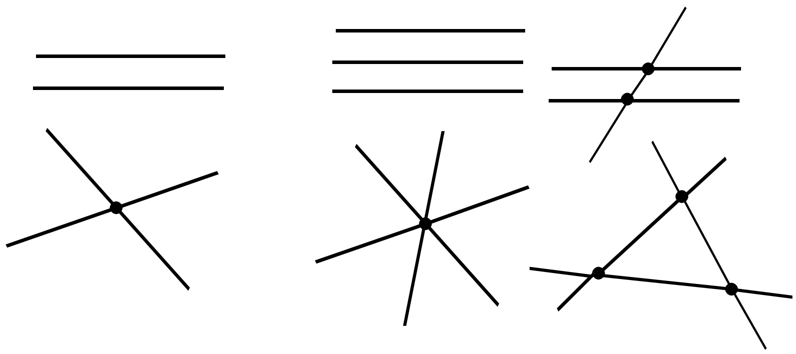
a) $25-24=1$;

b) $5^2-24=1$.

39. Atbilde. a) 0 vai 1; b) 0, 1, 2 vai 3; c) 0, 1, 3, 4, 5 vai 6.

Risinājums. a) (skat. 46.(a) zīm.);

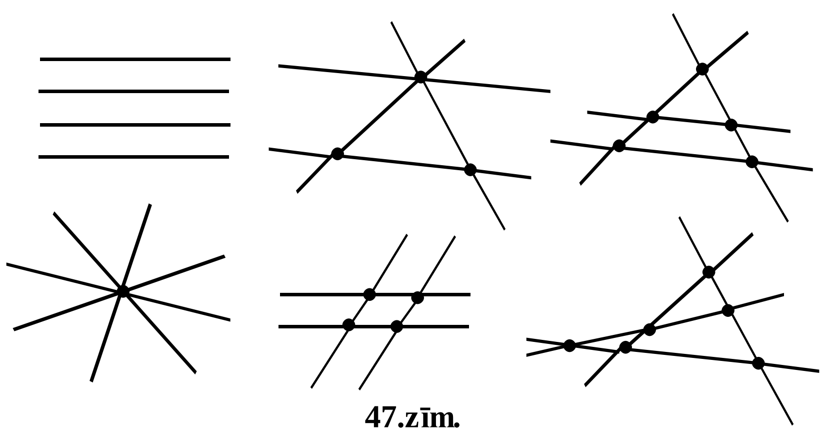
b) (skat. 46.(b) zīm.);



(a) **(b)**

46.zīm.

c) (skat. 47.zīm.):



47.zīm.

40. Atbilde. a) 11; 16; 18; 19; 61; 66; 68; 69; 81; 86; 88; 89; 91; 96; 98; 99.

b) 11; 69; 88; 96.

Risinājums. a) Apgriežot lapu “ar kājām gaisā”, divciparu skaitlī cipari mainās vietām – pirmais kļūst par pēdējo, bet pēdējais - par pirmo. Cipari 0, 1 un 8 savu nozīmi nemaina, 6 un 9 mainās vietām, bet 2, 3, 4, 5 un 7 zaudē jēgu. Tā kā tas ir divciparu skaitlis, tad ciparu 0 neizmanto, jo skaitlis ar 0 sākties nevar. Tas nozīmē, ka izmanto ciparus 1, 6, 8 un 9. Visi iespējamie gadījumi redzami tabulā (skat. 48.zīm.).

sākotnējais	iegūtais	sākotnējais	iegūtais
skaitlis	skaitlis	skaitlis	skaitlis
1 1	*1 1*	8 1	1 8
1 6	9 1	8 6	9 8
1 8	8 1	*8 8*	*8 8*
1 9	6 1	8 9	6 8
6 1	1 9	9 1	1 6
6 6	9 9	*9 6*	*9 6*
6 8	8 9	9 8	8 6
6 9	*6 9*	9 9	6 6

48.zīm.

b) No tabulas (skat. 48.zīm.) redzams, ka šie skaitļi ir 11, 69, 88 un 96.

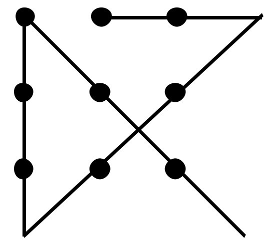
41. Atbilde. a) Jā, ir; b) jā, ir c) jā ir.

Risinājums. a) Kā redzams no dotā visu trīs trijstūru pamati atrodas uz vienas taisnes un tie ir savā starpā vienādi. Novelkot augstumu h no virsotnes B, tas šiem trijstūriem ir kopīgs un katra trijstūra laukums ir $S=\frac{1}{2}a\cdot h$, kur AD=DE=EC=a.

b) Visu trīs trijstūru pamati atrodas uz vienas taisnes un tie ir savā starpā vienādi, bet virsotnes N, P un S atrodas uz paralēlas taisnes. Tāpēc, novelkot katra trijstūra augstumu, attiecīgi no virsotnēm N, P un S tie ir savā starpā vienādi ($h_1=h_2=h_3=h$) kā attālumi starp paralēlām taisnēm t un b un katra trijstūra laukums ir $S=\frac{1}{2}a\cdot h$, kur MK=LT=RV=a.

c) Visu trīs trijstūru pamati ir sakrītoši tāpēc vienādi, bet virsotnes D, I un J atrodas uz paralēlas taisnes. Tāpēc, novelkot katra trijstūra augstumu, attiecīgi no virsotnēm D, I un J tie ir savā starpā vienādi ($h_1=h_2=h_3=h$) kā attālumi starp paralēlām taisnēm t un b un katra trijstūra laukums ir $S=\frac{1}{2}a\cdot h$, kur XY=a.

42. Risinājums. Skat. 49.zīm.



49.zīm.

45. <u>Atbilde</u>. a) $\sqrt{3}-1$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

<u>Risinājums</u>. a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$;

b) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}+5}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

47. <u>Atbilde</u>. Tramvaji atiet no galapunkta ik pēc $5\frac{5}{6}$ minūtēm.

<u>Risinājums</u>. Attālumu starp diviem tramvajiem, kas pa līniju kursē viens aiz otra, apzīmēsim ar s(m), tramvaja ātrumu – ar x(m/min), bet gājēja ātrumu – ar y(m/min). No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$\frac{x+y}{s}=\frac{1}{5}, \frac{x-y}{s}=\frac{1}{7}$ (*).

Jānosaka laika intervāls $\frac{s}{x}$. Saskaitot vienādojumus (*), iegūstam, ka

$\frac{2x}{s}=\frac{12}{35} un \frac{s}{x}=5\frac{5}{6}$ min.

49. <u>Atbilde</u>. Mazākais skaits skaitļu, kurus var izvēlēties ir 6.

<u>Risinājums</u>. Naturālo skaitļu kopu sadalīsim 5 klasēs: pirmajā klasē iekļausim skaitļus, kuri dalās ar 5, otrajā, trešajā, ceturtajā un piektajā klasē – skaitļus, kuri, dalot tos ar 5, atlikumā dod attiecīgi 1, 2, 3 vai 4. Acīmredzot divu vienas klases skaitļu starpība dalās ar

5. Ja izvēlēsimies 6 skaitļus, tad no tiem vismaz divi piederēs vienai klasei, tātad to starpība dalīsies ar 5.

50. Atbilde. Nē, neeksistē.

Risinājums. Aprēķināsim sešstūra iekšējo leņķu summu $180^0(n-2)=720^0$.

Ja sešstūrim 5 leņķi ir šauri, t.i., $<90^0$, tad šo šauro leņķu summa ir $5 \cdot 90^0<450^0$.Tāpēc sestā leņķa lielums ir $720^0-450^0>270^0$, tas nozīmē, ka sešstūris ir ieliekts.

51. Atbilde. a) 4 punktus (skat. 50.zīm.);

*		*
*		*

50.zīm.

b) 8 punktus (skat. 51.zīm.);

	*	*	
*			*
*			*
	*	*	

51.zīm.

c) 12 punktus (skat. 52.zīm.).

*					*
		*	*		
	*			*	
	*			*	
		*	*		
*					*

52.zīm.

52. Atbilde. a) Jā, var piemēram, 5; 1; 4; 2; 6; 3;

b) nē, nevar. Ja rindā uzraksta naturālos skaitļus no 1 līdz 7, tad starp tiem ir divi tādi pirmskaitļi 5 un 7, kuri var atrasties blakus tikai ar 1.

53. Atbilde. Gliemezis staba augšējo galu sasniedz plkst. 14.18.

Risinājums. Tā kā gliemezis rāpjas gan augšup, gan lejup, tad 5 min viņš ir pavirzījies pa stabu uz augšu par 10 cm. Šādi virzoties uz augšu, viņš 270 cm veic 135 min. Pēdējos 30 cm gliemezis veic 3 min, jo tad, kad ir sasniegts staba augšējais gals, atpakaļ viņš vairs nerāpjas. Tātad gliemezis staba augšējo galu sasniedz pēc

138 min=2 h 18 min, t.i., plkst 14.18.

54. Atbilde. Grūtības var rasties vai nu Izēdājam, vai Brālītim.

Risinājums. Ja pirmais pie galda atnāk Našķis un savu pankūku uzliek uz lielākā šķīvja, tad Izēdājam nav uz kā uzlikt savu pankūku. Ja pirmais pie galda atnāk Izēdājs un pēc tam Našķis un uzliek savu pankūku uz vidējā šķīvīša, tad grūtības būs Brālītim.

55. Atbilde. Mazākais iespējamais skaits ir 4.

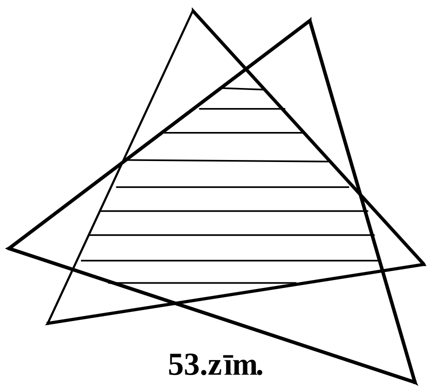
Risinājums. Sanumurēsim bērnus no 1 līdz 6. Pavisam veidojas 6 dažādi bērnu trijnieki: 123; 234; 345; 456; 561 un 612. Šajos trijniekos kopā jābūt vismaz $6 \cdot 2=12$ bērniem, kuri prot braukt ar skrituļslidām. Tā kā katrs bērns parādās tieši 3 trijniekos, tad 12:3=4, t.i., vismaz 4 bērniem jābūt.

Ja tie ir bērni ar numuriem 1, 2, 4 un 5, tad redzam, ka uzdevuma nosacījums izpildīts un ar 4 bērniem pietiek.

56. Atbilde. Daļas vērtība samazināsies.

Risinājums. Saucējam pieskaitot pozitīvu skaitli c, tas kļūst lielāks (jauniegūtā daļa $\frac{a}{b+c}$). Tātad daļas vērtība samazināsies.

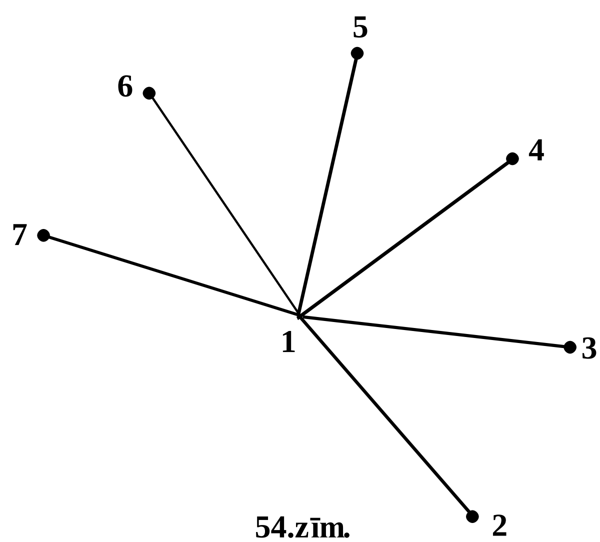
57. Risinājums. (Skat. 53.zīm.).



53.zīm.

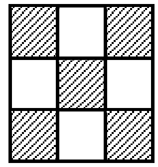
58. Atbilde. Jā, var, piemēram, $\{1;1;-1;-1\}$.

60. Atbilde. Mazākais taciņu skaits, kas jāierīko Pasaku mežā ir 6 (skat. 54.zīm.).



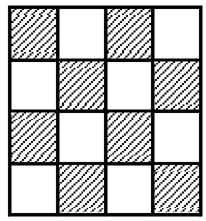
54.zīm.

61. Atbilde. a) 5 rūtiņas (skat. 55.zīm.);



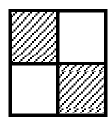
55.zīm.

b) 8 rūtiņas (skat. 56.zīm.).



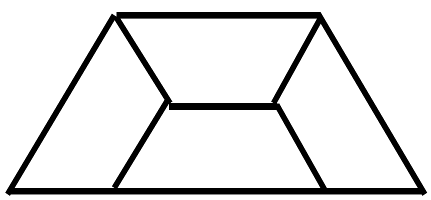
56.zīm.

<u>Risinājums</u>. Katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā var iekrāsot maksimāli 2 rūtiņas (skat. 57.zīm.).



57.zīm.

63. <u>Atbilde</u>. Jā, var (skat. 58.zīm.).



58.zīm.

64. <u>Atbilde</u>. Piemēram: “Vai vairākums no jums trim ir tāda paša tipa rūķīši kā tu?”

65. <u>Atbilde</u>. $S_{iesv.}=R^2(\pi-2)$.

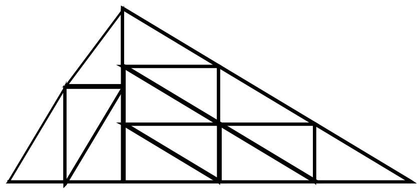
<u>Risinājums</u>. $S_{iesv.}=S_{\text{riņķis}}-S_{\text{kvadrāts}}$.

Ievilktā kvadrāta diagonāle sakrīt ar riņķa diametru.

$S_{riņķis}=\pi R^2$ un $S_{kvadrāts}=(2R^2):2=4R^2:2=2R^2$.

$S_{iesv.}= \pi R^2-2R^2=R^2(\pi-2)$.

66. Atbilde. Jā, šāds trijstūris eksistē, piemēram, trijstūris, kura katetes attiecas kā 2:3. (Skat. 59.zīm.).



59.zīm.

67. Atbilde. Lielākais iegūtais skaitlis, kurš dalās ar 9 ir 4421421.

Risinājums. Uzrakstīto ciparu summa ir 21 (4+2+1+4+2+1+4+2+1=21). Tā kā šī summa nedalās ar 9, tad arī pats skaitlis nedalās ar 9. Nevar izsvītrot tikai vienu ciparu, lai iegūtu summu, kas dalās ar 9. Var izsvītrot divus ciparus 1 un 2, tad iegūtā ciparu summa dalīsies ar 9 (21-(1+2)=18 un 18:9=2) un līdz ar to arī iegūtais skaitlis dalīsies ar 9. Vajag, lai ciparu izsvītrošanas rezultātā iegūtais skaitlis būtu vislielākais, tāpēc jāizsvītro pirmais divnieks un pirmais vieninieks.

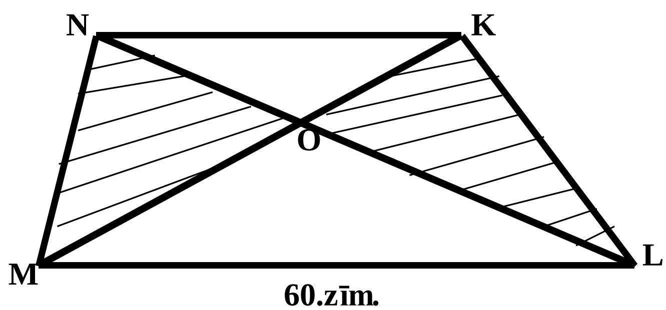
69. Atbilde. a) Jā, dalās; b) jā, dalās.

Risinājums. a) Skaitlis $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot17\cdot18\cdot19$ ir reizinājums, starp kuriem ir arī reizinātājs 13. Tātad dotais skaitlis dalās ar 13.

b) Dotajā skaitlī $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5+(13-5)(13-4)(13-3)(13-2)(13-1)$, atverot iekavas, skaitļu $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$ un $(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)$ reizinājumi noīsināsies, bet visi pārējie saskaitāmie saturēs reizinātāju 13, tādēļ arī summa dalīsies ar 13.

70. <u>Pierādījums</u>. Pirmo 100 naturālo skaitļu summa ir 5050. Saskaitot pirmos 70 skaitļus, iegūtā summa ir 1+2+3+…+70=2485. Skaitlis 2485 ir mazāks nekā puse no 5050, tātad prasītos 70 skaitļus var izvēlēties.

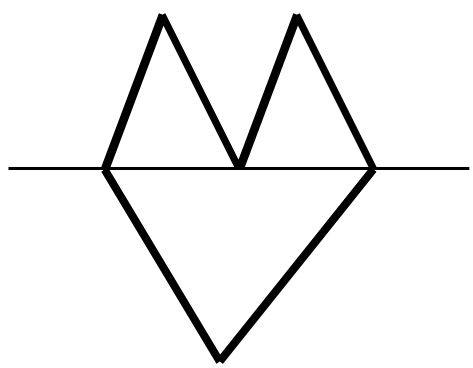
72. <u>Pierādījums</u>. (Skat. 60.zīm.).



60.zīm.

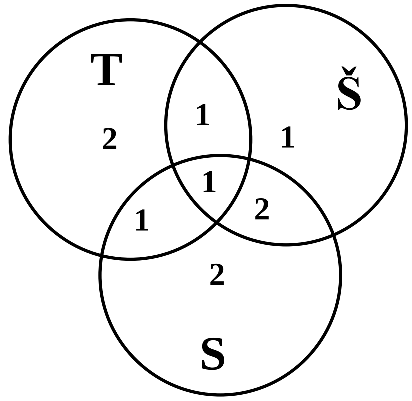
Trapecē MNKL trijstūriem MNL un MKL ir kopējs pamats ML un vienādi augstumi pret to (trapeces augstums). Atņemot no šo trijstūru vienādajiem laukumiem to kopējās daļas – trijstūra MOL – laukumu, iegūsim, ka trijstūru MNO un OKL laukumi ir vienādi.

73. <u>Atbilde</u>. Tas iespējams, ja sešstūris ir izliekts (skat. 61.zīm.).



61.zīm.

74. <u>Atbilde</u>. 1 viesis (skat. 62.zīm.).



62.zīm.

75. Atbilde. a) Ar 1 nulli; b) ar 3 nullēm; c) ar 6 nullēm.

Risinājums. a) skaitļu 1·2·3·4·5·6·7·8·9 reizinājuma beigās nulli dod skaitļu 2·5=10 reizinājums;

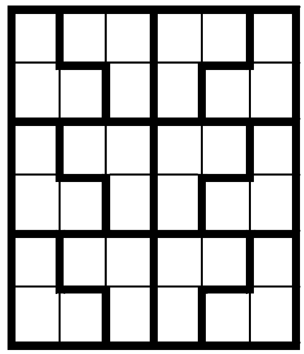
b) skaitļu 1·2·3·… ·19 reizinājuma beigās nulles dod, piemēram, skaitļu 2·5=10, 15·4=60 reizinājumi un skaitlis 10;

c) skaitļu 1·2·3·…·29 reizinājuma beigās nulles dod, piemēram, skaitļu 2·5=10, 15·4=60, 25·8=200 reizinājums un skaitļi 10 un 20. Jāievēro, ka skaitļi 15 un 25 satur reizinātāju 5, jo 15=5·3, bet 25=5·5.

76. Atbilde. Nē, nevar.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka ir izdevies sanumurēt kuba šķautnes prasītajā veidā. Tad visu šķautņu numuru summa ir 1+2+…+12=78. Apzīmējam ar S to šķautņu numuru summu, kuras iziet no vienas virsotnes. Saskaitot pa visām 8 virsotnēm šīs summas, iegūsim skaitli 8S. Tā kā katras šķautnes numurs pieskaitīts 2 reizes (pa vienai reizei no katra šķautnes gala), tad iegūtā summa ir 2·78=156. Skaitīšanas rezultāts nav atkarīgs no skaitīšanas kārtības un tāpēc 8S=156 jeb S=$\frac{156}{8}$=19,5. Bet S ir vesels skaitlis, jo S ir triju veselu skaitļu summa. Iegūtā pretruna parāda, ka pieņēmums nepareizs un ka kuba šķautnes šādi sanumurēt nav iespējams.

77. Atbilde. Kvadrāts 6x6 rūtiņas (skat. 63.zīm.).



63.zīm.

Risinājums. Katrs "stūrītis" sastāv no 3 rūtiņām, tāpēc kvadrāta rūtiņu skaitam jādalās ar 3. Tā kā "stūrīša" garākās malas garums ir 2 rūtiņas, tad kvadrāta malas garumam jādalās ar 2, tāpēc mazākais kvadrāta malas garums ir 6 rūtiņas.

78. Risinājums. Sadalām monētas trijās kaudzītēs A, B un C pa 3 monētām katrā kaudzītē.

1.svēršana.

Uz katra svaru kausa pa vienai kaudzītei, piemēram, A un B, bet kaudzīti C atliekam malā.
Ja svari ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta atrodas kaudzītē C;

ja svari nav līdzsvarā, tad noskaidrojam, kurā kaudzītē - A vai B atrodas vieglākā monēta.

2.svēršana.

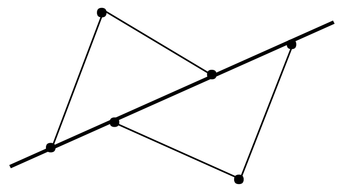
Tās kaudzītes monētas, kurā atrodas vieglākā, apzīmēsim ar a, b un c.

Uz katra svaru kausa novietojam pa vienai monētai, piemēram, a un b.

Ja svari ir līdzsvarā, tad vieglākā ir monēta c;
ja svari nav līdzsvarā, tad noskaidrojam, kura monēta - a vai b ir vieglākā.

79. Atbilde. a) Jā, var; b) nē, nevar.

Risinājums. a) (skat. 64.zīm.);



64.zīm.

b) lai veidotos sešstūris, katrā pusplaknē no taisnes jāatrodas vismaz vienai virsotnei, bet, ja piecas virsotnes atrodas uz taisnes, tad tas nav iespējams.

81. Atbilde. Reizinājuma pēdējie 2 cipari ir 8 un 0.

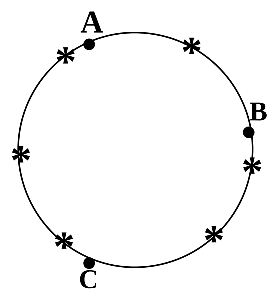
Risinājums. Skaitlis 1 reizinājuma pēdējo ciparu neietekmē.

2·5=10, tātad reizinājuma pēdējais cipars ir 0, bet 1 reizinājuma priekšpēdējo ciparu neietekmē.

Tā kā 3·4=12, 6·7=42 un 8·9=72, tad reizinājuma priekšpēdējais cipars ir vienāds ar skaitļu 12, 42 un 72 pēdējo ciparu reizinājumu: 2·2·2=8.

82. Atbilde. a) 6 zvaigznītes; b) 10 zvaigznītes.

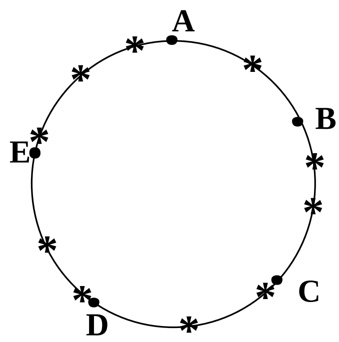
Risinājums. a) Apzīmēsim punktus uz riņķa līnijas pēc kārtas ar A, B un C (skat. 65.zīm.).



65.zīm.

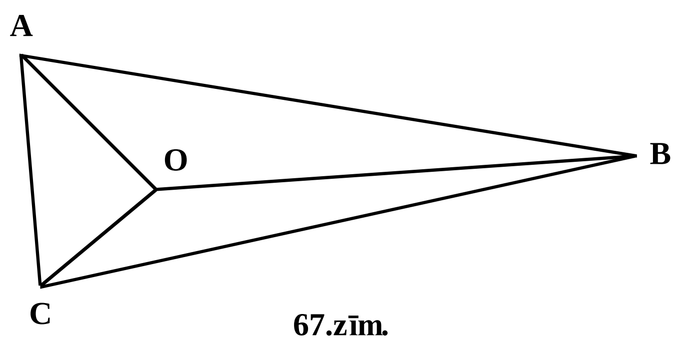
Apskatām lokus AB, AC, BC, BA, CA un CB. Katram no tiem, salīdzinot ar iepriekšējo, viens galapunkts pabīdīts vienā un tajā pašā virzienā, tāpēc visu šo 6 loku viduspunkti noteikti ir dažādi, tāpēc zvaigznīšu nav mazāk kā 6.

b) Apskatot līdzīgi, iegūstam, ka zvaigznīšu nav mazāk kā 10, ja uz riņķa līnijas atzīmēti 5 punkti (skat. 66.zīm.).



66.zīm.

83. Atbilde. Nē, ne noteikti (skat. 67.zīm.).



67.zīm.

Risinājums. Acīmredzams, ka BO>AO+CO. Neizpildās trijstūra nevienādība, ka katram no nogriežņiem AO, BO un CO garums mazāks nekā abu pārējo nogriežņu garumu summa.

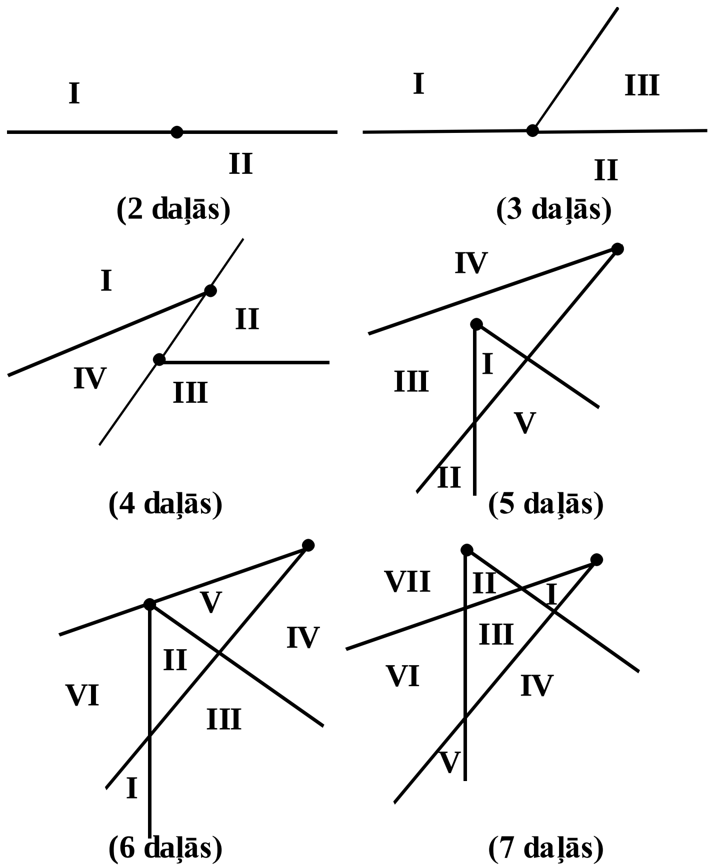
86. Atbilde. 3375 un 375.

87. Atbilde. Nē, neeksistē.

Risinājums. Pieņemsim, ka eksistē tāds skaitlis a. Tādā gadījumā tā apgrieztais skaitlis ir $\frac{1}{a}$, bet $\frac{1}{a} \neq 0$. Gadījumā, ja a=0, tad dalījumam $\frac{1}{a}$ nav jēgas, jo ar nulli dalīt nedrīkst.

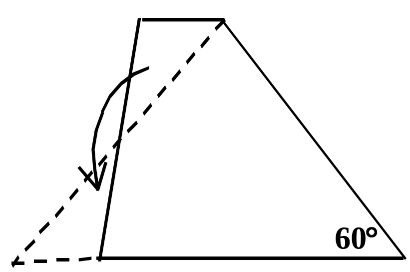
88. Atbilde. 2 leņķu malas var sadalīt plakni 2; 3; 4; 5; 6; 7 daļās.

Risinājums. Skat. 68.zīmējumu.



68.zīm.

89. Risinājums Skat. 69.zīmējumu.



69.zīm.

91. Atbilde. a) Piemēram, der skaitļi 1; 1; 1; 1; 2;

b) nē, nevar.

Risinājums. a) $\frac{1+1+1}{1+2}=\frac{3}{3}=1$,

$\frac{1+1+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$.

b) Pieņemsi no pretējā, ka visi skaitļi ir dažādi. Tādā gadījumā a<b<c<d<e.

Apskatām daļu $\frac{a+b+c}{d+e}$. Tās skaitītājs mazāks par 3c, bet saucējs lielāks par 2c. Tāpēc tās vērtība mazāka par 1,5. Tā kā daļas vērtība ir naturāls skaitlis, tad tā ir 1. Tātad a+b+c=d+e (1).

Apskatām daļu $\frac{a+b+d}{c+e}<\frac{2c+e}{c+e}=1+\frac{c}{c+e}<2$. Tā kā tās vērtība ir naturāls skaitlis, tad tā ir 1.

Tātad a+b+d=c+e (2).

Atņemot (2) no (1), iegūstam

(a+b+c)-(a+b+d)=(d+e)-(c+e)

a+b+c-a-b-d=d+e-c-e

c-d=d-c, no kurienes seko, ka c=d. Iegūta pretruna.

93. **I**. Atbilde. Piemēram, $\frac{7}{24}$.

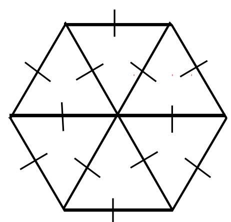
Risinājums. Lai iegūtu daļu, kas lielāka nekā $\frac{1}{4}$, bet mazāka nekā $\frac{1}{3}$, jāvienādo saucēji par kopsaucēju ņemot, piemēram, 24. Iegūstam $\frac{6}{24}$ un $\frac{8}{24}$. Starp šīm daļām atrodas daļa $\frac{7}{24}$, kura atbilst prasītajam.

II. Atbilde. Daļas vērtība palielinās par 1.

Risinājums. Pieņemsim, ka dota daļa $\frac{a}{b}$. Ja pie skaitītāja pieskaita saucēju, tad iegūst daļu $\frac{a+b}{b}$.

$$\frac{a+b}{b}-\frac{a}{b}=\frac{a+b-a}{b}=\frac{b}{b}=1.$$

94. Pierādījums. Uzzīmēsim ap katru punktu 6 vienādmalu trijstūru sistēmu, kuriem šis punkts ir kopīga virsotne, bet malas garums 1m (skat. 70.zīm.).

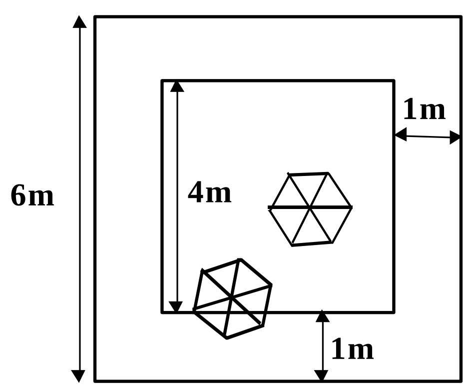


70.zīm.

Tie kopā veido sešstūri, kura laukums ir

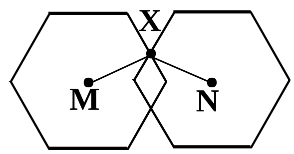
$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1m^2>\frac{6}{4}\cdot 1{,}73m^2>2{,}5m^2$. Viegli saprast, ka neviens šāda sešstūra punkts neatrodas tālāk kā 1m no tā centra.

Ap doto 4mx4m kvadrātu uzzīmējam otru kvadrātu, kura malas ir 1m attālumā no dotā kvadrāta malām. Neviens no minētajiem sešstūriem neiziet ārpus lielākā kvadrāta (skat. 71.zīm.).



71.zīm.

Visu 15 sešstūru laukumu summa ir lielāka par $15\cdot 2{,}5m^2=37{,}5m^2$. Bet ārējā kvadrāta laukums ir $(6m)^2=36m^2$. Saskaņā ar teorēmu par pārklāšanos (skat. * pēc risinājuma) atradīsies divi sešstūri, kam ir kopīgs punkts X; apzīmēsim to centrus ar M un N (skat. 72.zīm.).



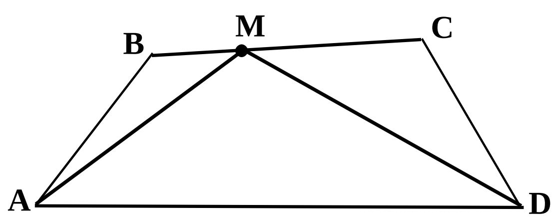
72.zīm.

Tā kā $MX \leq 1m$ un $NX \leq 1m$, tad saskaņā ar trijstūra nevienādību

$MN \leq MX+NX \leq 1m+1m=2m$, kas bija jāpierāda.

***Teorēma par pārklāšanos**. Ja figūrā F, kuras laukums ir L, ievietotas vairākas figūras, kuru laukumu summa ir lielāka par $n \cdot L$, n – naturāls skaitlis, tad var atrast figūras F punktu, kuru pārklāj vismaz n+1 ievietotā figūra.

95. Pierādījums. (Skat. 73.zīm.)



73.zīm.

Pielietojot trijstūra nevienādību Δ ABM un Δ DCM, iegūstam

AB+BM>AM un

MC+CD>MD.

Saskaitot šīs nevienādības, jo vienāda veida nevienādībām var attiecīgi saskaitīt to kreisās puses un labās puses, iegūstam

AB+(BM+MC)+CD>AM+MD jeb

AB+BC+CD>AM+MD.

Pieskaitot pēdējās nevienādības abām pusēm AD, jo nevienādības abām pusēm var pieskaitīt vienu un to pašu skaitli, iegūst

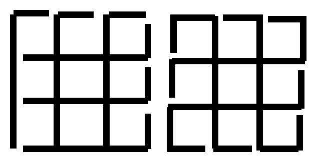
AB+BC+CD+AD>AM+MD+AD

$P_{ABCD}>P_{AMD}$.

96. Pierādījums. Sadalot kvadrātu 4 kvadrātos ar izmēriem 2x2 rūtiņas, viens no tiem satur vai nu 3 vai vairāk nokrāsotu rūtiņu.

2.Ievaduzdevumi(atrisinājumi)

1. Jā, var (skat. 74.zīm.).



74.zīm.

2. Atbilde.n=2.

I.Risinājums. Skaitļi n un n+1 ir blakus esoši, tātad viens no tiem ir pāra. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tātad vai nu n=2, vai n+1=2.

Ja n=2, tad n+1=3 un n+15=17. Skaitļi 3 un 17 ir pirmskaitļi, tāpēc atbilde der.

Ja n+1=2, tad n=1 un n+15=16. Skaitļi 1 un 16 nav pirmskaitļi, tāpēc atbilde neder.

II.Risinājums. Ievēro, ka skaitļi n+1 un n+15 abi ir vai nu pāra vai nepāra.

Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Tādā gadījumā, ja n+1=2, tad n=1, kas nav pirmskaitlis.

Tā kā visi pārējie pirmskaitļi ir nepāra skaitļi, tad, lai n+1 un n+15 būtu nepāra, vienīgā iespēja ir, ja n=2 un tad n+1=3, bet n+15=17.

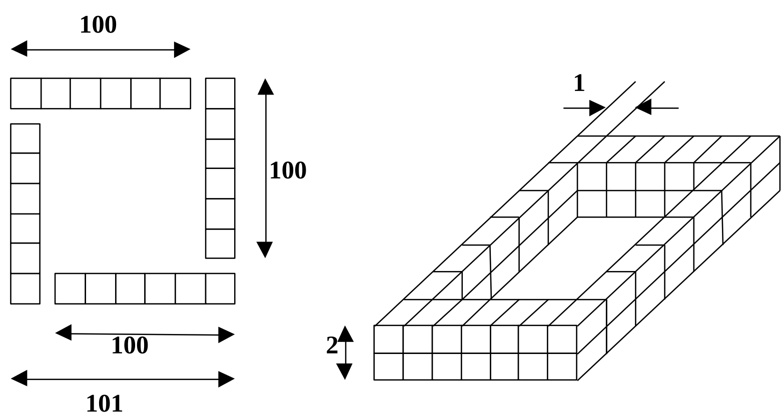
3. Atbilde. a) 21 reizi, b) 1593 reizes.

Risinājums. a) Vieninieks kā simtu cipars sastopams tikai vienu reizi (skaitlī 100). Vieninieks kā desmitu cipars sastopams 10 reizes (skaitļos 10; 11; 12;…; 19). Vieninieks kā vienu cipars sastopams 10 reizes (skaitļos 1; 11; 21;…; 91). Tātad kopā vieninieks sastopams 21 reizi.

b) Vispirms izrēķināsim vieninieku skaitu, ja būtu uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1999. Vieninieks kā tūkstošu cipars sastopams 1000 reizes (skaitļos 1000; 1001; 1002;…; 1999). Vieninieks kā simtu cipars sastopams 200 reizes. To var aprēķināt šādi. Vieniniekam simtu pozīcijā var piekārtot tūkstošu ciparu, kas var būt 0 vai 1 (2 iespējas), desmitu ciparu, kas var būt 0; 1;…; 9 (10 iespējas) un vienu ciparu, kas var būt 0; 1;…; 9 (10 iespējas). Tātad kopā ir 2·10·10=200 iespējas. Līdzīgi varam aprēķināt, ka vieninieks kā desmitu cipars arī sastopams 200 reizes. Vieninieks kā vienu cipars arī sastopams 200 reizes. Kopā iegūsim 1000+200+200+200=1600 ciparus. Skaitļos 1993, 1994,…, 1999 vieninieks parādās kā tūkstošu cipars. Šos 7 skaitļus nevajadzēja pieskaitīt, jo uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1992. Tāpēc īstais vieninieku skaits ir 1660-7=1593.

4. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Par vienu ķermeni ņemsim kubu ar izmēriem 20x20x20. Par otru ņemsim kvadrātveida "skursteni", kura platums 101, biezums – 1, bet augstums – 2 (skat. 75.zīm.).



75.zīm.

Kuba tilpums ir 20x20x20=8000 un virsmas laukums ir 6x20x20=2400.

"Skursteņa" tilpums ir 2x4x100=800 un virsmas laukums ir 800x3=2400, jo katram mazajam kubiņam ir tieši 3 skaldnes, kas pieder "skursteņa" virsmai.

5. Atbilde. Nevar noskaidrot.

Risinājums. Zēna augumu mēra no pēdām līdz galvas virsai, bet uzdevumā dotie dati vispār neskar attālumu no acīm līdz galvas virsai. Tāpēc prasīto noskaidrot nevar.

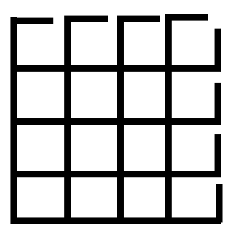
Arī tad, ja ar augumu saprastu attālumu no pēdām līdz acīm, prasīto nevarētu noskaidrot. Apzīmēsim zēnu augumus ar burtiem A (Andris), B (Bruno), D (Dainis), E (Edgars). Tad no uzdevumā dotā seko, ka $B+D<A+B$ un $A+B<D+E$. No tā seko, ka $D<A$ un $B<E$. Ja $A \leq B$, tad iespējams, ka $D<A<B<E$ (piemēram, $101<102<103<105$). Ja $E \leq B$, tad iespējams, $B<E<D<A$ (piemēram, $101<103<105<106$). Tā kā no uzdevuma nosacījumiem iegūstam vismaz divas dažādas zēnu augumu attiecību iespējas, tad skaidrs, ka prasīto noskaidrot nevar.

6. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Piemēram:

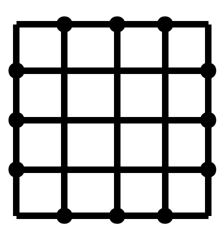
$$\frac{9327}{18654}=\frac{1}{2};\frac{5832}{17496}=\frac{1}{3};\frac{7956}{31824}=\frac{1}{4};\frac{9723}{48615}=\frac{1}{5};\frac{5697}{34182}=\frac{1}{6};\frac{4527}{31689}=\frac{1}{7};$$
$$\frac{9352}{74816}=\frac{1}{8};\frac{6381}{57429}=\frac{1}{9}$$

7. Atbilde. a) var (skat., piemēram, 76.zīm.).



76.zīm.

b) nevar. Līniju kopgarums ir 40, tāpēc pa katru režģa posmu līnijai jāiet tieši vienu reizi. Katrā režģa punktā, kurā kopā saiet trīs režģa "stienīši" (uz lielā kvadrāta malām), jābūt vismaz vienas līnijas galam (citādi līnijas šajā punktā ieietu pāra skaita reižu). Šādu punktu skaits ir 12 (skat. 77.zīm.).



77.zīm.

8. Atbilde. Nē, nav.

I.Risinājums. $4^{15}+15^4=2^{30}+15^4=(2^{15})^2+(15^2)^2=(2^{15})^2+2\cdot2^{15}\cdot15^2+(15^2)^2-2\cdot2^{15}\cdot15^2=$

$=(2^{15}+15^2)^2-2^{16}\cdot15^2=(2^{15}+15^2)^2-(2^8\cdot15)^2=(2^{15}+15^2-2^8\cdot15)(2^{15}+15^2+2^8\cdot15)=$

$=(32768+225-3840)(32768+225+3840)=29153\cdot36833.$

Tā kā dotais skaitlis ir sadalīts divos reizinātājos, no kuriem katrs ir šī skaitļa dalītājs, tad dotais skaitlis nav pirmskaitlis.

II.Risinājums. Apzīmēsim $15=a$ un $2^7=b$. Tad

$4^{15}+15^4=4\cdot4^{2\cdot7}+a^4=4\cdot2^{2\cdot2\cdot7}+a^4=4b^4+a^4=a^4+4a^2b^2-4a^2b^2+4b^4=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=$

$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab).$

Abi reizinātāji ir lielāki par 1, tāpēc dotais skaitlis nav pirmskaitlis.

9. Atbilde. Nē, tāda skaitļa nav.

Risinājums. Aplūkosim divus gadījumus.

I.Skaitļa n decimālajā pierakstā ir kāds (vismaz viens) cipars, kas nav ne 0, ne 9. Tad, izrakstot visus skaitļus no 1 līdz n, tajā pozīcijā, kurā atrodas šis cipars, vieninieki būs parādījušies vairāk reižu nekā devītnieki, bet citās pozīcijās vieninieki būs parādījušies tikpat, cik devītnieki. Tāpēc vieninieku būs vairāk.

II.Skaitļa n decimālajā pierakstā nav sastopami citi cipari kā nulles un devītnieki (varbūt tikai devītnieki). Tad cipari 1; 2; 3;…; 9 visi sastopami vienādu skaitu reižu. Noskaidrosim, vai nulle var būt sastopama tikpat reizes, cik vieninieks.

Pieņemsim, ka n ir k-ciparu skaitlis. Tos k-ciparu skaitļus, kas nepārsniedz n, sauksim par lieliem; tos naturālos skaitļus, kuru pierakstā ir mazāk par k cipariem, sauksim par maziem.

Papildināsim mazos skaitļus ar nullēm skaitļa priekšā, padarot to pierakstus par (k-1) ciparu virknītēm. Tiek pierakstītas liekas $(10^{k-2}+1)+(10^{k-3}-1)+\ldots+(10^1-1)$ nulles. Mazo skaitļu pierakstā tagad vieninieku ir par (k-1) vairāk nekā nuļļu (to skaits būtu vienāds ar nuļļu skaitu, ja būtu pierakstīts arī nulles pieraksts $\underbrace{00...0}_{k-1}$). Tātad patiesībā mazo skaitļu pierakstā vieninieku ir par $10^{k-2}+10^{k-3}+...+10^{1}+1$ vairāk nekā nuļļu.

Tātad, lai visi cipari būtu pierakstīti vienādu skaitu reižu, lielo (t.i., k-ciparu skaitļu, kas nepārsniedz n) pierakstā nullēm jābūt par $10^{k-2}+10^{k-3}+...+10^{1}+1$ vairāk nekā vieniniekiem. Parādīsim, ka tā nevar būt.

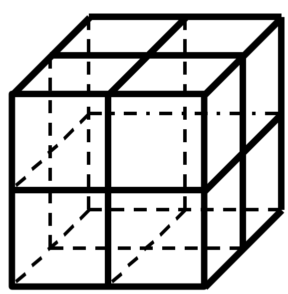
Atradīsim skaitlim n no kreisās puses pirmo nulli. Pēc tam, kad cipari pa kreisi vairs nemainās (t.i., ir devītnieki), nulle šajā pozīcijā parādās ne vairāk kā 10^{k-2} reizes, jo pa labi atlikušais skaitlis ir ne lielāks kā k-2 ciparu skaitlis. Līdzīgi, katra nākamā nulle pa labi pēc tam, kad kreisā puse vairs nemainās, parādās ne vairāk kā 10^{k-3} reizes, utt.

Ja pirmajai nullei pa labi nav bijuši devītnieki, tad nuļļu skaits, kas parādās pēc tam, kad kreisā pusē ir tikai devītnieki, nav lielāks par k-2.

Ja ir bijis kāds devītnieks, tad nuļļu skaits ir bijis ne lielāks kā

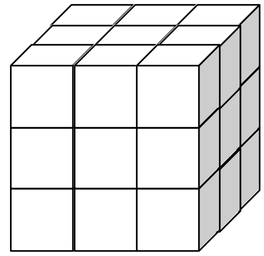
$(10^{k-2}+10^{k-3}+...+10^{1}+1)-1$, t.i., mazāk nekā vajadzīgs. Tāpēc vieninieku skaits tā arī paliek lielāks par nuļļu skaitu.

10. Risinājums. Sagriežot kubu ar 3 plaknēm 8 vienādos kubiņos, kopējais kubu skaits palielinās par 7 (skat. 78.zīm.).



78.zīm.

Sagriežot kubu ar 4 plaknēm 27 vienādos kubiņos, kopējais kubu skaits palielinās par 26 (skat. 79.zīm.).



79.zīm.

Ievērosim, ka 1992=1+277·7+26·2. Tāpēc pietiek 277 reizes izdarīt pirmā veida griešanu un 2 reizes – otrā veida griešanu.

11. Atbilde. 120 skaitļu.

Risinājums. Septiņus dažādus ciparus sakārtot dilstošā kārtībā var tikai vienā veidā. Tāpēc jāatrod, cik dažādos veidos no 10 dilstošā kārtībā izrakstītu ciparu virknes 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0 var paņemt septiņus ciparus. Tiem, kas pazīstami ar kombinācijām, viegli aprēķināt, ka meklētais skaits ir $C_{10}^{7}=C_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$.

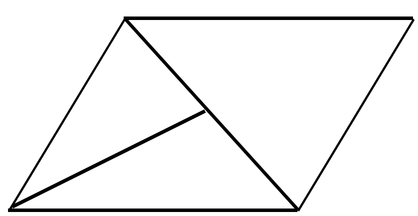
Pārējie varētu spriest sekojoši. Ir tikai viens tāds skaitlis, kas sākas ar 6 (6543210). Skaitli, kas sākas ar 7, viennozīmīgi nosaka tas, kuru no cipariem 6, 5, 4,…, 1, 0 neizmantojam tā pierakstā; šādu skaitļu ir 7. Līdzīgi atrodam, ka meklējamo skaitļu, kas sākas ar 8, ir 28, bet meklējamo skaitļu, kas sākas ar 9, ir 84. Tātad pavisam šādu skaitļu ir 1+7+28+84=120.

12. Atbilde. $\frac{180^{O}}{5}\,un\,\frac{4\cdot 180^{O}}{5};\frac{2\cdot 180^{O}}{5}\,un\,\frac{3\cdot 180^{O}}{5};\frac{180^{O}}{7}\,un\,\frac{6\cdot 180^{O}}{7};$ $\frac{2\cdot 180^{O}}{7}\,un\,\frac{5\cdot 180^{O}}{7};\frac{3\cdot 180^{O}}{7}\,un\,\frac{4\cdot 180^{O}}{7}$

Risinājums. Ir tikai trīs iespējas, kā paralelogramu sagriezt 3 trijstūros:

1) diagonāle+nogrieznis

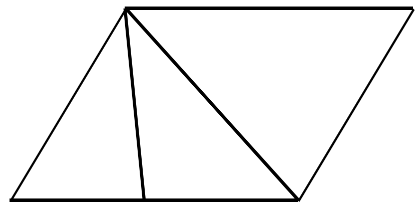
“stūris-diagonāle” (skat. 80.zīm.);



80.zīm.

2) diagonāle+nogrieznis

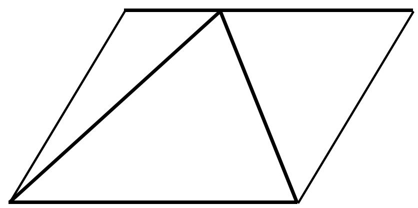
“stūris-mala” (skat. 81.zīm.);



81.zīm.

3) divi nogriežņi

“stūris-mala” (skat. 82.zīm.).



82.zīm.

Analizējot katrā gadījumā atsevišķi, kuras malas trijstūros var būt vienādas, izmantojam sekojošas īpašības:

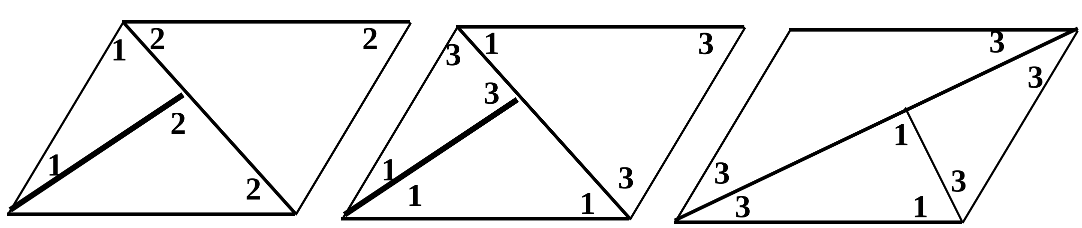
*Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi.
*Vienādsānu trijstūrī pie pamata var būt tikai šaurs leņķis.

*Paralelograma pretējie leņķi ir vienādi, un pie vienas malas esošo leņķu summa ir 180^0.

*Pie paralelograma malām veidojošies iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

1) gadījumā iegūtie risinājumi:

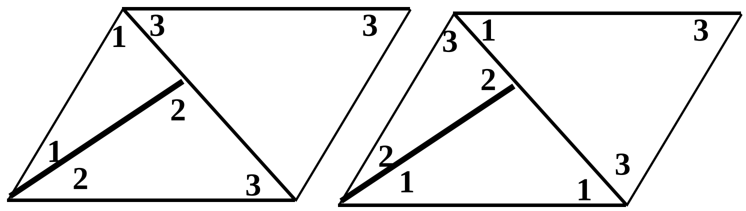
$\frac{2\cdot 180^0}{5};\frac{3\cdot 180^0}{5}$ (skat. 83.(a), (b), (c) zīm.);



(a) (b) (c)

83.zīm.

$\frac{3\cdot 180^0}{7};\frac{4\cdot 180^0}{7}$ (skat. 84.(a), (b) zīm.);

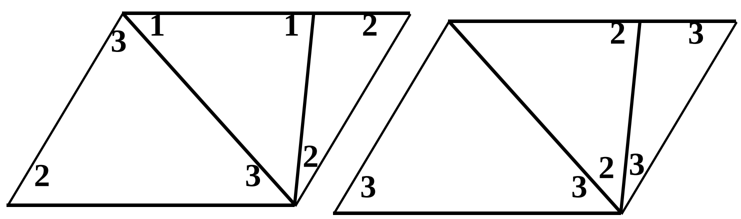


(a) (b)

84.zīm.

2) gadījumā iegūtie risinājumi:

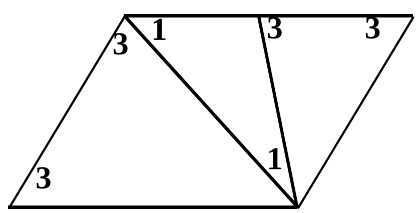
$\frac{180^0}{5}; \frac{4\cdot180^0}{5}$ (skat.85.(a), (b) zīm.);



(a) (b)

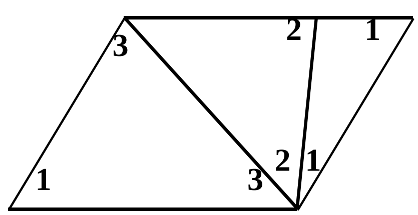
85.zīm.

$\frac{2\cdot180^0}{5}; \frac{3\cdot180^0}{5}$ (skat. 86.zīm.);



86.zīm.

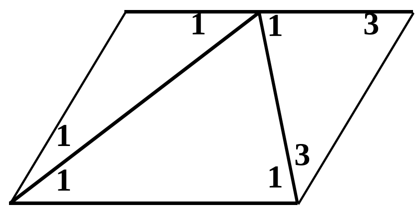
$\frac{180^0}{7}; \frac{6\cdot180^0}{7}$ (skat. 87.zīm.);



87.zīm.

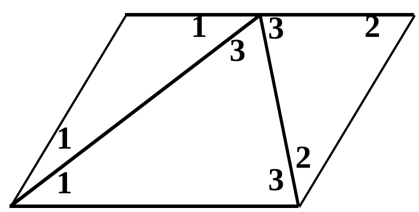
3) gadījumā iegūtie risinājumi:

$\frac{2 \cdot 180^0}{5}; \frac{3 \cdot 180^0}{5}$ (skat. 88.zīm.);



88.zīm.

$\frac{2 \cdot 180^0}{7}; \frac{5 \cdot 180^0}{7}$ (skat. 89.zīm.).



89.zīm.

13. Pierādījums. Apzīmēsim skaitļu virknes k-to locekli ar F(k), k=1; 2;… Tad, piemēram, F(1)=2; F(2)=2 F(5)=8 utt.

Saskaņā ar virknes veidošanas nosacījumiem katram naturālam k pastāv vienādība

F(k+2)=F(k+1)+F(k).

Te k vietā var likt jebkuru naturālu skaitli, kā arī burtu vai izteiksmi, kuras vērtība ir naturāls skaitlis. Piemēram,

ja k=n+4, iegūstam F(n+6)=F(n+5)+F(n+4).

Ja k=n+3, iegūstam F(n+5)=F(n+4)+F(n+3).

No abām nupat iegūtajām vienādībām seko F(n+6)=2F(n+4)+F(n+3).

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam

F(n+6)=2(F(n+3)+F(n+2))+F(n+3)=3F(n+3)+2F(n+2)=3(F(n+2)+F(n+1))+2F(n+2)=

=5F(n+2)+3F(n+1)=5(F(n+1)+F(n))+3F(n+1)=8F(n+1)+5F(n)>8F(n)+5F(n)=

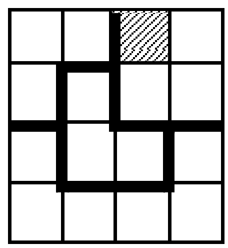
=13F(n)>10F(n).

(Nevienādība iegūta, ievērojot, ka virkne ir augoša, tāpēc visiem naturāliem k spēkā F(k+1)>F(k)).

Esam ieguvuši, ka F(n+6)>10F(n). Tātad F(n+6) satur vairāk ciparu nekā F(n). Ievietojot n=100, iegūstam prasīto.

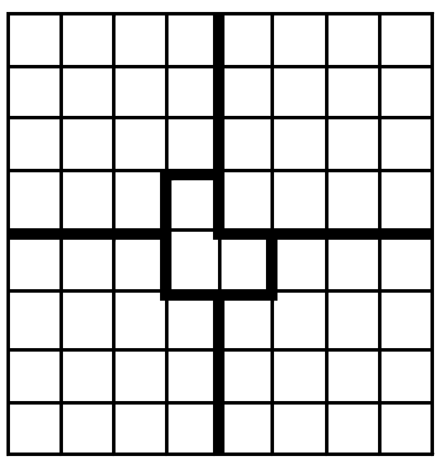
14. Atbilde. Jā, var.

Pierādījums. Aplūkosim kvadrātu 4x4 rūtiņas. Pieņemsim, ka no tā izgriezta viena rūtiņa. Tā atrodas vienā no kvadrātiem 2x2. Atlikusī kvadrāta 2x2 daļa pati ir stūrītis. Pārējo 4x4 kvadrāta daļu var sagriezt stūrīšos (skat. 90.zīm.).



90.zīm.

Apskatīsim tagad 8x8 rūtiņu kvadrātu ar vienu izgrieztu rūtiņu. Tā atrodas vienā no četriem 4x4 rūtiņu kvadrātiem (skat. 91.zīm.).



91.zīm.

Šī 4x4 rūtiņu kvadrāta atlikumu var sagriezt stūrīšos, kā parādīts iepriekš. No pārējās 8x8 kvadrāta daļas centrā izgriežam vienu stūrīti tā, lai tas saturētu pa vienai rūtiņai no trim pārējiem 4x4 rūtiņu kvadrātiem. Saskaņā ar iepriekš pierādīto, katrā no šiem trim 4x4 rūtiņu kvadrātiem atlikumu arī var sagriezt stūrīšos.

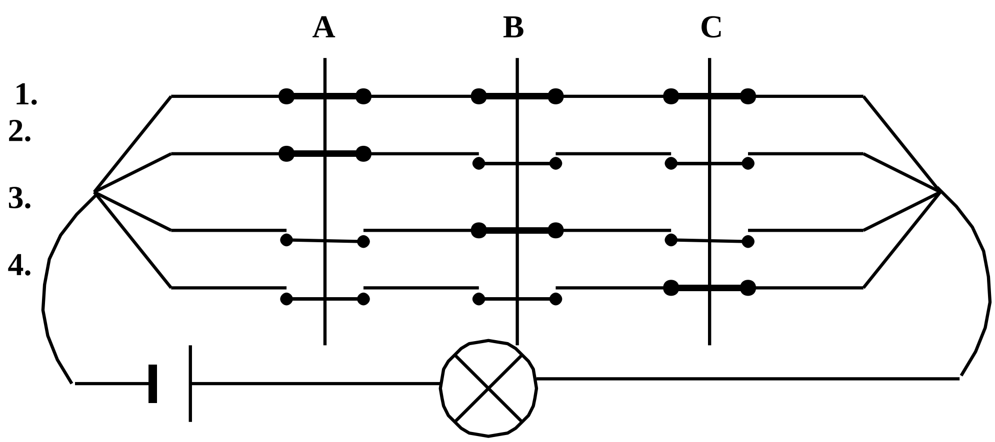
Līdzīgi pierāda: stūrīšos var sagriezt jebkuru kvadrātu, kura malas garums ir divnieka pakāpe, ja no kvadrāta iepriekš vienu patvaļīgu rūtiņu (rūtiņas malas garums ir 1).

15. Atbilde. Nepāra skaitļu ciparu summa ir par 499 lielāka.

Risinājums. Papildinām skaitļus līdz trīsciparu skaitļiem ar nullēm skaitļa priekšā. Ciparu summas no tā nemainās. Katra desmita ietvaros (no $\overline{ab0}$ līdz $\overline{ab9}$) nepāra skaitļu ciparu summa ir par 5 lielāka (1+3+5+7+9-(0+2+4+6+8)=5).

Pirmā tūkstoša ietvaros pavisam ir 100 desmitu. Ņemot vērā arī skaitli 1000, nepāra skaitļu ciparu summa ir par 5·100-1 lielāka.

16. Risinājums. Skat. shēmu 92.zīm.



92.zīm.

Slēdži A, B un C virzās vai nu uz augšu, vai uz leju. A slēdzim ir 2 stāvokļi: "savieno 1.vadu un 4.vadu", un otrādi.

C slēdzim arī ir 2 stāvokļi: "savieno 1.vadu un 4.vadu, bet pārtrauc 2.vadu un 3.vadu", un otrādi.

Strāva jebkurā brīdī var plūst tikai pa vienu vadu, jo neviena slēdža savienotie divi vadi nesakrīt ar kāda cita slēdža savienotajiem 2 vadiem. Tādēļ katrs slēdzis var strāvu izslēgt.

Aplūkojot A un B slēdžu visas četras iespējamās situācijas, redzam, ka vienmēr eksistē viens vads, ko savieno gan A, gan B. Tāpēc slēdzis C, savienojot šo vadu, var strāvu ieslēgt. Līdzīgi var spriest arī par pārējiem slēdžiem.

17. Atbilde. 376 un 625.

Risinājums. To, ka diviem skaitļiem pēdējie trīs cipari sakrīt, var pasacīt arī tā: skaitļu starpība dalās ar 1000. Apzīmēsim meklēto skaitli ar n. Tad no uzdevuma nosacījumiem seko, ka n^2 un n pēdējie trīs cipari sakrīt. Tātad n^2-n dalās ar 1000, jeb n(n-1) dalās ar 1000. Skaitļi n un n-1 ir blakus skaitļi. Tāpēc nav iespējams, ka tie abi reizē dalītos ar 2 vai arī abi reizē dalītos ar 5. Tāpēc tieši viens no tiem dalās ar 2, un tieši viens no tiem dalās ar 5. Ievērosim, ka 1000=8·125. Tas nozīmē, ka vienam no skaitļiem jādalās ar 8 un otram jādalās ar 125 (nevar būt, ka trīsciparu skaitlis dalītos gan ar 8, gan ar 125). Ar 125 dalās tikai 7 trīsciparu skaitļi: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. No tiem ar 2 nedalās skaitļi 125, 375, 625, 875.

Tie varētu būt gan n, gan n-1. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam, ka der

1) n=376, n-1=375,

2) n=625, n-1=624.

18. Atbilde. Andris un Didzis melo, Bruno un Edgars nemelo.

Ievērosim: tas, ka Didzis melo, sacīdams, ka Andris un Bruno ir meļi, nozīmētu, ka vismaz viens no viņiem nav melis. Ja Didzis būtu teicis taisnību, tad Andris, Bruno un Edgars melotu. No tā seko, ka Bruno nemelo, jo viņu apmelojis Andris. Pretruna. Tāpēc Didzis melo. No tā seko, ka Edgars nemelo, tātad Didzis melo un vismaz viens no diviem zēniem (Andra un Bruno) nemelo. Tā kā Edgars nemelo, tas nozīmē, ka Andris melo. Tad savukārt Bruno nemelo, jo viņu apmelojis Andris. Tad ir taisnība arī, ka viens no zēniem (Andris un Bruno) nemelo.

19. Atbilde. 999999.

Risinājums. Viegli pārbaudīt, ka 999·1000 neder, bet 999·1001 der. Parādīsim, ka tas ir mazākais daudzkārtnis ar vajadzīgo īpašību.

Apzīmēsim uzdevumā prasīto atbildi ar 999·n. Pārrakstīsim daudzkārtni sekojoši:

999·n=1000·n-n=1000·(n-1)+(1000-n).

Pieņemsim, ka n<1000. Tad skaitlis 999·n ir iegūstams, vienu otram galā pierakstot skaitļus (n-1) un (1000-n), pie tam pēdējo, ja vajadzīgs, papildinot ar nullēm skaitļa priekšā līdz trīsciparu skaitlim. Tā kā (n-1)+(1000-n)=999 – nepāra skaitlis, tad viens no saskaitāmajiem (n-1) un (1000-n) ir pāra skaitlis un beidzas ar pāra ciparu. Tas saskaņā ar uzdevuma prasību nedrīkst būt.

20. Atbilde. 6 govis.

Risinājums. Ievērosim, ka pļavas laukums nepalielinās un zāle aug vienmērīgi, neatkarīgi no tā, cik noēsta. Apzīmēsim

$\frac{1}{x}$ - par tādu sākotnējā daudzuma daļu zāle pieaug 1 dienā.

$\frac{1}{y}$ - tādu zāles sākotnējā daudzuma daļu apēd 1 govs 1 dienā.

$1+\frac{1}{x}$ - tāda zāles sākotnējā daudzuma daļa būtu pēc vienas dienas, ja tā netiktu ēsta.

No pirmā nosacījuma seko, ka

$\frac{1}{y}\cdot 9\cdot 4=1+4\cdot\frac{1}{x}$ (1)

No otrā nosacījuma seko, ka

$\frac{1}{y}\cdot 8\cdot 6=1+6\cdot\frac{1}{x}$ (2)

Atņemot no (2) vienādojuma (1) vienādojumu:

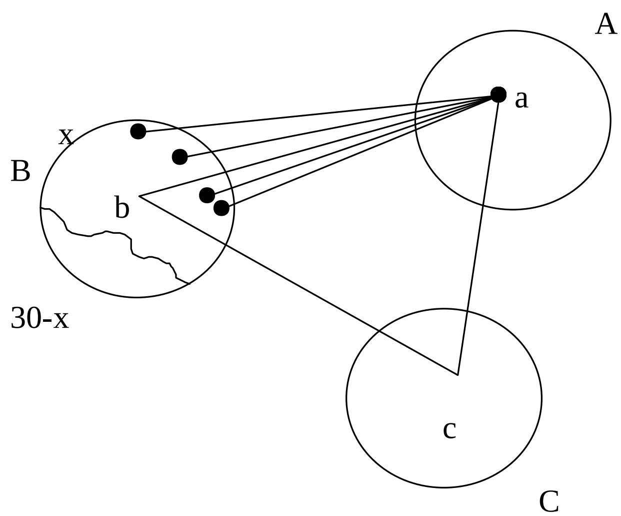
$\frac{1}{y}\cdot 12=2\cdot\frac{1}{x}$ jeb $6=\frac{y}{x}$ (3)

Pieņemsim, ka n ir meklētais govju skaits. Tad

$\frac{1}{y}\cdot n=\frac{1}{x}$ jeb $n=\frac{y}{x}$.

No (3) vienādojuma iegūstam, ka n=6.

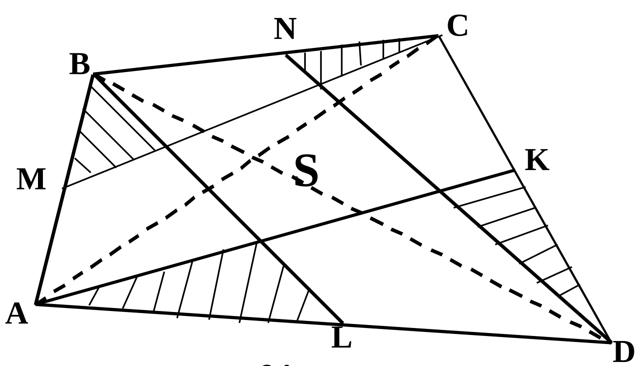
21. Pierādījums. Izvēlēsimies tādu skolēnu a, kuram ir vislielākais draugu skaits vienā klasē. Viņa klasi apzīmēsim ar A, bet pārējās ar B un C. Pieņemsim, ka visvairāk draugu viņam ir klasē B (x draugi), klasē C tātad mazāk (31-x draugi). Klasē C viņam ir vismaz viens draugs c, jo x$\leq$30. Ja c draudzējas ar kādu a draugu b no klases B, tad par komisiju var ņemt a, b, c (skat. 93.zīm.).



93.zīm.

Apskatīsim gadījumu, kad c nedraudzējas ne ar vienu a draugu no B. tad skolēns c klasē B draudzējas ar ne vairāk kā 30-x skolēniem, tāpēc klasē A viņš draudzējas ar vismaz 31-(30-x)=x+1 skolēniem. Tā ir pretruna ar a izvēli, jo skolēnam c vienā klasē ir vairāk draugu nekā skolēnam a. Tātad šāds gadījums nav iespējams.

22. Pierādījums. Apzīmēsim iesvītroto laukumu ar S_{melnie}, balto laukumu bez S ar S_{baltie} (skat. 94.zīm.).



94.zīm.

Tad no dotā varam rakstīt, ka

$S_{ABCD}=S_{melnie}+S_{baltie}+S$ (1).

Novilksim diagonāli BD. Aplūkosim trijstūri ABL. Mediāna BL sadala to divos trijstūros, kuru laukumi vienādi: $S_{\Delta ABL}=S_{\Delta LBD}$, jo pamati un augstumi pret tiem ir vienādi. Tādēļ $S_{\Delta ABD}=2S_{\Delta LBD}$. Līdzīgi varam iegūt, ka $S_{\Delta BCD}=2S_{\Delta BND}$. No tā seko, ka

$S\Delta_{BCD}=S\Delta_{ABD}+S\Delta_{BCD}=2(S\Delta_{LBD}+S\Delta_{BND})=2S_{LNBD}$ (2).

Novelkot arī diagonāli AC un spriežot līdzīgi par trijstūriem ABC un CDA, iegūsim:

$S_{ABCD}=2S_{MCKA}$ (3).

Saskaitot vienādības (2) un (3):

$2S_{ABCD}=2(S_{LBND}+S_{MCKA})=2(S_{baltrie}+2S)$, jeb

$S_{ABCD}=S_{baltie}+2S$ (4).

Salīdzinot vienādības (1) un (4), iegūstam

$S_{melnie}+S_{baltie}+S=S_{baltie}+2S$, jeb

$S_{melnie}=S$, kas bija jāpierāda.

23. Atrisinājums. Piemēram, tā:

$x \cdot x=x^2$

$x^2 \cdot x^2=x^4$

$x^4 \cdot x=x^5$

$x^5 \cdot x^5=x^{10}$

$x^{10} \cdot x^{10}=x^{20}$

$x^{20} \cdot x^{20}=x^{40}$

$x^{40} \cdot x^{40}=x^{80}$

$x^{80} \cdot x^{80}=x^{160}$

$x^{160} \cdot x^{10}=x^{170}$.

Ir arī daudzi citi risinājumi.

24. Atbilde. Var izvietot 5 rongo.

Risinājums. Piemēram, tā kā parādīts 95.zīm.

1	**3**	**3**	**1**	
2	**3**	**3**		**2**
1	**5**		**1**	**5**
2		**4**	**4**	**2**
	5	**4**	**4**	**5**

95.zīm.

Tā kā katrs rongo katrā rindiņā var aizņemt vai nu 0, vai 2 rūtiņas, tad katrā rindiņā paliek brīva vismaz 1 rūtiņa, bet pavisam – vismaz piecas. Tātad rongo skaits nevar būt lielāks par (25-5):4=5.

25. Atbilde. 44 reizes.

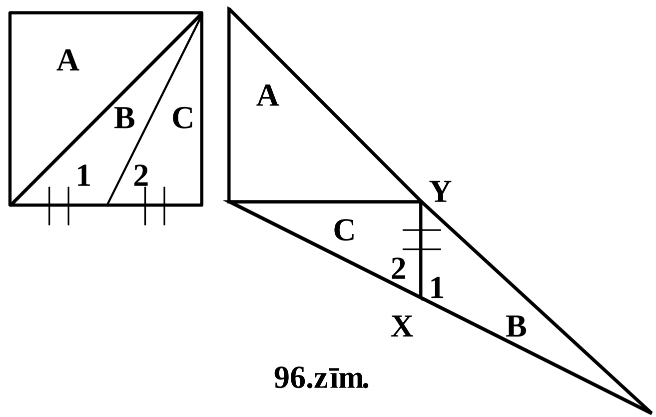
Risinājums. Laikā no pusnakts līdz pusdienai minūšu rādītājs apriņķo 12 reizes. Pirmajā riņķī tas nevar veidot 45^0 leņķi, atrazdamies pirms stundu rādītāja, jo abi sāk no nulles. Tātad tas veido tikai vienu 45^0 leņķi – atrazdamies pēc stundu rādītāja. Pēdējā riņķī minūšu rādītājs nevar stundu rādītāju apdzīt par 45^0 leņķi, jo divpadsmitos abi satiekas. Tātad arī šī riņķa laikā veidojas tikai viens 45^0 leņķiem. Tātad kopā to ir 10·2+2=22. Bet visā diennaktī tādu leņķu būs 22·2=44.

26. Pierādījums. Atradīsim abu doto skaitļu starpību:

(11n-7)-(2n+5)=9n+2.

Šis skaitlis nedalās ar 3 (rodas atlikums 2). Tāpēc abiem sākotnējiem skaitļiem, tos dalot ar 3, rodas dažādi atlikumi. Atcerēsimies, ka ikkatrs skaitlis dod tādu pašu atlikumu, dalot ar 3, kādu, dalot ar 3, dod tā ciparu summa. Tātad, ja dažādi atlikumi, tad arī pašas ciparu summas ir dažādas.

27. Risinājums. Skat., piemēram, 96.zīm.



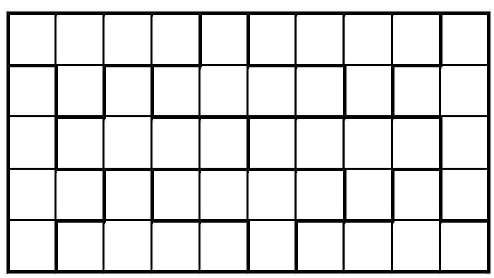
96.zīm.

Punktā X "satiekas" divu tādu leņķu (1 un 2) virsotnes, kas zīmējumā pa kreisi ir blakusleņķi; tāpēc to summa ir 180^0.

Punktā Y "satiekošos" leņķu summa ir $45^0+90^0+45^0=180^0$. Tātad gan X, gan Y veidojas izstiepti leņķi, un iegūtā figūra tiešām ir trijstūris.

28. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Skat., piemēram, 97.zīm.


97.zīm.

29. Atbilde. Jā, taisnība.

Risinājums. Uzdevumā runā tikai par 2 uzdevumiem: "šo" (apzīmēsim to ar B) un "to, kuru atrisinājām pirms šī" (apzīmēsim to ar A).

Nosacījumu varam lasīt no beigām:

"uzdevums, kuru atrisinājāt pirms tam, kad atrisinājāt šo"=A “uzdevums, kuru jūs atrisinājāt pēc tam, kad atrisinājāt A”=B

“bija grūtāks par uzdevumu B”

“uzdevums, kuru jūs atrisinājāt pirms tam, kad atrisinājāt šo”=A

Iegūstam šādu jautājumu:

“Ja A bija grūtāks par B, tad vai taisnība, ka A bija grūtāks par B?”

30. Atbilde. Nē, ne vienmēr.

Risinājums. Skat., piemēram, turnīra tabulu 98.zīm.

	A	B	C	D	E	F	G
A		1	1	1	0	0	0
B	0		1	0	1	1	0
C	0	0		1	1	0	1
D	0	1	0		0	1	1
E	1	0	0	1		1	0
F	1	0	1	0	0		1
G	1	1	0	0	1	0	

98.zīm.

Rindiņas X un kolonnas Y krustojumā esošajā rūtiņā ierakstīts 1, ja X uzvarējusi pret Y, un 0, ja noticis otrādi. Pārbaudiet paši, ka katrām divām komandām var atrast tādu trešo, kas uzvarējusi pret tām abām.

31. Atbilde. a) 2401, b) tādu skaitļu nav.

Risinājums. a) Apzīmēsim meklēto četrciparu skaitli: $\overline{abcd}$. Tad tā ciparu summas ceturtā pakāpe vienāda ar $(a+b+c+d)^4$. Lielākais četrciparu skaitlis ir 9999, bet $10^4=10000$, tāpēc ciparu summai jābūt mazākai par 10. Tā ka 1^4, 2^4,..., 5^4 nav četrciparu skaitļi, atliek vēl tikai pārbaudīt šādas iespējas:

$6^4=1296$ (neder), $7^4=2401$ (der), $8^4=4096$, $9^4=6561$.

b) Rīkojamies līdzīgi kā a) gadījumā. Lielākais piecciparu skaitlis ir 99999, bet 10^5=100000, tāpēc ciparu summa a+b+c+d+e mazāka par 10. Tā kā 1^5, 2^5,…,5^5, 6^5 nav četrciparu skaitļi, vēl jāpārbauda šādas iespējas:

7^5=16807 (neder), 8^5=32768 (neder), 9^5=59049 (neder).

32. <u>Atbilde</u>. Piemēram, $18^2+19^2+\ldots+28^2=5929=77^2$.

<u>Risinājums</u>. Aplūkosim šādu kvadrātu summu:

$(i-5)^2+(i-4)^2+\ldots+i^2+(i+1)^2+\ldots+(i+5)^2=$

$=(i-5)^2+(i+5)^2+\ldots+(i-1)^2+(i+1)^2+i^2=$

$=i^2-10i+25+i^2+10i+25+\ldots+i^2-2i+1+i^2+2i+1+i^2=$

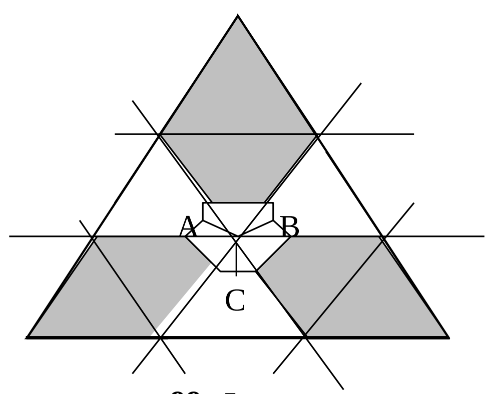
$=11i^2+110=11(i^2+10)$, kur $i>5$.

Aplūkojot visus naturālos skaitļus i pēc kārtas, iegūstam, ka der i=23:

$11(23^2+10)=11(529+10)=11\cdot11\cdot49=(11\cdot7)^2=77^2$,

tātad der virkne $18^2+19^2+\ldots+28^2=5929=77^2$.

33. <u>Risinājums</u>. Skat., piemēram, 99.zīm.



99.zīm.

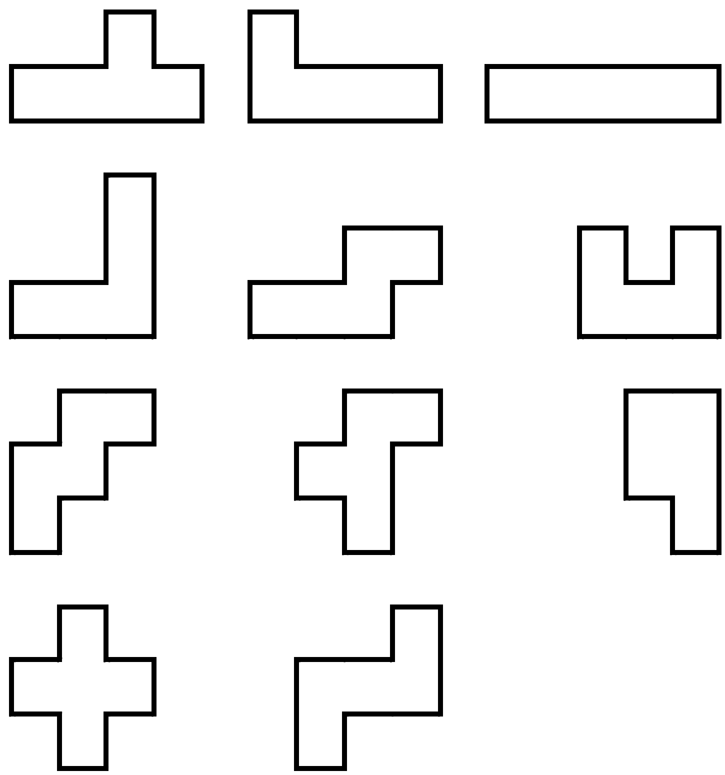
Konstrukcijas gaita: sadalām katru malu 3 vienādos nogriežņos un novelkam caur to galapunktiem taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Centrā novelkam trijstūra iekšpusē riņķa līniju. Tos punktus, kuros tā krustojas ar taisnēm, ņemam par piecstūrīšu virsotnēm. Vēl izvēlamies punktus A, B un C. Centrā izveidojas 3 piecstūri, gar malām – 6 piecstūri.

34. Atbilde. n=1992.

Risinājums. No dotā var sastādīt vienādojumu n=3n-3984 jeb 2n=3984, no kurienes n=1992.

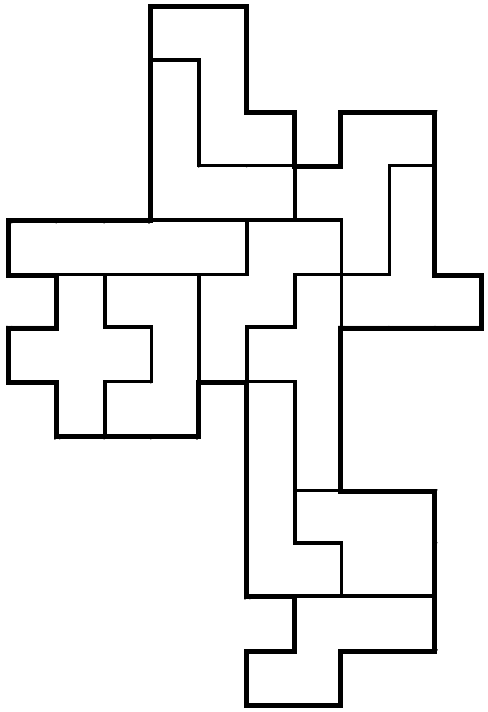
35. Risinājums.

a) Skat., piemēram, 100.zīm.



100.zīm.

b) Skat., piemēram, 101.zīm.



101.zīm.

Kuba šķautne ir $\sqrt{10}$, ja vienas pentamino rūtiņas malas garums ir 1. Ievērojiet, ka pentamino "pārlocās pāri" kuba šķautnēm.

36. Atbilde. Nē, ne vienmēr (skat. 102.zīm.).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		1	1	1	0	0	0	1	1
B	0		1	0	1	1	0	1	1
C	0	0		1	1	0	1	1	1
D	0	1	0		0	1	1	1	1
E	1	0	0	1		1	0	1	1
F	1	0	1	0	0		1	1	1
G	1	1	0	0	1	0		1	1
H	0	0	0	0	0	0	0		0
I	0	0	0	0	0	0	0	1	

102.zīm.

37. Atbilde. Jā, dalās.

Risinājums. Uzrakstīsim doto skaitli kā

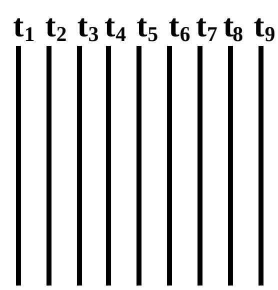
$$\underbrace{(3\cdot 7+1)\cdot(3\cdot 7+1)\cdot\ldots\cdot(3\cdot 7+1)}_{77 reizes}+\underbrace{(8\cdot 7-1)\cdot(8\cdot 7-1)\cdot\ldots\cdot(8\cdot 7-1)}_{33 reizes}$$

un atvērsim iekavas. Katrs no abiem iekavu reizinājumiem dos daudzus saskaitāmos; gandrīz visi tie saturēs reizinātāju 7, izņemot reizinājumu $\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{77 reizes}$ no pirmā iekavu reizinājuma un reizinājumu $\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{33 reizes}$ no otrā iekavu reizinājuma. Šie skaitļi ir attiecīgi (+1) un (-1); tie saīsinās. Tā kā visi pārējie saskaitāmie dalās ar 7, tad ar 7 dalās arī dotais skaitlis.

38. Risinājums. Piemēram, tā $101-10^2=1$.

39. Atbilde. Nē, nevar.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka tādas taisnes var novilkt. Apzīmēsim vienu no taisnēm ar t_1. Tā kā taisni t_1 krusto tieši 8 taisnes, tad atlikušās 8 taisnes šo taisni nekrusto. Tās taisnes, kuras nekrusto t_1 (apzīmēsim ar t_2, t_3,…, t_9), ir paralēlas šai taisnei. Tātad plaknē ir 9 paralēlas taisnes (skat. 103.zīm.):



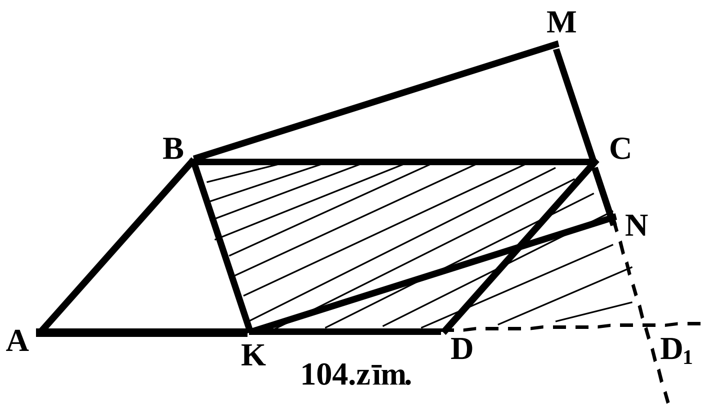
103.zīm.

Taisne t_{10} krusto taisni t_1 un arī pārējās, kuras tai paralēlas. Tātad taisne t_{10} krusto 9 taisnes. Tā ir pretruna ar doto. Tāpēc taisnes novilkt nevar.

40. Atbilde. Pavisam ir 100 šādu skaitļu.

Risinājums. Ja sešciparu skaitli apgriež otrādi, tad pirmais cipars kļūst par pēdējo, bet pēdējais par – pirmo. Tāpēc skaitli viennozīmīgi nosaka pirmie 3 cipari. Ja, piemēram, pirmie 3 cipari ir 186, tad beidzamie ir 981. Pirmā cipara vietā var būt vai nu 1, vai 6, vai 8, vai 9; tātad ir 4 dažādas iespējas. Otrā cipara vietā jau var būt 5 dažādi cipari: 0, 1, 6, 8, 9. Tāpēc kopējais variantu skaits būs $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

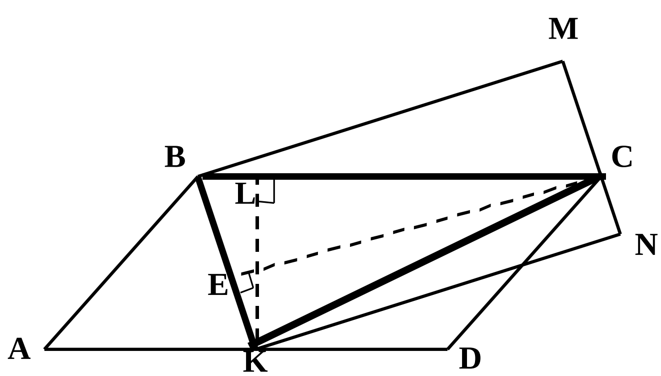
41. **I**. Pierādījums. Pagarināsim malu AD un malu MN, līdz tās krustosies; apzīmēsim krustpunktu ar D_1 (skat. 104.zīm.).



104.zīm.

Tā kā BK ∥ MN, tad BK ∥ CD_1 un četrstūris $KBCD_1$ ir paralelograms. Tā kā laukums vienāds ar paralelograma ABCD laukumu (jo $\Delta ABK = \Delta DCD_1$ bet daļa KBCD - kopīga). Tā kā laukums vienāds arī ar paralelograma BMNK laukumu (jo $\Delta BMC = \Delta KND_1$, bet daļa BCNK - kopīga). No tā seko, ka abu doto paralelogramu ABCD un BMNK laukumi arī ir vienādi.

II. Pierādījums. Novelk KC un augstumus CE un KL (skat. 105.zīm.).



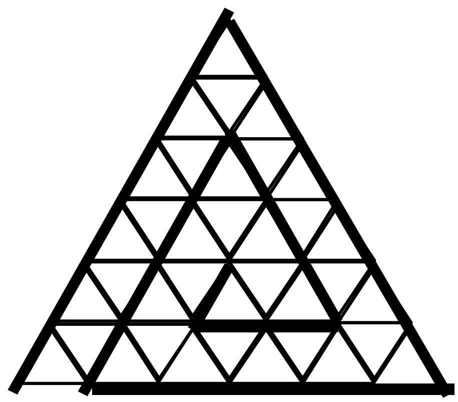
105.zīm.

SΔ_{BKC}==$\frac{1}{2}$KL·BC=$\frac{1}{2}$S$_{ABCD}$, (1)

SΔ_{BKC}=$\frac{1}{2}$CE·BK=$\frac{1}{2}$S$_{BKNM}$ (2). No (1) un (2) seko, ka abu doto paralelogramu ABCD un BMNK laukumi arī ir vienādi.

42. <u>Atbilde</u>. Mazākais posmu skaits ir 7.

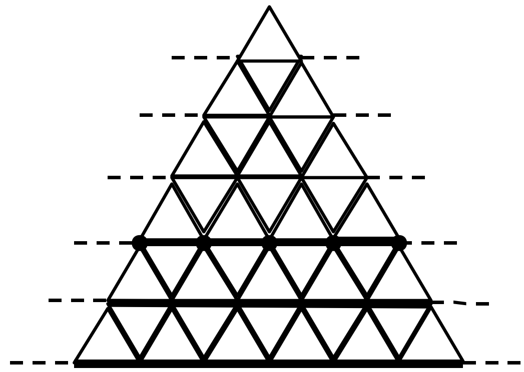
<u>Risinājums</u>. To, ka ar 7 posmiem pietiek, redzam 106.zīm.



106.zīm.

Pierādīsim, ka ar 6 posmiem nepietiek. Ievērosim, ka katrs līnijas posms var iet pa taisni, kas paralēla trijstūra malai, vai arī krusto šo taisni vienā punktā. Ja būtu tikai 6 posmi, tad eksistētu vismaz viena trijstūra mala, kurai paralēlo posmu skaits nepārsniegtu 2 (pretējā gadījumā katrai malai būtu vismaz 3 paralēli posmi, tātad kopā būtu vismaz 3·3=9 posmi).

Tas nozīmē, ka ir abiem fragmentiem paralēla taisne, kura satur vismaz 5 punktus, jo 3 lielākie punktu skaiti uz taisnēm ir 5; 6; 7 (skat. 107.zīm.).

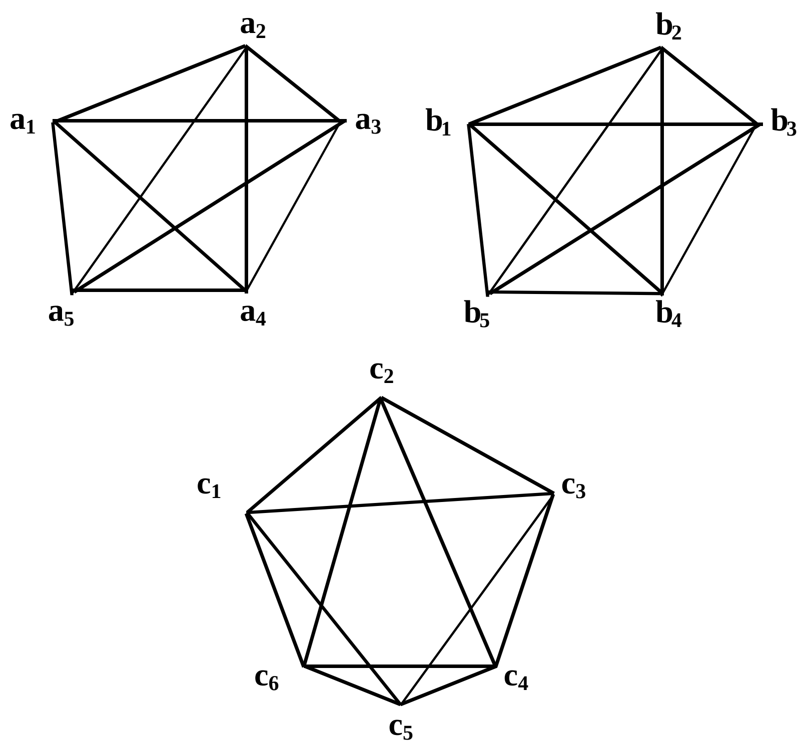


107.zīm.

Pa šo taisni neiet neviens lauztās līnijas posms. Tātad caur katru uz tās esošo režģa punktu jāiet savam posmam. Tad kopējam posmu skaitam jābūt vismaz 2+5=7, nevis 6. Tāpēc ar 6 posmiem nepietiek.

43. Atbilde. Dažreiz nevar sasēdināt.

Risinājums. Apzīmēsim skolēnus ar punktiņiem un draudzēšanos – ar nogriezni, kas tos savieno. Pieņemsim, ka draudzēšanās notiek šādi (skat. 108.zīm.).



108.zīm.

Izveidojas 3 atsevišķas grupas. Neviens skolēns nedraudzējas ārpus savas grupas,

a-grupā ir 5 skolēni. Nepāra skaitu skolēnu nevar sasēdināt pa pāriem. Tātad kādam no a-grupas skolēniem vajadzēs sēdēt ne ar draugu.

44. Pierādījums. Sadalīsim 200 bērnu atrašanās vietas 40 grupās. Pirmajā grupā būs 1., 41., 81., 121., 161.vieta; otrajā grupā būs 2., 42., 82., 122., 162.vieta, utt. Tā kā 81=2·40+1, tad vienā no grupām atradīsies vismaz 3 meitenes (ja katrā grupā nebūtu vairāk par 2 meitenēm, tad meiteņu skaits nebūtu lielāks par 80). Tā kā bērni stāv pa apli, tad šajā grupā vismaz divas meitenes atrodas "blakus" (t.i., atrodas blakus savā grupā, ja neskaita pārējos bērnus). Šīs divas meitenes var ņemt par meklētajām, lai starp katriem diviem vienas grupas "blakus" bērniem atrastos tieši 39 citi bērni.

45. Atbilde. Piemēram, a=49, b=25, c=9.

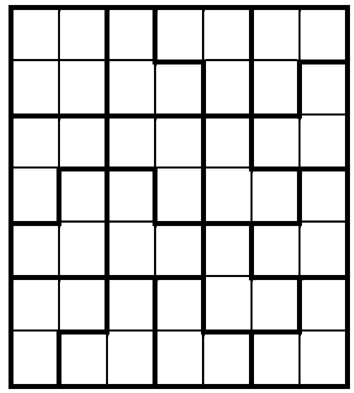
Risinājums. Tā kā $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2 = n+1+n-2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n} =$

$$= 2n+1-2\sqrt{n(n+1)} = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{4n^2+4n} = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2-1},$$

tad varam ņemt a=49, b=25, c=9. Tad apskatāmā izteiksme ir

$$\sqrt{\sqrt{49}-\sqrt{49-1}} + \sqrt{\sqrt{25}-\sqrt{25-1}} + \sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{9-1}} =$$
$$= \sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}} =$$
$$= \sqrt{7-\sqrt{4\cdot 12}} + \sqrt{5-\sqrt{4\cdot 6}} + \sqrt{3-\sqrt{4\cdot 2}} =$$
$$= \sqrt{7-2\sqrt{4\cdot 3}} + \sqrt{5-2\sqrt{3\cdot 2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2\cdot 1}} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2} =$$
$$= \sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{1} = 2-1 = 1$$

46. Atbilde. Var būt 1 kvadrāts un 15 stūrīši (skat. 109.zīm.).



<u>Risinājums</u>. Pierādīsim, ka citu iespēju nav.

Nokrāsosim kvadrāta 16 rūtiņas melnas, kā parādīts 110.zīm., bet pārējās – baltas.

x		x		x		x
x		x		x		x
x		x		x		x
x		x		x		x

110.zīm.

Katrs kvadrāts 2x2 pārklāj tieši vienu melnu rūtiņu; katrs stūrītis pārklāj vai nu vienu melnu rūtiņu, vai nevienu melnu rūtiņu. Ja kvadrātu pavisam ir k, bet stūrīšu s, tad $k+s \geq 16$ (1), jo jāpārklāj visas melnās rūtiņas. Tā kā pavisam ir 49 rūtiņas, tad $4k+3s=49$ (2). No (1) seko, ka $3k+3s \geq 48$. Tāpēc, ņemot vērā (2), $k \leq 1$. k nevar būt 0, jo 49 nedalās ar 3. Tāpēc k=1 un s=15.

47. <u>Pierādījums</u>. Apzīmēsim automašīnu ātrumus ar a, b, c, d, bet šosejas apļa garumu ar s. No dotā seko, ka

$\frac{s}{a+c} = \frac{s}{b+d}$, jeb a+c=b+d jeb a-b=d-c.

Pieņemsim, ka mašīna A brauc ātrāk par B, tad savukārt mašīna D brauc ātrāk par C.

Apzīmēsim ar t_A laiku, kad mašīna A apdzen B. Tajā brīdī mašīna A ir nobraukusi attālumu $s+s_B$, kur s_B ir attālums, ko nobraukusi B. Tāpēc

$s+s_B=a\cdot t_A$, un $s_B=b\cdot t_A$.

No šiem vienādojumiem iegūstam, ka

$$t_A = \frac{s}{a-b}.$$

Līdzīgi varam aprēķināt laiku t_D, kad mašīna D apdzen C:

$$t_D = \frac{s}{d-c}.$$

Tā kā a-b=c-d, tad arī $t_A=t_D$.

48. <u>Atbilde</u>. To var izdarīt abos gadījumos.

<u>Risinājums</u>. Piemēram, šādi:

$1992 \to 1992\cdot125 \to 249000 \to 249 \to 249\cdot45 \to 11205 \to 1125 \to 1125\cdot4 \to 4500 \to$

$\to 45 \to 45\cdot2 \to 90 \to 9.$

$1993 \to 1993\cdot7 \to 13951 \to 13951\cdot2 \to 27902 \to 2792 \to 2792\cdot125 \to 349 \to 349\cdot6 \to$

$\to 2094 \to 294 \to 294\cdot5 \to 1470 \to 147 \to 147\cdot15 \to 2205 \to 225 \to 225\cdot4 \to 900 \to 9.$

Izrādās, ka no <u>patvaļīga</u> naturāla skaitļa var iegūt vienciparu skaitli 9. Rīkosimies sekojoši:

a) pareizināsim sākotnēji doto skaitli ar tādu reizinātāju, lai rezultātā būtu tikai vieninieki (un varbūt skaitļa pieraksta galā nulles);

b) nosvītrojam nulles skaitļa galā;

c) pareizinām iegūto vieninieku virkni ar 82, iegūstam 911…102;

d) svītrojam nulli un reizinām ar 9, iegūstam 820…08;

e) svītrojam nulles, iegūstam 828;

f) $828 \to 828\cdot25 \to 20700 \to 27 \to 27\cdot4 \to 108 \to 18 \to 18\cdot5 \to 90 \to 9.$

Tagad pierādīsim, ka a) punktā aprakstīto darbību vienmēr var izdarīt. Apzīmēsim sākotnējo skaitli ar M un meklēto reizinātāju ar R. Aplūkosim vispirms tādu M, kas nedalās ne ar 2, ne ar 5. Pieņemsim, ka skaitlim M neeksistē tāda vieninieku virkne, kas dalītos ar M. Tas nozīmē, ka jebkura vieninieku virkne, dalot ar M, dos nenulles atlikumu. Tā kā dažādo atlikumu skaits nav lielāks par M, tad kaut kādām divām vieninieku virknēm būs vienādi atlikumi; apzīmēsim atlikumu ar a. Tātad skaitlis $\underbrace{111...1}_{m}$ dod atlikumu a, dalot ar M, un skaitlis $\underbrace{111...1}_{n}$ dod atlikumu a (dalot ar M).

Pieņemsim, ka n>m (n$\neq$m, jo vieninieku virknes ir dažādas). Abu skaitļu starpība dalās ar M. Tātad

$$\underbrace{111...1}_{n}-\underbrace{111...1}_{m}=10^{m}\cdot\underbrace{111...1}_{n-m}$$

dalās ar M. Tā kā M nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad M nesatur reizinātāju 10, tādēļ skaitlis $\underbrace{111...1}_{n-m}$ dalīsies ar M, kas ir pretrunā ar pieņēmumu. Tāpēc eksistē tāds skaitlis (vieninieku virkne), kas dalās ar M, un tātad eksistē arī meklētais reizinātājs R.

Tagad aplūkosim tādu skaitli M, kas satur reizinātājus 2 vai 5. Sadalīsim to reizinātājos $M=2^{n_1}\cdot 5^{n_2}\cdot M^{'}$, kur M’ vairs nedalās ne ar 2, ne ar 5. Skaitlim $M^{'}$ eksistē tāds reizinātājs R’, ka rezultāts ir vieninieku virkne (to nupat pierādījām). Pareizināsim to vēl ar $2^{n_2}\cdot 5^{n_1}$. Rezultātā iegūsim vieninieku virkni ar nullēm galā.

Skaitlim 1992 atbilstošā vieninieku virkne ir $\underbrace{111...1}_{123}000$.

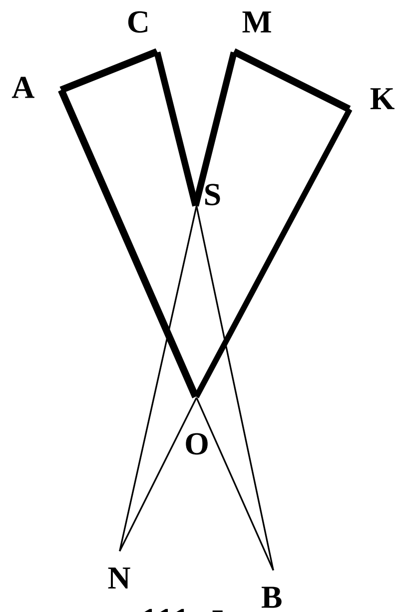
Skaitlim 1993 atbilstošā vieninieku virkne ir $\underbrace{111...1}_{664 vieninieki}$.

49. <u>Atbilde</u>. a) piemēram, 2; 3; 4;

b) piemēram, 6; 8; 9; 10; 12.

<u>Risinājums</u>. Var pierādīt arī vispārīgāku rezultātu: katram naturālam n, kur n$\geq$2, var atrast tādus n naturālus skaitļus, ka katru divu atrasto skaitļu summa dalās ar to starpību.

50. <u>Risinājums</u>. Skat., piemēram, 111.zīm.



111.zīm.

Te ABC un MNK ir vienādsānu šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm atbilstoši B un N, bet meklējamais sešstūris ir AOKMSC.

51. <u>Risinājums</u>. Šādu izvietojumu skat., piemēram, 112.zīm., kur vispār ne uz vienas taisnes neatrodas vairāk par 2 atzīmētajiem punktiem.

				*	*				
		*					*		
	*							*	
			*			*			
*									*
*									*
			*			*			
	*							*	
		*					*		
				*	*				

112.zīm.

52. <u>Atbilde</u>. Nē, nevar.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka tas ir iespējams. Visu izrakstāmo ciparu summa ir 45. Pirmo astoņu ciparu summa atkarībā no devītā cipara var svārstīties no 36 līdz 44. Lai tā dalītos ar 8, tai jābūt 40; tātad pēdējam ciparam jābūt 5. Pirmo septiņu ciparu summa atkarībā no astotā cipara var svārstīties no 31 līdz 39. Lai tā dalītos ar 7, tai jābūt 35; tātad arī priekšpēdējam ciparam jābūt 5. Vienu un to pašu ciparu nevar izrakstīt divas reizes, tātad iegūta pretruna.

53. Risinājums. Uzdevuma atrisinājums atkarīgs no mūsu priekšstata par to, kā garīdznieku lūgšanu rezultātā pār grēcinieku "nāk žēlastība".

Ja uzskatām, ka nepilns lūgšanas laiks nedod neko, tad jālūdz 3 stundas. Tiešām šo stundu laikā kardināls viens pats izlūdzas žēlastību visiem grēciniekiem, bet īsākā laikā bīskapa, priestera un novicianta lūgšanas nedod nekādu efektu, un arī kardinālam ar mazāk nekā 3 stundām visiem grēciniekiem nepietiek.

Ja uzskatām, ka žēlastība krājas nepārtraukti un proporcionāli lūgšanās pavadītajam laikam, tad vienas stundas laikā garīdznieki izlūdzas atbilstoši 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$ tā žēlastības daudzuma, kāds vajadzīgs vienam grēciniekam. Tā kā

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{176}{105},$$

tad šajā gadījumā jālūdz $3:\frac{176}{105}=\frac{315}{105}$ stundas jeb aptuveni 1 stundu un 48 minūtes (ar uzviju).

54. Atbilde. 8 viesi.

Risinājums. Ja pirmie 8 viesi paņem 8 mazākās kūkas un 8 lielākos šķīvīšus, tad pārējiem 8 viesiem rodas grūtības.

Parādīsim, ka vairāk viesiem grūtības rasties nevar. Pieņemsim pretējo: grūtības rodas vismaz 9 viesiem, t.i., vismaz 9 viesi nevar uzlikt savas kūkas ne uz viena no atlikušajiem šķīvīšiem. No šiem 9 viesiem vismaz vienam kūka ir no astoņām mazākajām (jo pavisam ir 16 kūkas). No 9 šķīvīšiem vismaz viens šķīvītis ir no astoņiem lielākajiem (jo pavisam ir 16 šķīvīšu). Attiecīgi šo kūku var uzlikt uz šī šķīvīša. Tātad pieņēmums nepareizs.

55. <u>Atbilde</u>. Mazākais iespējamais skaits ir 11.

<u>Risinājums</u>. Sanumurēsim bērnus pa apli no 1 līdz 16. Veidojas pavisam 16 dažādi blakus sēdošu bērnu trijnieki:

123
234
345
456
…
14 15 16
15 16 1
16 1 2

Šajos trijniekos kopā jābūt vismaz 16·2=32 olimpiādes dalībniekiem. Tā kā katra bērna vārds parādās tieši trijos trijniekos, tad olimpiādes dalībnieku skaits nav mazāks par 32:3, t.i., vismaz 11.

Ja olimpiādē piedalīsies bērni ar numuriem 1., 2., 4., 5., 7., 8., 10., 11., 13., 14., 15., tad redzam, ka ar 11 dalībniekiem pietiek.

56. <u>Pierādījums</u>. Aizstāsim daļu saucējus ar a+b+c. Katras daļas vērtība samazināsies; tātad

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Līdzīgi varam pierādīt, ka

$$\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{c+a}>1.$$

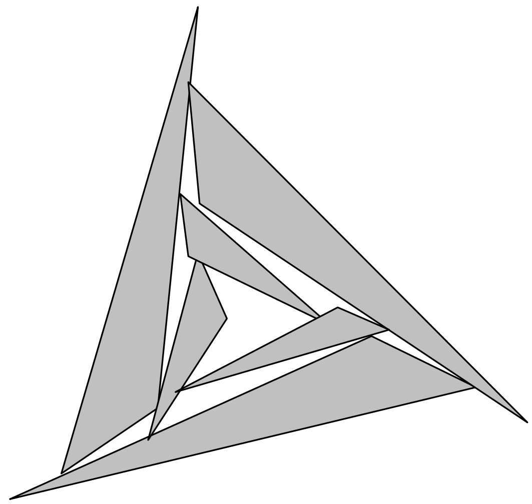
Saskaitot abas summas iegūstam:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{a}{c+a}=3$$

no kurienes

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=3-(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a})<3-1=2.$$

57. Risinājums. Skat., piemēram, 113.zīm.



113.zīm.

58. Atbilde. Jā, tā var gadīties.

Risinājums. Piemēram, Jāņa skaitļi var būt 1; 2; 3; 4; 5; -15, bet Andra skaitļi atbilstoši -1; -2; -3; -4; -5; +15.

Jāņa iespējamās pozitīvās summas ir

1+2+3=6

1+2+4=7

1+2+5=8

2+3+4=9

2+3+5=10

2+4+5=11

3+4+5=12.

Jāņa iespējamās negatīvās summas ir

-15+4+5=-6

-15+3+5=-7

$-15+3+4=-8$

$-15+1+5=-9$

$-15+1+4=-10$

$-15+1+3=-11$

$-15+1+2=-12$.

Jāņa pozitīvās summas tika iegūtas no skaitļiem 1 līdz 5, bet negatīvās – izmantojot skaitli (-15).

Andris negatīvās summas ieguva no skaitļiem (-5) līdz (-1), bet pozitīvās – izmantojot skaitli 15.

Tā kā katrai pozitīvai summai ir arī atbilstoša tai pretēja negatīva summa, tad abu zēnu iegūto summu sistēmas ir vienādas.

59. Pierādījums. Nosauksim par katras konfektes A-vērtību (resp. B-vērtību) skaitli $\frac{1}{n}$, ja šī konfekte Aijas (respektīvi Birutas) dalījumā atrodas n konfekšu kaudzītē. Visu A-vērtību summa ir 10, visu B-vērtību summa ir 12. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda; t.i., pieņemsim, ka Birutas dalīšanas rezultātā mazākās kaudzītēs nonāca ne vairāk par 2 konfektēm. Tas nozīmē, ka ne vairāk par 2 konfektēm atbilstošā B-vērtība ir lielāka nekā A-vērtība. Apzīmēsim A-vērtības ar a_1, a_2,..., B-vērtības ar b_1, b_2,... un konfekšu skaitu ar N.

$12=b_1+b_2+\ldots+b_N$. No pieņēmuma seko, ka $b_1 \le a_1$, $b_2 \le a_2$,..., $b_{N-2} \le a_{N-2}$. Tāpēc

$12=b_1+b_2+\ldots+b_N \le a_1+a_2+\ldots+a_{N-2}+b_{N-1}+b_N=$

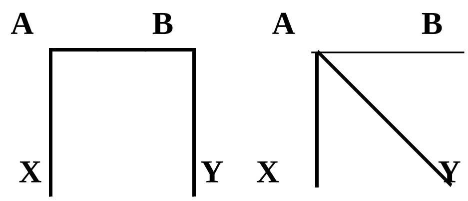
$=(a_1+\ldots+a_N)-a_{N-1}-a_N+b_{N-1}+b_N=$

$=10+(b_{N-1}-a_{N-1})+(b_N-a_N)$.

Ievērosim, ka A-vērtības un B-vērtības ir pozitīvi skaitļi un nepārsniedz 1. Tāpēc katra iekava ir mazāka par 1 un summa mazāka par 12. Iegūta pretruna, tāpēc pieņēmums ir aplams.

60. Pierādījums. Pieņemsim, ka A un B ir tādas divas pilsētas, ka no vienas uz otru nevar aizbraukt ar pūķa ratiem, iegriežoties ne vairāk kā divās citās. Tad starp A un B pastāv paklāja satiksme.

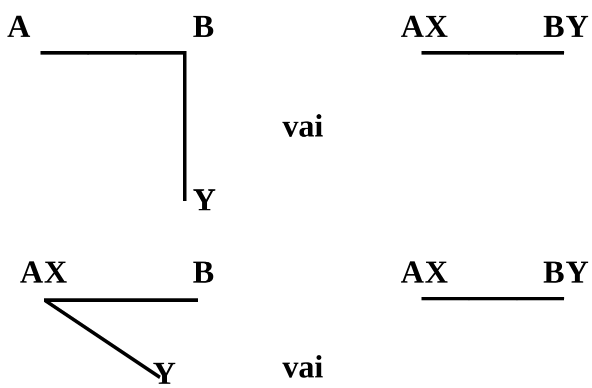
Izvēlēsimies divas patvaļīgas pilsētas X un Y. Neviena no tām nevar būt savienota ar pūķa ratu satiksmi reizē ar A un B (jo tad no A uz B varētu nokļūt caur X vai Y). Tātad gan X, gan Y savienotas ar paklāja satiksmi vai nu ar A, vai ar B. Iegūstam 2 iespējas (skat. 114.zīm.; līnijas attēlo satiksmi ar lidojošo paklāju).



114.zīm.

Redzam, ka gan vienā, gan otrā gadījumā no X var aizbraukt uz Y ar lidojošo paklāju, iegriežoties augstākais divās citās pilsētās.

Ja viena vai abas no pilsētām X un Y sakrīt ar A vai B, spriedums būtiski nemainās (skat. 115.zīm.).



115.zīm.

61. <u>Atbilde</u> a) nevar; b) var.

<u>Risinājums</u>. a) nevar (skat. 116.zīm.).

A	**B=0**	**C**
D	**E=1**	**F**
G	**H**	**I**

0	**0**	**0**
1	**1**	**1**
	1	

116.zīm.

Pieņemsim, ka E=1 (ja E=0, spriedumi līdzīgi) un tam blakus esošā nulle ir B. Tad jābūt, ka D=H=F=1. Tā kā B=0, tad A=C=0. Tā kā D blakus jau ir viena nulle, tad G=1; bet tad šim vieniniekam G blakus nav nuļļu, un tā ir pretruna.

b) var, skat., piemēram, 117.zīm.

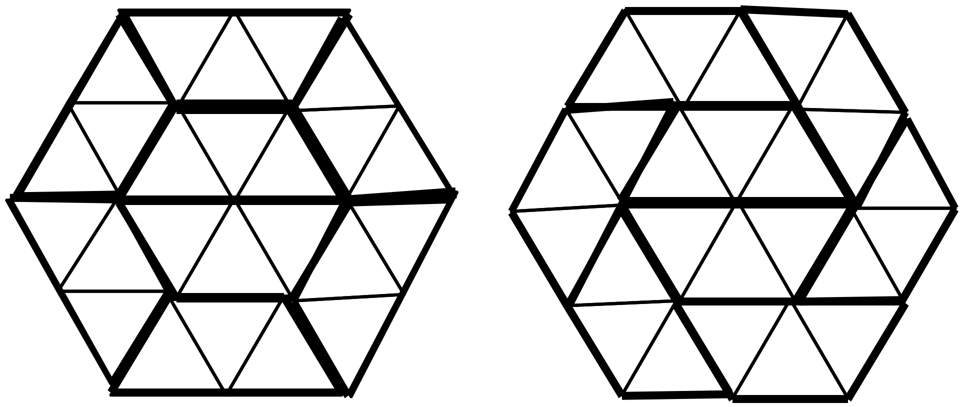
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

117.zīm.

62. Atbilde. Šis pirmskaitlis ir 3.

Risinājums. Apzīmēsim meklējamo pirmskaitli ar p; tad $p+1=n^2$, kur n – naturāls skaitlis. No šejienes $p=n^2-1=(n-1)(n+1)$. Tā kā p ir pirmskaitlis, tad n-1=1 un n+1=p, no kurienes n=2 un p=3.

63. Atbilde. Jā, var. Skat. 118.zīm., kur parādītas divas sagriešanas iespējas.



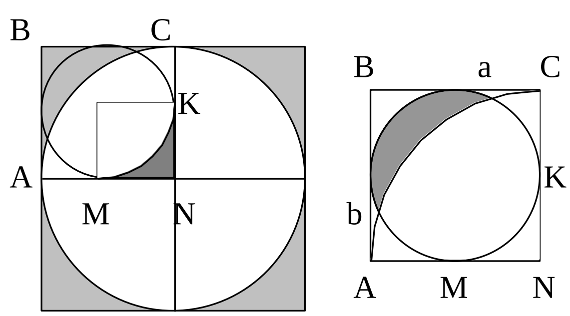
118.zīm.

64. Atbilde. Pie eglītes bija 5 šillišallas.

Risinājums. Apzīmēsim ar n šillišallu skaitu. Tad melo pirmie n rūķīši. Pārējie 10-n rūķīši saka taisnību. Tāpēc pirmie n rūķīši ir votivapas, bet pārējie šillišallas. No n-tā rūķīša meliem seko, ka pie eglītes ir vairāk kā n-1 šillišalla. No (n+1)-ā rūķīša patiesā izteikuma seko, ka pie eglītes ir ne vairāk kā n šillišallas. Tātad pavisam ir n šillišallas. Tā kā 10-n rūķīši saka taisnību, tad n=10-n un n=5.

65. Atbilde. Mazāks laukums ir “mēnestiņam”.

Risinājums. (Skat. 119.zīm.)



119.zīm.

Apzīmēsim mazā riņķa rādiusu ar r. Tad lielā riņķa rādiuss ir 2r. Tāpēc līklīniju trijstūra ABC laukums vienāds ar

$$r^2 - \frac{1}{4}(4r^2\pi) = r^2 - r^2\pi .$$

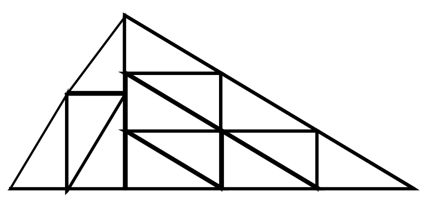
Četru mazo līklīniju trijstūru MKN laukumu summa arī ir vienāda ar $r^2 - r^2\pi$. Tāpēc var rakstīt:

$S_{ABC}=S_{\text{"mēnestiņam"}}+S_a+S_b+S_{MNK}=4S_{MNK}$

$S_{\text{"mēnestiņam"}}=3S_{MNK}-S_a-S_b$.

Tāpēc "mēnestiņa" laukums mazāks par trīs iesvītroto līklīniju trijstūru MNK laukumu summu.

66. Atbilde. Jā, var gadīties. Skat., piemēram, 120.zīm., kur izmantoti 13 taisnleņķa trijstūri. Katram mazajam trijstūrītim viena katete pusotras reizes garāka par otru.



120.zīm.

67. Atbilde. Saskaitīšanas zīme jāievieto aiz 50.devītnieka.

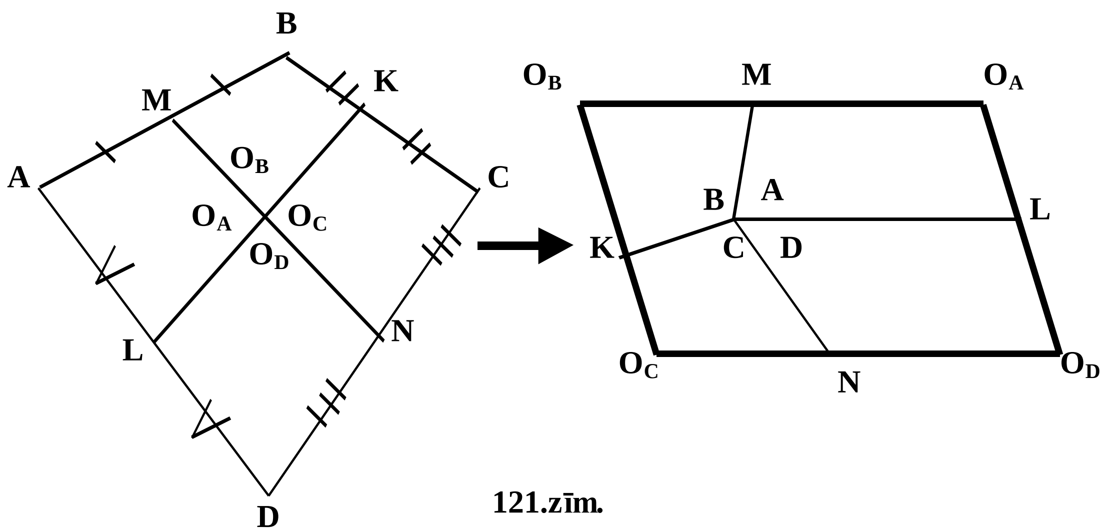
Risinājums. Ja tā rīkojas, tad rodas summa

$$\begin{array}{r} 999\ldots93 \\ +199\ldots99 \\ \hline 11\underbrace{99\ldots9}_{49}2 \end{array}$$

Ja saskaitīšanas zīmi ievieto aiz 48. devītnieka vai agrāk, vai arī aiz 52.devītnieka, vai vēl vēlāk, tad jau viens no saskaitāmajiem satur vismaz 53 ciparus, tātad summa ir lielāka par nupat iegūto. Pārbaudot gadījumus, kad saskaitīšanas zīmi ievieto aiz 49.vai 51.devītnieka, redzam, ka iegūtās summas arī ir lielākas par augstāk iegūto.

68. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Četrstūris jāsagriež pa viduslīnijām, t.i., pa nogriežņiem, kas savieno pretējo malu viduspunktus (skat. 121.zīm.).



121.zīm.

Punktos M, L, K, N zīmējumā pa labi veidojas izstiepti leņķi.

69. Pierādījums. Ievērosim, ka apskatāmo skaitli var uzrakstīt kā

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21 + (43-1)(43-2) \cdot \ldots \cdot (43-21)$.

Atverot iekavas, skaitļu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21$ reizinājumi saīsināsies, bet visi citi saskaitāmie saturēs reizinātāju 43, tādēļ arī summa dalīsies ar 43.

70. Pierādījums. Apzīmēsim skaitļus augošā kārtībā $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ un apskatīsim sekojošas summas (lasīt pa rindiņām):

a_1; a_2; a_3;…; a_9; a_{10};

$a_{10}+a_1$; $a_{10}+a_2$;…; $a_{10}+a_9$;

$a_{10}+a_9+a_1$; $a_{10}+a_9+a_2$;…; $a_{10}+a_9+a_8$;

$a_{10}+a_9+a_8+a_1$; $a_{10}+a_9+a_8+a_2$;…; $a_{10}+a_9+a_8+a_7$;

$a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_1$;…; $a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6$;

…

$a_{10}+a_9+\ldots+a_3+a_1$; $a_{10}+a_9+\ldots+a_3+a_2$;

$a_{10}+a_9+\ldots+a_2+a_1$.

Katra nākošā summa ir acīmredzami lielāka par iepriekšējo, un to skaits vienāds ar 10+9+8+…+2+1=55.

71. <u>Risinājums</u>. Ja skaitlu a un b summa un starpība nav ne +2, ne -2, tad prasītais seko no vienādības

$$ab=\frac{1}{\frac{1}{a+b-2}-\frac{1}{a+b+2}}-\frac{1}{\frac{1}{a-b-2}-\frac{1}{a-b+2}}$$

Ja a=0 vai b=0, tad ab=0=1-1.

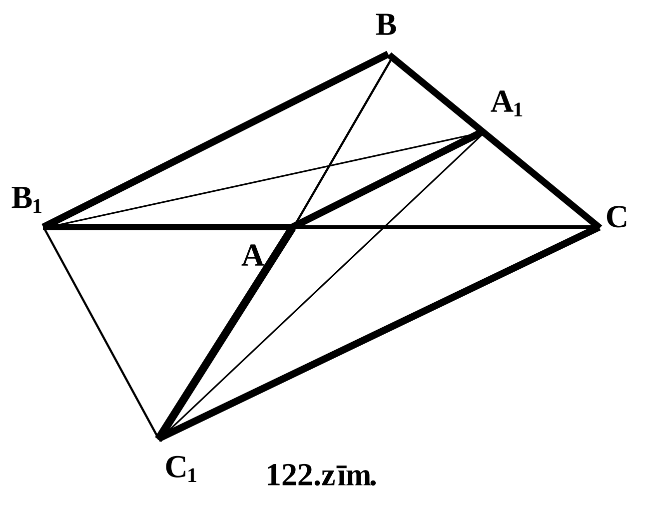
Ja nenulles skaitļu a un b summa a+b=± 2, tad

$$ab=1-1\pm(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}})$$

Ja nenulles skaitļu a un b starpība a-b=± 2, tad

$$ab=1-1\pm(\frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}).$$

72. <u>Pierādījums</u>. Ievērosim, ka sākotnējā zīmējumā (skat. 122.zīm.) izveidojas 3 trapeces: B_1BA_1A, AA_1CC_1, B_1BCC_1.

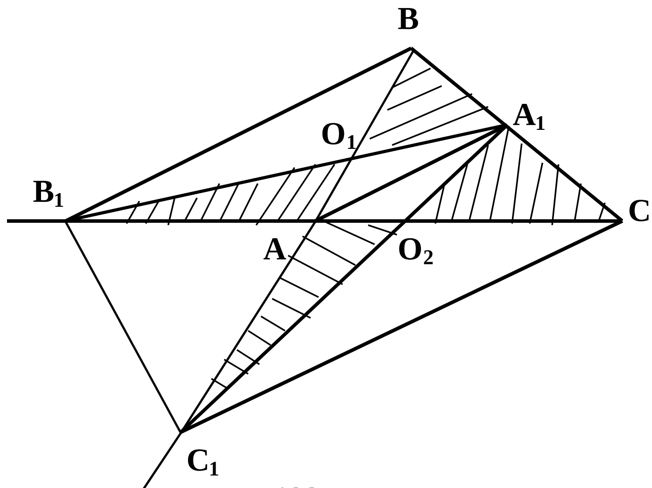


122.zīm.

Trapecē B_1BA_1A (skat. 123.zīm.) trijstūru B_1O_1A un O_1BA_1 laukumi ir vienādi.

Trapecē AA_1CC_1 trijstūru C_1AO_2 un O_2A_1C laukumi ir vienādi.

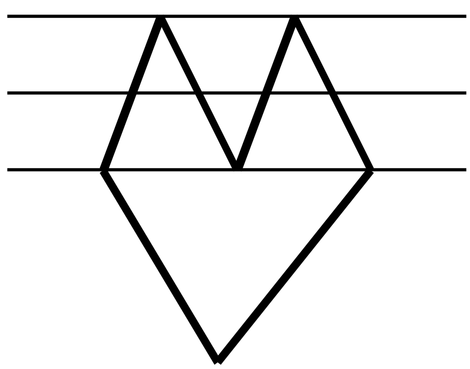
Trapecē B_1BCC_1 trijstūru B_1AC_1 un ABC laukumi ir vienādi.



123.zīm.

Lielais trijstūris $B_1A_1C_1$ sastāv no trijstūriem B_1O_1A, B_1AC_1, C_1AO_2 un četrstūra $AO_1A_1O_2$. Tātad $B_1A_1C_1$ laukums ir iegūstams, saskaitot trijstūra ABC laukumu ar summu, ko veido O_1BA_1, $O_1A_1O_2A$ un O_2A_1C laukumi. Iegūstam prasīto, ka $B_1A_1C_1$ laukums ir 2 reizes lielāks par ABC laukumu.

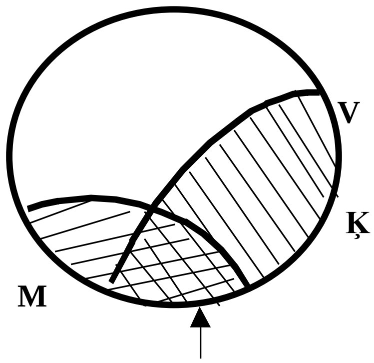
73. <u>Atbilde</u>. Var. Skat., piemēram, 124.zīm.



124.zīm.

74. <u>Atbilde</u>. Jā, var.

<u>Risinājums</u>. Apzīmēsim visus cilvēkus ar V, visus matemātiķus ar M, visus ķīmiķus ar Ķ, bet tos cilvēkus, kas ir gan matemātiķi, gan ķīmiķi – ar W (skat. 125.zīm.).



125.zīm.

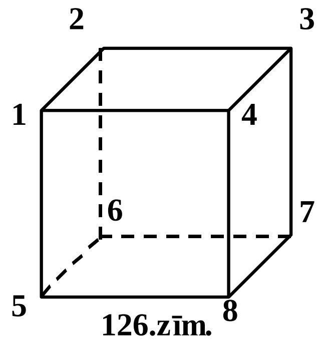
Doto varam uzrakstīt kā nevienādību $\frac{W}{M} > \frac{Ķ}{V}$. To pārveidojot, iegūsim:

$W \cdot V > M \cdot Ķ$ un $\frac{W}{Ķ} > \frac{M}{V}$, kas arī nozīmē prasīto: matemātiķu starp ķīmiķiem ir vairāk nekā matemātiķu starp visiem cilvēkiem.

75. <u>Atbilde</u>. Šis reizinājums beidzas ar 22 nullēm.

<u>Risinājums</u>. No 1 līdz 99 ir 19 skaitļi, kas dalās ar 5; no tiem trīs skaitļi (25, 50, 75) dalās ar diviem pieciniekiem katrs. Tātad apskatāmais reizinājums satur kā reizinātājus 22 pieciniekus. No 1 līdz 99 pavisam ir 49 pāra skaitļi; tātad reizinājums satur kā reizinātājus vismaz 49 divniekus. Katram pieciniekam var piekārtot vienu atšķirīgu divnieku, tāpēc reizinājumā veidojas 22 desmitnieki jeb 22 nulles.

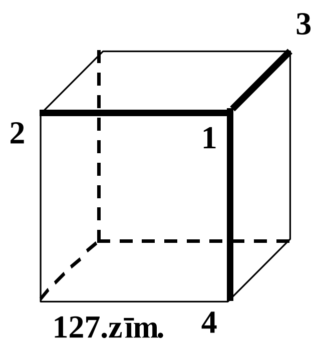
76. <u>Atbilde</u>. a) Var; skat., piemēram, 126.zīm.



126.zīm.

b) Nevar.

Risinājums. Divas virsotnes sauksim par kaimiņiem, ja tās savieno šķautne. Virsotnei 1 par kaimiņiem var būt tikai 2; 3 un 4 (skat. 127.zīm.), jo lielākiem skaitļiem starpība ar 1 pārsniedz 3.



127.zīm.

Virsotnei 2 tad ir jau viens kaimiņš 1. Pārējos divus kaimiņus jāizvēlas no atlikušajiem skaitļiem 5; 6; 7; 8.

Viegli redzēt, ka tas nav iespējams.

77. Atbilde. Nevar.

Risinājums. Katrs “stūrītis” sastāv no 3 rūtiņām. Kvadrāta rūtiņu skaits 1993·1993 nedalās ar 3, jo neviens no reizinātājiem 1993 nedalās ar 3 (skaitļa ciparu summa 1+9+9+3=22 nedalās ar 3). Tāpēc kvadrātu nevar sagriezt veselā skaitā “stūrīšu”.

78. Risinājums. Apzīmēsim monētas ar a, b, c, d. Noliksim malā monētu d.

Pirmā svēršana būs šāda: uz kreisā svaru kausa noliksim monētas a un b, bet uz labā – monētu c. Svaru skala var rādīt sekojošas vērtības:

1) ja d=14, tad

10=(11+12)-13

12=(11+13)-12

14=(12+13)-11

2) ja d=13, tad

9=(11+12)-14

13=(11+14)-12

15=(12+14)-11

3) ja d=12, tad

10=(11+13)-14

12=(11+14)-13

16=(14+13)-11

4) ja d=11, tad

11=(13+12)-14

13=(12+14)-13

15=(13+14)-12

Ja 1.svēršanas rezultāts bija viens no skaitļiem 14; 9; 16; 11, tad viennozīmīgi var noskaidrot, kura monēta ir d un kura c.

Otrā svēršana būs šāda: uz kreisā svaru kausa noliksim monētu a, uz labā – monētu b. Ja pirmajā svēršanā jau noskaidrotas monētu c un d masas, tad pēc otrās svēršanas var uzreiz noskaidrot, kura monēta no a un b ir smagāka, un piekārtot atbilstošās masas monētām a un b.

Ja 1.svēršanas rezultāts bija viens no skaitļiem 10; 12; 13; 15, tad no tā vien vēl viennozīmīgi nevar noskaidrot d un c vērtības.

Pieņemsim, ka 1.svēršanas rezultāts bija 10. Tad iespējams, ka

a) d=14 un 10=(11+12)-13 (t.i., c=13) vai arī

b) d=12 un 10=(11+13)-14 (t.i., c=14).

Ja pēc 2.svēršanas rezultāts bija ± 1, tad spēkā a) gadījums (d=14, c=13).

Ja pēc 2.svēršanas rezultāts bija ± 2, tad spēkā b) gadījums (d=12, c=14).

Līdzīgi varam apspriest arī pārējos iespējamos 1.svēršanas rezultātus.

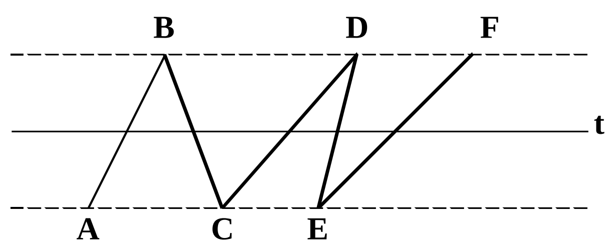
Ja 1.svēršanas rezultāts bija 12, tad: ja 2.svēršanas rezultāts bija ± 2, tad d=14 un c=12; ja ± 3, tad d=12 un c=13.

Ja 1.svēršanas rezultāts bija 13, tad: ja 2.svēršanas rezultāts bija ± 3, tad d=13 un c=12; ja ± 2, tad d=11 un c=13.

Ja 1.svēršanas rezultāts bija 15, tad; ja 2.svēršanas rezultāts bija ± 2, tad d=13 un c=11; ja ± 1, tad d=11 un c=12.

79. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē sešstūris ABCDEF un taisne t, ka uz taisnes t atrodas malu AB, BC, CD, DE, EF viduspunkti. Tad punkti A, C, E atrodas taisnes t vienā pusē, bet punkti B, D, F taisnes t otrā pusē (skat. 128.zīm.).



128.zīm.

No Talesa teorēmas seko, ka taisne, kas iet caur punktiem A un C, ir paralēla taisnei t. Taisne, kas iet caur punktiem C un E, arī ir paralēla taisnei t. Tādējādi visi trīs punkti A, C, E atrodas uz taisnes, kas paralēla taisnei t. Līdzīgi arī punkti B, D, F atrodas uz citas taisnes, kas paralēla taisnei t. Novelkot sesto malu AF, neveidosies sešstūris, jo tā krusto pārējās malas.

80. Pierādījums. Apzīmēsim ar A_1 patvaļīgu rūķīti; ar A_2 – to, kurš nākošajā vasarā pārgāja uz A_1 mājiņu; ar A_3 – to, kurš nākošajā vasarā pārgāja uz A_2 mājiņu; utt. Agri vai vēlu atradīsim tādu rūķīti A_n, kurš nākošajā vasarā pārgāja uz A_{n-1} mājiņu; bet uz kura mājiņu pārgāja A_1 (jo rūķu skaits ir galīgs). Šajā "ciklā" mājiņas var izkrāsot divās (ja n – pāra skaitlis) vai trijās (ja n – nepāra skaitlis). Ja palikuši vēl kādi rūķīši, izdalām no tiem vēl vienu ciklu, ar kuru rīkojamies tāpat, utt.

81. Atbilde. Šis cipars ir 4.

Risinājums. Pavisam ir pa 10 skaitļiem, kuri beidzas ar 1; 3; 4; 6; 7; 8; 9. Tie, kas beidzas ar 1, reizinājuma pēdējo ciparu neietekmē. Tie, kas beidzas ar 3, dod reizinājuma pēdējo ciparu 9, jo 3^{10} beidzas ar 9. Tie, kas beidzas ar 4, dod reizinājuma pēdējo ciparu 6. Tie, kas beidzas ar 6 – dod 0; tie, kas ar 7 – dod 9; tie, kas ar 8 – dod 4; tie, kas ar 9 – dod 1. Visi šie skaitļi kopā dod reizinājuma pēdējo ciparu 4 $(1\cdot9\cdot6\cdot6\cdot9\cdot4\cdot1)$.(*)

Skaitļi, kas beidzas ar 0, dod pēdējo nenulles ciparu 8

$(10\cdot20\cdot\ldots\cdot90 \to 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9 \to 10\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 \to 8)$.

Skaitļi, kas beidzas ar 5, veido reizinājumu:

$5\cdot15\cdot\ldots\cdot95=5^{10}(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19)=5^{12}(1\cdot3\cdot1\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot3\cdot17\cdot19)$.(*)

Iekavas dod pēdējo nenulles ciparu 3.

Skaitļi, kas beidzas ar 2, veido reizinājumu:

$2\cdot12\cdot\ldots\cdot92=2^{10}(1\cdot6\cdot11\cdot16\cdot21\cdot26\cdot31\cdot36\cdot41\cdot46)=2^{12}(1\cdot3\cdot11\cdot8\cdot21\cdot26\cdot31\cdot36\cdot41\cdot46)$.

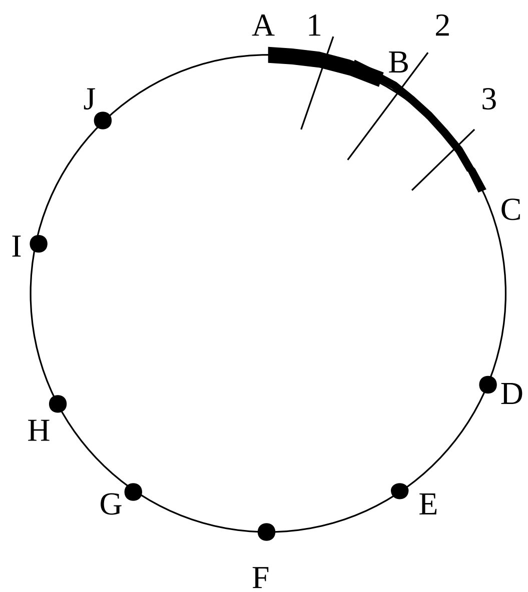
Iekavas dod pēdējo nenulles ciparu 4.(*)

Skaitļu 5^{12} un 2^{12} reizinājums ir 10^{12}, kas nenulles ciparus neietekmē.

Tādējādi visa reizinājuma pēdējo nenulles ciparu veido reizinājums $4\cdot8\cdot3\cdot4$. Tātad tas ir 4.

82. Atbilde. Mazākais iespējamais sarkano punktu skaits ir 20.

Risinājums. Apzīmēsim punktus uz riņķa līnijas pēc kārtas ar A; B; C; D; E; F; G; H; I; J (skat. 129.zīm.).

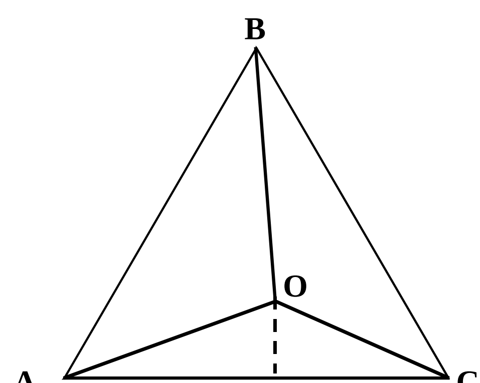


129.zīm.

Apskatām lokus AB, AC, BC, BD, CD, CE, DE, DF, EF, EG, FG, FH, GH, GI, HI, HJ, IJ, IA, JA, JB. Katram no tiem, salīdzinot ar iepriekšējo, viens galapunkts pabīdīts vienā un tajā pašā virzienā, tāpēc visu šo 20 loku viduspunkti ir dažādi. Tāpēc sarkano punktu nav mazāk par 20. To ir tieši 20, ja, piemēram, dotie 10 punkti sadala riņķa līniju 10 vienādos lokos.

83. Pierādījums. Pietiek pierādīt, ka katram no nogriežņiem OA, OB, OC garums mazāks nekā abu pārējo nogriežņu garumu summa.

Pagarināsim BO līdz krustpunktam M ar AC (skat. 130.zīm.).



130.zīm.

Tā kā $\angle$AMO+$\angle$CMO=180^0, tad vai nu $\angle$AMO$\geq 90^0$, vai arī $\angle$CMO$\geq 90^0$. Varam pieņemt, ka $\angle$CMO$\geq 90^0$. Tad $\angle$CMO ir ΔCMB lielākais leņķis, pret kuru šajā trijstūrī atrodas lielākā mala. Tāpēc

BO<BM<BC=AC<AO+CO.

Nevienādība BO<AO+CO pierādīta. Abas pārējās pierāda līdzīgi.

84. Risinājums. Novietosim monētas pa 4 uz katra kausa. Šķirosim divus gadījumus.

I. Kausi atrodas līdzsvarā. Tas iespējams tad, ja vai nu viltoto monētu vispār nav, vai tās ir pa vienai uz katra kausa. Tad otrajā svēršanā ņemam 4 monētas, kas pirmoreiz bija uz viena kausa, un sadalām tās pa 2 uz katra kausa. Ja svari atrodas līdzsvarā, tad viltoto monētu nav. Ja svari neatrodas līdzsvarā, tad starp pašreiz uz tiem esošajām 4 monētām ir tieši viena viltota. Ņemam tās divas monētas, kas otrajā svēršanā atradās uz smagākā kausa, un trešajā svēršanā novietojam tās pa vienai uz katra kausa. Ja svari atrodas līdzsvarā, tad viltotās monētas vieglākas par īstajām.

II. Kausi neatrodas līdzsvarā. Tad viltotās monētas ir, un tās atrodas uz viena kausa. Otrajā svēršanā ņemam tās 4 monētas, kas pirmoreiz bija uz smagākā kausa, un sadalām tās pa 2 uz katra kausa. Ja svari neatrodas līdzsvarā, tad viltotās monētas ir smagākas par īstajām. Ja svari atrodas līdzsvarā, tad viltotās monētas vai nu a) ir divas un novietotas pa vienai uz katra kausa un ir smagākas par īstajām, vai arī b) atrodas starp malā palikušajām četrām (tad tās ir vieglākas par īstajām). Trešajā svēršanā ņemam 2 monētas, kas otrajā svēršanā atradās uz viena kausa, un novietojam tās pa vienai uz katra kausa. Ja svari ir līdzsvarā, tad spēkā b), ja nē, tad a) gadījums.

85. Pierādījums. Apzīmēsim trijstūra malu garumus nedilstošā kārtībā ar $a\leq b\leq c$. Tā perimetrs ir P=a+b+c.

Apskatīsim P dalījumu ar c:

$$\frac{P}{c}=\frac{a+b+c}{c}=1+\frac{a+b}{c}.$$

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem a+b dalās ar c, tātad $\frac{a+b}{c}$ ir naturāls skaitlis. Saskaņā ar trijstūra nevienādību a+b>c, tāpēc $\frac{a+b}{c}>1$; tātad $\frac{a+b}{c}\geq 2$.

Saskaņā ar a, b, c izvēli $a+b \le 2c$, tātad $\frac{a+b}{c} \le 2$. Tāpēc $\frac{a+b}{c} = 2$ un a+b=2c. Tā kā a $\le$c un b$\le$c, tad tas iespējams tikai, ja a=c un b=c. Tātad trijstūris ir vienādmalu.

86. Atbilde. Nē, tāda skaitļa nav.

Risinājums. Ja tāds skaitlis būtu, tad varētu rakstīt sekojošu vienādību:

$a \cdot 10^n + b = 1993 \cdot b$,

kur b ir skaitlis, kas mazāks par 10^n, bet a – cipars. Iegūsim, ka $a \cdot 10^n = 1992 \cdot b$. Bet $1992 = 3 \cdot 8 \cdot 83$. Tāpēc arī kreisajai pusei būtu jādalās ar pirmskaitli 83. Bet a ir tikai cipars (tāpēc mazāks par 10), savukārt 10^n dalās tikai ar 2 un 5 pakāpēm. Tātad kreisā puse ar 83 nedalās.

87. Pierādījums. Ievērosim, ka $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$. Tāpēc

$ab + ac + bc = \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ un tālāk

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$

No dotā a+b+c=0. Tāpēc

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{1 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{2abc}.$$

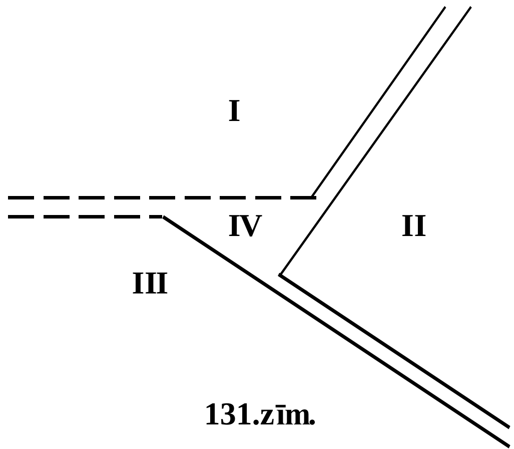
Pieņemsim no pretējā, ka apgriezto lielumu summa ir o, tad

$0 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{-2abc}$ jeb $a^2+b^2+c^2=0$.

Tas iespējams tikai tad, ja a=0, b=0, c=0, jo visi saskaitāmie ir nenegatīvi. Savukārt tad nav iespējami apgrieztie lielumi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} un \frac{1}{c}$. Iegūta pretruna.

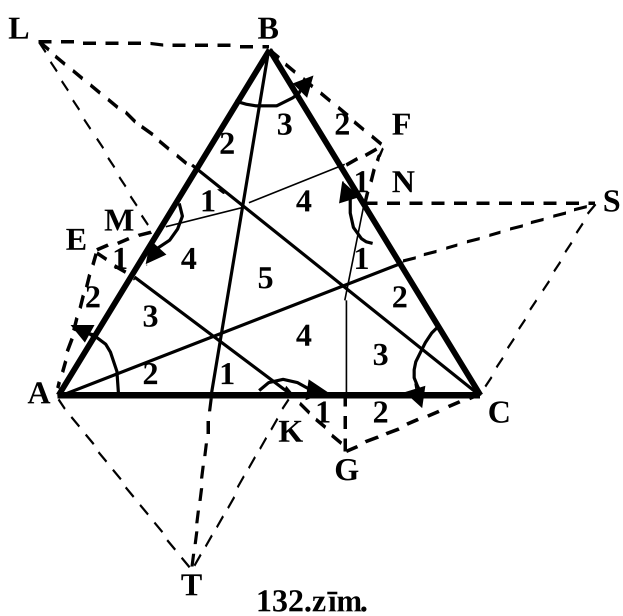
88. Atbilde. Nē, ne vienmēr.

Risinājums. Kā redzams 131.zīm., jau triju leņķu malas var sadalīt plakni tādos četros apgabalos, kas katrs robežojas ar katru; tātad iegūtās “kartes” izkrāsošanai saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem vajag vismaz 4 krāsas.



131.zīm.

89. Risinājums. Vienādmalu trijstūra ABC malu AB, BC, CA viduspunktus apzīmēsim attiecīgi ar M, N, K. Uz nogriežņiem MB, NC, KA kā pamatiem konstruēsim mazākus vienādmalu trijstūrus MLB, NSC, KTA ārpus Δ ABC. Nogriežņu AS, BT, CL krustpunktus apzīmēsim attiecīgi ar U, V, R (skat. 132.zīm.).



132.zīm.

Tad MU||AS, NV||BT, KR||CL.

Pagarinām KR, MU, NV iegūstot krustpunktus E, F, G.

Griezumi ir parādīti Δ ABC iekšpusē ar nepārtrauktām līnijām. Visas ar vienādiem cipariem apzīmētās daļas ir vienādas savā starpā. Veidojamie 7 vienādmalu trijstūri UVR, UFV, VGR, REU, UBF, VCG, RAE.

90. <u>Risinājums</u>. Šis joks saistīts ar to, ka programmēšanā līdz ar decimālo skaitīšanas sistēmu bieži lieto arī astotnieku skaitīšanas sistēmu (sistēmu, kuras bāze ir 8). Lai atšķirtu, kurā sistēmā skaitlis pierakstīts, aiz tā dažreiz raksta saīsinātu sistēmas apzīmējumu DEC (no angļu vārda "decimal") vai OCT (no angļu vārda "octal"). Pieraksti 25DEC un 31OCT izsaka vienu un to pašu skaitli (patiešām, 31 astotnieku sistēmā nozīmē 3·8+1, kas decimālajā sistēmā tiek pierakstīts kā 25).

91. <u>Pierādījums</u>. Apzīmēsim malu garumus nedilstošā kārtībā ar a≤b≤c≤d; tad perimetrs P=a+b+c+d. Tāpēc

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}+\frac{d}{p}=1.$$

Apzīmēsim $\frac{a}{p}=\alpha, \frac{b}{p}=\beta, \frac{c}{p}=\gamma, \frac{d}{p}=\sigma$. Tad

$\alpha+\beta+\gamma+\sigma=1$ (1)

$\alpha \le \beta \le \gamma \le \sigma$ (2)

un saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ ir naturāliem skaitļiem apgriezti lielumi.

Saskaņā ar teorēmu par lauztas līnijas garumu d<a+b+c, tāpēc 2d<P un $\sigma < \frac{1}{2}$.

Ja $\sigma \le \frac{1}{5}$, tad no (1) un (2) seko, ka

$$1=\alpha+\beta+\gamma+\sigma \le 4\sigma \le \frac{4}{5};$$

tā ir pretruna. Tātad $\sigma \ge \frac{1}{4}$. Iespējami divi gadījumi:

I. $\sigma=\frac{1}{4}$. Tad $\alpha \le \frac{1}{4}, \beta \le \frac{1}{4}, \gamma \le \frac{1}{4}$, un (1) iespējama tikai tad, ja $\alpha=\beta=\gamma=\sigma=\frac{1}{4}$; tad <u>visas</u> malas vienādas savā starpā.

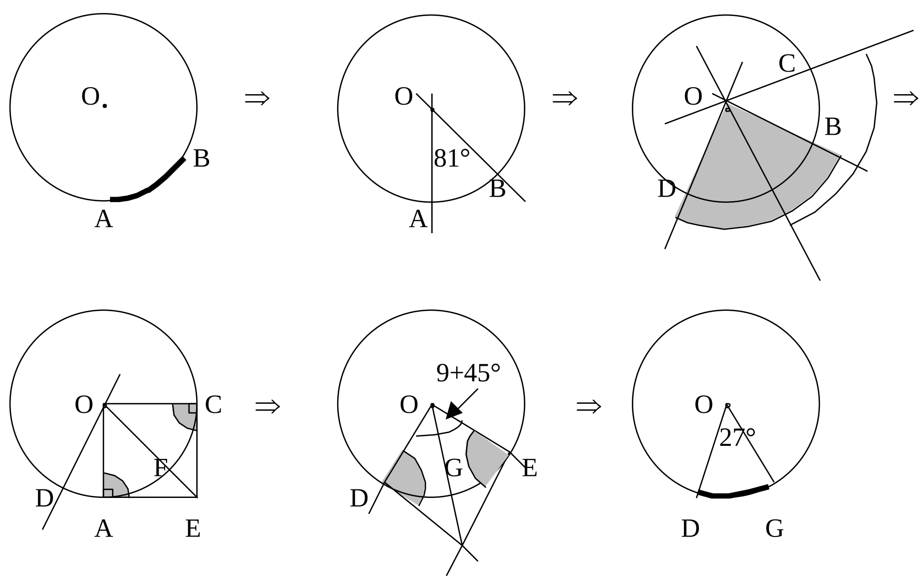
II. $\sigma = \frac{1}{3}$. Tad no (1) seko $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{3}$ (3).

Ja $\gamma = \frac{1}{3}$, tad $\gamma = \sigma$ un c=d. Apskatām gadījumu, kad $\gamma < \frac{1}{3}$; tad $\gamma \leq \frac{1}{4}$. Ja $\gamma \leq \frac{1}{5}$, tad no (2) un (3) seko, ka $\frac{2}{3} = \alpha + \beta + \gamma \leq 3\gamma \leq \frac{3}{5}$, bet nevienādība $\frac{2}{3} \leq \frac{3}{5}$ nav pareiza. Tātad patiesībā $\gamma = \frac{1}{4}$.

Tad no (3) seko, ka $\alpha + \beta = \frac{5}{12}$ (4).

Tā kā $\alpha \leq \beta$, tad no (4) seko $2\beta \geq \frac{5}{12}$ un $\beta \geq \frac{5}{24}$. Tā kā β ir naturālam skaitlim apgriezts lielums, tad $\beta > \frac{1}{5}$. Tā kā $\beta \leq \gamma = \frac{1}{4}$, tad $\beta = \frac{1}{4}$. Tad b=c.

92. Konstrukcija. Pieņemsim, ka dots loks AB, kura lielums 81^0 (skat. 133.zīm.).



133.zīm.

Ievērosim, ka loka garumu mēra ar centra leņķi. Tādēļ pietiks, ja mēs konstruēsim 27^0 lielu centra leņķi.

Konstrukcija būs sekojoša:

1) caur riņķa centru O un loka galapunktiem A un B novelkam taisnes OA un OB. Veidojas centra leņķis $\angle AOB=81^0$;

2) pie virsotnes O konstruējam divus taisnus leņķus: $\angle AOC=90^0$ un $\angle DOB=90^0$. To panākam tādējādi, ka trijstūra taisnā leņķa virsotni novietojam uz O un vienu malu uz OA (otrreiz uz OB). Tādējādi iegūti leņķi: $\angle DOA=9^0$ un $\angle AOC=90^0$.

3) leņķim AOC konstruējam bisektrisi. To darām šādi: konstruējam taisnu leņķi pie punkta A tā, lai viena mala ietu pa AO; konstruējam taisnu leņķi pie punkta C tā, lai viena mala ietu pa CO. Pagarinot jauniegūto taisno leņķu malas, iegūstam krustpunktu E. Caur punktiem O un E velkam taisni, tās krustpunktu ar riņķa līniju apzīmējam ar F. Iegūts jauns leņķis $\angle AOF=45^0$, kā arī leņķis $\angle DOF=9^0+45^0=54^0$;

4) leņķim DOF konstruējam bisektrisi (līdzīgi kā 3) punktā). Bisektrises krustpunktu ar riņķa līniju apzīmējam ar G. Esam ieguvuši leņķi $\angle DOG=27^0$ un arī loku DG, kas ir 27^0 liels.

93. Atbilde. Vislielākā iespējamā summas vērtība ir $22\frac{1}{22}$.

Risinājums. Tā kā saucēju summa ir nepāra skaitlis, tad viens saucējs ir mazāks par otru. Apzīmēsim mazāko saucēju ar m, lielāko ar M.

Tā kā "$\frac{1}{m}$-tā" ir daļa lielāka par "$\frac{1}{M}$-to" daļu, tad, palielinot daļai ar saucēju m skaitītāju līdz vislielākajai iespējamai vērtībai 22 (un attiecīgi par tikpat samazinot skaitītāju daļai ar saucēju M), summas vērtība palielināsies. Tāpēc vislielākā vērtība jāmeklē starp summām

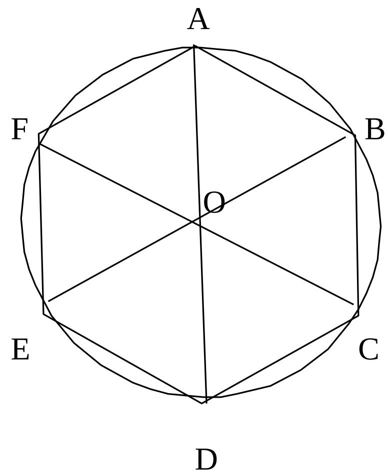
$$S=\frac{22}{m}+\frac{1}{M}.$$

Saskaitāmais $\frac{1}{M}$ nepārsniedz 1. Tāpēc pie $m\geq 2$ pastāv nevienādība

$$S\leq\frac{22}{2}+1=12.$$

Turpretī pie m=1 iegūstam $S=22\frac{1}{22}$. Tātad tā ir vislielākā iespējamā summas vērtība.

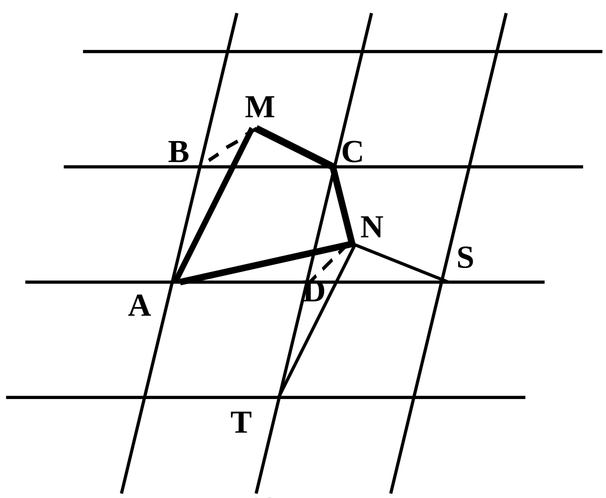
94. Pierādījums. Atzīmēsim riņķa centru ar O un atliksim uz riņķa līnijas punktus A, B, C, D, E, F tā lai tie būtu ik 60^0 loka galapunkti (skat. 134.zīm.).



134.zīm.

Ievērosim, ka AO=1=AB=BC=CD=DE=EF=FA. Ja katras monētas diametrs ir mazāks par 1, tad ar 1 monētu nevar pārklāt divus no sekojošiem septiņiem punktiem: A, B, C, D, E, F, O. Tādēļ būtu vajadzīgas 7 monētas, katram punktam sava monēta. Pretruna, jo dotas 6 monētas.

95. Risinājums. Apskatīsim 135.zīm., kur attēlota paralelogramam ABCD vienādu paralelogramu režģa daļa.



135.zīm.

Pēc pazīmes **mlm** Δ MBC=Δ NDS, tāpēc MC=NS. Līdzīgi pierāda, ka NT=MA. Šīs vienādības viegli iegūt arī gadījumā, kad M un N pieder attiecīgi taisnēm BC un AD.

No trijstūra nevienādības, pielietojot to Δ ANS un Δ CNT, iegūstam

AN+NS>AS (1)

CN+NT>CT (2)

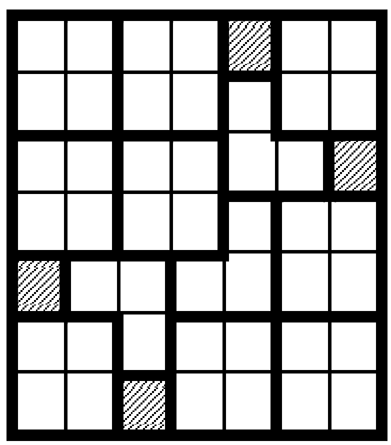
No kurienes, ņemot vērā AB=CD=DT, AD=BC=DS, MC=NS un NT=MA, iegūstam (abas nevienādības saskaitot), ka

AN+MC+CN+AM>AB+BC+CD+DA jeb

Per(AMCN)>Per(ABCD) (3).

Lai šis spriedums nebūtu spēkā, (1) un (2) nevienādību vietā jābūt vienādībām, t.i., ANS un CNT jābūt taisnēm. Bet tad punkts D nevar vispār būt pārbīdīts, jo tas ir CT un AS krustpunkts. Tātad (3) ir pareiza visos gadījumos.

96. Pierādījums. Sadalīsim kvadrātu 7x7 sekojošos apgabalos (skat. 136.zīm.).



136.zīm.

Pavisam ir 9 “lieli” kvadrātveida apgabali, trīs “stūrīši” un četri vienas rūtiņas apgabali. Pat pieņemot, ka visi mazie apgabaliņi ir izkrāsoti, uz atlikušajiem 12 apgabaliem atliek 29-4 izkrāsotas rūtiņas; citos gadījumos to būs vēl vairāk. Tā kā 25:12=2 atl.1, tad vismaz vienā no 12 atlikušajiem apgabaliem ir vismaz 3 izkrāsotas rūtiņas. Katrs no šiem 12 apgabaliem ir vai nu kvadrāts 2x2, vai arī kvadrāta 2x2 sastāvdaļa. Tāpēc apgalvojums pierādīts.