“Profesora Cipariņa klubs” 1989./90. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. No signāla darbības sākuma līdz brīdim, kad Jānis pienāca pie krustojuma, pagājušas 13·60·60+19·60+33=47973 sekundes. Gaisma ielu krustojumā pārslēdzas periodiski, viena perioda garums ir 30+5+30+5=70 sekundes.

$$47973:70=685 \text{ atl. } 23$$

Tātad Jānis pie krustojuma pienāca 686-ā perioda 23-ā sekundē. Tā kā katra perioda ietvaros pirmās 30 sekundes deg zaļā gaisma, tad zaļā gaisma dega arī Jāņa pienākšanas brīdī.

1.2. No tā, ka a, b, c, d un e ir dažādi veseli pozitīvi skaitļi, bet 1155 sadalījums pirmreizinātājos ir

$$1155=3\cdot5\cdot7\cdot11$$

seko, ka dotie skaitļi ir 1, 3, 5, 7 un 11, tātad

$$a+b+c+d+e=1+3+5+7+11=27.$$

1.3. Veicot gadījumu pārlasi, iegūstam, ka ir 74 šādi paralēlskaldņi.

1.4. Tā kā visu no 1 līdz 35 skaitļu summa ir $\frac{1+35}{2}\cdot 35=630<1989$, tad atbilde uz pirmo uzdevuma jautājumu ir nē, šos skaitļus nav iespējams sadalīt grupās prasītajā veidā.

Summu starpība nevar būt arī 19. Pieņemot pretējo un apzīmējot mazāko no summām ar S, iegūstam

$$S+(S+19)=630$$
$$S=(630-19):2=305{,}5$$

Bet katrs summas S saskaitāmais ir naturāls skaitlis, tātad arī S jābūt naturālam skaitlim, esam ieguvuši pretrunu ar mūsu sākotnējo pieņēmumu.

Sagrupēt skaitļus tā, lai to summas atšķirtos par divi, var, piemēram, šādi

1. grupas skaitļi: 1; 3; 5; 6; 9; 10; 13; 14; 17; 18; 21; 22; 25; 26; 29; 30; 33; 34.
2. grupas skaitļi: 2; 4; 7; 8; 11; 12; 15; 16; 19; 20; 23; 24; 27; 28; 31; 32; 35.

1.5. Parādīsim, kā skaitļus var uzrakstīt pa apli saskaņā ar uzdevuma prasībām. Šo apli jebkurā vietā "pārgriežot", iegūsim skaitļu sakārtojumu rindā ar vajadzīgajām īpašībām.

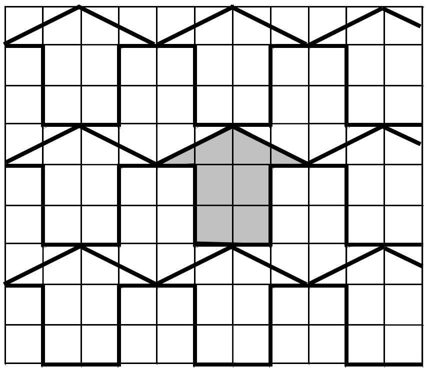
$$\begin{array}{l}
90-80-70-60-50-40-30-20-10\\
19-18-17-16-15-14-13-12-11\\
29-28-27-26-25-24-23-22-21\\
39-38-37-36-35-34-33-32-31\\
49-48-47-46-45-44-43-42-41\\
59-58-57-56-55-54-53-52-51\\
69-68-67-66-65-64-63-62-61\\
79-78-77-76-75-74-73-72-71\\
89-88-87-86-85-84-83-82-81\\
99-98-97-96-95-94-93-92-91
\end{array}$$

0. zīm.

1.6. Ja konfekšu skaits n nav divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju, tad uzvar pirmais spēlētājs. Pieņemsim, ka m ir atlikušos konfekšu skaits pirms kārtējā pirmā spēlētāja gājiena. Ar katru savu gājienu šim spēlētājam jāēd 2^k konfektes, kur 2^k ir lielākā divnieka pakāpe, ar kuru dalās m. Tātad, gadījumos, kad n ir 17, 30 un 72, uzvar pirmais spēlētājs.
Ja n ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju, piemēram, $2^6=64$, tad uzvar otrais spēlētājs, ja pirmais spēlētājs ar savu gājienu apēdis l konfektes, tad otrais spēlētājs ar savu gājienu apēd 2^r konfektes, kur 2^r ir lielākā divnieka pakāpe, ar kuru dalās l.

1.7. Nosacījums "katrs skaitlis vienāds ar desmito daļu no visu **pārējo** uzrakstīto skaitļu summas" nozīmē, ka katrs skaitlis vienāds ar vienpadsmito daļu no **visu** uzrakstīto skaitļu summas. Tātad visi skaitļi ir vienādi. No šejienes viegli iegūt, ka pavisam uzrakstīti vienpadsmit skaitļi.

1.8. Jā, tāda plāksnīte eksistē. Skat. 1. zīm.



1. zīm.

1.9. Ja 1988 bļodiņu gadījumā vienā bļodiņā ir viens akmens, bet citās – pa diviem akmeņiem, tad kopīgais akmeņu skaits ir nepāra skaitlis. Pēc katras operācijas akmeņu kopskaits palielinās par divi, tātad tas vēl arvien ir nepāra skaitlis. Taču, ja ir jāpanāk, lai visās bļodiņās ir vienāds daudzums akmeņu (piemēram, n akmeņi), tad to kopskaitam ir jābūt $1988\cdot n$ jeb pāra skaitlim.
Aplūkosim gadījumu ar 1989 bļodiņām. Pievienosim pa vienam akmenim šādos bļodiņu pāros: 1. un 2., 3. un 4., 5. un 6., …, 1987. un 1988., 1989. un 1. Rezultātā pirmajai bļodiņai pievienoti 2 akmeņi, bet citām – pa vienam. Tātad starpība starp pirmās bļodiņas akmeņu daudzumu ar jebkuras citas bļodiņas akmeņu daudzumu ir samazinājusies par 1, kamēr jebkuru citu divu bļodiņu akmeņu daudzumu starpība ir palikusi iepriekšējā. Skaidrs, ka 1. bļodiņas vietā varēja izvēlēties jebkuru citu, tātad izlīdzināt akmeņu skaitu visās 1989. bļodiņās ir iespējams.

1.10. Pieņemsim pretējo. Tādā gadījumā divu daudzstūra malu garumu attiecība ir vai nu mazāka par 1, vai vismaz divi, tātad daudzstūrī nav divu vienāda garuma malu. Sakārtosim malas dilstošā secībā

$$m_1>m_2>m_3> \ldots > m_{n-1}>m_n$$

Saskaņā ar pieņēmumu
mn-2≥2mn-1=mn-1+mn-1>mn-1+mn
mn-3≥2mn-2=mn-2+mn-2>mn-2+mn-1+mn

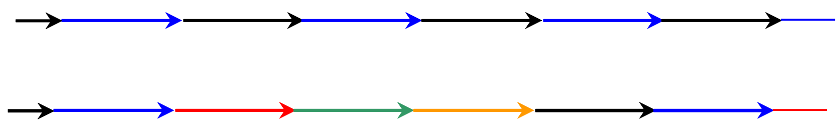
…

$m_2 \geq 2m_3 = m_3 + m_3 > m_3 + m_4 + \ldots + m_{n-1} + m_n$

$m_1 \geq 2m_2 = m_2 + m_2 > m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_{n-1} + m_n$

Tātad malas m1 ir lielāks par visu pārējo malu garumu summu. Tā nevar būt: nogrieznis, kas savieno m_1 galapunktus ir īsāks par jebkuru citu ceļu, kas savieno šos galapunktus. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams.

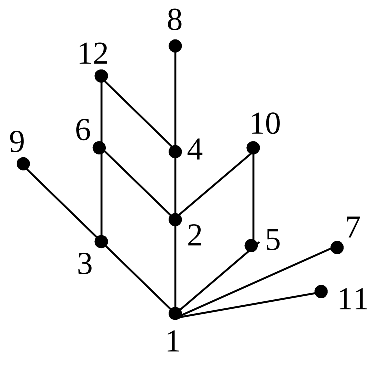
1.11. Sadalīsim taisni vienāda garuma nogriežņos, un izkrāsosim tos tā, kā parādīts 2. zīm. Bultiņa iziet no tā nogriežņa galapunkta, kas nokrāsots tāpat kā pats nogrieznis, uz galapunktu, kas nokrāsots citādā krāsā.



2. zīm.

Ja dalījuma nogriežņa garums ir a, tad, pabīdot vienā krāsā nokrāsoto taisnes daļu par attālumu, kas ir a daudzkārtnis, pa labi, tā sakritīs ar citā krāsā nokrāsoto daļu, tātad šīs daļas ir vienādas.

1.12. Ja pirmais spēlētājs izvēlas gājienu "2" vai "5", tad viņš, pareizi spēlējot, izvarēs vienmēr. Šīs spēles analīzei, ērti ieviest tās grafisko attēlojumu (3. zīm.). Punkti attēlo skaitļus no 1 līdz 12, bet novilktās līnijas – skaitļu dalīšanos vienam ar otru.



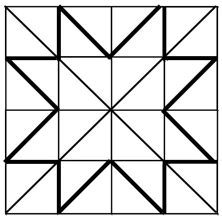
3. zīm.

2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Jā, to var izdarīt. Pārnesot pirmo divnieku par kāpinātāju, iegūstam pareizu vienādību

$$11^2-120=1$$

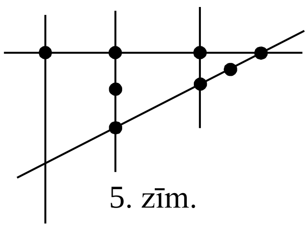
2.2. Papildinot zīmējumu ar vēl dažām līnijām, sadalām kvadrātu 32 vienādos trijstūrīšos, tā kā tieši puse trijstūrīšu veido auseklīti, tad tā nokrāsošanai būs nepieciešami $\frac{1}{2}16=8$ grami krāsas.



4. zīm.

2.3. Vienai daļai skaitītājs ir 1. Tā kā saucējs ir vismaz 1, tad šīs daļas vērtība nepārsniedz 1. Kādai citai daļai skaitītājs ir 10. Tā kā saucējs nepārsniedz 10, tad šīs daļas vērtība ir vismaz 1. Tā kā visu daļu vērtības vienādas, tad redzam, ka tās ir 1. Lai daļas vērtība būtu 1, tās skaitītājam un saucējam jābūt vienādiem. Tātad daļas ir $\frac{1}{1}; \frac{2}{2}; \frac{3}{3}; \ldots; \frac{10}{10}$.

2.4. Vajadzīgajā veidā novietot 9 punktus un 5 taisnes var, piemēram, tā, kā parādīts 5. zīm.



5. zīm.

Pieņemsim, ka uzdevuma prasības ir izpildāmas, atzīmējot tikai 8 punktus. Ar a, b, c, d, e apzīmēsim tās taisnes, uz kurām atrodas attiecīgi 5, 4, 3, 2, 1 atzīmētie punkti. Tad uz taisnēm a un b kopā ir vismaz 5+4-1=8 atzīmētie punkti. Bet tad neviena taisne nevar saturēt tieši 3 atzīmētos punktus, jo vismaz divi no tiem atrastos uz a vai b un tādā gadījumā trešā taisne sakristu atbilstoši ar a vai b.

2.5. Ja A=1,51 un B=1,49, tad Andris iegūst rezultātu 2, bet Jānis – rezultātu 1.Tātatd attiecība 2 ir iespējama. Pierādīsim, ka lielāka attiecība nevar būt.

Skaitļa a noapaļojumu apzīmēsim ar (a). Atcerēsimies, ja n-0,5≤a<n+0,5, tad (a)=n, kur n – naturāls skaitlis. Pieņemsim, ka Jāņa rezultāts ir $\left(\frac{A}{B}\right)$=x jeb

$$x-0{,}5\le\frac{A}{B}<x+0{,}5 \qquad (1)$$

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda – ka Andra un Jāņa iegūto rezultātu attiecība ir lielāka par 2. Tad Andra iegūtais rezultāts ir lielāks par 2x. Tā kā tas ir naturāls skaitlis, tad varam rakstīt, ka $\left(\frac{(A)}{(B)}\right)\ge 2x+1$. No šejienes iegūstam, ka jābūt

$$2x+0{,}5\le\left(\frac{A}{B}\right)<\frac{A+0{,}5}{B-0{,}5} \qquad (2)$$

Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka x< $\frac{1}{2}\cdot\frac{2A+1}{2B-1}-\frac{1}{4}$, bet no (1) iegūstam $\frac{A}{B}-\frac{1}{2}$<x, tātad $\frac{A}{B}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{2A+1}{2B-1}-\frac{1}{4}$ jeb

$$A<\frac{2B^2+B}{4(B-1)} \qquad (3)$$

Tā kā A>B, tad B< $\frac{2B^2+B}{4(B-1)}$ jeb 2B(B-2,5)<0.

Tā kā B>1, tad pēdējā nevienādība ir spēkā, ja B<2,5. Tālāk šķirosim gadījumus.

1) Ja 1<B<1,5 un A<2,5, tad (A)≤2, tātad Andra iegūtais rezultāts nepārsniedz 2, Jāņa rezultāts ir vismaz 1 un attiecības vērtība nepārsniedz 2.

2) Ja 1<B<1,5 un 2,5≤A<4,5 tad Andra iegūtais rezultāts $\left(\frac{(A)}{(B)}\right)=((A))=(A)\le 4$, bet Jāņa rezultāts – $\left(\frac{A}{B}\right)$≥2. Tātad meklējamā attiecība nepārsniedz 2.

3) Ja 1<B<1,5 un A≥4,5, tad Andra rezultāts $\left(\frac{(A)}{(B)}\right)\le A+\frac{1}{2}$. Savukārt Jāņa iegūtais rezultāts $\left(\frac{A}{B}\right)\ge\left(\frac{A}{1{,}5}\right)>\frac{2}{3}A-\frac{1}{2}$. Ievērosim, ka $2\left(\frac{2}{3}A-\frac{1}{2}\right)\ge A+\frac{1}{2}$ jeb A≥4,5, tas nozīmē, ka arī šajā gadījumā attiecība nepārsniedz 2.

4) Ja 1,5≤B<2,5 un A<4,5, tad (B)=2 un (A)≤4 un Andra iegūtais rezultāts nepārsniedz 2. Tā kā A>B≥1, tad arī attiecības vērtība nepārsniedz 2.

5) Ja 1,5≤B<2,5 un 4,5≤A<6, tad 5≤(A)≤6 un Andra iegūtais rezultāts $\left(\frac{(A)}{(B)}\right)=\left(\frac{(A)}{2}\right)=3$. Tā kā $\frac{A}{B}>\frac{4,5}{2,5}>1,5$, tad $\left(\frac{A}{B}\right)\geq 2$. Tātad šajā gadījumā meklējamā attiecība nepārsniedz $\frac{3}{2}$.

6) Ja 1,5≤B<2,5 un A>6, tad Andra rezultāts $\left(\frac{(A)}{(B)}\right)=\left(\frac{(A)}{2}\right)\leq\frac{(A)}{2}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}A+\frac{3}{4}$. Savukārt Jāņa rezultāts $\left(\frac{A}{B}\right)\geq\left(\frac{A}{2,5}\right)>\frac{A}{2,5}-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}A-\frac{1}{2}$. Viegli pārbaudīt nevienādību $2\left(\frac{2}{5}A-\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}A+\frac{3}{4}$. Tātad arī otrajā gadījumā attiecība nevar būt lielāka par 2. Visas iespējas apskatītas, uzdevums atrisināts.

2.6. Uzvar otrais spēlētājs. Viņa stratēģija ir šāda. Vispirms viņš pārbauda, vai kaut kur nevar uzreiz izveidot trīs vienādus ciparus blakus, ja var, tad izdara un uzvar. Ja nevar, tad atrod rūtiņu, kas simetriska pirmā spēlētāja pēdējai aizpildītajai rūtiņai attiecībā pret kvadrāta centru, un ieraksta skaitli, kas atšķiras no pirmā spēlētāja ierakstītā. Tā kā visas rūtiņas var apvienot pāros, kur vienā pārī ir savā starpā simetriskas rūtiņas, turklāt katra rūtiņa ietilpst tieši vienā pārī, tad, ja pirmais P spēlētājs P var uzvarēt ar savu gājienu, tad otrais spēlētājs O varēja uzvarēt ar savu iepriekšējo gājienu, vai arī spēle beidzas neizšķirti.

	A	B	C	D	E	F
6						
5				2		
4			1	1	2	
3		1		2		
2			1			
1						

6. zīm.

Papētīsim sīkāk neizšķirtas spēles gadījumu. Apskatīsim kvadrāta četras centrālās rūtiņas, viena no tām tiek aizpildīta pirmā, varam pieņemt, ka C4 ieraksta vieninieku (apzīmēsim to šādi C4~1). Tam seko atbilde D3~2. Viena no atlikušajām centra rūtiņām tiek aizpildīta pirmā, teiksim, ka tas notiek ar P gājienu D4~1. Tā kā O neuzvarēja, tad jau pirms tam ir bijis izdarīts gājiens E4~2, kā arī simetrijas dēļ B3~1, bet pirms šiem gājieniem rūtiņām D5 un C2 jau bija jābūt aizpildītām attiecīgi ar 2 un 1. Bet tādā gadījumā mēs redzam, ka O ar savu kārtējo gājienu C3~1 var uzvarēt, tātad P nevar panākt neizšķirtu un spēlētājs O noteikti uzvar.

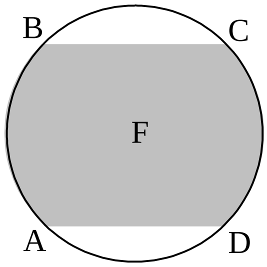
2.7. No uzdevuma nosacījumiem seko, k negatīvo skaitļu nav vairāk par deviņiem. Tiešām, ja to būtu 10 vai vairāk, tad varētu izvēlēties 10 negatīvus skaitļus, kuru summa būtu negatīva. Visus citus skaitļus sauksim par labiem.
Pierakstīsim katru negatīvo skaitli uz citas kartītes, un uz tās pašas kartītes pierakstīsim deviņus labos skaitļus, pie tam vienu un to pašu skaitli nerakstīsim uz vairāk nekā vienas kartītes. Tā kā labo skaitļu ir vismaz 1979, tad to nepietrūks. Rezultātā uz katras kartītes uzrakstīto skaitļu summa ir pozitīva. neuzrakstīto labo skaitļu summa nav mazāka par 0. Tātad visu skaitļu summa noteikti ir pozitīva.

2.8. Attēlosim draudzenes ar punktiem: katrus divus punktus savienosim ar līniju. Pavisam ir 9·8=72 līniju gali, jo no katra punkta iziet 8 līnijas. Tā kā katrai līnijai ir divi gali, tad līniju skaits ir 72:2=36.
Ja draudzene A nosūtījusi kartīti draudzenei B, atzīmēsim uz līnijas AB bultiņu virzienā no A uz B. Pavisam nosūtītas 9·5=45 kartītes. Tā kā kartīšu skaits ir par 9 lielāks nekā līniju skaits, tad uz 9 līnijām atzīmētas 2 bultiņas. Tātad ir vismaz 9 tādu draudzeņu pāri, kas savstarpēji apmainījušās ar kartītēm.

2.9. Ievērosim, ka katram a pastāv nevienādības [a]≤a<[a]+1, no kurienes seko ka a≥[a]>a-1.
Tātad $\frac{x}{10}-1<\left[\frac{x}{10}\right]=\left[\frac{x}{11}\right]+1\leq\frac{x}{11}+1$ jeb $\frac{x}{10}-\frac{x}{11}<2$, no kurienes iegūstam x<220.
Šajā intervālā visus x viegli pārbaudīt, atceroties, ka $\left[\frac{x}{10}\right]$ vērtība lēcienveidīgi mainās pie x, kas dalās ar 10, bet $\left[\frac{x}{11}\right]$ vērtība pie – x, kas dalās ar 11. Iegūstam, ka vienādojumu apmierina skaitļi x=10, 20≤x≤21, 30≤x≤32, 40≤x≤43, 50≤x≤54, 60≤x≤65, 70≤x≤76, 80≤x≤87, 90≤x≤99, 100≤x≤109, 110≤x≤119, 121≤x≤129, 132≤x≤139, 143≤x≤149, 154≤x≤159, 165≤x≤169, 176≤x≤179, 187≤x≤189, 198≤x≤199, 209, tas ir, kopā 2(1+2+3+4+…+9+10)=110 naturāli skaitļi.

2.10. Teiksim, ka skrējiena sākumā A bija pirmajā vietā, B – otrajā, bet C – trešajā. Katras maiņas rezultātā sportists no vietas ar pāra numuru pāriet uz vietu ar nepāra numuru, bet sportists no vietas ar nepāra numuru – uz vietu ar pāra numuru. Tā kā A šādas maiņas izdarīja 5 reizes, tad finišā viņš bija vietā ar pāra numuru, tātad otrajā. Tā kā B finišēja ātrāk nekā A, tad B finišā bija pirmais, bet C – trešais.

2.11. Jā, var gadīties. Skat. 7. zīm.



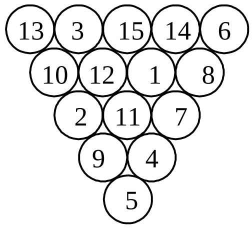
7. zīm.

Te A, B, C, D ir apskatāmajā riņķa līnijā ievilkta kvadrāta virsotnes. Pagriežot zīmējumā attēloto figūru ap riņķa centru par 90°, iegūsim otru Rīgas Franču licejs eksemplāru, kas kopā ar zīmējumā parādīto pilnībā nosedz riņķi. Parādītā figūra Rīgas Franču licejs nevar nosegt pusriņķi: ja pusriņķa diametrs būtu d, tad tā vienam galapunktam jāatrodas uz loka AB, bet otram – uz loka CD, tad skaidrs, ka daļa pusriņķa robežas sakrīt vai nu ar loku BC, vai ar loku AD un tātad nav pārklāta.

2.12. Aplūkojot iespējamo kauliņu un brīvo lauciņu savstarpējo novietojumu, secinām, ka ir kauliņi, kas robežojas ar augstākais vienu brīvo lauciņu un katrs kauliņš robežojas ar augstākais diviem brīvajiem lauciņiem, tātad tukšie lauciņi un kauliņi robežojas mazāk nekā 2k vietās. Apzīmēsim kauliņu skaitu ar k. Tad brīvo lauciņu skaits ir mn-2k. Tāpat kļūst skaidrs, ka brīvais lauciņš nevar atrasties ne stūrī, ne pie taisnstūra malas, tāpēc visi brīvie lauciņi ir taisnstūra iekšienē un katram no tiem no visām pusēm piekaras kauliņi, tas nozīmē, ka brīvie lauciņi robežojas ar kauliņiem 4(mn-2k) vietās. Varam sastādīt nevienādību $4(mn-2k)<2k$ jeb $2k>\frac{4}{5}mn$. Tāpēc brīvo lauciņu skaits $mn-2k<\frac{1}{5}mn<\frac{1}{4}mn$, k.b.j.

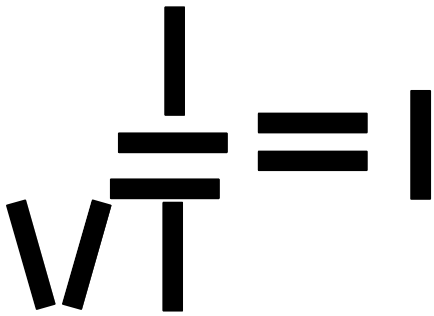
3. nodarbības atrisinājumi

3.1. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 8. zīm.



8. zīm.

3.2. Atrisinājumu skat. 9. zīm.



9. zīm.

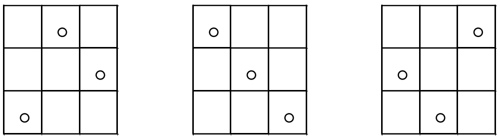
Tiešām, vienādība $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ir pareiza.

3.3. 1990=(1+)(1111-111)-11+1

1990=2222-222-2·2·2-2
1990=333·(3+3)-3·3+3:3
1990=44·44+44+(44-4):4
1990=555·(5-5:5)-55·5+55-5-5
1990=(666·(6+6+6)-6-6):-6
1990=((7·7-7-7:7)·7-(7+7+7):7)·7+(7+7):7
1990=(8888-8):8+888-8
1990=999+999-9+9:9

3.4. Pirmās 1090 grāmatas satur 90·12=1080 attēlus. Nākošā, 1901-ā grāmata, satur attēlus ar numuriem 1081., 1082., …, 1089., 1090., 1091., 1092. Tātad vienai no meklējamām grāmatām numurs ir 1091. Vai eksistē vēl citas tādas grāmatas?
Nākoša, 1092-ā grāmata, satur attēlus ar numuriem 1093., 1094., …, 1104. Starpība starp mazāko šīs grāmatas attēla un pašas grāmatas numuru ir 1. Nākošajā grāmatā šī starpība būs jau 1+11=12 (jo grāmatas numurs pieaug par 1, bet mazākais šis grāmatas attēla numurs par 12), vēl nākošajā grāmatā šī starpība būs 12+11=23 utt. Tātad grāmatās ar numuriem 1093., 1094., 1095., … visu attēlu numuri ir lielāki par attiecīgās grāmatas numuru. Tātad citu grāmatu ar mūs interesējošo īpašību nav.

3.5. Sniegbaltīte varēja torti izcept no 3 kārtām, katrā liekot 9 kubiskus caurspīdīgas marcipāna gabaliņus, un sēkliņas iecept tā, kā redzams 10. zīm.



10. zīm.

3.6. No tā, ka visi cipari vienādi, izriet, ka neviens no tiem nav nulle. Šo skaitli neveidos arī divnieki, trijnieki, septītnieki vai astotnieki, jo neviena naturāla skaitļa kvadrāts nebeidzas ar kādu no šiem cipariem. Ja varētu pastāvēt vienādība $n^2=555\ldots55$, tad n dalītos ar 5, bet n^2 – ar 25, bet skaitlis, kura pēdējie divi cipari ir piecinieki, ar 25 nedalās. Ja visi cipari būtu sešinieki, tad n noteikti būtu pāra skaitli, pār skaitļa kvadrāts dalās ar 4, taču skaitlis, kura pēdējie divi cipari veido 66, ar 4 nedalās. Skaitlis n^2 var beigties ar vieninieku tikai tad, ja n beidzas ar 1 vai 9. Aplūkojot visas iespējamās pēdējo divu ciparu kombinācijas, redzam, ka nevienā no gadījumiem kvadrāts nebeidzas ar diviem vieniniekiem. Tātad nav iespējama arī situācija $n^2=111\ldots11$. Šī iemesla dēļ iegūtais nav spēkā arī vienādības $n^2=444\ldots44=2^2\cdot111\ldots11$ un $n^2=999\ldots99=3^2\cdot111\ldots11$.
Esam pierādījuši, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar būt vienādciparu skaitlis.

3.7. Ārsts izmeklē pirmo slimnieku ar vienu cimdu pāri. Novelkot cimdus, tos apgriež uz otru pusi – kreisais cimds kļūst par labās rokas cimdu, bet labais – par kreisās rokas cimdu. Cimdu iekšpuses ir saskārušās ar slimnieku. Izmeklējot otro pacientu, ārsts uzvelk otru cimdu pāri. Lai pārbaudītu trešā slimnieka veselības stāvokli, ārsts, nenovelkot otro cimdu pāri, uzvelk pirmo pāri tā, lai abas inficētās puses ir kopā. Līdz ar to arī trešais slimnieks būs veiksmīgi izmeklēts.

3.8. Var, piemēram, šādi:
1. grupa: 1, 3, 5, 7, …, 999;
2. grupa: 2, 6, 10, 14, …, 998;
3. grupa: 4, 12, 20, 28, …, 996;
4. grupa: 8, 24, 40, 56, …, 1000;
5. grupa: 16, 48, 80, 112, …, 976;
6. grupa: $32\cdot1$, $32\cdot4$, $32\cdot10$, $32\cdot13$, $32\cdot38$, $32\cdot31$;
7. grupa: $32\cdot2$, $32\cdot3$, $32\cdot11$, $32\cdot12$, $32\cdot29$, $32\cdot30$;
8. grupa: $32\cdot5$, $32\cdot6$, $32\cdot7$, $32\cdot8$, $32\cdot9$;
9. grupa: $32\cdot14$, $32\cdot15$, $32\cdot16$, $32\cdot17$, $32\cdot18$, $32\cdot19$, $32\cdot20$, $32\cdot21$ $32\cdot22$, $32\cdot23$, $32\cdot24$, $32\cdot25$, $32\cdot26$, $32\cdot27$.

3.9. Skatīsim, kādu rezultātu dod aprakstītā operācija, ja to pielieto skaitļiem 1 un a. Dalot $1\cdot a$ ar $a+1$, iegūst skaitli starp 0 un 1, nosvītrojot ciparus aiz komata, iegūst 0, bet, pieskaitot vieninieku, iegūst 1. Tātad vieninieks "apēd" katru skaitli, ar kuru tas šajā procesā saskaras, bet pats nepazūd. Tāpēc, skaidrs, ka tas būs vienīgais beigās palikušais skaitlis.

e=S-e

3.10. Atradīsim katram no 55 skaitļiem atlikumu dalot ar 9. Pavisam iespējami deviņi dažādi atlikumi: 0; 1; 2; …; 8. Ja visas deviņas iespējamās atlikuma vērtības būtu sastopamas katra augstākais 6 reizes, tad dažādo skaitļu nebūtu vairāk par 9·6=54, tātad kāda atlikuma vērtība parādās 7 reizes, apzīmēsim to ar r. Ievērosim, k atbilstošie nepilnie dalījumi ir no 0 līdz 11 ieskaitot, jo 1:9=0 atl. 1 un 100:9=11 atl. 1, bet citi skaitļi atrodas starp 1 un 100.

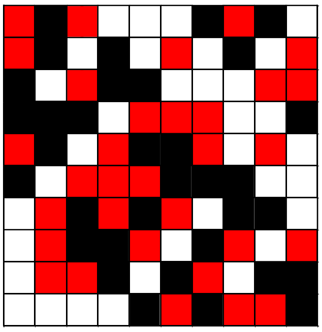
Aplūkosim tos 7 skaitļus, kas, dalot ar 9, dod atlikumu r. Tie visi sastopami starp 11. zīm. attēlotajiem:

0·9+r	2·9+r	4·9+r	6·9+r	8·9+r	10·9+r
1·9+r	3·9+r	5·9+r	7·9+r	9·9+r	11·9+r

11. zīm.

Divi, kas atrodas vienā kolonnā, ir meklējamie.

3.11. Skat. 12. zīm.

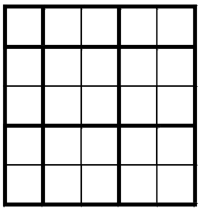


12. zīm.

3.12. izvēlēsimies atsvarus 2g, 6g, 18g, 54g. Ar atsvariem 2g, 6g un 18g var līdzsvarot jebkuru zelta gabalu, kas sver pāra skaitu gramu robežās no 2g līdz 26g. Pievienojot 54g atsvaru , varam līdzsvarot arī visus pārējos pāra skaitu gramu smagos zelta gabalus, uz viena svaru kausa novietojot 54g atsvaru, bet starpību līdzsvarojot ar trim mazākajiem atsvariem (ja $28 \le x < 54$, tad $0 < 54-x \le 26$). Ja zelta gabals sver nepāra skaitu gramu, tad tā svaru var izteikt formā $2k+1$, kur k – naturāls skaitlis. Tad Aizmārša, rīkojoties līdzīgi kā iepriekš, var konstatēt, ka zelta gabals sver vairāk nekā 2k gramus, bet mazāk nekā 2k+2 gramus. Līdz ar to viņš var precīzi noteikt arī šī zelta gabala svaru.

4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Sadalīsim kvadrātu tā, kā tas ir parādīts 13. zīm. Skaidrs, ka katrā mazajā kvadrātiņā ir jābūt ierakstītiem visiem četriem skaitļiem, tātad mazāk kā 4 vieninieki nedrīkst būt, savukārt katrā no divrūtiņu taisnstūriem var būt augstākais 1 vieninieks, tas nozīmē, ka kopējais vieninieku skaits kvadrātā nepārsniegs 4+5=9. Kā redzams 14. zīm., iespējamas vērtības 4; 5; 6; 7; 8; 9.



13. zīm.

3	2	3	2	3
4	1	4	1	4
3	2	3	2	3
4	1	4	1	4
3	2	3	2	3

4	2	3	1	4
3	1	4	2	3
4	2	3	1	4
3	1	4	2	3
4	2	3	1	4

3	1	4	1	3
4	2	3	2	4
3	1	4	1	3
4	2	3	2	4
3	1	4	1	3

3	2	1	4	3
1	4	3	2	1
3	2	1	4	3
1	4	3	2	1
3	2	1	4	3

1	2	3	4	1
3	4	1	2	3
1	2	3	4	1
3	4	1	2	3
1	2	3	4	1

1	2	1	3	1
4	3	4	2	4
1	2	1	3	1
4	3	4	2	4
1	2	1	3	1

14. zīm.

4.2. Visērtāk šos skaitļus uzskaitīt katra simta robežās.

No 1 līdz 100: 19; 28; 37; 46; 55; 64; 73; 82; 91.
No 100 līdz 200: 109; 118; 127; 136; 145; 154; 163; 172; 181; 190.
No 201 līdz 300: 208; 217; 226; 235; 244; 253; 262; 272; 280.
No 301 līdz 400: 307; 316; 325; 334; 343; 352; 361; 370.
No 401 līdz 500: 406; 415; 424; 433; 442; 451; 460.
No 501 līdz 600: 505; 514; 523; 532; 541; 550.
No 601 līdz 700: 604; 613; 622; 631; 640.
No 701 līdz 800: 703; 712; 721; 730.
No 801 līdz 900: 802; 811; 820.
No 901 līdz 1000: 901; 910.
Kopā 9+10+9+8+7+6+5+4+3+2=63 skaitļi.

4.3. Tā kā Jāņa shēmā katra virsotne savienota ar katru malu vai diagonāli, tad, neatkarīgi no skaitļu ierakstīšanas kārtības piecstūra virsotnēs, kā reizinājumus Jānis iegūs **visus iespējamos** divu dažādu sākumā ierakstīto ciparu reizinājumus. Tātad visu uzrakstīto skaitļu summa vienmēr būs

$$1+2+3+4+5+1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+1\cdot5+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5+3\cdot4+3\cdot5+4\cdot5=100.$$

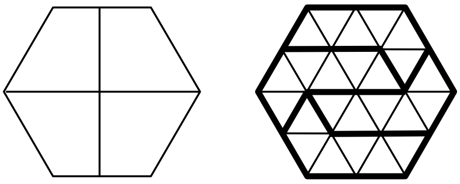
4.4. Pieņemsim, ka klasē ir 14 zēnu un 14 meiteņu. Tad pa pāriem sēž 13 zēni un 13 meitenes, pie tam zēni – ar zēniem, meitenes – ar meitenēm. Tā kā 13 nav pāra skaitlis, tad tas nav iespējams. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

4.5. Pierakstīt skaitlim galā ciparu n nozīmē pareizināt šo skaitli ar 10 un rezultātam pieskaitīt n, tātad varam rakstīt

$$10A+n=13\cdot A \text{ jeb } n=3A$$

Tā kā n ir cipars, tad pastāv šādi varianti:
1) n=0, A=0, tas neder, jo ciparu virkne 00 netiek uzskatīta par skaitli,
2) n=3, A=1, tas der, jo 13 ir 13 reizes lielāks par 1,
3) n=6, A=2, der,
4) n=9, A=3, der.
Ja A≥4, tad n≥12, tā nedrīkst būt, jo n ir cipars. Tātad skaitlis A varēja būt 1, 2 vai 3.

4.6. Divi iespējamie atrisinājumi parādīti 15. zīm.



15. zīm.

4.7. Apzīmēsim skaitļus ar a, b, c, d, e, bet to summu ar S. No dotā seko, ka

$$a=S-a$$
$$b=S-b$$
$$c=S-c$$
$$d=S-d$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam S=5S-S, no kurienes 3S=0 un S=0. No vienādības a=0-a seko, ka a=0, līdzīgi iegūstam, ka b=c=d=e=0.

4.8. Sauksim talonus, kam visu ciparu summa ir 18, par ziliem, bet talonus, kam divu pirmo ciparu summa vienāda ar divu pēdējo ciparu summu – par sarkaniem. Protams, ir taloni, kas vienlaicīgi ir gan zili, gan sarkani, piemēram, 4545.
Izrakstīsim kolonnā visu zilo talonu numurus. Pieņemsim, ka $\overline{abcd}$ ir viens no tam. Uzrakstīsim tam blakus $\overline{ab(9-c)(9-d)}$. Tā kā $\overline{abcd}$ ir zila talona numurs, tad a+b+c+d=18 jeb a+b=9-c+9-d, tātad $\overline{ab(9-c)(9-d)}$ ir sarkana talona numurs. Acīmredzams, ka blakus dažādiem zilo talonu numuriem tiek uzrakstīti dažādi sarkano talonu numuri. Apzīmējot zilo talonu skaitu ar z, bet sarkano – ar s, varam rakstīt

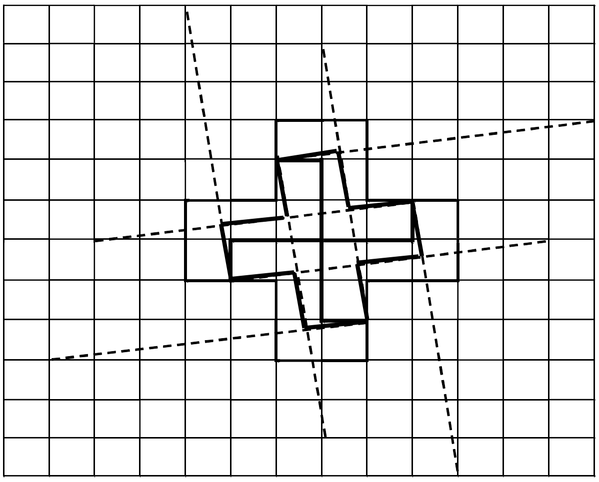
$$z\le s$$

Analoģiskā veidā tiek pierādīts, ka šādas operācijas gaitā blakus sarkana talona numuram tiek pierakstīts zila talona numurs, turklāt blakus dažādiem numuriem tiek pierakstīti dažādi numuri. Tāpēc

$$s\le z$$

No šīm nevienādībām seko, ka z=s, k.b.j.

4.9. Vienu no sagriešanas iespējām skat. 16. zīm. Pierādījums, tam, ka centrālā daļa arī ir '"krusts" un no četrām pārējām daļām var salikt tādu pašu "krustu", tiek veikts, pierādot atbilstošo taišņu perpendikularitāti, leņķu un saliekot saskarošos nogriežņu vienādību; šie pierādījumi balstās uz zīmējumos redzamo daudzo taisnleņķa trijstūru vienādībām vai līdzībām.



16. zīm.

4.10. Bērniem ir augstākais divi dažādi vecumi, pretējā gadījumā varētu atrast trīs bērnus, starp kuriem nav divu viena vecuma bērnu, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tā kā 25 ir nepāra skaitlis, tad vai nu zēnu, vai meiteņu ir vismaz 13. Pieņemsim, ka tie ir zēni (meiteņu gadījumā spriedums ir analoģisks). 13 zēnu vidū var atrast vismaz 7 viena vecuma zēnus. Ja starp šiem zēniem būtu ne vairāk kā 2 zilacaini, 2 brūnacaini un 2 pelēkacaini zēni, tad kopā mēs iegūtu ne vairāk kā 6 zēnus, tas nozīmē, ka šo 7 zēnu vidū ir vismaz 3 ar vienādu acu krāsu. Tie arī ir mūsu meklējamie 3 bērni.

4.11. Katram daudzstūrim visām malām, izņemot vienu, viena virsotne apzīmēta ar pāra, bet otra – ar nepāra skaitli. Izņēmums ir mala, kuras vienā virsotnē ir 1, bet otrā – 35, sauksim šādu malu par īpašu. Iegūtajai daudzstūru kaudzei ir 35 skaldnes, no tā, ka īpašo malu pavisam ir 33, seko, ka kaudzē atradīsies vismaz 2 tādas skaldnes, uz kurām "neiziet" neviena īpašā mala. Apskatīsim vienu no šīm skaldnēm un tās malās esošo virsotņu stabiņus. Katrā stabiņā ir 33 skaitļi, abos kopā – 66 skaitļi. No šiem 66 skaitļiem 33 skaitļi ir pāra skaitļi, bet 33 – nepāra. Tā kā nepāra skaitļu daudzums ir nepāra skaitlis, tad vienā virsotņu stabiņā nepāra skaitļu ir nepāra skaits (tātad skaitļu summa šajā stabiņā ir nepāra skaitlis), bet otrā stabiņš nepāra skaitļu ir pāra skaits (tātad skaitļu kopsumma ir pāra skaitlis). Tas nozīmē, ka abas šīs summas nevar būt vienādas.

4.12. Tā kā $365 \cdot 7 = 2555$, tad 7 gados ir vismaz 2555 dienas (neņemot vērā garos gadus). Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: ka šajā laika posmā josta vēl nebūs noausta. Tā kā katrā nākošajā dienā slinkā mātes meita noauž īsāku jostas gabalu nekā iepriekšējā, tad pēdējā dienā noteikti noausts mazāk nekā $\frac{50m}{2555} < \frac{1}{50}m$ jostas. No otras puses, tā kā visās dienās, izņemot pēdējo, kopā noausts x *m*, kur x<50, tad pēdējā dienā jānoauž $\frac{1}{x}m$, un $\frac{1}{x} > \frac{1}{50}$, jo x<50. Iegūtā pretruna pierāda, ka mūsu pieņēmums ir bijis aplams.

5. nodarbības atrisinājumi

5.1. Mārtiņam papildus uzdoti 27-5=22 jautājumi. Tie uzdoti ik pa diviem par katru nepareizu atbildi. Tātad pareizo atbilžu un līdz ar to arī Mārtiņa iegūto punktu skaits ir 22:2=11.

5.2. Nē, tāda skaitļa nav. Pieņemsim pretējo – ka tāds skaitlis A pastāv. Pirmais nosacījums apgalvo, ka to var izsacīt kā
(1) $A=26\cdot n+19$, n – vesels skaitlis,
bet otrais – ka to var izsacīt kā
(2) $A=39\cdot k+21$, k vesels skaitlis.
No (1) seko, ka A, dalot ar 13, dod atlikumu 6, jo $A=13(2n+1)+6$, no (2) seko, ka A, dalot ar 13, dod atlikumu8, jo $A=13(3k+1)+8$. Šie fakti ir pretrunā viens ar otru, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

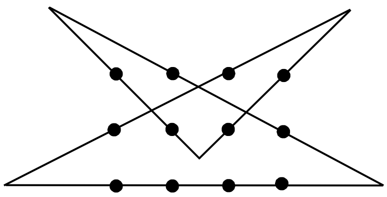
5.3. Skaidrs, ka mazākā no summas vērtība var būt 2, bet lielākā – 14. Šajās robežās atrodas tikai divi kvadrāti, 4 un 9, tas nozīmē, ka zem cipara 7 var būt ierakstīts tikai cipars 2, zem cipara 6 – tikai 3, zem 5 – tikai 4, bet zem 4 – tikai 5. Lai kuru no atlikušajiem cipariem 1, 6 vai 7 rakstītu zem cipara 1, summā neiznāks ne 4, ne 9, tātad uzrakstīt otru skaitļu rindu šajā gadījumā nav iespējams.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4

17. zīm.

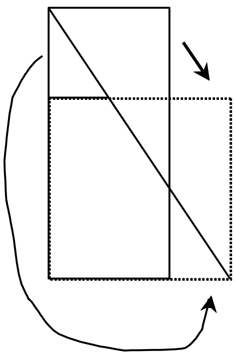
Gadījumā ar 12 skaitļiem to var panākt, piemēram, 17. zīm. attēlotajā veidā.

5.4. Piemēram, tā, kā parādīts 18. zīm.



18. zīm.

5.5. Piemēram, tā, kā parādīts 19. zīm.



19. zīm.

5.6. saskaitīsim, cik apskatāmie skaitļi beidzas ar ciparu 1. Pirmo šāda skaitļa ciparu varam izvēlēties 8 veidos, tas var būt 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vai 9. Otro ciparu varam izvēlēties vairs tikai 7 veidos, trešo – 6 veidos utt. Tātad ar ciparu 1 beidzas $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ skaitļi. Analoģiski iegūstam, ka $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ skaitļi beidzas ar ciparu 2, $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ skaitļi beidzas ar ciparu 3, …, $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ skaitļi beidzas ar ciparu 9. Tātad visu šos skaitļu summas pēdējais cipars būs vienāds ar izteiksmes $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1(1+2+3+4+5+6+7+8+9)$ pēdējo ciparu. Tā kā reizinājumā ietilpst gan 5, gan pāra skaitlis 2, tad šis cipars ir nulle.

5.7. Izdarām divas svēršanas:

1) uz kreisā kausa liekam 2 kap. un 3 kap. monētas, uz labā – 5 kap. monētu.

2) uz kreisā 1 kap. un 2 kap., uz labā – 3 kap. monētas.

Ja kādā no šīm svēršanām svari atrodas līdzsvarā, tad viltota ir monēta, kas attiecīgajā svēršanā nolikta malā.

Apskatām gadījumu, kad nevienā no svēršanām svari nav līdzsvarā, iespējami četri gadījumi:

a) $2+3<5$ un $1+2<3$, 2 kap. monēta ir vieglāka, tātad viltota.

b) $2+3<5$ un $1+2>3$, 3 kap. monēta ir vieglāka.

c) $2+3>5$ un $1+2<3$, 3 kap. monēta ir smagāka.

d) $2+3>5$ un $1+2>3$, 2 kap. monēta ir smagāka.

Nevienā no šiem gadījumiem 1 kap. un 5 kap. monētas nevarēja būt viltotas, pretējā gadījumā, kādā no svēršanas reizēm svari atrastos līdzsvarā.

5.8. Uzrakstīsim skaitļu virkni no otra gala un nosauksim 1990-o skaitli par pirmo, 1989-o skaitli par otro, …, pirmo – par 1990-o. Tad uzdevums skanēs šādi: skaitļu virknē pirmais skaitlis ir 10, otrais nav negatīvs, bet katrs nākošais vienāds ar abu iepriekšējo starpības moduli. Zināms, ka 1990-ais (pēdējais) skaitlis nav mazāks ne par vienu citu. Atrast šo pēdējo skaitli.

Atcerēsimies, ka, ja a un b ir nenegatīvi skaitļi, tad $|a-b|$ nepārsniedz lielāko no skaitļiem a un b. Apzīmēsim virknes otro locekli ar x un šķirosim gadījumus:

1) $x=0$, tad virkne ir 10; 0; 10; 0; 10; 0; …

2) $x=10$, tad virkne ir 10; 10; 0; 10; 10; 0; 10; …

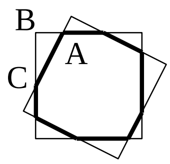
3) $0<x<10$, tad virknes trešais loceklis ir $|x-10|=10-x$, tātad atrodas starp 0 un 10, tas nozīmē, ka arī virknes ceturtais, piektais utt locekļi ir mazāki nekā 10 jeb mazāki par virknes pirmo locekli, tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

4) $x>10$, apzīmējam $x=10+a$, $a>0$. Spriežot par virknes tālākajiem locekļiem, iegūsim, ka tie visi, arī pēdējais, ir mazāki par virknes otro locekli, atkal pretruna.

Tātad iespējami ir tikai pirmie divi gadījumi, katrā no tiem 1990. loceklis (dotajā uzdevumā tas ir pirmais) ir vienāds ar 10.

5.9. Aplūkosim 20. zīm. No trijstūra nevienādības izriet $AB+BC>AC$. Uzrakstot šādas nevienādības visiem astoņiem zīmējumā redzamajiem taisnleņķa trijstūriem un saskaitot, iegūstam, ka

$P>p$, (1)



20. zīm.

kur P – ārējā kontūra garums, bet p– iekšējā kontūra garums (iezīmēts ar biezu līniju). Bez tam

$P+p=8$ (2)

No (1) un (2) seko

$$2p<8 \text{ jeb } p<4,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

5.10. Trīsciparu skaitlim $\overline{abc}$ ir spēkā vienādība $\overline{abc}=100a+10b+c=(a-b+c)+11(9a+b)$. Skaidrs, ka $\overline{abc}$ dalīsies ar 11 tad un tikai tad, ja a-b+c dalīsies ar 11. Līdzīgi iegūstam, ka četrciparu skaitlis $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=(-a+b-c+d)+11(91a+9b+c)$ dalās ar 11 tad un tikai tad, ja -a+b-c+d dalās ar 11. Aplūkosim 21. zīm. tabulu.

e	f	g	h
i	j	k	l
p	r	s	t

21. zīm.

Skaidrs, ka minētos trīsciparu un četrciparu skaitļus varam aizstāt ar izteiksmēm $S_1=e-i+p$; $S_2=f-j+r$; $S_3=g-k+s$; $S_4=h-l+t$; $S_5=-e+f-g+h$; $S_6=-i+j-k+l$; $S_7=-p+r-s+t$. Viegli pārbaudīt, ka $S_1-S_2+S_3-S_4+S_5-S_6+S_7=0$. Ja, piemēram, ir zināms, ka S_2, S_3, …, S_7 dalās ar 11, tad arī $S_1=S_2-S_3+S_4-S_5+S_6-S_7$ dalās ar 11. Līdzīgi spriežam arī pārējos gadījumos.

5.11. Attēlosim spēlētājus ar punktiem, bet to savstarpējās spēles ar – līnijām. No katra punkta var novilkt līniju uz 5 citiem, tātad līniju ir $6·5:2=15$ (jādala ar 2, jo katrs punkts tiek ieskaitīts vienu reizi kā līnijas sākumpunkts, bet oru – kā līnijas beigas). Ja katram spēlētājam būtu ne vairāk kā 2 uzvaras, tad kopējais uzvaru skaits būtu $2·6=12<15$, tātad ir vismaz viens spēlētājs, kuram ir 3 uzvaras. Apzīmēsim šo uzvarētāju ar burtu A, viņa zaudētājus – ar B, C un D, bet atlikušos divus spēlētājus – ar E un F. Tā kā neizšķirtu nav, tad vai nu E ir uzvarējis F, vai otrādi. Tas nozīmē, ka pirmajā gadījumā par spēlētājiem M un N varam izvēlēties A un E, pretējā gadījumā izvēlamies spēlētājus A un F.

5.12. To var izdarīt tā, kā parādīts 22. zīm.

$$\begin{array}{lr} & 179 \\ \times & 224 \\ \hline & 716 \\ & 358 \\ & 358 \\ \hline & 40096 \end{array}$$

22. zīm.