"Profesora Cipariņa klubs" 1984./85. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Apzīmēsim zvaigznītes ar burtiem tā, kā tas ir parādīts 38. a. zīm.

$$\begin{array}{cccc} & & a & b \\ \cdot & & 2 & c \\ \hline & & d & e \\ & f & 2 & \\ \hline g & h & i & j \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 4 & 6 \\ \cdot & & 2 & c \\ \hline & & d & e \\ & 9 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & i & j \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 4 & 6 \\ \cdot & & 2 & 2 \\ \hline & & 9 & 2 \\ & 9 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

38. a zīm. 38. b zīm. 38. c zīm.

Pēc saskaitīšanas operācijas cipars f pārtop par divciparu skaitli, tā kā, saskaitot d un 2, pārnesumā var iegūt augstākais 1, tad ir tikai viena iespēja – f=9, g=1, h=0, līdz ar to a=4, b=6 (skat. 38. b zīm.). Ja c=1, tad d=4, bet 4+2=6 (nav pārnesuma uz nākošo šķiru), ja c≥3, tad reizināšanā tiks iegūts nevis divciparu, bet gan trīsciparu skaitlis, tātad c=2, d=4, e=j=2, bet i=1 (skat. 38. c zīm.).

1.2. Ieviesīsim apzīmējumu $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1983}+\frac{1}{1984}$ un atņemsim izteiksmes vienu no otras

$$\frac{1}{1984}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1983}+\frac{1}{1984}\right)-\frac{1}{1985}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}\right)=$$

$$=\frac{a}{1984}-\frac{a}{1985}-\frac{1}{1985^2}=\frac{a}{1984\cdot 1985}-\frac{1}{1985^2}=\frac{1}{1985}\left(\frac{a}{1984}-\frac{1}{1985}\right)$$

Tātad, lai noskaidrotu, kurai izteiksmei ir lielāka vērtība, pietiek noskaidrot, kuras daļas vērtība ir lielāka: $\frac{a}{1984}$ vai $\frac{1}{1985}$. Tā kā a>1, bet 1984<1985, tad $\frac{a}{1984}>\frac{1}{1985}$, no kā seko, ka

$$\frac{1}{1984}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1983}+\frac{1}{1984}\right)>\frac{1}{1985}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}\right).$$

1.3. Reizinājums ir pāra skaitlis, ja kāds no reizinātājiem ir pāra skaitlis. Ievērosim, ka gan pirmajā, gan otrajā rindā ir 4 pāra un 5 nepāra skaitļi. Saskaņā ar Dirihlē principu divi nepāra cipari būs viens zem otra, jo zem pirmās rindas pāra cipariem kopumā var novietot tikai četrus nepāra ciparus. Tātad vienas starpības vērtība noteikti būs pāra skaitlis, jo tiks atņemti vienādas paritātes skaitļi, un starpību reizinājums arī būs pāra skaitlis.

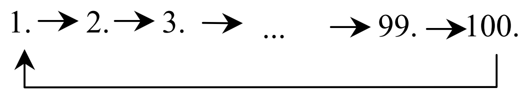
Reizinājums nevar būt 528, jo $528=2^4\cdot 3\cdot 11$, tas nozīmē, ka vienas starpības vērtībai ir jābūt vienādai ar 11 daudzkārtni, kas nav vienāds ar 0, taču starpības locekļi nav mazāki par 1 un nav lielāki par 9 un starpība ir robežās no 1 līdz 8, bet neviens no šiem skaitļiem ar 11 nedalās.

1.4. Ja no punkta A iziet pa vienu meridiānu un atgriežas pa citu, tad par punktu A der tikai Ziemeļpols.

Iziešanas un ieiešanas meridiāni var sakrist tikai tad, ja ejot 100 metrus uz austrumiem, atkal atgriežas tajā punktā B, kurā nonāk, ejot no A 100 metrus uz dienvidiem, tātad no punkta B pa paralēli ir apiets "apkārt Zemeslodei" vienu vai vairākas reizes.

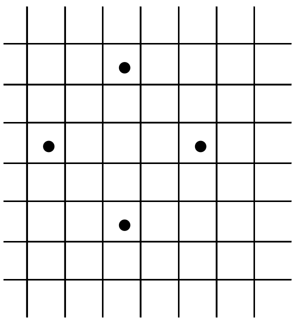
Tātad citi mūs interesējošie punkti izvietojas uz paralēlēm, kas atrodas 100 m uz ziemeļiem no tām Dienvidpola apkārtnē esošajām paralēlēm, kuru garumi ir 100m, $\frac{100}{2}$ m, $\frac{100}{3}$ m, …, $\frac{100}{n}$ m, … .

1.5. Katrai valodai ir jāparādās kā valodai, no kuras tulko, pretējā gadījumā no tās neko nevarēs pārtulkot, tātad vismaz 100 vārdnīcas vajag. To, ka ar 100 vārdnīcām pietiek, var redzēt 39. zīm.



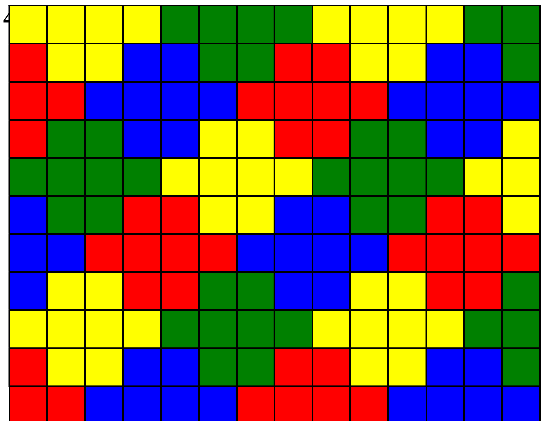
39. zīm.

1.6. Ja mēģināsim iztikt ar trim krāsām tad divas no 40. zīm. attēlotajām rūtiņām būs vienā krāsā, bet tā kā attālums starp jebkurām divām no tām ir 4, tad rodas pretruna ar uzdevuma prasībām. Tātad ir nepieciešamas vismaz 4 krāsas.



40. zīm.

Viens no iespējamiem krāsojumiem ir attēlots 41. zīm., attālumi starp viena bloka rūtiņām ir mazāki nekā 4, bet attālumi starp vienas krāsas blokiem ir lielāki nekā 4.

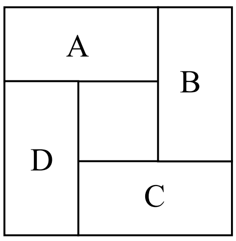


41. zīm.

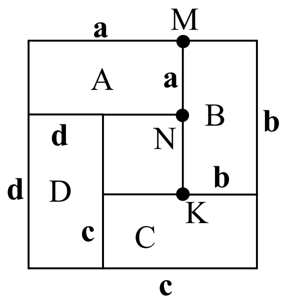
2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Izmantosim sekojošu skaitļu dalāmības pazīmi: **skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9.**
Skaitļa 1985 ciparu summa ir 1+9+8+5=23, tātad katru reizi pierakstot iepriekšējam skaitlim galā 1985 mēs palielinām tā ciparu summu par 23. Tas nozīmē, ka mums ir jāatrod tāds skaitļa 23 daudzkārtnis ($23\cdot k$), kas dalās ar 9. Tā kā 23 ir pirmskaitlis, tad mazākais iespējamais daudzkārtnis ir, ja $k=9$, tad iegūstam skaitli 1985**1985**1985**1985**1985**1985**1985**1985**1985, tā ciparu summa ir $23\cdot 9$, tātad tas noteikti dalās ar 9.

2.2. Apzīmēsim taisnstūrus ar A, B, C un D (skat. 42. a zīm.). Pieņemsim, ka tie ir kvadrāti un to malu garumi ir attiecīgi a, b, c un d. No 42. b zīmējuma redzams, ka $a<b$, jo $a=MN<MK=b$. Līdzīgi iegūstam, ka $b<c$, $c<d$, $d<a$.



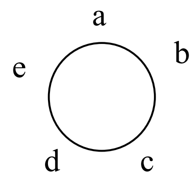
42. a. zīm.



42. b zīm.

Pārrakstot visas nevienādības vienā rindā, redzam, ka **a**$<b<c<d<$**a,** rodas pretruna, tātad visas šīs daļas nevar būt kvadrāti.

2.3. Ievērosim, ka skaitļus a, b, c, d un e var iztēloties uzrakstītus pa aploci (skat. 43. zīm.). Tad apskatāmā summa ir visu blakus stāvošo skaitļu pāru reizinājumu summa.



43. zīm.

No šejienes viegli saprast, ka summa nemainās, ja visus skaitļus pārbīda par 1 pozīciju pulksteņa rādītāja kustības virzienā (b vietā ieraksta a, c vietā b, d vietā c, e vietā d, a vietā e). Šādu pārbīdīšanu var izdarīt vairākkārt. Tāpēc jebkuram skaitļu izvietojumam mēs varam šādu ciklisku pārbīdīšanu izdarīt tik ilgi, kamēr vieninieks nonāk pozīcijā a: apskatāmās summas vērtība no tā nemainās. Tātad mēs varam meklēt lielāko summu starp tām summām, kur $a=1$. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam, ka izteiksmes lielākā vērtība ir 48 (piemēram, ja $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=5$, $e=3$).

2.4. Lai katrs muzikants no zāles būtu dzirdējis katru citu, pietiek ar 4 koncertiem.

Apzīmēsim muzikantus ar A, B, C, D, E, F un koncertus ar 1., 2., 3. 4. Viens no iespējamiem koncerta organizācijas veidiem varētu būt sekojošais:
1. koncertā uzstājas A, B, C un klausās D, E, F;
2. koncertā uzstājas A, D, E un klausās B, C, F;
3. koncertā uzstājas B, D, F un klausās A, C, E;
4. koncertā uzstājas C, E, F un klausās A, B, D.
Tabulas iesvītrotās rūtiņas norāda muzikantu uzstāšanos.

	A	B	C	D	E	F
1.						
2.						
3.						
4.						

Redzam, ka jebkuros divos koncertos pavisam ir uzstājušies tieši 5 dažādi muzikanti. Tā kā katrs muzikants tieši 2 koncertos sēž malā, tad šajos 2 koncertos viņš noklausās pārējos 5 muzikantus.
Pierādīsim, ka ar mazāk nekā 4 koncertiem nevar iztikt.
Teiksim, ka klausītājs uztver mūzikas vienību, ja viņš noklausās vienu citu muzikantu. Nav grūti pārliecināties, ka maksimālais mūzikas vienību skaits, kas var tikt uztverts viena koncerta laikā ir $3+3+3+=3\cdot3=9$ (trīs muzikanti klausās trijus pārējos. Katram muzikantam jānoklausās visi savi biedri, tātad viņam kopumā ir jāuztver 5 mūzikas vienības. Tāpēc kopumā muzikantiem jāuztver $6\cdot5=30$ mūzikas vienības. Trīs koncertos maksimālais uztveramais mūzikas vienību skaits vienāds ar $3\cdot9=27$. Bet $27<30$, tāpēc nepieciešams vēl vismaz viens – ceturtais koncerts.

2.5. Ievērosim, ka skaitļi 13, 15 un 17, dalot ar 3, dod atlikumā attiecīgi 1, 0 un 2. Ja satiekas divi vienas krāsas hameleoni, tie krāsu nemaina. Tāpēc nemainās to skaits grupā un līdz ar to arī atlikums, ko iegūst, dalot ar 3. Aplūkosim, kādus atlikumus dod hameleonu skaits dažādās krāsu grupās pēc pirmās satikšanās. Dažādu krāsu hameleoni var satikties 3 veidos: a) baltais ar sarkano hameleonu, b) baltais ar zaļo hameleonu, c) sarkanais ar zaļo hameleonu.

	baltie	sarkanie	zaļie
sākotnējā skaita atlikums, dalot ar 3	1	0	2
a) gadījums	0	2	1
b) gadījums	0	2	1
c) gadījums	0	2	1

Ievērosim, ka visos gadījumos iegūtie atlikumi sakrīt un tāpat kā sākumā satur visus atlikumus 0; 1; 2, tikai citā kārtībā. Tāpēc, ja aplūkotu atlikumu tabulas vēl pēc 2., 3. tikšanās utt., atkal iegūtu tos pašus atlikumus, tikai, varbūt, citā kārtībā. Skaitļi 45, 0, 0, dalot ar 3, dod vienādus atlikumus 0, tāpēc nav iespējams, ka uz salas visi hameleoni ir vienā krāsā.

2.6. Apzīmēsim grāmatas ar skaitļiem 1; 2; …; 8. Pārkārtosim pretējā kārtībā nevis grāmatas, bet gan skaitļu virknīti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Skaitļus, kuri tiks pārvietoti, izcelsim, bet vietu, kurā tie tiks likti, apzīmēsim ar *.

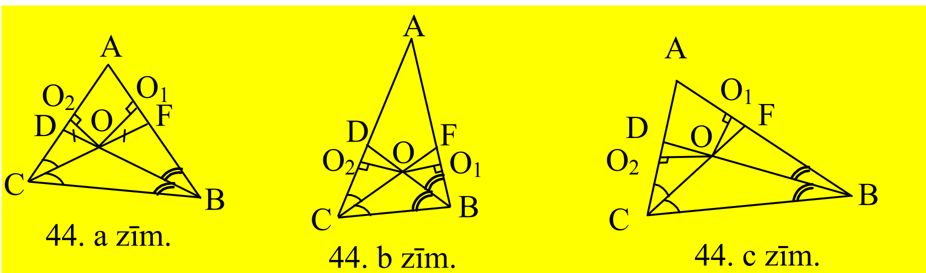
*1, 2, 3, 4, 5, **6**, **7**, **8** ⇒ *6, 7, 8, 1, 2, **3**, **4**, **5** ⇒ *3, 4, 5, 6, 7, **8**, **1**, **2**, ⇒
⇒ 8, **1**, **2**, **3**, 4, 5, 6, 7* ⇒ 8, **4**, **5**, **6**, 7, 1, 2, 3* ⇒ 8, 7, **1**, **2**, **3**, 4, 5, 6* ⇒
⇒ 8, 7, **4**, **5**, **6**, 1, 2, *3 ⇒ 8, 7, **1**, **2**, **4**, 5, 6, *3 ⇒ 8, 7, *5, **6**, **1**, **2**, 4, 3 ⇒
⇒ 8, 7, 6, 1, *2, **5**, **4**, **3** ⇒ 8, 7, 6, **1**, **5**, **4**, 3, 2* ⇒ 8, 7, 6, **3**, **2**, **1**, 5, 4* ⇒
⇒ 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

3. nodarbības atrisinājumi

3.1. Konstruēsim no punkta O pret malām AB un AC perpendikulus OO_1 un OO_2. Ja kāds no punktiem O_1 un O_2 sakrīt atbilstoši ar F vai D, tad trijstūrī ABC bisektrise ir arī augstums, un tas ir vienādsānu vai vienādmalu. Ja šādas sakrišanas nav, tad ir iespējami trīs atšķirīgi gadījumi, tie attēloti 44. a, b un c zīm. Visos gadījumos taisnleņķa trijstūri FO_1O un DO_2O ir vienādi ($FO=OD$ pēc dotā, $OO_1=OO_2$ kā ievilktas riņķa līnijas rādiusi). Tādēļ

$$\angle O_1FO=\angle O_2DO. \quad (1)$$

Turpmāk aplūkosim katru gadījumu atsevišķi.



44. a zīm. 44. b zīm. 44. c zīm.

a) Apskatām ΔCDB. $\angle O_1DB=\angle C+\angle DBC$ (trijstūra ārējā leņķa īpašība), līdzīgi iegūstam, ka $\angle O_2FC=\angle B+\angle FCB$, no (1) seko, ka

$$\angle C+\angle DBC=\angle B+\angle FCB$$

$$2\cdot\angle FCB+\angle DBC=2\cdot\angle DBC+\angle FCB$$

$$\angle FCB=\angle DBC \text{ jeb } \angle C=\angle B$$

Ja trijstūra leņķi pie pamata ir vienādi, tad trijstūris ir vienādsānu.

b) Apskatot trijstūrus DOC un FOB un pielietojot vienādību (1), iegūstam $\angle DCO=\angle FBO$ jeb $\angle C=\angle B$.

c) Apskatām ΔDOC un ΔFOB.

$$\angle CDO+\angle DCO=\angle BFO+\angle FBO$$

$$\angle CDO+\angle FCB=180°-\angle CDO+\angle FBO \quad (2)$$

Lietojot trijstūra ārējā leņķa īpašību ΔCFB un vienādību (1), iegūstam

$$\angle CDO=\angle O_1FC=\angle FCB+2\cdot\angle FBO \quad (3)$$

No (2) un (3) seko, ka

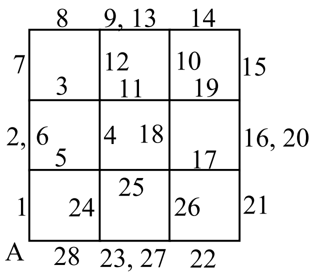
$$\angle FCB+2\cdot\angle FBO+\angle FCB=180°-(\angle FCB+2\cdot\angle FBO)+\angle FBO$$

$$3\cdot(\angle FCB+\angle FBO)\cdot 2:3=180°\cdot 2:3$$

$$2(\angle FCB+\angle FBO)=120°$$

$$\angle C+\angle B=120° \text{ jeb } \angle A=60°, \text{ k.b.j.}$$

3.2. Mazākais iespējamais attālums ir $28\cdot d$, un to iespējams nobraukt, piemēram, tā kā parādīts 45. zīm.



45. zīm.

Tā kā ceļš sastāv no 24 gabaliem tad mazāku attālumu nekā $24\cdot d$ mašīna veikt nevar. Nav grūti saprast, ka, asfaltējot dotos posmus pa gabaliem, mašīna nobraucamo attālumu nevar ietaupīt, tātad pagriezieni jāizdara tikai krustojumos. Katrā no punktiem, kas zīm. atzīmēti ar cipariem 1, 2, 3, …, 8, ieiet trīs ceļa gabali, tātad katrā no šiem krustpunktiem mašīna iebrauc un izbrauc vismaz divas reizes, pretējā gadījumā nebūtu iespējams noasfaltēt visus trīs ceļa gabalus. Otrās izbraukšanas laikā pa kādu gabaliņu nāksies braukt otrreiz. Varam teikt, ka visi krustojumi 1, 2, …, 8 ir galapunkti ceļa nogriežņiem, pa kuriem mašīna dodas divas reizes. Tā kā vienam nogrieznim var būt ne vairāk kā 2 galapunkti, tad būs vismaz 4 nogriežņi, pa kuriem tiks braukts divas reizes.

3.3. Parādīsim dažas iespējas

$$333333\cdot 3+\frac{3}{3}=1000000$$

$$333333\cdot 3+\frac{33}{33}=1000000$$

$$(333333\cdot 3+\frac{3}{3})\cdot\frac{3}{3}=1000000$$

$$333333\cdot 3+\frac{3}{3}+3-3=1000000$$

$(333333-3)\cdot 3+\frac{33-3}{3}=1000000$

$(333333+3)\cdot 3-3\cdot 3+\frac{3}{3}=1000000$

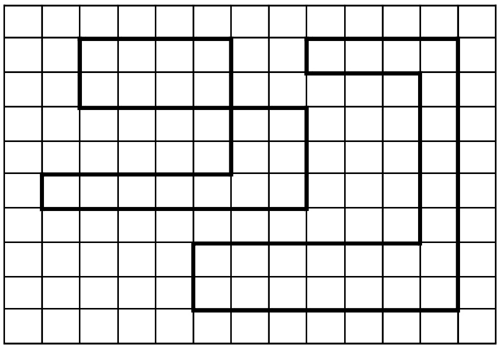
$(333333\cdot 3\cdot 3+3):3=1000000$

$(333333-\frac{3}{3})\cdot 3+3+\frac{3}{3}=1000000$

Doti 8 veidi, kā izteikt 1000000, izmantojot ne vairāk kā 12 trijniekus.

Skaitlis, kas sastāv tikai no trijniekiem, dalās ar 3. Ja skaitlim, kurš dalās ar 3, pieskaita vai atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad rezultāts dalās ar 3. ja skaitli, kurš dalās ar 3, reizina ar kādu skaitli, kurš dalās ar 3, tad reizinājums arī dalās ar 3. Tātad skaitliska izteiksme, kas sastāv tikai no trijniekiem, iekavām, reizināšanas, atņemšanas un saskaitīšanas zīmēm, dalās ar 3. Bet 1000000 ar 3 nedalās, tāpēc nelietojot dalīšanas zīmi, 1000000 nevar izteikt ne ar kādu trijnieku skaitu.

3.4. Ja lauztā līnija sastāv no 8 posmiem, iespējami ļoti daudzi atrisinājumi. Divi no tiem parādīti 46. zīm.

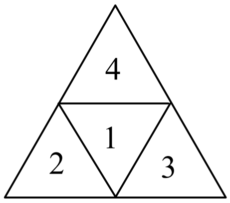


46. zīm.

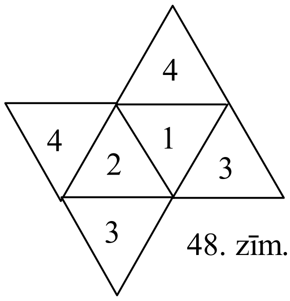
Ja lauztā līnija sastāv no 9 posmiem, tad šīs līnijas garums ir 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Ja lauztā līnija sastāv no 10 posmiem, tad šīs līnijas garums ir 55. Apskatīsim lauzto līniju vertikālā, vienu rūtiņu platā joslā. Tā kā lauztā līnija ir slēgta, tad katru šādu joslu tā šķērso pāra skaitu reižu. Tātad visu horizontālo posmu garumu summa ir pāra skaitlis. Līdzīgi spriežot, iegūsim, ka visu vertikālo posmu garumu summa ir pāra skaitlis, tātad arī visas lauztās līnijas garums ir pāra skaitlis. Tas no zīmē, ka nav iespējams uzzīmēt nedz 9, nedz 10 posmu lauzto līniju.

3.5. Sanumurēsim piramīdas skaldnes ar cipariem no 1 līdz 4, un attiecīgajās figūrās tajos trijstūrīšos, kas pārklās 1. skaldni, rakstīsim ciparu 1, kas pārklās 2. skaldni – ciparu 2, utt. Lai trijstūrīšu skaits būtu pēc iespējas mazāks, katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu ir jāpārklāj katram cita skaldne.

Pierādīsim apgalvojumu: ja figūra sastāv no 6 trijstūrīšiem, tad, salokot to, nevar iegūt prasīto piramīdas pārklājumu.



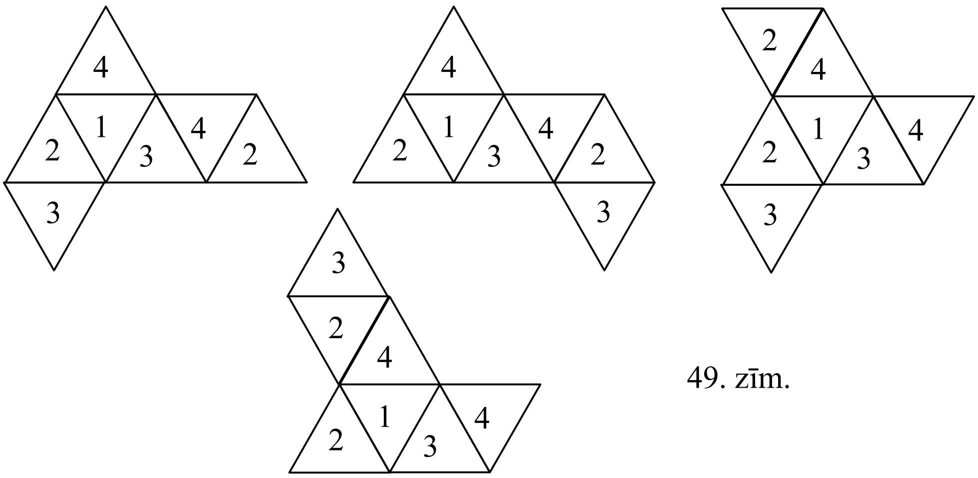
47. zīm.



48. zīm.

Tā kā trijstūrīšos jāieraksta 4 dažādi cipari, tad vismaz 2 no tiem (1 un 2) būs tikai vienā trijstūrītī. Trijstūrītim ar ciparu 1 ir jābūt kopīgai malai ar trijstūrīšiem, kuros ierakstīti cipari 2, 3 un 4, tātad figūra satur 47. zīm. attēloto fragmentu. Arī trijstūrītim ar ciparu 2 ir jāpieskaras ar malu pie trijstūrīšiem ar cipariem 3 un 4, turklāt ir tikai viens veids kā tos piezīmēt klāt (48. zīm.). Tā kā trijstūrīšiem, kuros ierakstīti cipari 3 un 4, nav kopīgas malas, tātad, salokot figūru, iegūsim vaļēju šķautni, k.b.j.

Pārbaudot visas iespējamās septiņu trijstūrīšu figūras, iegūstam, ka citu, bez 49. zīm. parādītajām figūrām, nav.



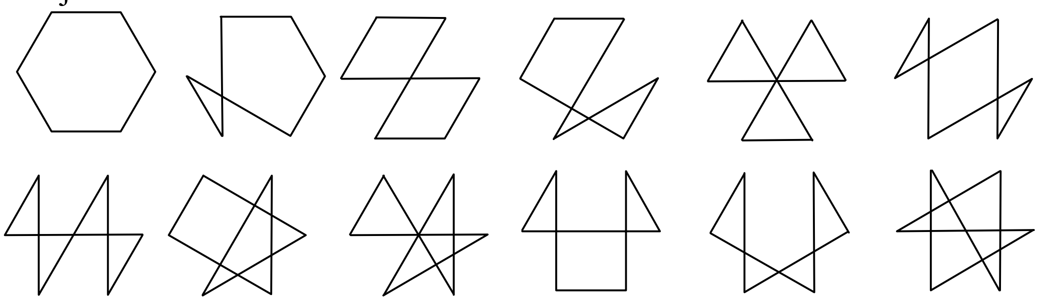
49. zīm.

3.6. Lētākais veids V ir šāds: BBBABABBAABBAB. Automāts A tiek lietots 5 reizes, bet automāts B – 9 reizes, tātad darbību izpildīšana maksā $5\cdot5+9\cdot2=43$ kapeikas. Ievērosim, ka skaitli, kas dalās ar 3, var iegūt tikai ar automāta A palīdzību (izņēmums ir skaitlis 3). Iedomāsimies, ka eksistē vēl lētāks skaitļa 1985 iegūšanas veids L. Salīdzinot veidus V un L no beigām, iegūstam, ka pirmā atšķirīgā rindiņa tajos būs pirms skaitļa, kas dalās ar 3. No beigām skaitot, pēdējo skaitli, kas abos variantos sakrīt, apzīmēsim ar n.

n	Cik kapeiku V veidā tiek iztērēts, lai no 1 iegūtu n	Cik kapeiku tiek iztērēts, lai no n iegūtu 1985 (V un L veidos vienādi)
1983	41	2
657	32	11
219	27	16
69	18	25
21	11	32

Tā kā V atšķiras no L, tad skaitlis n abos variantos no skaitļa 1 iegūts dažādi. Variantā L, lai no 1 iegūtu skaitli n, vismaz 1 reizi būs jālieto automāts A (ja lietotu tikai B automātu, tad tiktu iztērēta $n-1$ kapeika, tātad vairāk nekā variantā V). Variantā L skaitlis n ir iegūts no skaitļa $n-2$, skaitlis $n-2$ noteikti iegūts no skaitļa $n-4$, kurš, savukārt, varēja tikt iegūts tikai no skaitļa $n-6$. Tā kā n dalās ar 3, tad arī $n-6$ dalās ar 3, no šejienes seko, ka $n-6$ iegūšanai varēja lietot gan B, gan A automātu. Turpinot līdzīgus spriedumus, iegūstam, ka ir tādi skaitļi m un k, ka variantā L no m ar automātu A tika iegūts skaitlis s ($s=3m$), no kura 3k reizes lietojot automātu B, tika iegūts skaitlis n ($n=s+3k\cdot 2=3(m+2k)$). Šo operāciju veikšana maksā $5+3k\cdot 2=5+6k$ kapeikas. Ja skaitlim m vispirms k reizes pieskaita 2 un rezultātu reizina ar 3, arī iegūst n, šoreiz iztērējot $5+2k$ kapeikas. Tā kā $5+2k<5+6k$, tad variants L nevar būt lētākais.

3.7. Analizējot visus gadījumus, iegūstam, ka var būt tikai 50. zīm. redzamās lauztās līnijas.



50. zīm.

3.8. $5x-4y+3z-2u+v=5(x-y)+3(z-u)+y+u+v$ (1)

Ievērosim: $x-y\le 0$, $z-u\le 0$, $0\le y\le u\le v\le 10$. Ja katram izteiksmes (1) saskaitāmajam būs lielākā iespējamā vērtība, tad arī izteiksmei (1) būs lielākā iespējamā vērtība. Tātad jāņem $x=y=10$, $z=u=10$, $v=10$. Ievietojot atrastās mainīgo vērtības dotajā izteiksmē, iegūsim, ka tās lielākā iespējamā vērtība ir 30.

Pārveidosim doto izteiksmi par tai ekvivalentu izteiksmi (2):

$5x-4y+3z-2u+v=3(z-y)+(v-u)+5x-y-u$ (2)

Ievērosim, ka $z-y\ge 0$, $v-u\ge 0$, $x\ge 0$, $-y\ge -10$, $-u\ge -10$. Izteiksmes (2) katram saskaitāmajam būs mazākā iespējamā vērtība, ja $z-y=0$, $v-u=0$, $x=0$, $-y=-10$, $-u=-10$. Tas saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem sasniedzams, ja $x=0$, $y=z=v=u=10$.

Ievietojot atrastās mainīgo vērtības dotajā izteiksmē, iegūsim, ka dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir -20.

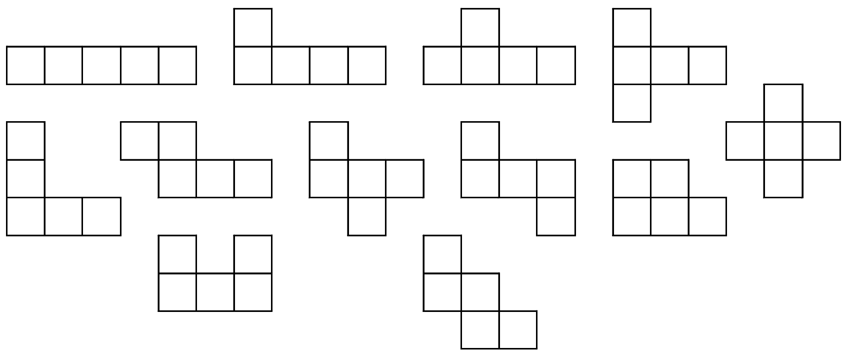
4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Teicamnieku skaits ir pieaudzis par $\frac{11}{100}n$, kur n ir teicamnieku skaits pagājušajā semestrī. Tā kā runa ir par skolēniem, tad $\frac{11}{100}n$ vērtība var būt tikai vesels skaitlis. Skaitļi 11 un 100 ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc $\frac{11}{100}n$ var būt vesels skaitlis tikai tad, ja n dalās ar 100, tātad n ir jābūt vismaz 100, taču klasē, acīmredzot, ir mazāk nekā 100 skolēni, tāpēc šāda situācija nav iespējama.

4.2. Ja uzvarētājam pirms skrējiena bija x rieksti, tad pēc skrējiena viņam bija jau x+x+x=3x rieksti. Ievērosim, ka pēc pēdējā skrējiena, vienīgi Mārtiņa riekstu skaits dalās ar 3 (6:3=2), tātad riekstu sadalījums pēc otrā skrējiena bija šāds: Mārtiņam bija 2 rieksti, Aivaram – 20+2=22 rieksti, bet Jurim – 4+2=6 rieksti. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūstam, ka pēc pirmā skrējiena situācija bija sekojoša: Jurim – 6:3=2 rieksti, Mārtiņam – 2+2=4 rieksti, bet Aivaram – 22+2=24 rieksti. Tātad pirmā skrējiena uzvarētājs bija Aivars, viņš no katra zēna saņēma 24:3=8 riekstus, tas nozīmē, ka pašā sākumā Aivaram bija 8 rieksti, Jurim – 10 rieksti un Mārtiņam – 12 rieksti.

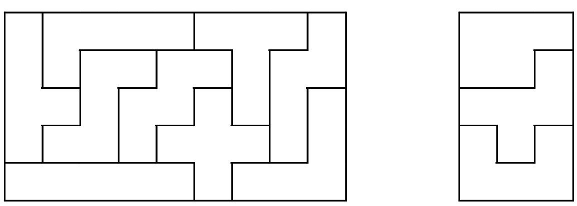
4.3. k-tajā reizē karalis pagriezīs visas tās atslēgas, kuru numuri dalās ar k. Tātad k-tajā reizē m-to atslēgu pagriezīs tad un tikai tad, ja dalās ar k. Secinām, ka m-to atslēgu pagriezīs tik reižu, ar cik skaitļiem no 1 līdz 1000 dalās skaitlis m.
nav grūti saprast, ka tās atslēgas, kuras pagrieztas pāra skaitu reižu, būs aizslēgtas, bet tās atslēgas, kuras pagriezīs nepāra skaitu reižu, būs atslēgtas. Tā kā m-to atslēgu pagriezīs tik reižu, ar cik skaitļiem m dalās, tad atslēgtas būs visas tās atslēgas, kuru numuriem ir nepāra skaits dalītāju. Tas nozīmē, ka atvērtas būs tieši tās atslēgas, kuru numuri ir naturālo skaitļu kvadrāti.
Ir zināms, ka $31^2=961$ un $32^2=1024$. Tātad atvērta būs 31 lāde.

4.4. Ir 12 dažādas figūras, kas sastāv no 5 kvadrātiņiem un kam izpildās aprakstītā īpašība (skat. 51. zīm.)



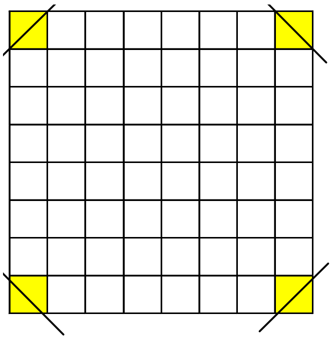
51. zīm.

Kā izveidot taisnstūrus, parādīts 52. zīm.

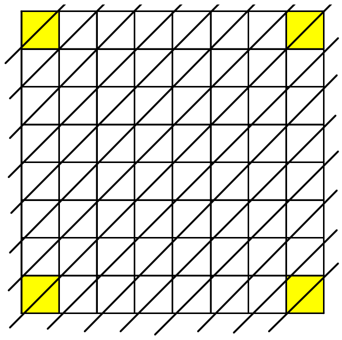


52. zīm.

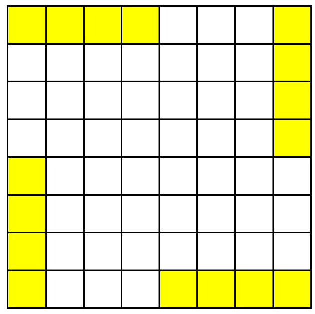
4.5. Caur katru stūra rūtiņu var novilkt taisni, paralēlu kādai no galdiņa diagonālē, tā, ka tā krusto tikai vienu rūtiņu (skat. 53. zīm.). Tātad visās stūra rūtiņās jābūt pa figūriņai. Caur visiem šaha galdiņa rūtiņu centriem var novilkt 15 dažādas, savā starpā paralēlas taisnes. Uz katras no tām jābūt vismaz vienai figūriņai. Uz trijām novilktajām taisnēm ir jau novietotas figūriņas (skat. 54. zīm.). Tātad jānovieto vēl ne mazāk kā 12 figūriņas, tas nozīmē, ka uz galdiņa jābūt vismaz 4+12=16 figūriņām.



53. zīm.



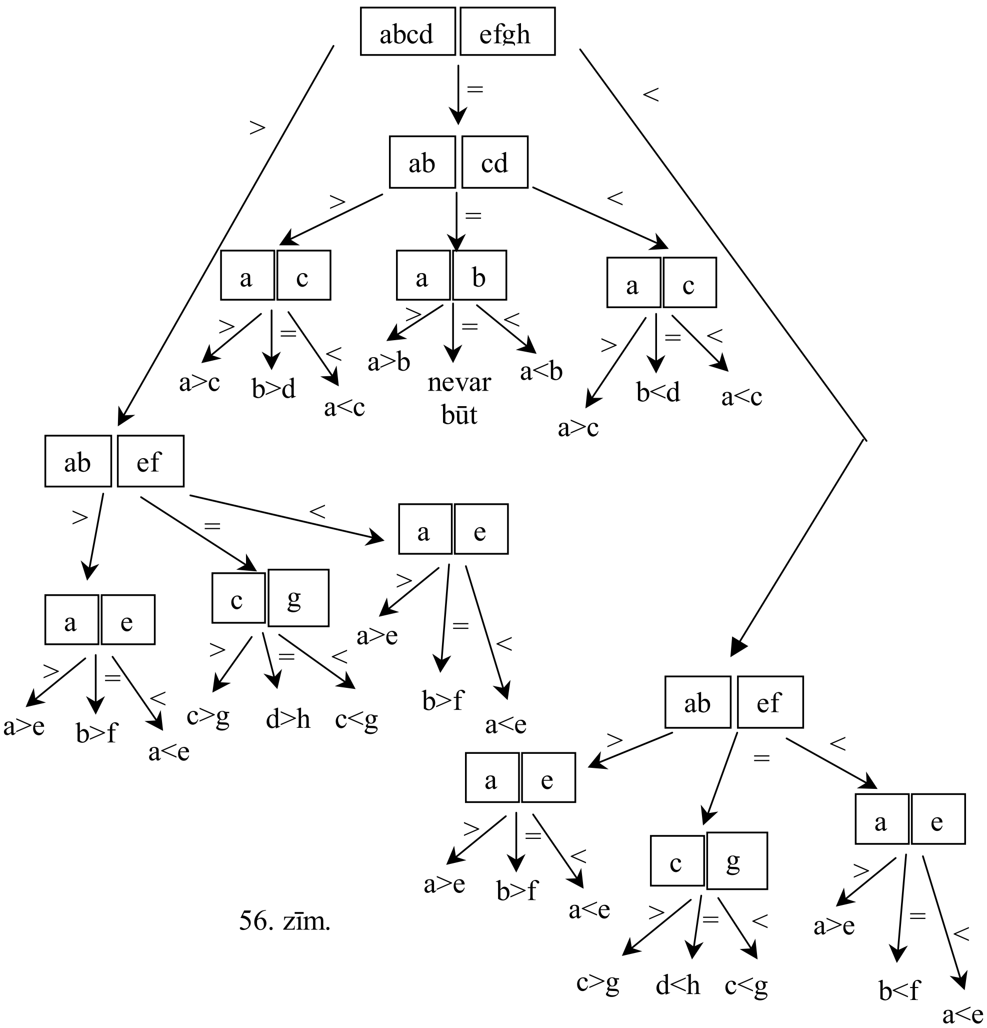
54. zīm.



55. zīm.

Kā izvietot 16 figūriņas atbilstoši uzdevuma prasībām parādīts 55. zīm.

4.6. Apzīmēsim monētas ar burtiem a, b, c, d, e, f , g un h. Uz viena svaru kausa liktās monētas ierakstīsim vien rūtiņā. Zīmi ">" lietosim, ja labais svaru kauss būs vieglāks, "<" – ja kreisais svaru kauss būs vieglāks, bet "=" – ja abi kausi būs līdzsvarā. Svēršanas gaita ir attēlota 56. zīm.



56. zīm.

5. nodarbības atrisinājumi

5.1. No tā, ka $31<32$ seko

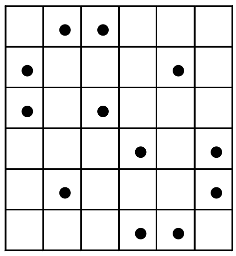
$31^{11}<32^{11}=2^{55}$ (1)

Savukārt $17>16$, tātad

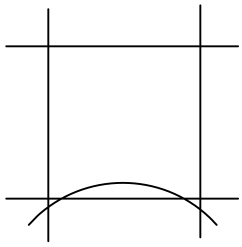
$17^{14}>16^{14}=2^{56}$ (2)

No izteiksmēm (1) un (2) izriet, ka $31^{11}<17^{14}$.

5.2. Lai uz katras horizontālas līnijas nebūtu atzīmēti vairāk kā divi punkti, tad kvadrāta katrā rindiņā nevar atzīmēt vairāk kā 2 punktus. Tātad kvadrātā, kas sastāv no 6×6 rūtiņām, nevar atzīmēt vairāk kā $6\cdot2=12$ punktus. Kvadrātā, kas sastāv no 6×6 rūtiņām, var atzīmēt 12 punktus tā, kā atzīmēts 57. zīm.



57. zīm.



58. zīm.

5.3. Pagriezīsim lapu tā, lai rūtiņu līnijas iet horizontāli un vertikāli. Novilksim taisni AB perpendikulāri horizontālajām rūtiņu līnijām tā, ka AB ir riņķa diametrs. Ne A, ne B neatrodas uz horizontālas rūtiņu līnijas, pretējā gadījumā, kāda no tām pieskartos riņķa līnijai un tas ir pretrunā ar doto. No tā, ka riņķa rādiuss ir 100 rūtiņas seko, ka starp punktiem A un B atrodas 200 horizontālas rūtiņu līnijas, katru no tām riņķa līnija krusto 2 reizes – $2\cdot200=400$ reizes. Līdzīgi iegūstam, ka arī vertikālās rūtiņu līnijas tiek krustotas 400 reizes, Tātad riņķa līnija $400+400=800$ reizes krusto rūtiņu līnijas.

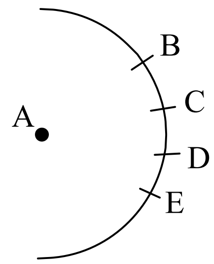
Tā kā riņķa līnija neiet ne caur vienas rūtiņas stūri, tad nekādas divas rūtiņu līnijas tā nekrusto vienlaicīgi, tas nozīmē, ka šķērsojot jaunu rūtiņu līniju, riņķa līnija šķērso arī jaunu rūtiņu. Ja riņķa līnija nevienā rūtiņā neieiet vairāk kā 1 reizi, tad rūtiņu skaits ir vienāds ar šķērsoto rūtiņu līniju skaitu, tas ir, 800 rūtiņas. Tomēr iespējama arī cita situācija, kad riņķa līnija vienā un tajā pašā rūtiņā nonāks divas reizes (skat. 58. zīm.) Tā kā riņķa līnijas rādiuss salīdzinājumā ar rūtiņas malas garumu, tad tāda rūtiņa var būt ne vairāk kā viena un kopējais šķērsoto rūtiņu skaits ir $800-1=799$.

5.4. Nē, nevar. Tā kā $100^2=10000$, tad visu skaitļu, kas mazāki par 100, kvadrāti ir mazāki par 10000 un nav piecciparu skaitļi. Zināms, ka $40^2=160000$, tāpēc skaitļu, kas lielāki par 400, kvadrāti ir lielāki par 160000 un nav piecciparu skaitļi. Apzīmēsim meklēto skaitli ar A, tas var būt tikai trīsciparu skaitlis, tāpēc izteiksim to sekojošā veidā $A=100a+10b+c$ (a, b, c, – viencipara skaitļi). Kāpināsim skaitli A kvadrātā:

$$A^2=100(100a^2+b^2+c20ab+2ac)+20bc+c^2$$

Skaidrs, ka A^2 pēdējais cipars ir tāds pats kā skaitļa c^2 pēdējais cipars un, saskaitot summas pēdējos ciparus pārnesumi nerodas. Secinām, ka c var būt tikai nepāra cipars. $100(100a^2+b^2+c20ab+2ac)$ priekšpēdējais cipars ir 0 un 20bc priekšpēdējais cipars ir pāra cipars, tātad c^2 priekšpēdējam ciparam jābūt nepāra. Skaitlis c ir viencipara skaitlis, pārbaudot visu nepāra viencipara skaitļu kvadrātus ($1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$, $9^2=81$) redzam, ka neviena nepāra viencipara skaitļa kvadrāta abi pēdējie cipari nav nepāra cipari. Tātad nevar atrast skaitli ar minēto īpašību.

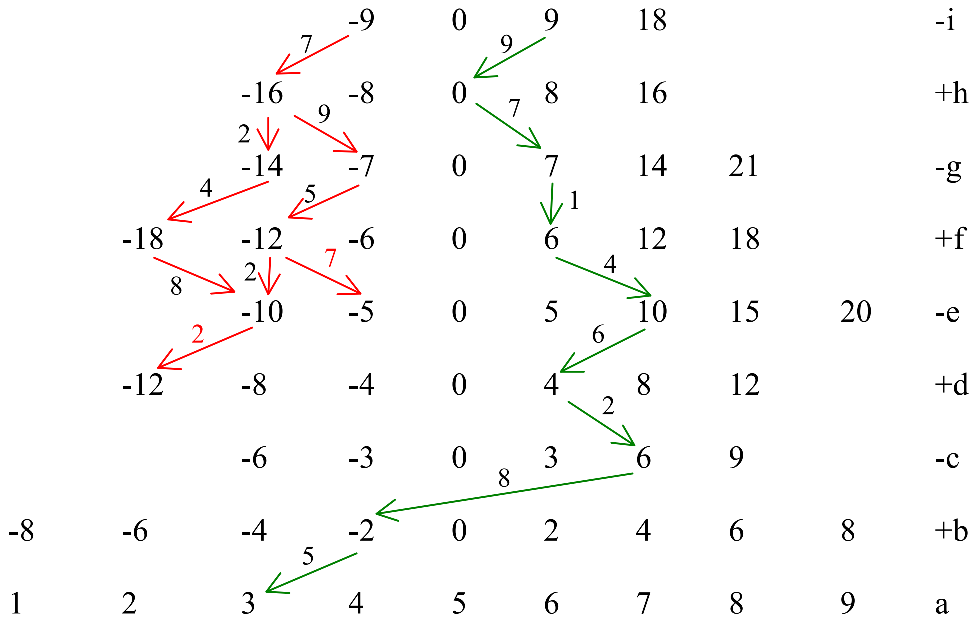
5.5. Jā, var. Parādīsim vienu no veidiem, kā izvietot punktus, lai izpildītos vajadzīgās īpašības.



59. zīm.

Novilksim riņķa līniju ar centru punktā A un rādiusu 20 cm. Atzīmēsim uz tās punktu C, tad punktus B un D tā, lai BC=CD=1 cm. Atzīmēsim uz riņķa līnijas arī punktu E tā, lai ED=1 cm, un E nesakrīt ar C (59. zīm.). Tā kā riņķa līnijas vienādas hordas savelk vienādi lokus, tad $\cup BC=\cup CD=\cup DE$ un $\cup BC+\cup CD=\cup CD+\cup DE$. No loku BD un CE vienādības seko vienādība BD=CE. Tā kā $\cup BC\neq\cup BD$, tad $BC\neq BD$. Loks BE nav vienāds ne ar loku BC, ne ar loku BD, tātad horda BE ir atšķirīga gan no BC, gan no BD. Attālums AB=AC=AD=AE=20 cm, salīdzinot ar pārējiem attālumiem, ir izvēlēts ļoti liels, tāpēc acīmredzami, ka $AB\neq BC$, $AB\neq BE$, $AB\neq BD$.

5.6. **1) N**o skaitļa a-b+c-d+e-f+g-h+i atņemot ciparu i, iegūst skaitli a-b+c-d+e-f+g-h, savukārt skaitlim a-b+c-d+e-f+g-h pieskaitot ciparu h, iegūst a-b+c-d+e-f+g utt.
2) Skaitļa a-b+c-d+e-f+g-h+i vērtība mainās robežās no 1-9+2-8+3-7+4-6+5=-15<**-9** līdz 9-1+8-2+7-3+6-4+5=25>**18** (tātad tā var būt vienāda ar -9, 0, 9, 18), skaitļa a-b+c-d+e-f+g-h vērtība mainās robežās no 1-9+2-8+3-7+4-6=-20<**-16** līdz 9-1+8-2+7-3+6-4=20>**16** (tātad šai izteiksmei var būt sekojošas vērtības: -16, -8, 0, 8, 16), turpinot procesu un apvienojot to ar informāciju, kas iegūta 1) punktā, iegūstam sekojošu ainu:



60. zīm.

Meklēsim ceļu, pa kuru ejot, no pašas augšējās rindiņas var nokļūt līdz apakšējai, katru ciparu izmantojot ne vairāk kā vienu reizi. Sākot izpēti ar skaitli -9, visai drīz nonākam strupceļā, jo nākas vai nu divas reizes izmantot ciparu 2, vai 7 (skat. 60. zīm. sarkano bultiņu ceļu). Zaļās bultiņas iezīmē vienu ceļiem, kas ved pie atbildes (lasītājs pats var izpētīt vai ir vēl kāds cits ceļš). Tātad šis deviņciparu skaitlis varētu būt, piemēram, 358264179.