2007./2008. mācību gads

1.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

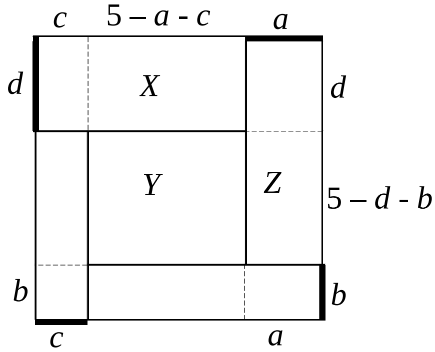
1. Skat., piem., 1.zīm.

		-2		
	-2	1	2	
-2	1	2	-2	1
	2	-2	1	
		1		

1.zīm.

Komentārs. Ievērosim, ka arī visu ierakstīto skaitļu summa ir 1. Interesanti būtu noskaidrot jautājumu: kādiem veseliem skaitļiem a un b iespējams panākt, ka katrā no 3 rūtiņām sastāvošā taisnstūrī ierakstīto skaitļu summa ir a, bet visu ierakstīto skaitļu summa ir b?

2. Pagarinām taisnstūru malas līdz krustpunktiem ar kvadrāta malām. Tad viss kvadrāts sadalās taisnstūros. Katram taisnstūrim pretējās malas ir vienādas. Apzīmējot tumši iekrāsoto nogriežņu garumus metros ar a; b; c; d, iegūstam ainu, kas parādīta 2.zīm.



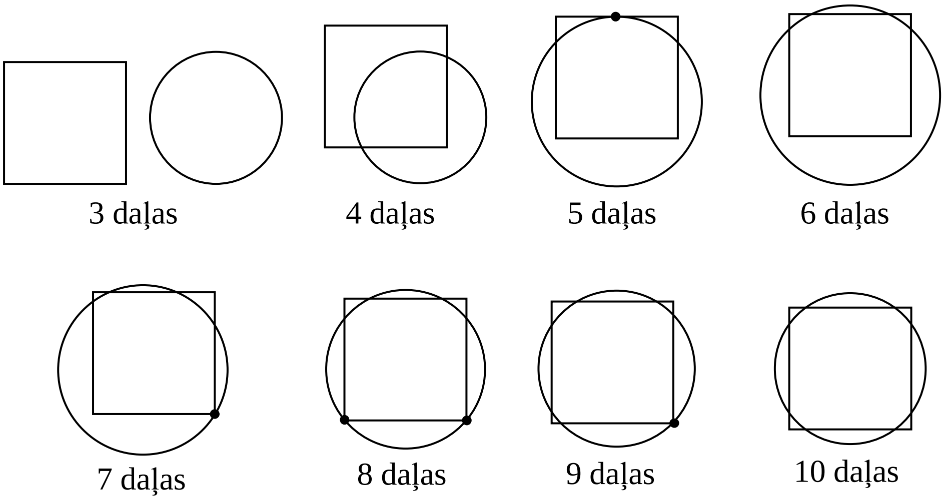
2.zīm.

Taisnstūra X apakšējā horizontālā mala vienāda ar tā augšējo horizontālo malu, tāpēc tās garums ir $5-a-c$. Līdzīgi iegūstam, ka taisnstūra Z kreisās malas garums ir $5-d-b$. Tātad taisnstūrim Y vienas horizontālās malas garums ir $5-a-c$, bet vienas vertikālās malas garums ir $5-d-b$. Tā kā taisnstūrim Y pretējās malas ir pa pāriem vienādas, tad Y visu malu garumu summa ir $S=(5-a-c)+(5-d-b)+(5-a-c)+(5-d-b)=20-2(a+b+c+d)$. Saskaņā ar uzdevumā doto $a+b+c+d=6$. Tāpēc $S=20-2\cdot 6=20-12=8$.

Tāda situācija patiešām ir iespējama, ja, piemēram, $a=b=c=d=1\frac{1}{2}$. (Tad vidējais taisnstūris sanāk kvadrāts.) Protams, ir iespējami arī daudzi citi gadījumi.

3. Atbilde: jebkurā skaitā daļu no 3 līdz 10 ieskaitot.

Risinājums: Vispirms parādīsim, ka minētās vērtības ir iespējamas. To var redzēt 3.zīm.



3.zīm.

Tagad pierādīsim, ka citāds daļu skaits nevar būt.

Skaidrs, ka nevar būt viena daļa, jo gan riņķa līnija, gan kvadrāta kontūrs katrs atsevišķi sadala plakni divās daļās. Nevar būt arī tikai divas daļas: riņķa līnija sadala plakni 2 daļās, un kvadrāta kontūra uzzīmēšana neradītu jaunas daļas tikai tad, ja tas sakristu ar riņķa līniju, bet tā nevar būt.

Padomāsim, vai varētu rasties vairāk par 10 daļām.

Šķirosim visas iespējas.

A. Ja riņķim un kvadrātam nav kopīgu iekšēju punktu, tad acīmredzot ir tikai 3 daļas.

B. Ja riņķim un kvadrātam ir kopēji iekšēji punkti, tad tie visi veido vienu plaknes daļu. Otru daļu veido tie plaknes punkti, kas ir gan ārpus kvadrāta, gan ārpus riņķa. Atliek noskaidrot, cik, vislielākais, var būt riņķa daļu, kas ir ārpus kvadrāta, un kvadrāta daļu, kas ir ārpus riņķa.

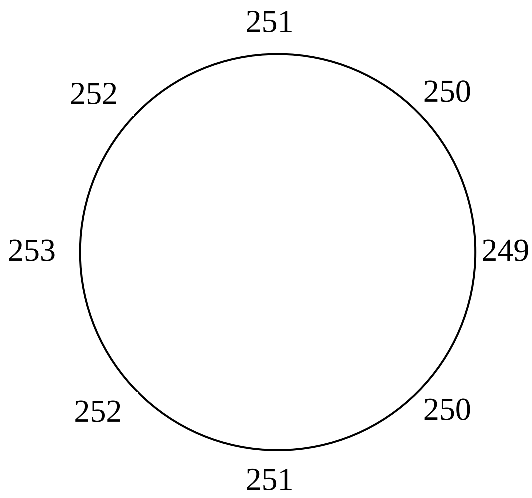
Katra kvadrāta mala veido augstākais vienu hordu, tāpēc izveidojas ne vairāk par 4 hordām. Katra horda atšķeļ no riņķa augstākais vienu daļu, un šīm daļām nav kopīgu iekšēju punktu. Tāpēc ir ne vairāk par 4 riņķa daļām, kas ir ārpus kvadrāta.

Pie katras kvadrāta malas var veidoties ne vairāk kā divas kvadrāta daļas, kas atrodas ārpus riņķa (pretējā gadījumā kvadrāta malai jābūt vairāk nekā 2 kopīgiem punktiem ar riņķa līniju, bet tas nevar būt). Tātad kopā ir ne vairāk kā $4 \cdot 2 = 8$ šādas veidošanās. Tā kā katra kvadrāta daļa, kas ir ārpus riņķa, veidojas pie divām kvadrāta malām, tad šādu daļu nav vairāk kā $\frac{8}{2} = 4$.

Tātad kopējais daļu skaits nepārsniedz $1 + 1 + 4 + 4 = 10$, k.b.j.

4. Atbilde: a) jā, b) nē.

Risinājums. a) skat., piem., 4.zīm. Viegli pārbaudīt, ka katru divu pretējo skaitļu summa ir 502, tāpēc visu skaitļu summa ir $502 \cdot 4 = 2008$.

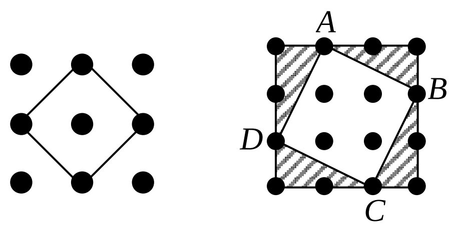


4.zīm.

b) ja divi veseli skaitļi viens no otra atšķiras par 1, tad viens no tiem ir pāra, bet otrs – nepāra. Tāpēc četros grozos būtu jābūt pāra skaitam, bet četros – nepāra skaitam ābolu. Bet četru pāra un četru nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, kas nevar būt 2007.

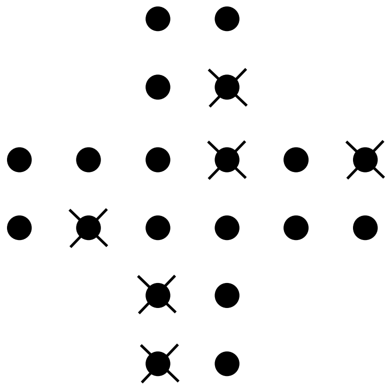
5. Ievērosim, ka $VAUVAURRR = VAUVAU\,000 + RRR$ (pirmā saskaitāmā 3 pēdējie cipari ir nulles) $= VAUVAU \cdot 1000 + RRR$. Summa *VAUVAURRR* dalās ar 56, tātad arī ar 8 (jo $56 = 8 \cdot 7$). Saskaitāmais $VAUVAU \cdot 1000$ dalās ar 8, jo $1000 = 125 \cdot 8$ dalās ar 8. Tāpēc arī otram saskaitāmajam *RRR* jādalās ar 8.
Ievērojam, ka $RRR = R \cdot 111$. Reizinātājs 111 ir nepāra skaitlis, tāpēc dalīšanos ar 8 neietekmē; tāpēc R jādalās ar 8. Tātad pastāv tikai divas iespējas: **R = 8 vai R = 0.**
Tālāk ievērosim, ka $KRAA = KR \cdot 100 + A \cdot 11$. Mēs jau ieguvām, ka $R = 8$ vai $R = 0$. Tāpēc *KR* ir pāra skaitlis, un *KR* dalās ar 2. Tāpēc $KR \cdot 100$ dalās ar 8. Tā kā gan *KRAA*, gan $KR \cdot 100$ dalās ar 8, tad līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka *A* dalās ar 8; tāpēc **A = 8 vai A = 0.**
Tā kā burti *R* un *A* apzīmē dažādus ciparus, tad uzdevumā minētajā situācija nav iespējama, ja ne *A*, ne *R* nedrīkst būt 0. Ja ciparu 0 var izmantot, tad viegli iegūstam, piemēram, iespēju $VAUVAURRR = 381381000$ un $KRAA = 5088$.

6. Ievērosim, ka 4 rūtiņu virsotnes var veidot arī „slīpi” novietotu kvadrātu (skat., piem., 5.zīm.).

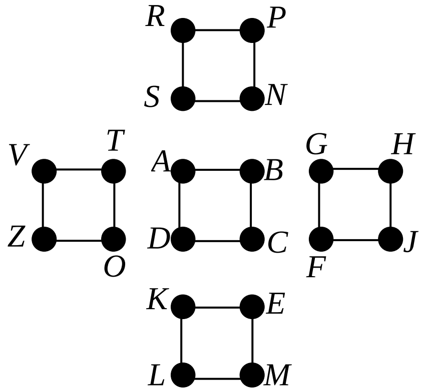


5.zīm.

Pamatosim, piemēram, ka *ABCD* ir kvadrāts. Iesvītrotie taisnleņķa trijstūri ir vienādi (pazīme kk), tātad $AB = BC = CD = DA$. Tālāk $\angle DAB$ iegūstam, no 180^0 atņemot taisnleņķa trijstūra divu šauro leņķu summu; tāpēc $\angle DAB = 90^0$.Vajadzīgais pierādīts: četrstūris, kam visas malas vienādas un viens leņķis taisns, ir kvadrāts. Citu „slīpi novietotu” kvadrātu gadījumos pierādījums ir analoģisks.



6.zīm.

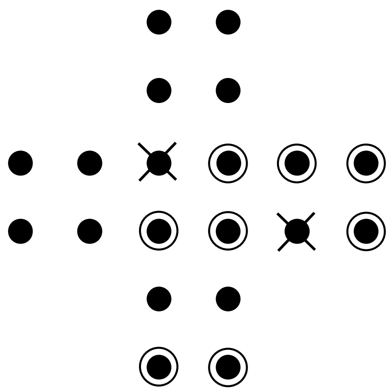


7.zīm.

Uzdevumā prasīto var sasniegt ar 6 virsotņu nodzēšanu (skat. 6.zīm.); pārliecinieties par to patstāvīgi.

Ja mēs gribētu iztikt ar 5 virsotņu nodzēšanu, tad katrā no 7.zīm. redzamajiem 5 kvadrātiem jānodzēš **tieši viena** virsotne. Varam pieņemt, ka centrālajā kvadrātā nodzēsta virsotne *A*. Tad *B*; *C*; *D* netiek nodzēstas. Lai „atbrīvotos" no kvadrāta *BDEF*, jānodzēš vismaz viena no virsotnēm *E* un *F*; varam pieņemt, ka *F* tiek nodzēsta.

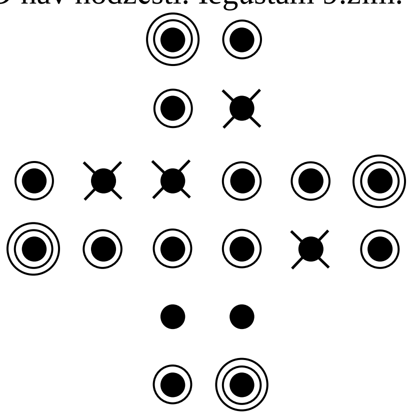
Tad *G*, *H*, *J* netiek nodzēstas. Lai „atbrīvotos" no kvadrāta *DCEK*, jānodzēš vismaz viena no virsotnēm *E* un *K*; tātad ne *L*, ne *M*, netiek nodzēstas. Iegūstam 8.zīm. (šeit un turpmāk ar aplīšiem tiek apvilktas tās virsotnes, kas noteikti netiek nodzēstas).



8.zīm.

Lai atbrīvotos no kvadrāta *MJNO*, jānodzēš vai nu *N*, vai *O* (apzīmējumus skat. 7.zīm.). Apskatām abas iespējas.

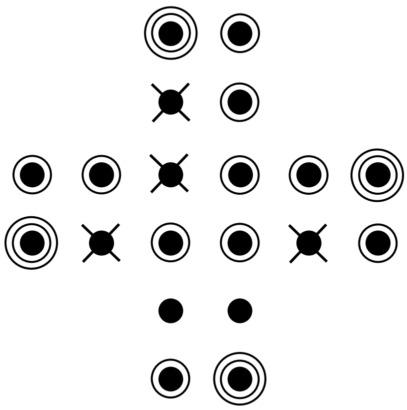
I Pieņemsim, ka nodzēsts *N*. Tad *P*, *R*, *S* nav nodzēsti. Kvadrāta *SBDT* dēļ jānodzēš *T*; tāpēc *V*, *Z*, *O* nav nodzēsti. Iegūstam 9.zīm. attēloto ainu:



9.zīm.

Tagad kvadrātā *RHMZ* nav nodzēsta neviena virsotne – pretruna.

II Pieņemsim, ka nodzēsts *O*. Tad *Z*, *V*, *T* nav nodzēsti. Kvadrāta *SBDT* dēļ jānodzēš *S*; tad *R*, *P*, *N* nav nodzēsti. Iegūstam pretrunu kā iepriekšējā gadījumā (skat. 10.zīm).



10.zīm.

Tātad, nodzēšot tikai 5 virsotnes, uzdevuma prasības nav izpildāmas. Tātad mazākais nodzēšamo virsotņu skaits ir 6.

7. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Iedomāsimies, ka tas izdarīts, un apskatīsim 420 pēc kārtas iestādītus kokus. Tā kā $420 = 3 \cdot 140$, varam tos sadalīt 140 grupās pa trim pēc kārtas iestādītiem kokiem katrā. Tā kā katrā grupā jābūt vismaz vienam bērzam, tad vismaz 140 no šiem kokiem jābūt bērziem.

Līdzīgi iegūstam, ka no šiem kokiem vismaz $\frac{420}{4} = 105$ jābūt kļavām, vismaz $\frac{420}{5} = 84$ - ozoliem, vismaz $\frac{420}{6} = 70$ - liepām un vismaz $\frac{420}{7} = 60$ - eglēm. Bet $140 + 105 + 84 + 70 + 60 = 459 > 420$. Iegūta pretruna, tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

8. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tā tomēr noticis. Pierādīsim, ka **tādā gadījumā katram draugam beigās būtu vismaz 4 āboli.** Ja tas būs pierādīts, tad no nosacījuma, ka visiem draugiem beigās bija atšķirīgi ābolu daudzumi, sekos, ka kopā visiem draugiem beigās ir **vismaz** $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ āboli (saskaitījām mazākos iespējamos 6 dažādus naturālus skaitļus, kas nav mazāki par 4). Bet draugiem sākumā bija $6 \times 6 = 36$ āboli. Tā kā $39 > 36$, iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums bijis nepareizs.

Atliek pierādīt augstāk izcelto apgalvojumu.

Tiešām, ja kādam draugam beigās bija **ne vairāk** par 3 āboliem, tad **vismaz** 6 – 3 ābolus viņš ir uzdāvinājis citiem. Bet tā ir pretruna ar mūsu pieņēmumu, ka arī **šis** draugs uzdāvinājis citiem mazāk ābolu, nekā viņam bija beigās. Tātad tāda drauga nav.

9. Uzdevuma nosacījumos ietverto formulējumu „datumi atšķiras ne vairāk kā par 2 nedēļām” var saprast divējādi (tas nav matemātisks jēdziens un nav precīzi definēts nevienā mācību grāmatā). Ja mēs uzskatām, ka, piemēram, datumi „31.decembris” un „1.janvāris” atšķiras viens no otra par 1 dienu, tad uzdevuma risinājums varētu būt šāds.

Pieņemsim no pretējā, ka katriem diviem no minētajiem 25 skolēniem dzimšanas dienu datumi atšķiras viens no otra vairāk kā par 2 nedēļām. Tas nozīmē, ka visas 25 dzimšanas dienas ir dažādas un starp katrām divām viena otrai sekojošām dzimšanas dienām ir vismaz 14 citas dienas. Attēlojot visas gada dienas uz apļa ar

366 (vai 365) punktiem, iegūstam: uz apļa jābūt 25 punktiem, kas attēlotu dzimšanas dienas, un vēl vismaz 14 punktiem katrā no intervāliem starp divām dzimšanas dienām; tātad kopā uz apļa jābūt vismaz $25+14\cdot 25=375$ *punktiem – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un uzdevumā minētā situācija nav iespējama.*

Ja turpretī mēs uzskatām, ka atšķirības starp datumiem jāapskata viena un tā paša kalendārā gada ietvaros (un tātad 1.janvāris no 31.decembra atšķiras par 364 vai 365 dienām), tad uzdevuma apgalvojums ir nepareizs. Var gadīties, ka klases skolēni dzimuši gada 1., 16., 31., 46., ... dienā; tad katriem diviem no viņiem dzimšanas dienu datumi atšķiras viens no otra vismaz par 15 dienām, t.i., **vairāk** nekā par 2 nedēļām.

Mums jāpamato, kāpēc mūsu piemērā minētajā veidā izdosies gadā izvietot 25 skolēnus. To var pamatot vismaz divos dažādos veidos:

a) izrakstot visus 25 iedomātos dzimšanas dienu kārtas numurus gada dienu sarakstā:

1, 16, 31, 36, 61, 76, 91, 106, 121, 136, 151, 166, 181, 196, 211, 226, 241, 256, 271, 286, 301, 316, 331, 346, 361

b) aprēķinot uzreiz pēdējā skolēna domājamo dzimšanas dienas kārtas numuru gada dienu sarakstā. Tā kā pavisam ir 25 kārtas numuri un katrs nākošais ir par 15 lielāks nekā iepriekšējais, tad pēdējam numuram būtu jābūt $1+\underbrace{15+15+...+15}_{24\ reizes}=1+15\cdot 24=1+360=361$.

Tā kā $361<365$, tas ir iespējams.

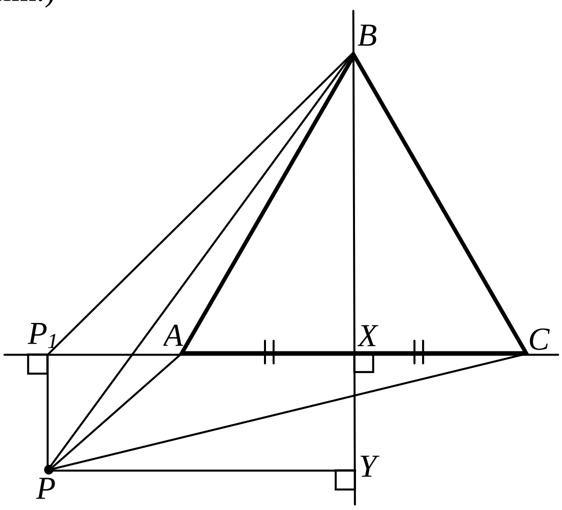
10. Atbilde: māsas māja jāceļ brāļu māju veidotā vienādmalu trijstūra centrā.

Pierādījums. Apzīmēsim brāļu mājas ar *A*, *B* un *C*, trijstūra *ABC* centru – ar *M*. Pierādīsim: **ja punkts *P* nesakrīt ar *M*, tad**

$$\mathbf{PA + PB + PC + > MA + MB + MC} \qquad (*)$$

Šķirosim vairākus gadījumus atkarībā no *P* atrašanās vietas.

I Punkts *P* un ΔABC atrodas **dažādās pusēs** kādai no taisnēm *AB*, *BC*, *CA* (skat., piem., 11. zīm.)



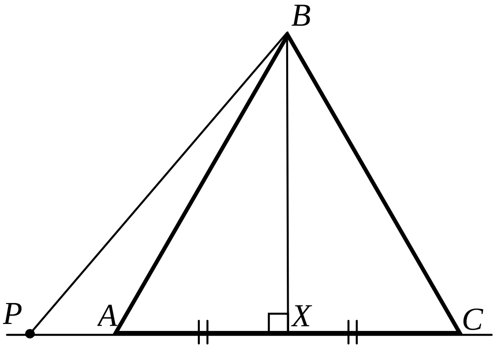
11.zīm.

Konstruējam punktus P_1, *X*, *Y*, kā parādīts 11.zīmējumā. Tā kā vienādmalu trijstūrī augstums ir arī mediāna, tad *AX* = *XC*. Un, tā kā slīpne garāka par tās projekciju, iegūstam nevienādības $PA>P_1A$ (1) un $PC>P_1C$ (2).

Tā kā trijstūrī BP_1P leņķis BP_1P ir plats, tad $PB>P_1B$ (3). Saskaitot (1), (2) un (3), iegūstam

$$PA+PB+PC>P_1A+P_1B+P_1C \qquad (4)$$

II Punkts *P* atrodas uz kādas no taisnēm *AB*, *BC*, *CA*, bet nav atbilstošās malas punkts (skat., piem., 12.zīm.)



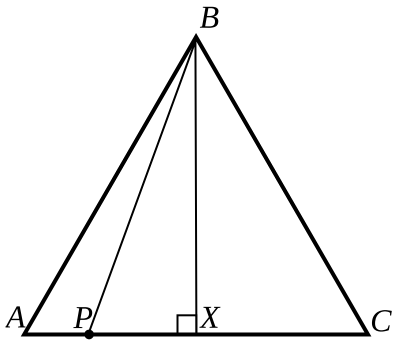
12.zīm.

Acīmredzami $PA + PC > AC = XA + XC$ (5) un PB > XB (6). Saskaitot (5) un (6), iegūstam

$$PA + PB + PC > XA + XB + XC \qquad (7)$$

III Punkts *P* pieder kādai no malām *AB*, *BC*, *CA*; varam pieņemt, ka *P* pieder malai *AC*. Ja *X* ir *AC* viduspunkts, tad $PA + PC = AC = XA + XC$ (8) un $PB \geq XB$ (9), turklāt nevienādība (9) pārvēršas par vienādību tad un tikai tad, ja *P* sakrīt ar *X*. Saskaitot (8) un (9), iegūstam

$$PA + PB + PC \geq XA + XB + XC = AC + XB \qquad (10)\text{, skat.13.zīm.}$$



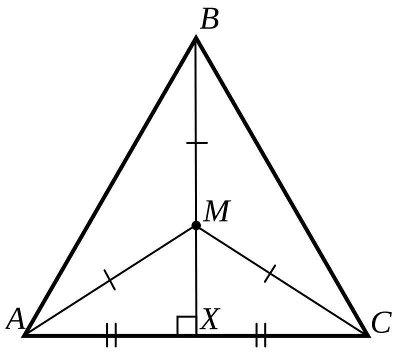
13.zīm.

No **I**, **II**, **III** seko: ja *P* nav trijstūra *ABC* iekšējs punkts, tad summa $PA + PB + PC$ nav mazāka par **kādas** trijstūra malas un pret to novilktā augstuma garumu summu. Tā kā vienādmalu trijstūrī visas malas vienādas savā starpā un visi augstumi – arī, tad secinām, ka šādiem punktiem P pastāv nevienādība

$$PA + PB + PC \geq a + h \qquad (11),$$

kur *a* - ΔABC malas garums, *h* – tā augstuma garums.

1.lemma Ja ΔABC ir regulārs un *M* – tā centrs, tad $MA + MB + MC < a + h$ (*a* - ΔABC malas garums, *h* – tā augstuma garums).



14.zīm.

No vienādmalu trijstūra īpašībām zināms, ka *MA* = *MB* = *MC*, *M* atrodas uz *BX*, $MX \perp AC$ un $\angle MCX = 30°$. Vienādmalu trijstūrī augstums ir arī mediāna, bet centrs ir mediānu krustpunkts. No mediānu īpašībām seko, ka $h = 3 \cdot MX$ un

$MX = \frac{1}{2} MB$. Tā kā taisnleņķa trijstūrī *MXC* šaurais leņķis *C* ir 30° liels, tad $MX = \frac{1}{2} MC$. Ņemot to visu vērā, lemmas apgalvojumu var pierakstīt kā

$3 \cdot MA < AC + 3 \cdot MX$ jeb

$3 \cdot MA < AC + \frac{3}{2} MA$, jeb

$\frac{3}{2} MA < AC$, jeb

$1\frac{1}{2} MB < AB$ (jo *MB* = *MA* un *AB* = *AC*), jeb

BX < *AB*,

kas ir acīmredzams, jo taisnleņķa trijstūrī *AXB* hipotenūza garāka par kateti. Lemma pierādīta.

No lemmas un no (11) seko: ja *P* nav Δ*ABC* iekšējs punkts, tad (*) ir spēkā.

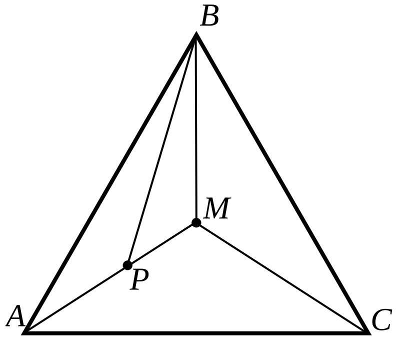
Atliek pierādīt (*) Δ*ABC* iekšējiem punktiem *P*, kas nesakrīt ar *M*.

2.lemma Ja punkts *P* atrodas Δ*ABC* iekšpusē un nesakrīt ar tā centru *M*, tad vismaz viens no leņķiem *APB*, *BPC*, *CPA* nav 120° liels.

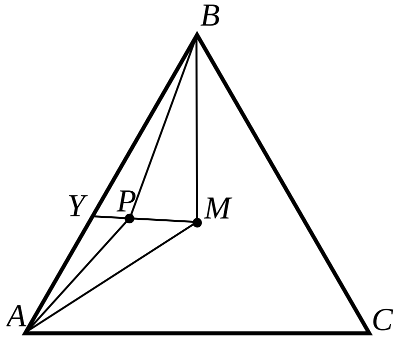
Pierādījums. Ievērojam, ka $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$. Pastāv divas iespējas:

1) punkts *P* pieder kādam no nogriežņiem *MA*, *MB*, *MC* (varam pieņemt, ka *MA*; skat.15.zīm.),

2) punkts *P* nepieder *MA*, *MB*, *MC*. Tad tas ir iekšējs punkts vienam no trijstūriem *AMB*, *BMC*, *CMA* (varam pieņemt, ka *AMB*; skat. 16.zīm.).



15.zīm.



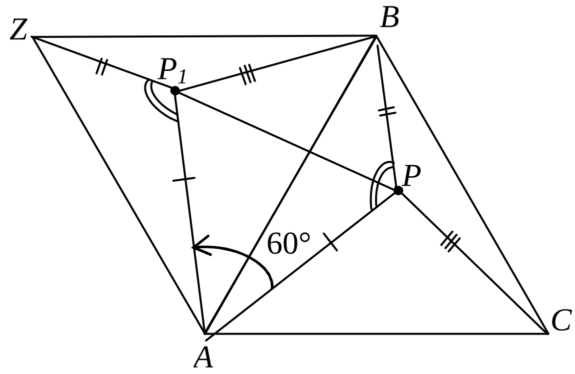
16.zīm.

Pirmajā gadījumā, izmantojot Δ*PMB* ārējā leņķa īpašību, iegūstam $\angle APB = \angle BPM + \angle BMP > \angle BMP = \angle BMA = 120°$.

Otrajā gadījumā no Δ*BMP* un Δ*AMP* ārējo leņķu īpašībām līdzīgi iegūstam $\angle BPY > \angle BMP$ un $\angle APY > \angle AMP$; saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $\angle APB > \angle AMB = 120°$.

Lemma pierādīta.

Tagad pieņemsim, ka *ABC* – vienādmalu trijstūris un *P* – tā iekšējs punkts, kas nesakrīt ar centru *M*. Saskaņā ar 2.lemmu varam pieņemt, ka $\angle APB \neq 120°$.



17.zīm.

Pagriežam ΔABC ap punktu A par 60° lielu leņķi pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam; reizē ar visu trijstūri pagriežas arī punkts P, nonākot stāvoklī P_1. Tā kā $AC = AB$ un $\angle CAB = 60°$, punkts C nonāk punktā B.

Punktu, kurā nonāk B, apzīmēsim ar Z. Pēc definīcijas $P_1Z = PB$, $P_1A = PA$ un $\angle P_1AP = 60°$. Redzam, ka ΔP_1AP ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi 60°, tātad tas ir vienādmalu. Tāpēc $PA = P_1P$. Secinām, ka

$$PB + PA + PC = ZP_1 + P_1P + PC \qquad (12)$$

Tā kā ΔAP_1P ir vienādmalu, tad $\angle AP_1P = 60°$. Tā kā $\angle ZP_1A = \angle BPA \neq 120°$, tad $\angle ZP_1P = \angle ZP_1A + \angle AP_1P \neq 180°$. Tātad punkti Z, P_1 un P neatrodas uz vienas taisnes; tāpēc $ZP_1 + P_1P > ZP$ un

$$ZP_1 + P_1P + PC > ZP + PC \geq ZC \qquad (13)$$

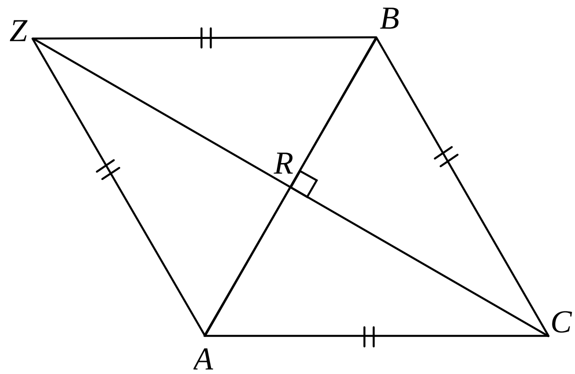
No (12) un (13) seko, ka

$$PA + PB + PC > ZC \qquad (14)$$

Ja mēs pratīsim pierādīt, ka

$$MA + MB + MC = ZC \qquad (15),$$

tad no (14) un (15) sekos mums vajadzīgā sakarība (*), un uzdevums būs atrisināts.



18.zīm.

Tā kā četrstūris $ACBZ$ sastāv no diviem vienādmalu trijstūriem, tad tas ir rombs; tāpēc $AB \perp CZ$ un $CZ = 2 \cdot CR$. Mums jāpierāda, ka $2 \cdot CR = MA + MB + MC$. Atceramies, ka $MA = MB = MC$; tātad jāpierāda, ka $2 \cdot CR = 3 \cdot MC$ jeb $MC = \frac{2}{3}CR$. Bet tas tieši seko no vienādmalu trijstūra īpašībām (skat. 1.lemmas pierādījumu).

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

2007./2008. mācību gads

2.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Nē, nevar. No katriem trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 3. Tāpēc vismaz viens no Jānīša sareizinātajiem skaitļiem dalās ar 3. Tātad arī iegūtais reizinājums dalās ar 3. Bet skaitlim, kas pats dalās ar 3, arī ciparu summa dalās ar 3. Tomēr 2 nedalās ar 3. Tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

2. Apzīmēsim klades, zīmuļa un burtnīcas cenas (piemēram, santīmos) attiecīgi ar k, z, b. No uzdevumā dotā seko:

$$k+2z>3b \qquad (1)$$

$$3k+2z>4b \qquad (2)$$

Pareizinot (1) abas puses ar 2, iegūstam

$$2k+4z>6b \qquad (3)$$

Saskaitot (2) un (3) labās un kreisās puses, iegūstam

$$(3k+2z)+(2k+4z)>4b+6b$$

jeb

$5k+6z>10b$, kas bija jāpierāda.

3. Pirmā svēršana var būt šāda:

2 6 | 3 5

1. zīm.

Ja svari ir līdzsvarā, tad visas šeit izmantotās lodītes sver tik, cik uz tām rakstīts. Tātad īpašā lodīte ir 4 vai 1. Otro svēršanu tad izdara šādi:

1 3 | 4

2. zīm.

Smagākā lodīte atrodas uz tā kausa, kas nosveras uz leju. Ja turpretī pirmajā svēršanā viens no kausiem nosveras uz leju, tad smagākā lodīte atrodas uz tā. Ja uz leju nosvērās kreisais kauss, otro svēršanu izdarām, kā parādīts 3. zīm., ja labais kauss – 4. zīm.

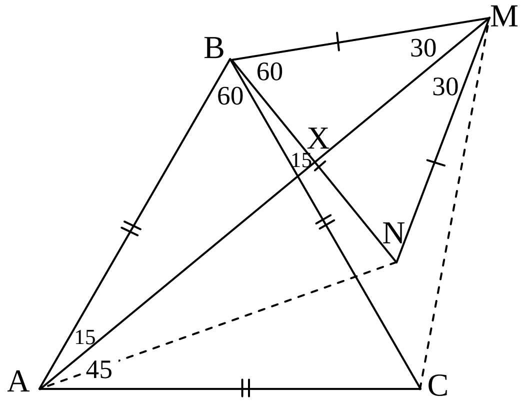
1 6 | 4 3   3 6 | 4 5

3. zīm.   4. zīm.

Visos gadījumos smagākā lodīte ir tā no abām „aizdomīgajām", kas otrajā svēršanā nosvērās uz leju.

Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

4. Konstruējam regulāru trijstūri *BMN*. Tad iegūstam leņķu lielumus, kā parādīts zīmējumā. Redzam, ka $\Delta ABN=\Delta CBM$ (mlm), tātad **AN=CM**.



5. zīm.

Viegli atrast, ka $\angle BXM = 90°$. Tātad MX ir regulārā trijstūra BMN augstums, tātad arī mediāna. Tad $BX = XN$. Seko, ka punkti B un N ir simetriski viens otram attiecībā pret AM. Tāpēc $\Delta ABM = \Delta ANM$ (tie simetriski viens otram attiecībā pret AM), tātad **AB=AN**.

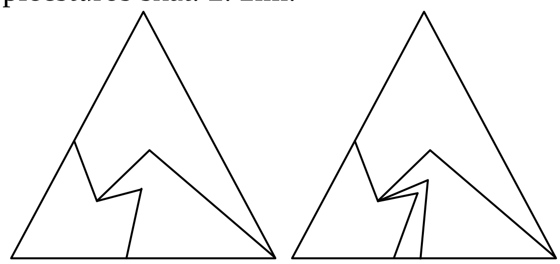
No izceltajām vienādībām seko *AC=CM*, tātad ΔACM - vienādsānu. Tā kā $\angle MAC = 45°$, no šejienes seko vajadzīgais.

5. No dotā seko, ka arī skaitlis $S = d(abc - d) + c(abd - c) + b(acd - b) + a(bcd - a)$ dalās ar 4, jo katrs no četriem saskaitāmajiem dalās ar 4. Atverot iekavas, iegūstam, ka $S = 4abcd - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, no kurienes seko, ka $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4abcd - S$.

Tā kā gan *4abcd*, gan S dalās ar 4, tad arī $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dalās ar 4, kas bija jāpierāda.

6. Atbilde: a) jā, b) jā, c) jā.

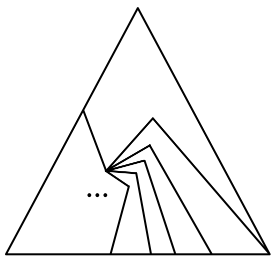
Sadalījumus 3 un 4 piecstūros skat. 2. zīm.



a) b)

2.zīm.

Sadalījums 5, 6, 7, ..., 2007 ieliektos piecstūros iegūst secīgi vienu no otra tāpat, kā 2.b) zīmējums iegūts no 2.a) zīmējuma (skat. 3. zīm.)



3.zīm.

Iespējami daudzi citi risinājumi.

7. Ērtības labad apzīmēsim $a + b + c = x$ un $d + e + f = y$.

Tad

$3 - x^2 - y^2 = 3 + x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 0 =$

$= 1+1+1+x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot 1 - 2x(a+b+c) - 2y(d+e+f) + 2xy(ad+be+cf) =$

$= 1+1+1+x^2(a^2+b^2+c^2) + y^2(d^2+e^2+f^2) - 2x(a+b+c) - 2y(d+e+f) +$

$+ 2xy(ad+be+cf) =$

$= (1 + x^2a^2 + y^2d^2 - 2 \cdot xa \cdot 1 - 2 \cdot yd \cdot 1 + 2 \cdot xa \cdot yd) +$

$+ (1 + x^2b^2 + y^2e^2 - 2 \cdot xb \cdot 1 - 2 \cdot ye \cdot 1 + 2 \cdot xb \cdot ye) +$

$+ (1 + x^2c^2 + y^2f^2 - 2 \cdot xc \cdot 1 - 2 \cdot yf \cdot 1 + 2 \cdot xc \cdot yf) =$

$= (1 - xa - yd)(1 - xa - yd) + (1 - xb - ye)(1 - xb - ye) + (1 - xc - yf)(1 - xc - yf) =$

$= (1 - xa - yd)^2 + (1 - xb - ye)^2 + (1 - xc - yf)^2 \ge 0$, jo kvadrāti nav negatīvi.

Tātad $3 - x^2 - y^2 \ge 0$, tāpēc $x^2 + y^2 \le 3$ jeb $(a+b+c)^2 + (d+e+f)^2 \le 3$, kas bija jāpierāda.

8. Ierakstīsim sarkanajās rūtiņās 0 un baltajās rūtiņās 1. Pieņemsim, ka katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā ir pāra skaits sarkano (tātad arī pāra skaits balto) rūtiņu. Tad katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā summa ir pāra skaitlis. Saskaitot visas šīs atsevišķo kvadrātu summas vienā „lielā" summā S, arī iznāks pāra skaitlis. Bet tā nevar būt, jo „lielajā" summā S

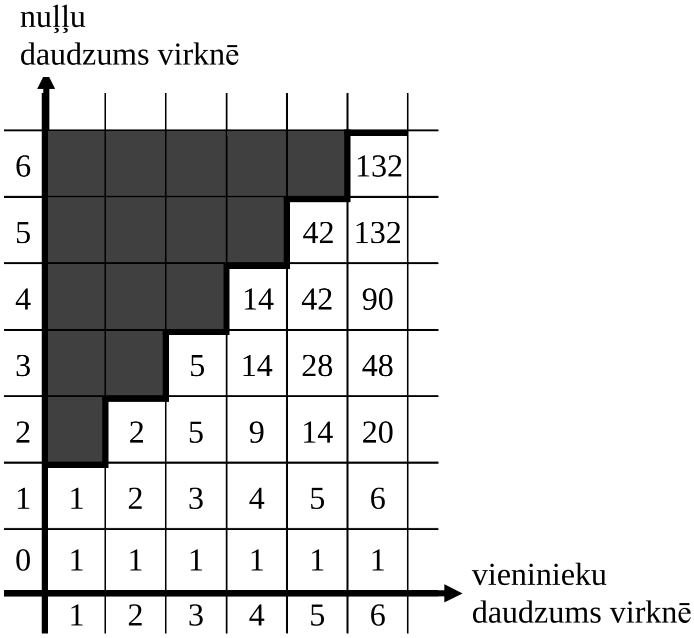
a) iekšējās rūtiņas tiek ieskaitītas četras reizes katra,
b) malējās (ne stūra) rūtiņas – divas reizes katra,
c) stūra rūtiņas – 1 reizi katra.

Tāpēc iekšējo rūtiņu kopējais „ieguldījums" summā S dalās ar 4, malējo rūtiņu kopējais „ieguldījums" – ar 2, bet stūra rūtiņu kopējais „ieguldījums" ir tieši 1. Tāpēc S kā divu pāra skaitļu un vieninieka summa ir nepāra skaitlis.

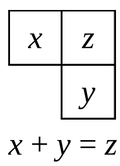
Iegūta pretruna, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un ir vismaz viens tāds 2x2 rūtiņu kvadrāts, kurā ir nepāra skaits sarkano rūtiņu.

9. Atbilde: 132 virknes.

Mēģiniet paši saprast risinājuma gaitu, kas „apslēpta" 4. zīmējumā. Melnajās rūtiņās domājam ierakstītas nulles; tabulu aizpilda pakāpeniski saskaņā ar 5. zīm. Pēc laika mēs publicēsim izvērstu atrisinājumu.



4.zīm.



5.zīm.

10. Atbilde: n=9.

A. Ja izvēlas 8 pāra skaitļus, tad katru divu summa ir pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad nav pirmskaitlis. Tāpēc $n \geq 9$.

B. Ievērosim, ka katrā no pāriem (1;4), (2;3), (5;8), (6;11), (7;10), (9;16), (12;13), (14;15) kvadrātu summa ir pirmskaitlis (pārbaudīt to patstāvīgi). No katriem 9 izvēlētiem skaitļiem divi būs vienā pārī, jo pāru ir tikai 8; tie arī būs meklējamie.

2007./2008. mācību gads

3.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim lielāko no skaitļiem ar *x*, mazāko – ar *y*. Ja *x* būtu pieci vai vairāk cipari, arī summā $x+y$ būtu pieci vai vairāk cipari. Ja *x* būtu ne vairāk kā 3 cipari, tad $x \le 999$ un $y \le 99$, tāpēc $x+y \le 1098 < 2101$. Tāpēc *x* ir tieši 4 cipari.

Ievērosim: ja skaitli *y* iegūtu, izsvītrojot no *x* pirmo, otro vai trešo ciparu, tad skaitļiem *x* un *y* pēdējie cipari būtu vienādi, un summa $x+y$ būtu pāra skaitlis. Tātad skaitli *y* iegūst, izsvītrojot no *x* pēdējo ciparu, un *y* ir trīsciparu (nevis divciparu vai viencipara, kā varētu notikt, piemēram, izsvītrojot **pirmo** ciparu skaitlī 1021 vai 1001).

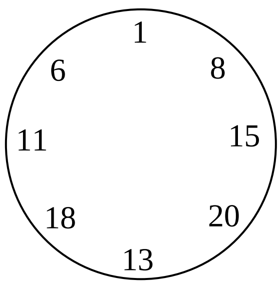
Ja *x* pirmais cipars būtu 2 vai lielāks, tad $x \ge 2000$ un $y \ge 200$, tāpēc $x+y \ge 2200$. Tātad *x* pirmais cipars ir 1. Apzīmējam *x* nākošos ciparus ar *a*, *b*, *c*. Tad $x = \overline{1abc}$ un $y = \overline{1ab}$.

Ja $a \le 8$, tad $x \le 1899$ un $y \le 189$, tāpēc $x+y \le 1899+189 = 2088 < 2101$. Tāpēc $a = 9$, $x = \overline{19bc}$ un $y = \overline{19b}$.

Ja $b \ge 2$, tad $x \ge 1920$ un $y \ge 192$; tāpēc $x+y \ge 1920+192 = 2112 > 2101$. Tātad $b < 2$, t.i., vai nu $b = 0$, vai $b = 1$. Ja $b = 0$, iegūstam vienādību $\overline{190c}+190 = 2101$, no kurienes $\overline{190c} = 1911$, kas nav iespējams. Ja $b = 1$, iegūstam $\overline{191c}+191 = 2101$, no kurienes $\overline{191c} = 2101-191 = 1910$, tātad $c = 0$. Līdz ar to meklējamie skaitļi ir 1910 un 191.

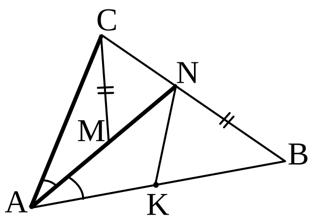
2. Apzīmēsim Maijas izvēlēto skaitļu summu ar *M*; Andra izvēlēto skaitļu summu ar *A*; skaitli, kas ierakstīts neizvēlētajā rūtiņā, ar *x*. Tad ***A* = 3*M*** un ***A* + *M* + *x* = 110** (tiešām, $4+7+11+16+20+5+8+14+25 = 110$). No izceltajām sakarībām seko, ka $4M = 110-x$, tātad skaitlim $110-x = 112-(x+2) = 4\cdot 28-(x+2)$ jādalās ar 4. Tā kā $4\cdot 28$ dalās ar 4, tad $x+2$ jādalās ar 4. Viegli pārbaudīt, ka no visiem tabulā ierakstītajiem skaitļiem šo nosacījumu apmierina tikai $x = 14$. Ja rūtiņa 14 paliek neizvēlēta, tad Maija var izvēlēties skaitļus 4; 5; 7; 8. bet Andris – skaitļus 11; 14; 16; 25. Tā kā $4+5+7+8 = 24$, $11+16+20+25 = 72$ un $24\cdot 3 = 72$, tad šāds gadījums patiešām ir iespējams. Uzdevums atrisināts.

3. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

4. Tā kā $AC = AN$, tad ΔCAN ir vienādsānu; tāpēc $\angle CNA$ ir šaurs. Tāpēc $\angle ANB$ ir plats. Tāpēc trijstūrī *ANB* mala *AB* ir vislielākā, tātad $AB > AN$. Tā kā *M* atlikts uz bisektrises *AN*, tad $AM \le AN < AB$. Iegūstam, ka ***AM* < *AB***.



2. zīm.

Atliekam uz AB tādu punktu K, ka $AK = AM$. Saskaņā ar izcelto nevienādību $AK < AB$, tātad K nesakrīt ar B.

Tā kā $AC = AN$ (dots), $\angle CAN = \angle NAK$ (dots) un $AM = AK$ (saskaņā ar K izvēli), tad $\Delta CAM = \Delta NAK$ (mlm). Tāpēc $CM = NK$. Tā kā $CM = NB$, iegūstam, ka $NK = NB$. Tātad ΔKNB ir vienādsānu; tāpēc $\angle NKB = \angle NBK$. Bet $\angle NKB = \angle CMN$ kā atbilstošie ārējie leņķi vienādos trijstūros. Tātad $\angle CMN = \angle NKB = \angle NBK = \angle CBA$, k.b.j.

5. Apskatīsim jebkurus 100 dažādus skaitļus, kas augošā secībā apzīmēti ar $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{99} < x_{100}$. Pieņemsim, ka šie skaitļi sadalīti pāros pa divi un katra pāra elementi sareizināti savā starpā. **Tad visu reizinājumu summa nepārsniedz $\boldsymbol{x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + ... + x_{97} x_{98} + x_{99} x_{100}}$** (t.i., visu reizinājumu summa ir vislielākā, ja savā starpā sareizina abus mazākos skaitļus, tad – abus nākošos mazākos, tad – abus nākošos mazākos u.t.t., beidzot – abus lielākos skaitļus).

Pieņemsim uz brīdi, ka šis apgalvojums ir pareizs, un pievērsīsimies mūsu uzdevumam.

Ja uz vienas kartītes ir uzrakstīti skaitļi a un b, tad uzdevumā minēto apgriezto lielumu $\frac{1}{ab}$ varam uztvert arī kā $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$. Tātad patiesībā situācija ir šāda: skaitļi $\frac{1}{100}, \frac{1}{99}, \frac{1}{98}, ..., \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ ir kaut kā sadalīti pa pāriem un katra pāra elementi sareizināti savā starpā. Saskaņā ar mūsu pieņēmumu iegūto reizinājumu summa ir vislielākā tad, ja $\frac{1}{100}$ reizina ar $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{98}$ ar $\frac{1}{97}$, ... , $\frac{1}{4}$ ar $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ar $\frac{1}{1}$; šīs summas vērtība ir $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $S < 1$, tad arī citas iegūstamās summas būs mazākas par 1, jo saskaņā ar pieņēmumu S ir vislielākā iegūstamā summa.

Tāpēc tagad centīsimies pierādīt, ka

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1 \qquad (*)$$

Pievienosim kreisajā pusē vēl citus pozitīvus saskaitāmos: $\frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{4 \cdot 5}$, $\frac{1}{6 \cdot 7}$, ..., $\frac{1}{98 \cdot 99}$. No tā kreisās puses vērtība tikai palielināsies. Ja mēs pratīsim pierādīt, ka arī palielinātā kreisā puse mazāka par 1, tad, protams, (*) arī būs pierādīta.

Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + ... + \frac{1}{96 \cdot 97} + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1 \qquad (**)$$

Katru saskaitāmo izsacīsim kā starpību:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{97\cdot 98}=\frac{1}{97}-\frac{1}{98}$$
$$\frac{1}{98\cdot 99}=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$$
$$\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

(visas vienādības viegli pārbaudīt, vienādojot saucējus katras vienādības labajā pusē).

Tad (**) pārveidojas par

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{98}\right)+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)<1 \quad (***)$$

Atverot iekavas, gandrīz visi saskaitāmie saīsinās: „$\frac{1}{2}$” sastopams vienreiz ar „-„ zīmi, vienreiz ar „+” zīmi, „$\frac{1}{3}$” tāpat, „$\frac{1}{4}$” tāpat, ..., „$\frac{1}{99}$” tāpat. Nesaīsinās tikai „1” un „$-\frac{1}{100}$”. Tāpēc (***) kreisā puse ir $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$; skaidrs, ka $\frac{99}{100}<1$.

Tāpēc (***), līdz ar to arī (**) un (*) ir pierādīta.

Lai uzdevums būtu atrisināts, jāpierāda sākumā minēto apgalvojumu. Izdarīsim to.

Mēs vispirms pierādīsim līdzīgu apgalvojumu 4 skaitļu gadījumam: **ja *a* < *b* < *c* < *d*, tad no visām trim iespējamām pāru reizinājumu summām *ab* + *cd*, *ac* + *bd* un *ad* + *bc* vislielākā ir pirmā, t.i. tā, kurā pāros apvienoti abi mazākie un abi lielākie skaitļi.**

Tiešām, nevienādību $ab+cd>ac+bd$ viegli pakāpeniski pārveidot par

$$ab-ac>bd-cd$$
$$a(b-c)>d(b-c)$$
$$a(b-c)-d(b-c)>0$$
$$(a-d)(b-c)>0$$

Pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa, jo $a-d<0$ un $b-c<0$, bet divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs. Tāpēc patiesa ir arī sākotnējā nevienādība $ab+cd>ac+bd$. Nevienādību $ab+cd>ad+bc$ pierāda līdzīgi.

Tagad pierādīsim mums vajadzīgo apgalvojumu.

Pieņemsim, ka visu 100 skaitļu pāru reizinājumu summā abi mazākie skaitļi x_1 un x_2 nav sareizināti savā starpā, bet ar citiem skaitļiem: x_1 ar x_i, bet x_2 ar x_j (ne x_i, ne x_j nav ne x_1, ne x_2). Izmainīsim šo summu: aizstāsim reizinājumus $x_1x_i+x_2x_j$ ar $x_1x_2+x_ix_j$. Saskaņā ar nupat pierādīto 4 skaitļu gadījumam

$$x_1x_2+x_ix_j>x_1x_i+x_2x_j,$$

jo x_1 un x_2 ir abi mazākie no skaitļiem x_1, x_2, x_i, x_j. Tā kā citi pāri nemainās, tad nemainās arī to reizinājumi; tātad **visu** reizinājumu summa palielinās.

Apskatām jauno sadalījumu pa pāriem (kurā x_1 un x_2 ir vienā pārī un tātad sareizināti savā starpā). Līdzīgi spriežot, ja x_3 un x_4 nav vienā pārī, tad, aizstājot pārus $x_3x_n+x_4x_k$ ar $x_3x_4+x_nx_k$ ($n,k\geq 5$), t.i., apvienojot x_3 un x_4 vienā pārī un viņu agrākos „pāriniekus” otrā pārī, visu reizinājumu summa atkal palielinās.

Skaidrs, ka līdzīgi turpinot, mēs nonāksim pie summas $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + ... + x_{97}x_{98} + x_{99}x_{100}$, kura būs lielāka par sākotnējo (ja tikai tā jau pašā sākumā nebija tieši šāda). Tātad šī summa no visām pāra reizinājumu summām ir lielākā iespējamā, kas arī bija jāpierāda. Uzdevums atrisināts.

6. Pierādīsim, ka šillišallas izvietojušies šādā secībā:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{669 \text{ grupas "mpp"}}$$

Apskatīsim vispirms pašu kreiso šillišallu. Viņam pa kreisi nestāv neviens, t.i., stāv 0 šillišallas. „Vairāk nekā trešdaļa no 0” nozīmē „vismaz 1”. Apgalvojums „no manis pa kreisi stāv vismaz 1 melis” šī šillišallas mutē ir meli. Tātad viņš ir melis.
Viegli pārbaudīt, ka šī meļa kaimiņš pa labi ir teicis patiesību, tātad ir patiess šillišalla, un nākošais pa labi stāvošais šillišalla arī ir teicis patiesību, tātad ir patiess.
Kas ir nākošais pa labi stāvošais šillišalla?

$m\ p\ p ?$

Tieši trešdaļa no pa kreisi esošajiem šillišallām ir meļi. Tātad ? izsacītais apgalvojums ir meli. Tātad ? ir melis:

mppm

Tagad viegli pārbaudīt, ka abi tālākie šillišallas ir teikuši patiesību, tātad ir patiesi:

$(mpp)(mpp)$

Pierādīsim, ka arī tālāk seko grupas (mpp). Tiešām, padomāsim, kas notiek, ja ir jau izveidotas n grupas *mpp*:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "mpp"}} x\ y\ z$$

No x pa kreisi stāv $3n$ šillišallas, no kuriem tieši n ir meļi. Tātad **tieši trešdaļa** no tiem, kas stāv pa kreisi no x, ir meļi. Tātad x ir samelojies, tātad ir melis:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "mpp"}}\ m\ y\ z$$

No y pa kreisi stāv $3n+1$ šillišallas, no kuriem $n+1$ ir melis. Tā kā $\frac{n+1}{3n+1} > \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$, tad y ir teicis patiesību, tātad ir patiess šillišalla:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "mpp"}}\ mp\ z$$

No z pa kreisi stāv $3n+2$ rūķīši, no kuriem n + 1 ir melis. Tā kā $\frac{n+1}{3n+2} > \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$, tad z ir teicis patiesību, tātad ir patiess ir rūķītis:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n \text{ reizes "mpp"}}\ mpp$$

Esam ieguvuši, ka aiz sākotnējām grupām „*mpp*” atkal seko vēl viena grupa „*mpp*”. Līdzīgi aiz tās atkal seko grupa „*mpp*”, utt. Tā kā $2007 : 3 = 669$, tad skaidrs, ka rindā ir tieši 669 meļi.

7. Sadalīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 40 pāros:

1 un 40
2 un 39
3 un 38
...
19 un 22
20 un 21

Katrā pārī ir viens pāra un viens nepāra skaitlis, un katrā pārī iekļauto skaitļu summa ir 41. Mums tātad jānoskaidro, vai skaitļus p_1, p_2, ... , p_{10} (pāra skaitļus) un n_1, n_2, ... , n_{10} (nepāra skaitļus) varēja izvēlēties tā, lai nekādi divi no tiem nebūtu vienā pārī.

Pieņemsim, ka izdevies to izdarīt.

Apskatīsim skaitļus $41-n_1$, $41-n_2$, ... , $41-n_{10}$. Tie visi ir pāra skaitļi (ja no nepāra skaitļa atņem nepāra skaitli, iegūst pāra skaitli), pie tam dažādi (jo visi skaitļi n_1, n_2, ... , n_{10} ir dažādi). Lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu 41, neviens no šiem 10 pāra skaitļiem nedrīkst būt vienāds ne ar vienu no 10 pāra skaitļiem p_1, p_2, ... , p_{10} (tiešām, ja $41-n_i = p_j$, tad $n_i + p_j = 41$).

Tātad 41 – n_1, 41 – n_2, ... , 41 – n_{10}, p_1, p_2, ... , p_{10} ir 20 dažādi pāra skaitļi. Tā kā no 1 līdz 40 vispār ir tikai 20 pāra skaitļi, tad viens no skaitļiem 41 – n_1, 41 – n_2, ... , 41 – n_{10}, p_1, p_2, ... , p_{10} ir 2, otrs ir 4, trešais ir 6, ... , divdesmitais ir 40. Tāpēc to summa

$(41-n_1)+(41-n_2)+...+(41-n_{10})+p_1+p_2+...+p_{10}$ ir $2+4+6+...+38+40$ jeb

$$41\cdot 10-(n_1+n_2+...+n_{10})+(p_1+p_2+...+p_{10})=420 \qquad (*)$$

(pārbaudiet paši, ka visu pāra skaitļu summa no 2 līdz 40 ieskaitot ir 420).

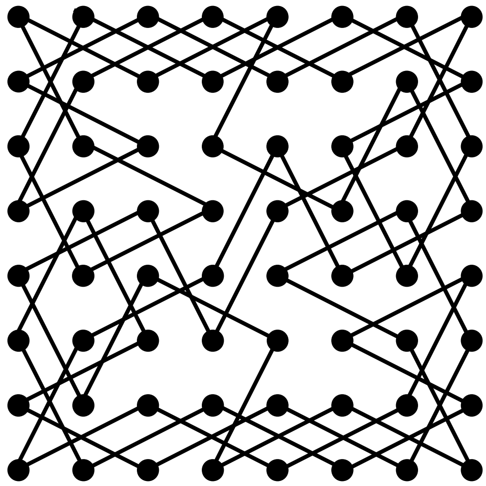
Bet saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $n_1+n_2+...+n_{10}=p_1+p_2+...+p_{10}$, tāpēc (*) pārveidojas par vienādību $410=420$, kas, protams, nav pareiza. Tātad iegūta pretruna; tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un, izvēloties skaitļus uzdevuma nosacījumos minētajā veidā, noteikti atradīsies tādi divi izvēlēti skaitļi, kuru summa ir 41.

8. Atbildi: 12 neizšķirtas spēles.

Vispirms parādīsim, ka 12 neizšķirtas spēles var būt. Sadalīsim visus spēlētājus 2 grupās: grupā *A* iekļausim 4 spēlētājus, grupā *B* – 3 spēlētājus. Pieņemsim, ka neizšķirti beidzas visas tās spēles, kurās spēlē kāds *A* spēlētājs pret kādu *B* spēlētāju, un nekādas citas. Tad neizšķirtu pavisam ir $4\cdot 3=12$. No jebkuriem trim spēlētājiem *X*, *Y* un *Z* **vismaz divi** ir no vienas grupas (vai nu abi no *A*, vai abi no *B*), un viņi savā starpā nav spēlējuši neizšķirti. Tāpēc uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Tagad pierādīsim, ka vairāk par 12 neizšķirtām spēlēm nevar būt. Pieņemsim, ka to **ir vairāk par 12**, tātad vismaz 13, un *AB* ir spēle, kas beigusies neizšķirti (*A* un *B* – spēlētāji). Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrs no 5 pārējiem spēlētājiem var būt spēlējis neizšķirti ar augstākais **vienu** no *A* un *B*; tātad ar *A* vai *B* līdzdalību ir notikušas augstākais $5+1=6$ neizšķirtas spēles. Apskatām 5 pārējos spēlētājus; to starpā ir bijušas vismaz $13-6=7$ neizšķirtas spēles. Ja *CD* ir viena no tām (*C* un *D* – spēlētāji), tad līdzīgi iegūstam: šo 5 spēlētāju grupas ietvaros ir ne vairāk kā $3+1=4$ neizšķirtas spēles ar C vai D līdzdalību. Tātad starp trim pārējiem spēlētājiem E, F, G notikušas vismaz $7-4=3$ neizšķirtas spēles – pretruna, jo tad iznāk, ka viņi visi trīs savā starpā spēlējuši neizšķirti. Tātad mūsu pieņēmums par vismaz 13 neizšķirtām spēlēm ir nepareizs.

9. Attēlojot šaha galdiņa laucinus ar to centriem (pavisam ir $8\times 8=64$ punkti, kas izvietoti kvadrātiska režģa formā), 3.zīm. parādīts tāds **noslēgts** šaha zirdziņa maršruts, kas katrā rūtiņā ieiet tikai vienu reizi; apzīmēsim to ar *M*. **Uzdevumā minētais zirdziņš varbūt neizdara nevienu no tiem gājieniem, kas ietilpst maršrutā *M*.**



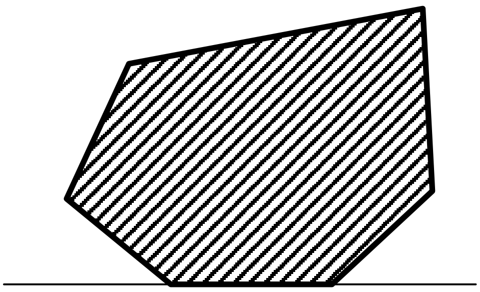
3.zīm

Maršrutā M **pamīšus** izvietotas 32 baltas un 32 melnas rūtiņas, un tas satur 64 zirdziņa gājienus. Padomāsim, kā maršrutā M var būt izvietotas neizgrieztās 32 rūtiņas. Ja kaut divas no tām maršrutā M seko viena otrai, tad tās arī ir meklējamās rūtiņas A un B. Lai nekādas divas no 32 neizgrieztajām rūtiņām maršrutā M nesekotu viena otrai, izgrieztai jābūt katrai otrajai maršruta M rūtiņai. Bet tad visām izgrieztajām rūtiņām jābūt vienā krāsā, kas nav iespējams, jo puse no izgrieztajām rūtiņām ir melna, puse – balta. Tātad kaut divas neizgrieztās rūtiņas maršrutā M seko viena otrai.

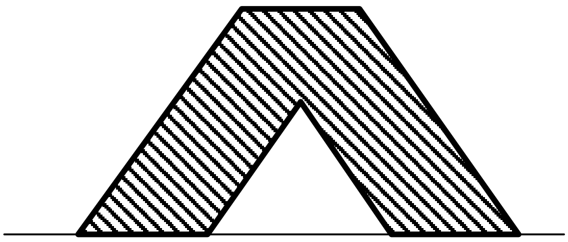
10. Vispirms atzīmēsim divas svarīgas izliektu daudzstūru īpašības.

I. Ja viena no izliekta daudzstūra malām atrodas uz taisnes t, tad nekādi citi daudzstūra punkti uz taisnes t neatrodas (skat. 4.zīm.).

Ja daudzstūris var būt ieliekts, šī īpašība nav spēkā (skat. 5.zīm.).



4. zīm.

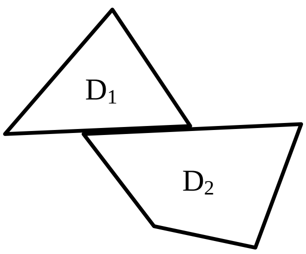


5. zīm.

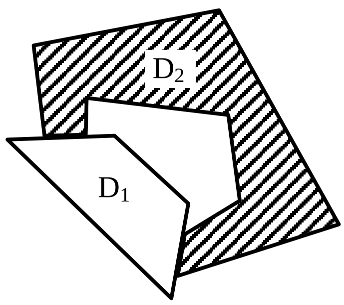
II. Teiksim, ka divi izliekti daudzstūri D_1 un D_2 saskaras pa malām a_1 un a_2, ja vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

1) D_1 un D_2 neklājas viens otram virsū,
2) viena no D_1 malām ir a_1,
3) viena no D_2 malām ir a_2,
4) malām a_1 un a_2 ir kopīgi **iekšējie** punkti (ne tikai virsotnes).

Katri divi izliekti daudzstūri var saskarties pa augstākais vienu malu pāri (skat. 6.zīm.).

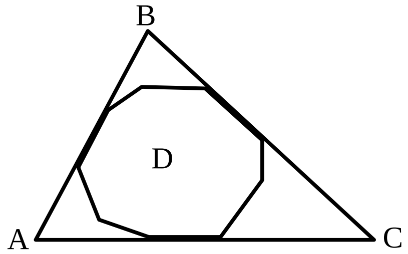


6. zīm.



7. zīm.

Ja kaut viens no daudzstūriem D_1 un D_2 var būt ieliekts, šī īpašība nav spēkā (skat. 7.zīm.).
Tagad ķersimies pie uzdevuma risinājuma.
Apskatīsim tos izliektos daudzstūrus, kuros sagriezts trijstūris *ABC*. Izvēlēsimies no šiem daudzstūriem tādu, kuram ir **visvairāk malu**; pieņemsim, ka tas ir daudzstūris *D* ar *n* malām. (Ja ir vairāki daudzstūri ar vislielāko malu skaitu, ņemam jebkuru no tiem.)
Kas var atrasties „blakus" daudzstūrim *D* aiz tā malām?
Pirmkārt, aiz dažām malām var „neatrasties nekas"; tās ir tās malas, kuras atrodas uz ΔABC malām. Tomēr tādu malu daudzstūrim *D* ir ne vairāk kā 3 – saskaņā ar īpašību I ne vairāk kā viena uz katras no ΔABC malām (skat. 8.zīm.).



8. zīm.

Aiz katras no citām *D* malām (šo citu malu ir **vismaz n – 3**) atrodas vismaz viens no izliektajiem daudzstūriem, kuros sagriezts ΔABC; turklāt saskaņā ar II īpašību aiz katras no šīm citām malām atrodas savs izliektais daudzstūris. Tātad bez *D* ir radušies vēl vismaz n – 3 citi izliekti daudzstūri. Katram no tiem ir vismaz 4 malas (jo neviens no tiem nav trijstūris saskaņā ar uzdevumā doto), un nevienam no tiem nav vairāk par *n* malām (jo n-stūris *D* ir ar vislielāko malu skaitu starp radušamies daļām). Ja kādam no šiem n – 3 daudzstūriem ir *n* malas, tad tam un *D* ir vienāds malu skaits. Pretējā gadījumā šiem n – 3 daudzstūriem malu skaits var būt tikai viens no skaitļiem 4; 5; 6; ... ; n – 2; n – 1 – pavisam n – 4 dažādas vērtības. Tā kā apskatāmo daudzstūru daudzums n – 3 ir lielāks par iespējamo malu skaitu daudzumu n – 4, tad nevar būt tā, ka visiem daudzstūriem malu skaiti ir dažādi. Tāpēc diviem no tiem malu skaiti ir vienādi, k.b.j.

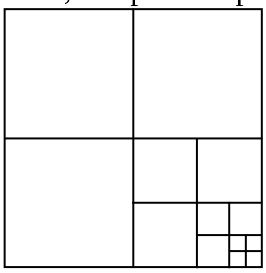
2007./2008. mācību gads

4.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim pulksteni, kurš iztek 6 minūtēs, ar *A*, bet otru – ar *B*. Sniegbaltīte vispirms „palaiž” abus pulksteņus. Brīdī, kad *A* iztecējis, pulkstenī *B* augšējā traukā vēl palikušas smiltis 2 minūtēm. Šai brīdī Sniegbaltīte sāk cept kūku un turpina vērot pulksteni *B*. Brīdī, kad no *B* augšējā trauka visas smiltis iztecējušas, viņa apgriež *B* otrādi. Brīdī, kad no *B* augšējā trauka atkal iztecējušas visas smiltis, viņa pārtrauc kūkas cepšanu. Kūka ir cepusies $2+8=10$ minūtes.

2. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Sagriežam kvadrātu vispirms 4 vienādos kvadrātos, tad vienu no 4 iegūtajiem – atkal 4 vienādos kvadrātos, vienu no šiem 4 kvadrātiem – atkal 4 vienādos kvadrātos, utt. Skat. 1.zīm., kur parādīti pirmo 4 griešanu rezultāti.



1.zīm.

Viegli saprast, ka, turpinot griešanu šādā veidā, vismazākā izmēra kvadrātu ir 4, bet visu citu izmēru kvadrāti – pa 3. Ievērojam, ka $2008=4+2004=4+668\cdot 3$. Tātad brīdī, kad būs izveidoti 668 triju vienādu kvadrātu komplekti (tas notiks pēc 669 griešanām), vajadzīgā situācija būs sasniegta.

3. Atbilde atkarīga no tā, vai sākumā abās kaudzītēs ir vienādi konfekšu daudzumi vai nē.

A. Ja sākumā abās kaudzītēs ir vienādi konfekšu daudzumi, tad, pareizi spēlējot, Maija uzvar. Viņa visu laiku „atdarina” Andra gājienus: ja Andris ar savu gājienu apēd kaut kādu daudzumu konfekšu no vienas kaudzītes, tad Maija ar savu sekojošo gājienu apēd tikpat konfekšu no otras kaudzītes, tādējādi **atkal atjaunojot konfekšu daudzumu vienādību kaudzītēs.** Skaidrs, ka tādā ceļā **Maijai gājienu nepietrūks:** tā kā kaudzītes ir vienādas, tad tikpat konfekšu, cik Andris apēd no vienas, Maija var apēst no otras. Tā kā spēlei tomēr kādreiz jābeidzas (nevar ēst konfektes bezgalīgi), tad gājienu pietrūks Andrim. Tāda situācija iestāsies brīdī, kad viņš pilnīgi iztukšos vienu kaudzīti; tad Maija ar savu gājienu nākošo pilnīgi iztukšos otru kaudzīti, un spēle būs beigusies.

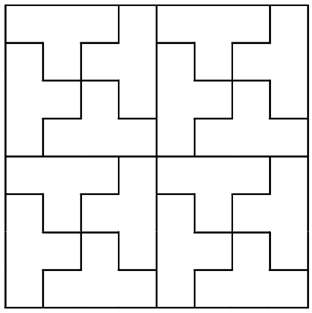
B. Ja sākumā abās kaudzītēs ir atšķirīgi konfekšu daudzumi, tad, pareizi spēlējot, uzvar Andris. Ar savu pirmo gājienu viņš apēd no lielākās kaudzītes tik daudz konfekšu, lai abās kaudzītēs paliktu vienāds konfekšu daudzums, un tālāk spēlē „uz izlīdzināšanu” tāpat, kā Maija **A** gadījumā.

4. Atbilde: a) nevar, b) var, c) nevar.

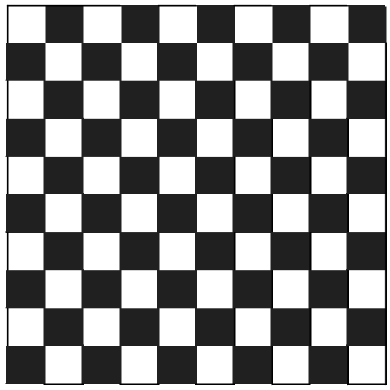
Risinājums. a) kvadrātā ir 81 rūtiņa; 81 nedalās ar 4. Tāpēc kvadrāta rūtiņas nevar sadalīties pa figūriņām tā, lai katrā figūriņā būtu 4 rūtiņas.

b) skat. 2.zīm.

c) izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā (skat.3.zīm.); ir 50 baltas un 50 melnas rūtiņas.



2. zīm.



3. zīm.

Pieņemsim pretējo tam, ko vēlamies pierādīt – pieņemsim, ka kvadrāts sagriezts uzdevumā minētajās figūriņās. Tā kā kvadrātā ir 100 rūtiņas, bet viena figūriņa satur 4 rūtiņas, tad figūriņu ir $100:4=25$. Ievērosim, ka katra figūriņa noteikti satur vai nu 1, vai 3 baltas rūtiņas, lai kurā vietā tā arī būtu izgriezta. Gan 1, gan 3 ir nepāra skaitļi. Bet 25 nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tātad tā nevar būt 50. Esam ieguvuši pretrunu, jo visās 25 figūriņās kopā ir tieši 50 baltas rūtiņas. Tas parāda, ka mūsu pieņēmums par sagriešanas iespējamību ir nepareizs.

5. Uzrakstām reizinātājus citā kārtībā:
$R=(2\cdot 5)\cdot 10\cdot(4\cdot 15)\cdot 20\cdot(8\cdot 25)\cdot Q$, kur ar Q apzīmēts visu to reizinātāju reizinājums, kas nav uzrakstīti atsevišķi. Acīmredzot, Q ir vesels skaitlis, kas nebeidzas ne ar 0, ne ar 5 (jo Q nesatur nevienu reizinātāju, kas dalītos ar 5), un $R=10\cdot 10\cdot 60\cdot 20\cdot 200\cdot Q=24000000\cdot Q=(24\cdot Q)\cdot 1000000$. Skaitlis $24\cdot Q$ ir pāra skaitlis, kas nebeidzas ar 0; tātad tā pēdējais cipars ir **nenulles pāra cipars**. Šis cipars ir tas, par kuru runā uzdevumā.

6. Viegli pārbaudīt, ka pastāv identitāte
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.
Pielietojot to uzdevumā minētajiem skaitļiem *a*, *b* un *c*, iegūstam, ka $a^2+b^2+c^2=0$.
Atceramies, ka katra skaitļa kvadrāts ir vai nu pozitīvs, vai 0. Tāpēc vienādība $a^2+b^2+c^2=0$ pastāv tad un tikai tad, ja $a^2=b^2=c^2=0$, t.i., tad un tikai tad, ja $a=b=c=0$. No tā seko, ka $a^3+b^3+c^3=0$, k.b.j.

7. Kā zināms no absolūtās vērtības (moduļa) definīcijas, jebkurai izteiksmei vai skaitlim *A* ir spēkā sakarība

$$|A|=\begin{cases} A, \ ja \ A\geq 0, \\ -A, \ ja \ A<0. \end{cases}$$

Tāpēc dotais vienādojums (uzrakstīsim to saīsinātā formā kā $|f(x)|+|g(x)|=|h(x)|$ pārveidojas par vienu no 8 vienādojumiem atkarībā no tā, vai $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$ ir negatīvi vai nav:

Nr.	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	Iegūtais vienādojums
1.	≥0	≥0	≥0	$f(x)+g(x)=h(x)$
2.	≥0	≥0	<0	$f(x)+g(x)=-h(x)$
3.	≥0	<0	≥0	$f(x)-g(x)=h(x)$
4.	≥0	<0	<0	$f(x)-g(x)=-h(x)$
5.	<0	≥0	≥0	$-f(x)+g(x)=h(x)$
6.	<0	≥0	<0	$-f(x)+g(x)=-h(x)$
7.	<0	<0	≥0	$-f(x)-g(x)=h(x)$
8.	<0	<0	<0	$-f(x)-g(x)=-h(x)$

Viegli saprast, ka katrs pēdējā kolonnā iegūtais vienādojums ir kvadrātvienādojums (visi 3 saskaitāmie x^2 nevar saīsināties, jo to ir nepāra skaits), tāpēc tam nav vairāk par divām saknēm (kuras pie tam der par **dotā** vienādojuma atrisinājumiem tikai tad, ja apmierina tos nosacījumus par $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$, pie kuriem atbilstošais pēdējās kolonnas vienādojums iegūts). Bez tam viegli saskatīt, ka 1. un 8. vienādojums ir līdzvērtīgi (ekvivalenti), tāpēc tiem ir vienas un tās pašas saknes. Tāpat ekvivalenti ir 2. un 7., 3. un 6., 4. un 5. vienādojumi. Tātad mums ir ne vairāk par 4 dažādiem kvadrātvienādojumiem, kam kopā nav vairāk par 8 dažādām saknēm, kuras pie tam visas varbūt nemaz nav sākumā dotā vienādojuma saknes. Tāpēc uzdevumā dotajam vienādojumam **nav vairāk par 8 dažādām saknēm**.

Jau šāda rezultāta iegūšana skolēnam būtu ievērojams sasniegums. Tomēr uzdevums vēl nav atrisināts: mēs neesam noskaidrojuši, vai 8 dažādas saknes tiešām **var** būt? Izrādās, ka uzrakstīt šo, otro risinājuma daļu skolēnam saprotamā valodā ir krietni grūtāk, nekā profesors Cipariņš bija iedomājies, un viņš to vēl nav paspējis izdarīt (lūdzu, piedodiet!). Atrisinājuma atlikušo daļu publicēsim nedaudz vēlāk.

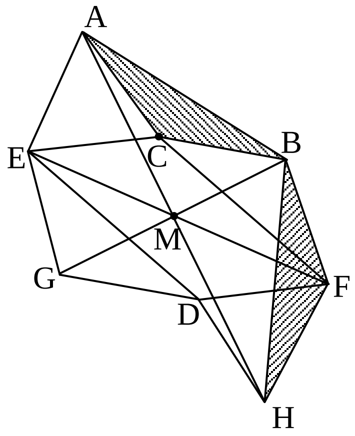
8. Uzdevuma apgalvojums ir nepareizs (šī kļūda ir ielaista apzināti, lai mudinātu jūs akli neuzticēties grāmatās, laikrakstos, žurnālos u.tml. rakstītajam, bet censties visu pašiem kritiski pārbaudīt). Uzrādīsim minētā tipa virkni, kurā visi locekļi ir pirmskaitļi (t.i., tajā nav neviena skaitļa, kas nebūtu pirmskaitlis):

pirmais virknes loceklis ir 2;
otrais virknes loceklis ir 3;
katrs nākošais loceklis ir pirmā locekļa un otrā locekļa summa, t.i. $2+3=5$.

Tātad šī virkne ir 2; 3; 5; 5; 5;... , t.i., sastāv tikai no pirmskaitļiem.

Komentārs. Ja uzdevuma formulējumā pievieno nosacījumu, ka virkne ir augoša, uzdevuma apgalvojums ir pareizs. Pamēģiniet pierādīt to patstāvīgi.

9. Saskaņā ar uzdevumā doto ΔEAC ir vienādmalu, bet ΔCBF ir vienādsānu ar virsotnes leņķi $\angle CBF = 120°$. Papildinām zīmējumu simetriski attiecībā pret punktu *M* (skat. 4.zīm.); tad *M* ir četrstūra *ECFD* diagonāļu *EF* un *CD* krustpunkts un vienlaicīgi viduspunkts, tāpēc *ECFD* ir paralelograms.



4.zīm.

Pieņemsim uz brīdi, ka $\Delta ACB = \Delta HFB$ (1).

Simetrijas pēc $\Delta HFB = \Delta AEG$ un $\Delta ACB = \Delta HDG$. No četru trijstūru vienādībām seko $AB = HB$, $HB = AG$ un $AB = HG$. Tātad četrstūrī $ABHG$ visas malas ir vienādas; tātad tas ir rombs; tātad tā diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras; tātad $\angle AMB = 90°$, k.b.j.

Tātad mums atliek pierādīt (1). Atceramies, ka $ECFD$ ir paralelograms, tāpēc $\angle DFC = 180° - \angle ECF$.

Simetrijas pēc $AC = HD = HF$; tā kā ΔCBF ir vienādsānu, tad $CB = FB$. Atliek pierādīt, ka $\angle ACB = \angle HFB$. Bet $\angle ACB = 360° - \angle ACE - \angle BCF - \angle ECF =$ $= 360° - 60° - 30° - \angle ECF$ = $\mathbf{270° - \angle ECF}$,

un arī $\angle HFB = \angle HFD + \angle DFC + \angle CFB = 60° + (180° - \angle ECF) + 30° =$ = $\mathbf{270° - \angle ECF}$. Vajadzīgais pierādīts.

10. Vispirms ievērosim, ka $11 \times 11 = 11 \times (1 + 10) = 11 + 11 \times 10$. Tāpēc 11×11 var aprēķināt šādi (pēc skolā mācītā saskaitīšanas paņēmiena):

	1	1
1	1	0
1	2	1

5.zīm.

Tālāk $(11 \times 11) \times 11 = (11 \times 11) \times (1 + 10) = 11 \times 11 + 11 \times 11 \times 10$, un to pēc skolā mācītā saskaitīšanas paņēmiena var aprēķināt kā

	1	2	1
1	2	1	0
1	3	3	1

6.zīm.

Līdzīgi turpinot (skat. 7.zīm.), 39.rindiņā iegūsim vajadzīgo rezultātu

				1	1	
			1	1	0	
			1	2	1	3.rinda
		1	2	1	0	
		1	3	3	1	5.rinda
	1	3	3	1	0	
	1	4	6	4	1	7.rinda
1	4	6	4	1	0	
1	6	1	0	5	1	9.rinda

•••

7.zīm.

Lai risinājums būtu pilnīgs, jāpamato, kāpēc rezultātā nav vairāk par 30 cipariem (mūsu lapas platums ir 30 rūtiņas) jeb, ka $11^{20} < 10^{30}$ (10^{30} ir pirmais naturālais skaitlis, kam ir vairāk par 30 cipariem).

No 7.zīm. redzams, ka $11^5 < 200000$. Tāpēc

$$11^{20} = 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11^5 < 200000 \cdot 200000 \cdot 200000 \cdot 200000 =$$
$$= 16 \cdot 10^{20} < 100 \cdot 10^{20} = 10^{22} < 10^{30}.$$

Piezīme. Šī uzdevuma autors ir Latvijas Universitātes students Raitis Ozols.

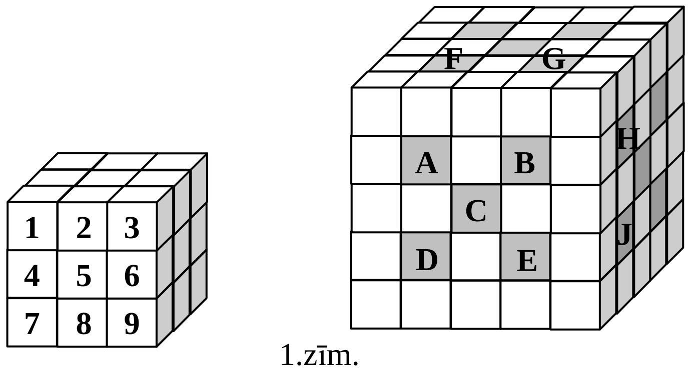
2007./2008. mācību gads

5.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Sākotnēji uz Andra lapas ir 35 robežas starp melniem un baltiem apgabaliem. Beigās, kad visa lapa būs balta, šādu robežu vairs nebūs. Tātad robežu skaitu jāsamazina no 35 uz 0. Vienu joslu nokrāsojot, robežu skaits samazinās ne vairāk kā par 2 (vienā un otrā pusē no šīs joslas). Tā kā $35 > 17 \cdot 2$, tad ar 17 krāsošanām visu lapu baltu padarīt nevar, un nepieciešamas vismaz 18 krāsošanas. Skaidrs, ka ar 18 krāsošanām mērķi var sasniegt: nokrāsojam pa vienai baltas visas 18 sākotnēji melnās joslas.

2. Atbilde: ir 57 melni kubiņi.

Risinājums. Kubā ārējā slānī ir 30 melni kubiņi – pa 5 katrā no skaldnēm (neviens melnais kubiņš nav redzams vienlaicīgi vairāk kā vienā kuba skaldnē). Noņemsim šos ārējos kubiņus. Pāri paliek kubs, kas sastāv no $3 \times 3 \times 3$ mazajiem kubiņiem.
Pamatosim, ka visi šie kubiņi ir melni. Skaidrs, ka centrālais kubiņš ir melns. Apskatīsim palikušā kuba priekšējo skaldni un katram tās kubiņam norādīsim tādu sākotnējā kuba rindu, „kuras dēļ” šis kubiņš ir melns:



1.zīm.

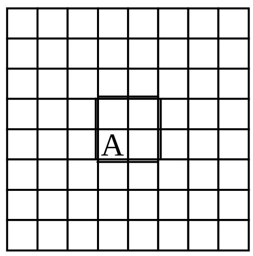
1 – A; 2 – H; 3 – B; 4 – F; 5 – C; 6 – G; 7 – D; 8 – J; 9 – E (ir arī citi „vaininieki”).
Tā kā mūsu krāsojums ir „vienāds”, raugoties no visām pusēm, tad arī pārējās kuba skaldnes visas ir melnas. Tāpēc visi $3 \times 3 \times 3 = 27$ palikušie kubiņi ir melni.
Tātad melno kubiņu pavisam ir $30 + 27 = 57$.

3. Atbilde: a) nevar, b) var.

Risinājums. Summā $S = 1 + 2 + 3 + ... + 24 + 25$ ir 12 pāra saskaitāmie un 13 nepāra saskaitāmie. Tāpēc S ir nepāra skaitlis. Ja katrā rindā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, tad S būtu izsakāma kā piecu pāra skaitļu summa (pirmās rindas summa + otrās rindas summa + ... + piektās rindas summa). Tā ir pretruna.
Situāciju, kurā visas apskatāmās summas ir nepāra skaitļi, skat. 2. zīm. Ar krustiņiem apzīmētajās rūtiņās ierakstīti nepāra skaitļi, pārējās – pāra skaitļi.

x				
x				
x	x	x		
x	x	x		
x	x	x	x	x

2.zīm.



3.zīm.

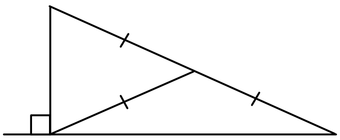
4. Atbilde: uzvar Andris

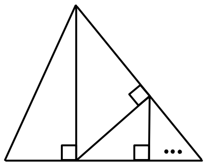
Risinājums. Andra stratēģija var būt, piemēram, šāda. Ar savu pirmo gājienu viņš ieraksta „A”, kā parādīts 3. zīm. Ievērosim, ka turpmāk Maija nedrīkst rakstīt „M” nevienā no izceltā 2×2 rūtiņas lielā kvadrāta rūtiņām. Ja Maija ar savu kārtējo gājienu ieraksta „M” kādā rūtiņā x, tad Andris ar savu atbildes gājienu ieraksta „A” rūtiņā y, kas ir simetriska rūtiņai x attiecībā pret kvadrāta centru. Šādi spēlējot, burti A un M (izņemot pirmo burtu A) izvietojas simetriski; tāpēc, ja rūtiņa x ir pieejama Maijai, tad rūtiņa y ir pieejama Andrim. Tāpēc Andrim gājienu nepietrūks: uz katru Maijas gājienu viņam ir atbildes gājiens. Tā kā kādam tomēr gājienu pietrūks, tad to pietrūks Maijai, un Andris uzvarēs.

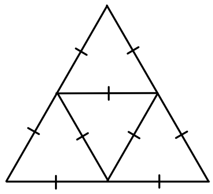
5. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums: Visos izrakstītajos skaitļos kopā ir 21 cipars „pieci”: 11 reizes kā vienu cipars un 10 reizes kā desmitu cipars. Ja abi iegūtie garie skaitļi būtu vienādi, tajos būtu vienādi piecinieku daudzumi, bet tad piecinieku pavisam būtu pāra skaits – pretruna.
Iespējami daudzi atrisinājumi, kas balstās uz citām idejām.

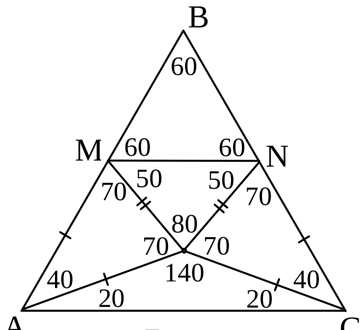
6. Atceramies, ka taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas (4. zīm.) Tātad taisnleņķa trijstūri var sagriezt 2 vienādsānu trijstūros.


4.zīm.


5.zīm.


6.zīm.

Tā kā **katru** trijstūri var sagriezt 2; 3; 4;... taisnleņķa trijstūros (skat. 5. zīm.), tad **katru** trijstūri var sagriezt 4; 6; 8;... vienādsānu trijstūros.
Novelkot vienādmalu trijstūrī viduslīnijas, tas sadalās 4 vienādmalu trijstūros (skat. 6. zīm.) Atstājot 3 no tiem nedalītus, bet ceturto dalot 4; 6; 8;... vienādsānu trijstūros, kā aprakstīts augstāk, iegūstam sākotnējā trijstūra sadalījumu 7; 9; 11;... vienādsānu trijstūros.
Atliek parādīt, kā sadalīt vienādmalu trijstūri piecos vienādsānu trijstūros. Viena no iespējām redzama 7. zīm.; skaitļi apzīmē leņķu lielumus grādos.



7.zīm.

Konstrukcijas gaita: vispirms iegūst punktu X ΔABC iekšpusē tā, ka $\angle XAC = \angle XCA = 20°$, pēc tam M un N tā, ka *AM*=*AX*=*CX*=*CN*.

7. Atbilde: a)jā, b)nē.

Risinājums. Viegli pārbaudīt, ka skaitlis $\overline{ab}144 = \overline{ab}000 + 144 = \overline{ab}\cdot 1000 + 144 =$
$= 8(\overline{ab}\cdot 125 + 18)$ dalās ar 8 pie **jebkuriem** cipariem a un b.

Ievērosim, ka $4 = 3+1$ un $7 = 2\cdot 3 + 1$. Tāpēc, ja skaitļa $\overline{abcde}$ cipari drīkst būt vienīgi 1; 4; 7, tad tā ciparu summa sastāv no 5 vieniniekiem un (varbūt) dažiem trijniekiem. Tātad tā nedalās ar 3. Tātad tā nedalās arī ar 9. Bet tad pats skaitlis $\overline{abcde}$ arī nedalās ar 9.

8. Atbilde: 12 dienas.

Risinājums: Tas, ka 12 dienās prasīto var sasniegt, redzams sekojošā tabulā

Datums	Dim	Rub	Smar	Top	Sat	Amet	Hriz
1.	7	6	5	4	3	2	1
2.	8	9	7	6	5	4	3
3.	9	11	10	8	7	6	5
4.	10	12	13	11	9	8	7
5.	11	13	15	14	12	10	9
6.	12	14	16	17	15	13	11
7.	13	15	17	19	18	16	14
8.	15	16	18	20	21	19	17
9.	17	18	19	21	23	22	20
10.	19	20	21	22	24	25	23
11.	21	22	23	24	25	27	26
12.	23	24	25	26	27	28	29

Katrā datumā apvilkts tas dārgakmeņu daudzums, kas šajā datumā ir vislielākais. Viegli pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Tagad parādīsim, ka ar mazāk kā 12 dienām nepietiek. Sauksim dienu, kurā kāds no dārgakmeņiem **pirmo reizi** Sniegbaltītei ir vislielākajā skaitā, par **īpašu** šim dārgakmenim. Skaidrs, ka 1. janvāris ir īpaša diena kādam dārgakmenim. Ir vēl 6 citas īpašas dienas; sauksim tās parādīšanās secībā par 2., 3., 4., 5., 6., 7. īpašo dienu.

Pierādīsim, ka 2. un 3. īpašā diena, 3. un 4. īpašā diena, ... , 6. un 7. īpašā diena nevar kalendārā atrasties blakus. Tad uzdevums būs atrisināts: apskatāmajā laika posmā jābūt 7 īpašajām dienām un vēl vismaz 5 „atdalītājdienām” pirms 3., 4., 5., 6., 7. īpašās dienas. Tātad kopā jābūt vismaz 7+5=12 dienām.

Atliek pierādīt izcelto apgalvojumu.

Pieņemsim, ka dienā „X” divi lielākie dārgakmeņu daudzumi ir $a>b$ un attiecīgie dārgakmeņi ir A un B. Tā kā dārgakmeņu daudzumi ir naturāli skaitļi, tad $b \le a-1$, bet pārējo dārgakmeņu ir ne vairāk kā a – 2 katrs. Dienā „X+1” dārgakmeņu A ir vismaz a + 1, dārgakmeņu B ir b + 1, b + 2 vai b + 3, bet citu dārgakmeņu ir ne vairāk kā $(a-2)+3=a+1$ katrs.

Tātad diena „X+1” nav īpaša dārgakmenim A (jo tā nav pirmā diena, kad dārgakmeņu A ir visvairāk) un nav īpaša nevienam citam dārgakmenim bez A un B (jo to nav vairāk kā A katrs).

Tātad diena „X+1”var būt īpaša tikai dārgakmenim B, kurš pirms tam dienā „X” bija „otrajā vietā”; savukārt iepriekšējais „līderis” A dienā „X+1” atrodas otrajā vietā.

Aplūkosim n-to īpašo dienu, $n \ge 3$; apzīmēsim to ar „Y+1”, bet iepriekšējo kalendāra dienu – ar „Y”. Pieņemsim, ka „Y” arī ir īpašā diena; tā kā $n \ge 3$, tad „Y” ir vismaz otrā īpašā diena, tāpēc eksistē kalendāra diena tieši pirms „Y”.

Apzīmēsim to ar „Y-1”.

Pieņemsim, ka diena „Y+1” ir īpaša diena dārgakmenim B, bet diena „Y” – dārgakmenim A. Saskaņā ar iepriekš pierādīto dienā „Y” dārgakmeņu B skaits bija otrais lielākais, bet dienā „Y-1” dārgakmeņu A skaits bija otrais lielākais un dārgakmeņu B skaits – lielākais. Tā ir pretruna, jo tad diena „Y+1” nav **pirmā** diena, kurā dārgakmeņu B skaits ir vislielākais. Tāpēc mūsu pieņēmums par to, ka dienas „Y” un „Y+1” abas ir īpašas, ir nepareizs.

Piezīme. Šādu pretrunu nevar iegūt no pieņēmuma, ka 1. un 2. īpašā diena atrodas blakus; šai gadījumā diena „Y-1” var vispār neeksistēt.

9. Viegli pārbaudīt, ka $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

Viens no ceļiem, kā iegūt minēto sadalījumu, izmanto kubu summas formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ un summas kuba formulu $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Pakāpeniski iegūstam $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz=$

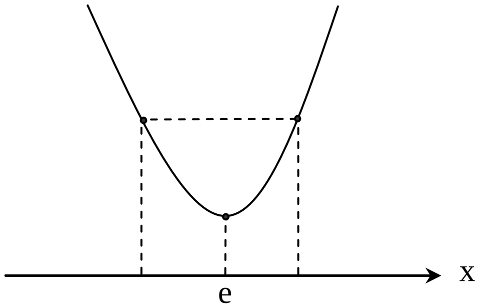
$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$

$=((x+y)+z)((x+y)^2-(x+y)z+z^2)-3xy(x+y+z)=$

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy)=$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, k.b.j.

10. Funkcijas *f(x)* grafiks novietojas šādi (nav svarīgi, vai tas krusto vai nekrusto Ox asi un kur atrodas Oy ass):



Funkcijas mazākā vērtība atbilst kaut kādai argumenta *x* vērtībai *x=e*. Pie $x \le e$ funkcija *f(x)* dilst, pie $x \ge e$ - aug. Turklāt grafiks ir simetrisks attiecībā pret taisni *x=e*. Tāpēc no nosacījuma *f(a)=f(b)* seko, ka viens no skaitļiem *a* un *b* atrodas pa kreisi no *e* (vai sakrīt ar *e*), bet otrs – pa labi no *e* (vai sakrīt ar *e*), turklāt $|a-e|=|b-e|$. Tāpēc uz skaitļu ass *e* atrodas „tieši vidū" starp *a* un *b*; tāpēc $\frac{a+b}{2}=e$. Tā kā $a+b=c+d$, tad no šejienes seko, ka $\frac{c+d}{2}=e$, t.i., *e* atrodas „tieši vidū" starp *c* un *d*. No šī fakta un augšminētās simetrijas arī seko, ka *f(c)=f(d)*, k.b.j.

Iespējami arī citi risinājumi, piemēram, pakāpeniski algebriski pārveidojumi, kas sākas ar vienādību $a^2+pa+q=b^2+pb+q$.

2007./2008. mācību gads

6.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Tāds ir, piemēram, skaitlis 10004728. Tiešām,

$$\begin{array}{r} 1\;0\;0\;0\;4\;7\;2\;8 \\ +\;\;1\;0\;0\;4\;7\;2\;8\;0 \\ \hline 2\;0\;0\;5\;2\;0\;0\;8 \end{array}.$$

2. Ievērosim, ka brīžos, kad mēs spirāles kārtējā rūtiņā ierakstām nepāra skaitļu kvadrātus (t.i., $1=1^2, 9=3^2, 25=5^2$ utt.), aizpildītās rūtiņas veido ģeometrisku figūru – kvadrātu, un mēs attiecīgā nepāra skaitļa kvadrātu ierakstām apakšējā labajā stūra rūtiņā (skat. 1.zīm.).

1

5	4	3
6	1	2
7	8	9

17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	23	24	25

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49

utt.

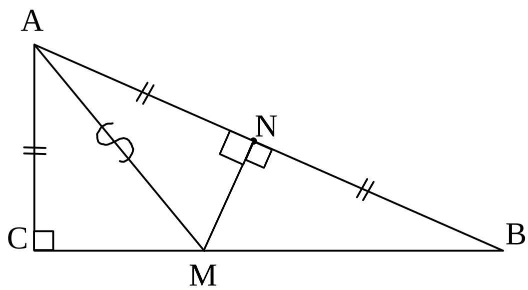
1.zīm.

Tas arī saprotams, jo katrs nākošais spirāles pilnais gredzens pievieno aizpildītajam kvadrātam vienu rūtiņu joslu gar katru malu, t.i., palielina tā malas garumu (rūtiņās) par 2. Ievērosim, ka $43^2=1849<2008<2025=45^2$. Skaitlis $45^2=2025$ tiek uzrakstīts tā spirāles gredzena labajā apakšējā stūrī, kura mala satur 45 rūtiņas. Naturālo skaitļu rindā 44 tieši pirms 2025 esošie naturālie skaitļi (t.i., skaitļi $2025-1, 2025-2, \dots, 2025-44$) tiek ierakstīti šī spirāles gredzena apakšējā horizontālajā posmā. Tā kā arī skaitlis $2008=2025-17$ ir viens no tiem, tad tas arī tiek ierakstīts šajā posmā.

Skaitļu virknē $3^2; 5^2; 7^2; \dots; 45^2$ skaitlis $45^2=2025$ ir $\left(\frac{45-3}{2}+1\right)$-ais jeb 22-ais.

Tātad tas ir nobīdīts 22 rūtiņas uz leju un 22 rūtiņas pa labi no skaitļa 1. Tā kā 2008 ir nobīdīts 17 rūtiņas pa kreisi no 2025, tad 2008 ir nobīdīts 22 rūtiņas uz leju un $22-17=5$ rūtiņas pa labi no skaitļa 1.

3. Atceramies skolā mācītu faktu: ja taisnleņķa trijstūrī viens šaurais leņķis ir $30°$ liels, tad šī leņķa pretkatetes garums ir puse no hipotenūzas garuma. Tāpēc $AN=BN=AC$. Tāpēc $\Delta ANM=\Delta ACM$ (kh); tāpēc $\angle CAM=\angle NAM=\frac{1}{2}\angle CAB=$ $=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°=\angle NBM$. Tāpēc

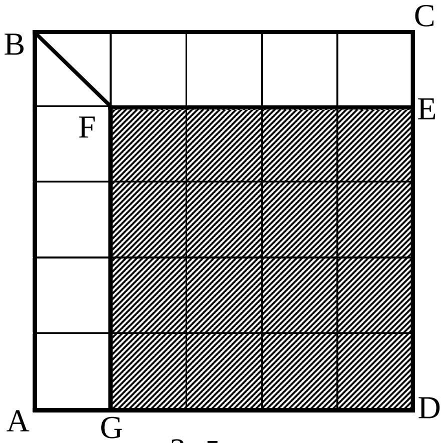


2.zīm.

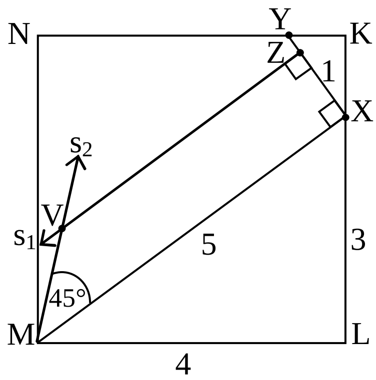
$\Delta ACM = \Delta BNM$ (lml). No tā seko, ka $CM = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BM$. No vienādības $CM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(CB - CM)$ seko $1\frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}CB$ un $CM = \frac{1}{3}CB$. Tā kā $NM = CM$, vajadzīgais pierādīts.

4. Saskaņā ar doto eksistē tāds naturāls skaitlis *n*, ka $xy + 2y + 4 = 7n$; tātad $\boldsymbol{4 = 7n - xy - 2y}$. Tāpēc *y* nedalās ar 7 (ja *y* dalītos ar 7, tad izceltajā vienādībā visi locekļi labajā pusē dalītos ar 7, tāpēc arī 4 dalītos ar 7 – pretruna). Identisku pārveidojumu ceļā iegūstam, ka $y(zx + 2x + 4) = xyz + 2xy + 4y = z(\boldsymbol{xy + 2y + 4}) - 2(\boldsymbol{yz + 2z + 4}) + 2(\boldsymbol{xy + 2y + 4})$. Saskaņā ar uzdevumā doto trīs izceltās iekavas dalās ar 7. Tāpēc arī $y(zx + 2x + 4)$ dalās ar 7. Tā kā *y* nedalās ar 7 un 7 – pirmskaitlis, tad $zx + 2x + 4$ dalās ar 7, k.b.j.

5. a) jā, var. Vienu kvadrātu ar izmēriem 4×4 novietojam, kā parādīts 3.zīm. Atliek parādīt, ka katru no četrstūriem *ABFG* un *BCEF* var pārklāt ar kvadrātu ar izmēriem 4×4. Šie četrstūri ir vienādi. Parādīsim, ka vienu no tiem var ievietot kvadrātā ar izmēriem 4×4. Tad uzdevums būs atrisināts.



3.zīm.



4.zīm.

Pieņemsim, ka *MNKL* – kvadrāts ar malas garumu 4 (skat. 4.zīm.). Atliekam punktu *X* uz malas *LK* tā, ka $LX = 3$; tad $XK = 4 - 3 = 1$ un pēc Pitagora teorēmas $MX^2 = ML^2 + LX^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, tātad $MX = 5$. Novelkam $XY \perp MX$. Tā kā taisnleņķa trijstūrī XKY hipotenūza garāka par kateti, tad $XY > XK = 1$. Tāpēc, atliekot uz stara *XY* tādu punktu *Z*, ka $XZ = 1$, šis punkts *Z* atradīsies kvadrāta *MNKL* iekšpusē. Velkam caur *Z* staru s_1 paralēli *MX*. Skaidrs, ka $\angle LMX < \angle LMK = 45°$, tāpēc $\angle NMX > 45°$. Velkam staru s_2 ar sākumpunktu *M* tā, lai tas veidotu $45°$ leņķi ar *MX*. Saskaņā ar augstāk pierādīto šis stars sākotnēji ies kvadrāta *MNKL* iekšpusē. Apzīmēsim s_1 un s_2 krustpunktu ar *V*. Saskaņā ar konstrukciju četrstūri *BCEF* un *MXZV* vienādi savā starpā, un otrais no tiem ir pārklāts ar 4×4 kvadrātu *MNKL*. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

b) nē, nevar. Viegli saprast, ka viens kvadrāts ar izmēriem 4×4 nevar pārklāt divas virsotnes kvadrātam ar izmēriem 5×5, ja abu kvadrātu malas ir paralēlas / perpendikulāras. Tāpēc katrai 5×5 kvadrāta virsotnei vajadzīgs cits pārklājošais kvadrāts; tātad tos vajag vismaz četrus.

6. Viegli pārbaudīt, ka var ņemt, piemēram, $r = \left(\frac{31}{12}\right)^2 = \frac{961}{144}$. Tiešām, tad

$$r + 5 = \frac{961}{144} + 5 = \frac{961 + 720}{144} = \frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2 \text{ un}$$

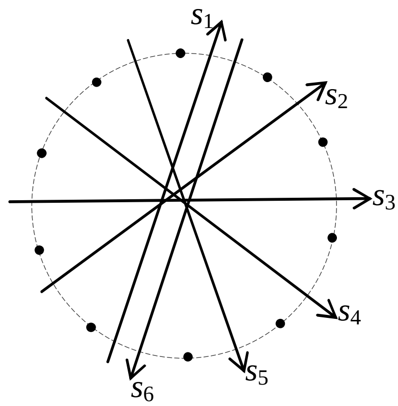
$r+10=\frac{961}{144}+10=\frac{961+1440}{144}=\frac{2401}{144}=\left(\frac{49}{12}\right)^2$. Kā šo risinājumu varēja izdomāt, pastāstīsim citreiz.

7. Nē, nevar.

Pierādīsim, ka no pirmās nevienādības seko $x^2+y^2<8(z^2+t^2)$. Tas būs pretrunā ar otro uzdevumā doto nevienādību.

Ceļot $x+y<2(z+t)$ abas puses kvadrātā, iegūstam $x^2+2xy+y^2<4(x^2+2xt+t^2)$, no kurienes seko $x^2+y^2<4(z^2+t^2)+8zt=$ $=4(z^2+t^2)+4\left[z^2+t^2-(z-t)^2\right]=8(z^2+t^2)-4(z-t)^2\le 8(z^2+t^2)$, k.b.j.

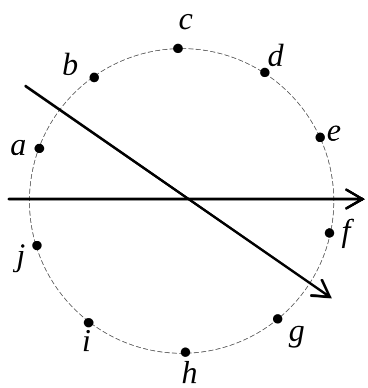
8. Pierādīsim, ka tādu taisni var novilkt tā, lai katrā pusē no tās būtu tieši 5 uzrakstītie skaitļi.



5.zīm.

Apskatīsim sešus starus; katrs no tiem atdala vienas 5 desmitstūra virsotnes no pārējām 5 (skat. 5.zīm.). Katram no šiem stariem s_i ar K_i apzīmēsim skaitļu summu tā kreisajā pusē, ar L_i – skaitļu summu tā labajā pusē. Ar S_i apzīmēsim starpību $S_i=K_i-L_i$, $i=1; 2; 3; 4; 5; 6$. Mēs pierādīsim, ka kādam i lielums S_i pēc moduļa (absolūtās vērtības) nepārsniedz 90.

Ja kāda no starpībām $S_1; S_2; \ldots; S_6$ ir nulle, vajadzīgā taisne jau atrasta. Pieņemsim, ka tādas S_i nav un ka $\boldsymbol{S_1>0}$ (otrs gadījums ir analoģisks). Ievērosim, ka $K_1=L_6$ un $L_1=K_6$ (skatoties pretējos virzienos, kreisā un labā puse mainās vietām), tāpēc $S_6=-S_1$; tātad $\boldsymbol{S_6<0}$. Tāpēc starpību virknē $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6$ jābūt divām tādām **blakus esošām** starpībām, no kurām pirmā ir pozitīva, bet otrā – negatīva. Aplūkosim šīs starpības.



6.zīm.

Ja

(*) $\quad (a+b+c+d+e)-(f+g+h+i+j)>90$

un

(**) $\quad (b+c+d+e+f)-(g+h+i+j+a)<-90$,

tad vispirms no (**) iegūstam

(***) $\quad (g+h+i+j+a)-(b+c+d+e+f)>90$

un pēc tam, saskaitot (*) un (***), iegūstam

$$2a-2f>180 \text{ jeb } \boldsymbol{a-f>90}.$$

Bet izceltā nevienādība nevar būt patiesa, jo lielākā iespējamā starpība starp naturāliem divciparu skaitļiem ir $99-10=89$. Tātad vajadzīgā pretruna iegūta un uzdevums atrisināts.

9. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas ir iespējams. Palūgsim, lai katrs skolēns A uzdāvina katram savam draugam tik konfekšu, cik kompaktdisku viņam (A) ir. Tā kā katrs skolēns dāvina 5 reizes vairāk konfekšu, nekā viņam ir kompaktdisku, tad kopējais uzdāvināto konfekšu skaits ir $5\cdot 2008=10\,040$. No otras puses, katri divi draugi kopā viens otram uzdāvina konfekšu daudzumu, kas dalās ar 3 (ja vienam ir *x*, bet otram – 2*x* kompaktdiski, tad viņu starpā tiek dāvinātas 3*x* konfektes). Tāpēc arī kopējam dāvināto konfekšu skaitam jādalās ar 3. Bet $10\,040$ ar 3 nedalās. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

10. Viegli pārliecināties, ka 5 var izteikt kā triju naturālo saskaitāmo summu tikai divos veidos: $3+1+1$ un $2+2+1$ (ja nerūpējamies par saskaitāmo kārtību). Ņemot vērtā arī to, kura no konfektēm pirmajā gadījumā dāvināta 3 eksemplāros un kura no konfektēm otrajā gadījumā – vienā eksemplārā, iegūstam 6 dažādas iespējas:

$$\begin{array}{lll} 3+1+1 & 1+3+1 & 1+1+3 \\ 2+2+1 & 2+1+2 & 1+2+2 \end{array}$$

Tā kā rūķīšu ir vairāk nekā dažādo iespēju uzdāvināt konfektes (7 > 6), tad atradīsies tādi rūķīši, uz kuriem attiecas viena un tā pati no minētajām iespējām.