„Profesora Cipariņa klubs” 2004./05.m.g.

1.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Cik no 1 līdz 2004 ir tādu naturālu skaitļu, kas dalās ar 4 un kuru pierakstā nav sastopams cipars “4”?

2. Aprēķināt izteiksmes $2004^2 - 2003^2 + 2002^2 - 2001^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ vērtību.

3. Uz riņķa līnijas atzīmēti 17 punkti, kas to sadala 17 vienādos lokos. Daži no šiem punktiem savā starpā savienoti ar taisnes nogriežņiem tā, ka rodas slēgta lauzta līnija, kurai ir 17 virsotnes – minētie punkti.
Pierādīt, ka var atrast trīs šīs lauztās līnijas posmus ar vienādiem garumiem.

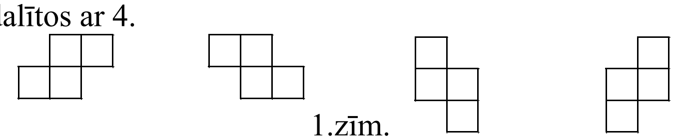
4. Jānītis uzrakstījis uz tāfeles 5 naturālus skaitļus. Katru trīs uzrakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis. Vai var gadīties, ka kāds no Jānīša uzrakstītajiem skaitļiem ir nepāra?

5. Katram vairākciparu naturālam skaitlim A var atrast tā ciparu reizinājumu; iegūtajam rezultātam atkal var atrast tā ciparu reizinājumu utt., kamēr iegūst viencipara skaitli. Šo rezultātu sauksim par skaitļa A nospiedumu.
Kāds ir lielākais skaitlis A, kuram visi cipari dažādi un kura nospiedums nav 0?

6. Klasē katrs zēns draudzējas ar 3 meitenēm un katra meitene – ar 3 zēniem. Vai zēnu skaits klasē var atšķirties no meiteņu skaita?

B grupa

1. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Pierādiet: rūtiņās var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 64 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, ka katrā tādā figūrā, kādas parādītas 1.zīm., ierakstīto skaitļu summa dalītos ar 4.



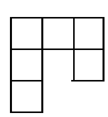
1.zīm.

2. Vai skaitlis $2004^2 + 2005^2 + 2004^2 \cdot 2005^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

3. Trijstūrī ABC katra mediāna ir vai nu 4 cm, vai 10 cm gara. Ir zināms, ka divu mediānu garumu summa ir 14 cm. Cik gara ir trešā mediāna?

4. Konferencē ar referātiem uzstājās 12 zinātnieki. Katrs zinātnieks noklausījās 5 kolēģu referātus. Vai noteikti var atrast tādus divus zinātniekus, kas abi klausījušies viens otru? Vai tādus noteikti var atrast, ja katrs zinātnieks noklausījās 6 kolēģu referātus?

5. Par āķi sauc figūru, kas redzama 2.zīm. (tā var būt novietota arī citādi). Rūtiņas malas garums ir 1.



2.zīm.

Kādu izmēru taisnstūrus var sagriezt āķos?

6. Skaitli sauc par interesantu, ja tā cipari ir pārmaiņus pāra un nepāra. Piemēram, interesanti ir skaitļi 12345, 6143 utt.
Pierādiet: ja naturāls skaitlis n nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad eksistē tāds interesants skaitlis, kas dalās ar n.

2.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Neviens no skaitļiem *a, b, c, d, e* nav 0. Vai var gadīties, ka katram no vienādojumiem $ax+b=0$, $bx+c=0$, $cx+d=0$, $dx+e=0$ un $ex+a=0$ sakne ir skaitlis, kas lielāks par (-1) un mazāks par 1?

2. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *x* un *y*, ka $x^2+y^2=1003$?

3. Dots, ka punkti A, X, C, Y šajā secībā atrodas uz vienas taisnes, B nepieder šai taisnei, BA=BC un AX=CY. Pierādīt, ka BA+BC<BX+BY.

4. Vienādsānu trijstūrī katra mala sadalīta 7 vienādos nogriežņos. Caur dalījuma punktiem vilktas taisnes paralēli trijstūra malām; trijstūris sadalās 49 mazos vienādmalu trijstūrīšos. Andris un Bruno pamīšus zīmē pa vienai izliektai slēgtai lauztai līnijai, kam visas malas iet pa mazo trijstūrīšu malām (pirmais zīmē Andris) tā, ka dažādām līnijām nav kopīgu punktu. Kas nevar uzzīmēt kārtējo līniju, zaudē. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

5. Rindā stāv 8 skolēni. Ar vienu gājienu divus blakusesošus skolēnus var mainīt vietām. Jāpanāk, lai katrs skolēns vismaz reizi būtu atradies gan vienā, gan otrā rindas galā. Pierādīt, ka ar 33 gājieniem nepietiek.

6. Kvadrāts sadalīts 8×8 rūtiņās. Dažas no tām nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši 1 melna rūtiņa. Sadalām kvadrātu 4 vienādos mazākos kvadrātos un katram no tiem izskaitām melno rūtiņu daudzumu tajā. Pieņemsim, ka esam ieguvuši *x* dažādus skaitļus. Kāds var būt *x*?

B grupa

1. Jānis, Aivars un Didzis ir vienāda auguma. Vienam uz krūtīm ir numurs 1, otram - numurs 3, trešajam - numurs 4. Vai zēnus var novietot rindā tā, lai izveidotos skaitlis, kas dalās ar 9? (Nekādus papildus pierakstus uz numuru kartītēm izdarīt nedrīkst; nedrīkst pievienot arī nekādus citus papildelementus.)

2. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *x* un *y*, ka $x^2+y^2=1000000000003$?

3. Trijstūrī ABC visas malas ir dažāda garuma, BC - garākā no tām. Uz malas BC ņemts punkts M. Pierādīt: A attālums līdz taisnei BC ir mazāks par punkta M attālumu summu līdz taisnēm AB un AC.

4. Uz tāfeles uzrakstīti 10 veseli skaitļi, kuru summa ir 0. Ar vienu gājienu var vai nu 3 skaitļiem mainīt zīmes uz pretējām, vai visus skaitļus samazināt par 1.
Vai noteikti var panākt situāciju, kad uz tāfeles ir 10 nulles?

5. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var sasniegt A5 uzdevumā minēto mērķi?

6. Kvadrātiska tabula sastāv no 16×16 rūtiņām. Tās rindiņas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz 16 no augšas uz leju, bet kolonnas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz 16 no kreisās uz labo pusi. Tabula kaut kā sadalīta taisnstūros ar izmēriem 1×4. Katrā vertikālā taisnstūrī ieraksta tās kolonnas numuru, kurā tas atrodas; katrā horizontālā taisnstūrī ieraksta tās rindiņas numuru, kurā tas atrodas. Pierādīt, ka visu ierakstīto numuru summa dalās ar 4.

3.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Uz tāfeles uzrakstīti 4 skaitļi. Andris vienu no tiem palielināja par 10%, otru – par 20%, trešo skaitli viņš samazināja par 10%, bet ceturto – par 20%.

Vai var gadīties, ka rezultātā Andris ieguva tos pašus 4 skaitļus, kas uz tāfeles atradās sākumā?

2. Vai var uz taisnes atlikt punktus A, B, C, D, E, F (varbūt citā secībā) tā, ka AB=1, BC=3, CD=5, DE=7, EF=9, FA=11?

3. Uz tāfeles sākotnēji uzrakstīti skaitļi 160 un 167. Atļauts izdarīt šādus pārveidojumus: ja uz tāfeles uzrakstīti divi skaitļi a un b, tad drīkst vai nu a aizstāt ar a-b, vai b aizstāt ar b-a. Vai iespējams panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos skaitļi 18 un 22?

4. Kāds ir mazākais saskaitāmo daudzums, kuru summa ir 2004 un katrs no tiem ir vai nu kāda naturāla skaitļa kvadrāts, vai kāda naturāla skaitļa kubs?

5. Andrim jāsadala 100 konfektes četrās kaudzēs (katrā kaudzē – vismaz viena konfekte). Pēc tam Pēteris norādīs uz divām kaudzēm, un Andris no vienas no tām varēs apēst tik daudz konfekšu, lai abās Pētera norādītajās kaudzēs paliktu vienādi konfekšu daudzumi.

Kādu lielāko daudzumu konfekšu Andris var sev nodrošināt?

6. Ja a – pozitīvs skaitlis, tad ar $\{a\}$ apzīmējam tā daļveida daļu. Piemēram, $\left\{2\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$; $\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$; {3}=0.

Atrodi mazāko pozitīvo skaitli a, kuram pastāv vienādība $\{a^2\}-\{a\}^2=\frac{1}{2004}$.

B grupa

1. Pierādīt, ka $2004\cdot2006^3-2005\cdot2003^3$ ir vesela skaitļa kubs.

2. Uz katras no deviņām kartītēm uzrakstīts naturāls skaitlis. Vismaz diviem no tiem pēdējie cipari ir dažādi. Pierādīt: var izvēlēties dažas kartītes (varbūt vienu pašu) tā, ka uz izvēlētajām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa dalās ar 10.

3. Vai regulāru sešstūri var sagriezt trīs daļās tā, lai no šīm daļām varētu salikt trijstūri, kam viens leņķis ir 60° liels, bet divu malu garumi attiecas kā 3:2? Saliekot daļas nedrīkst pārklāties.

4. Rindā kaut kādā secībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 100, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts vai nu mainīt vietām divus skaitļus, vai arī cikliski mainīt vietām trīs skaitļus (t.i., a novietot b vietā, b novietot c vietā un c novietot a vietā). Pierādīt: ar 50 gājieniem var panākt, lai visi 100 skaitļi būtu izkārtoti augošā secībā.

5. Desmit rūķīši rīko apspriedes. Viņi nolēmuši ievērot šādus noteikumus:

- katrā apspriedē jāpiedalās vismaz vienam rūķītim,
- nekādās divās apspriedēs dalībnieku sastāvs nedrīkst būt viens un tas pats,
- ja apspriede A notiek vēlāk nekā apspriede B, tad apspriedē A jāpiedalās vismaz vienam no tiem rūķīšiem , kas piedalījās apspriedē B,
- neviena apspriede (izņemot pirmo) nesākas, pirms nav beigusies iepriekšējā.

Kāds ir lielākais apspriežu skaits, ko rūķīši var sarīkot?

6. Tabula sastāv no 8×8 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi) tā, ka n-tās rindiņas skaitļu summa vienāda ar n-tās kolonnas skaitļu reizinājumu (n=1; 2; ...; 8)?

4.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Aija, Maija un Paija uz Ziemassvētkiem nosūtīja cita citai vairākas kartiņas. Visas nosūtītās kartiņas tika saņemtas. Aija kopā nosūtīja 6 kartiņas. Maija kopā saņēma 10 kartiņas. Paija saņēma tikpat kartiņas, cik nosūtīja.

Pierādiet, ka Maija un Paija viena otrai kopā nosūtīja vismaz 8 kartiņas.

2. Zināms, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam $a-3b=13$ un a dalās ar b. Kādi var būt a un b?

3. Plaknē novilktas 9 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs no tām neiet caur vienu punktu. Pierādiet, ka vismaz viens no apgabaliem, kuros šīs taisnes sadala plakni, ir trijstūris.

4. Uz 8 pēc ārējā izskata vienādiem atsvariem norādītas masas 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g. Zināms, ka septiņiem atsvariem to masas norādītas pareizi, bet viena atsvara masa ir par 1 g lielāka, nekā norādīts. Doti arī sviras svari; nekādu citu atsvaru nav. Kā ar 2 svēršanām noskaidrot, kura atsvara masa uzrādīta nepareizi?

5. Sabojātam pulkstenim leņķis starp tā stundu un minūšu rādītājiem nemainās, bet ciparnīca brīvi griežas ap centru. Pierādiet: ciparnīcu var tā pagriezt, ka pulkstenis rāda laiku starp 15^{00} un 16^{00}.

6. Dots, ka $3 \le x \le 4$ un $3 \le y \le 4$. Pierādīt, ka

$$(4-x)^2+(x-y)^2+(4-y)^2 \le 2\,.$$

B grupa

1. Tabula sastāv no 4×7 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu skaitlis 1, vai skaitlis 2. Vai var gadīties, ka gan katrā rindiņā, gan katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa dalās ar 5?

2. Dots, ka n – naturāls skaitlis, kas nav pirmskaitlis. Zināms, ka tā otrā lielākā dalītāja un trešā lielākā dalītāja summa ir 499. Kāds var būt n?

3. Skat. A grupas 3.uzdevumu, kurā jāpierāda, ka ir vismaz 6 trijstūri.

4. Ap apaļu galdu sēž 8 rūķīši, katram ir 9 zelta gabali. Ik minūti tieši viens rūķītis iedod vienu zelta gabalu savam kaimiņam pa labi. Pēc vairāk nekā 1000 minūtēm 1., 3., 5. un 7. rūķītim katram bija pa 18 zelta gabaliem.

Vai var gadīties, ka kāds rūķītis ne reizi nav devis zelta gabalu savam kaimiņam?

5. Doti 5 stienīši, katrs 1 m garš. Katru stienīti salauza 5 gabalos. Pierādīt: no iegūtajiem 25 gabaliem var izvēlēties trīs tādus, no kuriem kā no malām var izveidot trijstūri.

6. Kvadrāts sastāv no 8×8 kvadrātiskām rūtiņām. Tieši 8 rūtiņas nokrāsotas. Pierādīt: eksistē taisnstūris, kurā nav nevienas iekrāsotas rūtiņas un kura apkārtmērs vienāds ar 16 rūtiņas malu garumiem.

5.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitļi n un n^2 kopā satur visus ciparus, katru tieši vienu reizi?

2. Vai var pa apli izrakstīt 5 naturālus skaitļus tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu attiecība būtu pirmskaitlis? (Lielāko skaitli dalām ar mazāko).

3. Izdomājiet kaut vienu veidu, kā plaknē novietot 6 punktus, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

- ne uz vienas taisnes nav vairāk par 4 punktiem.
- ja A, B, C, D – jebkuri 4 no novietotajiem punktiem, tad nogriežņi AB un CD nekrustojas (tie drīkst daļēji uzklāties viens otram).

4. Uz 2005 kartiņām uzrakstīts pa skaitlim; starp tiem var būt arī vienādi. Ir zināms: lai kādas trīs kartiņas izvēlētos, uz tām uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais arī uzrakstīts uz kādas no 2005 kartiņām. Pierādiet, ka uz visām kartiņām uzrakstīts viens un tas pats skaitlis.

5. Kādu lielāko vērtību var pieņemt divu četrciparu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs, ja visi astoņi šo skaitļu pierakstā izmantotie cipari ir dažādi?

6. Rindā cits citam blakus ar seju pret skolotāju stāv 30 pirmklasnieki. Skolotājs komandē: "Pa labi!". Daļa pirmklasnieku pagriežas pa labi, daļa – pa kreisi. Pēc tam ik pēc sekundes katri divi pirmklasnieki, kas stāv ar seju viens pret otru, apgriežas. Pierādiet, ka kustība rindā kādreiz beigsies.

B grupa

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitļi n, n^2 un n^3 kopā satur visus ciparus, katru tieši vienu reizi?

2. Vai skaitļus 1; 2; 3; 4; 5 var tā apzīmēt ar burtiem a; b; c; d; e, ka pastāv vienādība

$$|(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a)|=|(a-c)(b-d)(c-e)(d-a)(e-b)| \text{ ?}$$

3. Izdomājiet, kā taisnstūri ar izmēriem 32 x 33 sagriezt 9 dažādos kvadrātos.

4. Karaļa dārgumu lāde aizslēgta ar 3 dažādām atslēgām. To apsargā 5 sargi; katru dienu darbā ierodas tikai 3 no tiem.

Kādu mazāko atslēgu daudzumu jāizgatavo un kā tās jāsadala starp sargiem, lai lādi noteikti varētu atslēgt neatkarīgi no tā, kuri 3 sargi ierodas darbā?

5. No 28 skaistuma konkursa dalībniecēm katra apskauž augstākais vienu citu. Pierādīt: var izvēlēties 10 skaistules tā, ka neviena no tām neapskauž nevienu citu izvēlēto.

6. Katrs klases skolēns atnāca uz sarīkojumu, brīdi tajā uzkavējās un aizgāja. Zināms, ka katrs zēns satika sarīkojumā visas meitenes. Pierādiet: vai nu bija tāds brīdis, kad vienlaicīgi visi zēni bija sarīkojumā, vai arī bija tāds brīdis, kad vienlaicīgi visas meitenes bija sarīkojumā.

6.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Visi veseli skaitļi no 0 līdz 9 ieskaitot uzrakstīti uz riņķa līnijas, katrs vienu reizi. Vai var gadīties, ka nekādu 3 pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nav lielāka par 15?
2. Trīs dažādiem naturāliem skaitļiem a, b, c piemīt īpašība: gan $a \cdot b$, gan $a \cdot c$, gan $b \cdot c$ ir naturālu skaitļu kvadrāti. Cik no skaitļiem a, b, c paši var būt naturālu skaitļu kvadrāti?
3. Trijstūrī ABC vienas mediānas garums ir 3 cm, bet otras mediānas garums ir 6 cm. Kādās robežās var mainīties ABC laukums?
4. Kvadrāts sastāv no 10x10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Parādiet, kā 13 rūtiņas var nokrāsot melnas, lai būtu spēkā īpašība: lai kā arī sadalītu kvadrātu divos taisnstūros, kas katrs sastāv no veselām rūtiņām, vismaz vienā taisnstūrī būs ne mazāk par 10 melnām rūtiņām.
5. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi a, b, c un d, ka $a + b + c + d = 2005$ un $a^2-b^2+c^2-d^2=2005$?
6. Atrast decimāldaļskaitļa $\frac{2005}{2^{2005}}$ trešo ciparu no beigām.

B grupa

1. Skat. A grupas 1.uzdevumu, ja neviena no apskatāmajām summām nedrīkst būt lielāka par 14.
2. Skaitli 180 jāsadala trīs naturālos saskaitāmajos, kas proporcionāli trim viensotram sekojošiem veseliem skaitļiem. Cik šādu sadalījumu var iegūt?
3. Vai taisnība, ka katram četrciparu skaitlim, kas nedalās ar 7, var izmainīt simtu ciparu tā, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 7?
4. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis n. No tā pieraksta ar vienu gājienu var izdzēst divus blakus stāvošus ciparus, kam ir dažāda paritāte (atlikušos ciparus pēc tam sabīda kopā). Zināms, ka, atkārtojot šādus gājienus, no n var iegūt gan skaitli 422, gan skaitli 664. Vai skaitļa n pierakstā var būt tikai viens četrinieks?
5. Vai A grupas 4.uzdevumā minēto var sasniegt, nokrāsojot melnas 12 rūtiņas?
6. Rindā stāv vairāki rūķīši. Katram galvā ir balta vai sarkana cepurīte (ir vismaz viena katras krāsas cepurīte). Ir zināms: ja starp rūķīšiem A un B stāv vai nu 10, vai 15 citi rūķīši, tad A un B ir vienādas krāsas cepurītes. Kāds ir lielākais iespējamais rūķīšu skaits rindā?